UV Automatique

Cours 8

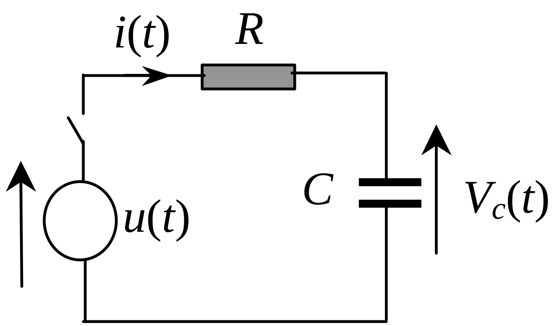
Introduction à la représentation d'état

ASI 3

Contenu

Introduction à la notion d'état

Exemple 1 : circuit RC



Entrée : $u(t)$

Sortie : $y(t) = i(t)$

Posons $x(t)=V_c(t)$

Modélisation du circuit RC

$$Ri(t)+x(t)=u(t)$$
$$x(t)=\frac{1}{C}\int i d\tau$$

$$\Rightarrow$$

$$RC\,\dot{x}(t)+x(t)=u(t)$$
$$i(t)=-\frac{1}{R}x(t)+\frac{1}{R}u(t)$$

$$\Rightarrow$$

$$\dot{x}(t)=-\frac{1}{RC}x(t)+\frac{1}{RC}u(t)$$
$$y(t)=-\frac{1}{R}x(t)+\frac{1}{R}u(t)$$

Le modèle est de la forme
$$\dot{x}(t)=ax(t)+bu(t) \qquad \text{(I)}$$
$$y(t)=cx(t)+du(t) \qquad \text{(II)}$$

- (I) : équation dynamique du 1er ordre fonction de $x(t)$
- (II) : relation statique reliant la sortie $y(t)$ et la variable $x(t)$

Pour établir une relation entre $y(t)$ et $u(t)$, on passe par la variable intermédiaire $x(t)$ (tension aux bornes du condensateur)

Introduction à la notion d'état : exemple 1

❑ Réponse à une entrée échelon

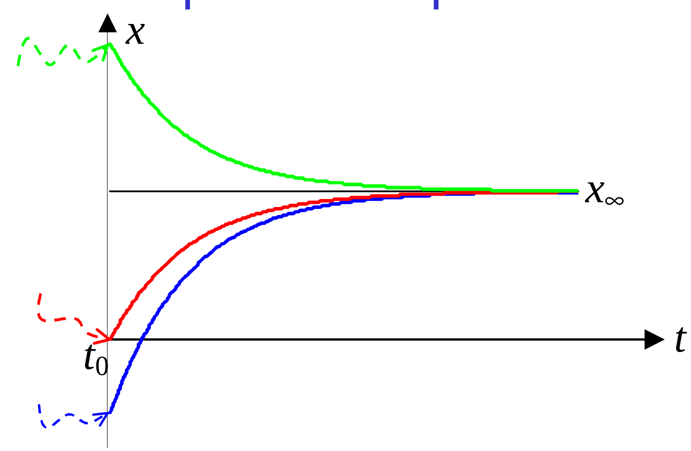
- A l'instant t_0, on ferme l'interrupteur $u(t) = U_0\Gamma(t) \quad t > t_0$
- Tension initiale aux bornes du condensateur : $x(t_0) = V_c(t_0)$

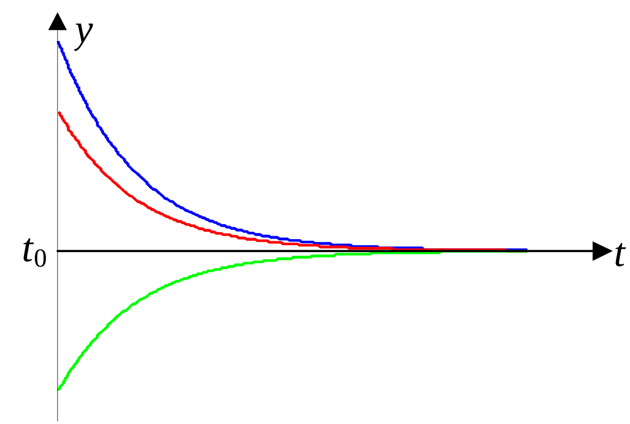
Solution des équations

$$x(t) = e^{-\frac{t-t_0}{RC}} x(t_0) + \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{RC}}\right) U_0$$

