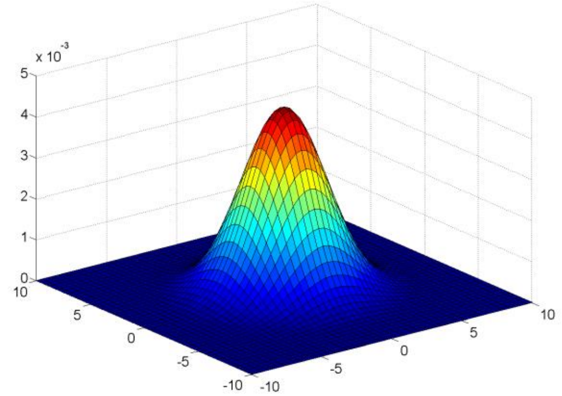
Probabilidad y Procesos Aleatorios



Dr. Héctor E. Poveda P.

hector.poveda@utp.ac.pa

www.hpoveda7.com

@hpoveda7

Prólogo

Las diapositivas que se presentan a continuación resumen los conceptos más relevantes de probabilidad: enumeraciones, probabilidad condicional y variables aleatorias. Estas diapositivas fueron confeccionadas por el Dr. Héctor Poveda, docente de la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Tecnológica de Panamá y sirven como material de apoyo en el curso de Probabilidad y Procesos Aleatorios. Esta asignatura inicia con una introducción en el tema de espacios probabilísticos y probabilidad condicional. En un segundo punto se abordan los conceptos de variable aleatoria para finalmente entrar en el tema de procesos aleatorios. La ultima parte del curso consiste en una introducción a los métodos de estimación de variables aleatorias mas utilizados. El objetivo del curso es construir los conocimientos en conceptos de probabilidad y procesos aleatorios presentes en las diferentes áreas de la ingeniera eléctrica.

Plan del curso

1. Probabilidad
   - Espacios probabilísticos
   - Probabilidad condicional
2. Variables Aleatorias
3. Múltiples Variables Aleatorias
4. Procesos Aleatorios
5. Métodos de Estimación

Plan del curso

1. Probabilidad

2. Variables Aleatorias
   - Variable aleatoria discreta
   - Variable aleatoria continua
   - Función de una variable aleatoria
   - La variable aleatoria Gaussiana
   - Teorema del límite central
3. Múltiples Variables Aleatorias

4. Procesos Aleatorios

5. Métodos de Estimación

Plan del curso

1. Probabilidad
2. Variables Aleatorias
3. Múltiples Variables Aleatorias
   - Ley de probabilidad: covarianza y correlación
   - Caso discreto
   - Caso continua
4. Procesos Aleatorios
5. Métodos de Estimación

Plan del curso

1. Probabilidad
2. Variables Aleatorias
3. Múltiples Variables Aleatorias
4. Procesos Aleatorios
   - Densidad de probabilidad de orden superior
   - Funciones de autocorrelación y autocovarianza
   - Procesos aleatorios estacionarios
   - El ruido blanco Gaussiano de promedio cero
5. Métodos de Estimación

Introducción

Experiencia aleatoria: experiencia en la cual el conocimiento de las condiciones experimentales no permite predecir el resultado con exactitud

Teoría de las Probabilidades

- Objetivo: modelar una aleatoriedad para poder manejarla
- Modelo probabilista: representación formal de conocimientos relativos a una experiencia aleatoria.
- La probabilidad de un resultado impredecible es una información.
- La dependencia entre varios eventos es una información.

Introducción

Historia

- Siglo XVI: evaluación de riesgos en contratos marítimos
- 1654, P. Fermat y B. Pascal: primeras bases matemáticas
- 1657, C. Huygens: “Razonamientos sobre el juego de dados”
- 1713, J. Bernoulli: noción de variable aleatoria (VA)
- 1812, Laplace: Teorema del límite central
- 1933, Kolmogorov: Teoría axiomática

Introducción

Campos de aplicación

- Juegos de azar
- Teoría del juego: economía y finanzas
- Física: física estadística, mecánica cuántica
- Estadística: control de calidad, fiabilidad de un sistema
- Modelización estocástica: evaluación de riesgos
- Procesamiento de señales: modelos de ruidos
- Teoría de la decisión: reconocimiento de caracteres
- Teoría de la información: comunicaciones digitales

Probabilidad

Espacio probabilístico

Ω: conjunto fundamental, resultados elementales (finito, infinito, continuo)

$\mathcal{F}$: conjunto de eventos, $A \in \mathcal{F}$ es subconjunto de Ω.

P: ley de probabilidad que tiene todo evento $A \in \mathcal{F}$, $P(A) \in [0,1]$

Probabilidad

Conjunto de eventos

Lenguaje de probabilidad: lenguaje de la teoría de conjuntos

$A \subset B$: *A* implica *B*, todos los resultados de *A* están en *B*

$A \cup B$: *A* ó *B*, evento que se realiza si se realiza uno o el otro, o ambos

$A \cap B$: *A* y *B*, evento que se realiza si *A* y *B* se realizan simultáneamente

ϕ: evento imposible

Ω: evento certero

$\bar{A}$: evento contrario

Probabilidad

Ley de probabilidad

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$ **Eventos incompatibles**

Probabilidad

Ley de probabilidad

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\emptyset) = 0$$

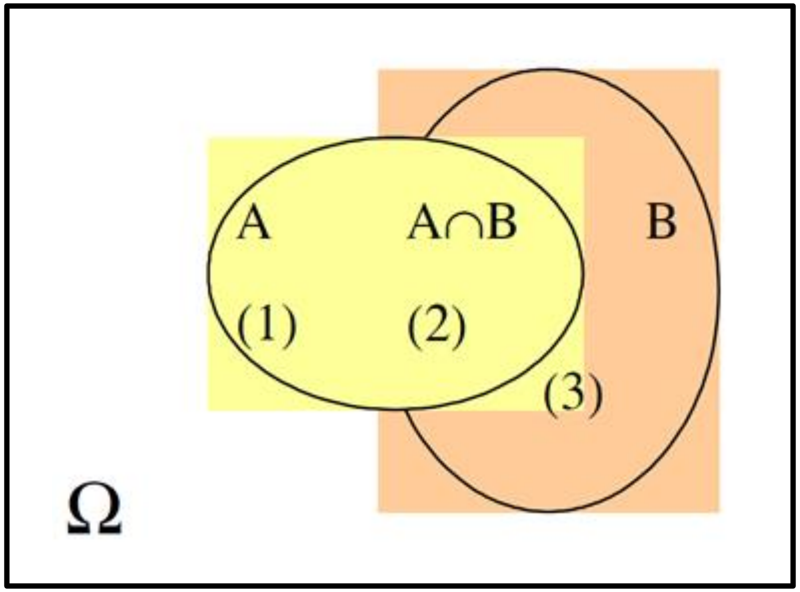
Si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidad

Ley de probabilidad

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Probabilidad

Espacios probabilísticos finitos

Caso general: $P(W) = \sum_i P(w_i)$ donde $W = \{w_n, \dots, w_i, \dots w_N\}$ y $P(w_i) \neq P(w_n)$

Caso equiprobable: $P(w_i) = \frac{N_W}{N}$ donde N_W es el número de veces que sucede el evento w_i.

Probabilidad

Enumeraciones: n balotas y p lances.

