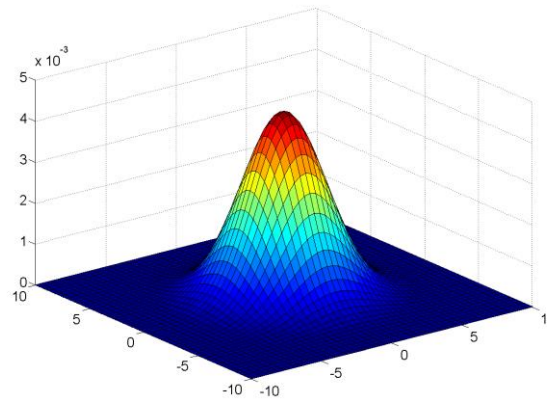


Probabilidad y Procesos Aleatorios



Dr. Héctor E. Poveda P.

hector.poveda@utp.ac.pa

www.hpoveda7.com

 @hpoveda7

Prólogo

Las diapositivas que se presentan a continuación resumen los conceptos más relevantes de probabilidad: enumeraciones, probabilidad condicional y variables aleatorias. Estas diapositivas fueron confeccionadas por el Dr. Héctor Poveda, docente de la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Tecnológica de Panamá y sirven como material de apoyo en el curso de Probabilidad y Procesos Aleatorios. Esta asignatura inicia con una introducción en el tema de espacios probabilísticos y probabilidad condicional. En un segundo punto se abordan los conceptos de variable aleatoria para finalmente entrar en el tema de procesos aleatorios. La ultima parte del curso consiste en una introducción a los métodos de estimación de variables aleatorias mas utilizados. El objetivo del curso es construir los conocimientos en conceptos de probabilidad y procesos aleatorios presentes en las diferentes áreas de la ingeniera eléctrica.

Plan del curso

1. Probabilidad
 - Espacios probabilísticos
 - Probabilidad condicional
2. Variables Aleatorias
3. Múltiples Variables Aleatorias
4. Procesos Aleatorios
5. Métodos de Estimación

Plan del curso

1. Probabilidad
2. Variables Aleatorias
 - Definición de una variable aleatoria
 - Distribución y densidad de probabilidad
 - Características de una ley de probabilidad
 - Función de una variable aleatoria
 - La variable aleatoria Gaussiana
3. Múltiples Variables Aleatorias
4. Procesos Aleatorios
5. Métodos de Estimación

Plan del curso

1. Probabilidad

2. Variables Aleatorias

3. Múltiples Variables Aleatorias

- Ley de probabilidad: covarianza y correlación
- Probabilidad condicional
- Suma de dos variables aleatorias
- Relación de dos variables aleatorias

4. Procesos Aleatorios

5. Métodos de Estimación

Plan del curso

1. Probabilidad
2. Variables Aleatorias
3. Múltiples Variables Aleatorias
4. Procesos Aleatorios
 - Definición de un proceso aleatorio
 - Densidad de probabilidad de orden superior
 - Propiedades de las funciones de autocorrelación y autocovarianza
 - Procesos aleatorios estacionarios
 - El ruido blanco Gaussiano de promedio cero
5. Métodos de Estimación

Introducción

Experiencia aleatoria: experiencia en la cual el conocimiento de las condiciones experimentales no permite predecir el resultado con exactitud

Teoría de las Probabilidades

- Objetivo: modelar una aleatoriedad para poder manejarla
- Modelo probabilista: representación formal de conocimientos relativos a una experiencia aleatoria.
- La probabilidad de un resultado impredecible es una información.
- La dependencia entre varios eventos es una información.

