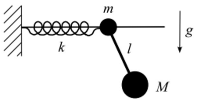
10.1

Saturday, January 28, 2023 8:15 PM

Zadanie 1

Kulka o masie m, przymocowana nieważką sprężyną do ściany, może poruszać się bez tarcia po poziomym pręcie. Kulkę tę połączono z ciężarkiem o masie M za pomocą nieważkiej nici (rysunek obok). Długość nici i stała sprężystości sprężyny spełniają relację $\frac{g}{l} = \frac{k}{m} = \omega_0^2$ (gdzie oznacza g przyspieszenie ziemskie). Obie kulki poruszają się w tej samej pionowej płaszczyźnie. Znaleźć postaci drgań normalnych dla przypadków: $M \gg m$ i $M \ll m$, uwzględniając tylko człony najniższego rzędu w zmiennej $\frac{m}{M}$ lub $\frac{M}{m}$.

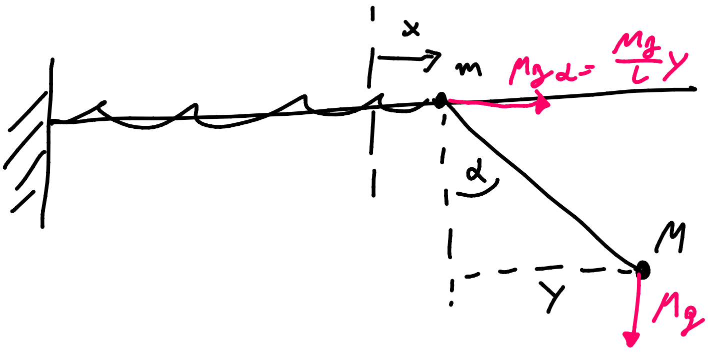


Odpowiedź:

$\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2\left[(1 + \frac{M}{2m} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m}(\frac{M}{m}+4)}\,\right]$

a) $M \gg m$: $\omega_1^2 \simeq \omega_0^2 \frac{M}{m}$, $\omega_2^2 \to 0$, $\begin{pmatrix} x \\ l\theta \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} A\cos(\omega_1 t + \phi_1)$

b) $M \ll m$: $\omega_{1,2}^2 \simeq \omega_0^2\left[1 \pm \sqrt{\frac{M}{m}}\right]$, $\begin{pmatrix} x \\ l\theta \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{m}{M}} \end{pmatrix} A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + \begin{pmatrix} 1 \\ +\sqrt{\frac{m}{M}} \end{pmatrix} A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)$



$\alpha = \frac{y}{l}$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + M\frac{g}{l}y \\ M\ddot{y} = -\frac{Mg}{l}y - M\ddot{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{M}{m}\frac{g}{l}y \\ \ddot{y} = -\frac{g}{l}y + \frac{k}{m}x - \frac{M}{m}\frac{g}{l}y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\omega_0^2 x + \frac{M}{m}\omega_0^2 y \\ \ddot{y} = -\omega_0^2\left(1+\frac{M}{m}\right)y + \omega_0^2 x \end{cases}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 & \frac{M}{m}\omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -\omega_0^2\left(1+\frac{M}{m}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\omega^2\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow -\omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cancel{\cos(\omega t+\varphi)} = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 & \frac{M}{m}\omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -\omega_0^2\left(1+\frac{M}{m}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cancel{\cos(\omega t+\varphi)}$$

$$\Rightarrow 0 = \begin{pmatrix} \omega^2-\omega_0^2 & \frac{M}{m}\omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \omega^2-\omega_0^2\left(1+\frac{M}{m}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} \omega^2-\omega_0^2 & \frac{M}{m}\omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \omega^2-\omega_0^2\left(1+\frac{M}{m}\right) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\omega^2-\omega_0^2)\left(\omega^2-\omega_0^2\left(1+\frac{M}{m}\right)\right) - \omega_0^4\frac{M}{m} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^4 - \omega_0^2\left(2+\frac{M}{m}\right)\omega^2 + \omega_0^4 + \cancel{\omega_0^4\frac{M}{m}} - \cancel{\omega_0^4\frac{M}{m}} = 0$$

$$\Rightarrow (\omega^2)^2 - \omega_0^2\left(2+\frac{M}{m}\right)\omega^2 + \omega_0^4 = 0$$

$$\Delta = 4\omega_0^4 + 4\omega_0^4\frac{M}{m} + \omega_0^4\frac{M^2}{m^2} - 4\omega_0^4 = \omega_0^4\frac{M}{m}\left(4+\frac{M}{m}\right)$$

$$\Rightarrow \omega_{1/2}^2 = \omega_0^2\left[1+\frac{M}{2m} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m}\left(4+\frac{M}{m}\right)}\right]$$

$M \gg m$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2\left[1+\frac{M}{2m} - \frac{1}{2}\frac{M}{m}\left(1+4\frac{m}{M}\right)^{1/2}\right] \simeq \omega_0^2\left[1+\frac{M}{2m}-\frac{M}{2m}-1\right] = 0$$

$$\omega_2^2 = \omega_0^2\left[1+\frac{M}{2m}+\frac{M}{2m}\left(1+4\frac{m}{M}\right)^{1/2}\right] \simeq \omega_0^2\left[1+\frac{M}{2m}+\frac{M}{2m}\left(1+2\frac{m}{M}\right)\right] = \omega_0^2\left(2+\frac{M}{m}\right)$$

$M << m$

$$\omega_{1/2}^2 = \omega_0^2 \left[1 + \underbrace{\frac{M}{2m}}_{\to 0} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{\left(\frac{M}{m}\right)^2}_{\to 0} + 4\frac{M}{m}} \right] \simeq \omega_0^2 \left[1 \pm \sqrt{\frac{M}{m}} \right]$$