$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} : \begin{array}{l} x+2y-t=0 \\ y+3z+t=0 \\ x-6z-3t=0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -6 & -3 \end{bmatrix} \overset{w}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -6 & -3 \end{bmatrix} \overset{w}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} y+3z+t=0 \\ x-6z-3t=0 \\ y=-3z-t \\ x=6z+3t \end{array}\right\} \Rightarrow \text{wektory postaci } \begin{bmatrix} 6z+3t \\ -3z-t \\ z \\ t \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \text{span}\Bigg(\overbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\text{baza}}\Bigg) \qquad \begin{cases} y=-3z-t \\ x=6z+3t \end{cases} \rightarrow \text{układ równań opisujący } V_1$$

$$V_2 = \text{span}\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \overset{k}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{k}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{k}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad V_2 = \text{span}\Bigg(\overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\text{baza}}\Bigg)$$

$$a\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=-b \\ y=3a+2b \\ z=2a \\ t=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=\frac{3}{2}z+2t \end{cases} \leftarrow \text{układ równań } V_2$$

$$V_1+V_2 = \text{span}\left( \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{k}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 9 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{k}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 9 & 5 & -15 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -12 & 1 \end{bmatrix} \overset{k}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 9 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \overset{k}{\sim}$$

$$\overset{k}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \ldots$$

$$\overset{k}{\sim}\begin{bmatrix}0&0&-4\\3&5&3\\2&0&0\\0&4&0\end{bmatrix} \Rightarrow V_1+V_2=\operatorname{span}\left(\begin{bmatrix}0\\3\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\5\\0\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\3\\0\\6\end{bmatrix}\right)$$

$$a\begin{bmatrix}0\\3\\2\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\5\\0\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-4\\3\\0\\6\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=-4c\\y=3a+5b+3c\\z=2a\\t=4b+6c\end{cases} \Rightarrow b=\frac{1}{4}t-\frac{3}{2}c=\frac{1}{4}t+\frac{3}{8}x$$

$$\frac{3}{8}x+-\frac{3}{4}x=-\frac{3}{8}x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=4c\\y=\frac{3}{2}z+\frac{1}{4}t-\frac{3}{8}x\\z=2a\\t=4b-\frac{3}{2}x\end{cases} \Rightarrow y=\frac{3}{2}z+\frac{1}{4}t-\frac{3}{8}x$$

Wektory należące do $V_1 \cap V_2$ muszą dawać się wyrazić przez wektory bazowe $V_1$ oraz $V_2$

$V_1 \cap V_2$ :

$$a\begin{bmatrix}6\\-3\\1\\6\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}3\\-1\\0\\1\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}0\\3\\2\\0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}-1\\2\\0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow a\begin{bmatrix}6\\-3\\1\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}3\\-1\\0\\1\end{bmatrix}-c\begin{bmatrix}0\\3\\2\\0\end{bmatrix}-d\begin{bmatrix}-1\\2\\0\\1\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}6&3&0&1\\-3&-1&-3&-2\\1&0&-2&0\\6&1&0&-1\end{bmatrix}\overset{w}{\sim}\begin{bmatrix}6&3&0&1\\9&5&-3&0\\1&0&-2&0\\6&4&0&0\end{bmatrix}\overset{w}{\sim}\begin{bmatrix}0&3&12&1\\0&5&15&0\\1&0&-2&0\\0&4&12&0\end{bmatrix}\overset{w}{\sim}\begin{bmatrix}0&3&12&1\\0&1&3&0\\1&0&-2&0\\0&1&3&0\end{bmatrix}\overset{w}{\sim}$$

$$\overset{w}{\sim}\begin{bmatrix}0&3&12&1\\0&1&3&0\\1&0&-2&0\end{bmatrix}\overset{w}{\sim}\begin{bmatrix}0&0&3&1\\0&1&3&0\\1&0&-2&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}3c+d=0\\b+3c=0\\a-2c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d=-3c\\b=-3c\\a=2c\end{cases}$$

$$c\begin{bmatrix}0\\3\\2\\0\end{bmatrix}-3c\begin{bmatrix}-1\\2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3c\\3c-6c\\2c\\-3c\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}3\\-3\\2\\-3\end{bmatrix}$$

baza $V_1 \cap V_2$

$$\begin{cases}x=3c\\y=-3c\\z=2c\\t=-3c\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=-x\\z=\frac{2}{3}x\\t=-x\end{cases}$$

układ równań $V_1 \cap V_2$