1 LGS Structure

Point de départ, un state-space comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} X(k+1) & = & AX(k) + BU(k) \\ Y(k) & = & CX(k) + dU(k) \end{array} \right. \tag{1}$$

et la fonction de transfert associée $H(z)$ définie par :

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + d \tag{2}$$

Par le changement de variable $z = \frac{1+s}{1-s}$, on obtient $F(s)$ dans le domaine continu, et (Φ, K, L, D) les matrices du state-space associé à $F(s)$ (c'est à dire tel que $F(s) = D + L(sI - \Phi)^{-1}K$)définies comme suit:

$$\begin{array}{l} \Phi = (I + A)^{-1}(A - I) \\ K = \sqrt{2}(I + A)^{-1}B \\ L = \sqrt{2}C(I + A)^{-1} \\ D = d - C(I + A)^{-1}B \end{array}$$

Ensuite on applique la JSS-transformation sur $F(s)$ pour construire Φ_{in} et K_{in} (voir section 2). On définit ensuite L_{in} en utilisant le fait que (Φ, K, L, D) est une réalisation équivalente à $(\Phi_{in}, K_{in}, L_{in}, D)$. En effet il existe une transformation T telle que

$$\Phi_{in} = T^{-1}\Phi T \tag{3}$$

$$K_{in} = T^{-1}K \tag{4}$$

$$L_{in} = LT \tag{5}$$

D'après les deux premièrs équations on déduit T qui permet de calculer L_{in}.

Une fois connu $(\Phi_{in}, K_{in}, L_{in}, D)$, on effectue l'inverse de la JSS-transformation pour obtenie $(A_{in}, B_{in}, C_{in}, d)$ définit ainsi :

$$\begin{array}{rcl} A_{in} & = & (I - \Phi_{in})(I + \Phi_{in})^{-1} \\ B_{in} & = & \frac{\sqrt{2}}{2}(I + A_{in})K_{in} \\ C_{in} & = & \frac{\sqrt{2}}{2}L_{in}(I + A_{in}) \\ d & = & D + C_{in}(I + A_{in})^{-1}B_{in} \end{array}$$

De plus on a

$$I - \Phi_{in} = T_1^{-1}T_2^{-1}\dots T_k^{-1}\dots T_{n-1}^{-1}\Psi_{in}$$

où

$$T_k = U(k+1, k+1, \gamma_k)U(k+1, k, -\alpha_k) \tag{6}$$

$$\Psi_{i,j} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i = j \\ \beta_k & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

$$U(k, l, x)_{i,j} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i = j \\ x & \text{si } i = k \text{ et } j = l \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \tag{7}$$

$$\beta_{k+1} = -\frac{\alpha_{k+1}}{s_k},\ s_k = 1 - \alpha_k \beta_k \text{ pour } k = 1, \ldots, n-2$$
$$\beta_1 = -\alpha_1,\ \ s_{n-1} = 1 + \alpha_n + \alpha_{n-1}\beta_{n-1},\ \ \gamma_k = s_k^{-1}$$

On peut écire l'inverse de Ψ de la façon suivante :

$$\Psi_{in}^{-1} = U(1, 2, -\beta_1) \ldots U(n-1, n, -\beta_{n-1})$$

Finalement on peut réécrire A:

$$\begin{aligned} A_{in} &= (I + \Phi_{in})(I - \Phi_{in})^{-1} \\ &= (I + \Phi_{in})\Psi_{in}^{-1} T_{n-1} T_{n-2} \ldots T_1 \\ &= \underbrace{(I + \Phi_{in})}_{A^{(N)}} \underbrace{U(1, 2, -\beta_1)}_{A^{(N-1)}} \ldots U(n-1, n, -\beta_{n-1}) \\ &\quad \times U(n, n, \gamma_{n-1}) U(n, n-1, -\alpha_{n-1}) \ldots \\ &\quad \times \ldots \underbrace{U(2, 2, \gamma_1)}_{A^{(2)}} \underbrace{U(2, 1, -\alpha_1)}_{A^{(1)}} \end{aligned} \tag{8}$$