Introducción

Historia

- Siglo XVI: evaluación de riesgos en contratos marítimos
- 1654, P. Fermat y B. Pascal: primeras bases matemáticas
- 1657, C. Huygens: “Razonamientos sobre el juego de dados”
- 1713, J. Bernoulli: noción de variable aleatoria (VA)
- 1812, Laplace: Teorema del límite central
- 1933, Kolmogorov: Teoría axiomática

Introducción

Campos de aplicación

- Juegos de azar
- Teoría del juego: economía y finanzas
- Física: física estadística, mecánica cuántica
- Estadística: control de calidad, fiabilidad de un sistema
- Modelización estocástica: evaluación de riesgos
- Procesamiento de señales: modelos de ruidos
- Teoría de la decisión: reconocimiento de caracteres
- Teoría de la información: comunicaciones digitales

Probabilidad

Espacio probabilístico

Ω : conjunto fundamental, resultados elementales (finito, infinito, continuo)

\mathcal{F} : conjunto de eventos, $A \in \mathcal{F}$ es subconjunto de Ω .

P : ley de probabilidad que tiene todo evento $A \in \mathcal{F}$, $P(A) \in [0, 1]$

Probabilidad

Conjunto de eventos

Lenguaje de probabilidad: lenguaje de la teoría de conjuntos

$A \subset B$: A implica B , todos los resultados de A están en B

$A \cup B$: A ó B , evento que se realiza si se realiza uno o el otro, o ambos

$A \cap B$: A y B , evento que se realiza si A y B se realizan simultáneamente

ϕ : evento imposible

Ω : evento certero

\bar{A} : evento contrario

Probabilidad

Ley de probabilidad

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Eventos incompatibles

Probabilidad

Ley de probabilidad

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$\text{Si } A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidad

Espacios probabilísticos finitos

Caso general: $P(W) = \sum_i P(w_i)$ donde $W = \{w_n, \dots, w_i, \dots, w_N\}$
y $P(w_i) \neq P(w_n)$

Caso equiprobable: $P(w_i) = \frac{N_W}{N}$ donde N_W es el número de veces que sucede el evento w_i .

Probabilidad

Enumeraciones: n balotas y p lances.

		Lance orden	Lance desorden
Lance sin reuso	$p \leq n$	Arreglo $A^p_n = \frac{n!}{(n-p)!}$	Combinación $C^p_n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
	$p = n$	Permutación $n!$	1
Lance con reuso	p	Arreglo con repetición n^p	Combinación con repetición C^{n-1}_{n+p-1}

Probabilidad

Problema 1.

Los partidos de la 8va fecha del grupo A de la LNA son: Pan de Azúcar vs Orión, Millenium vs Tierra Firme y Suntracs vs Atlético Nacional. Cuantos son la cantidad de resultados posibles. La LNA no ha dado el orden de los partidos, cuantos resultados hay posibles si los partidos se dan en cualquier orden.

Probabilidad

Problema 2.

Si se lanzan 5 dados. Cuantos resultados hay posibles. Entre esos resultados cuantos son de la forma (a,a,b,c,d) y cuantos de la forma (a,a,b,b,c) .

Probabilidad

Problema 3.

Una orquesta en su repertorio tiene 30 sinfonías de Chupoposky, 15 de Beethoven y 9 de Makano. Su programa contiene una sinfonía de C/U. Cuantos programas diferentes se pueden tocar, si respetamos el orden C-B-M. Cuantos programas diferentes se pueden tocar si el orden no importa. Cuantos programas diferentes se pueden tocar si se puede tocar más de una sinfonía de la misma categoría en el mismo programa.

Probabilidad

Problema 4.

Se lanza una mano de “poker” (5 cartas) de una baraja de 52 cartas. Cuantos son los resultados posibles. De esos resultados cuantos son un “full” (un trío y un par).

Probabilidad

$$P(B|A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Probabilidad

$$P(B|A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Problema 5.

La probabilidad de que Panamá llegue al mundial es de 86%.
La probabilidad de que llegue a 1/8s de final es 39%.
Sabiendo que Panamá llegó al mundial, utilice la probabilidad para calcular la probabilidad que Panamá pase a 1/8s.

Probabilidad

Teorema de Bayes

$$P(C_i|A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(A|C_i)P(C_i)}{\sum_k P(A|C_k)P(C_k)}$$

Problema 6.

