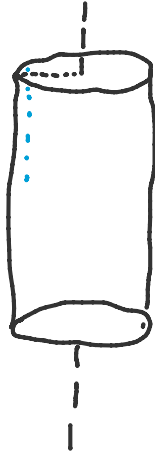


Zadanie 1Obliczyć momenty bezwładności jednorodnych brył o masie m :

- pręta o promieniu R i wysokości L względem jego osi symetrii,
- pręta o promieniu R i długości L względem osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez środek masy,
- cienkiej płyty w kształcie trójkąta równobocznego o boku a względem osi prostopadłej do płyty i przechodzącej przez środek masy.

Odpowiedź: a) $I = \frac{mR^2}{2}$, b) $I = \frac{mL^2}{12} + \frac{mR^2}{4}$, c) $I = \frac{1}{12}ma^2$

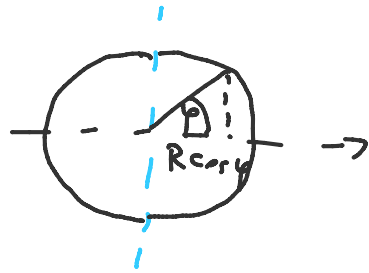
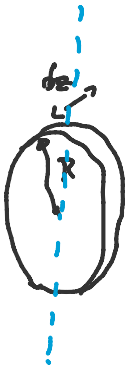
a)



$$I = \int r^2 dm = \rho \int r^2 dV = \left\{ \begin{array}{l} V = \pi r^2 \cdot h \\ dV = 2\pi r h dr \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$= 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{(\pi R^2 h \cdot \rho) \cdot R^2}{2} = \frac{MR^2}{2}$$

b)

weźmy walcowy plasterzek o grubości dz 

$$\Rightarrow I = \rho \int r^2 dV = \rho \cdot \int R^2 \cos^2 \varphi \cdot R dR \cdot d\varphi dz =$$

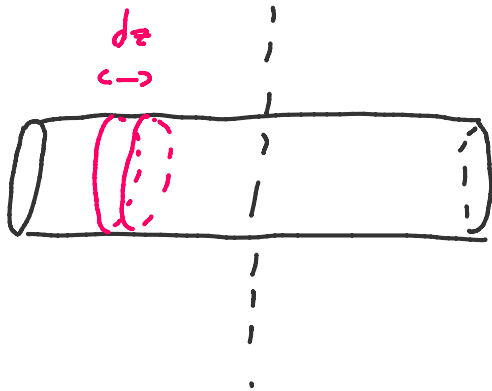
$$= \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R R^3 \cos^2 \varphi dR d\varphi dz = \rho \frac{R^4}{4} dz \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi}_{2 \cdot I = 2\pi} =$$

$$= \rho \frac{\pi R^2 dz}{2} \cdot R^2 = \frac{MR^2}{4}$$

$$= \frac{\rho \cdot \pi R dz \cdot R^2}{4} = \frac{M R^2}{4}$$



$$\Rightarrow I = \frac{MR^2}{4} + M \cdot d^2$$



Masa takiego krążka to:

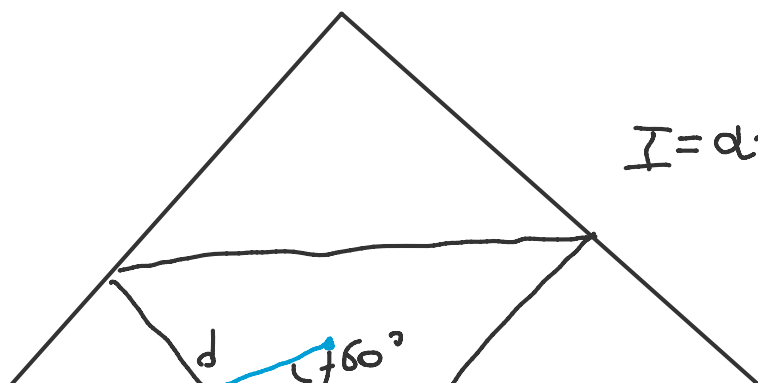
$$\frac{dz}{L} \cdot M,$$

$$I = \int I dz = \frac{M}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{R^2}{4} + z^2 \right) dz =$$

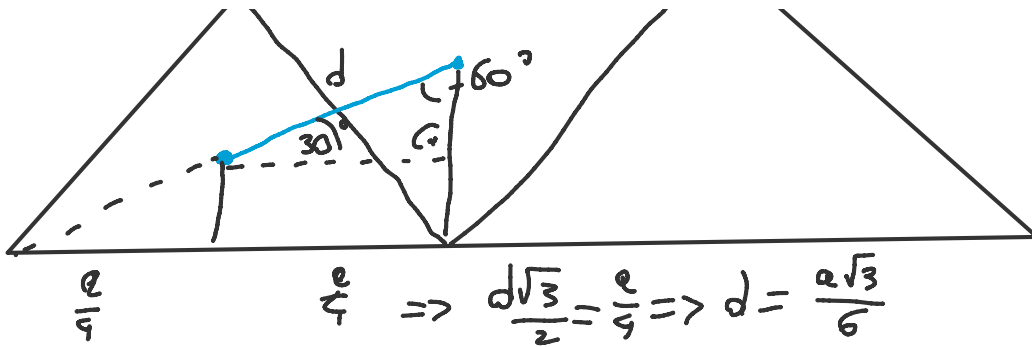
$$= \frac{MR^2}{L \cdot 4} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} + \frac{M}{3L} z^3 \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} =$$

$$= \frac{MR^2}{4} + \frac{ML^2}{12}$$

c)



$$I = d \cdot m \cdot a^2$$



$$I'_0 = 2 \cdot \frac{m}{4} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{ma^2}{16} = \frac{I}{16}$$

$$I' = \frac{I}{16} + \frac{m}{4} \cdot \left|\frac{a\sqrt{3}}{6}\right|^2 = \frac{I}{16} + \frac{a^2 m}{48}$$

$$I = 3 \cdot I' + I'_0 = \frac{I}{4} + \frac{a^2 m}{16} \Rightarrow \frac{3}{4} I = \frac{ma^2}{16} \Rightarrow I = \frac{ma^2}{12}$$