Probabilidad y Procesos Aleatorios

Dr. Héctor Poveda
hector.poveda@utp.ac.pa
@hpoveda7
www.hpoveda7.com

Resumen del curso

Nota: El documento a continuación presenta un resumen de los conceptos introductorios más relevantes del curso de probabilidad y procesos aleatorios. Este documento también presenta un resumen de problemas propuestos de los temas de enumeraciones, probabilidad condicional y variables aleatorias. Estos problemas propuestos, son problemas didácticos elaborados y escogidos utilizando la bibliografía [Ther 92] y [Yate 05]. Finalmente, este documento explica de manera resumida el concepto de Filtro de Kalman. Este documento fue confeccionado por el Dr. Héctor Poveda, docente de la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Tecnológica de Panamá.

1 Probabilidad

1.1 Introducción

La teoría de las probabilidades tiene como objetivo modelar una aleatoriedad para poder manejarla. Es por esto que el modelo probabilista se define como una representación formal de conocimientos relativos a una experiencia aleatoria. La probabilidad de un resultado impredecible y la dependencia entre varios eventos es una información. Algunos campos de aplicación de las probabilidades son las siguientes:

- Juegos de azar
- Teoría del juego: economía y finanzas
- Física: física estadística, mecánica cuántica
- Estadística: control de calidad, fiabilidad de un sistema
- Modelización estocástica: evaluación de riesgos
- Procesamiento de señales: modelos de ruidos
- Teoría de la decisión: reconocimiento de caracteres
- Teoría de la información: comunicaciones digitales

El concepto de probabilidad tiene siglos de existir. A continuación se listan algunos datos históricos:

- Siglo XVI: se establece un sistema de evaluación de riesgos en contratos marítimos.
- 1654: Pierre de Fermat y Blaise Pascal establecen las primeras bases matemáticas de las probabilidades alrededor de los juegos de azar.
- 1657: Christian Huygens publica “Razonamientos sobre el juego de dados”.
- 1713: Jacques Bernoulli introduce la noción de variable aleatoria (VA).
- 1812: Laplace describe el teorema del límite central.
- 1933: Kolmogorov establece una verdadera teoría axiomática

Definición: una experiencia aleatoria es una experiencia en la cual el conocimiento de las condiciones experimentales no permite predecir el resultado con exactitud.

1.2 Espacios probabilísticos

A continuación asociemos una experiencia aleatoria a un espacio probabilístico que denotamos como $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$. Donde:

- Ω representa el conjunto fundamental. Es el conjunto de todos los resultados posibles de la experiencias.
- $\mathcal{F}$ representa un conjunto de eventos, $A \in \mathcal{F}$ es un subconjunto de Ω.
- P representa la ley de probabilidad, todo evento $A \in \mathcal{F}$ está asociado a una probabilidad $P(A) \in [0, 1]$.

1.2.1 Conjunto fundamental

Algunos ejemplos de conjuntos fundamentales son:

- Conjunto finito: los resultados de un juego de dados $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, los resultados de un lance de una moneda $\{cara, sello\}$.
- Conjunto finito: el número de veces que hay que lanzar una moneda para que salga *cara* por primera vez.
- Conjunto continuo: la energía cinética del átomo de un gas.

1.2.2 Conjunto de eventos

Un evento $A \in \mathcal{F}$ es parte del conjunto fundamental Ω. Un evento A se realiza cuando uno de los resultados de A se realiza. A continuación utilizaremos el lenguaje de probabilidad que es el mismo que el lenguaje de la teoría de conjuntos:

- $A \subset B$: A esta contenido en B, es decir los resultados de A son parte de los resultados de B. Ver ejemplo en tablero.
- $A \cup B$: A union B, A ó B, un evento se realiza si pasa A, si pasa B o si pasan los dos al mismo tiempo. Ver ejemplo en tablero.
- $A \cap B$: A intersección B, A y B, un evento se realiza si pasa A y B al mismo tiempo. Ver ejemplo en tablero.
- ϕ: Evento imposible.
- Ω: Evento certero o seguro.
- $\overline{A}$: Evento contrario. $\overline{A}$ es el complemento de A. Ver ejemplo en tablero.

