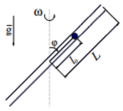
7.4

Wednesday, January 11, 2023 9:46 PM

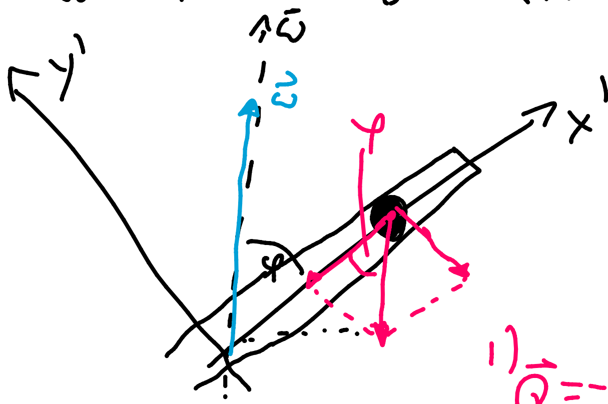
Zadanie 4

Rurka o długości $2L$ obraca się w polu siły ciężkości ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}$ wokół osi przechodzącej przez jej środek i równoległej do $\vec{g}$ (rysunek obok). Oś rurki nachylona jest do osi obrotu pod kątem φ. Wewnątrz rurki, w odległości l_0 od jej środka, znajduje się kulka o masie m przywiązana do nitki, która jest napięta. W pewnym momencie nitka pęka i kulka zaczyna się poruszać. Znaleźć: ruch kulki $r(t)$, siły reakcji działające na kulkę $\vec{F}(t)$ oraz wektor prędkości w momencie T gdy kulka opuszcza rurkę $\vec{v}$.



Odpowiedź: W układzie związanym z rurką, oś z prostopadła do rurki, skierowana do góry:
$x(t) = 2A\cosh[\omega\sin(\varphi)t] + \frac{g\cos(\varphi)}{\omega^2\sin^2(\varphi)}$, $A = \frac{1}{2}\left(l_0 - \frac{g\cos(\varphi)}{\omega^2\sin^2(\varphi)}\right)$,
$\vec{F}(t) = (0, 4Am\omega^2\sin^2(\varphi)\sinh[\omega\sin(\varphi)t], mg\sin(\varphi) + \frac{1}{2}m\omega^2 x\sin(2\varphi))$.
W układzie nieobracającym się, pokrywającym się w układem rurki w chwili $t = 0$:
$\vec{v} = [v(L)\sin(\varphi)\cos(\omega t) - \omega L\sin(\varphi)\sin(\omega t), v(L)\sin(\varphi)\sin(\omega t) + \omega L\sin(\varphi)\cos(\omega t), v(L)\cos(\varphi)]$,
$v(L) = 2A\omega\sin(\varphi)\sinh[\omega\sin(\varphi T)]$

$$\vec{a}'m = \vec{F} - m\vec{a}_0 - m\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right) - 2m(\vec{\omega}\times\vec{v}) - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$



siły:

1) Ciężkości

2) Reakcji

1) $\vec{Q} = -mg\cos\varphi\,\hat{e}_{x'} - mg\sin\varphi\,\hat{e}_{y'}$

$\vec{\omega} = \omega\cos\varphi\,\hat{e}_{x'} + \omega\sin\varphi\,\hat{e}_{y'}$

2) $\vec{R} = R_{y'}\hat{e}_{y'} + R_{z'}\hat{e}_z$

$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$

$\vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times(\dot{x}\cdot\hat{e}_{x'}) = -\dot{x}\omega\sin\varphi\,\hat{e}_z$

$\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times x\cdot\hat{e}_{x'}) = \vec{\omega}\times(-\omega\sin\varphi\cdot x\hat{e}_z) =$

$= \omega^2 x\sin\varphi\cos\varphi\,\hat{e}_{y'} - \omega^2 x\sin^2\varphi\,\hat{e}_{x'}$

x':

$\Rightarrow m\ddot{x} = -mg\cos\varphi - \omega^2 m\sin^2\varphi\cdot x$

$\Rightarrow$

$\ddot{x} + \omega^2\sin^2\varphi\cdot x = g\cos\varphi$

RORJ:

$x = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + \omega^2\sin^2\varphi = 0 \Rightarrow \lambda = \omega\sin\varphi;\ \lambda_2 = -\omega\sin\varphi$

RSRN:

