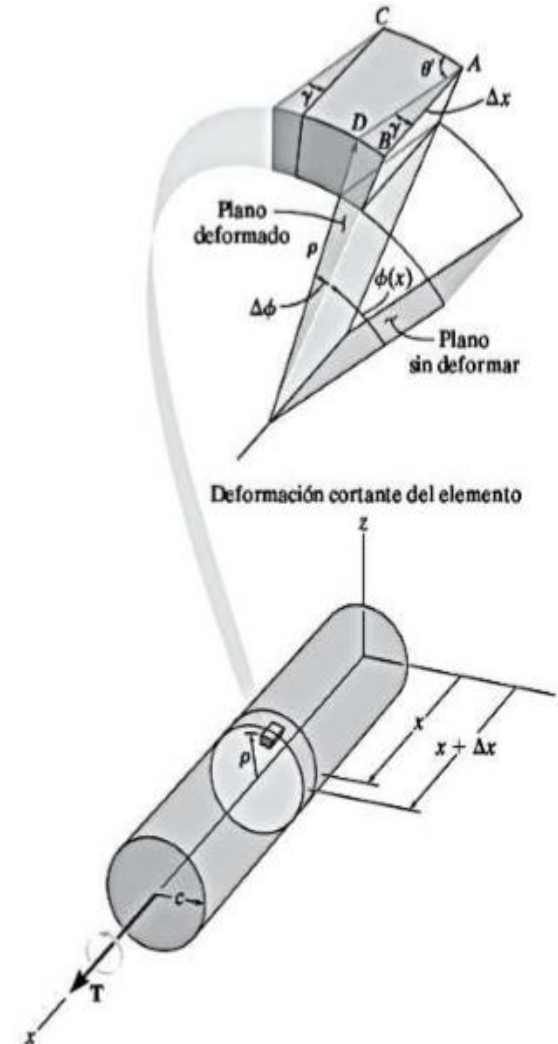
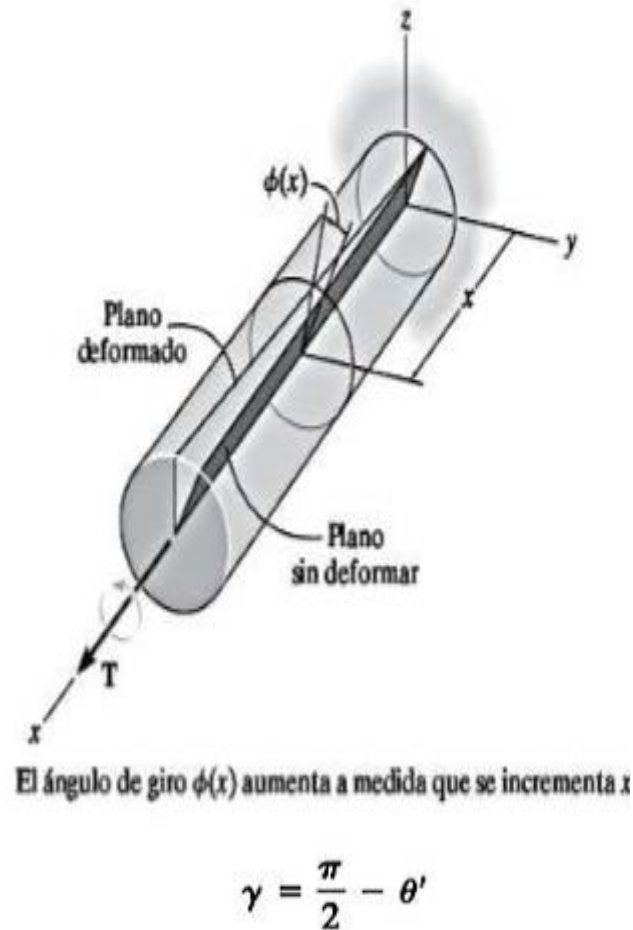
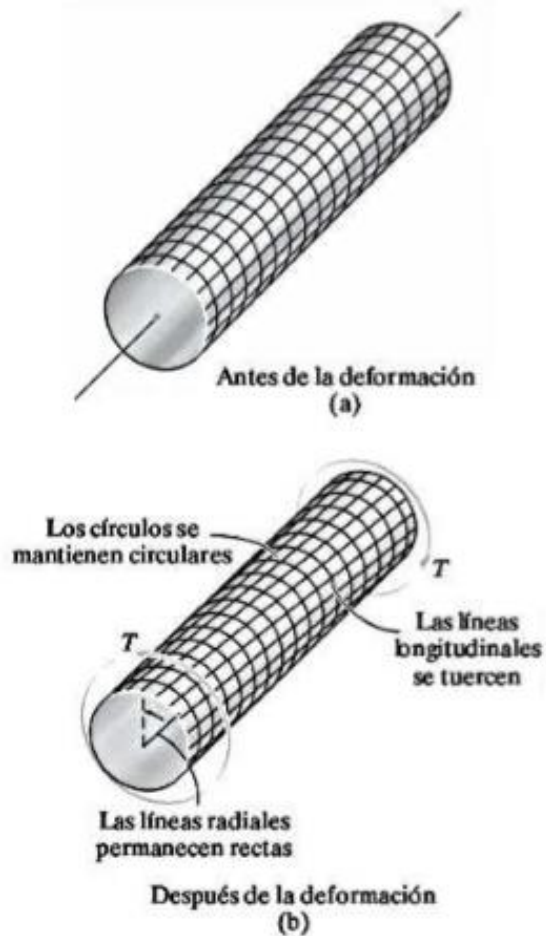