1.2.3 Ley de probabilidad

Una ley de probabilidad tiene las siguientes propiedades:

- Debe estar contenido entre $[0, 1]$.
- $P(\Omega) = 1$
- Si A y B son dos eventos incompatibles o mutuamente exclusivos $A \cap B = 0$ entonces $P(A \cap B) = P(A) + (B)$.

Table 1: Figura 1

		Con orden	Sin orden
Sin reuso	$p \leq n$	Arreglo, $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	Combinación $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
	$p = n$	Permutación, $n!$	1
Con reuso	p	Arreglo con repetición, n^p	Combinación con repetición C_{n+p-1}^{n-1}

- Si consideremos A el único conjunto de eventos, entonces $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(\phi) = 0$
- Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + (B) - P(A \cap B)$.

1.3 Ejemplo de espacios probabilísticos

1.3.1 Espacio equiprobable

Un espacio es equiprobable si cada resultado tiene la misma probabilidad. Es decir, $P(\omega_i) = p \forall i$. Entonce

$$\sum_{i=1}^{N} P(\omega_i) = Np = 1$$

Deducimos entonces que:

$$P(\omega_i) = 1/N$$

Donde N es el número de resultados posibles.

1.3.2 Enumeraciones

Un problema genérico de enumeraciones utiliza el modelo de “sacar balotas de una urna”. Se tiene una urna con n balotas y p posibles posiciones. El problema consistirá en llevar la experiencia aleatoria a una de las categorías siguiente:

1. Las balotas son iguales o diferentes.
2. Después de sacar una balota se puede o no volver a meter en la urna (con reuso o sin reuso)
3. Se considera el orden de los resultados o no.

Los resultados se agrupan en la tabla 1.

1.4 Problemas propuestos - Probabilidad (Enumeraciones, probabilidad condicional)

1.1 Se lanzan 5 dados sucesivamente. ¿Cuántos son resultados posibles? ¿Entre esos resultados, cuántos son de la forma (a,a,b,c,d) y cuántos de la forma (a,a,b,b,c)?

1.2 Se lanza una mano de ”poker” (5 cartas) de una baraja de 52 cartas. Hay 13 niveles de valores y 4 tipos de cartas diferentes. ¿Cuantos son los resultados posibles? De esos resultados cuantos son un ”full” (un trío y un par). ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos pares en una mano?

1.3 Un técnico recibe 20 teléfonos celulares para reparación. De estos 20 teléfonos, 10 no necesitan reparación. El técnico tiene la oportunidad de revisar 5 teléfonos el mismo día que los recibe. ¿Cual es probabilidad que de los teléfonos que logré revisar el mismo día que los recibe, revise 2 teléfonos dañados?¿Cual es probabilidad que de los teléfonos que logré revisar el mismo día que los recibe, revise al menos 2 teléfonos dañados?

1.4 Un edificio de oficinas tiene 20 cajeros automáticos. De los 20 cajeros, 5 están en mal estado. Un técnico tiene la posibilidad de examinar 3 cajeros escogidos al azar. ¿Cual es probabilidad de que los cajeros que él logró revisar al menos dos estaban dañados?

1.5 Un partido de fútbol se va a la tanda de los penales. Cada equipo tiene la posibilidad de patear 3 penales. La probabilidad que tiene un equipo dado de anotar un penal es $p = 0.5$. ¿Cuál es la probabilidad que un equipo dado no falle? ¿Cuál es la probabilidad de que falle un sólo penal? ¿Cuál es la probabilidad de que anote al menos dos penales?

1.6 ¿Cuál es la probabilidad de tener que tirar 2 veces un moneda para que salga cara (se asume que cada lanzamiento de moneda es independiente del otro)?

1.7 Se realiza una sucesión infinita de experiencias donde p es la probabilidad de que se realice un evento y $q = 1 - p$ es la probabilidad que no se realice. k es la VA que determina el número de experiencias que se deben realizar para que ocurra el evento por primera vez ($k = 1$ si se realiza 1 experiencia, $k = 2$ si se realizan 2 experiencias, etc.). ¿Cuál es la ley de probabilidad $P(k)$?

1.8 Recordar es vivir. La probabilidad de que Radamel Falcao jugador de la selección Colombia juegue el mundial de Brasil 2014 es de 0.5. La probabilidad de que Falcao juegue los 1/8s de final es 0.2. Sabiendo que Falcao logró jugar el mundial, cuál la probabilidad que Falcao juegue los 1/8s de final.