On obtient donc

$$A_{in} = \prod_{k=1}^{N} A^{(k)} \qquad \text{avec} \ \ N = 3n - 1$$

Par conséquent, le state-space de départ peut se réécrire de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X^{(m)}(k) &=& A^{(m)} X^{(m-1)}(k), \ \ X^{(0)}(k) = X(k) \\ X(k+1) &=& X^{(N)}(k) + BU(k) \\ Y(k) &=& CX(k) + dU(k) \end{array} \right.$$

Soient $T_1, \ldots, T_N$, N variables intermédiaires définies par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} T_1(k+1) &=& A^{(1)} X(k) \\ T_2(k+1) &=& A^{(2)} T_1(k+1) \\ \ldots && \ldots \\ T_N(k+1) &=& A^{(N)} T_{N-1}(k+1) \end{array} \right.$$

On peut donc écrire la représentation SIF de ce système de la façon suivante :

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} I & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ -A_2 & I & & & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & -A_{N-1} & I & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ldots & -I & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} T_1(k+1) \\ T_2(k+1) \\ \vdots \\ T_N(k+1) \\ X(k+1) \\ Y(k) \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c|c} 0 & \dots & \dots & 0 & A_1 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & B \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & C & D \end{array}\right) \begin{pmatrix} T_1(k) \\ T_2(k) \\ \vdots \\ T_N(k) \\ X(k) \\ u(k) \end{pmatrix}$$

En notant

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ -A_2 & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -A_{N-1} & I \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-K = (0, 0, \dots, -I) \quad P = 0 \quad Q = B \tag{9}$$

$$-L = (0, 0, \dots, 0) \quad R = C \quad S = d \tag{10}$$

$$\tag{11}$$

On obtient

$$Z = \begin{pmatrix} J & M & N \\ -K & P & Q \\ -L & R & S \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c|c} I & 0 & & 0 & A_1 & 0 \\ -A_2 & I & & & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & -A_{N-1} & I & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & -I & 0 & B \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & C & D \end{array}\right) \tag{12}$$

2 JSS-transformation

On suppose avoir $F(s)$, fonction de transfert dans le domaine continue. $F(s)$ est de la forme

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{13}$$

où D et N sont deux polynômes en s. On décompose D en somme de deux polynômes E et O, composés des monômes pairs et impairs respectivement. On pose ensuite $Z = \frac{O}{E}$ si le degré de D est impair et $Z = \frac{E}{O}$ si le degré de D est pair. On détermine la forme en fracton continue de Z suivante :

$$Z = r_n s + \cfrac{1}{r_{n-1}s + \cfrac{1}{r_{n-2}s + \cfrac{1}{\ddots \frac{1}{r_1 s}}}} \tag{14}$$

Pour cela, posons $Z = \frac{A}{B}$ où $deg(A) = deg(B) + 1$. On décompose A en

$$A = LM_A + R_A \tag{15}$$

où LM_A est le monôme de plus haut degré de A (leading monomial) et R_A est le polynôme formé des autres monômes de A. Soient Q et R le quotient et le reste de la division de LM_A par B. Puisque $deg(A) = deg(B) + 1$, $Q = r_n s$, où r_n est une constante. On a alors :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{A}{B} = \frac{LM_A}{B} + \frac{R_A}{B} = Q + \frac{R}{B} + \frac{R_A}{B} && (16) \\ &= Q + \frac{R + R_A}{B} && (17) \\ &= r_n s + \frac{R + R_A}{B} && (18) \\ &= r_n s + \frac{1}{\frac{B}{R+R_A}} && (19) \end{aligned}$$

Dans le cas de $Z = \frac{O}{E}$, on a $deg(B) = deg(R+R_A)+1$, on peut donc répéter l'opération jusqu'à obtenir une décomposition complète.

