

Tydzień II

Zadanie 1

Oznaczmy naszą formę

$$\omega = ye^{-z}dx + xe^{-z}dy - xye^{-z}dz$$

Liczymy pochodną zewnętrzną:

$$\begin{aligned}d\omega &= dx \wedge dy \left(\frac{\partial xe^{-z}}{\partial x} - \frac{\partial ye^{-z}}{\partial y} \right) + dx \wedge dz \left(-\frac{\partial xye^{-z}}{\partial x} - \frac{\partial ye^{-z}}{\partial z} \right) \\ &\quad + dy \wedge dz \left(-\frac{\partial xye^{-z}}{\partial y} - \frac{\partial xe^{-z}}{\partial z} \right) = 0\end{aligned}$$

W takim razie z lematu Poincare, ω jest zupełna.

Aby uzyskać formę pierwotną α , $\omega = d\alpha$, należy scałkować ω , czyli

$$\alpha(x, y, z) = \alpha(0) + \int_0^{(x,y,z)} \omega$$

gdzie całkujemy po dowolnej drodze. W szczególności możemy scałkować po łamanej

$$(0, 0, 0), (0, 0, z), (x, 0, z), (x, y, z)$$

wtedy wyzeruje się całka po każdym odcinku oprócz ostatniego, po którym dostaniemy xye^{-z} , czyli

$$\alpha(x, y, z) = \alpha(0) + xye^{-z}$$

gdzie $\alpha(0)$ to dowolna stała.

Zadanie 2

Szukamy takiego μ , że $d(\mu dQ) = 0$.

Wtedy μdQ jest zamknięta, więc z lematu Poincare zupełna, czyli istnieje S t.ż. $\mu dQ = dS$.

W takim razie ma być

$$0 = d(\mu dQ) = d(\mu C_V) \wedge dT + d(\mu p) \wedge dV = d\mu \wedge (C_V dT + p dV) + \mu dp \wedge dV$$

(bo C_V stałe). Z równania Clapeyrona

$$dp = \frac{R}{V}dT - \frac{RT}{V^2}dV$$

czyli

$$\begin{aligned} 0 &= d\mu \wedge (C_V dT + pdV) - \mu \frac{R}{V} dT \wedge dV \\ &= d\mu \wedge (C_V dT + pdV) - \mu \frac{R}{pV} dT \wedge (C_V dT + pdV) \\ &= \left(d\mu - \mu \frac{R}{pV} dT \right) \wedge (C_V dT + pdV) \\ &= \left(d\mu - \frac{\mu}{T} dT \right) \wedge (C_V dT + pdV) \end{aligned}$$

czyli musi być

$$d\mu = \frac{\mu}{T}dT + (C_V dT + pdV)\alpha$$

gdzie α to dowolna funkcja stanu taka, że $\frac{\mu}{T}dT + (C_V dT + pdV)\alpha$ jest zupełna. Dla $\alpha = 0$ mamy

$$d\mu = \frac{\mu}{T}dT \implies \mu = \text{const} \cdot T$$

Tydzień III

Zadanie 1

Sformułowanie Kelvina: Nie istnieje odwracalny proces, którego jedynym skutkiem jest przekształcenie ciepła w pracę

Sformułowanie Clausiusa: Nie istnieje odwracalny proces, którego jedynym skutkiem jest przekaz ciepła z obiektu zimniejszego do cieplejszego.

nie Kelvin \implies nie Clausius:

Przypuśćmy, że istnieje proces odwracalny przekształcający tylko ciepło w pracę. Wtedy możemy pobrać ciepło z ciepłego obiektu i wykorzystać je do napędzania odwracalnej pompy ciepła (odwracalny silnik działający w drugą stronę) do pompowania ciepła z tegoż obiektu do obiektu zimniejszego, tym

samym łamiąc zasadę Clausiusa.

nie Clausius \implies nie Kelvin:

Przypuśćmy, że istnieje proces odwracalny przekazujący tylko ciepło z obiektu zimniejszego do cieplejszego. Możemy wtedy uruchomić odwracalny silnik produkujący pracę kosztem przekazu ciepła z obiektu cieplejszego do zimniejszego, ale cały przekaz ciepła zrekompensować naszym hipotetycznym procesem. W ten sposób złamiemy zasadę Kelwina.

Zadanie 2

Silnik pobiera ciepło Q_g od czynnika o temperaturze T_g i oddaje Q_z do czynnika o temperaturze T_z . Wykonuje wtedy (z zasady zachowania energii) pracę $Q_g - Q_z$, czyli jego sprawność to

$$\eta = \frac{Q_g - Q_z}{Q_g}$$

Cykl Carnota składa się z adiabat, na których nie ma wymiany ciepła i izoterm, na których wymiana ciepła to odpowiednio $T_g \Delta S$ lub $T_z \Delta S$.