1.9 Un sistema de comunicación inteligente puede transmitir en bandas de frecuencia diferentes, siempre y cuando estas bandas estén disponibles. El sistema transmite ya sea en las bandas del 1 al 64 (64 bandas) o en las bandas del 65 al 128 (64 bandas). Sabemos que en las bandas del 1 al 64 hay 32 bandas disponibles, y en las bandas del 65 al 128 hay 48 bandas disponibles. ¿Cuál es la probabilidad que el sistema se equivoqué y transmita en una banda no disponible, si utiliza bandas del 1 al 64? Si sabemos que el sistema se equivocó y utilizó una banda no disponible. Cuál es la probabilidad de que esta banda sea del 1 al 64.

1.10 Un bloque de información de una señal Wifi contiene 64 símbolos. Supongamos que un receptor recibe 2 bloques $B1$ y $B2$. El receptor sabe que $B1$ tiene 16 símbolos errados y $B2$ tiene 12 símbolos errados.¿ Cuál es la probabilidad para el receptor de encontrar un símbolo errado en $B1$. Si el receptor escoge un símbolo cualquiera, cuál es la probabilidad que el símbolo esté errado y que sea de B1.

1.11 Un mesero en restaurante atiende 2 mesas al mismo tiempo. En la mesa A hay 5 personas, 1 santeño, 2 coclesano y 2 coloneses. En la mesa B hay 3 personas, 1 santeño, 1 coclesano y 1 colonense. El mesero olvida la orden de 1 santeño. ¿Cuál es la probabilidad que sea la del santeño de la mesa A?

1.12 Una aerolínea ofrece dos tipos de clases económicas (A y B) en sus vuelos y una clase ejecutiva. En un determinado vuelo viajan 25 personas en clase económica A de las cuales 15 son damas; y 20 personas en la clase económica B de las cuales 10 son damas. El capitán del vuelo hace pasar una persona al azar a la clase ejecutiva. Si sabemos que la persona es de la clase A, cuál es la probabilidad de que sea dama. Si sabemos que esa persona es una dama, cuál es la probabilidad de que sea de la clase económica A.

2 Variable aleatoria discreta

2.1 Problemas propuestos - Variable aleatoria discreta

2.1 Una VA toma los valores $X = \{1, 2, 3\}$, las probabilidades respectivas son $P(X) = \{0.1, 0.2, 0.7\}$. Calcule el promedio promedio $E[X]$.

2.2 Una VA discreta X toma sólo dos valores A y B, donde $A < B$. ¿Cuanto es el valor de P(A)+P(B)?

2.3 Suponga una VA X que toma valores discretos en $\{-1, -0.5, 0, 0.7, 1.5\}$ sus probabilidades correspondientes son $\{0.1, 0.2, 0.1, 0.4, 0.2\}$. Calcule la función de distribución $F(0)$. ¿Cuál es el promedio $E[X]$?

2.4 Una aerolínea tiene un avión que dispone de 120 puestos de la misma clase. Por un trayecto regular de Panamá-Bogotá se considera que 2% de los clientes no se presentarán en la partida. Si se considera que para este trayecto se emiten 123 boletos, cuál es la probabilidad de no tener problemas en la partida (considere X la VA que representa el número de pasajeros que no se presentan en la partida). Utilice la ley binomial.

2.5 Un bus dispone de 118 puestos. Por un trayecto regular de Panamá-David se considera que 5% de los clientes no se presentarán en la partida. Si se considera que para este trayecto se emiten 120 boletos, cuál es la probabilidad de no tener problemas en la partida. Utilice la ley binomial.