Torsión

Prof: Jorge Almengor

Deformación Por Torsión de un Eje Circular

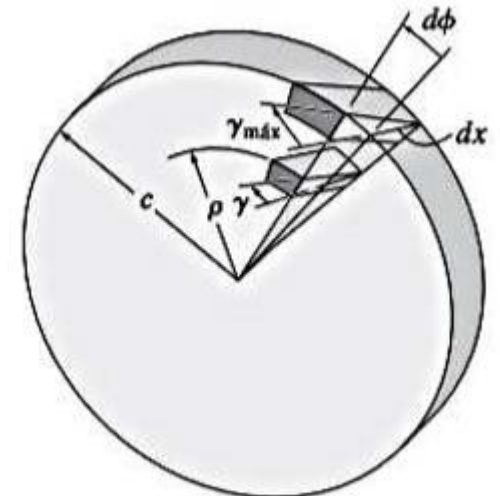


$$BD = \rho \Delta \phi = \Delta x \gamma$$

$$\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx}$$

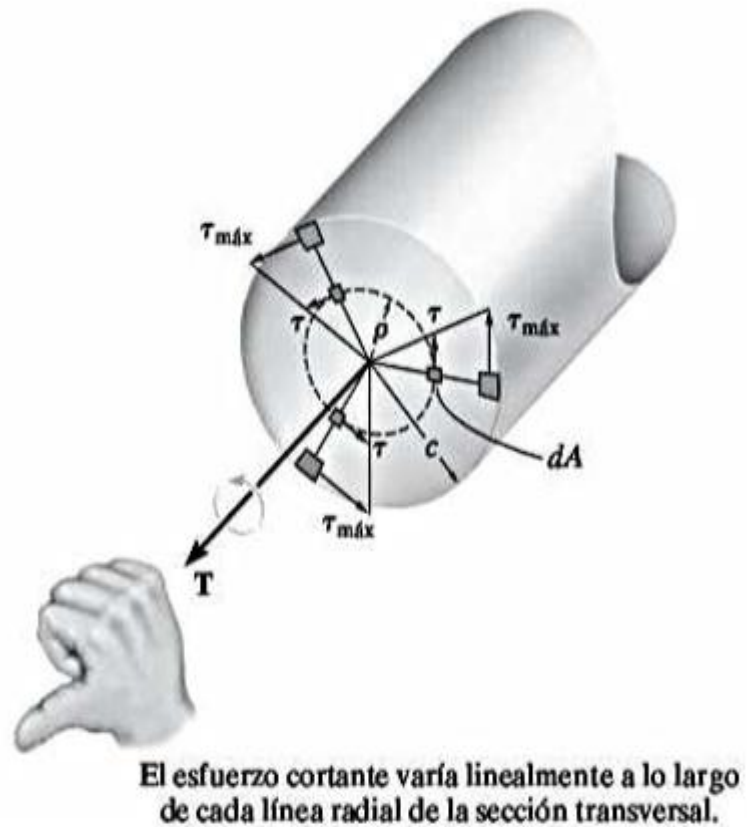
$$d\phi/dx = \gamma/\rho = \gamma_{\text{máx}}/c,$$

$$\gamma = \left(\frac{\rho}{c}\right) \gamma_{\text{máx}}$$



La deformación cortante en los puntos ubicados sobre la sección transversal aumenta linealmente con ρ , es decir, $\gamma = (\rho/c) \gamma_{\text{máx}}$.

Formula de Torsión



$$\tau = G\gamma,$$

$$\tau = \left(\frac{\rho}{c} \right) \tau_{\text{máx}}$$

Torsión

En específico, cada elemento de área dA , ubicado en ρ , está sometido a una fuerza de $dF = \tau dA$. El par de torsión producido por esta fuerza es $dT = \rho(\tau dA)$. Por lo tanto, para toda la sección transversal se tiene

$$T = \int_A \rho(\tau dA) = \int_A \rho \left(\frac{\rho}{c} \right) \tau_{\text{máx}} dA$$

Como $\tau_{\text{máx}}/c$ es constante,

$$T = \frac{\tau_{\text{máx}}}{c} \int_A \rho^2 dA$$

$$\tau = \frac{T \rho}{J}$$

$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$

$$J = \frac{\pi}{2} (c_o^4 - c_i^4)$$

La integral depende sólo de la geometría del eje. Representa el **momento polar de inercia** del área de la sección transversal del eje alrededor de su línea central longitudinal. Su valor se simboliza como J y, por lo tanto, la ecuación anterior puede reordenarse y escribirse de una manera más compacta, es decir,

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{T c}{J}$$

Aquí

$\tau_{\text{máx}}$ = el esfuerzo cortante máximo en el eje, que se produce en la superficie externa

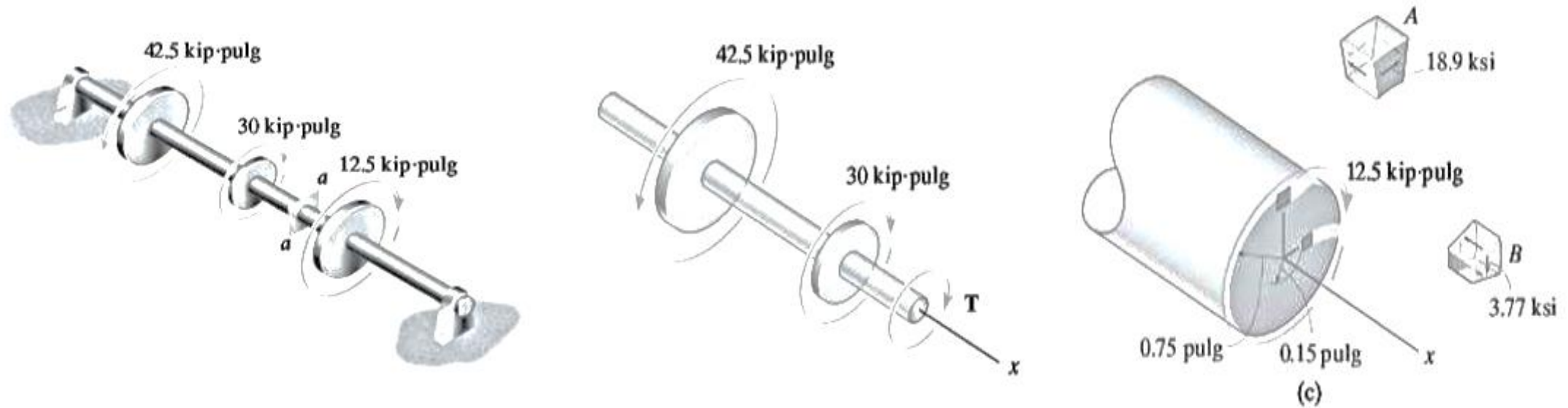
T = el par de torsión interno resultante que actúa en la sección transversal. Su valor se determina a partir del método de las secciones y la ecuación de equilibrio de momentos aplicados respecto a la línea central longitudinal del eje

J = el momento polar de inercia del área de la sección transversal

c = el radio exterior del eje

Ejemplo

El eje mostrado en la figura 5-11a se sostiene mediante dos cojinetes y está sometido a tres pares. Determine el esfuerzo cortante desarrollado en los puntos A y B , que se encuentran sobre la sección $a-a$ del eje, figura 5-11c.