ΔS jest to samo na obu izotermach, bo entropia jest stała na adiabatach, a w całym cyklu jej zmiana musi być 0 (bo jest odwracalny).

W takim razie

$$\eta = \frac{T_g - T_z}{T_g}$$

Zadanie 3

Sprawność lodówki definiujemy jako

$$\omega_c = \frac{Q_z}{W} = \frac{Q_z}{Q_g - Q_z} = \frac{T_z}{T_g - T_z}$$

(patrz poprzednie zadanie)

Tydzień IV

Zadanie 1

Zamiast liczby od 0 do 1 możemy losować pierwsze 10 cyfr po przecinku, czyli dowolny ciąg cyfr długości 10. Ciąg, w którym dokładnie 5 cyfr jest

mniejszych od 5 wybieramy według następującej procedury: wybieramy 5 cyfr, które będą mniejsze od 5. Można to zrobić na $\binom{10}{5}$ sposobów. Następnie na 5^5 sposobów wybieramy wartości cyfr mniejszych od 5 i na 5^5 sposobów wybieramy wartości cyfr większych od 4. Ciąg taki możemy więc wybrać na $\binom{10}{5}5^{10}$ sposobów. Różnych ciągów 10-cyfrowych jest 10^{10} , więc prawdopodobieństwo wylosowania takiego ciągu to

$$\frac{\binom{10}{5}5^{10}}{10^{10}} = \frac{\binom{10}{5}}{2^{10}}$$

Zadanie 2

Niech α – kąt działa w momencie strzału (dla $\alpha = 0$ dział strzela prostopadle w ekran), x – odległość trafionego punktu od punktu najbliższej dział. Dział trafi tylko dla $\alpha \in]-\pi, \pi[$, wtedy mamy $x = d \tan \alpha$. Gęstość prawdopodobieństwa w x to

$$p(x) = \frac{d\alpha}{dx}p(\alpha) = \frac{p(\alpha)}{1+x^2} = \frac{1}{2\pi(1+x^2)}$$

Jest unormowane do 1/2, bo co drugi strzał trafia.

Zadanie 3

Wybieramy oś x prostopadle do linii. Definiujemy zmienne losowe

α – kąt między igłą a osią x .

x – odległość środka igły od prostej równoodległej od dwóch sąsiednich linii,

Przestrzeń możliwych położenia igły jest prostokątem

$$[-\pi/2, \pi/2] \times [0, a]$$

Igła przetnie linię, jeżeli

$$x + l \cos \alpha \geq a$$

czyli

$$x \geq a - l \cos \alpha$$

W takim razie obszar w przestrzeni możliwych położenia odpowiadający przecięciu linii to obszar nad wykresem

$$a - l \cos \alpha$$

Jego pole to

$$a\pi - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha (a - l \cos \alpha) = 2l$$

a więc odpowiada mu prawdopodobieństwo (pole obszaru przez pole całej przestrzeni)

$$\frac{2l}{a\pi}$$

Zadanie 7

Jest $52!$ sposobów na potasowanie talii kart, więc prawdopodobieństwo otrzymania jednej konkretnej to $1/52!$. W takim razie informacja talii to $-\log(1/52!) = \log(52!)$. Jest $\binom{52}{5}$ sposobów na wylosowanie 5 kart, więc informacja układu 5 kart to $\log \binom{52}{5}$.

Tydzień V

Zadanie 2

Z definicji

$$\rho = \sum_i p_i |i\rangle \langle i|$$

gdzie p_i to klasyczne prawdopodobieństwo, że układ zostanie przygotowany w stanie kwantowym $|i\rangle$

a) Dla dowolnej bazy ortonormalnej $|j\rangle$

$$\begin{aligned} \text{Tr } \rho &= \sum_j \langle j | \rho | j \rangle \\ &= \sum_{i,j} p_i \langle j | i \rangle \langle i | j \rangle \\ &= \sum_{i,j} p_i \langle i | j \rangle \langle j | i \rangle \\ &= \sum_i p_i = 1 \end{aligned}$$

- b) $|i\rangle \langle i|$ są hermitowskie, więc ρ jest hermitowski jako rzeczywista kombinacja liniowa operatorów hermitowskich.
- c) Skoro ρ hermitowskie, ma ortonormalną bazę diagonalizującą $|k\rangle$
W tej bazie

$$\text{Tr } \rho^2 = \sum_k (\langle k | \rho | k \rangle)^2 \leq \sum_k \langle k | \rho | k \rangle = 1$$

($\langle k | \rho | k \rangle$ są dodatnie i sumują się do 1, więc muszą być ≤ 1)