		Lance con orden	**Lance sin orden**
Lance sin reuso	$p \leq n$	Arreglo $A^p{}_n = \frac{n!}{(n-p)!}$	Combinación $C^p{}_n = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$
	$p = n$	Permutación $n!$	1
Lance con reuso	p	Arreglo con repetición n^p	Combinación con repetición $C^{n-1}{}_{n+p-1}$

Probabilidad

$$P(B|A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P\left(B \cap A\right)}{P(A)}$$

Probabilidad

$$P(B|A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P\ (B \cap A)}{P(A)}$$

Ejemplo
La probabilidad de que Panamá llegue al mundial es de 0.86. La probabilidad de que llegue a 1/8s de final es 0.39. Sabiendo que Panamá llego al mundial, utilice la probabilidad para calcular la probabilidad que Panamá pase a 1/8s.

Probabilidad

Solución

Llegar a 1/8s de final está incluido en llegar al mundial $B \subset A$

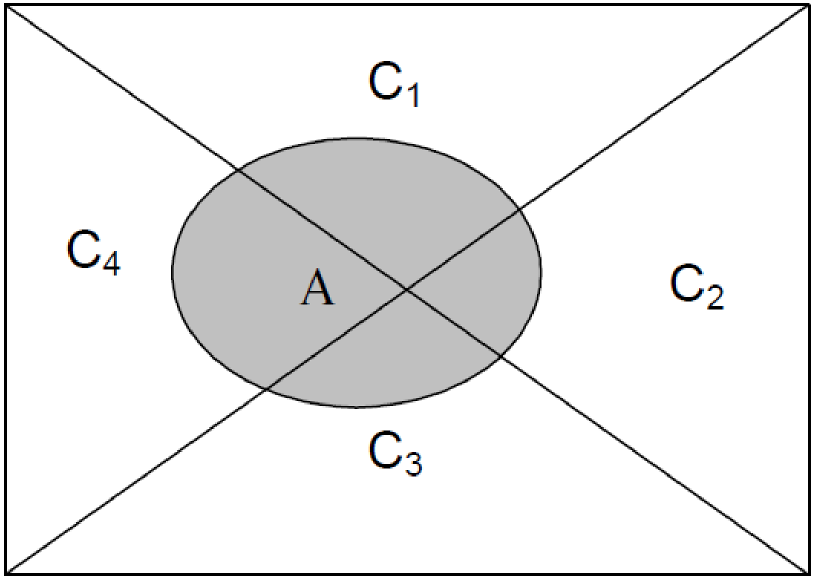
$$\Rightarrow \quad A \cap B = B$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0.39}{0.82} = 0.47$$

Probabilidad

Teorema de Bayes

$$P(C_i|A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P\left(A|C_i\right)P(C_i)}{\sum_k P(A|C_k)\,P(C_k)}$$



Probabilidad

Teorema de Bayes

$$P(C_i|A) \overset{\text{def}}{=} \frac{P\left(A\middle|C_i\right)P(C_i)}{\sum_k P(A|C_k)\,P(C_k)}$$

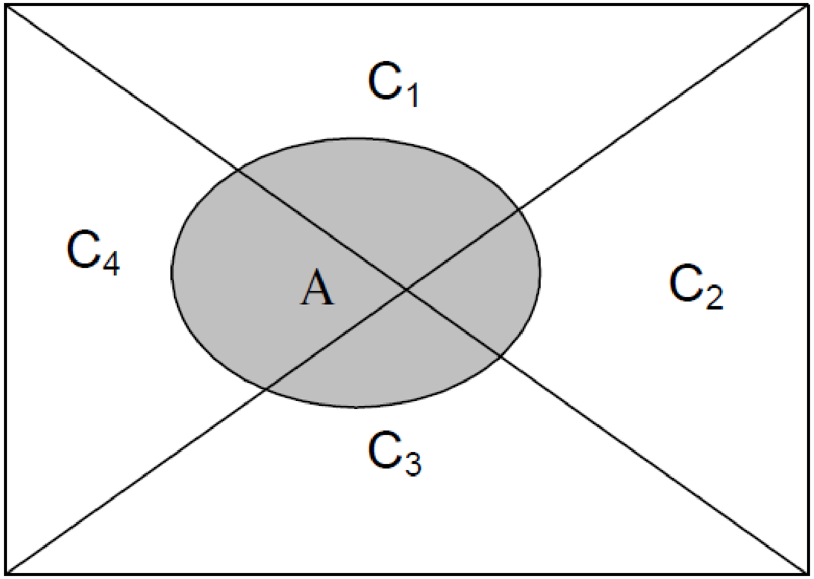
Teorema de Bayes - demostración

$$P\left(C_i \mid A\right) = \frac{P\left(C_i \cap A\right)}{P\left(A\right)} = \frac{P\left(A \cap C_i\right)}{P\left(A\right)} = \frac{P\left(A \mid C_i\right)P\left(C_i\right)}{P\left(A\right)}$$

Probabilidad

Teorema de Bayes - demostración

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} (A \cap C_k)\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap C_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A \mid C_k)\, P(C_k)$$



Probabilidad

Teorema de Bayes

$$P(C_i|A) = \frac{P\left(A\middle|C_i\right)P(C_i)}{\sum_k P(A|C_k)\, P(C_k)}$$

Ejemplo

Dos urnas contienen balotas rojas y blancas. La primera urna contiene 9 balotas rojas y 1 blanca. La segunda urna contiene 1 roja y 4 blancas. Si tomamos una balota al azar y esta es roja, cual es la probabilidad de que fue tomada de la urna 1. Utilice el teorema de Bayes.

Probabilidad

Solución

Dos urnas, mutuamente exclusivas, podemos usar el teorema de Bayes

$$P(C_i \mid A) = \frac{P(A \mid C_i)\, P(C_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A \mid C_k)\, P(C_k)}$$

C_i: urnas
A: balota roja

$$P(C_1 \mid A) = \ ?$$

Probabilidad

Solución

Dos urnas → $P(C_1) = P(C_2) = \frac{1}{2}$

9 balotas rojas, 10 en total → $P(A \mid C_1) = \frac{9}{10} = 0.9$

1 balota roja, 5 en total → $P(A \mid C_2) = \frac{1}{5} = 0.2$

Probabilidad

Solución

$$P\left(C_i \mid A\right) = \frac{P\left(A \mid C_i\right) P\left(C_i\right)}{\sum_{k=1}^{n} P\left(A \mid C_k\right) P\left(C_k\right)}$$

$$P\left(C_1 \mid A\right) = \frac{9}{11} \simeq 0.82$$

Probabilidad

Eventos mutuamente exclusivos: $P(A \cap B) = 0$
Eventos independientes: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Ejemplo
Una fábrica produce una serie de camisetas en 2 fases independientes. En la primera fase se produce un defecto A en un 0.02 de los casos, en la segunda fase se produce un defecto B en 0.08 de los casos. Calcular la proba. de que una camiseta tirada al azar tenga: 1/Ambos defectos. 2/ Al menos uno. 3/ Un solo defecto. 4/ Ningún defecto.

