Laboratorio 2
Análisis espectral usando la DFT/FFT

El uso del análisis de Fourier para determinar el contenido espectral de señales continuas en el tiempo es directo por medio de integrales o tablas de transformadas y propiedades, y para señales de tiempo discreto o muestreadas se aplican las transformadas directa e inversa discretas de Fourier. En este último caso, es necesario considerar ciertas precauciones para que los resultados tengan significado real, de no ser así, los resultados obtenidos pueden parecer válidos sin el usuario darse cuenta de que la salida no es correcta.

Al modelar señales con algún software se requiere representar las señales con muestras, debido a la naturaleza discreta de las computadoras que no pueden generar un continuum de tiempo o frecuencia. Por esto, entre las consideraciones que deben tomarse en cuenta para modelar sistemas muestreados están: la razón o periodo de muestreo, las resoluciones de tiempo y frecuencia, y qué transformaciones discretas (directa o inversa) de frecuencia se realizarán.

La Transformada de Fourier para señales muestreadas se realiza en OCTAVE por medio del algoritmo FFT (transformada rápida de Fourier) en el caso en que el número de muestras sea una potencia de 2, de lo contrario se utiliza DFT.

En este laboratorio se estudiarán los comandos, procedimientos y algunas técnicas para realizar el análisis espectral de señales. Adicionalmente se estudian las señales y sistemas (filtros) en el dominio de la frecuencia.

Objetivos:

- Utilizar una herramienta de análisis matemático y simulación para confirmar algunos conceptos importantes sobre el análisis de señales en el dominio de la frecuencia.
- Utilizar la DFT y FFT para calcular el espectro de una señal y estudiar el intercambio entre la resolución de la frecuencia y la fuga espectral.
- Analizar el efecto de los filtros en el ancho de banda d las señales

Algunos parámetros y relaciones importantes que es necesario considerar para obtener resultados correctos en el análisis espectral:

a. Definición de una frecuencia de muestreo Fs (Teorema de Nyquist)
b. Definición de un número de muestras *N* (preferiblemente una potencia de 2).
c. Relaciones tiempo-frecuencia para la transformación directa e inversa de Fourier. ¡Note las correspondencias tiempo-frecuencia!

dt = 1/Fs	periodo de muestreo
T = N*dt	tiempo total de la señal
t = (0:N-1)*dt	vector tiempo, max(t) = T – dt
df = 1/T	resolución de frecuencia
Fs = N*df	frecuencia de muestreo

La razón de todo esto es enfatizar que para ir del espectro de frecuencia a la señal temporal, vía ifft,

X(f) = **fft**(x) o Xc(fc) =**fftshift**(X)

debe definirse sobre el intervalo completo indicado arriba.
Recuerde que el espectro es complejo, es necesario considerar la parte real y la imaginaria, o la magnitud y la fase.

Algunas observaciones sobre el uso de las funciones *fft* y *ifft* en Octave:

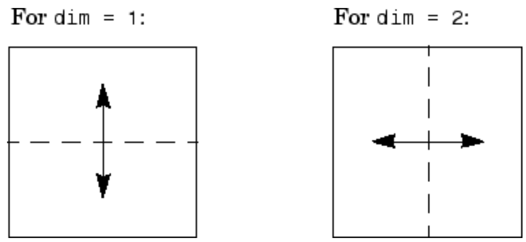
- El programa utiliza el mismo algoritmo para calcular tanto *fft* como la inversa *ifft*. Por esta razón el programa no escala apropiadamente la salida. Recuerde que la sumatoria para *fft* debe dividirse entre N (el número de muestras) y que la sumatoria para *ifft* debe multiplicarse por N. Octave no realiza estas operaciones, por lo que deberá incluirlas.
- Al calcular la *fft*, el rango de frecuencias de los resultados se extiende hasta f_{max} (la frecuencia de muestreo). Sin embargo, ya que la máxima entrada para la señal es $f_{max}/2$, solamente la mitad de la gráfica o de los puntos son relevantes (referidos arriba como puntos únicos Q); la segunda mitad es solamente una imagen espejo de la mitad izquierda.
- Hay dos soluciones para prevenir que las frecuencias imagen confundan al usuario: graficar solamente la primera mitad de los puntos o utilizar el comando *fftshift* de Octave para correr todo el espectro a la izquierda $fs/2$, invertirlo y desplazarlo a la izquierda de DC.
- Esto último también resulta de gran importancia para obtener la transformada inversa a partir de muestras del espectro de una señal.

