Tydzień II

Zadanie 1

Oznaczmy naszą formę

$$\omega = ye^{-z}dx + xe^{-z}dy - xye^{-z}dz$$

Liczymy pochodną zewnętrzną:

$$d\omega = dx \wedge dy \left(\frac{\partial xe^{-z}}{\partial x} - \frac{\partial ye^{-z}}{\partial y}\right) + dx \wedge dz \left(-\frac{\partial xye^{-z}}{\partial x} - \frac{\partial ye^{-z}}{\partial z}\right)$$
$$+ dy \wedge dz \left(-\frac{\partial xye^{-z}}{\partial y} - \frac{\partial xe^{-z}}{\partial z}\right) = 0$$

W takim razie z lematu Poincare, ω jest zupełna.
Aby uzyskać formę pierwotną α, $\omega = d\alpha$, należy scałkować ω, czyli

$$\alpha(x, y, z) = \alpha(0) + \int_0^{(x,y,z)} \omega$$

gdzie całkujemy po dowolnej drodze. W szczególności możemy scałkować po łamanej

$$(0, 0, 0), (0, 0, z), (x, 0, z), (x, y, z)$$

wtedy wyzeruje się całka po każdym odcinku oprócz ostatniego, po którym dostaniemy xye^{-z}, czyli

$$\alpha(x, y, z) = \alpha(0) + xye^{-z}$$

gdzie $\alpha(0)$ to dowolna stała.

Zadanie 2

Szukamy takiego μ, że $d(\mu đQ) = 0$.
Wtedy $\mu đQ$ jest zamknięta, więc z lematu Poincare zupełna, czyli istnieje S t.że $\mu đQ = dS$.
W takim razie ma być

$$0 = d(\mu đQ) = d(\mu C_V) \wedge dT + d(\mu p) \wedge dV = d\mu \wedge (C_V dT + pdV) + \mu dp \wedge dV$$

(bo C_V stałe). Z równania Clapeyrona

$$dp = \frac{R}{V}dT - \frac{RT}{V^2}dV$$

czyli

$$0 = d\mu \wedge (C_V dT + pdV) - \mu\frac{R}{V}dT \wedge dV$$
$$= d\mu \wedge (C_V dT + pdV) - \mu\frac{R}{pV}dT \wedge (C_V dT + pdV)$$
$$= \left(d\mu - \mu\frac{R}{pV}dT\right) \wedge (C_V dT + pdV)$$
$$= \left(d\mu - \frac{\mu}{T}dT\right) \wedge (C_V dT + pdV)$$

czyli musi być

$$d\mu = \frac{\mu}{T}dT + (C_V dT + pdV)\alpha$$

gdzie α to dowolna funkcja stanu taka, że $\frac{\mu}{T}dT + (C_V dT + pdV)\alpha$ jest zupełna.
Dla $\alpha = 0$ mamy

$$d\mu = \frac{\mu}{T}dT \implies \mu = \text{const} \cdot T$$

Tydzień III

Zadanie 1

Sformułowanie Kelvina: Nie istnieje odwracalny proces, którego jedynym skutkiem jest przekształcenie ciepła w pracę
Sformułowanie Clausiusa: Nie istnieje odwracalny proces, którego jedynym skutkiem jest przekaz ciepła z obiektu zimniejszego do cieplejszego.

nie Kelvin $\implies$ nie Clausius:
Przypuśćmy, że istnieje proces odwracalny przekształcający tylko ciepło w pracę. Wtedy możemy pobrać ciepło z ciepłego obiektu i wykorzystać je do napędzania odwracalnej pompy ciepła (odwracalny silnik działający w drugą stronę) do pompowania ciepła z tegoż obiektu do obiektu zimniejszego, tym samym łamiąc zasadę Clausiusa.

nie Clausius $\implies$ nie Kelvin:
Przypuśćmy, że istnieje proces odwracalny przekazujący tylko ciepło z obiektu zimniejszego do cieplejszego. Możemy wtedy uruchomić odwracalny silnik produkujący pracę kosztem przekazu ciepła z obiektu cieplejszego do zimniejszego, ale cały przekaz ciepła zrekompensować naszym hipotetycznym procesem. W ten sposób złamiemy zasadę Kelwina.

