

Un transmisor envía una señal a una frecuencia X . X es una variable aleatoria (VA) con una distribución uniforme (DU) continua en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Determine la función de densidad $f(x)$.

$$f(x) = \frac{1}{f_2 - f_1} = \frac{1}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1} = 1$$

| |
|------------|
| $f(x) = 1$ |
|------------|

Un transmisor envía una señal a una frecuencia X . X es una variable aleatoria (VA) con una distribución uniforme (DU) continua en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Determine la función de densidad $f(y)$ del periodo Y de la señal.

$$Y = \frac{1}{X}$$

$$f(y) = \frac{f(x_1)}{|\alpha'(x_1)|}$$

$$f(x) = \frac{1}{f_2 - f_1} = \frac{1}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f(x) = 1$$

$$\alpha(X) = Y = \frac{1}{X}$$

$$x_1 = \frac{1}{y}$$

$$\alpha(X) = \frac{1}{X}$$

$$\alpha'(X) = -\frac{1}{X^2}$$

$$\alpha'(x_1) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)^2} = -\frac{1}{\frac{1}{y^2}} = -y^2$$

$$\alpha'(x_1) = -y^2$$

$$f(y) = \frac{f(x_1)}{|\alpha'(x_1)|} = \frac{1}{|-y^2|} = \frac{1}{y^2}$$

| |
|------------------------|
| $f(y) = \frac{1}{y^2}$ |
|------------------------|

Dada una VA X con una DU continua en el intervalo $[-2, 2]$. Si $Y = \alpha(X) = X^2$, determine la función de densidad $f(y)$.

$$\alpha(X) = Y = X^2$$
$$f(x) = \frac{1}{f_2 - f_1} = \frac{1}{2 - (-2)} = \frac{1}{4} = 0.25$$
$$f(x) = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\alpha(X) = Y = X^2$$
$$x_1 = -\sqrt{y}$$
$$x_2 = \sqrt{y}$$

$$\alpha(X) = X^2$$
$$\alpha'(X) = 2X$$
$$\alpha'(x_1) = -2\sqrt{y}$$
$$\alpha'(x_2) = 2\sqrt{y}$$

$$f(y) = \frac{f(x_1)}{|\alpha'(x_1)|} + \frac{f(x_2)}{|\alpha'(x_2)|} = \frac{0.25}{|-2\sqrt{y}|} + \frac{0.25}{|2\sqrt{y}|} = \frac{0.25}{2\sqrt{y}} + \frac{0.25}{2\sqrt{y}} = \frac{0.25}{\sqrt{y}} = \frac{1}{4\sqrt{y}}$$

| |
|--|
| $f(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}} = \frac{0.25}{\sqrt{y}}$ |
|--|

Dada una VA X con una DU continua en el intervalo $[-2, 2]$. Si $Y = \alpha(X) = X^2$, determine la función de densidad $f(y)$. Determine el promedio $E(Y)$.

$$f(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}}$$

$$E(Y) = \int_0^4 (f(y) \cdot y) dy = \int_0^4 \left(\frac{1}{4\sqrt{y}} \cdot y \right) dy = \int_0^4 \left(\frac{\sqrt{y}}{4} \right) dy = \frac{4}{3}$$

| |
|----------------------|
| $E(Y) = \frac{4}{3}$ |
|----------------------|

Dada una VA X con una función densidad $f(x) = e^{-x^2}$. Si $Y = \alpha(X) = X^2$ determine la función de densidad $f(y)$.

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$$Y = \alpha(X) = X^2$$

$$x_1 = -\sqrt{y}$$

$$x_2 = \sqrt{y}$$

$$\alpha'(x) = 2X$$

$$\alpha'(x_1) = -2\sqrt{y}$$

$$\alpha'(x_2) = 2\sqrt{y}$$

$$f(y) = \frac{f(x_1)}{|\alpha'(x_1)|} + \frac{f(x_2)}{|\alpha'(x_2)|} = \frac{e^{-(-\sqrt{y})^2}}{|-2\sqrt{y}|} + \frac{e^{-(\sqrt{y})^2}}{|2\sqrt{y}|} = \frac{e^{-y}}{2\sqrt{y}} + \frac{e^{-y}}{2\sqrt{y}} = \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}$$

| |
|----------------------------------|
| $f(y) = \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}$ |
|----------------------------------|