Probabilidad

Solución

$$P(A) = 0.02 \qquad P(B) = 0.08$$

1/Ambos defectos: eventos independientes

$$A \cap B : P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = 0.0016$$

2/ Al menos uno

$$A \cup B : P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.0984$$

Probabilidad

Solución

3/ Un solo defecto

$$\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$$

$$\begin{aligned} P\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right] &= P(A)\, P\left(\overline{B}\right) + P\left(\overline{A}\right) P(B) \\ &= P(A)\left[1 - P(B)\right] + \left[1 - P(A)\right] P(B) \\ &= 0.0968 \end{aligned}$$

Probabilidad

Solución

4/ Ningún defecto.

$$\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right):P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\left[1-P\left(A\right)\right]\left[1-P\left(B\right)\right]=\;0.9016$$

Variables Aleatorias

Variable aleatoria (VA) discreta

X es una VA definida en el espacio probabilístico discreto $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Ley de probabilidad $P(X = x_i) = p_i = P(x_i)$

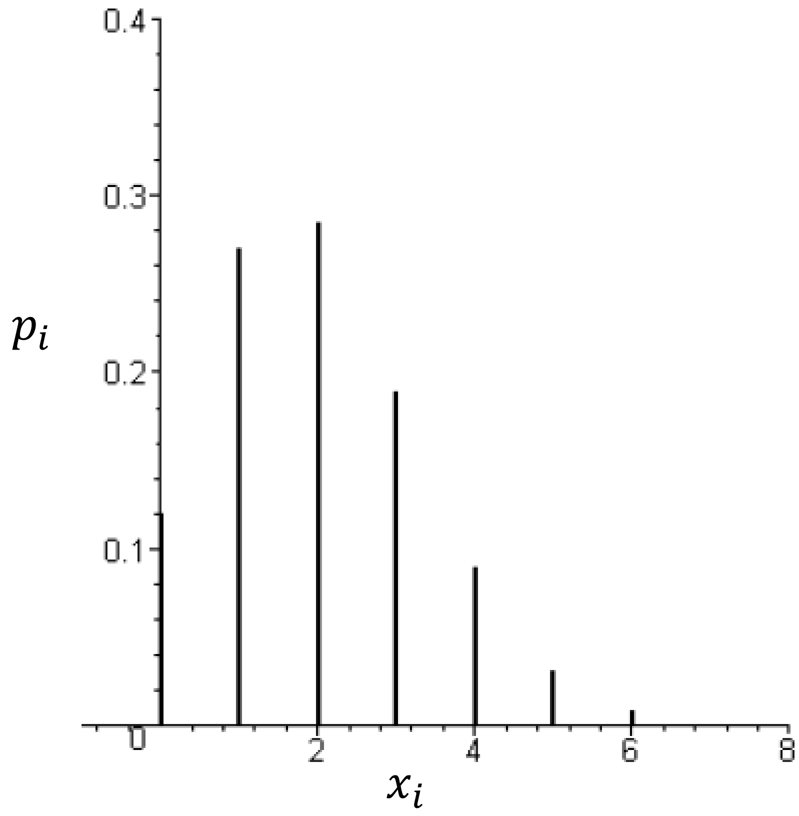
$$\boxed{\sum_i p_i = 1}$$

Función de distribución

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{i \mid x_i < x} p_i$$

Variables Aleatorias

Ejemplo: función de distribución



$$P(-1) = 0$$
$$P(0) = 0.12$$
$$P(1) = 0.27$$
$$P(2) = 0.29$$
$$P(3) = 0.19$$
$$P(4) = 0.09$$
$$P(5) = 0.03$$
$$P(6) = 0.01$$
$$P(7) = 0$$
$$P(8) = 0$$

Variables Aleatorias

Solución

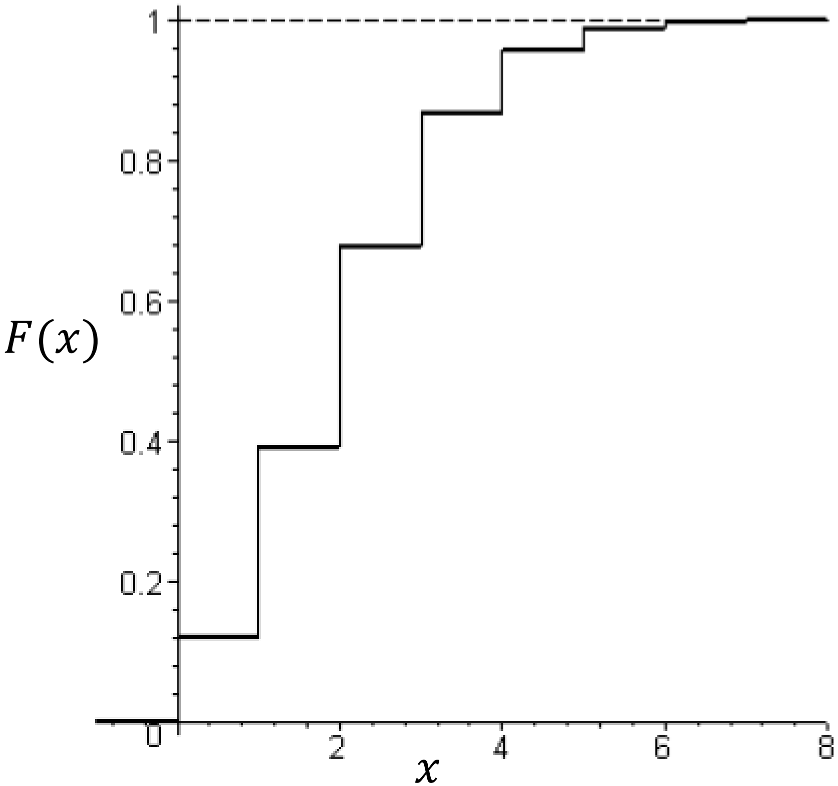
$$F(x) = P(X < x) = \sum_{i|x_i<x} p_i$$

$$F(0) = 0$$
$$F(1) = 0.12$$
$$F(2) = 0.39$$
$$F(3) = 0.68$$
$$F(4) = 0.87$$
$$F(5) = 0.96$$
$$F(6) = 0.99$$
$$F(7) = 1$$

$$P(-1) = 0$$
$$P(0) = 0.12$$
$$P(1) = 0.27$$
$$P(2) = 0.29$$
$$P(3) = 0.19$$
$$P(4) = 0.09$$
$$P(5) = 0.03$$
$$P(6) = 0.01$$
$$P(7) = 0$$
$$P(8) = 0$$

Variables Aleatorias

Solución



$$F(-\infty) = 0$$
$$F(0) = 0$$
$$F(1) = 0.12$$
$$F(2) = 0.39$$
$$F(3) = 0.68$$
$$F(4) = 0.87$$
$$F(5) = 0.96$$
$$F(6) = 0.99$$
$$F(7) = 1$$
$$F(+\infty) = 1$$

Variables Aleatorias

Promedio y Varianza

$$m = E[X] = \sum_i x_i p_i$$

$$\sigma^2 = V[X] = \sum_i p_i (x_i - m)^2$$

Desviación estándar $\sigma = \sqrt{V[X]}$

Formula de Koeing $\sigma^2 = V[X] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2$

$$E\left[X^2\right] = \sum_i p_i (x_i)^2$$

Variables Aleatorias

Ley binomial

Experiencia de Bernoulli $\Omega = \{\mathrm{A}, \bar{A}\}$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = p$$

$$\mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - p$$

La ley binomial es relativa a n experiencias de Bernoulli

La VA X es el número de realizaciones del evento A

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

Variables Aleatorias

VA continua

X es una VA definida en el espacio continuo

función de densidad $f(x)$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1}$$

función de distribución $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')dx'$

Variables Aleatorias

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')dx' \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}}$$

$$\begin{aligned} P(x_1 \leq X \leq x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \\ &= P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) \\ &= F(x_2) - F(x_1) \end{aligned}$$

$$F(-\infty) = 0$$
$$F(+\infty) = 1$$
$$0 \leq F(x) \leq 1$$

¡Al igual que en un VA discreta!

