LifLF – Théorie des langages formels

Sylvain Brandel

2016 – 2017

sylvain.brandel@univ-lyon1.fr

CM 5

CARACTÉRISATION

Lien avec les expressions rationnelles
Stabilité

- Propriété de stabilité des langages reconnus par des automates finis.

- <u>Théorème</u>

  La classe des langages acceptés par les automates finis est stable par :

  - *Union*
  - *Concaténation*
  - *Kleene star* $\quad\downarrow$ *ordre de la démonstration*
  - *Complément*
  - *Intersection*

- Preuve constructive
  – Construction de l'automate pour chaque opération

Lien avec les expressions rationnelles
Stabilité

- <u>Union</u>

  $L_1 = L(M_1) \quad (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1) \quad \rightarrow$ Même Σ

  $L_2 = L(M_2) \quad (K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2) \quad \rightarrow$ Hyp. $K_1 \cap K_2 = \varnothing$

Posons s tel que $s \notin K_1$ et $s \notin K_2$.

$\rightarrow M_\cup : (\{s\} \cup K_1 \cup K_2, \Sigma, \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(s, e, s_1), (s, e, s_2)\}, s, F_1 \cup F_2)$

$$w \in L(M_\cup) \Leftrightarrow (s, w) \vdash_M (s_1, w) \vdash_M^* (f_1, e) \quad (f_1 \in F_1) \quad \leftarrow L_1$$

<u>ou</u>

$$(s, w) \vdash_M (s_2, w) \vdash_M^* (f_2, e) \quad (f_2 \in F_2) \quad \leftarrow L_2$$

$$\Leftrightarrow w \in L_1 \cup L_2$$

Lien avec les expressions rationnelles
Stabilité

- Concaténation

  $L_1 = L(M_1)$ $(K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$ → Même Σ

  $L_2 = L(M_2)$ $(K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2)$ → Hyp. $K_1 \cap K_2 = \emptyset$

  → $M_c : (K_1 \cup K_2, \Sigma, \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(f_i, e, s_2) \mid f_i \in F_1\}, s_1, F_2)$

Lien avec les expressions rationnelles
Stabilité

- Etoile de Kleene

  $L_1 = L(M_1)$ $(K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$

  $\rightarrow M_K : (K_1 \cup \{s\}, \Sigma, \Delta_1 \cup \{(s, e, s_1)\} \cup \{(f_i, e, s_1) \mid f_i \in F_1\}, s, F_1 \cup \{s\})$

Lien avec les expressions rationnelles
Stabilité

- <u>Complément</u>

  $L_1 = L(M_1)$ $(K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$

  $\rightarrow M_{\neg} : (K_1, \Sigma, \Delta_1, s, \neg F_1)$ avec $\neg F_1 = K_1 - F_1$

  Attention M_1 doit être déterministe

Lien avec les expressions rationnelles

Stabilité

- <u>Intersection</u>

  $L_1 = L(M_1)$ $\quad (K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1)$ $\quad \rightarrow$ Même Σ

  $L_2 = L(M_2)$ $\quad (K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2)$ $\quad \rightarrow$ Hyp. $K_1 \cap K_2 = \varnothing$

- Deux méthodes :
  - $L(M_1) \cap L(M_2) = \overline{\overline{L(M_1)} \cup \overline{L(M_2)}}$
  - Automate produit
    - $M_\cap$: ($K_1 \times K_2, \Sigma,$

      $\{((p_1,p_2), \sigma, (q_1,q_2)) \mid (p_1, \sigma, q_1) \in \Delta_1$ et $(p_2, \sigma, q_2) \in \Delta_2\}$,

      $(s_1,s_2), F_1 \times F_2)$
    - Quadratique en le nombre d'états

Lien avec les expressions rationnelles
Inclusion des classes de langages

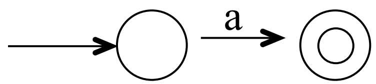
- <u>Théorème</u>

  La classe des langages acceptés par les automates finis contient les langages rationnels.