Dos VAs $X = \{1,2\}$ y $Y = \{-2,-1\}$ son equiprobables e independientes. Determine el factor de correlación $r(X,Y)$.

$$X = \{1,2\}$$

$$Y = \{-2,-1\}$$

Si dos VAs son independientes, entonces:

$$r(X,Y) = 0$$

Dos VAs $X = \{-1,0\}$ y $Y = \{2,3\}$ son equiprobables e independientes. Determine la probabilidad conjunta $P(X = -1, Y = 2)$.

$$P(X = -1, Y = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = -1, Y = 2) = 1/4 = 0.25$$

Dos VAs $X = \{-1,0\}$ y $Y = \{2,3\}$ son equiprobables e independientes. Determine la probabilidad conjunta $P(X = -1, Y = 2)$. Determine $E[XY]$.

$$E(XY) = -2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{4}$$

$$E(XY) = -\frac{5}{4}$$

Dos VAs independientes $X_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $X_2 = \{-1, 0\}$ pueden tomar los siguientes valores de probabilidad $P(X_1 = -1) = p$, $P(X_1 = 0) = 2p$, $P(X_2 = -1) = p$, $P(X_2 = 0) = 1 - p$. Determine la probabilidad $P(X_1 = 1)$.

$$P(X_1 = -1) = p$$

$$P(X_1 = 0) = 2p$$

$$P(X_2 = -1) = p$$

$$P(X_2 = 0) = 1 - p$$

$$P(X_1 = 1) = ?$$

$$P(X_1 = -1) + P(X_1 = 0) + P(X_1 = 1) = 1$$

$$p + 2p + P(X_1 = 1) = 1$$

$$P(X_1 = 1) = 1 - p - 2p$$

| |
|-----------------------|
| $P(X_1 = 1) = 1 - 3p$ |
|-----------------------|

Dos VAs independientes $X_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $X_2 = \{-1, 0\}$ pueden tomar los siguientes valores de probabilidad $P(X_1 = -1) = p$, $P(X_1 = 0) = 2p$, $P(X_2 = -1) = p$, $P(X_2 = 0) = 1 - p$. Si $X = X_1 + X_2$ y $Y = X_1 X_2$, determine la probabilidad conjunta $P(X = -2, Y = 1)$.

| X_1, X_2 | $-1, -1$ | $-1, 0$ | $0, -1$ | $0, 0$ | $1, -1$ | $1, 0$ |
|------------|----------|------------|---------|-------------|-------------|--------------------------|
| X | -2 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| Y | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| $P(X, Y)$ | p^2 | $p(1 - p)$ | $2p^2$ | $2p(1 - p)$ | $(1 - 3p)p$ | $(1 - p) \cdot (1 - 3p)$ |

$$P(X = -2, Y = 1) = p^2$$

Dos VAs independientes $X_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $X_2 = \{-1, 0\}$ pueden tomar los siguientes valores de probabilidad $P(X_1 = -1) = p$, $P(X_1 = 0) = 2p$, $P(X_2 = -1) = p$, $P(X_2 = 0) = 1 - p$. Si $X = X_1 + X_2$ y $Y = X_1 X_2$, determine la probabilidad conjunta $P(X = 0, Y = 0)$.

$$P(X = 0, Y = 0) = 2p(1 - p)$$

Dos VAs independientes $X_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $X_2 = \{-1, 0\}$ pueden tomar los siguientes valores de probabilidad $P(X_1 = -1) = p$, $P(X_1 = 0) = 2p$, $P(X_2 = -1) = p$, $P(X_2 = 0) = 1 - p$. Si $X = X_1 + X_2$ y $Y = X_1 X_2$, determine el promedio $E[X]$.

$$E(X) = (-2)(p^2) + (-1)(p - p^2) + (-1)(2p^2) + (1)(1 - p)(1 - 3p)$$

$$E(X) = 1 - 5p$$

$$E(X) = 1 - 5p$$

Dos VAs independientes $X_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $X_2 = \{-1, 0\}$ pueden tomar los siguientes valores de probabilidad $P(X_1 = -1) = p$, $P(X_1 = 0) = 2p$, $P(X_2 = -1) = p$, $P(X_2 = 0) = 1 - p$. Si $X = X_1 + X_2$ y $Y = X_1 X_2$, determine el promedio $E[X^2]$.

