Probabilidad y Procesos Aleatorios – 2020 –
Dr. Héctor Poveda
Asignación N°4

Fernando Guiraud 8-945-692 1EE131

Instrucciones. Resuelva los siguientes problemas en forma clara y ordenada. Coloque su respuesta en la línea al final del problema.

1. Un proceso aleatorio continuo $X(t)$ tiene una función de densidad de probabilidad $f(X(t)) = f(X(t_1), X(t_2), X(t_3), \dots, X(t_N))$. Si $f(X(t_1)) = 0$, determine $f(X(t))$
   a. Si los procesos son independientes 0
   b. Si los procesos no son independientes 0+f(x(t2))+...+f(x(tn))

2. Dado dos procesos aleatorios continuos y mutuamente ortogonales $X(t_1)$ y $Y(t_2)$, y el valor de su intercorrelación $R_{XY}(t_1, t_2) = \sigma^2$, determine el valor de la intercovarianza $C_{XY}(t_1, t_2)$ σ² = 0

3. Dado el problema anterior determine el valor de la intercovarianza $C_{XY}(t_1, t_2)$ si los procesos aleatorios continuos están decorrelacionados 0

4. Dado un proceso aleatorio discreto $(X(n))$ que puede tomar valores de $\{-1, +1\}$ con probabilidad de $P(X(n) = -1)$ y $P(X(n) = +1)$ respectivamente, determine su promedio $E(X(n))$ 2 y su varianza $V(X(n))$ -4

5. Un proceso aleatorio continuo $X(t)$ tiene una función de distribución $F(X(t)) = F(X(t_1), X(t_2), X(t_3), \dots, X(t_N))$, determine su función de densidad de probabilidad $f(X(t))$ f(x(t))=d^n (F(x(tn)))/(dx)^n

6. Dado un proceso aleatorio, real, continuo, estacionario en el sentido amplio (o largo) $X(t)$ con una correlación $R_{XX}(t_1, t_2) = \mu^2$ y un promedio μ, determine la covarianza $C_{XX}(t_1, t_2)$ μ² - μ² = 0

7. Determine el valor del promedio de un ruido blanco Gausiano de promedio cero con varianza $\sigma^2 = 1$ 0

8. Si el valor de la autocorrelación $R_{XX}(t_1, t_2)$ de un proceso aleatorio continuo $X(t)$ tiene un valor elevado. Los valores de $X(t_1)$ y $X(t_2)$ deberían estar alejados uno de otro o cercanos Cercanos

9. Demuestre que la función de autocovarianza de un proceso aleatorio $X(t)$ es igual a la función de autocorrelación de un proceso aleatorio centrado $X_c(t) = X(t) - m_x(t)$.

$$R_{XcXc}(t_1, t_2) = C_{XX}(t_1, t_2).$$

10. Demuestre que el coeficiente de correlación de un proceso aleatorio $X(t)$ es igual a la función de autocovarianza de un proceso aleatorio normalizado $X_{norm}(t) = \frac{X(t)}{\sqrt{C_{XX}(t,t)}}$.

$$r_{xx}(t_1, t_2) = C_{x_{norm}x_{norm}}(t_1, t_2)$$

9.) $X_c(t) = X(t) - m_x(t)$

Demuestre que:

$R_{X_cX_c}(t_1,t_2) = C_{XX}(t_1,t_2)$

$$E[X_c(t_1)X_c^*(t_2)] = R_{XX}(t_1,t_2) - E[X(t_1)E^*[X(t_2)]$$

$$E[X_c(t_1)]E[X_c^*(t_2)] = R_{XX}(t_1,t_2) - E[X(t_1)]E^*[X(t_2)]$$

$$E[X(t_1) - E[X(t_1)]]E[X^*(t_2) - E(X^*(t_2)] = R_{XX}(t_1,t_2) - E[X(t_1)E^*[X(t_2)]$$

$$(E[X(t_1)] - E[E(t_1)])(E^*[X(t_2)] - E^*[E[X(t_2)]]) = \dots$$

$$\underbrace{E[X(t_1)]E^*[X(t_2)]} - E[X(t_1)E^*[E(X(t_2)] - E[E(t_1)]E^*[X(t_2)] + E[E(X(t_1))]E^*[E(X(t_2)$$

$$R_{XX}(t_1,t_2) - \cancel{E[X(t_1)]E^*[X(t_2)]} - E[X(t_1)]E^*[X(t_2)] + \cancel{E[X(t_1)]E^*[X(t_2)]}$$

$$R_{XX}(t_1,t_2) - E[X(t_1)]E^*[X(t_2)] = R_{XX}(t_1,t_2) - E[X(t_1)E^*[X(t_2)]$$

$$\underline{R_{X_cX_c}(t_1,t_2) = C_{XX}(t_1,t_2)}$$

10.) $X_{norm}(t) = \dfrac{X(t)}{\sqrt{C_{XX}(t,t)}}$

Demuestre que:

$r_{XX}(t_1, t_2) = C_{X_{norm}X_{norm}}(t_1, t_2)$

$$r_{XX}(t_1,t_2) = \frac{C_{XX}(t_1,t_2)}{\sqrt{C_{XX}(t_1,t_1)\cdot C_{XX}(t_2,t_2)}} = \frac{R_{XX}(t_1,t_2) - E[X(t_1)]E^*[X(t_2)]}{\sqrt{C_{XX}(t_1,t_1)\cdot C_{XX}(t_2,t_2)}}$$

$$C_{X_{norm}X_{norm}} = R_{X_{norm}X_{norm}} - E[X_{norm}(t_1)]\cdot E^*[X_{norm}(t_2)]$$

$$= E[X_{norm}(t_1)\cdot X^*_{norm}(t_2)] - E\left[\frac{X(t_1)}{\sqrt{C_{XX}(t_1,t_1)}}\right]E^*\left[\frac{X(t_2)}{\sqrt{C_{XX}(t_2,t_2)}}\right]$$

$$= E\left[\frac{X(t_1)}{\sqrt{C_{XX}(t_1,t_1)}}\frac{X^*(t_2)}{\sqrt{C_{XX}(t_2,t_2)}}\right] - E\left[\frac{X(t_1)}{\sqrt{C_{XX}(t_1,t_1)}}\right]E^*\left[\frac{X(t_2)}{\sqrt{C_{XX}(t_2,t_2)}}\right]$$

$$= \frac{E[X(t_1)X^*(t_2)] - E[X(t_1)]E^*[X(t_2)]}{\sqrt{C_{XX}(t_1,t_1)\cdot C_{XX}(t_2,t_2)}}$$

$$= \frac{R_{XX}(t_1,t_2) - E[X(t_1)]E^*[X(t_2)]}{\sqrt{C_{XX}(t_1,t_1)\cdot C_{XX}(t_2,t_2)}}$$

$$= \frac{C_{XX}(t_1,t_2)}{\sqrt{C_{XX}(t_1,t_1)\cdot C_{XX}(t_2,t_2)}}$$

$$= \underline{r_{XX}(t_1,t_2) = C_{X_{norm}X_{norm}}}$$