Formulas

$$BD = \rho \Delta\phi = \Delta x \gamma$$

$$\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx}$$

$$d\phi/dx = \gamma/\rho = \gamma_{\text{máx}}/c,$$

$$\gamma = \left(\frac{\rho}{c}\right) \gamma_{\text{máx}}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta'$$

$$\tau = G\gamma,$$

$$\tau = \left(\frac{\rho}{c}\right) \tau_{\text{máx}}$$

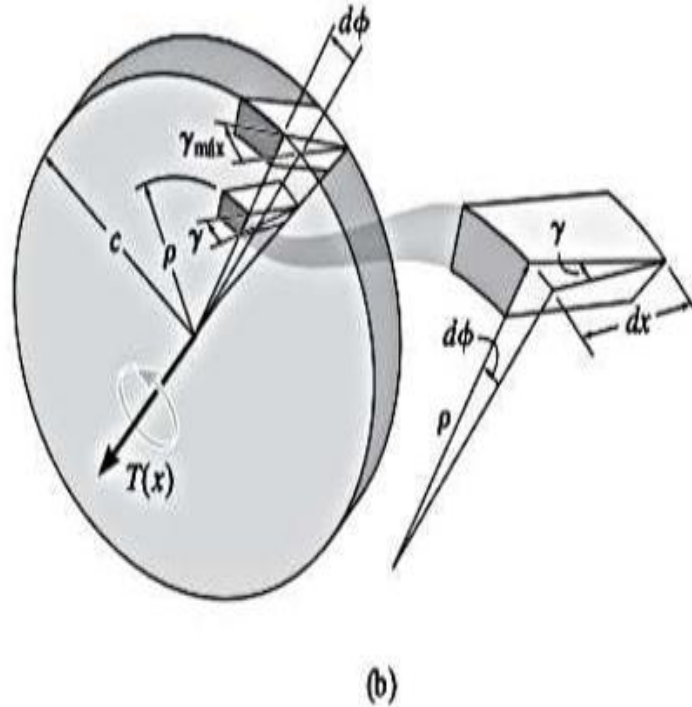
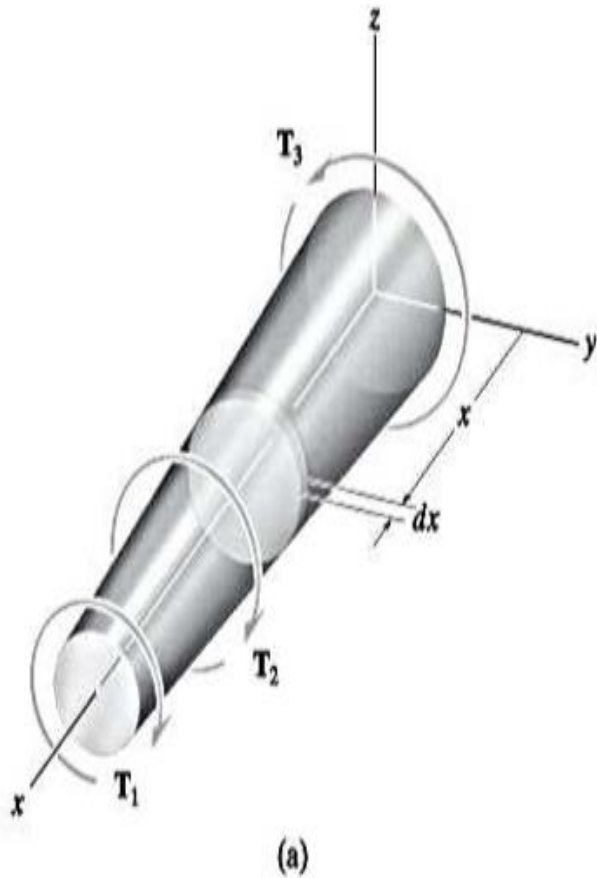
$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J}$$

$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$

$$J = \frac{\pi}{2} (c_o^4 - c_i^4)$$

Angulo de Torsión



$$\partial \phi = \gamma \partial x / \rho$$

Por Ley de Hooke sabemos:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

Y también sabemos que el esfuerzo cortante puede expresarse en términos de par de torsión

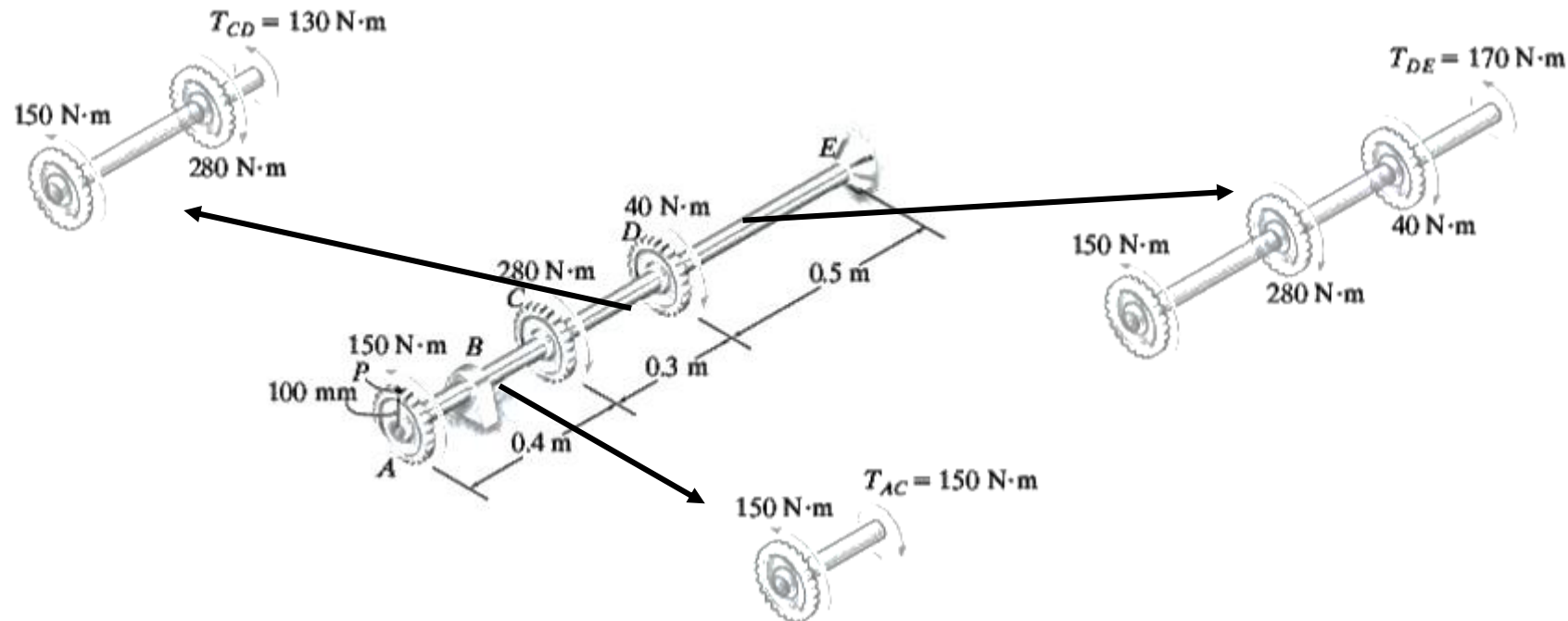
$$\tau = \frac{T(x)\rho}{J(x)} \longleftrightarrow \gamma = \frac{T(x)\rho}{J(x)G}$$

