MECHANIKA KLASYCZNA

zad 10.2 Wyznacz postać siły centralnej powodującej ruch punktu pod masą m po spirali hiperbolicznej

$$r(\varphi) = \frac{a}{\varphi}$$

Znaleźć także zależność $\varphi = \varphi(t)$. Czy otrzymany wzór na siłę nie wygląda dziwnie?

• wzór Bineta $\frac{d^2}{d\varphi^2}\frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{-mr^2 F_r(r)}{L^2}$

$$\frac{1}{r} = \frac{\varphi}{a}$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{a} \qquad \frac{d^2}{d\varphi^2} = 0$$

$$\frac{1}{r} \to \frac{\varphi}{a} = \frac{-mr^2 F_r(r)}{L^2} \qquad F_r(r) = \frac{L^2 \varphi}{-mr^2 a}, \quad \varphi = \frac{a}{r}$$

$$F_r(r) = -\frac{L^2}{mr^3}$$

$F_r(r)$ nie zależy od a. W zad 10.1 a musiała być proporcjonalna do m/L^2 (gdzie $r(\varphi) = a/(1+\cos\varphi)$), ale w naszym przypadku siła nie zależy od a, więc jest ona po prostu niezależna od warunków początkowych

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} \qquad \left(\text{bo } dt = (mr^2/L)\,d\varphi \atop \text{z } m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0 \right)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{L\varphi^2}{ma^2} \qquad \frac{\dot{\varphi}}{\varphi^2} = \frac{L}{ma^2}$$

$$-\frac{1}{\varphi} = \frac{L}{ma^2}t + C_1 \quad \text{stała}$$

$$\varphi = \frac{-1}{\frac{Lt}{ma^2} + C_1} \qquad \varphi(t) = \frac{-ma^2}{Lt + C}$$

Niech $y(0) = y_0$

$$y_0 = \frac{-ma^2}{C} \qquad C = \frac{-ma^2}{y_0}$$

$$y(t) = \frac{-ma^2}{Lt \cancel{\#} - \frac{ma^2}{y_0}} = \frac{-y_0 ma^2}{Lty_0 - ma^2}$$

Zad 10.3