2.6 Los sistemas IDMA son una solución propuesta para combatir el problema de la alta densidad de usuarios por celda en los sistemas celulares. En recepción estos sistemas utilizan el logaritmo de la relación de verosimilitud (LLR) para estimar los símbolos transmitidos. Si consideremos una modulación BPSK la señal IDMA puede generar los símbolos $X = \{-1, +1\}$. El LLR de una señal IDMA-BPSK está dado por:

$$\varphi = \ln \frac{P(X = +1)}{P(X = -1)}$$

Donde $P(X = +1)$ es la probabilidad de que $X = +1$ y $P(X = -1)$ es la probabilidad de que $X = -1$. Utilizando su habilidad matemática y los conceptos aprendidos hasta el momento en el curso demuestre que el promedio de X es:

$$E[X] = \frac{e^{\varphi} - 1}{e^{\varphi} + 1}$$

3 Variable aleatoria continua

3.1 Problemas propuestos - Variable aleatoria continua

3.1 Sabiendo que la densidad de probabilidad de una VA es $f(x) = 1/4$ para el intervalo $[3, 5]$, $f(x) = 1/3 - x/39$ para el intervalo $[5, 8]$ y $f(x) = 0$ para el resto. Calcule $P(5 \leq X < 8)$. Calcule $P(3 \leq X < 6)$. Calcule $P(3 \leq X < 7|X > 5)$ Calcule el valor de $P(X < 8)$. Calcule el valor de $P(X < 3)$. Calcule el promedio $E[X]$. Calcule la varianza $V[X]$

3.2 Una persona entra a un banco. La probabilidad de que sea atendida antes de 5 minutos está definida por $F(x) = x/5$ para el intervalo [0,5] . Si $P(X > 5) = 0$. Calcule la densidad de probabilidad $f(x)$. Calcule el promedio $E[X]$. Calcule la varianza $V[X]$. Sabiendo que la persona ya espero 2 minutos determine la ley de probabilidad para el tiempo restante.

3.3 Una VA X tiene una densidad de probabilidad $f(x) = 3x^2$ en el intervalo [0,1]. Determine $F(x) = P(X < x)$. Determine el promedio $E(X)$ y la varianza $V(X)$.

3.4 Dada la densidad de probabilidad de una ley Cauchy $f(x) = 1/(\pi(1 + x^2))$. Encuentre el promedio $E[X]$ y la varianza $V[X]$.

3.5 Dada una VA X mixta (continua y discreta) con $P(X = 0) = 1/2$ y una densidad de probabilidad uniforme en el intervalo [1,b]. Determine una expresión para el valor de b y determine el promedio $E(X)$.

3.6 Sabiendo que la densidad de probabilidad de una VA es $f(x) = 1/(2(b-a))$ para el intervalo $[a, b]$, $f(x) = 1/(\beta - b) - x/(\beta^2 - b^2)$ para el intervalo $[b, \beta]$ y $f(x) = 0$ para el resto. Dado que $a < b < \alpha < \beta$ calcule el valor de las siguientes probabilidades: $P(b \leq X < \beta)$, $P(a \leq X < \alpha)$ y $P(a \leq X < \alpha | X > b)$.

3.7 Dada la función de densidad $f(x) = 2x/3$ para el intervalo $[3, b]$. Calcule el valor de b. Calcule el valor de $P(X < 7/2)$. Calcule el promedio E[X]. Calcule la varianza $V[X]$. Determine una ley de probabilidad sabiendo que la VA es mayor que 3.25, $P(X < x | X > 3.25)$.

3.8 El tiempo de espera de un dispositivo móvil para entrar en una red de comunicaciones está definido por una VA X. La probabilidad de que espere entre 0 y 2 segundos está definida por la función de distribución $F(x) = x^2/6$ y la probabilidad de que espere más de 2 segundos esta definida por $F(x) = 2x - x^2/3$. El dispositivo no espera más de 3 segundos. Sabiendo que el dispositivo ya espero más de 2 segundos determine la ley probabilidad de tiempo de espera restante.

3.9 Un fabricante de teléfonos celulares establece por medio de su laboratorio de investigación que el tiempo de vida de sus productos sigue una ley exponencial de promedio 4. Es decir $f(x) = 1/4e^{-1/4x}$. ¿Cuál es la probabilidad que un teléfono funcione más de 4 años? ¿Cuál es la probabilidad que funcione al menos 6 años sabiendo que ya funcionó 5 años? ¿Cuál es la probabilidad que su duración este comprendida entre $E[X] - \sigma$ y $E[X] + \sigma$? Donde $E[X]$ representa el promedio y σ representa la desviación estándar. ¿Cuál debe ser el periodo óptimo (en meses) de garantía que debe dar el fabricante para no tener que reemplazar más del 15% de los teléfonos?