$$y(t) = -\frac{1}{R} x(t) + \frac{1}{R} u(t)$$

Réponse temporelle





Introduction à la notion d'état : exemple 1

Remarques

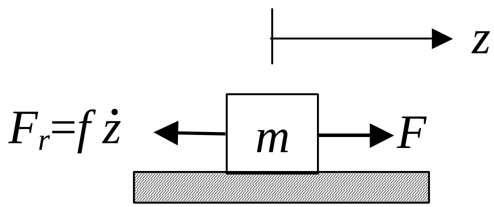
- La connaissance de $x(t)$ (et donc de $y(t)$) sur l'intervalle de temps $[t_0, t]$ ne dépend que de la condition initiale $x(t_0)$ et des équations (I) et (II)
- La connaissance de x sur l'intervalle de temps $]-\infty, t_0]$ n'est pas nécessaire pour déterminer x sur $[t_0, t]$
- Si à l'instant t_1, on applique un nouveau signal d'entrée $u_1(t)$, l'évolution de x (t) et y (t) dans l'intervalle $[t_1, t]$ ne dépendra que de $x(t_1)$ et de $u_1(t)$

Définitions

- $\boldsymbol{x(t)}$ est appelé l'**état** du circuit électrique
- L'état d'un système à un instant t représente la **mémoire minimale** du passé nécessaire à la détermination du futur
- Les équations (I) et (II) définissent entièrement le comportement dynamique du circuit électrique

Introduction à la notion d'état : exemple 2

- Exemple 2 : système mécanique (masse en translation)



Entrée : $u(t) = F$

Sortie : $y(t) = z(t)$

- Modélisation dynamique : équation différentielle et FT

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$$

$$F = m\ddot{z} + f\dot{z} \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{Z(s)}{F(s)} = \frac{1}{s(ms+f)}$$

Système d'ordre 2

- Représentation d'état

Etats du système $\quad x_1(t) = z(t)$

$x_2(t) = \dot{z}(t)$

$$\dot{x}_1(t) = \dot{z}(t) = x_2(t) \quad (1)$$

$$F = m\ddot{z} + f\dot{z} \quad \Rightarrow \quad F = m\dot{x}_2(t) + f x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{F}{m} - \frac{f}{m} x_2(t) \quad (2)$$

(1) et (2) sous forme matricielle

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Introduction à la notion d'état : exemple 2

Représentation d'état

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} F \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ y(t) = CX + Du \end{cases}$$

avec $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{f}{m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Remarques

- $X(t)$ est appelé vecteur d'état du système
- Par rapport à la fonction de transfert, le modèle d'état donne des informations sur la représentation interne du système (ici $\dot{z}$) qui n'apparaissent pas explicitement dans la fonction de transfert
- Le système d'ordre 2 est converti dans la représentation d'état en une équation différentielle matricielle d'ordre 1 et une équation statique matricielle

Représentation d'état d'un système

- Généralisation à un système multi-entrée, multi-sortie

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU & \text{(I)} \\ Y = CX + DU & \text{(II)} \end{cases}$$

(I) : équation d'état ou équation de commande

(II) : équation de sortie ou équation d'observation

- Variables
  - $X(t)$: vecteur d'état

    $X(t) \in \mathbb{R}^n$ (n : nombre d'états) $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$

  - $U(t)$: vecteur des entrées

    $U(t) \in \mathbb{R}^m$ (m : nombre d'entrées) $U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$

  - $Y(t)$: vecteur des sorties

    $Y(t) \in \mathbb{R}^p$ (p : nombre de sorties) $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$

Représentation d'état d'un système

- Matrices de la représentation d'état
  - A : matrice d'état

    $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matrice carrée)
  - B : matrice d'entrée

    $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$
  - C : matrice de sortie

    $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$
  - D : matrice de couplage