$$\partial \phi = \int_0^L \frac{T(x)}{J(x)G} \partial x$$

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

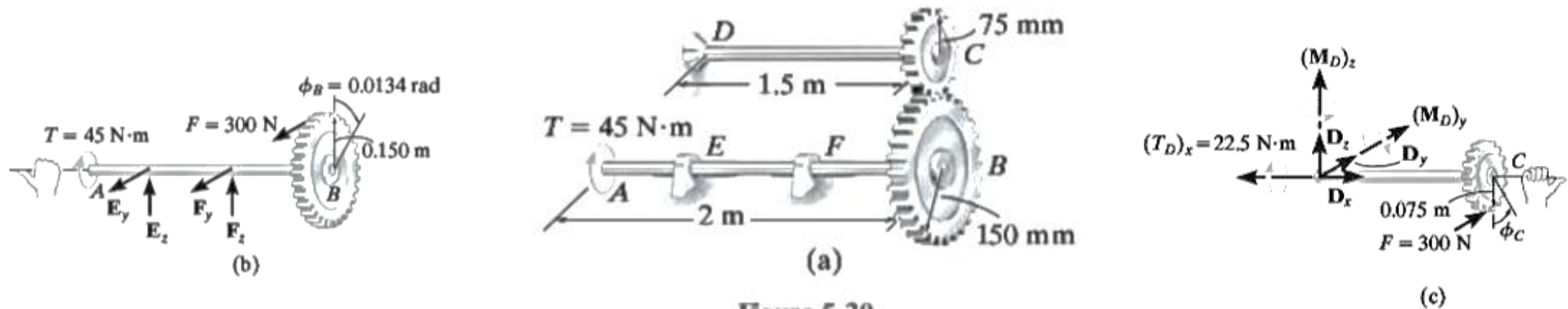
Ejemplo 1

Los engranes unidos al eje de acero que tiene un extremo fijo están sometidos a los pares de torsión que se muestran en la figura 5-19a. Si el módulo de elasticidad cortante es de 80 GPa y el eje tiene un diámetro de 14 mm, determine el desplazamiento del diente P en el engrane A . El eje gira libremente en el cojinete ubicado en B .



Ejemplo 2

Los dos ejes sólidos de acero mostrados en la figura 5-20a se acoplan entre sí mediante engranes dentados. Determine el ángulo de giro del extremo A del eje AB cuando se aplica el par de torsión $T = 45 \text{ N} \cdot \text{m}$. Considere $G = 80 \text{ GPa}$. El eje AB gira libremente en los cojinetes E y F , mientras que el eje DC está fijo en D . Cada eje tiene un diámetro de 20 mm .



Formulas

$$BD = \rho \Delta \phi = \Delta x \gamma$$

$$\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx}$$

$$d\phi/dx = \gamma/\rho = \gamma_{\text{máx}}/c,$$

$$\gamma = \left(\frac{\rho}{c}\right) \gamma_{\text{máx}}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta'$$

$$\tau = G\gamma,$$

$$\tau = \left(\frac{\rho}{c}\right) \tau_{\text{máx}}$$

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{J}$$

$$J = \frac{\pi}{2} c^4$$

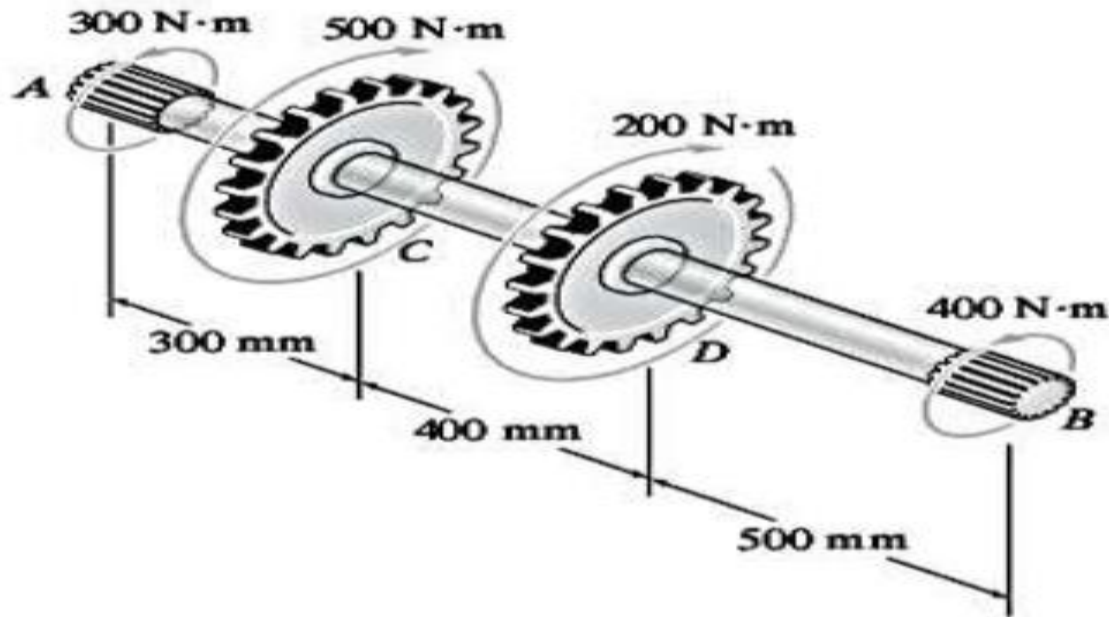
$$J = \frac{\pi}{2} (c_o^4 - c_i^4)$$

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

QUIZ #2

***5-56.** Los extremos estriados y los engranes unidos al eje de acero A-36 se encuentran sometidos a los pares de torsión que se muestran en la figura. Determine el ángulo de giro del extremo *B* con respecto al extremo *A*. El eje tiene un diámetro de 40 mm.

Adicional calcular el esfuerzo cortante en ese mismo punto
 $G=75 \text{ GPa}$.



Transmisión de Potencia

- Las flechas y los tubos que tienen secciones transversales circulares se usan a menudo para transmitir la potencia.
- Quedan sometidos a pares de torsión que dependen de la potencia generada por la máquina (P) y de la velocidad angular de la flecha (ω).
- La potencia se define como el trabajo efectuado por unidad de tiempo.
 - El trabajo transmitido por una flecha en rotación es igual al par de torsión aplicado por el ángulo de rotación.