Variables Aleatorias

Promedio y Varianza

$$E[X] = m = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$V[X] = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x) dx$$

Formula de Koeing $\sigma^2 = V[X] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2$

$$E\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

Variables Aleatorias

Promedio y Varianza

$$E[X] = m = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

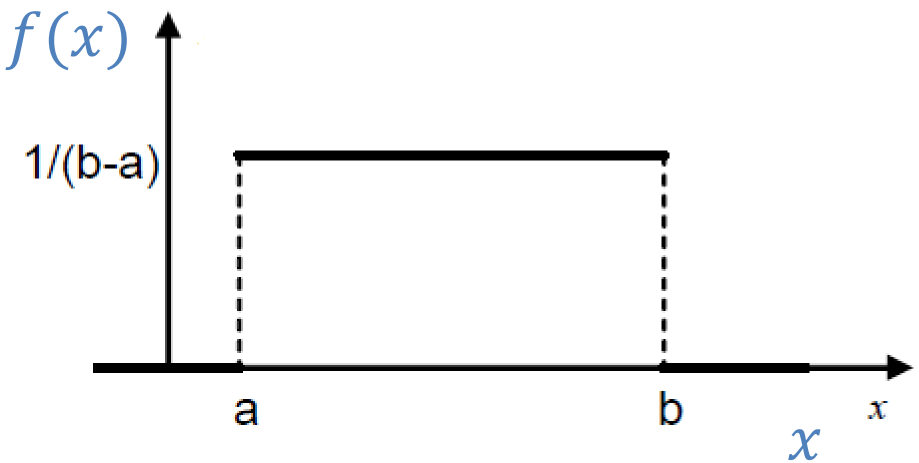
$$V[X] = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x) dx$$

Formula de Koeing $\sigma^2 = V[X] = E\left[X^2\right] - (E[X])^2$

$$E\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

Variables Aleatorias

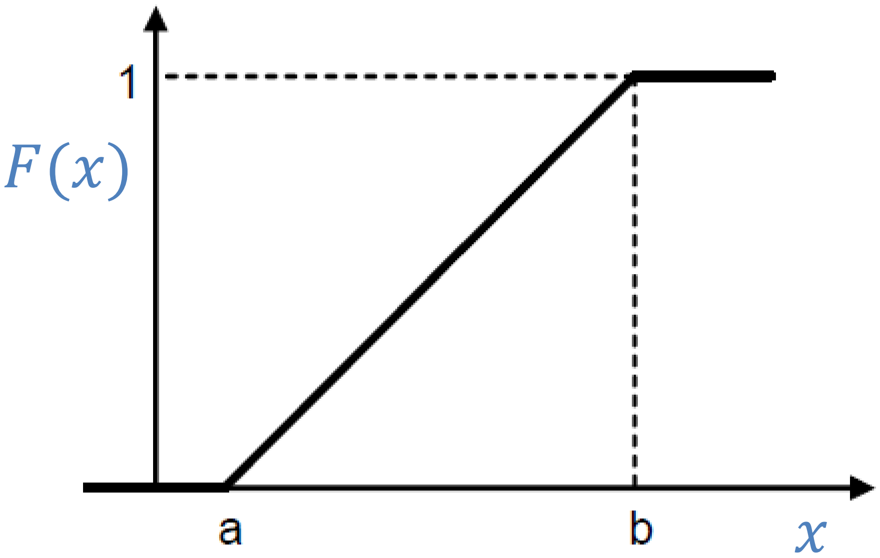
Ejemplo: La distribución uniforme



$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Variables Aleatorias

Ejemplo: La distribución uniforme



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{para } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{para } x \geq b \end{cases}$$

$$F(x) = P(X < x)$$

Variables Aleatorias

Ejemplo: Dada una VA continua con la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} \text{ para } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 - \frac{2x}{3} \quad \text{para } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 \quad \text{para resto} \end{cases}$$

1. Demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
2. Determine $E[X]$
3. Determine $P(1 \leq X \leq 2.5)$
4. Determine $P(1 \leq X \leq 2.5|X \leq 2)$

Variables Aleatorias

Solución

1. Demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^2 \frac{x}{3}dx + \int_2^3 \left(2 - \frac{2}{3}x\right) dx = 1$$

2. $E[X]$

$$E(X) = \frac{5}{3} = 1.666$$

Variables Aleatorias

Solución

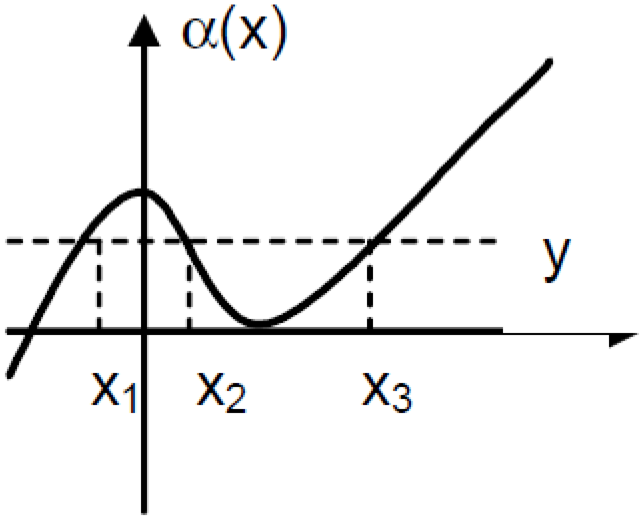
3. $P(1 \leq X \leq 2.5)$
4. $P(1 \leq X \leq 2.5 | X \leq 2)$

$$\begin{aligned}
P(1 \leq X \leq 2.5) &= \int_1^{2.5} f(x)dx = \int_1^2 \frac{x}{3}dx + \int_2^{2.5}\left(2 - \frac{2}{3}x\right)dx = 0.75 \\
P(1 \leq X \leq 2.5 \mid X \leq 2) &= P(1 \leq X \leq 2.5 \,\cap\, X \leq 2)/P(X \leq 2) \\
&= P(1 \leq X \leq 2)/P(X \leq 2) = \frac{1}{2}/\frac{2}{3} = 0.75
\end{aligned}$$

Variables Aleatorias

Función de VA

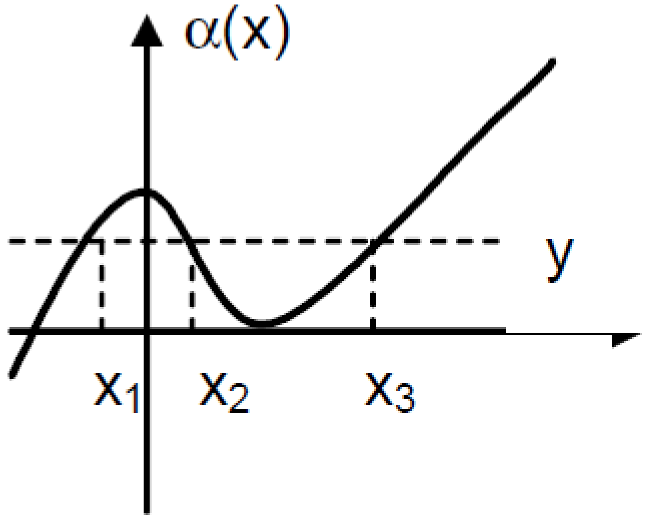
X es VA con una función de densidad $f(x)$
Queremos definir la ley de probabilidad de $Y = \alpha(X)$



Variables Aleatorias

Función de VA

X es VA con una función de densidad $f(x)$
Queremos definir la ley de probabilidad de $Y = \alpha(X)$