    $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ Souvent $D = 0$

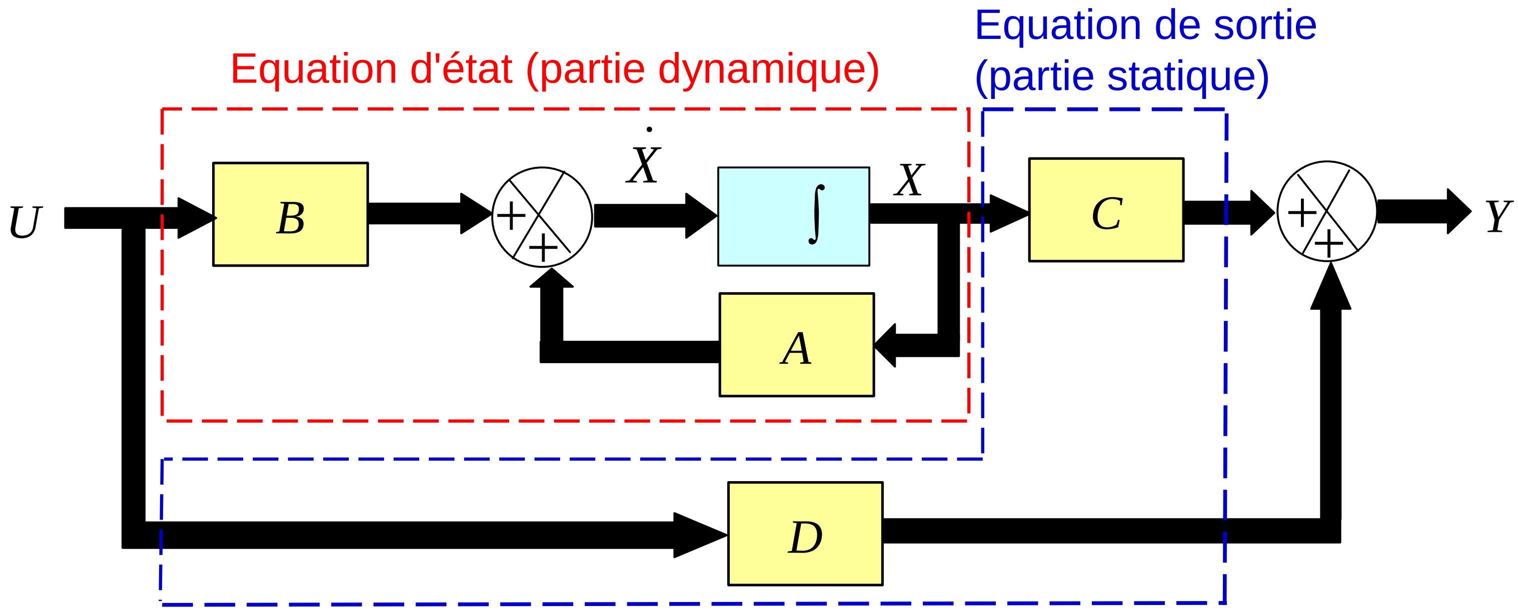
- Remarques
  - (I) : l'équation d'état est une équation dynamique d'ordre 1
  - (II) : l'équation de sortie est une équation statique linéaire reliant les sorties aux entrées et aux états

⬇

Toute la dynamique interne du système est résumée dans l'équation d'état, notamment dans la matrice A. En effet, si U=0, on a le système libre caractérisé par $\dot{X} = AX$.

Les valeurs propres de A sont les pôles du système

Représentation schématique du modèle d'état



❑ Interprétation du schéma

- Equation d'état = vue interne du système
- A représente les interactions dynamiques entre les différents éléments internes du système
- B représente l'action des entrées sur l'évolution dynamique du système
- C indique les capteurs permettent d'obtenir les sorties
- D indique le couplage direct entre les entrées et les sorties

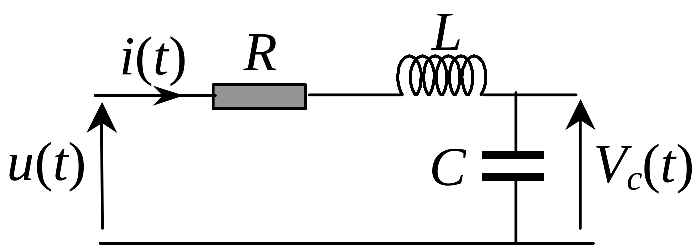
Représentations d'état équivalentes

- Unicité de la représentation d'état ?

