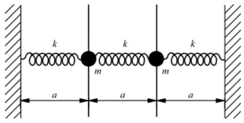
10.3

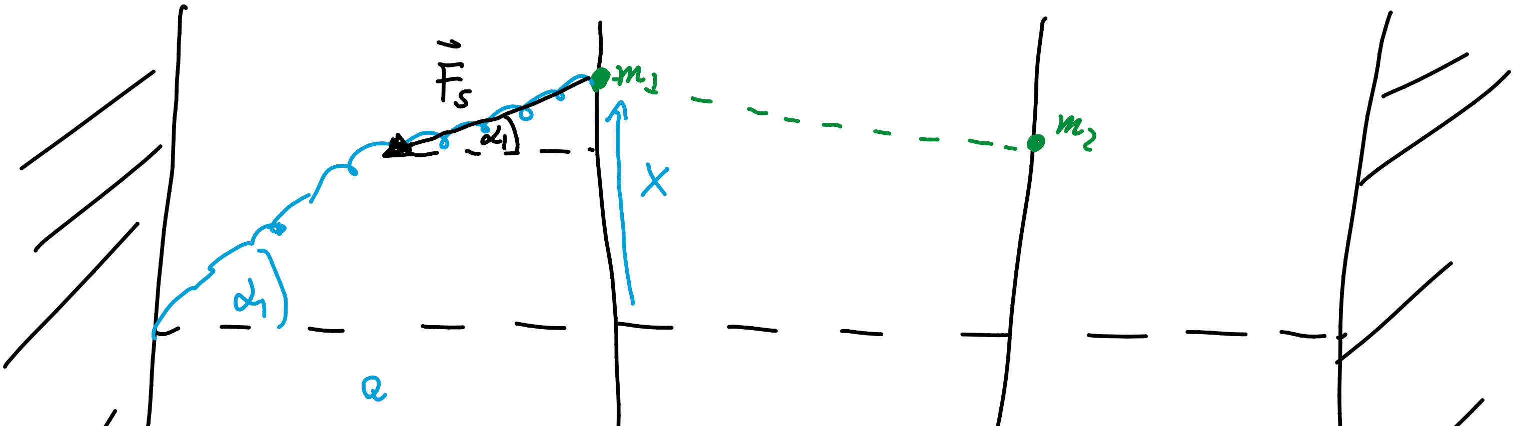
Saturday, January 28, 2023 10:00 PM

Zadanie 3
Znaleźć w przybliżeniu harmonicznym częstości i postaci drgań normalnych układu trzech nieważkich sprężyn i dwóch koralików o masach m. Koraliki poruszają się bez tarcia wzdłuż pionowych prętów. Sprężyny mają długość swobodną $l_\circ$ i stałą sprężystości k. Odległość między prętami oraz między prętem a ścianą wynosi a ($a > l_\circ$). Grawitację pominąć.



Odpowiedź:
$\omega_1^2 = \alpha$, $\omega_2^2 = 3\alpha$, $\alpha = \frac{k(a-l_0)}{ma}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 \sin(\omega_1 t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} A_2 \sin(\omega_2 t)$$



$$\alpha_1 = \frac{F_y}{F_s}$$

$$\alpha_1 a = x$$

$$\Rightarrow \quad F_y = \frac{x}{a}\left(-k(l_0 - a)\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 = -\frac{k}{a}(l_0 - a)x_1 - \frac{k}{a}(l_0 - a)(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 = -\frac{k}{a}(l_0 - a)x_2 - \frac{k}{a}(l_0 - a)(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = -\frac{2k}{m}\frac{(l_0 - a)}{a}x_1 + \frac{k}{m}\frac{l_0 - a}{a}x_2 \\ \ddot{x}_2 = -\frac{2k}{m}\frac{(l_0 - a)}{a}x_2 + \frac{k}{m}\frac{l_0 - a}{a}x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{2k}{m}\frac{l_0-a}{a} & \frac{k}{m}\frac{l_0-a}{a} \\ \frac{k}{m}\frac{l_0-a}{a} & \omega^2 - \frac{2k}{m}\frac{l_0-a}{a} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\omega^2 - \frac{2k}{m}\frac{l_0-a}{a} - \frac{k}{m}\frac{l_0-a}{a}\right)\left(\omega^2 - \frac{2k}{m}\frac{l_0-a}{a} + \frac{k}{m}\frac{l_0-a}{a}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = 3\frac{k}{m}\frac{l_0-a}{a} \vee \omega_2^2 = \frac{k}{m}\frac{l_0-a}{a}$$

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{2k}{m}\frac{l_0-a}{a} & \frac{k}{m}\frac{l_0-a}{a} \\ \frac{k}{m}\frac{l_0-a}{a} & \omega^2 - \frac{2k}{m}\frac{l_0-a}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

I $\omega_1^2 = 3\frac{k}{m}\frac{l_0-a}{a}$

$$\Rightarrow A_1 + A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = -A_2$$

II $\omega_1^2 = \frac{k}{m}\frac{l_0-a}{a}$

$$\Rightarrow A_1 = A_2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$