$$P = \frac{T d\theta}{dt}$$

$$\longleftrightarrow \omega = d\theta/dt,$$

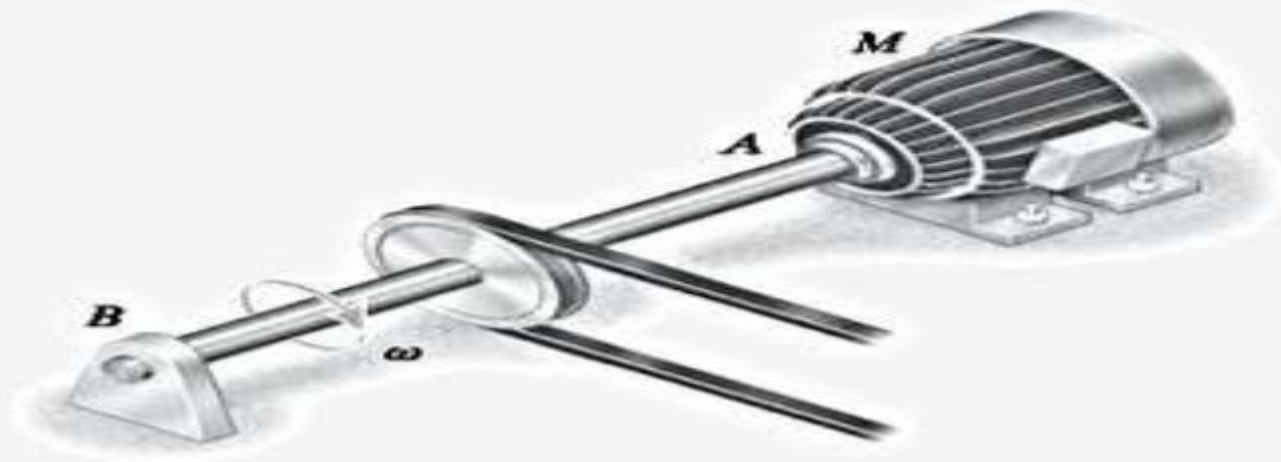
$$P = T\omega$$

$$\longleftrightarrow \omega = 2\pi f,$$

$$P = 2\pi fT$$

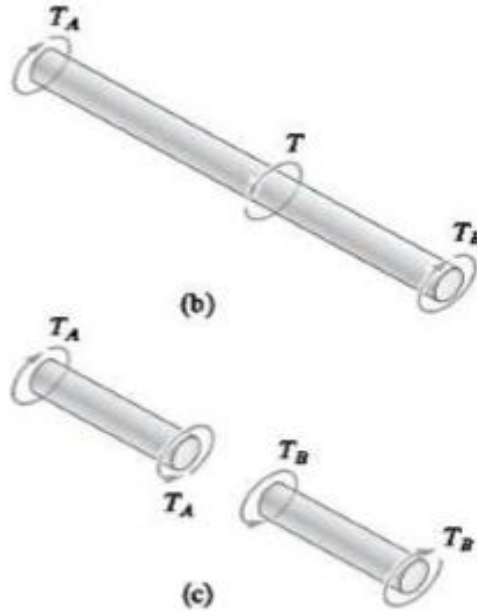
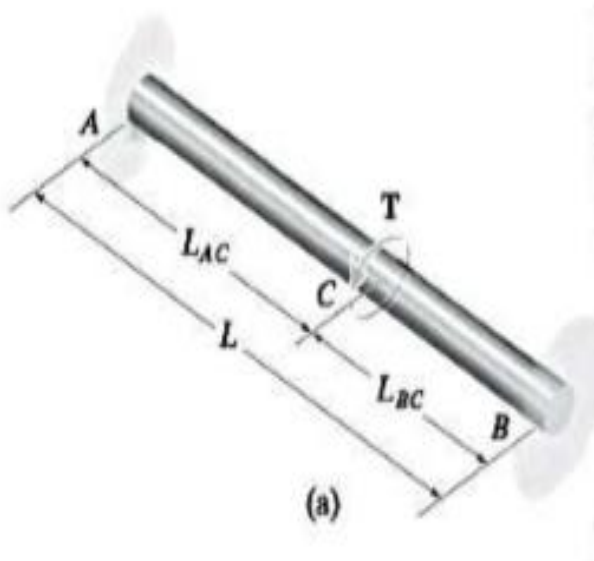
Diseño de un Eje

El eje sólido AB de acero que se muestra en la figura 5-13, se va a usar para transmitir 5 hp desde el motor M al cual se encuentra conectado. Si el eje gira a $\omega = 175$ rpm y el acero tiene un esfuerzo cortante permisible de $\tau_{perm} = 14.5$ ksi, determine el diámetro requerido del eje, con precisión de $\frac{1}{8}$ de pulgada.



$$I_{hp} = 550 \frac{Lb - pies}{s}$$

Elementos Cargados Con Pares de Torsión Estáticamente indeterminados.



$$\Sigma M_T = 0; \quad T - T_A - T_B = 0$$

Al estar en ambos lados empotrados el ángulo de giro de un lado con respecto al otro será de cero

$$\phi_{A/B} = 0$$

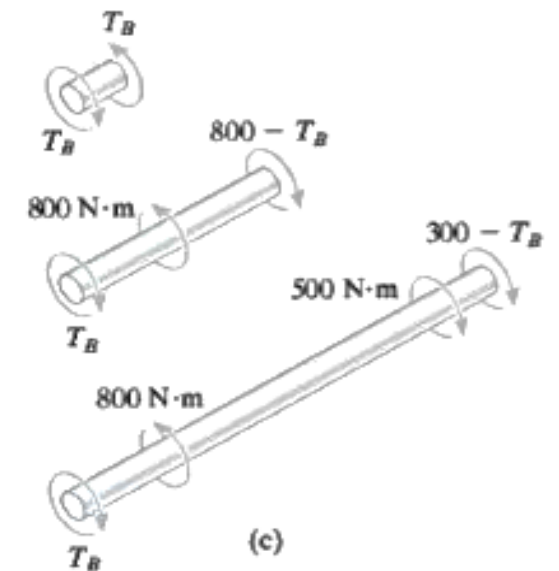
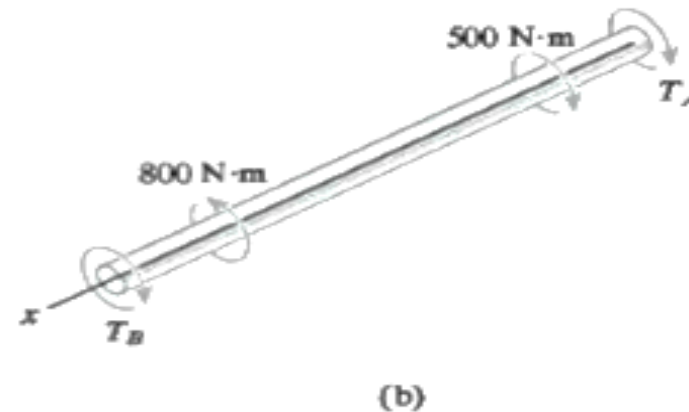
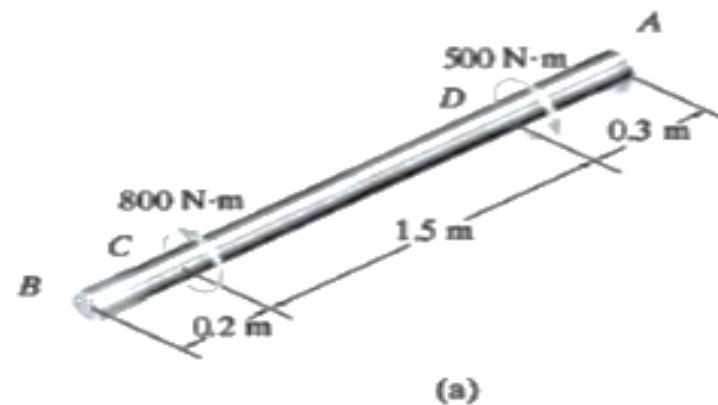
Si el material es elástico lineal, se considera estos ángulos de torsión realizando secciones partidas en el punto C (AC-BC) y se suma como en el tema anterior. $\phi = TL/JG$

$$T_A = T \left(\frac{L_{BC}}{L} \right) \quad \text{y} \quad T_B = T \left(\frac{L_{AC}}{L} \right)$$