$x = B \Rightarrow \omega^2\sin^2\varphi\cdot B = g\cos\varphi$

$\Rightarrow \quad g\cos\varphi$

$$x=B \Rightarrow \omega^2 \sin^2\varphi \cdot B = g\cos\varphi$$

$$\Rightarrow B = \frac{g\cos\varphi}{\omega^2 \sin^2\varphi}$$

$$\Rightarrow \text{RORN: } x = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t} + B$$

$$x(0)=\varphi_0 \Rightarrow C_1 + C_2 + B = \varphi_0$$

$$\dot{x}(0)=0 \Rightarrow C_1 - C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 \Rightarrow C_1 = \frac{\varphi_0}{2} - \frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow x = 2C_1 \frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2} + B = 2C_1 \cosh(\omega \sin\varphi \cdot t) + \frac{g\cos\varphi}{\omega^2 \sin^2\varphi}$$

$$C_1 = \frac{\varphi_0}{2} - \frac{g\cos\varphi}{2\omega^2 \sin^2\varphi}$$

y:

$$0 = -mg\sin\varphi + R_y - m\omega^2 x \sin\varphi\cos\varphi$$

$$\Rightarrow R_y = mg\sin\varphi + m\omega^2 x \sin\varphi\cos\varphi = mg\sin\varphi + \tfrac{1}{2} m\omega^2 \sin(2\varphi)$$

z:

$$0 = R_z + 2m\dot{x}\omega\sin\varphi \Rightarrow R_z = -2m\dot{x}\omega\sin\varphi$$

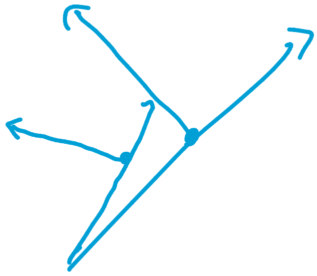
$$x = 2C_1\cosh(\omega\sin\varphi t) + B \Rightarrow \dot{x} = 2\omega\sin\varphi\, C_1 \sinh(\omega\sin\varphi \cdot t)$$

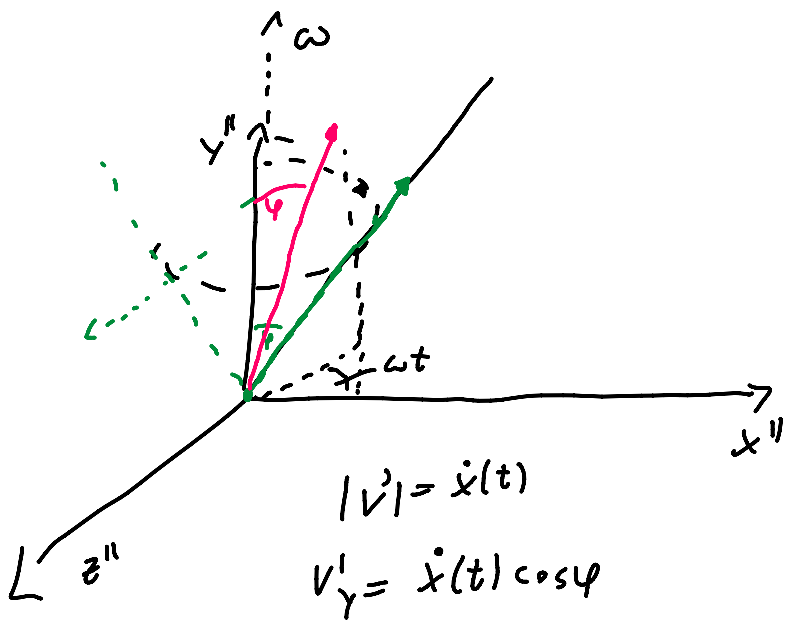
$$\Rightarrow R_z = -4m\omega\sin\varphi\, C_1 \sinh(\omega\sin\varphi \cdot t)$$

$$x = L = 2C_1\cosh(\omega\sin\varphi \cdot T) + B$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{\omega\sin\varphi} \operatorname{arcosh}\left(\frac{L-B}{2C_1}\right)$$