Dos urnas contienen balotas rojas y blancas. La primera urna contiene 9 balotas rojas y 1 blanca. La segunda urna contiene 1 roja y 4 blancas. Si tomamos una balota al azar y esta es roja, cual es la probabilidad de que fue tomada de la urna 1. Utilice el teorema de Bayes.

Probabilidad

Eventos mutuamente exclusivos: $P(A \cap B) = 0$

Eventos independientes: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Problema 7.

Una fábrica produce una serie de camisetas en 2 fases independientes. En la primera fase se produce un defecto A en un 2% de los casos, en la segunda fase se produce un defecto B en 8% de los casos. Calcular la proba. de que una camiseta tirada al azar tenga: 1/Ambos defectos. 2/ Al menos uno. 3/ Un solo defecto. 4/ Ningún defecto.

Variable aleatoria (VA)

X es una VA definida en el espacio probabilístico (Ω, \mathcal{F}, P) :

Variable aleatoria (VA)

X es una VA definida en el espacio probabilístico (Ω, \mathcal{F}, P) :

E : conjunto discreto de números

VA discreta \longrightarrow $X: \Omega \rightarrow E$
 $\omega \rightarrow X(\omega)$

Función de distribución

VA discreta

Ley de probabilidad

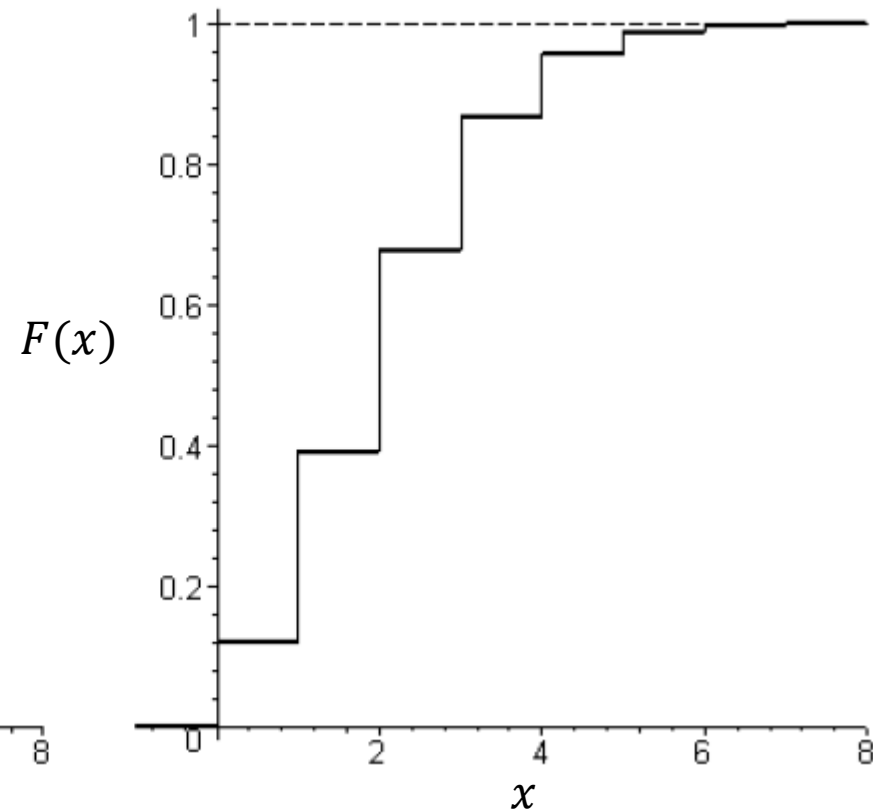
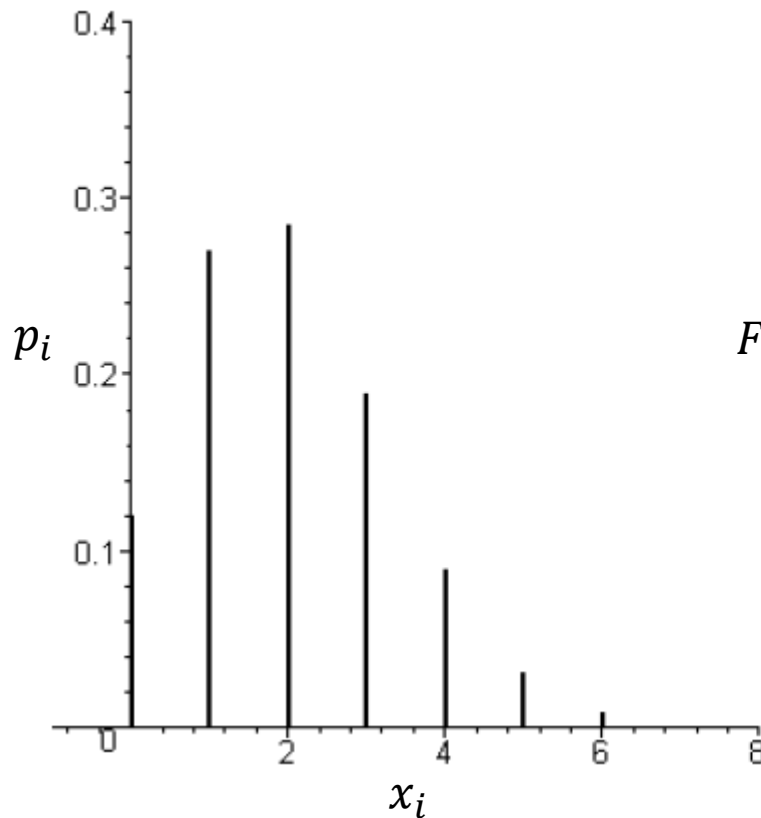
$$P(X = x_i) = p_i = P(x_i)$$

