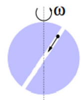
Zadanie 3

Wzdłuż średnicy Ziemi wybudowano prostoliniowy tunel przechodzący przez jej środek (rysunek obok), którego końce znajdują się na szerokości geograficznej północnej i południowej $\lambda = 52°$. W tunelu puszczono kamień o masie $m = 1\,\mathrm{kg}$ poruszający się bez tarcia. Obliczyć:

a) ścisłą zależność odległości kamienia od środka Ziemi w funkcji czasu,
b) czas przelotu T_A na antypody,
c) wektor siły reakcji, z jaką ścianki tunelu działają na kamień, w momencie jego puszczenia i w środku Ziemi.



Założyć, że Ziemia jest jednorodną sztywną kulą o promieniu $R_Z = 6{,}37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$, której okres obrotu dokoła osi wynosi $T = 24\,\mathrm{h}$, a przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Ziemi $g(R_Z) = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

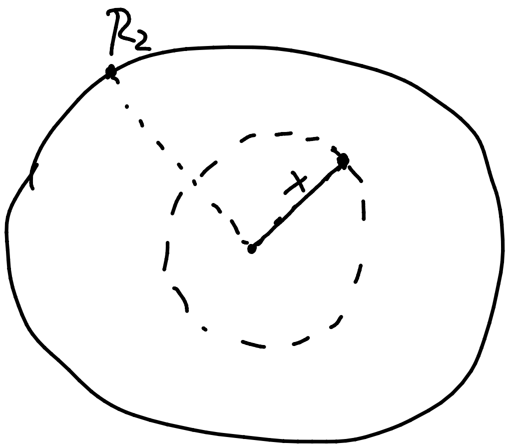
Odpowiedź:

a) $r(t) = R_Z \cos(\Omega t)$, $\Omega = \sqrt{\frac{g(R_Z)}{R_Z} - \omega^2 \cos^2(\lambda)}$
b) $T_A = \frac{\pi}{\Omega} = 42$ min.

c) W odpowiednio wybranym układzie współrzędnych

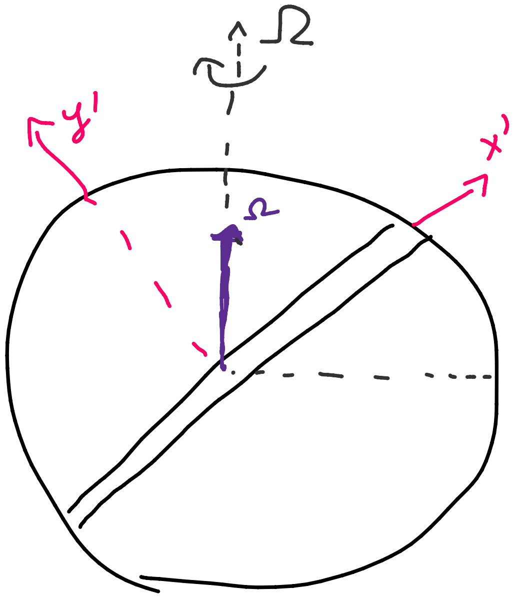
$$\vec{F}(t) = mR(-2\omega\Omega\cos(\lambda)\sin(\Omega t), \omega^2 \sin(\lambda)\cos(\lambda)\cos(\Omega t), 0)\,,$$

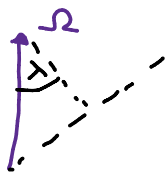
skąd odczytujemy $F(0) = 0{,}016$ N, $F(\frac{1}{2}T_A) = 0{,}71$ N.



$$|\vec{F}| = G\frac{Mm}{x^2} = G\frac{m}{x^2}\rho\cdot V = G\frac{m}{x^2}\rho\cdot\frac{4}{3}\pi x^3 = G\frac{m(\frac{4}{3}\pi R_z^3 \rho)}{R_z^2}\cdot\frac{x}{R_z} =$$

$$= \frac{g}{R_z}x$$





$$\vec{\Omega} = \Omega\sin\lambda\,\hat{e}_x + \Omega\cos\lambda\,\hat{e}_y$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0 - m\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$\vec{F} = -\frac{g}{R}\cdot x\hat{e}_x$; $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$; $\vec{\omega}\times\vec{v} = -(\Omega\sin\lambda\,\hat{e}_x + \Omega\cos\lambda\,\hat{e}_y)\times\dot{x}\hat{e}_x =$

$$\vec{F} = -\frac{g}{R_z} \cdot x\,\hat{e}_x \; ; \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0 \; ; \quad \vec{\omega} \times \vec{v} = (\Omega \sin\lambda\,\hat{e}_x + \Omega\cos\lambda\,\hat{e}_y) \times \dot{x}\,\hat{e}_x =$$

$$\vec{R} \cdot \hat{e}_x = 0 \qquad\qquad = -\Omega\cos\lambda \cdot \dot{x}\,\hat{e}_z$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\Omega\sin\lambda\,\hat{e}_x + \Omega\cos\lambda\,\hat{e}_y) \times \left[(\Omega\sin\lambda\,\hat{e}_x + \Omega\cos\lambda\,\hat{e}_y) \times x \cdot \hat{e}_x \right] =$$

$$= (\Omega\sin\lambda\,\hat{e}_x + \Omega\cos\lambda\,\hat{e}_y) \times (-\Omega\cos\lambda \cdot x\;\hat{e}_z) =$$

$$= \Omega^2 \sin\lambda\cos\lambda\; x\;\hat{e}_y - \Omega^2\cos^2\lambda \cdot x\,\hat{e}_x$$

x!:

$$m\ddot{x} = -\frac{g}{R_z}x + m\,\Omega^2\cos^2\lambda \cdot x$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} = -x\underbrace{\left(\frac{g}{R_z} - \Omega^2\cos^2\lambda\right)}_{\xi^2 > 0}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\xi^2 x \Rightarrow x = A\cos(\xi t)$$

$$t=0 \Rightarrow x = R_z \Rightarrow x = R_z \cdot \cos(\xi t)$$

$$x = -R_z \quad \text{dle} \quad T = \frac{\pi}{\xi}$$

$$\vec{R} = R_y\,\hat{e}_y + R_z \cdot \hat{e}_z$$

y:

$$0 = R_y - m\,\Omega^2 \sin\lambda\cos\lambda\; x \Rightarrow R_y = m\,\Omega^2\sin\lambda\cos\lambda \cdot x$$

z:

$$0 = R_z + 2m\,\Omega\cos\lambda \cdot \dot{x} \Rightarrow R_z = -2m\,\Omega\cos\lambda \cdot \dot{x}$$

$$\Rightarrow \vec{R} = mR_2 \cdot \Omega \cos\lambda \cdot \left(0, \Omega \sin\lambda \cos(\xi \cdot t), 2\xi \sin(\xi t) \right)$$