3.10 Una VA Y tiene una densidad de probabilidad $f(y) = e^{-y}$ para $y \geq 0$ determine $P(Y \geq y)$.

4 Función de una variable aleatoria

4.1 Problemas propuestos - Función de una variable aleatoria

4.1 Una partícula se emite desde un punto de forma isotrópica en el plano. Colocamos una pantalla a una distancia d sobre la cual la partícula impacta en la ordenada. La VA θ sigue una ley uniforme en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Ver figura em tablero. Encuentre $f(z)$ y $f(y)$.

4.2 Un trasmisor envía una señal a una frecuencia X (en kHz). X es una VA con una distribución uniforme (continua) en el intervalo $[f_1, f_2]$. Determine $g(y)$ del periodo Y de la señal y el promedio $E[Y]$.

5 Filtro de Kalman

El filtro de Kalman (KF) es un método de estimación que se basa en la representación de espacio de estados. El KF ha sido utilizado en diversas aplicaciones como el procesamiento de la voz, el seguimiento de parámetros, aplicaciones biomédicas, comunicaciones digitales, entre otras [Pove 11]. Fue inicialmente propuesto en 1960 por Rudolf E. Kalman, científico nacido en Hungría en el año 1930[1].

El KF funciona cuando las ecuaciones de estado son lineales, y los ruidos son blancos y son procesos aleatorios de distribución Gaussiana (normal) y promedio cero. De esta manera, el KF satisface:

Ecuación de observación:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{\Phi}(n-1)\mathbf{x}(n-1) + \mathbf{\Gamma}\mathbf{w}(n) \tag{1}$$

Ecuación de estado:

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{\Psi}(n)\mathbf{x}(n) + \mathbf{b}(n) \tag{2}$$

donde $\mathbf{x}(n)$ is el vector de estado [2] de tamaño U en el instante n y $\mathbf{y}(n)$ es el vector de observación de tamaño K en el instante n. El ruido del modelo es $\mathbf{w}$ y el ruido de observación es $\mathbf{b}$, ambos están decorrelacionados y son vectores de distribución Gaussiana, promedio cero y con matrices de covarianza $\boldsymbol{\mathcal{Q}} = \sigma_w^2\mathbf{I}_U$ y $\boldsymbol{\mathcal{R}} = \sigma_b^2\mathbf{I}_K$ respectivamente. Además, $\mathbf{\Phi}(n-1)$ es la matriz de transición de tamaño $U \times U$ en el instante $n-1$ a n, $\mathbf{\Gamma}$ is la matriz de entrada de tamaño $U \times U$ y $\mathbf{\Psi}(n)$ es la matriz de observación $K \times U$ en el instante n.

A continuación resumimos el algoritmo de KF:

$$\hat{\mathbf{x}}(n|n) = \hat{\mathbf{x}}(n|n-1) + \mathbf{K}(n)\tilde{\mathbf{y}}(n) \tag{3}$$

donde $\hat{\mathbf{x}}(n|n)$ es el valor del vector de estado a estimar, $\hat{\mathbf{x}}(n|n-1)$ es el valor del vector de estado estimado en el instante anterior, $\mathbf{K}(n)$ es la matriz de ganancia de Kalman y $\tilde{\mathbf{y}}(n)$ es la innovación definida como:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{y}}(n) &= \mathbf{y}(n) - \hat{\mathbf{y}}(n|n-1) \\ &= \mathbf{y}(n) - \mathbf{\Psi}(n)\hat{\mathbf{x}}(n|n-1)\end{aligned} \tag{4}$$

La matriz de ganancia de Kalman esta definida para obtener el error cuadrático mínimo medio del vector de estado [Pove 11]. Esta satisface:

$$\mathbf{K}(n) = \{\mathbf{P}^{\mathbf{xy}}(n)\}\{\mathbf{P}^{\mathbf{yy}}(n)\}^{-1} \tag{5}$$

donde $\mathbf{P}^{\mathbf{yy}}(n)$ es la matriz de covarianza de la innovación definida como:

$$\mathbf{P}^{\mathbf{yy}}(n) = \mathbf{\Psi}(n)\mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{\Psi}^H(n) + \boldsymbol{\mathcal{R}} \tag{6}$$