La représentation d'état d'un système est-elle unique ? Non !!

Le modèle d'état obtenu dépend du choix des états. On peut associer à un même système, plusieurs vecteurs d'état conduisant ainsi à différentes représentations d'états équivalentes

- Exemple : circuit RLC



Lois de l'électricité

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + V_c(t) = u(t)$$

$$V_c(t) = \frac{q(t)}{C}$$

Charge : $q(t) = \int_0^t i(\tau)d\tau$

Flux : $\phi(t) = Li(t)$

Entrée : $u(t)$

Sorties : $Y(t) = \begin{bmatrix} V_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$

Etats : énergie stockée dans le circuit

$x_1(t) = q(t)$: charge du condensateur

$x_2(t) = \phi(t)$: flux dans l'inductance

Représentations d'état équivalentes

Circuit RLC

$$V_c(t) = \frac{1}{C} q(t) \quad (a) \qquad \phi(t) = Li(t) \Longrightarrow i(t) = \frac{1}{L}\phi(t) \quad (b)$$

$$q(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau \Longrightarrow \dot{q}(t) = i(t) = \frac{1}{L}\phi(t) \quad (c)$$

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + V_c(t) = u(t) \Longrightarrow \frac{R}{L}\phi(t) + \dot{\phi}(t) + \frac{1}{C}q(t) = u(t) \quad (d)$$

Modèle d'état

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX + Du \end{cases}$$

avec $X(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix}$

(c) et (d) $\Longrightarrow$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -R/L \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(a) et (b) $\Longrightarrow$ $C = \begin{bmatrix} 1/C & 0 \\ 0 & 1/L \end{bmatrix}, \quad D = 0$

Remarques

- Pour avoir les sorties du système à partir des états, il faut disposer de capteurs permettant de mesurer le flux et la charge
- N'ayant pas ces capteurs, changeons de variables d'état

Représentations d'état équivalentes

Circuit RLC : autre modèle d'état

Nouveaux états : $X_T(t) = \begin{bmatrix} V_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$

$$V_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau \;\Rightarrow\; \dot{V}_c(t) = \frac{1}{C}i(t)$$

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + V_c(t) = u(t) \;\Rightarrow\; \frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{L}V_c(t) - \frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}u(t)$$

Nouveau modèle d'état

$$\begin{cases} \dot{X}_T = A_T X_T + B_T u \\ Y = C_T X_T + D_T u \end{cases}$$

avec

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix}, \quad B_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$$

$$C_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_T = 0$$

- Est-il possible d'établir une relation entre la réalisation (A, B, C, D) et la réalisation (A_T, B_T, C_T, D_T) ?

Représentations d'état équivalentes

Changement de variables

$$X_T(t) = \begin{bmatrix} V_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(t)/C \\ \phi(t)/L \end{bmatrix} \Rightarrow X_T(t) = \begin{bmatrix} 1/C & 0 \\ 0 & 1/L \end{bmatrix} X(t) \quad \text{avec} \quad X(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix}$$

Matrice de transformation T $\quad X_T(t) = T^{-1}X(t) \quad$ avec $\quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1/C & 0 \\ 0 & 1/L \end{bmatrix}$

$$\dot{X}_T = T^{-1}\dot{X} \Rightarrow \dot{X}_T = T^{-1}(AX + Bu) \Rightarrow \dot{X}_T = T^{-1}ATX_T + T^{-1}Bu$$

$$Y = CX + Du \Rightarrow Y = CTX_T + Du$$

$$\dot{X}_T = \begin{bmatrix} 1/C & 0 \\ 0 & 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} X_T + \begin{bmatrix} 1/C & 0 \\ 0 & 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\dot{X}_T = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} X_T + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u$$

On retrouve le résultat précédent

$$Y = \begin{bmatrix} 1/C & 0 \\ 0 & 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} X_T + 0.u \Rightarrow Y = I_2 X_T$$

Représentations d'état équivalentes

Cas général

Soit $\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases}$ $X(t) \in \mathbb{R}^n$ une représentation d'état d'un système