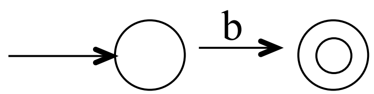
- <u>Exemple</u>

  $(ab \cup aba)^*$

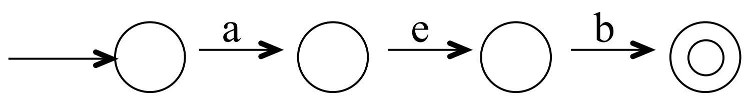
a



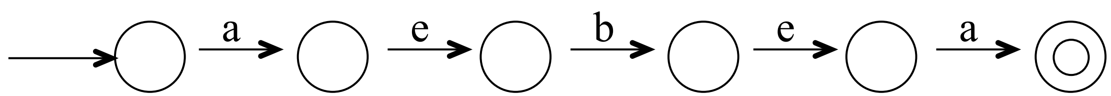
b



ab



aba



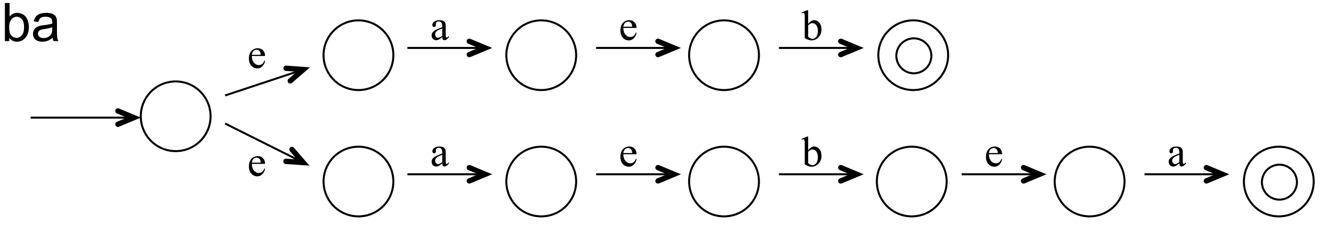
Lien avec les expressions rationnelles

Inclusion des classes de langages

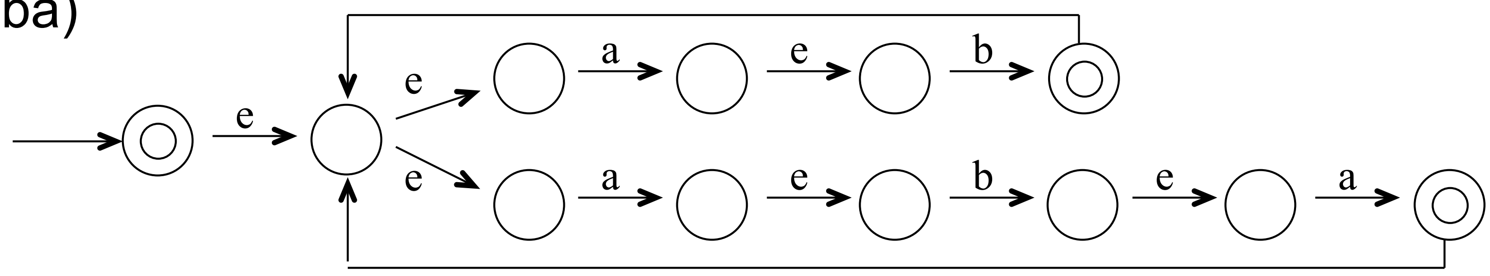
- <u>Exemple</u>

  $(ab \cup aba)^*$

ab ∪ aba



$(ab \cup aba)^*$



Lien avec les expressions rationnelles
Caractérisation des langages rationnels

- Théorème

  Un langage est rationnel ssi il est accepté par un automate fini.

- Preuve

  On suppose qu'on a numéroté (ordonné) les états.

  Soit $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ un automate fini (déterministe ou non).

  $$K = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\},\ s = q_1$$

  Le langage reconnu par M est la réunion de tous les langages reconnus en parcourant tous les chemins possibles dans le graphe (en faisant attention aux boucles).

  (Cela revient à dire que à chaque chemin allant de s à f ($\in F$), on associe le langage trouvé.)

Lien avec les expressions rationnelles

Caractérisation des langages rationnels

- On pose R(i, j, k) = l'ensemble des mots obtenus par lecture de l'automate M
  - en partant de l'état q_i,
  - en arrivant dans l'état q_j (avec le mot vide),
  - en ne passant que par des états dont le numéro est inférieur ou égal à k.