$\mathbf{P}(n|n-1)$ es la matriz de covarianza del error de estimación definida como:

$$\mathbf{P}(n|n-1) = \mathbf{\Phi}(n-1)\mathbf{P}(n-1|n-1)\mathbf{\Phi}^H(n-1) + \mathbf{\Gamma}\boldsymbol{\mathcal{Q}}\mathbf{\Gamma}^H \tag{7}$$

y $\mathbf{P}^{\mathbf{xy}}(n)$ es la matriz de intercovarianza entre $\mathbf{y}(n)$ y la predicción del estado $\hat{\mathbf{x}}(n|n-1)$ definida como:

$$\mathbf{P}^{\mathbf{xy}}(n) = \mathbf{P}(n|n-1)\mathbf{\Psi}^H(n) \tag{8}$$

---

[1] Rudolf E. Kalman murió el pasado 2 de Julio de 2016.

[2] El vector de estado almacena los parámetros del sistema necesarios para la predicción cuando la entrada es desconocida. Usualmente, contiene las cantidades a estimar.

Finalmente, combinando (3) y (5) la matriz de covarianza del error de estimación es actualizada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(n|n) &= \mathbf{P}(n|n-1) - \mathbf{K}(n)\mathbf{\Psi}(n)\mathbf{P}(n|n-1) \\ &= \{\mathbf{I}_U - \mathbf{K}(n)\mathbf{\Psi}(n)\}\mathbf{P}(n|n-1)\end{aligned} \tag{9}$$

Note que para iniciar el algoritmo debe suponer los valores de iniciales de $\hat{\mathbf{x}}(n|n-1)$ y $\mathbf{P}(n|n-1)$.

5.1 Problemas propuestos - Filtro de Kalman

7.1 Suponga una red de generación eléctrica con un desbalance de voltaje y una desincronización frecuencial. Para mantener el buen funcionamiento del sistema es necesario estimar esta desincronización.

Las ecuaciones de estado para este sistema se describen a continuación:

$$\begin{aligned}x_1(n+1) &= x_1(n)\cos(x_5(n)) - x_2(n)\sin(x_5(n)) \\ x_2(n+1) &= x_1(n)\sin(x_5(n)) + x_2(n)\cos(x_5(n)) \\ x_3(n+1) &= x_3(n)\cos(x_5(n)) - x_4(n)\sin(x_5(n)) \\ x_4(n+1) &= x_3(n)\sin(x_5(n)) + x_4(n)\cos(x_5(n)) \\ x_5(n+1) &= (1-\epsilon)\,x_5(n) + e_w(n)\end{aligned} \tag{10}$$

donde e_w es un ruido blanco de distribución Gaussiana de promedio cero y de varianza $q = 10^{-7}$, $\epsilon = 10^{-16}$ y

$$\begin{aligned}x_1(n) &= V_\alpha \cos(n\omega + \varphi_\alpha) \\ x_2(n) &= V_\alpha \sin(n\omega + \varphi_\alpha) \\ x_3(n) &= V_\beta \cos(n\omega + \varphi_\beta) \\ x_4(n) &= V_\beta \sin(n\omega + \varphi_\beta) \\ x_5(n) &= \omega\end{aligned} \tag{11}$$

$V_\alpha = 0.8$, $V_\beta = 1.2$, $\varphi_\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\varphi_\beta = -\frac{\pi}{3}$, $\omega = 2\pi f$ y $f = 60\text{Hz}$.

La ecuación de observación del sistema se define como:

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{P}\mathbf{x}(n) + \mathbf{e}(n) \tag{12}$$

donde $\mathbf{y}$ es el vector de observación, $\mathbf{e}$ es un vector de ruido blanco de distribución Gaussiana de promedio cero y de varianza $\mathbf{Q} = \sigma \mathbf{I}_{2\times 2}$, $\sigma = \frac{10^{-1}}{\sqrt{2}}$ y $\mathbf{P}$ está definido como:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

En este caso las ecuaciones de estados son no lineales, y es necesario utilizar variantes del KF, como los son: el KF extendido, el KF sin perfume, el KF de puntos-sigma, entre otros [Pove 11] para poder llevar a cabo la estimación. Más específicamente, el KF extendido consiste en propagar analíticamente la estimación a través de la dinámica del sistema, por medio de una linearización de primer orden utilizando una expansión de Taylor.

