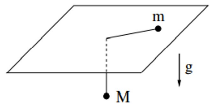
8.9

Friday, December 30, 2022 8:10 PM

Zadanie 9

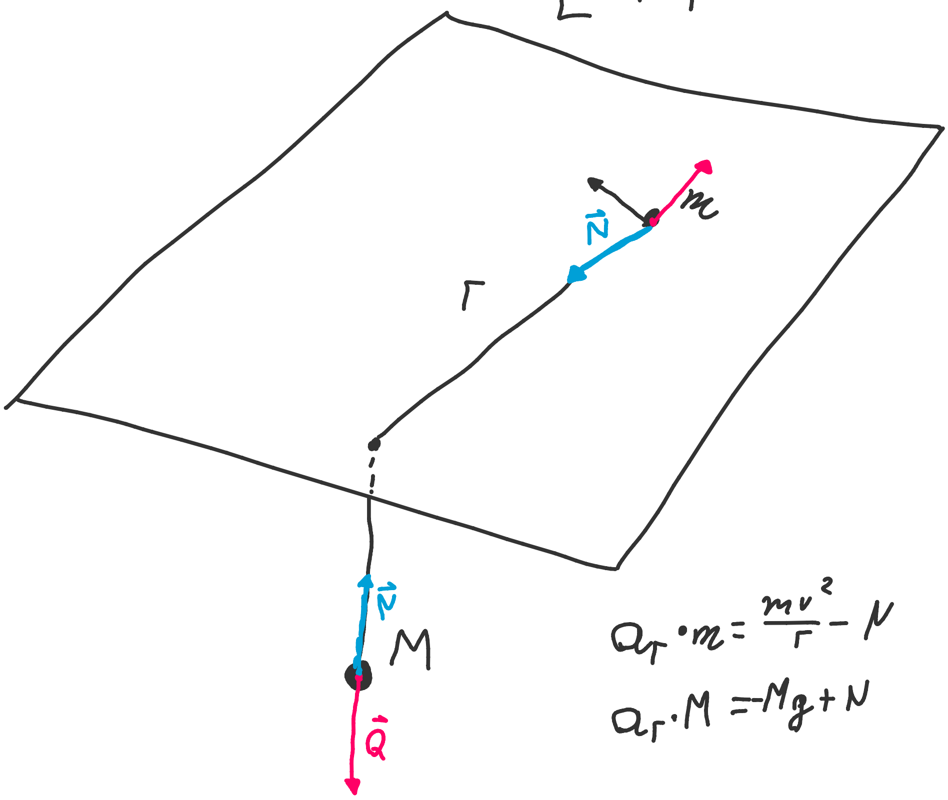
Układ dwóch mas punktowych M i m umieszczono w jednorodnym polu grawitacyjnym o natężeniu $\vec{g}$. Masa m znajduje się na gładkiej płaszczyźnie i jest połączona z masą M cienką, nierozciągliwą nitką przechodzącą przez mały otwór w płaszczyźnie (patrz rysunek). Przyjmij, że: obie masy poruszają się bez tarcia, masa M może poruszać się tylko w pionie oraz moment pędu masy m względem otworu wynosi $\vec{L}$.



- Wyznacz równanie ruchu $f(\ddot{r}, \dot{r}, r) = 0$, gdzie r jest odległością masy m od otworu.
- Dla pewnych warunków początkowych układ znajduje się w stanie równowagi, tzn. $r(t) = r_\circ = const$. W pewnym momencie ruch ten lekko zaburzono, nie zmieniając jednak momentu pędu masy m. Znajdź częstość ω małych drgań pionowych, $h(t) = r(t) - r_0$, masy M.

Odpowiedź: $\ddot{r} - \frac{L^2}{m(M+m)}\frac{1}{r^3} + \frac{Mg}{M+m} = 0$, $\omega^2 = \frac{3L^2}{m(M+m)r_0^4}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = rmv = mr^2\omega$$



rmv

$$a_r \cdot m = \frac{mv^2}{r} - N$$

$$a_r \cdot M = -Mg + N$$

$$\Rightarrow \ddot{r}(m+M) = Mg + \frac{m^2 r^2 v^2}{m r^3}$$

$$\Rightarrow \ddot{r}(m+M) \cancel{+} - \frac{L^2}{m r^3} + Mg = 0 \Rightarrow \ddot{r} \cancel{+} - \frac{L^2}{m(m+M)r^3} + \frac{M}{m+M} g = 0$$

częstość małych drgań będzie taka sama

dla r(t) i h(t)

$$\ddot{r} \cancel{+} - \frac{L^2}{m(m+M)r^3} + \frac{M}{m+M} g = 0 \xrightarrow{r = r_0 + \delta r} \delta\ddot{r} - \frac{L^2}{m(m+M)(r_0+\delta r)^3} + \frac{M}{m+M} g = 0$$

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{m(m+M)r^3} + \frac{M}{m+M}g = 0 \xrightarrow{r = r_0 + \delta r} \delta\ddot{r} - \frac{L^2}{m(m+M)(r_0+\delta r)^3} + \frac{M}{m+M}g = 0$$

$$\frac{1}{(r_0+\delta r)^3} \simeq \frac{1}{r_0^3} - 3\frac{1}{r_0^4}\delta r$$

$$\Rightarrow \quad \delta\ddot{r} + \frac{3L^2}{m(m+M)r_0^4}\delta r + \overbrace{\left(-\frac{L^2}{m(m+M)r_0^3} + \frac{M}{m+M}g\right)}^{0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \delta\ddot{r} + \frac{3L^2}{m(m+M)r_0^4}\delta r = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{3L^2}{m(m+M)r_0^4}$$