LifLF – Théorie des langages formels

Sylvain Brandel

2016 – 2017

sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

CM 4

DÉTERMINISATION

Elimination du non-déterminisme

- <u>Définition</u>
  - 2 automates finis (déterministes ou non) sont <u>équivalents</u> ssi L(M) = L(M').

- <u>Théorème</u>

  Pour tout automate <u>non</u> déterministe, il existe un automate déterministe équivalent, et il existe un algorithme pour le calculer

  Cet algorithme est appelé déterminisation d'un automate.

Elimination du non-déterminisme
Preuve

- Soit $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ un automate <u>non</u> déterministe.
- Problème : $M' = (K', \Sigma, \delta', s', F')$? (M' déterministe)
- Démarche :
  - Méthode pour construire M’
  - Montrer
    - M’ déterministe
    - M’ équivalent à M

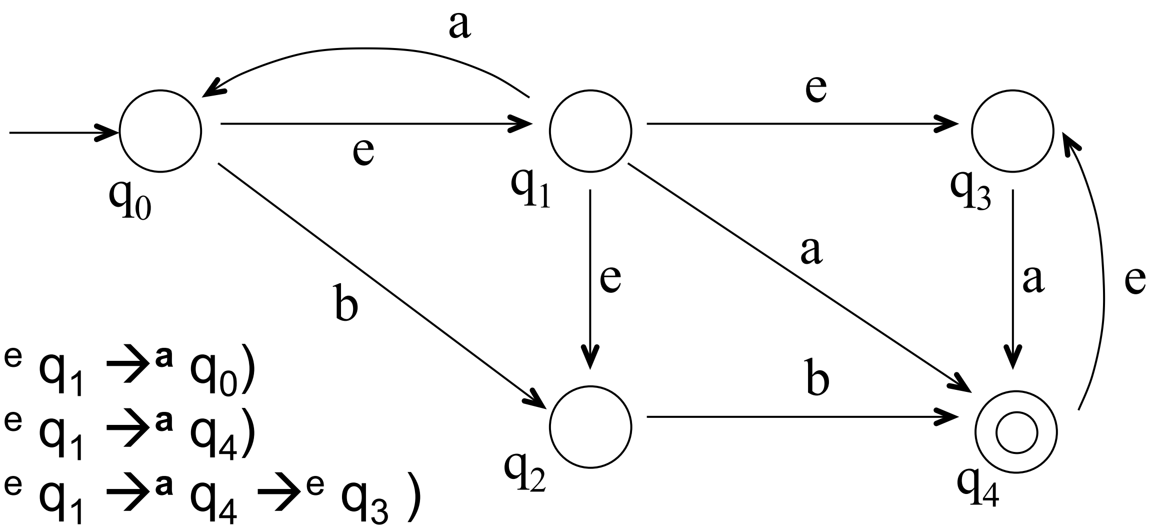
Elimination du non-déterminisme

Preuve

- L'idée est la suivante :
  - Pour toute lettre σ de Σ, on considère l'ensemble des états qu'on peut atteindre en lisant σ.
  - On rassemble ces états et on considère des états étiquetés par des parties de K (P (K))
  - L'état initial de M' est l'ensemble des états atteignables en ne lisant aucune lettre.
  - Les états finaux de M' sont les parties (atteignables) de P (K) contenant au moins un état final (de M).

Elimination du non-déterminisme
Preuve

- Exemple



$q_0 \xrightarrow{a}$ q_0 ($q_0 \xrightarrow{e} q_1 \xrightarrow{a} q_0$)
q_4 ($q_0 \xrightarrow{e} q_1 \xrightarrow{a} q_4$)
q_3 ($q_0 \xrightarrow{e} q_1 \xrightarrow{a} q_4 \xrightarrow{e} q_3$)
q_1 ($q_0 \xrightarrow{e} q_1 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{e} q_1$)
q_2 ($q_0 \xrightarrow{e} q_1 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{e} q_1 \xrightarrow{e} q_2$)

$q_0 \xrightarrow{b}$ q_2 ($q_0 \xrightarrow{b} q_2$)
q_4 ($q_0 \xrightarrow{e} q_1 \xrightarrow{e} q_2 \xrightarrow{b} q_4$)
q_3 ($q_0 \xrightarrow{e} q_1 \xrightarrow{e} q_2 \xrightarrow{b} q_4 \xrightarrow{e} q_3$)