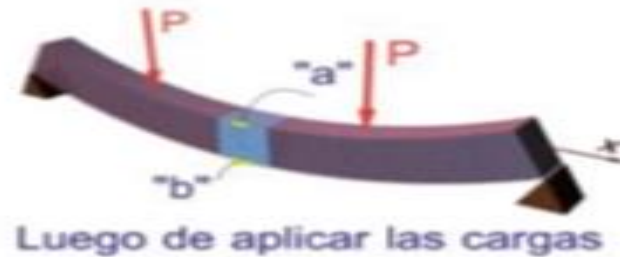
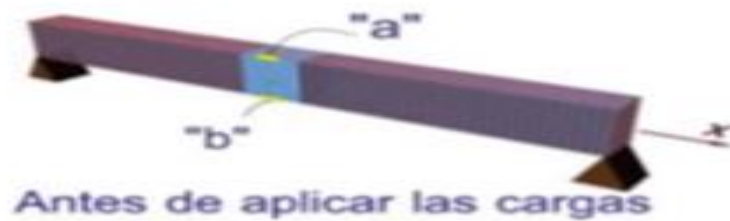
$$\frac{T_A L_{AC}}{JG} - \frac{T_B L_{BC}}{JG} = 0$$

Ejemplo 1

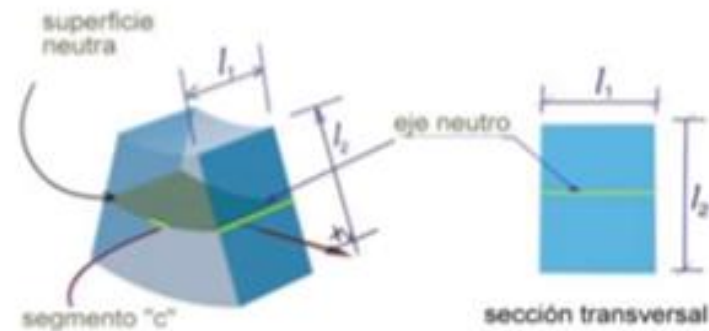
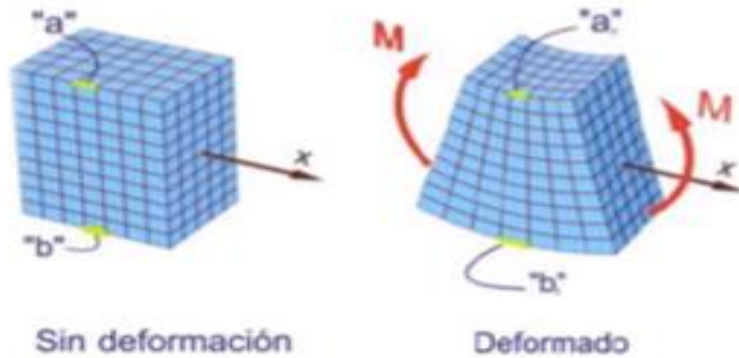
El eje sólido de acero que se muestra en la figura 5-23a tiene un diámetro de 20 mm. Si está sometido a los dos pares de torsión mostrados, determine las reacciones en los soportes fijos A y B .



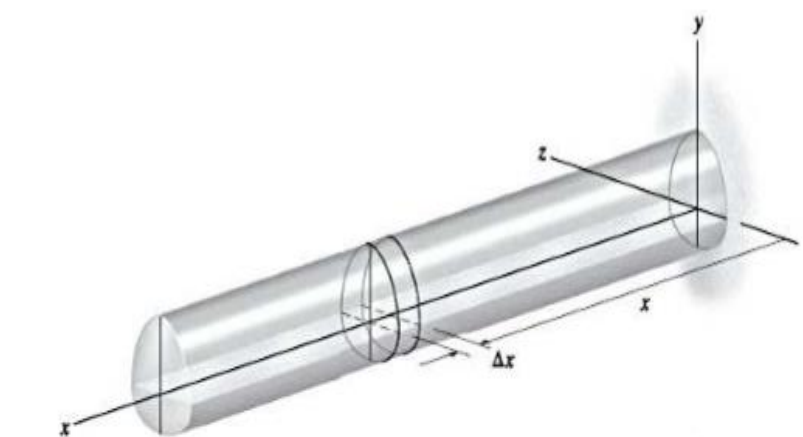
Deformación Flexionante



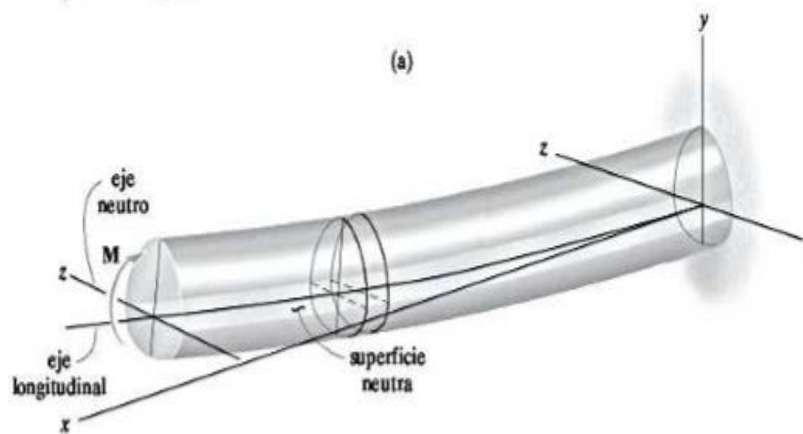
- ✓ Existe una sección "c" dentro de la viga que no se acorta ni se alarga, es decir, tal como lo muestra la figura adjunta.