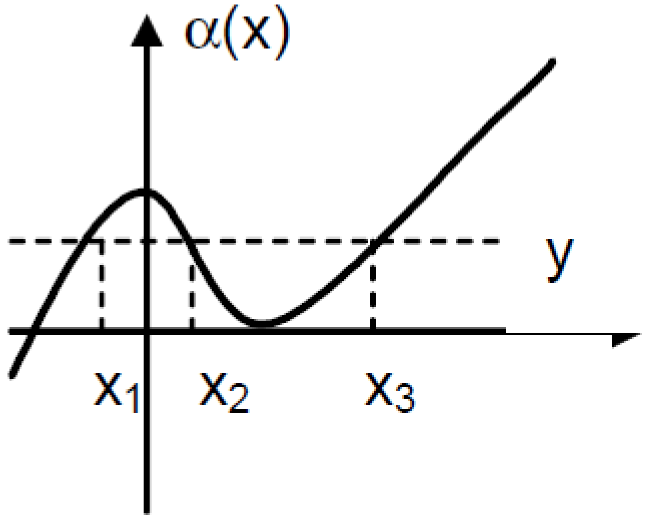


$$F(y) = P(Y < y) = P(\alpha(X) < y)$$
$$F(y) = P(X < x_1) + P(x_2 < X < x_3)$$

Variables Aleatorias

Función de VA

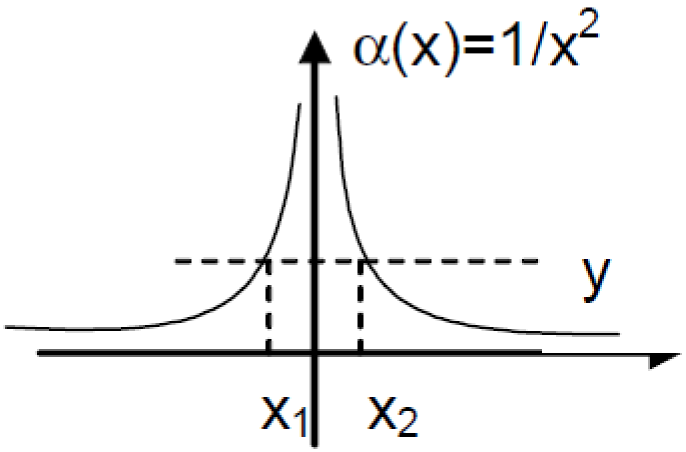
X es VA con una función de densidad $f(x)$
Queremos definir la ley de probabilidad de $Y = \alpha(X)$



$$f(y) = \frac{f(x_1)}{|\alpha'(x_1)|} + \frac{f(x_2)}{|\alpha'(x_2)|} + \frac{f(x_3)}{|\alpha'(x_3)|}$$

Variables Aleatorias

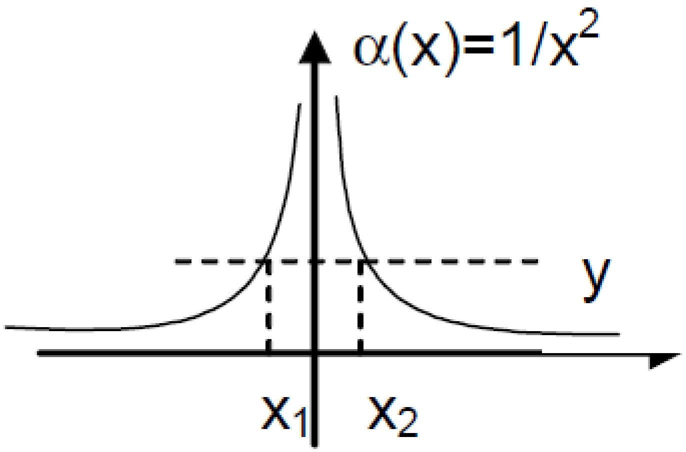
Ejemplo



X es VA con una función de densidad $f(x)$. Obtenga $F(y)$ y $f(y)$

Variables Aleatorias

Solución



X es VA con una función de densidad $f(x)$. Obtenga $F(y)$ y $f(y)$

$$F(y) = P(Y < y) = P(\alpha(X) < Y) = P(\alpha(X) < y) = P(X < x_1) + P(X > x_2)$$
$$= P(X < x_1) + 1 - P(X < x_2)$$

Variables Aleatorias

Solución

$$F(y) = P(X < x_1) + 1 - P(X < x_2)$$

Las raíces

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{y}} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{y}} \quad \Rightarrow \quad F(y) = F\left(-\frac{1}{\sqrt{y}}\right) + 1 - F\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

$$f(y) = ?$$

$$f(y) = \frac{f(x_1)}{|\alpha'(x_1)|} + \frac{f(x_2)}{|\alpha'(x_2)|} + \frac{f(x_3)}{|\alpha'(x_3)|}$$

Variables Aleatorias

Solución

$$F(y) = P(X < x_1) + 1 - P(X < x_2)$$

Las raíces

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{y}} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{y}} \quad \Longrightarrow \quad F(y) = F\left(-\frac{1}{\sqrt{y}}\right) + 1 - F\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

$$f(y) = ?$$

$$f(y) = \frac{f(x_1)}{|\alpha'(x_1)|} + \frac{f(x_2)}{|\alpha'(x_2)|} + \cancel{\frac{f(x_3)}{|\alpha'(x_3)|}}$$

2 raíces

Variables Aleatorias

Solución

Paso 1: Encontrar las raíces

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{y}} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

Paso 2: Derivar

$$\alpha(X) = \frac{1}{X^2} = X^{-2} \Rightarrow \alpha'(X) = -2X^{-3}$$

Variables Aleatorias

Solución

Paso 3: Reemplazar las raíces

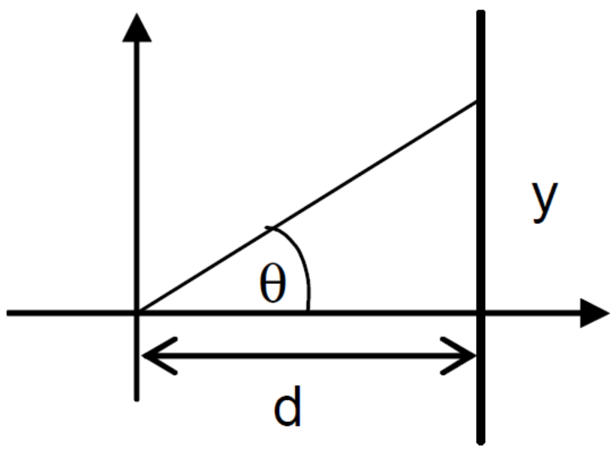
$$\alpha'(x_1) = -2\left(-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^{-3} = -2\left(-y^{-1/2}\right)^{-3} = 2y^{3/2}$$

$$\alpha'(x_2) = -2\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^{-3} = -2\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3} = -2y^{3/2}$$

$$f(y) = \frac{f(x_1)}{|\alpha'(x_1)|} + \frac{f(x_2)}{|\alpha'(x_2)|} = \frac{f(-\frac{1}{\sqrt{y}})}{2y^{3/2}} + \frac{f(\frac{1}{\sqrt{y}})}{2y^{3/2}}$$

Variables Aleatorias

Ejemplo



θ es VA con una función de densidad uniforme entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Obtenga $f(y)$.