état initial : $\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

Elimination du non-déterminisme
Preuve

- On introduit la notion de ε-clôture (pour prendre en compte les ε-transitions) :

Soit $q \in K$, on note $E(q)$ l'ensemble des états de M atteignables sans lire aucune lettre :

$$E(q) = \{p \in K : (q, e) \vdash_M^* (p, e)\}$$

(c-à-d $E(q)$ est la clôture de $\{q\}$ par la relation binaire $\{(p, r) \mid (p, e, r) \in \Delta\}$)

- <u>Construction de E(q)</u>

$E(q) := \{q\}$
<u>tant que</u> il existe une transition $(p, e, r) \in \Delta$
avec $p \in E(q)$ et $r \notin E(q)$
<u>faire</u> $E(q) := E(q) \cup \{r\}$

Elimination du non-déterminisme

Preuve

- Donc $M' = (K', \Sigma, \delta', s', F')$

avec $K' = P(K)$

$s' = E(s)$

$F' = \{Q \subset K : Q \cap F \neq \emptyset\}$

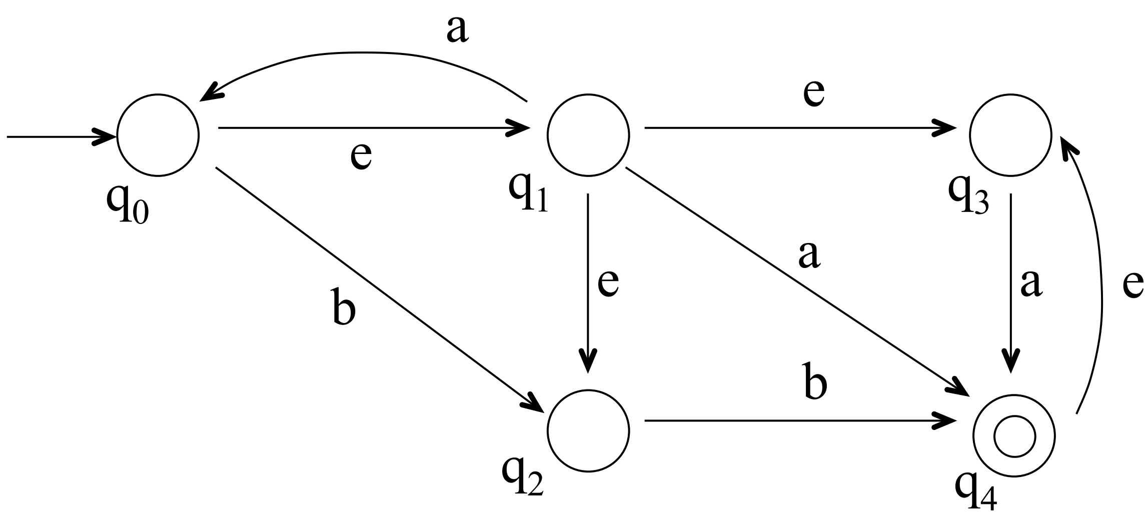
$\delta' = P(K) \times \Sigma \rightarrow P(K)$