$$E(X^2) = (-2)^2(p^2) + (-1)^2(p - p^2) + (-1)^2(2p^2) + (1)^2(1 - p)(1 - 3p)$$

$$E(X^2) = 8p^2 - 3p + 1$$

Dos VAs independientes $X_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $X_2 = \{-1, 0\}$ pueden tomar los siguientes valores de probabilidad $P(X_1 = -1) = p$, $P(X_1 = 0) = 2p$, $P(X_2 = -1) = p$, $P(X_2 = 0) = 1 - p$. Si $X = X_1 + X_2$ y $Y = X_1 X_2$, determine el promedio $E[Y]$.

$$E(Y) = (1)(p^2) + (-1)(1 - 3p)p$$

$$E(Y) = 4p^2 - p$$

$$E(Y) = 4p^2 - p$$

Dos VAs independientes $X_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $X_2 = \{-1, 0\}$ pueden tomar los siguientes valores de probabilidad $P(X_1 = -1) = p$, $P(X_1 = 0) = 2p$, $P(X_2 = -1) = p$, $P(X_2 = 0) = 1 - p$. Si $X = X_1 + X_2$ y $Y = X_1 X_2$, determine el promedio $COV[X, Y]$.

$$COV(X, Y)$$

$$COV(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

$$E(XY) = -2p^2$$

$$COV(X, Y) = (-2p^2) - (1 - 5p) \cdot (4p^2 - p)$$

$$COV(X, Y) = 20p^3 - 11p^2 + p$$

$$COV(X, Y) = 20p^3 - 11p^2 + p$$

Dos VAs independientes X y Y tienen una función de distribución $F(x) = x$ y $F(y) = y^2$ respectivamente, determine $P(X < x, Y < y)$.

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y) = (x)(y^2) = xy^2$$

$$P(X < x, Y < y) = xy^2$$

Dos VAs independientes X y Y tienen una función de distribución $F(x) = x$ y $F(y) = y^2$ respectivamente, si X existe en el intervalo $[0,1]$ y Y en el intervalo $[0,1]$, determine $E[XY]$.

$$F(x, y) = xy^2$$

$$f(x, y) = \frac{d^2}{dxdy} F(x, y) = \frac{d^2}{dxdy} (xy^2) = 2y$$

$$E[XY] = \int_0^1 \int_0^1 xy(2y) dx dy = \frac{1}{3}$$

$$E[XY] = \frac{1}{3}$$

Dada dos VAs independientes X y Y con una DU continua entre $[1,3]$. Si $Z = \min(X, Y)$ y $W = \max(X, Y)$, determine la función de distribución $F(z)$.

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{3-1} \rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \qquad f(y) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{3-1} \rightarrow f(y) = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = \int_1^x \left(\frac{1}{2}\right) dx = \frac{x}{2} \Big|_1^x \rightarrow F(x) = \frac{x-1}{2} \qquad F(y) = \int_1^y \left(\frac{1}{2}\right) dy = \frac{y}{2} \Big|_1^y \rightarrow F(y) = \frac{y-1}{2}$$

$$Z = \min(X, Y)$$

$$F(z) = P(Z < z) = 1 - P(Z > z)$$

$$P(Z > z) = P(X > z, Y > z) = P(X > z) \cdot P(Y > z)$$

$$F(z) = 1 - P(X > z) \cdot P(Y > z)$$

$$F(z) = 1 - (1 - P(X < z)) \cdot (1 - P(Y < z))$$

$$F(z) = 1 - \left(1 - \frac{z-1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{z-1}{2}\right) = 1 - \left(1 - \frac{z-1}{2}\right)^2$$

$$F(z) = \frac{-z^2}{4} + \frac{3z}{2} - \frac{5}{4}$$

| |
|--|
| $F(z) = \frac{-z^2}{4} + \frac{3z}{2} - \frac{5}{4}$ |
|--|

Dada dos VAs independientes X y Y con una DU continua entre $[1,3]$. Si $Z = \min(X, Y)$ y $W = \max(X, Y)$, determine la función de distribución $F(w)$.

$$W = \max(X, Y)$$

$$F(w) = P(W < w) = P(X < w, Y < w) = P(X < w) \cdot P(Y < w)$$

$$F(w) = \left(\frac{w-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{w-1}{2}\right) = \left(\frac{w-1}{2}\right)^2$$

$$F(w) = \left(\frac{w-1}{2}\right)^2$$

Dada dos VAs independientes X y Y con una DU continua entre $[1,3]$. Si $Z = \min(X, Y)$ y $W = \max(X, Y)$, determine la función de distribución conjunta $f(z, w)$.