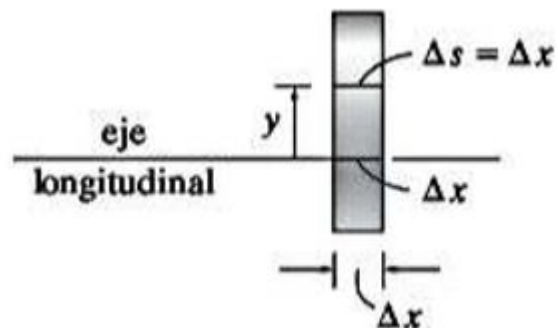
Deformación Flexionante



(a)



(b)

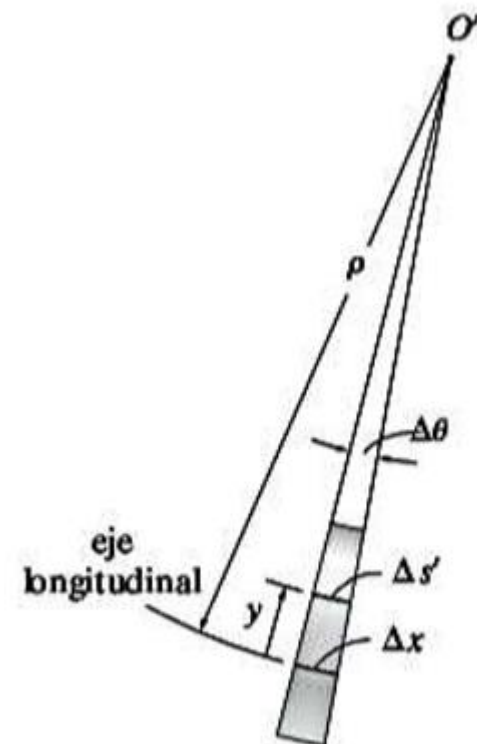


Elemento sin deformar

$$\epsilon = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$$

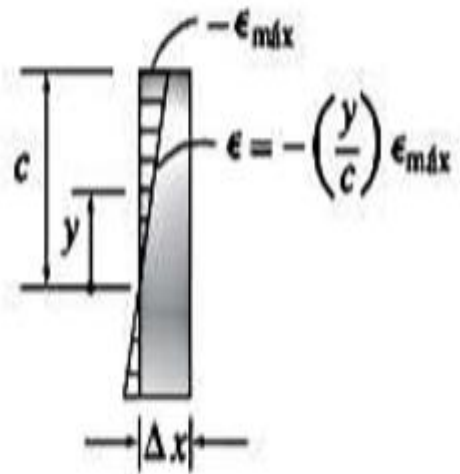
$$\epsilon = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{(\rho - y)\Delta \theta - \rho \Delta \theta}{\rho \Delta \theta}$$

$$\epsilon = -\frac{y}{\rho}$$



Elemento deformado

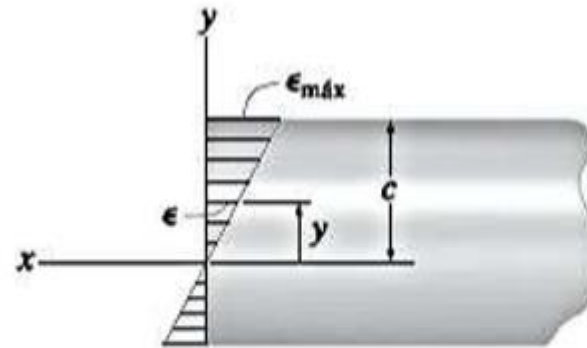
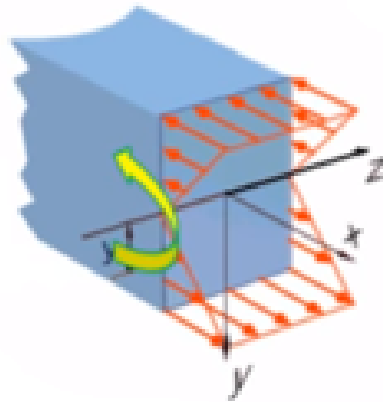
Deformación Flexionante



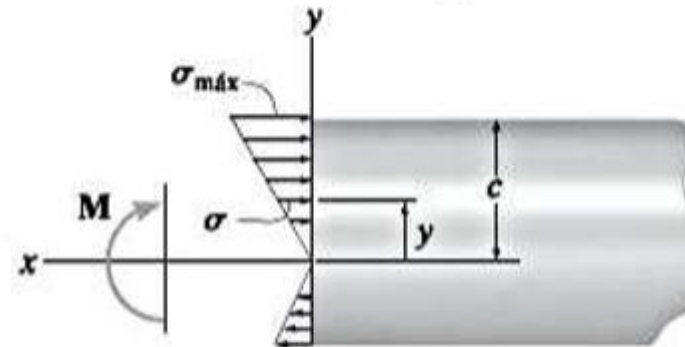
$$\frac{\epsilon}{\epsilon_{\text{máx}}} = -\left(\frac{y/\rho}{c/\rho}\right)$$

$$\epsilon = -\left(\frac{y}{c}\right)\epsilon_{\text{máx}}$$

Formula de Flexión



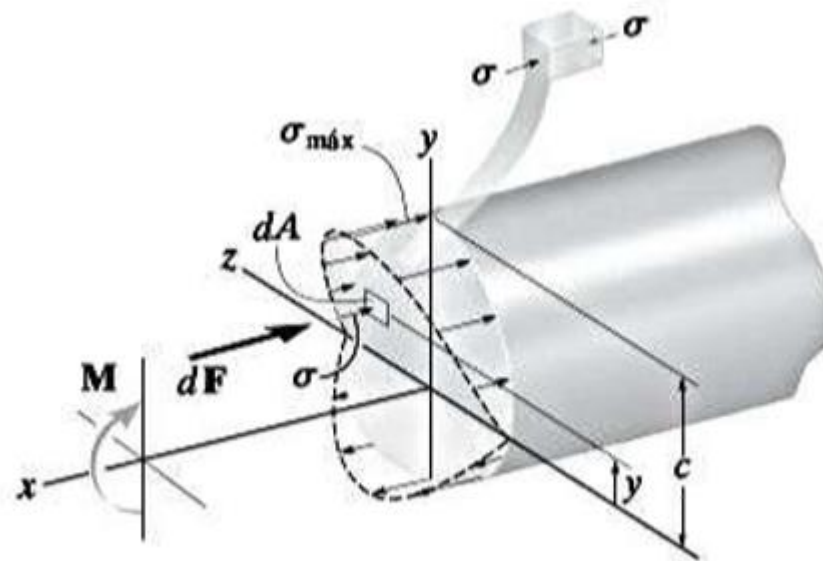
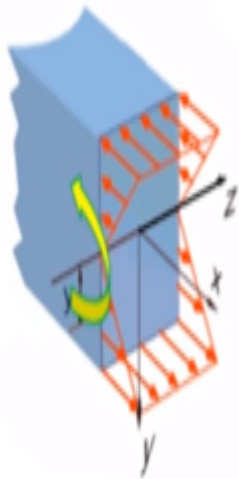
Variación de la deformación normal
(vista de perfil)



Variación del esfuerzo flexionante
(vista de perfil)

$$\sigma = -\left(\frac{y}{c}\right)\sigma_{\text{máx}}$$

Momento Flexión



Variación del esfuerzo flexionante

$$dM = y dF,$$

$$dF = \sigma dA,$$

$$M = \int_A y dF = \int_A y (\sigma dA) = \int_A y \left(\frac{y}{c} \sigma_{\text{máx}} \right) dA$$

$$M = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{c} \int_A y^2 dA$$

Esfuerzo Flexión

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} \quad (6-12)$$

Aquí

$\sigma_{\text{máx}}$ = el esfuerzo normal máximo en el elemento, que se produce en el punto sobre el área de la sección transversal que está *más alejado* del eje neutro