- Changement de vecteur d'état

  Transformation linéaire : $X(t) = TX_T(t)$

  T : matrice de transformation $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$

  T est une matrice carrée d'ordre n régulière

- Représentation d'état équivalente

  $\begin{cases} \dot{X}_T = A_T X_T + B_T U \\ Y = C_T X_T + D_T U \end{cases}$ avec $A_T = T^{-1}AT$ $C_T = CT$ $B_T = T^{-1}B$ $D_T = D$

- Remarque
  - Les matrices A et A_T sont semblables (A et A_T ont les mêmes valeurs propres) ➔ la dynamique du système est préservée

Choix des variables d'état

Préliminaires et définitions

- L'état d'un système à l'instant t_0 est un n-uplet $X(t_0)$ d'un espace *E* dont la connaissance associée à celle de l'entrée $u(t)$ dans l'intervalle $[t_0, t]$ permet de connaître la sortie $y(t)$.
- *E* est appelé espace d'état. *E* est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.
- Le nombre minimal d'état correspond à l'ordre du système
- Le concept d'état découle donc d'une suite de grandeurs physiques (courant, vitesse, …) ou non suffisantes pour caractériser le fonctionnement d'un système. Le choix des états est laissé au libre arbitre du concepteur
- Par une transformation linéaire, il est possible de passer d'une représentation d'état à une autre équivalente
- Un système admet donc une infinité de représentation d'état
- Par la transformation linéaire $X(t) = TX_T(t)$, on peut avoir des variables d'état qui physiquement ne correspondent à rien

Choix des variables d'état

Quelques éléments pour la sélection des variables d'état

On choisit souvent comme variables d'états, des éléments du système susceptibles d'être des réservoirs d'énergie

Elément	Energie	Etat
Inductance	$\frac{1}{2}Li^2$	i
Condensateur	$\frac{1}{2}CV_c^2$	V_c
Masse m	$\frac{1}{2}mv^2$	$v = dx/dt$ x
Ressort k	$\frac{1}{2}kx^2$	x

Elément	Energie	Etat
Moment d'inertie J	$\frac{1}{2}m\omega^2$	$\omega = d\theta/dt$ θ
Colonne de fluide de pression p	$\frac{1}{2}(V/\beta)p^2$	p
Colonne de fluide de hauteur h	$\frac{1}{2}\rho A h^2$	h

Linéarisation du modèle d'état

Un peu d'humour

- Définition d'un automaticien heureux : c'est celui qui travaille sur des systèmes linéaires !!
- Mais le monde réel est non-linéaire. Comment faire ? Prolonger le bonheur par linéarisation

Modèle d'état d'un système non-linéaire stationnaire

- Equation d'état

$$\dot{X}_1 = f_1(X_1(t),\cdots,X_n(t),U_1(t),\cdots,U_m(t))$$
$$\vdots$$
$$\dot{X}_n = f_n(X_1(t),\cdots,X_n(t),U_1(t),\cdots,U_m(t))$$

- Equation de sortie

$$Y_1 = g_1(X_1(t),\cdots,X_n(t),U_1(t),\cdots,U_m(t))$$
$$\vdots$$
$$Y_p = g_n(X_1(t),\cdots,X_n(t),U_1(t),\cdots,U_m(t))$$

- Forme matricielle

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X(t),U(t)) \\ Y = g(X(t),U(t)) \end{cases}$$

avec $X(t) \in \mathbb{R}^n \quad U(t) \in \mathbb{R}^m \quad Y(t) \in \mathbb{R}^p$

f et g sont des champs de fonctions non-linéaires

La courbe $\dot{X} = f(X(t),U(t),X(t_0))$ est une trajectoire dans l'espace d'état

Linéarisation du modèle d'état

Point nominal ou point de fonctionnement

Soit $\bar{U}$, une entrée nominale et soit $\bar{X}$ l'état correspondant càd

$$\dot{\bar{X}} = f(\bar{X}(t), \bar{U}(t))$$

$(\bar{X}(t), \bar{U}(t))$ défini une trajectoire dans l'espace d'état qui peut se réduire à un point de fonctionnement $(\bar{X}, \bar{U})$