$$F(z, w) = P(W < w, Z < z) = P(W < w) - P(W < w, Z > z)$$

$$F(z, w) = \left(\frac{w-1}{2}\right)^2 - P(X < w, Y < w, X > z, Y > z)$$

$$F(z, w) = \left(\frac{w-1}{2}\right)^2 - P(z < X < w, z < Y < w)$$

$$F(z, w) = \left(\frac{w-1}{2}\right)^2 - P(z < X < w) \cdot P(z < Y < w)$$

$$F(z, w) = \left(\frac{w-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{w-z}{2}\right) \cdot \left(\frac{w-z}{2}\right)$$

$$F(z, w) = w \left(\frac{z}{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{z^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$f(z, w) = \frac{d^2 F(z, w)}{dw \cdot dz} = \frac{d^2}{dw \cdot dz} \left[\frac{wz}{2} - \frac{w}{2} - \frac{z^2}{4} + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{2}$$

$$f(z, w) = \frac{1}{2}$$

Dada una VA X con una DU continua en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Si $Y = \alpha(X) = X^2$, determine la función de densidad $f(y)$.

$$\alpha(X) = Y = X^2$$

$$f(x) = \frac{1}{f_2 - f_1} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f(x) = 1$$

$$\alpha(X) = Y = X^2$$

$$x_1 = -\sqrt{y}$$

$$x_2 = \sqrt{y}$$

$$\alpha(X) = X^2$$

$$\alpha'(X) = 2X$$

$$\alpha'(x_1) = -2\sqrt{y}$$

$$\alpha'(x_2) = 2\sqrt{y}$$

$$f(y) = \frac{f(x_1)}{|\alpha'(x_1)|} + \frac{f(x_2)}{|\alpha'(x_2)|} = \frac{1}{|-2\sqrt{y}|} + \frac{1}{|2\sqrt{y}|} = \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

| |
|-----------------------------|
| $f(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$ |
|-----------------------------|

Dada una VA X con una DU continua en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Si $Y = \alpha(X) = X^2$. Determine el promedio $E(Y)$.

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$E(Y) = \int_0^4 (f(y) \cdot y) dy = \int_0^4 \left(\frac{1}{\sqrt{y}} \cdot y \right) dy = \int_0^4 \sqrt{y} dy = \frac{16}{3}$$

| |
|-----------------------|
| $E(Y) = \frac{16}{3}$ |
|-----------------------|

Dos VAs $X = \{-1, 2\}$ y $Y = \{0, 3\}$ son equiprobables e independientes. Determine el promedio $E(Y)$.

$$E(Y) = (0) \left(\frac{1}{2} \right) + (3) \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$E(Y) = \frac{3}{2}$$

Dos VAs $X = \{-1, 2\}$ y $Y = \{0, 3\}$ son equiprobables e independientes. Determine $E[XY]$.

$$E(XY) = (-1 \cdot 0) \left(\frac{1}{4} \right) + (-1 \cdot 3) \left(\frac{1}{4} \right) + (2 \cdot 0) \left(\frac{1}{4} \right) + (2 \cdot 3) \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4}$$

$$E(XY) = \frac{3}{4}$$

Dos VAs independientes $X_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $X_2 = \{0, 1\}$ pueden tomar los siguientes valores de probabilidad $P(X_1 = -1) = p$, $P(X_1 = 0) = p/2$, $P(X_2 = 0) = p$, $P(X_2 = 1) = 1 - p$. Determine la probabilidad $P(X_1 = 1)$.

$$P(X_1 = -1) = p$$

$$P(X_1 = 0) = \frac{p}{2}$$

$$P(X_2 = 0) = p$$

$$P(X_2 = 1) = 1 - p$$

$$P(X_1 = 1) = ?$$

$$P(X_1 = -1) + P(X_1 = 0) + P(X_1 = 1) = 1$$

$$p + \frac{p}{2} + P(X_1 = 1) = 1$$

$$P(X_1 = 1) = 1 - p - \frac{p}{2}$$

| |
|---------------------------------|
| $P(X_1 = 1) = 1 - \frac{3p}{2}$ |
|---------------------------------|