Variables Aleatorias

Solución

$$f(y) = \frac{f(x_1)}{|\alpha'(x_1)|} + \frac{f(x_2)}{|\alpha'(x_2)|} + \frac{f(x_3)}{|\alpha'(x_3)|}$$

Variables Aleatorias

Solución

$$f(y) = \frac{f(x_1)}{|\alpha'(x_1)|} + \cancel{\frac{f(x_2)}{|\alpha'(x_2)|}} + \cancel{\frac{f(x_3)}{|\alpha'(x_3)|}}$$

1 raíz

$$f(y) = \frac{f(\theta_1)}{|\alpha'(\theta_1)|}$$

Encontrar $f(\theta)$

$$f\,(\theta) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}$$

Variables Aleatorias

Solución

Encontrar $\alpha(\theta)$

$$\alpha(\theta) = Y = d \cdot \tan\theta$$

Paso 1: Encontrar las raíces

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{d}\right)$$

Paso 2: Derivar

$$\alpha'(\theta) = d \cdot \sec^2\theta$$

Variables Aleatorias

Solución

Paso 3: Reemplazar las raíces

$$\alpha'(\theta_1) = d \cdot \sec^2 \theta_1 = d \cdot \sec^2 \left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{d}\right)\right)$$

Recuerde que: $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$$\Rightarrow \quad \alpha'(\theta_1) = d\left[1 + \tan^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{d}\right)\right)\right]$$

Variables Aleatorias

Solución

$$\alpha'(\theta_1) = d \cdot \sec^2 \theta_1 = d\left[1 + \tan^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{d}\right)\right)\right]$$

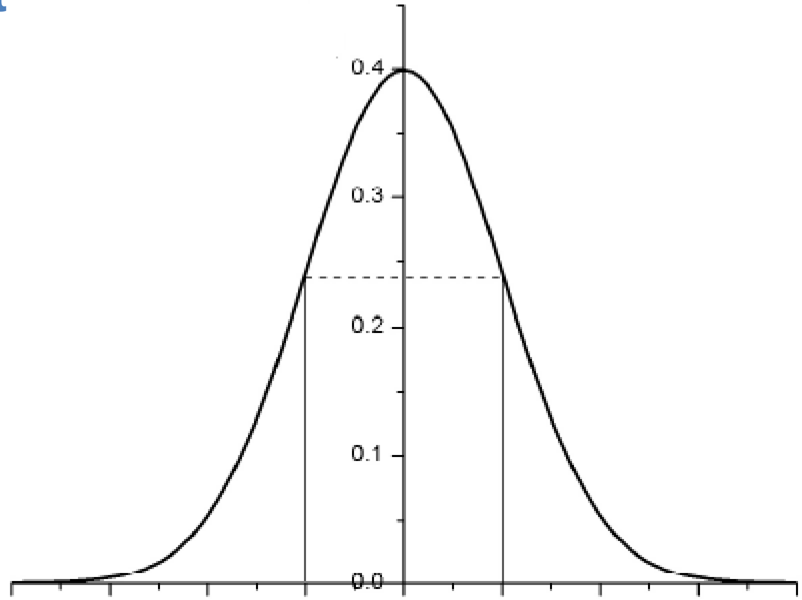
$$\alpha'(\theta_1) = d\left(1 + \frac{y^2}{d^2}\right) = \frac{d^2 + y^2}{d}$$

$$f(y) = \frac{f(\theta_1)}{|\alpha'(\theta_1)|}$$

$$f(\theta_1) = \frac{1}{\pi} \quad \Rightarrow \quad f(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{d^2 + y^2}$$

Variables Aleatorias

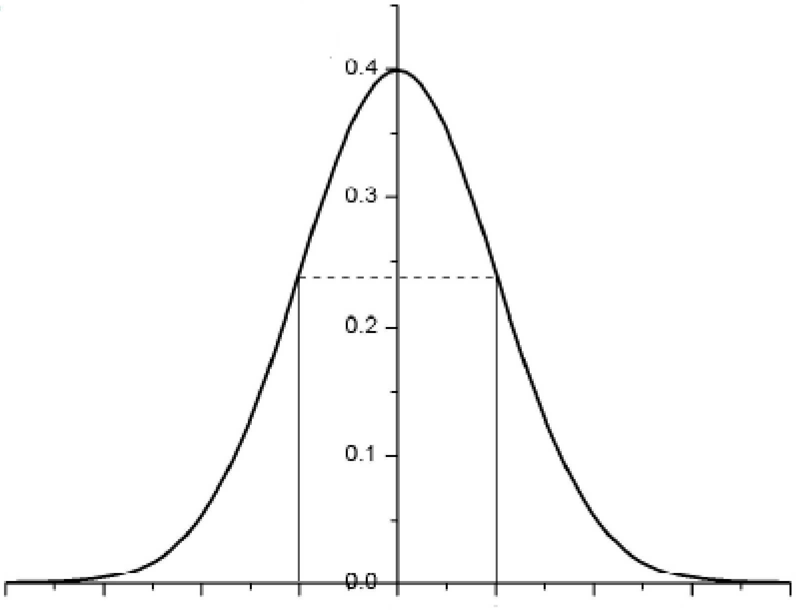
La VA Gaussiana



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Variables Aleatorias

La VA Gaussiana



$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\xi - m)^2}{2\sigma^2}} d\zeta$$

Variables Aleatorias

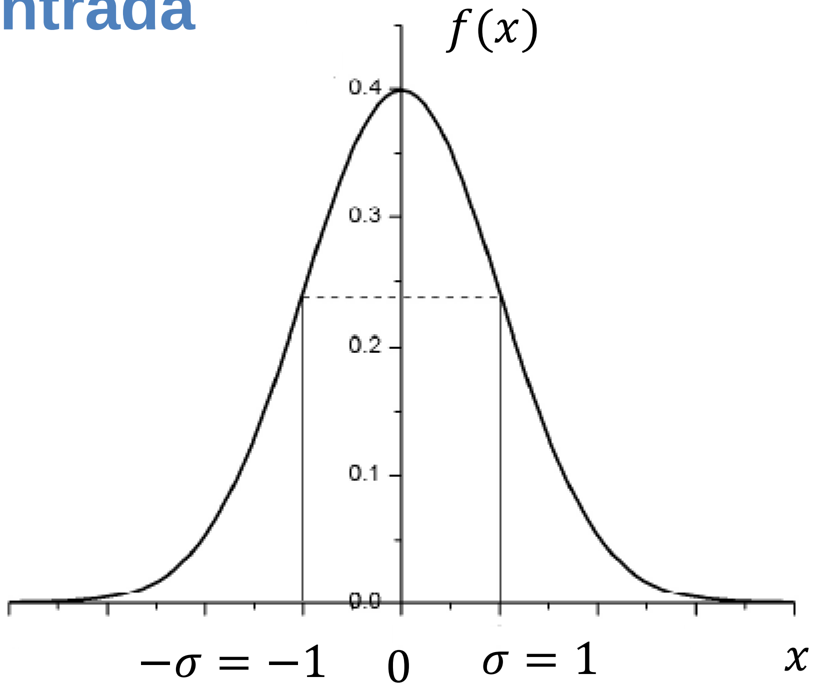
La VA Gaussiana

$$F(x) = P(X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = F_R\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

función del error $\longrightarrow$ $F_R(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2}\left\{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

Variables Aleatorias

VA Gaussiana centrada



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Variables Aleatorias

Otras distribuciones

	Parámetros		$f(x)$	$E[X]$	σ
Cauchy $\longrightarrow$	$\alpha > 0$	$\mathbb{R}$	$\frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{x^2+\alpha^2}$		
Exponencial $\longrightarrow$	$\lambda > 0$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}$	λ	λ
Laplace $\longrightarrow$	$m,\ b > 0$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{\lvert x-m\rvert}{b}\right)$	m	$b\sqrt{2}$
χ^2 a n $\longrightarrow$	$n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-x/2}$	n	$\sqrt{2n}$
Student $\longrightarrow$	$n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi n}\Gamma(n/2)}\frac{1}{\left(\frac{x^2}{n}+1\right)^{(n+1)/2}}$	0	$\frac{n}{n-2}$