Zadanie 2

Silnik pobiera ciepło Q_g od czynnika o temperaturze T_g i oddaje Q_z do czynnika o temperaturze T_z. Wykonuje wtedy (z zasady zachowania energii) pracę $Q_g - Q_z$, czyli jego sprawność to

$$\eta = \frac{Q_g - Q_z}{Q_g}$$

Cykl Carnota składa się z adiabat, na których nie ma wymiany ciepła i izoterm, na których wymiana ciepła to odpowiednio $T_g \Delta S$ lub $T_z \Delta S$.
ΔS jest to samo na obu izotermach, bo entropia jest stała na adiabatach, a w całym cyklu jej zmiana musi być 0 (bo jest odwracalny).
W takim razie

$$\eta = \frac{T_g - T_z}{T_g}$$

Zadanie 3

Sprawność lodówki definiujemy jako

$$\omega_c = \frac{Q_z}{W} = \frac{Q_z}{Q_g - Q_z} = \frac{T_z}{T_g - T_z}$$

(patrz poprzednie zadanie)

Tydzień IV

Zadanie 1

Zamiast liczby od 0 do 1 możemy losować pierwsze 10 cyfr po przecinku, czyli dowolny ciąg cyfr długości 10. Ciąg, w którym dokładnie 5 cyfr jest mniejszych od 5 wybieramy według następującej procedury: wybieramy 5 cyfr, które będą mniejsze od 5. Można to zrobić na $\binom{10}{5}$ sposobów. Następnie na 5^5 sposobów wybieramy wartości cyfr mniejszych od 5 i na 5^5 sposobów wybieramy wartości cyfr większych od 4. Ciąg taki możemy więc wybrać na $\binom{10}{5}5^{10}$ sposobów. Różnych ciągów 10-cyfrowych jest 10^{10}, więc prawdopodobieństwo wylosowania takiego ciągu to

$$\frac{\binom{10}{5}5^{10}}{10^{10}} = \frac{\binom{10}{5}}{2^{10}}$$

Zadanie 2

Niech α – kąt działa w momencie strzału (dla $\alpha = 0$ działo strzela prostopadle w ekran), x – odległość trafionego punktu od punktu najbliżej działa. Działo trafi tylko dla $\alpha \in] - \pi, \pi[$, wtedy mamy $x = d \tan \alpha$. Gęstość prawdopodobieństwa w x to

$$p(x) = \frac{d\alpha}{dx} p(\alpha) = \frac{p(\alpha)}{1 + x^2} = \frac{1}{2\pi(1 + x^2)}$$

Jest unormowane do 1/2, bo co drugi strzał trafia.

Zadanie 3

Wybieramy oś x prostopadle do linii. Definiujemy zmienne losowe
α – kąt między igłą a osią x.
x – odległość środka igły od prostej równoodległej od dwóch sąsiednich linii, Przestrzeń możliwych położeń igły jest prostokątem

$$[-\pi/2, \pi/2] \times [0, a]$$

Igła przetnie linię, jeżeli

$$x + l \cos \alpha \geq a$$

czyli

$$x \geq a - l\cos\alpha$$

W takim razie obszar w przestrzeni możliwych położeń odpowiadający przecięciu linii to obszar nad wykresem

$$a - l\cos\alpha$$

Jego pole to

$$a\pi - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha(a - l\cos\alpha) = 2l$$

a więc odpowiada mu prawdopodobieństwo (pole obszaru przez pole całej przestrzeni)

$$\frac{2l}{a\pi}$$

Zadanie 7

Jest 52! sposobów na potasowanie talii kart, więc prawdopodobieństwo otrzymania jednej konkretnej to 1/52! W takim razie informacja talii to $-\log(1/52!) = \log(52!)$ Jest $\binom{52}{5}$ sposobów na wylosowanie 5 kart, więc informacja układu 5 kart to $\log\binom{52}{5}$