Soit $\bar{Y}$ la sortie correspondante $\bar{Y}(t) = g(\bar{X}(t), \bar{U}(t))$

Perturbations

- Soient des perturbations faibles $u(t)$ affectant $\bar{U}$ $\Rightarrow$ $U(t) = \bar{U}(t) + u(t)$
- Ces perturbations affectent le vecteur d'état $\Rightarrow$ $X(t) = \bar{X}(t) + x(t)$

$$\dot{X}(t) = \dot{\bar{X}}(t) + \dot{x}(t) \Rightarrow \dot{X} = f(X(t), U(t)) = f(\bar{X}(t) + x(t), \bar{U}(t) + u(t))$$

- Les perturbations affectent les sorties $Y(t) = \bar{Y}(t) + y(t)$

$$Y(t) = g(X(t), U(t)) = g(\bar{X}(t) + x(t), \bar{U}(t) + u(t))$$

Linéarisation du modèle d'état

Linéarisation autour du point $(\bar{X}, \bar{U})$

On réalise un développement de Taylor au 1er ordre de f et g

- Equations d'état

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = f_1(\bar{X} + x(t), \bar{U} + u(t)) \approx f_1(\bar{X}, \bar{U}) + \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial X_1}\right|_{\bar{X},\bar{U}} x_1 + \cdots + \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial X_n}\right|_{\bar{X},\bar{U}} x_n + \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial U_1}\right|_{\bar{X},\bar{U}} u_1 + \cdots + \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial U_m}\right|_{\bar{X},\bar{U}} u_m \\ \vdots \\ \dot{X}_n = f_n(\bar{X} + x(t), \bar{U} + u(t)) \approx f_n(\bar{X}, \bar{U}) + \left.\dfrac{\partial f_n}{\partial X_1}\right|_{\bar{X},\bar{U}} x_1 + \cdots + \left.\dfrac{\partial f_n}{\partial X_n}\right|_{\bar{X},\bar{U}} x_n + \left.\dfrac{\partial f_n}{\partial U_1}\right|_{\bar{X},\bar{U}} u_1 + \cdots + \left.\dfrac{\partial f_n}{\partial U_m}\right|_{\bar{X},\bar{U}} u_m \end{cases}$$

- Equations de sortie

$$\begin{cases} Y_1 = g_1(\bar{X} + x(t), \bar{U} + u(t)) \approx g_1(\bar{X}, \bar{U}) + \left.\dfrac{\partial g_1}{\partial X_1}\right|_{\bar{X},\bar{U}} x_1 + \cdots + \left.\dfrac{\partial g_1}{\partial X_n}\right|_{\bar{X},\bar{U}} x_n + \left.\dfrac{\partial g_1}{\partial U_1}\right|_{\bar{X},\bar{U}} u_1 + \cdots + \left.\dfrac{\partial g_1}{\partial U_m}\right|_{\bar{X},\bar{U}} u_m \\ \vdots \\ Y_p = g_p(\bar{X} + x(t), \bar{U} + u(t)) \approx g_p(\bar{X}, \bar{U}) + \left.\dfrac{\partial g_p}{\partial X_1}\right|_{\bar{X},\bar{U}} x_1 + \cdots + \left.\dfrac{\partial g_p}{\partial X_n}\right|_{\bar{X},\bar{U}} x_n + \left.\dfrac{\partial g_p}{\partial U_1}\right|_{\bar{X},\bar{U}} u_1 + \cdots + \left.\dfrac{\partial g_p}{\partial U_m}\right|_{\bar{X},\bar{U}} u_m \end{cases}$$

Linéarisation du modèle d'état

- Forme matricielle

Modèle d'état linéarisé

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \dot{\overline{X}}(t) + \dot{x}(t) \approx f(\overline{X},\overline{U}) + F_X\, x(t) + F_U\, u(t) \\ Y(t) = \overline{Y}(t) + y(t) \approx g(\overline{X},\overline{U}) + G_X\, x(t) + G_U\, u(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = F_X\, x(t) + F_U\, u(t) \\ y(t) = G_X\, x(t) + G_U\, u(t) \end{cases}$$

$$F_X = \left.\frac{\partial f}{\partial X^T}\right|_{\overline{X},\overline{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial X_n} \end{bmatrix}_{\overline{X},\overline{U}} \qquad F_U = \left.\frac{\partial f}{\partial U^T}\right|_{\overline{X},\overline{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial U_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial U_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial U_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial U_n} \end{bmatrix}_{\overline{X},\overline{U}}$$