Variables Aleatorias

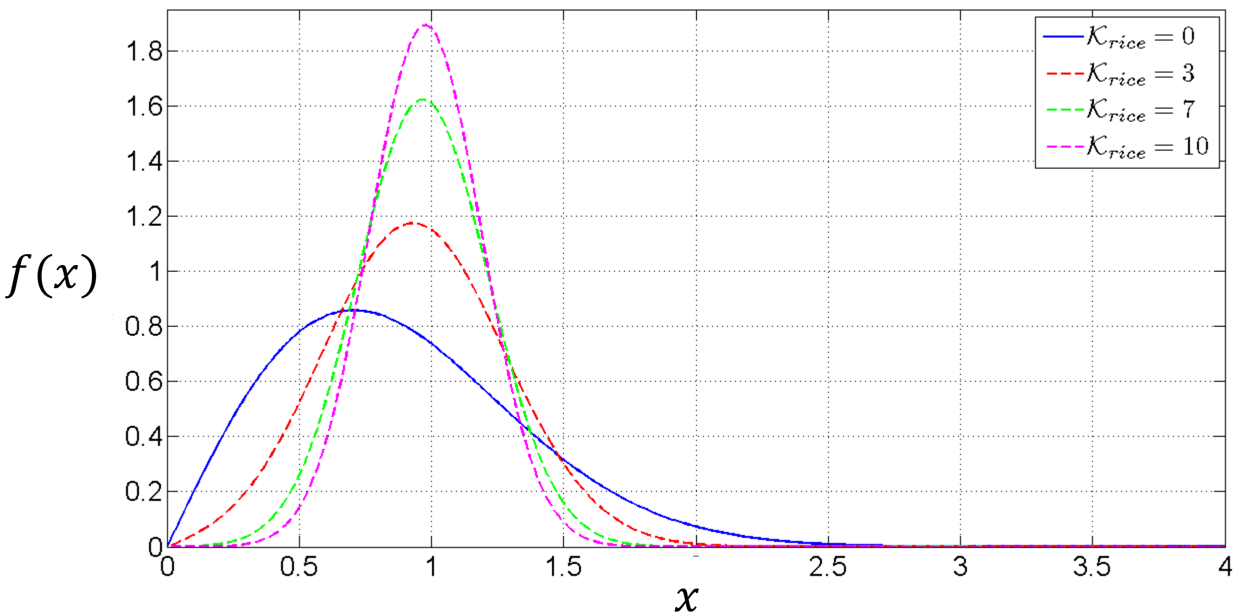
Distribución de Rice

$$f(x) = \frac{x}{{\sigma_r}^2} e^{-\frac{x^2+{\mu_r}^2}{2{\sigma_r}^2}} \mathcal{J}_0\left(\frac{x\mu_r}{{\sigma_r}^2}\right) \qquad x \geq 0$$

$$\mathcal{J}_0(y) \triangleq \int_0^{2\pi} e^{-y\cos(z)}\, dz$$

$$\Omega_r = {\mu_r}^2 + 2{\sigma_r}^2$$

$$\mathcal{K}_{rice} = \frac{{\mu_r}^2}{2{\sigma_r}^2}$$

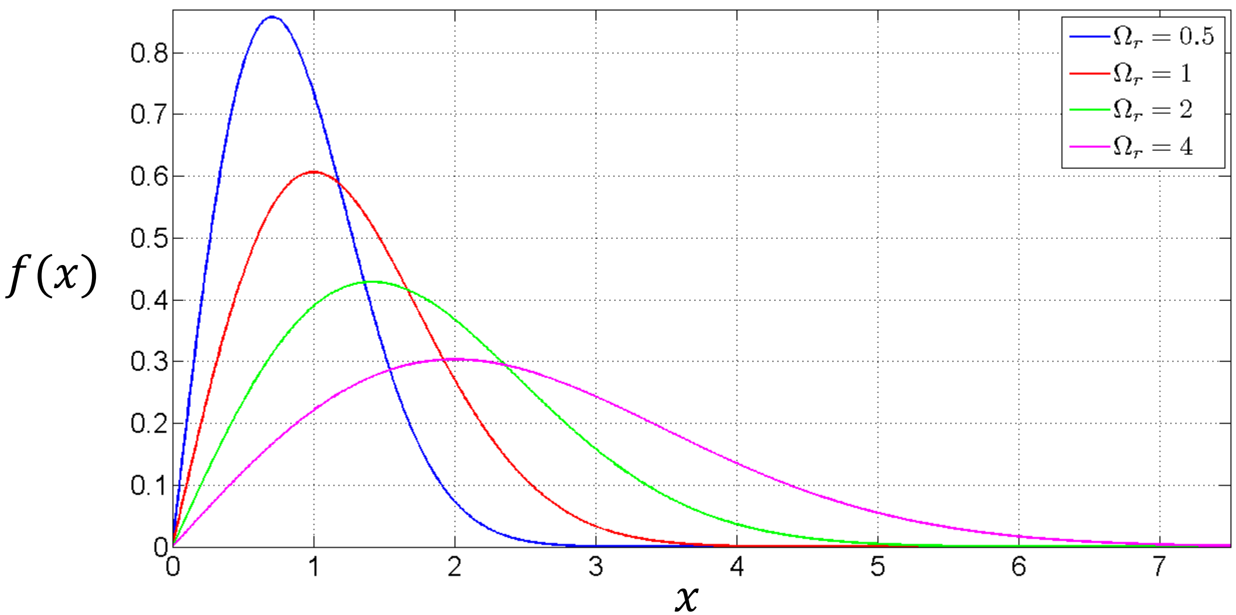


Variables Aleatorias

Distribución de Rayleigh

$$f(x) = \frac{2x}{\Omega_r} e^{-\frac{x^2}{\Omega_r}} \quad x \geq 0$$

$$\Omega_r = 2\sigma_r^2$$



Variables Aleatorias

Teorema del límite central

La suma de N variables aleatorias independientes de varianza $\sigma^2 \neq 0$, donde N tiende a infinito tiene como resultado una variable aleatoria de distribución Gaussiana.

Múltiples VAs

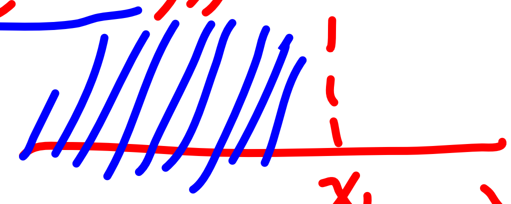
Función de distribución conjunta

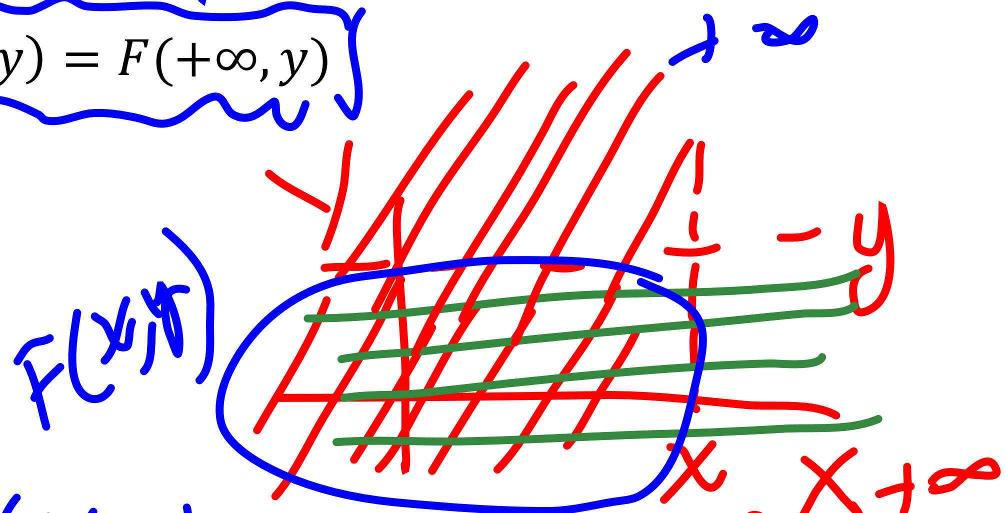
$Y \neq \alpha(X)$

$$\underbrace{F(x,y)}_{} = P(X < x \cap Y < y) = P(X < x, Y < y)$$

$$\boxed{F(x) = F(x, +\infty)} \qquad \boxed{F(y) = F(+\infty, y)}$$

$P(X<x) = F(x)$





$P(X<x, Y<y) = P(X<x)P(Y<y)$ (independientes)