$\forall\ Q \subset K,\ \forall\ a \in \Sigma,$

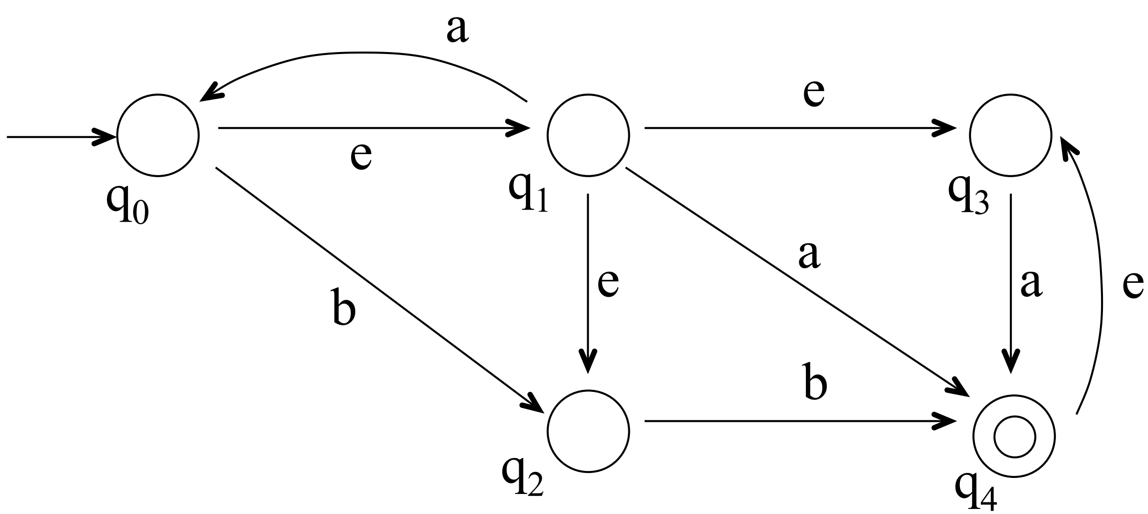
$\delta'(Q, a) = \cup\ \{E(p) \mid \exists\ q \in Q : (q, a, p) \in \Delta\}$

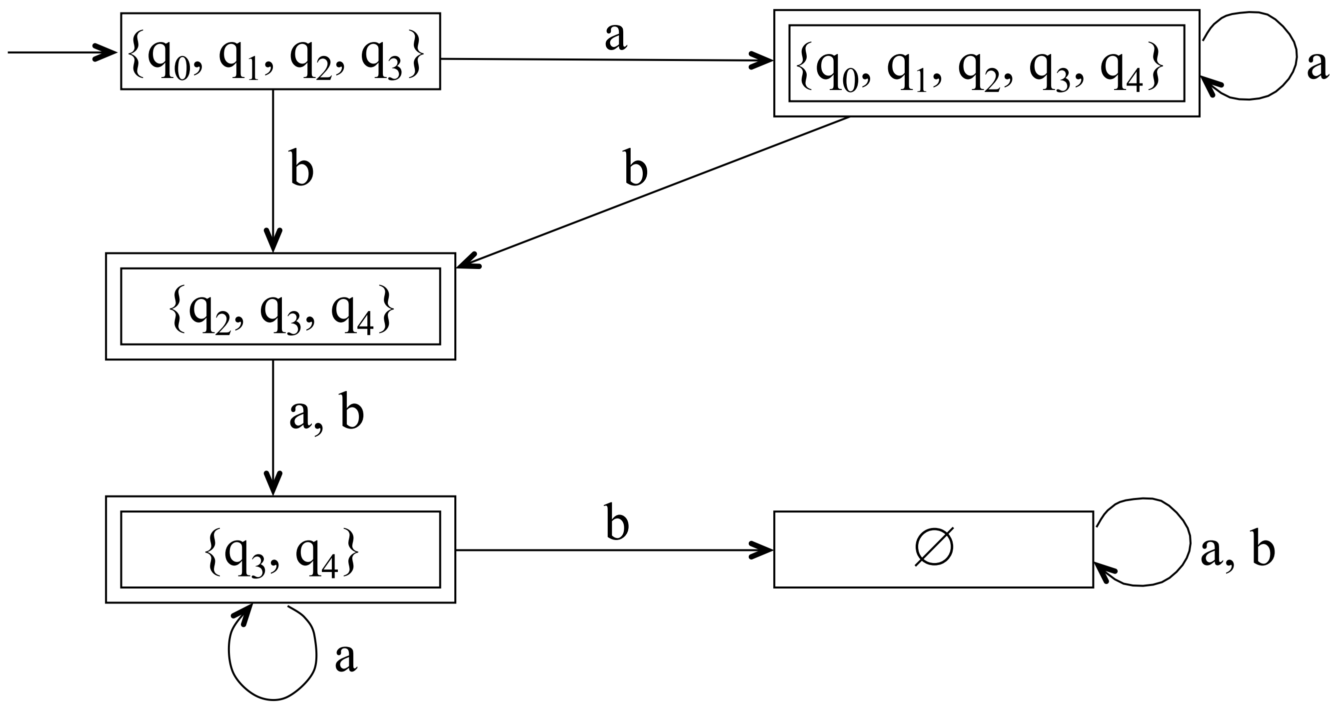
$\delta'(Q, a)$: ensemble de tous les états (de M) dans lesquels M peut aller en lisant a (y compris e)

