LifLF – Théorie des langages formels

Sylvain Brandel

2016 – 2017

sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

CM 1

RAPPELS MATHÉMATIQUES

Terminologie ensembliste
Ensembles

- Définition
  - Par extension : $\Sigma = \{a, b, c\}$
  - Par intension : $P = \{x \in Z \mid \exists\, y \in Z \,;\, x = 2y\}$
- Opérations ensemblistes
  - Appartient : $x \in E$, $x \notin E$
  - Ensemble vide : $\forall\, x \in E_1$, $x \notin \varnothing$
  - Inclusion : $E_1 \subset E_2$, $E_1 \not\subset E_2$
    $E_1 \subset E_2$ si $\forall\, x : (x \in E_1 \Rightarrow x \in E_2)$
  - Ensemble des parties de E : $P(E) = \{E_1 \mid E_1 \subset E\}$
  - Intersection : $E_1 \cap E_2 = \{x \mid x \in E_1 \text{ et } x \in E_2\}$
  - Union : $E_1 \cup E_2 = \{x \mid x \in E_1 \text{ ou } x \in E_2\}$
  - Complémentarité : $C_E^{E1} = \{x \in E \mid x \notin E_1\}$
    (ou $\neg E_1$ lorsque E est sous entendu)
  - Différence : $E \setminus E_1 = \{x \in E \mid x \notin E_1\}$
  - Produit cartésien : $E_1 \times E_2 = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2\}$

Terminologie ensembliste
Relations

- Binaires : $R \in P(E_1 \times E_2)$, R est un ensemble de couples.
- n-aire : $R \in P(E_1 \times E_2 \times \ldots E_n)$
- Relations binaires
  - R réflexive $\Leftrightarrow \forall x : x \, R \, x$
  - R symétrique $\Leftrightarrow \forall x, y : x \, R \, y \Rightarrow y \, R \, x$
  - R antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x, y : x \, R \, y$ et $y \, R \, x \Rightarrow x = y$

    $\Leftrightarrow \forall x, y : x \, R \, y$ et $x \neq y \Rightarrow (y, x) \notin R$
  - R transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z : x \, R \, y$ et $y \, R \, z \Rightarrow x \, R \, z$

  - Une relation réflexive, symétrique et transitive c'est … ?
  - Une relation réflexive, antisymétrique et transitive c'est … ?

Terminologie ensembliste

Stabilité en clôture

- Soient :
  - E un ensemble
  - R une relation n-aire sur E ($R \subset E^n$)
  - E_1 est une partie de E
- E_1 est dite <u>stable</u> par R ou <u>close</u> par R ssi
  - $\forall\ x_1 \in E_1, x_2 \in E_1, \ldots, x_{n-1} \in E_1$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R$

    $\Rightarrow x_n \in E_1$
- Plus simple à voir pour R binaire
- Si E_1 n'est pas stable par R, il existe un <u>plus petit</u> sous ensemble F de E tel que $E_1 \subset F$ et F stable par R.

  $\Rightarrow$ On dit que F est la <u>clôture</u> de E_1 par R.
- Soit b une relation sur D, c'est-à-dire $b \subset D^2$
  - On appelle <u>fermeture transitive</u> de b la plus petite relation binaire T telle que $b \subset T$ et T transitive.

Fonctions – applications – bijections – cardinal

- Une <u>fonction</u> f de E_1 vers E_2 est une relation de E_1 vers E_2 telle que

  $\forall$ x $\in E_1$, il existe <u>au plus</u> un élément y $\in E_2$ tel que x f y
- On appelle ce y l'image de x par f : y = f(x)
- Le sous-ensemble de E_1 des éléments ayant des images par f s'appelle le <u>domaine</u> de f.

- <u>Composition</u> de fonctions : o

  $f \circ g(x) = f(g(x))$ $\quad E_1 \rightarrow (g) \rightarrow E_2 \rightarrow (f) \rightarrow E_3$

Fonctions – applications – bijections – cardinal

- Une <u>application</u> f de E_1 vers E_2 est une fonction telle que dom f = E_1

- Une application f est <u>injective</u>

  si $\forall\ x_1, x_2 \in E_1, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- Une application f est <u>surjective</u>

  si $\forall\ y \in E_2$, il existe <u>au moins</u> un élément x de E_1 tel que $f(x) = y$.

- Une <u>bijection</u> est une application injective <u>et</u> surjective. (Ou $f(E_1) = E_2$.)

Fonctions – applications – bijections – cardinal

- Deux ensembles sont <u>équipotents</u> ou <u>ont même cardinal</u>
  ssi il existe une bijection de l'un vers l'autre.

- Un ensemble est <u>fini</u> s'il est équipotent à {1, 2, … n}
  pour tout entier n
- Un ensemble <u>infini</u> est un ensemble non fini

- On dit qu'un ensemble est <u>infini dénombrable</u> s'il est équipotent à N.
- S'il n'existe pas de bijection entre X et une partie de N, alors on dit que X est <u>infini non dénombrable</u>.

- Il existe des ensembles infinis non dénombrables.