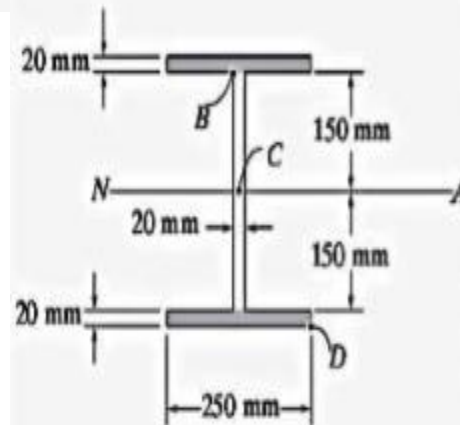
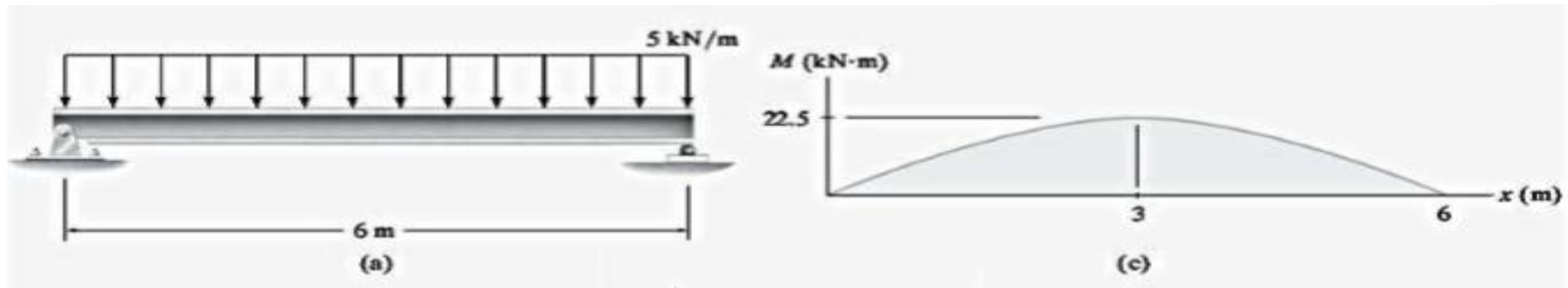
M = el momento interno resultante, determinado a partir del método de las secciones y de las ecuaciones de equilibrio; se calcula respecto al eje neutro de la sección transversal

c = la distancia perpendicular desde el eje neutro hasta el punto más alejado del eje neutro. Aquí es donde actúa $\sigma_{\text{máx}}$

I = el momento de inercia del área de la sección transversal respecto al eje neutro

Ejemplo 1

La viga simplemente apoyada de la figura 6-26a tiene la sección transversal que se muestra en la figura 6-26b. Determine el esfuerzo flexionante máximo absoluto y dibuje la distribución del esfuerzo sobre la sección transversal en esta ubicación.

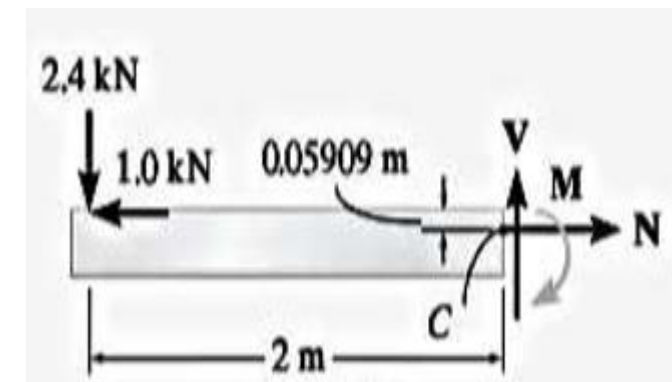
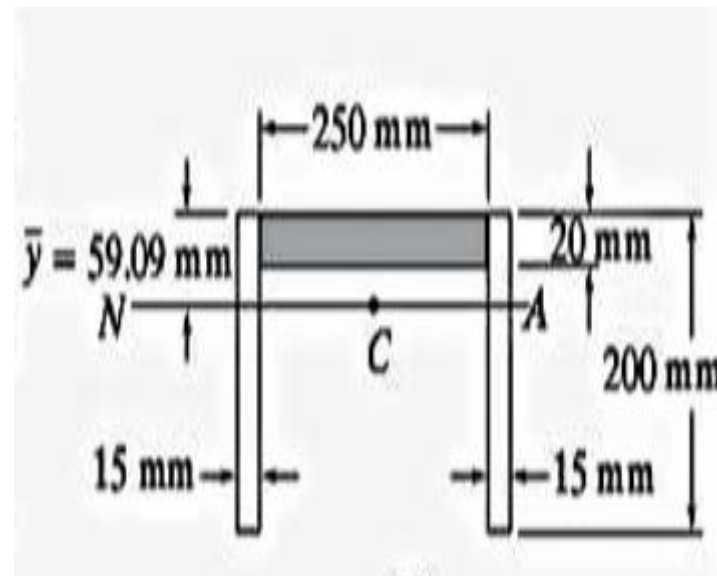
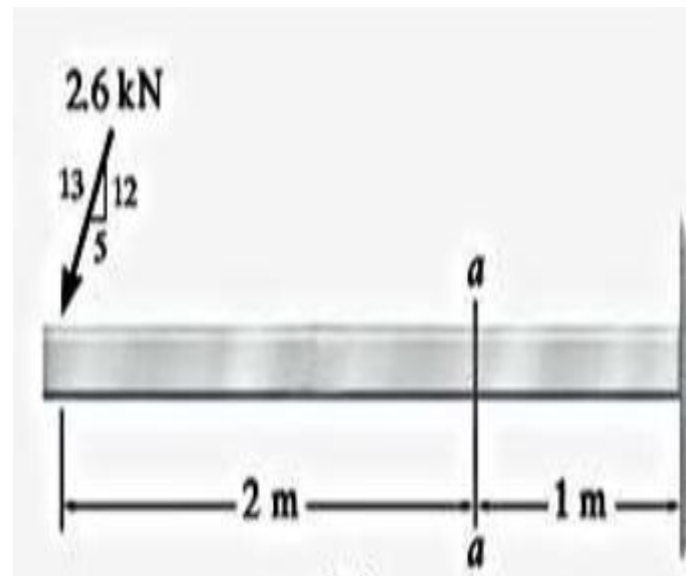


$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A}$$

$$I = \sum (\bar{I} + Ad^2)$$

Ejemplo 2

La viga mostrada en la figura 6-27a tiene una sección transversal en forma de canal, figura 6-27b. Determine el esfuerzo flexionante máximo que se produce en la viga en la sección $a-a$.



$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A}$$

$$I = \sum (\bar{I} + Ad^2)$$