LifLF – Théorie des langages formels
Sylvain Brandel
2016 – 2017
sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

CM 9

AUTOMATES À PILE

Automates à pile

- <u>Définition</u>

  Un <u>automate à pile</u> est un sextuplet

  $$M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F) \text{ où :}$$

  – K est un ensemble fini d'états,

  – Σ est un ensemble fini de symboles d'entrée appelé alphabet,

  – Γ est un ensemble fini de symboles de la pile,

  – $s \in K$ est l'état initial,

  – $F \subseteq K$ est l'ensemble des états finaux,

  – Δ est un sous-ensemble fini de

  $$\mathbf{(}\ K \times (\Sigma \cup \{e\}) \times (\Gamma \cup \{e\})\ \mathbf{)} \times \mathbf{(}\ K \times (\Gamma \cup \{e\})\ \mathbf{)}$$

  appelé fonction de transition.

Automates à pile

- Une transition $((p, a, A), (q, B)) \in \Delta$ où :
  - p est l'état courant,
  - a est le symbole d'entrée courant,
  - A est le symbole sommet de la pile,
  - q est le nouvel état,
  - B est le nouveau symbole en sommet de pile,

a pour effet :

(1) de passer de l'état p à l'état q,

(2) d'avancer la tête de lecture après a,

(3) de dépiler A du sommet de la pile,

(4) d'empiler B sur la pile.

Automates à pile

- <u>Définition</u>

  Soit $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ un automate à pile. Une <u>configuration</u> de M est définie par un triplet

  $$(q_i, w, \alpha) \in K \times \Sigma^* \times \Gamma^* \text{ où :}$$

  - q_i est l'état courant de M,
  - w est la partie de la chaîne restant à analyser,
  - α est le contenu de la pile.

- <u>Définition</u>

  Soient (q_i, u, α) et (q_j, v, β) deux configurations d'un automate à pile $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$. On dit que (q_i, u, α) <u>conduit à</u> (q_j, v, β) <u>en une étape</u>

  ssi $\exists\ \sigma \in (\Sigma \cup \{e\}), \exists\ A, B \in (\Gamma \cup \{e\})$ tels que :

  $$u = \sigma v \text{ et } \alpha = \alpha'A \text{ et } \beta = \beta'B \text{ et } ((q_i, \sigma, A), (q_j, B)) \in \Delta.$$

  On note $(q_i, u, \alpha) \vdash_M (q_j, v, \beta)$.

Automates à pile

- Définition

  La relation $\vdash_M^*$ est la fermeture réflexive transitive de $\vdash_M$.

- Définition

  Soit $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ un automate à pile. Une chaîne $w \in \Sigma^*$ est acceptée par M

  ssi $(s, w, e) \vdash_M^* (f, e, e)$ avec $f \in F$.

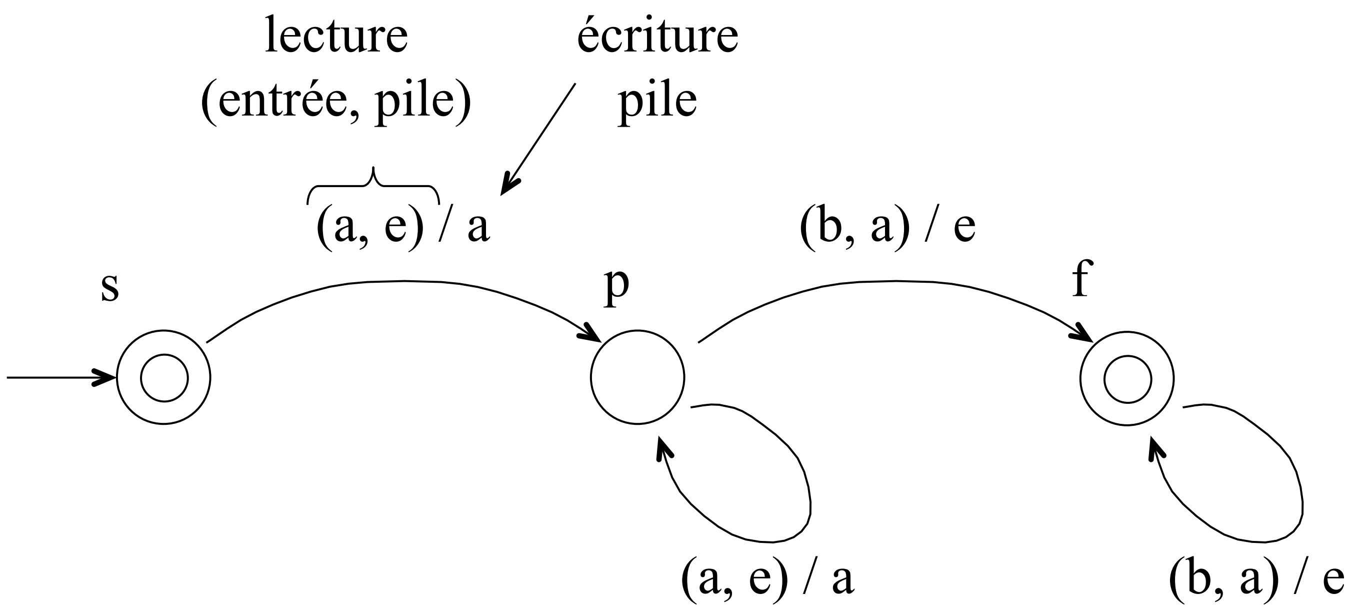
- Définition

  Le langage accepté par M, noté L(M), est l'ensemble des chaînes acceptées par M.

Automates à pile

- Soit l'automate à pile M = (K, Σ, Γ, Δ, s, F) avec :
  - K = {s, p, f}
  - Σ = {a, b}
  - Γ = {a, b}
  - F = {s, f}

  Δ = { ((s, a, e), (p, a)),
  ((p, a, e), (p, a)),
  ((p, b, a), (f, e)),
  ((f, b, a), (f, e)) }



Automates à pile

- Un automate à pile est déterministe s'il y a au plus une transition applicable pour tout triplet de la forme

  (État courant, symbole d'entrée, sommet de pile).

Automates à pile et grammaires algébriques

- <u>Théorème</u>

  La classe des langages acceptés par les automates à pile est égale à la classe des langages engendrés par les grammaires algébriques.

- <u>Définition</u>

  Un automate à pile est dit <u>simple</u> ssi quelle que soit la transition $((p, a, \alpha), (q, \beta)) \in \Delta$, on a :

  $\alpha \in \Gamma$ (sauf pour p = S où on ne dépile rien) et $|\beta| \leq 2$

- <u>Proposition</u>

  On peut transformer tout automate à pile en un automate simple équivalent.