UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL

FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRONICA

ANÁLISIS DE SEÑALES Y SISTEMAS

Ejercicios de modelización

2019

1. Termotanque

Este modelo consta de dos sistemas a analizar por separado:

- Hidraulico: valor para el que se estabiliza el flujo de salida $Q_o(t)$ gracias al flujo de entrada $Q_i(t)$.
- Termico: valor de la temperatura alcanzada por el tanque gracias a la potencia de entrada $P_{ot}(t)$.

Donde las señales de entradas son:

$$Q_i(t) = 2u(t) \tag{1}$$

$$P_{ot}(t) = 6[\rho(t) - \rho(t-1)] \tag{2}$$

y los datos:

magnitud	valor	unidades
Θ_{AMB}	20	°C
P_{ATM}	0	N/m^2
C_{TH}	2	$Ws/$°C
R_{TH}	0.5	°C$/W$
C_H	5	m^5/N
R_H	0.8	Ns/m^5

Nota: para el analisis y modelado de los sistemas se emplean analogias electricas de los mismo, aunque esto no es una condicion necesaria. Ademas, para la resolucion de las ecuaciones diferenciales se utiliza el metodo: $S_{General} = S_{Homogena} + S_{Particular}$

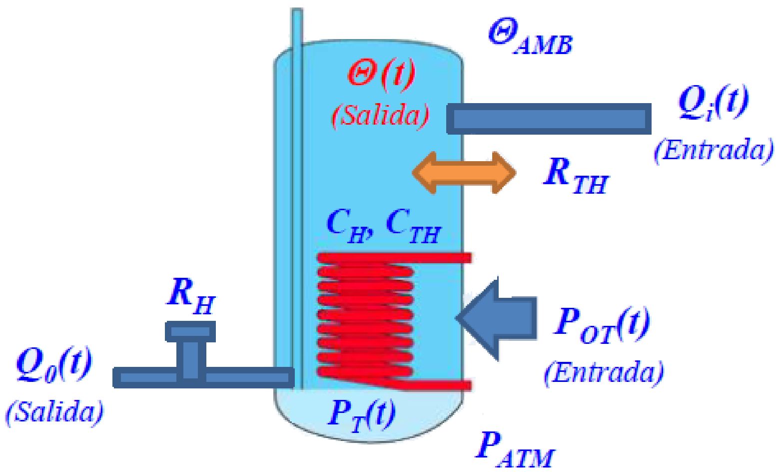

Figura 1: Termotanque.

1.1. Hidraulico

Para realizar la equivalencia electrica se tiene en cuenta que el flujo total de agua entregada al modelo es en primera instancia contenido por el termotanque (capacitor) mientras drena a través de una llave de paso (resistencia).

Por lo tanto la *corriente* se corresponde con el flujo de agua recibido, mientras que el *potencial* con la presión hidraulica P_h.

El circuito resultante sera:

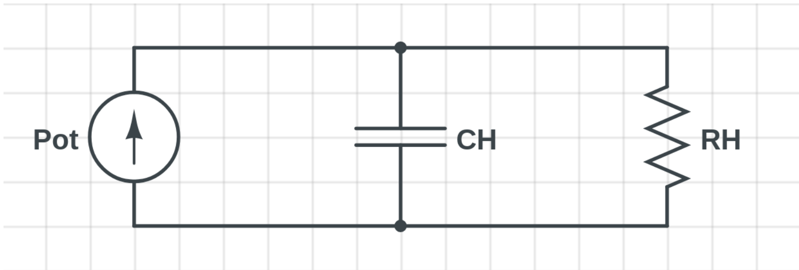

Figura 2: Analogia electrica del sistema hidraulico.

Aplicando la primera ley de Kirchhoff y con las consideraciones mensionadas la ecuacion diferencial del modelo resulta:

$$Q_i(t) = C_H \frac{d}{dt} P_h + \frac{1}{R_H} P_h \tag{3}$$

Normalizando al termino de mayor orden resulta:

$$\frac{Q_i(t)}{C_H} = \frac{d}{dt} P_h + \frac{1}{R_H.C_H} P_h \tag{4}$$

La señal de entrada se corresponde con una función constante, lo que simplifica el analisis.

Solucion particular

La solucion propuesta sera:

$$S_{particular} = A \tag{5}$$

y su derivada:

$$\frac{d}{dt} S_{particular} = 0 \tag{6}$$

por lo tanto:

$$\frac{Q_i(t)}{C_H} = 0 + A \tag{7}$$

reemplazando:

$$S_{particular} = \frac{8}{5} \tag{8}$$

Solucion homogenea

Para la solucion homogenea se propone:

$$S_{Homogenea} = Ae^{\lambda t} \tag{9}$$

y su derivada:

$$\frac{d}{dt}S_{Homogenea} = \lambda Ae^{\lambda} \tag{10}$$

su polinomio caracteristico sera:

$$Ae^{\lambda}(\lambda + \frac{1}{4}) = 0 \tag{11}$$

por lo tanto:

$$S_{Homogenea} = Ae^{-\frac{1}{4}t} \tag{12}$$

Solucion General

La solucion general resultante sera:

$$S_{General} = Ae^{-\frac{1}{4}t} + \frac{8}{5} \tag{13}$$

El valor de la constante A depende de las condiciones de borde. Considerando $t = 0$ entonces:

$$S_{General}(t = 0) = A + \frac{8}{5} \tag{14}$$

$$A = -\frac{8}{5} \tag{15}$$

por lo tanto:

$$S_{General} = -\frac{8}{5}e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{8}{5} \tag{16}$$