FFT y FFTSHIFT

Y = fft(X) computes the discrete Fourier transform (DFT) of X using a fast Fourier transform (FFT) algorithm.
If X is a vector, then fft(X, NFFT) returns the Fourier transform of the vector using NFFT points.
If X is a matrix, then fft(X, NFFT) treats the columns of X as vectors and returns the Fourier transform of each column using NFFT points.

Y = fft(X,n) returns the n-point DFT. If no value is specified, Y is the same size as X.
If X is a vector and the length of X is less than n, then X is padded with trailing zeros to length n.
If X is a vector and the length of X is greater than n, then X is truncated to length n.
If X is a matrix, then each column is treated as in the vector case.

Shift zero-frequency component to center of spectrum
Y = fftshift(X) rearranges the outputs of fft by moving the zero-frequency component to the center of the array. It is useful for visualizing a Fourier transform with the zero-frequency component in the middle of the spectrum.
For vectors, fftshift(X) swaps the left and right halves of X.



Note: ifftshift will undo the results of fftshift. If the matrix X contains an odd number of elements, ifftshift(fftshift(X)) must be done to obtain the original X. Simply performing fftshift(X) twice will not produce X.

a. Forme una señal $x(t)$ de 1000-puntos (N) de longitud (en el tiempo) que contenga una onda coseno de **100 Hz** con **amplitud 0.8** y una onda seno de **200 Hz** con **amplitud 1.2**. Use una frecuencia de muestreo de 1 kHz. ¿Cuál es la resolución de frecuencia df?
b. Calcule la transformada discreta de Fourier de la señal.
c. Calcule el espectro de amplitud de un solo lado X1. También calcule el espectro de doble lado X2.
d. Defina los soportes para cada espectro.
e. En una sola figura usando tres gráficas (una debajo de la otra), grafique la señal en el dominio del tiempo, y los espectros de amplitud de un solo lado y de doble lado, de la señal.

Adición de ceros

La adición de ceros (*zero padding*) se usa para mejorar la estimación de las componentes de frecuencia de una señal. Las frecuencias en la transformada discreta de Fourier están espaciadas en intervalos de Fs/N (df, resolución de frecuencia). Cuando se intenta estimar la amplitud de una componente de una sinusoide con una frecuencia que no corresponde a un *DFT bin* puede resultar una estimación no precisa. La adición de ceros a los datos antes de calcular la DFT ayuda a mejorar la precisión de las amplitudes estimadas.

a. Forme una señal $x(t)$ de 1000-puntos de longitud (en el tiempo) que contenga una onda seno de **100 Hz** con **amplitud 1** y una onda seno de **202.5 Hz** con **amplitud 2**. Use una frecuencia de muestreo de 1 kHz. ¿Cuál es la resolución de frecuencia df? ¿se tendrá una buena estimación de las amplitudes de las sinusoides que conforman la señal?
b. Calcule la transformada discreta de Fourier de la señal y grafique el espectro de un solo lado en el intervalo [0 300 Hz]. ¿Qué observa? ¿son correctas las amplitudes de las componentes sinusoidales de la señal?

Se puede interpolar la DFT por medio de la adición de ceros, lo que permite mejorar la estimación de las amplitudes de las componentes espectral de una señal. Por otro lado, la adición de ceros no mejora la resolución espectral de la DFT. La resolución espectral está determinada por el número de muestras (N) y la razón de muestreo (Fs).

c. Calcule la DFT de la señal usando una longitud de 2000 puntos (para la FFT). ¿Con esta longitud, cuál es la separación entre Calcule la DFT de la señal usando una longitud de 2000 puntos. ¿Con esta longitud, cuál es la separación entre los *DFT bins*? Grafique el espectro de un solo lado. ¿Qué observa? ¿son correctas las amplitudes de las componentes sinusoidales de la señal?

Señales y sistemas

Una señal de un solo tono $s = \sin(400\pi t)$ se transmite a un amplificador de audio y bocina para producir una señal de advertencia. Un filtro con respuesta al impulso $h = 200\, e^{-100t}\cos(400\pi t)u(t)$ se ha diseñado para reducir la interferencia aditiva en la señal recibida.

a. Determine la señal de salida del filtro, y, cuando se recibe la señal de entrada $x = [\cos(100\pi t) + \sin(400\pi t) - \cos(800\pi t)]\, u(t)$.
b. Determine el espectro de magnitud de las señales de entrada y salida, y la magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro.
c. En una misma figura (en un arreglo 3x2) grafique las señales del tiempo *h*, *x* y *y* (en la primera columna) y sus espectros de magnitud correspondientes en la segunda columna.