Elimination du non-déterminisme
Exemple



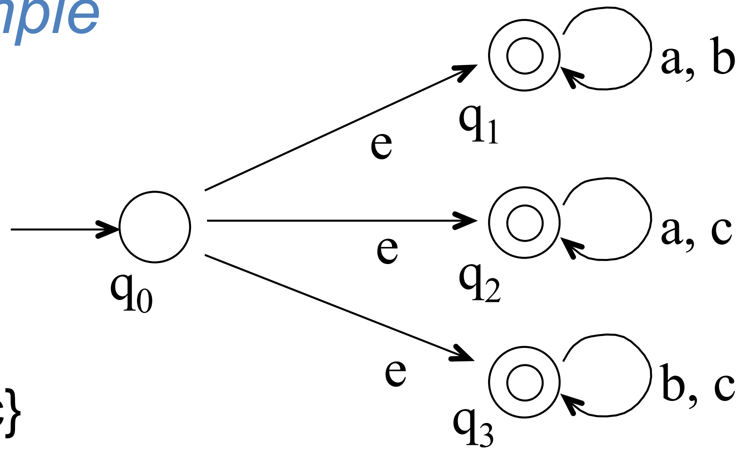
Elimination du non-déterminisme
Exemple





Elimination du non-déterminisme

Autre exemple

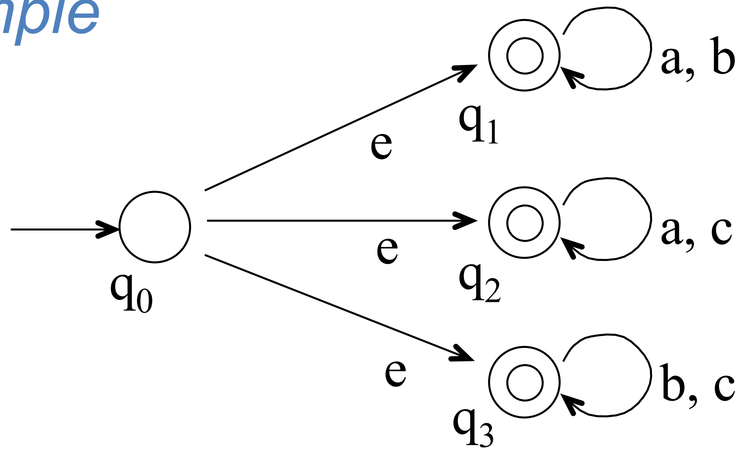


$\Sigma = \{a, b, c\}$

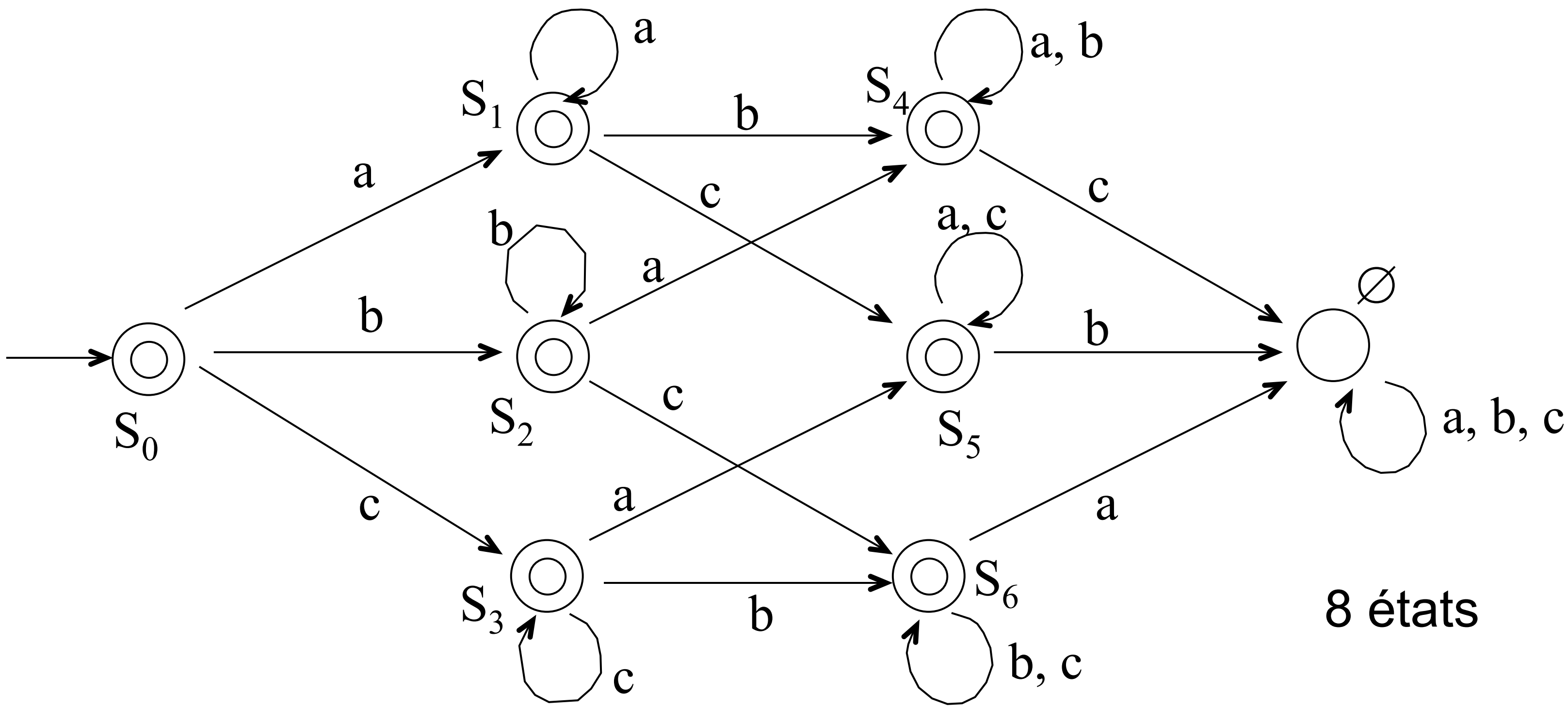
$L(M) = (a \cup b)^* \cup (a \cup c)^* \cup (b \cup c)^*$