$$\dot{x}(T) = 2\omega\sin\varphi\, C_1 \sinh(\omega\sin\varphi \cdot T)$$





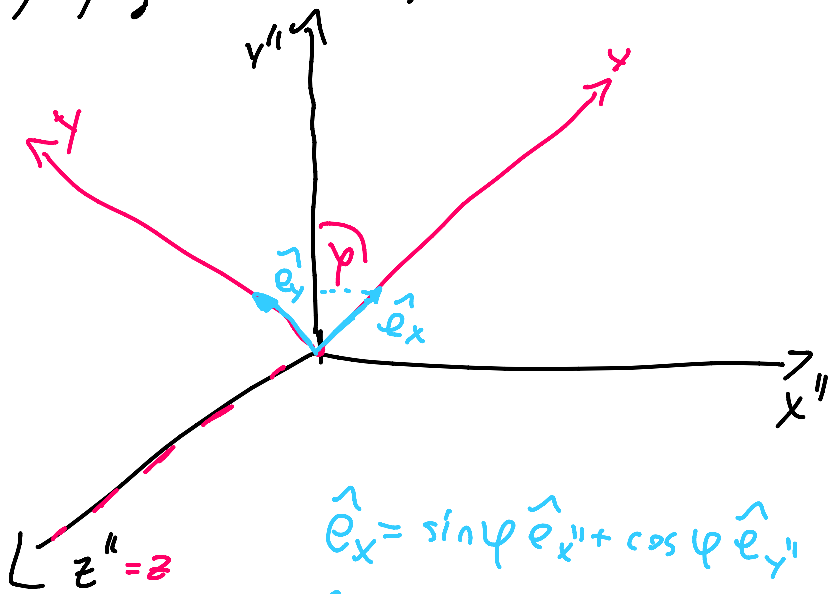
$$|\vec{v}'| = \dot{x}(t)$$

$$v'_y = \dot{x}(t)\cos\varphi$$

$$v'_z = \dot{x}(t)\sin\varphi \cdot \sin(\omega t)$$

$$v'_x = \dot{x}(t)\sin\varphi \cdot \cos(\omega t)$$

narysujmy układ xyz w układzie $x''y''z''$



$$\hat{e}_x = \sin\varphi\, \hat{e}_{x''} + \cos\varphi\, \hat{e}_{y''}$$

$$\hat{e}_y = -\cos\varphi\, \hat{e}_{x''} + \sin\varphi\, \hat{e}_{y''}$$

$$\vec{v}' \cdot \hat{e}_x = \dot{x}(t)\sin\varphi \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin\varphi + \dot{x}(t)\cos\varphi \cdot \cos\varphi$$

$$\vec{v}' \cdot \hat{e}_y = -\dot{x}\sin\varphi\cos(\omega t)\cos\varphi + \dot{x}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\vec{v}' \cdot \hat{e}_z = \dot{x}\sin\varphi\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \vec{V}' = \left(\dot{x}\sin^2\varphi\cos(\omega t) + \dot{x}\cos^2\varphi\right)\hat{e}_x +$$
$$+ \left(-\dot{x}\sin\varphi\cos\varphi\cos(\omega t) + \dot{x}\sin\varphi\cos\varphi\right)\hat{e}_y$$
$$+ \dot{x}\sin\varphi\sin(\omega t)\hat{e}_z$$

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'$$

$$\vec{r}' = \left(x\sin^2\varphi\cos(\omega t) + x\cos^2\varphi\right)\hat{e}_x +$$
$$+ \left(-x\sin\varphi\cos\varphi\cos(\omega t) + x\sin\varphi\cos\varphi\right)\hat{e}_y$$
$$+ x\sin\varphi\sin(\omega t)\hat{e}_z$$

$x\omega\cos\varphi(\sin^2 + \cos^2\varphi)$

$$\vec{\omega} = \omega\sin\varphi\cdot\hat{e}_x \cancel{+\omega\cos\varphi}\,\hat{e}_y$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}\times\vec{r} = \left(-x\omega\sin\varphi\cos\varphi\cdot\sin\omega t\right)\hat{e}_x + \left(-x\omega\sin^2\varphi\sin(\omega t)\,\hat{e}_y\right)$$

$$+ \left(-x\omega\sin^2\cancel{\varphi\cos\varphi}\cos(\omega t) + x\omega\sin^2\varphi\cos\varphi + x\omega\cancel{\sin^2}\varphi\cos\omega t + x\omega\cos^3\varphi\right)\hat{e}_z$$

$$\vec{\omega}\times\vec{r} = \left[-x\omega\sin\varphi\cos\varphi\cdot\sin\omega t, -x\omega\sin^2\varphi\sin(\omega t), x\omega\cos\varphi - x\omega\sin^2\varphi\right]$$

$$\Rightarrow \vec{V}(T) = \vec{V}'(T) + (\vec{\omega}\times\vec{r})(T) =$$

$$= \Big[\dot{x}(T)\sin^2\varphi\cos(\omega T) + \dot{x}(T)\cos^2\varphi - L\omega\sin\varphi\cos\varphi\sin\omega T,$$
$$-\dot{x}(T)\sin\varphi\cos\varphi\cos(\omega T) + \dot{x}(T)\sin\varphi\cos\varphi - \omega L\sin^2\varphi\sin(\omega T),$$
$$\dot{x}(T)\sin\varphi\sin(\omega T) + L\omega(\cos\varphi - \sin^2\varphi)\Big]$$