Une fois la décomposition complète et les r_i tous obtenus, on calcule $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \sqrt{\frac{1}{r_k r_{k+1}}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 && (20) \\ \alpha_n &= \sqrt{\frac{1}{r_n}} && (21) \end{aligned}$$

Avec les α_i on construit Φ_{in} et K_{in} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_{in} &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 0 & \alpha_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\alpha_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix} && (22) \\ K_{in} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sqrt{2\alpha_n} \end{pmatrix} && (23) \end{aligned}$$

3 Structure LCW

A partir de (Φ, K, L, D) on définit $R_{ib} = (A_{ib}, B_{ib}, C_{ib}, d)$ de la façon suivante :

$$A_{ib} = (I+\Phi)(I-\Phi)^{-1}$$
$$B_{ib} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(I+A_{ib})K$$
$$C_{ib} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}L(I+A_{ib})$$

En notant $I-\Phi^2 = (I+\Phi)(I-\Phi) = (I-\Phi)(I+\Phi)$, on a

$$\begin{array}{rcl} A_{ib} & = & (I+\Phi)(I-\Phi)^{-1} = (I-\Phi)^{-1}(I+\Phi) \\ & = & 2(I-\Phi)^{-1} - I \;\; B_{ib} = \sqrt{2}(I-\Phi)^{-1}K \end{array}$$

La réalisation duale d'une réalisation d'un filtre $H(z)$ est également une réalisation de ce filtre. La réalisation duale (A_t, B_t, C_t, d) de R_{ib} est définit comme suit :

$$\begin{array}{rcl} A_t & = & A_{ib}^{\mathcal{T}} = (I+\Phi)^{\mathcal{T}}(I-\Phi)^{-\mathcal{T}} = (I-\Phi)^{-\mathcal{T}}(I+\Phi)^{\mathcal{T}} \\ B_t & = & C_{ib}^{\mathcal{T}} \\ C_t & = & B_{ib}^{\mathcal{T}} = \sqrt{2}K^{\mathcal{T}}(I-\Phi)^{-\mathcal{T}} \end{array}$$

On applique ensuite la transformation $T = (I-\Phi)^{\mathcal{T}}$ sur cette réalisation pour obtenir (A^*, B^*, C^*, d)

$$\begin{array}{rcl} A^* & = & (I-\Phi)^{-\mathcal{T}}(I+\Phi)^{\mathcal{T}} = A_{ib}^{\mathcal{T}} \\ B^* & = & (I-\Phi)^{-\mathcal{T}}C_{ib}^{\mathcal{T}} \\ C^* & = & \sqrt{2}K^{\mathcal{T}} \end{array}$$

On définit maintenant

$$\beta_{k+1} = -\alpha_{k+1}\gamma_k,\ \gamma_k = \frac{1}{1-\alpha_k\beta_k} \text{ pour } k = 1,\ldots,n-2$$
$$\beta_1 = -\alpha_1,\ \ \gamma_{n-1} = \frac{1}{1+\alpha_n+\alpha_{n-1}\beta_{n-1}}$$

et soit $U(i,j,x)$ la matrice définie comme en (7) et $T_1,\ldots,T_{n-1}$ définies comme en (6).

De plus on a

$$\begin{array}{rcl} (I-\Phi)^{\mathcal{T}} & = & \Gamma^{-1}T_{n-1}^{-1}\ldots T_2^{-1}T_1^{-1} \\ & = & \Gamma^{-1}U(n,n,\gamma_{n-1})U(n,n-1,\alpha_{n-1})\ldots U(2,2,\gamma_1)U(2,1,\alpha_1) \\ & = & \Gamma^{-1}A_{2(n-1)}A_{2(n-1)-1}\ldots A_2A_1 \end{array} \quad (24)$$

où

$$\Gamma_{i,j} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i=j \\ -\beta_k & \text{si } j=i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Γ^{-1} peut être décomposé comme suit:

$$\begin{array}{rcl} \Gamma^{-1} & = & U(1,2,\beta_1)U(2,3,\beta_2)\ldots U(k,k+1,\beta_k)\ldots U(n-1,n,\beta_{n-1}) \\ & = & A_{3(n-1)}A_{3(n-1)-1}\ldots A_{3(n-1)-k}\ldots A_{2(n-1)+1} \end{array} \quad (25)$$

