ある集合 X と関数 $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ が次を満たすとき (X, ρ) を距離空間という．

- $x = y \iff \rho(x, y) = 0$ for all $x, y \in X$
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ for all $x, y \in X$
- $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ for all $x, y, z \in X$

(X, ρ) を距離空間とする．各 $x \in X$, $r \in [0, \infty)$ について開球 $C_r(x) \subset X$ を

$$C_r(x) = \left\{ y \;\middle|\; \rho(x, y) < r \right\} \tag{1}$$

で定義し，

$$C = \left\{ C_r(x) \;\middle|\; x \in X, r \in [0, \infty) \right\} \tag{2}$$

$$\tau = \left\{ \bigcup_{c \in C'} c \;\middle|\; C' \subset C \right\} \tag{3}$$

とする．

$V_1, ..., V_n \in \tau$ について $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ が $V \in \tau$ を満たすことを証明する．τ の定義より，各 $i = 1, ..., n$ についてある $C_i \subset C$ が存在して $V_i = \bigcup_{c \in C_i} c$ である．任意の $x \in V$ と $i = 1, ..., n$ について，$x \in V_i$ よりある開球 $C_r(y) \in C_i$ が存在して $x \in C_r(y)$ である．このとき，実数 r_i を $0 < r_i \leq r - \rho(x, y)$ となるようにとると，$C_{r_i}(x) \subset C_r(y)$ より $C_{r_i}(x) \subset V_i$ となる．$r_1, ..., r_n$ の最小値を r_x とすると，$C_{r_x}(x) \subset V_i, \forall i = 1, ..., n$ より $C_{r_x}(x) \subset V$ であり，また $r_x > 0$ より $x \in C_{r_x}(x)$ である．ここで $C' = \left\{ C_{r_x}(x) \;\middle|\; x \in V \right\}$, $V' = \bigcup_{c \in C'} c$ とすると，$C_{r_x}(x) \subset V$ より $V' \subset V$, $x \in C_{r_x}(x)$ より $V \subset V'$ であるから $V = V'$．よって $V \in \tau$.