- Autrement dit : $R(i, j, k) = \{w \mid (q_i, w) \vdash_M^* (q_j, e)$ sans passer par des états dont le numéro est supérieur à $k\}$

- On a : $R(i, j, n) = \{w \mid (q_i, w) \vdash_M^* (q_j, e)\}$

- et : $L(M) = \bigcup_{i \mid q_i \in F} R(1, i, n)$

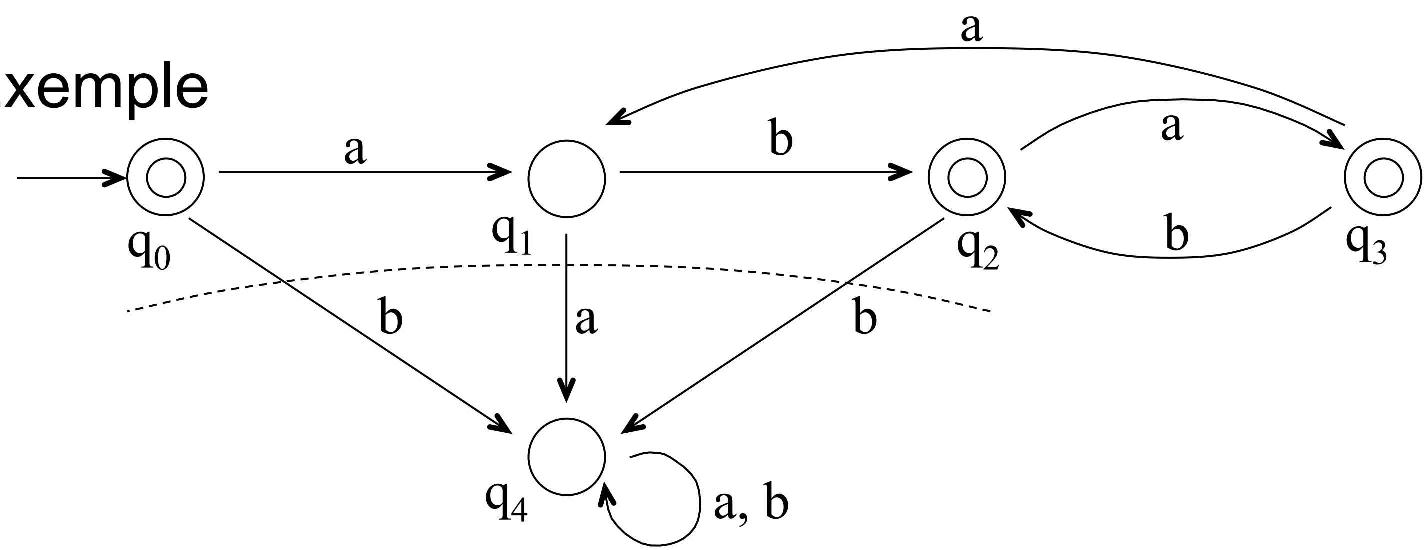
Lien avec les expressions rationnelles
Caractérisation des langages rationnels

- R(i, j, k) est un langage rationnel dont on peut calculer l'expression rationnelle par récurrence sur k.

- Preuve

$$R(i, j, k) = R(i, j, k-1) \cup R(i, k, k-1) \,.\, (R(k, k, k-1))^{*} \,.\, R(k, j, k-1)$$