1.2. Grafico

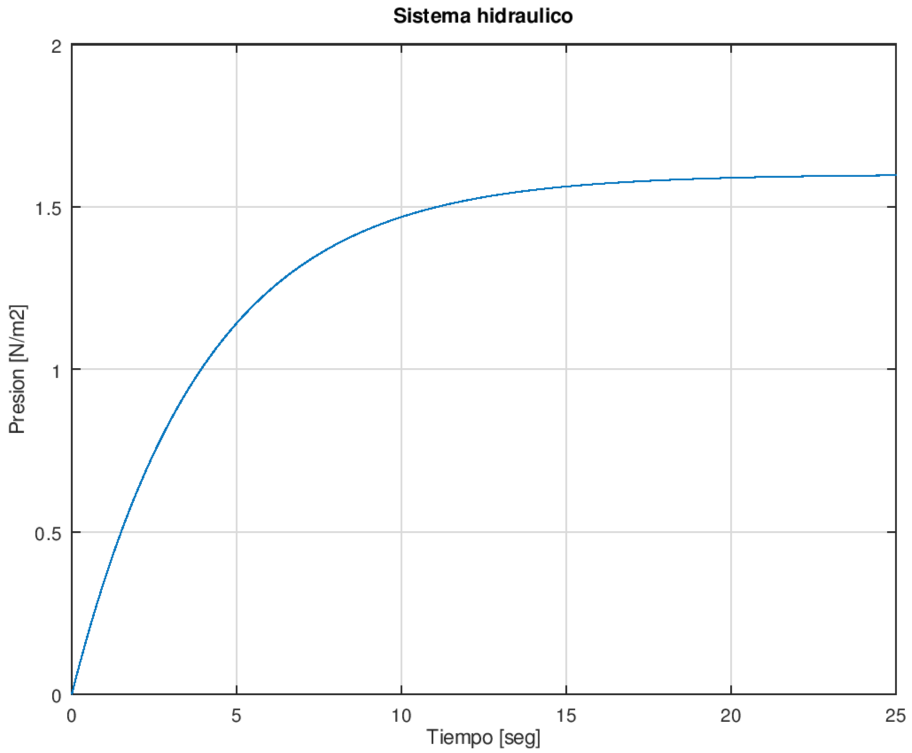

Figura 3: Comportamiento del sistema Hidraulico.

1.3. Termico

Para realizar la equivalencia electrica se tiene en cuenta que el sistema intentará almacenar la potencia entregada al mismo en el termotanque (capacitor), aunque inevitablemente parte de esta energia se disipa en el medio sin posibilidad de recuperarla (resistencia).

Por lo tanto la *corriente* se corresponde con la potencia de entrada, mientras que el *potencial* con la temperatura.

Nota: Los calculos y graficos del modelo se considerar respecto a la tempratura ambiente.

El circuito resultante sera:

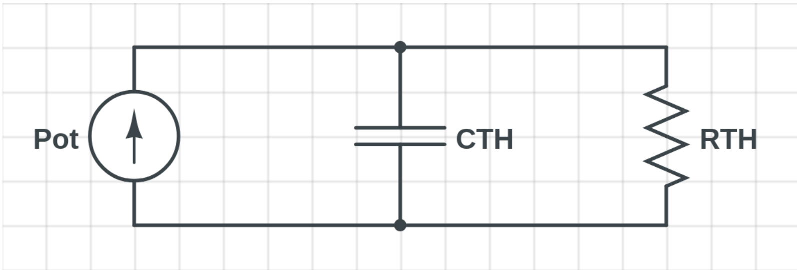

Figura 4: Analogia electrica del sistema termico.

Aplicando la primera ley de Kirchhoff y con las consideraciones mensionadas la ecuacion diferencial del modelo resulta:

$$P_{ot}(t) = C_{TH}\frac{d}{dt}\Theta + \frac{1}{R_{TH}}\Theta \tag{17}$$

Normalizando al termino de mayor orden resulta:

$$\frac{P_{ot}(t)}{C_{TH}} = \frac{d}{dt}\Theta + \frac{1}{R_{TH}.C_{TH}}\Theta \tag{18}$$

Debido a la señal de entrada $P_{ot}(t) = 6[\rho(t) - \rho(t-1)]$ para la resolución se opta por fraccionar el dominio del tiempo en dos intervalos:

- $0 \leq t_1 \leq 1$
- $1 \leq t_2 \leq \infty$

1.3.1. Intervalo $0 \leq t_1 \leq 1$

Solucion particular

Para este intervalo la señal de entrada $P_{ot}(t)$ se corresponde con una funcion lineal, por lo que la solucion propuesta sera:

$$S_{particular} = At + B \tag{19}$$

y su derivada:

$$\frac{d}{dt}S_{particular} = A \tag{20}$$

por lo tanto:

$$\frac{P_{ot}(t)}{C_{TH}} = A + (At + B) \tag{21}$$

reemplazando:

$$S_{particular} = 3t - 3 \tag{22}$$

Solucion homogenea

Para la solucion homogenea se propone:

$$S_{Homogenea} = Ae^{\lambda t} \tag{23}$$

y su derivada:

$$\frac{d}{dt}S_{Homogenea} = \lambda Ae^{\lambda} \tag{24}$$

su polinomio caracteristico sera:

$$Ae^{\lambda}(\lambda + 1) = 0 \tag{25}$$

por lo tanto:

$$S_{Homogenea} = Ae^{-t} \tag{26}$$

Solucion General

La solucion general resultante sera:

$$S_{General} = Ae^{-t} + 3t - 3 \tag{27}$$

El valor de la constante A depende de las condiciones de borde. Considerando $t = 0$ entonces:

$$A = 3 \tag{28}$$

por lo tanto:

$$S_{General} = 3e^{-t} + 3t - 3 \tag{29}$$

1.3.2. $1 \leq t_2 \leq \infty$

Solucion particular

Para este intervalo la señal de entrada $P_{ot}(t)$ se corresponde con una constante, por lo que la solucion propuesta sera:

$$S_{particular} = A \tag{30}$$

y su derivada:

$$\frac{d}{dt}S_{particular} = 0 \tag{31}$$

por lo tanto:

$$\frac{P_{ot}(t)}{C_{TH}} = 0 + A \tag{32}$$

reemplazando:

$$S_{particular} = 3 \tag{33}$$

Solucion homogenea

La solucion homogenea se corresponde con la encontrada para el intervalo de tiempo anterior.

Nota: el valor resultante en $t = 1$ debe ser el mismo para ambas modelizaciones, razón por la que las condiciones de borde no seran las mismas.

Solucion General

La solucion general resultante sera:

$$S_{General} = Ae^{-t} + 3 \tag{34}$$

considerando la ecuacion (29) se calculan las condiciones iniciales. Entonces:

$$S_{General}(t = 1) = 3e^{-1} \tag{35}$$

por lo tanto:

$$Ae^{-1} + 3 = 3e^{-1} \tag{36}$$

$$A = 3 - 3e \tag{37}$$

$$S_{General} = 3(1 + e^{-t} + e^{1-t}) \tag{38}$$

1.3.3. Grafico

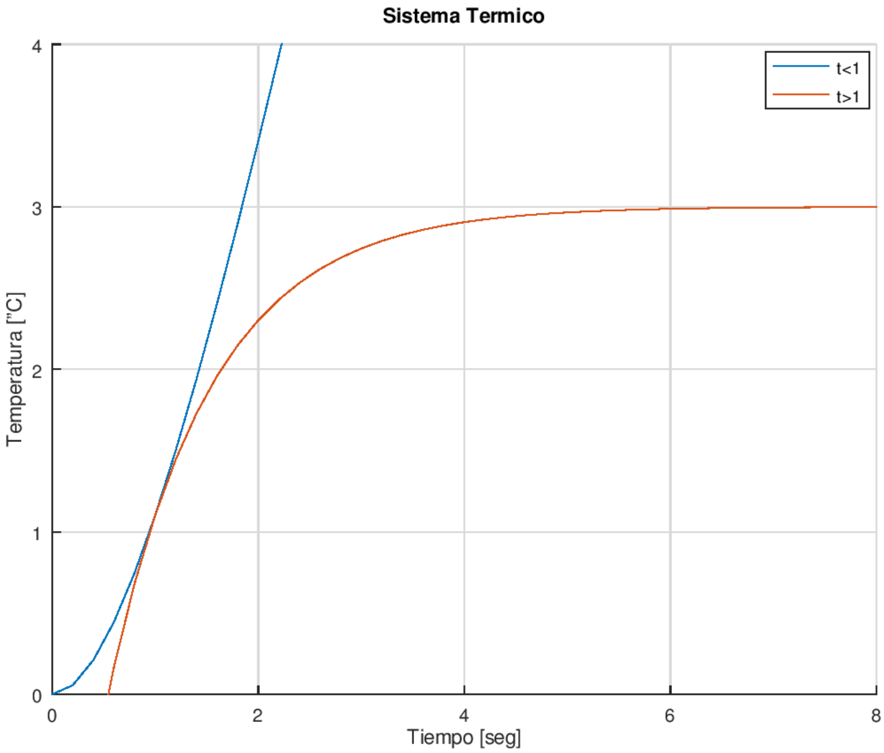

Figura 5: Comportamiento del sistema Termico.