Tydzień V

Zadanie 1

Twierdzenie o powrocie Poincare'go:
Mamy przestrzeń P z miarą μ, $\mu(P) < \infty$ i bijekcję $T : P \to P$ zachowującą miarę (i mierzalność).
Powiemy, że punkt $x \in A$ wraca, jeżeli $\exists_n T^n(x) \in A$
Wtedy dla mierzalnych A, prawie wszystkie punkty (wszystkie z wyjątkiem zbioru miary zero) wracają nieskończenie wiele razy.
Oznaczymy jeszcze $A_n = \{x \in A : T^n(x) \in A\} = A \cap T^n(A)$

Dowód:
Krok pierwszy:
Dowodzimy przez sprzeczność, że jeżeli zbiór mierzalny X spełnia dla jakiegoś $N \geq 0$

$$\forall_{n>N} X \cap T^n(X) = \emptyset$$

to jest miary zero:
Jeżeli X jest N-kontrprzykładem, to spełnia

$$\forall_{n>0} X \cap (T^{N+1})^n(X) = \emptyset$$

czyli jest 0-kontrprzykładem dla innego odwzorowania $T' = T^{N+1}$ Wystarczy więc dowieść przypadek $N = 0$:
Dowodzimy najpierw, że $\forall_{m>n} T^m(X) \cap T^n(X) = \emptyset$.
Przypuśćmy, że $\exists y \in T^n(X) \cap T^m(X)$.
Wtedy z definicji $T^{-n}(y), T^{-m}(y) \in X$, jednak

$$T^{m-n}\left(T^{-m}(y)\right) = T^{-n}(y)$$

czyli $X \cap T^{m-n} \neq \emptyset$
Skoro wszystkie zbiory $T^n(X)$ są rozłączne, T zachowuje miarę, a $\mu(X) \neq 0$, to

$$\mu(\bigcup_n T^n(X)) = \sum_n T^n(X) = \infty$$

Sprzeczność, bo $\mu(P) < \infty$

Krok drugi:
Definiujemy dla mierzalnego A i każdego skończonego zbioru liczb naturalnych a

$$B_a = \left(\bigcap_{n \in a} A_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n \notin a} A_n\right)$$

Czyli B_a to zbiór punktów wracających do A tylko dla $n \in a$. Suma takich zbiorów dla wszystkich skończonych a da nam zbiór punktów wracających skończenie wiele razy do A.
Zbiory A_n są mierzalne, więc B też, więc z punktu pierwszego są miary zero.
Jest ich przeliczalnie wiele, więc miara ich sumy to zero.

Zadanie 2

Jeżeli układ jest przygotowany w którymś ze stanów $|i\rangle$ z klasycznym prawdopodobieństwem p_i, to z definicji

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle \langle i|$$

a) Dla dowolnej bazy ortonormalnej $|j\rangle$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr} \rho &= \sum_j \langle j| \rho |j\rangle \\
&= \sum_{i,j} p_i \langle j| |i\rangle \langle i| |j\rangle \\
&= \sum_{i,j} p_i \langle i| |j\rangle \langle j| |i\rangle \\
&= \sum_i p_i = 1
\end{aligned}$$

b) $|i\rangle\langle i|$ są hermitowskie, więc ρ jest hermitowski jako rzeczywista kombinacja liniowa operatorów hermitowskich.

c) Skoro ρ hermitowskie, ma ortonormalną bazę diagonalizującą $|k\rangle$
W tej bazie

$$\operatorname{Tr}\rho^2 = \sum_k (\langle k|\rho|k\rangle)^2 \leq \sum_k \langle k|\rho|k\rangle = 1$$

($\langle k|\rho|k\rangle$ są dodatnie i sumują się do 1, więc muszą być ≤ 1)

Zadanie 3

$|\psi\rangle$ jest stanem czystym, więc jego operator statystyczny to po prostu

$$\begin{aligned}\rho &= |\psi\rangle\langle\psi| \\ &= p\,|x_1x_2\rangle\langle x_1x_2| + (1-p)\,|y_1y_2\rangle\langle y_1y_2| + \sqrt{p-p^2}\,|x_1x_2\rangle\langle y_1y_2| + \sqrt{p-p^2}\,|y_1y_2\rangle\langle x_1x_2|\end{aligned}$$

