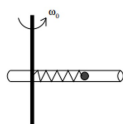


Zad 7.1

Monday, December 26, 2022 7:53 PM

Zadanie 1

Szklana rurka jest przymocowana do prostopadłego pręta (rysunek obok). Wewnątrz rurki spoczywa kulka o masie m przymocowana do pręta za pomocą sprężyny o długości swobodnej l i o współczynniku sprężystości k . W pewnej chwili cały układ zostaje wprowadzony w ruch obrotowy wokół osi pręta i dalej obraca się ze stałą prędkością kątową ω_0 . Znaleźć ruch kulki. Przedyskutować położenie kulki przy $t \rightarrow \infty$. Współczynnik tarcia kulki o ścianki rurki wynosi f . W rozwiązaniu ograniczyć się do przypadku $\delta^2 = \frac{k}{m} - \omega_0^2 \cdot (1 + f^2) > 0$. Zaniedbać efekty grawitacyjne i efekty występujące podczas rozpędzania rurki, tzn. przyjąć warunki początkowe: $r(t=0) = l, \dot{r}(t=0) = 0$.



Odpowiedź: $r(t) = e^{-f\omega_0 t} [A \sin(\delta t) + B \cos(\delta t)] + \frac{k/m}{k/m - \omega_0^2}$, $A = -\frac{\omega_0^2 f l}{(k/m - \omega_0^2) \delta}$, $B = \frac{-l\omega_0^2}{k/m - \omega_0^2}$,
 $r(t \rightarrow \infty) = \frac{k/m}{k/m - \omega_0^2}$

$$m \vec{a}' = \vec{F} - m \vec{a}_0 - m \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} - 2m \vec{\omega} \times \vec{v}' - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0}, \vec{a}_0 = 0$

$\vec{F}_s = -k(x' - l) \hat{e}_x$

$\vec{F}_T = -f \cdot R \cdot \hat{e}_x$

$\vec{F}_R = R \cdot \hat{e}_y$

$\vec{a}' = 0$

$0 = R - 2m\omega \dot{x}$

$0 = R - 2m\omega \dot{x} \Rightarrow \vec{F}_T = -2m\omega \dot{x} \hat{e}_x$

$m \ddot{x} = -kx + kl - 2m\omega f \dot{x} + m\omega^2 x$

$\Rightarrow \ddot{x} + 2\omega f \dot{x} + (\frac{k}{m} - \omega^2) x = \frac{kl}{m}$

Rozwiązanie:

$x = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + 2\omega f \lambda + (\frac{k}{m} - \omega^2) = 0$

$\Delta = 4\omega^2 f^2 - 4\frac{k}{m} + 4\omega^2 = -4[\frac{k}{m} - \omega^2(1 + f^2)] := -4\delta^2; \delta^2 > 0$

Silły:

(a) tarcia

(b) Reakcji

(c) sprężystości

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\omega_f \pm i\delta$$

$$\Rightarrow x = e^{-\omega_f t} (A \sin(\delta t) + B \cos(\delta t))$$

RSRN:

$$x = \frac{\frac{k}{m} \cdot \varphi}{\frac{k}{m} - \omega^2}$$

RORV:

$$x = e^{-\omega_f t} (A \sin(\delta t) + B \cos(\delta t)) + \frac{\frac{k}{m} \varphi}{\frac{k}{m} - \omega^2}$$

$$x(0) = \varphi = B + \frac{\frac{k}{m} \varphi}{\frac{k}{m} - \omega^2} \Rightarrow B = \frac{-\varphi \omega^2}{\frac{k}{m} - \omega^2}$$

$$\dot{x}(t) = e^{-\omega_f t} \left(-\omega_f (A \sin(\delta t) + B \cos(\delta t)) + \delta (A \cos(\delta t) - B \sin(\delta t)) \right)$$

$$\dot{x}(0) = 0 = -\omega_f B + \delta A$$

$$\Rightarrow A = \frac{-\varphi \omega^2 \cdot f}{\delta (\frac{k}{m} - \omega^2)}$$

$$x(t \rightarrow \infty) = \frac{\frac{k}{m} \varphi}{\frac{k}{m} - \omega^2}$$