Múltiples VAs

Función de densidad conjunta

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$\boxed{f_{xy} = \frac{\delta^2 F_{xy}(x,y)}{\delta x \delta y}}$$

$$P(x,y) = \iint_D f_{xy}(x,y)\, dxdy$$

$$P(X<x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

$f(x,y) =$

donde D es un intervalo dado

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\, dy \qquad f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\, dx$$

DENSIDAD MARGINAL

X, Y independientes

$f(x) = x^2 \quad f(y) = 3$

$f(x,y) = 3x^2$

$F(x,y) = F(x)F(y)$

Múltiples VAs

Probabilidad conjunta

$\cancel{f(x,y)}$

$$P(X = x_k) = \sum_{y_l} P(X = x_k, Y = y_l)$$

$$P(\cancel{X} = y_l) = \sum_{x_k} P(X = x_k, Y = y_l)$$

Múltiples VAs

Promedio conjunto (multiplicación)

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

Continuo: $E(XY) = \iint\limits_{D} XY \cdot f(x,y)\, dxdy$

Discreto: $E(XY) = \sum\limits_{k,l} x_k y_l \cdot P(X = x_k, Y = y_l)$

Múltiples VAs

$f(y), y$

Covarianza

$$COV(X,Y) = \underline{E(XY)} - \underline{E[X]E[Y]}$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y) dy$$

Coeficiente de correlación

$$\sqrt{V[X]} = \sigma_x$$

$$\boxed{r(X,Y) = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}}$$

Múltiples VAs

Ejemplo: Dos VAs X_1, X_2 toman los valores $\{0,1,2,3\}$ de manera equiprobable. Definimos las VAs $Y = X_1 + X_2$ y $Z = X_1\, X_2$. Calcule el factor de correlación $r(Y, Z)$.

$X_1 = \{0,1,2,3\}$
$X_2 = \{0,1,2,3\}$

¿Qué valores pueden tomar Y y Z?

$Y = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

$Z = \{0,1,2,3,4,6,9\}$

Múltiples VAs

Ejemplo: Dos VAs $X_1 X_2$ toman los valores $\{0,1,2,3\}$ de manera equiprobable. Definimos las VAs $Y = X_1 + X_2$ y $Z = X_1\ X_2$. Calcule el factor de correlación $r(Y, Z)$.

¿Qué valores pueden tomar Y y Z?

$$Y = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

$$Z = \{0,1,2,3,4,6,9\}$$

Múltiples VAs

$$\boxed{\begin{aligned} Y &= \{0,1,2,3,4,5,6\} \\ Z &= \{0,1,2,3,4,6,9\} \end{aligned}}$$

¿Con que probabilidad?

¿Cuál es la probabilidad que $Y = 1$? ¿Cuál es la probabilidad que $Z = 9$?

X_1, X_2	0,0	0,1	0,2	0,3	1,0	1,1	
Y	0	1	2	3	1	2	
Z	0	0	0	0	0	1	

Múltiples VAs

$$Y = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

$$Z = \{0,1,2,3,4,6,9\}$$

$P(Y=1) \neq 1/7$

$P(Y=1) = 2/16 = 1/8$ ✓

¿Con que probabilidad?

$P(Z=9) = 1/16$ ✓

¿Cuál es la probabilidad que $Y = 1$? ¿Cuál es la probabilidad que $Z = 9$?

X_1, X_2	0,0	0,1	0,2	0,3	1,0	1,1	1,2	1,3	2,0	2,1	2,2	2,3	3,0	3,1	3,2	3, 3
Y	0	1	2	3	1	2	3	4	2	3	4	5	3	4	5	6
Z	0	0	0	0	0	1	2	3	0	2	4	6	0	3	6	9

$P(Y=3, Z=2) = 1/8$

Múltiples VAs

$Y = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

$Z = \{0,1,2,3,4,6,9\}$

X_1, X_2	0,0	0,1	0,2	0,3	1,0	1,1	1,2	1,3	2,0	2,1	2,2	2,3	3,0	3,1	3,2	3,3
Y	0	1	2	3	1	2	3	4	2	3	4	5	3	4	5	6
Z	0	0	0	0	0	1	2	3	0	2	4	6	0	3	6	9

$= 3$

Calculemos

$E[Y] = 1\left(\frac{1}{8}\right) + 2\left(\frac{3}{16}\right) + 3\left(\frac{1}{4}\right) + 4\left(\frac{3}{16}\right) + 5\left(\frac{2}{16}\right) + 6\frac{(1)}{16}$

$E[Z] = 1\left(\frac{1}{16}\right) + 2\left(\frac{2}{16}\right) + 3\left(\frac{2}{16}\right) + 4\left(\frac{1}{16}\right) + 6\left(\frac{2}{16}\right) + 9\left(\frac{1}{16}\right)$

$\to 2.25$

Múltiples VAs

$Y = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

$Z = \{0,1,2,3,4,6,9\}$

X_1, X_2	0,0	0,1	0,2	0,3	1,0	1,1	1,2	1,3	2,0	2,1	2,2	2,3	3,0	3,1	3,2	3,3
Y	0	1	2	3	1	2	3	4	2	3	4	5	3	4	5	6
Z	0	0	0	0	0	1	2	3	0	2	4	6	0	3	6	9

Calculemos

$E[Y^2] = 1/8 + 4\left(3/16\right) + 9\left(1/4\right) + 16\left(3/16\right) + 25\left(1/8\right) + 36\left(1/16\right)$

$E[Z^2] = ?$

Múltiples VAs

$Y = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

$Z = \{0,1,2,3,4,6,9\}$

X_1, X_2	0,0	0,1	0,2	0,3	1,0	1,1	1,2	1,3	2,0	2,1	2,2	2,3	3,0	3,1	3,2	3,3
Y	0	1	2	3	1	2	3	4	2	3	4	5	3	4	5	6
Z	0	0	0	0	0	1	2	3	0	2	4	6	0	3	6	9

Calculemos

$E[YZ] = 2\left(1/16\right) + 6\left(1/8\right) + 12\left(1/8\right) + 16\left(1/16\right) + 30\left(2/16\right) + 54\left(1/16\right)$

$COV[YZ] = E(YZ) - E(Y)\,E(Z)$

Múltiples VAs

$$Y = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

$$Z = \{0,1,2,3,4,6,9\}$$

X_1, X_2	0,0	0,1	0,2	0,3	1,0	1,1	1,2	1,3	2,0	2,1	2,2	2,3	3,0	3,1	3,2	3, 3
Y	0	1	2	3	1	2	3	4	2	3	4	5	3	4	5	6
Z	0	0	0	0	0	1	2	3	0	2	4	6	0	3	6	9

Calculemos

$$r(Y,Z) = \frac{COV(Y,Z)}{\sigma_y \cdot \sigma_z} = 0.88$$

$\sqrt{V[Y]}\sqrt{V[Z]}$

$V[Y] = E[Y^2](E[Y])$

$V[Z] = E[Z^2] - (E[Z])^2$

Bibliografía

1. Roy D. Yates y David J. Goodman, Probability and Stochastic Processes, John Wiley & Sons Inc., 2005.

2. Charles W. Therrien, Discrete random signals and statistical signal processing, Prentice Hall, 1992.