En este caso sólo las ecuaciones de estado son no lineales, por lo cual no se hace necesario linearizar la ecuación de observación. Dado el siguiente vector de estado que contiene las ecuaciones de estado no lineales:

$$\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}\,(n|n)) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1\,(n|n)\cos\left(\hat{x}_5\,(n|n)\right) - \hat{x}_2\,(n|n)\sin\left(\hat{x}_5\,(n|n)\right) \\ \hat{x}_1\,(n|n)\cos\left(\hat{x}_5\,(n|n)\right) + \hat{x}_2\,(n|n)\sin\left(\hat{x}_5\,(n|n)\right) \\ \hat{x}_3\,(n|n)\cos\left(\hat{x}_5\,(n|n)\right) - \hat{x}_4\,(n|n)\sin\left(\hat{x}_5\,(n|n)\right) \\ \hat{x}_3\,(n|n)\cos\left(\hat{x}_5\,(n|n)\right) + \hat{x}_4\,(n|n)\sin\left(\hat{x}_5\,(n|n)\right) \\ (1-\epsilon)\,\hat{x}_5\,(n|n) \end{bmatrix} \tag{14}$$

Podemos definir la matriz de transición linearizada (después de una expansión de Taylor) de la siguiente manera:

$$\mathbf{F}\,(n) = \frac{\partial \mathbf{f}\,(x)}{\partial x}\bigg|_{x=\hat{x}(n|n)} = \left[\mathbf{F}_1\,(n)\,,\mathbf{F}_2\,(n)\right]\bigg|_{x=\hat{x}(n|n)} \tag{15}$$

donde

$$\mathbf{F}_1\,(n) = \begin{bmatrix} \cos x_5 & -\sin x_5 & 0 & 0 \\ \sin x_5 & \cos x_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos x_5 & -\sin x_5 \\ 0 & 0 & \sin x_5 & \cos x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2\,(n) = [& -x_1 \sin x_5 - x_2 \cos x_5, x_1 \cos x_5 - x_2 \sin x_5, \\ & -x_3 \sin x_5 - x_4 \cos x_5, x_3 \cos x_5 - x_4 \sin x_5, \\ & (1-\epsilon)]^T \end{aligned} \tag{17}$$

(a) Utilizando el lenguaje de simulación MATLAB programe un KF extendido que permita estimar la desincronización frecuencial [Sun 11]. Considere un tiempo de simulación $T = 1$s y una frecuencia de muestreo $f_m = 1200$Hz. Considere que la frecuencia es de $f_1 = 61Hz$ los primeros 500ms y que luego cambia a $f_2 = 61$Hz hasta finalizar el tiempo de simulación. Grafique el cambio de frecuencia en función del tiempo.

(b) Proponga otro tipo de problema de estimación que usted considere se puede resolver a través de un KF o sus variantes para casos no lineales.

Notas de ayuda:

- Puede utilizar la función *randn* en Matlab para generar los ruidos blancos de distribución Gaussiana.
- Utilice como matriz de covarianza del ruido modelo (vector de estado) una matriz $\mathbf{R} = q\mathbf{A}$ donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.2 Dado el problema 7.1 utilice el lenguaje de simulación MATLAB para programar un KF de puntos sigma que permita estimar la desincronización frecuencial.

Referencias

[Pove 11] H. Poveda. *Techniques d'Estimation de Canal et de Décalage de Fréquence Porteuse pour Systèmes Sans-fil Multiporteuses en Liaison Montante.* PhD thesis, under the supervision of E. Grivel and G. Ferré, Université de Bordeaux, December 2011.

[Sun 11] M. Sun and Z. Sahinoglu. Extended Kalman Filter Based Grid Synchronization in the Presence of Voltage Unbalance for Smart Grid. *Proceedings of the IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies (ISGT '11)*, pp. 1–4, January 2011.

[Ther 92] C. W. Therrien. *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing.* Prentice Hall, 1992.

[Yate 05] R. D. Yates and D. J. Goodman. *Probability and Stochastic Processes.* John Wiley & Sons Inc., 2005.