8.2

Friday, December 30, 2022 5:44 PM

Zadanie 2

Znaleźć wartość siły centralnej, która powoduje ruch punktu o masie m po spirali hiperbolicznej $r = \frac{a}{\varphi}$. Znaleźć zależność $\varphi(t)$ jeśli $\varphi(0) = \varphi_\circ$.

Odpowiedź: $F(r) = -\frac{L^2}{mr^3}$, $\varphi(t) = \frac{\varphi_0 ma^2}{ma^2 - Lt\varphi_0}$

$$r = \frac{a}{\varphi} \Rightarrow \omega := \frac{1}{r} = \frac{\varphi}{a}$$

$$\Rightarrow \ddot{\omega} + \omega = -\frac{mF}{L^2\omega^2} \Rightarrow \frac{1}{r} = -\frac{mF\cdot r^2}{L^2} \Rightarrow F = \frac{-L^2}{mr^3}$$

$$m r^2 \dot{\varphi} = L \Rightarrow m \frac{a^2}{\varphi^2}\dot{\varphi} = L$$

$$\Rightarrow \varphi^{-2}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{ma^2}$$

$$\Rightarrow -\varphi^{-1} = \frac{L}{ma^2}t + C$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{-1}{\frac{L}{ma^2}t + C} = \frac{-ma^2}{L\cdot t + C}$$

$$\varphi(0) = \varphi_0 = \frac{-ma^2}{C} \Rightarrow C = -\frac{ma^2}{\varphi_0}$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \frac{a^2 m\varphi_0}{a^2 m - Lt\varphi_0}$$