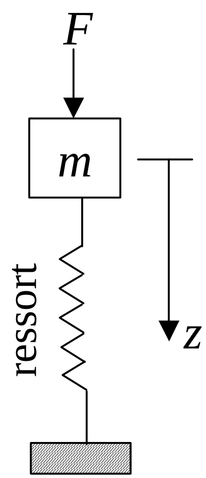
$$G_X = \left.\frac{\partial g}{\partial X^T}\right|_{\overline{X},\overline{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial X_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial X_n} \end{bmatrix}_{\overline{X},\overline{U}} \qquad G_U = \left.\frac{\partial g}{\partial U^T}\right|_{\overline{X},\overline{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial U_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial U_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial U_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial U_m} \end{bmatrix}_{\overline{X},\overline{U}}$$

F_X, F_U, G_X et G_U sont les matrices jacobiennes des dérivées partielles de f et g respectivement par rapport à X et U et évaluées au point $(\overline{X},\overline{U})$

Matrices du modèle : $A = F_X\,, \quad B = F_U\,, \quad C = G_X\,, \quad D = G_U$

Linéarisation d'un modèle d'état

- Exemple : ressort à comportement non-linéaire



Equation différentielle

$$m\ddot{z} = F + k_1 z + k_2 z^3$$

Modèle d'état

- Entrée $u(t) = F$
- Sortie $y(t) = z(t)$
- Etats du système $x_1(t) = z(t)$ $x_2(t) = \dot{z}(t)$
- Modèle non-linéaire

$$x_1(t) = z(t) \Rightarrow \dot{x}_1(t) = \dot{z}(t) = x_2(t)$$

$$m\ddot{z} = k_1 z + k_2 z^3 + F \Rightarrow \dot{x}_2(t) = \frac{k_1}{m} x_1 + \frac{k_2}{m} x_1^3 + \frac{F}{m}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = f\left(x_1(t), x_2(t), u(t)\right) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \frac{k_1}{m} x_1(t) + \frac{k_2}{m} x_1(t)^3 + \frac{u(t)}{m} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = h(x_1(t), x_2(t), u(t)) = x_1(t)$$

Linéarisation d'un modèle d'état

Exemple

- Détermination du point de fonctionnement $(\bar{X}, \bar{U})$

On choisit comme point de fonctionnement, un point stationnaire c'est-à-dire tel que $\dot{\bar{X}} = f(\bar{X}(t), \bar{U}(t)) = 0$

$$f\left(\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \bar{u}(t)\right) = 0 \Longrightarrow \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \frac{k_1}{m}\bar{x}_1 + \frac{k_2}{m}\bar{x}_1^3 + \frac{\bar{u}}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De plus, on prendra $\bar{u} = 0$. On a alors

$$\bar{x}_2 = 0$$

$$\frac{k_1}{m}\bar{x}_1 + \frac{k_2}{m}\bar{x}_1^3 = 0 \Longrightarrow \bar{x}_1 = 0 \text{ ou } \bar{x}_1 = \pm\sqrt{-k_1/k_2}$$

Points de fonctionnement $(\bar{X}, \bar{U})$: $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0\right)$ ou $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{-k_1/k_2} \end{bmatrix}, 0\right)$

Linéarisation d'un modèle d'état : exemple

- Matrices

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{X},\bar{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (k_1 + 3k_2 x_1^2)/m & 0 \end{bmatrix}_{\bar{X},\bar{U}} \qquad C = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{X},\bar{U}} = [1 \quad 0]$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\bar{X},\bar{U}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial u} \end{bmatrix}_{\bar{X},\bar{U}} = 0$$

Seule la matrice de commande A change selon les points de fonctionnement

- Premier point : $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \right)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1/m & 0 \end{bmatrix}$$

- Deuxième point : $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{-k_1/k_2} \end{bmatrix}, 0 \right)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2k_1/m & 0 \end{bmatrix}$$