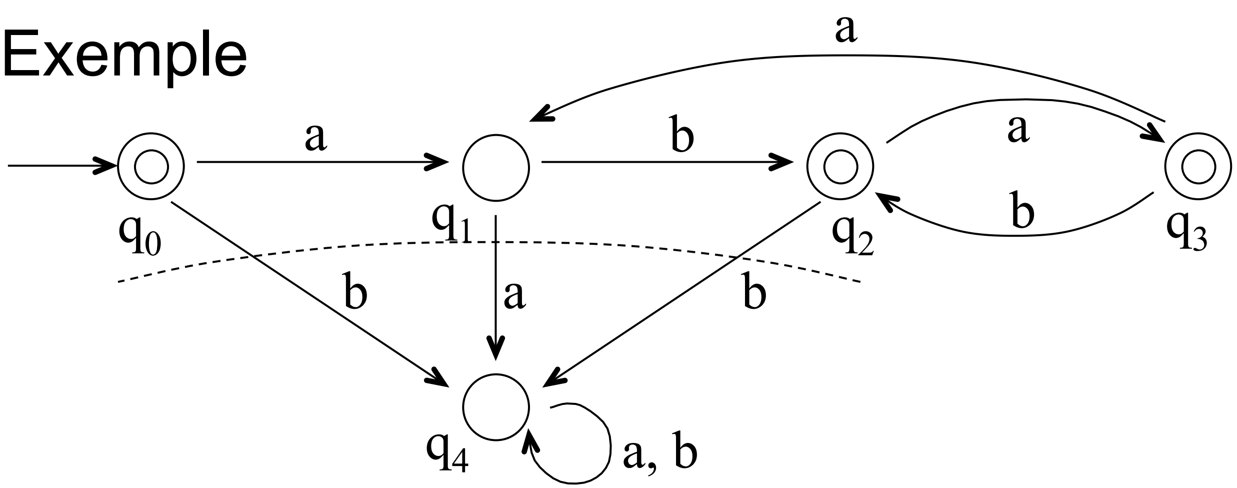
- Exemple

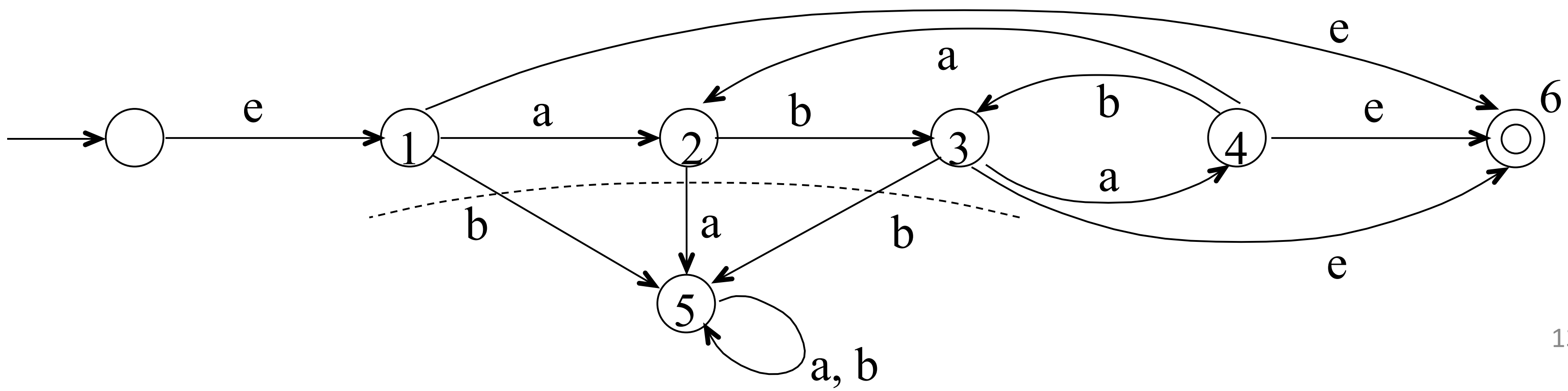


Lien avec les expressions rationnelles

Caractérisation des langages rationnels

- Pour simplifier on « arrange » le graphe
  - Un seul état final
  - Pas de retour de f vers le graphe ni du graphe vers l'état initial
- Exemple





Lien avec les expressions rationnelles
Caractérisation des langages rationnels

- Exemple
  - $R(i, j, 0)$ → étiquettes sur les flèches.
  - Principe : calculer $R(1, 6, 6)$

$R(1, 6, 6) = R(1, 6, 5) \cup R(1, 6, 5)\, R(6, 6, 5)^{*}\, R(6, 6, 5)$

$= R(1, 6, 4) \cup R(1, 5, 4)\, R(5, 5, 4)^{*}\, R(5, 6, 4) \cup \ldots \cup \ldots$

⇒ Fastidieux, donc on calcule les $R(i, j, k)$ de proche en proche.

→ On supprime q_1 (ce qui revient à calculer $R(i, j, 1)$)

→ On supprime q_2 (ce qui revient à calculer $R(i, j, 2)$)

…