D'après (24) et (25) on a :

$$
\begin{aligned}
(I-\Phi)^{\mathcal{T}} &= \Gamma^{-1}T_{n-1}^{-1}\dots T_2^{-1}T_1^{-1} \\
&= A_{3(n-1)}A_{3(n-1)-1}\dots A_m\dots A_2A_1 \\
&= \prod_{m=1}^{3(n-1)} A_m
\end{aligned} \tag{26}
$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
A^* &= 2(I-\Phi)^{\mathcal{T}} - I \\
&= 2\prod_{m=1}^{3(n-1)} A_m - I
\end{aligned}
$$

La réalisation (A^*, B^*, C^*, d) n'est généralement pas $l2$-échelonné, donc on applique la transformation $T_s = diag\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, on obtient ainsi $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, d)$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{A} &= T_s^{-1}A^*T_s = 2\textstyle\prod_{m=1}^{3(n-1)}\tilde{A}_m - I \\
\tilde{B} &= T_s^{-1}C_{ib}^{\mathcal{T}} \\
\tilde{C} &= \sqrt{2}s_nK^{\mathcal{T}}
\end{aligned}
$$

où $\tilde{A}_m = T_s^{-1}A_mT_s$, $\forall m$. Finalement, on obtient la représentation suivante sous forme de state-space :

$$
\left\{
\begin{aligned}
X^{(m)}(k) &= \tilde{A}_mX^{(m-1)}(k), \quad X^{(0)}(k) = 2X(k) \\
X(k+1) &= X^{(N)}(k) - X(k) + \tilde{B}U(k), \quad N = 3(n-1) \\
Y(k) &= \tilde{C}X(k) + dU(k)
\end{aligned}
\right.
$$

Soient $T_1, \dots, T_N$, N variables intermédiaires définies par :

$$
\left\{
\begin{aligned}
T_1(k+1) &= 2\tilde{A}_1X(k) \\
T_2(k+1) &= \tilde{A}_2T_1(k+1) \\
\dots &\quad \dots \\
T_N(k+1) &= \tilde{A}_NT_{N-1}(k+1)
\end{aligned}
\right.
$$

On peut donc écrire la représentation SIF de ce système de la façon suivante :

$$
\left(\begin{array}{cccc|c|c}
I & 0 & & 0 & 0 & 0 \\
-\tilde{A}_2 & I & & & 0 & 0 \\
 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
0 & & -\tilde{A}_{N-1} & I & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & -I & I & 0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} T_1(k+1) \\ T_2(k+1) \\ \vdots \\ T_N(k+1) \\ X(k+1) \\ Y(k) \end{pmatrix}
= \left(\begin{array}{cccc|c|c}
0 & \dots & \dots & 0 & 2\tilde{A}_1 & 0 \\
\vdots & \ddots & & \vdots & 0 & 0 \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & -I & B \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & C & D
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} T_1(k) \\ T_2(k) \\ \vdots \\ T_N(k) \\ X(k) \\ u(k) \end{pmatrix}
$$

En utilisant les mêmes notations que dans l'équation (12)

$$Z = \begin{pmatrix} J & M & N \\ -K & P & Q \\ -L & R & S \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c|c} I & 0 & & 0 & 2\tilde{A}_1 & 0 \\ -\tilde{A}_2 & I & & & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & -\tilde{A}_{N-1} & I & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & -I & -I & \tilde{B} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{C} & d \end{array}\right) \tag{27}$$