Elimination du non-déterminisme

Autre exemple



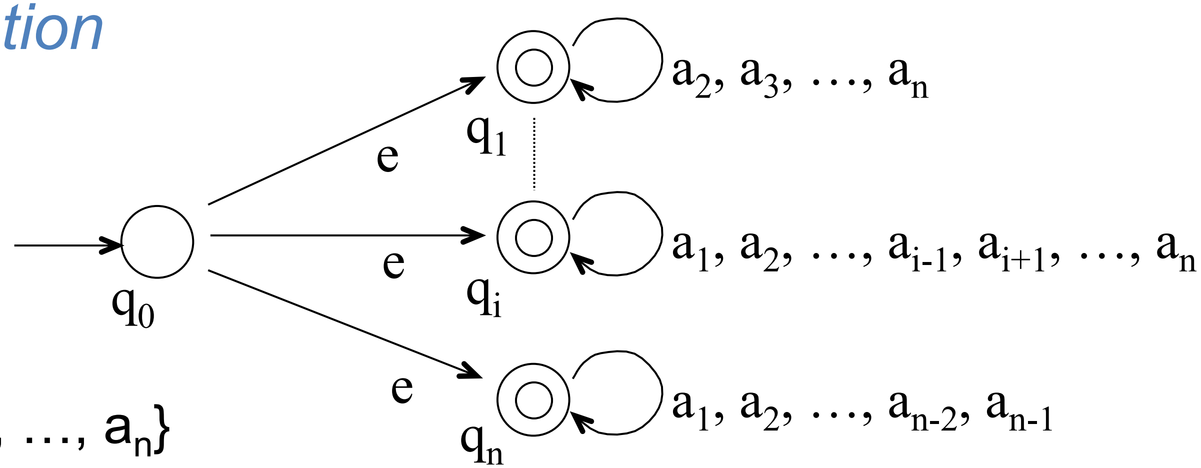
4 états



8 états

Elimination du non-déterminisme

Généralisation



$\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

$\Sigma_1 = \Sigma - \{a_1\}$

…

$\Sigma_i = \Sigma - \{a_i\}$

$\rightarrow L(M) = \cup_{i=1}^{n} \Sigma_i^*$