Examen N°2 de Probabilidad y Procesos Aleatorios - 2020 -

Dr. Héctor Poveda – FIE – UTP –

Dos VAs independientes $X_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $X_2 = \{0, 1\}$ pueden tomar los siguientes valores de probabilidad $P(X_1 = -1) = p$, $P(X_1 = 0) = p/2$, $P(X_2 = 0) = p$, $P(X_2 = 1) = 1 - p$. Si $Y = X_1 + X_2$ y $Z = X_1 X_2$, determine la probabilidad conjunta $P(Y = -1, Z = 0)$.

| X_1, X_2 | $-1, 0$ | $-1, 1$ | $0, 0$ | $0, 1$ | $1, 0$ | $1, 1$ |
|------------|---------|------------|-----------------|----------------------|----------------------------------|---|
| Y | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| Z | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $P(Y, Z)$ | p^2 | $p(1 - p)$ | $\frac{p^2}{2}$ | $\frac{p}{2}(1 - p)$ | $\left(1 - \frac{3p}{2}\right)p$ | $\frac{(1 - p)}{2} \cdot \left(1 - \frac{3p}{2}\right)$ |

$$P(Y = -1, Z = 0) = p^2$$

Dos VAs independientes $X_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $X_2 = \{0, 1\}$ pueden tomar los siguientes valores de probabilidad $P(X_1 = -1) = p$, $P(X_1 = 0) = p/2$, $P(X_2 = 0) = p$, $P(X_2 = 1) = 1 - p$. Si $Y = X_1 + X_2$ y $Z = X_1 X_2$, determine la probabilidad conjunta $P(Y = 0, Z = 0)$.

$$P(Y = 0, Z = 0) = \frac{p^2}{2}$$

Dos VAs independientes $X_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $X_2 = \{0, 1\}$ pueden tomar los siguientes valores de probabilidad $P(X_1 = -1) = p$, $P(X_1 = 0) = p/2$, $P(X_2 = 0) = p$, $P(X_2 = 1) = 1 - p$. Si $Y = X_1 + X_2$, determine el promedio $E[Y]$.

$$E(Y) = (-1)(p^2) + (1)\left(\frac{p}{2}(1-p)\right) + (1)\left(\left(1 - \frac{3p}{2}\right)p\right) + (2)\left((1-p)\left(1 - \frac{3p}{2}\right)\right)$$

$$E(Y) = 2 - \frac{7p}{2}$$

$$E(Y) = 2 - \frac{7p}{2}$$

Dos VAs independientes $X_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $X_2 = \{0, 1\}$ pueden tomar los siguientes valores de probabilidad $P(X_1 = -1) = p$, $P(X_1 = 0) = p/2$, $P(X_2 = 0) = p$, $P(X_2 = 1) = 1 - p$. Si $Z = X_1 X_2$, determine el promedio $E[Z]$.

$$E(Z) = (-1)(p(1-p)) + (1)\left((1-p)\left(1 - \frac{3p}{2}\right)\right)$$

$$E(Z) = \left(\frac{5p^2}{2}\right) - \left(\frac{7p}{2}\right) + 1$$

$$E(Z) = \frac{5p^2}{2} - \frac{7p}{2} + 1$$

Dos VAs independientes $X_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $X_2 = \{0, 1\}$ pueden tomar los siguientes valores de probabilidad $P(X_1 = -1) = p$, $P(X_1 = 0) = p/2$, $P(X_2 = 0) = p$, $P(X_2 = 1) = 1 - p$. Si $Z = X_1 X_2$, determine $E[Z^2]$.

$$E(Z^2) = (-1)^2(p(1-p)) + (1)^2\left((1-p)\left(1 - \frac{3p}{2}\right)\right)$$

$$E(Z^2) = \frac{p^2}{2} - \frac{3p}{2} + 1$$

Dos VAs independientes $X_1 = \{-1, 0, 1\}$ y $X_2 = \{0, 1\}$ pueden tomar los siguientes valores de probabilidad $P(X_1 = -1) = p$, $P(X_1 = 0) = p/2$, $P(X_2 = 0) = p$, $P(X_2 = 1) = 1 - p$. Si $Y = X_1 + X_2$ y $Z = X_1 X_2$, determine $E[YZ]$.

$$E(YZ) = (2)\left((1-p)\left(1 - \frac{3p}{2}\right)\right)$$

$$E(YZ) = 3p^2 - 5p + 2$$