Aby znaleźć operatory zredukowane, liczymy częściowe ślady:

$$\rho_1 = \langle x_2|\rho|x_2\rangle + \langle y_2|\rho|y_2\rangle = p\,|x_1\rangle\langle x_1| + (1-p)\,|y_1\rangle\langle y_1|$$

$$\rho_2 = \langle x_1|\rho|x_1\rangle + \langle y_1|\rho|y_1\rangle = p\,|x_2\rangle\langle x_2| + (1-p)\,|y_2\rangle\langle y_2|$$

Entropia obu operatorów to bezpośrednio ze wzoru

$$S = -p\log p - (1-p)\log(1-p)$$

Stan jest niekorelowany, kiedy ρ_1 i ρ_2 reprezentują stany czyste, czyli ślady ich kwadratów są równe 1, czyli

$$p^2 + (1-p)^2 = p^2 + 1 - 2p = 0$$

czyli $p = 0$ lub $p = 1$

Tydzień VIII

Zadanie 8

Oznaczmy dla wygody $A = X_i$, $a = y_i$, $B = X_k$, $b = y_k$
Wtedy

$$dU = adA + bdB$$

Niech J będzie transformacją Legendra U względem A, czyli

$$\begin{aligned}J &= U - aA \\ dJ &= -Ada + bdB\end{aligned}$$

Nasza teza przyjmuje teraz postać

$$\left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)_B < \left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)_b \iff \left(\frac{\partial^2 J}{\partial a^2}\right)_B > \left(\frac{\partial\left(\frac{\partial J}{\partial a}\right)_B}{\partial a}\right)_b$$

Przechodzimy do innej notacji.
Dla dowolnej różniczkowalnej funkcji $F(x,y)$ mamy

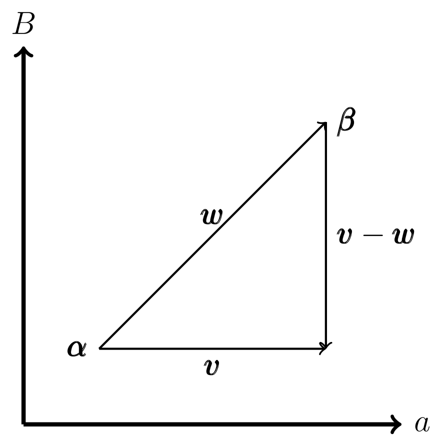
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y = F'(1,0)_{xy}$$

czyli nasza teza to

$$J''(1,0)_{aB}^2 > J''(1,0)_{aB}(1,0)_{ab} \iff \exists_{\Delta a} J''(\Delta a,0)_{aB}^2 > J''(\Delta a,0)_{aB}(\Delta a,0)_{ab}$$

Weźmiemy teraz dowolny punkt $\boldsymbol{\alpha}$ i małe Δa.
Oznaczymy

$$\boldsymbol{v} = (\Delta a, 0)_{aB}$$
$$\boldsymbol{w} = (\Delta a, 0)_{ab} = \left(\Delta a, \left(\frac{\partial B}{\partial a}\right)_b \Delta a\right)_{aB}$$
$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{w}$$



Wtedy z dokładnością do wyrazów rzędu Δa^2

$$J'_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}J''_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{v}^2 = J(\boldsymbol{\alpha}+v) - J(\boldsymbol{\alpha}) = J'_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{w} + \frac{1}{2}J''_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{w}^2 + J'_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}) + \frac{1}{2}J''_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})^2$$

$\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$ mają tą samą współrzędną $b = \left(\frac{\partial U}{\partial B}\right)_A = \left(\frac{\partial J}{\partial B}\right)_a$ więc

$$J_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}) = J_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})$$

Czyli skracają się pierwsze pochodne, zostaje

$$\frac{1}{2}J''_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{w}^2) = \frac{1}{2}J''_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})^2 \iff J''_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{v}^2 - J''_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}J''_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})^2 + \frac{1}{2}J''_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})^2$$

Co jest dodatnie, bo J jest transformacją Legendra wypukłej funkcji U, czyli $J'', U'' > 0$ $\square$