Función de distribución

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{i | x_i < x} p_i$$

Función de distribución

Ejemplo



Función de distribución

Problema 8.

Suponga una VA X que toma valores discretos en $\{-1, -0.5, 0.7, 1.5\}$ sus probabilidades correspondientes son $\{0.1, 0.2, 0.1, 0.4, 0.2\}$. Grafique la función de distribución,

Función de distribución

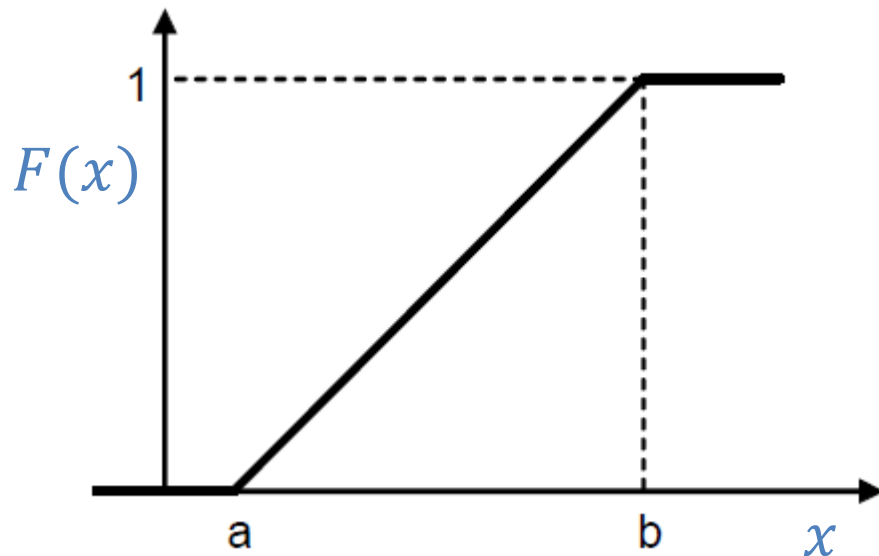
VA continua: Distribución Uniforme

Supongamos una ley de proba. uniforme en un intervalo $[a, b]$. La probabilidad de un evento en el intervalo $[\alpha, \beta]$, donde $\alpha \leq a \leq \beta \leq b$ esta dada por:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

Función de distribución

VA continua: Distribución Uniforme



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq a \\ \frac{x - a}{b - a} & \text{para } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{para } x \geq b \end{cases}$$

$$F(x) = P(X < x)$$

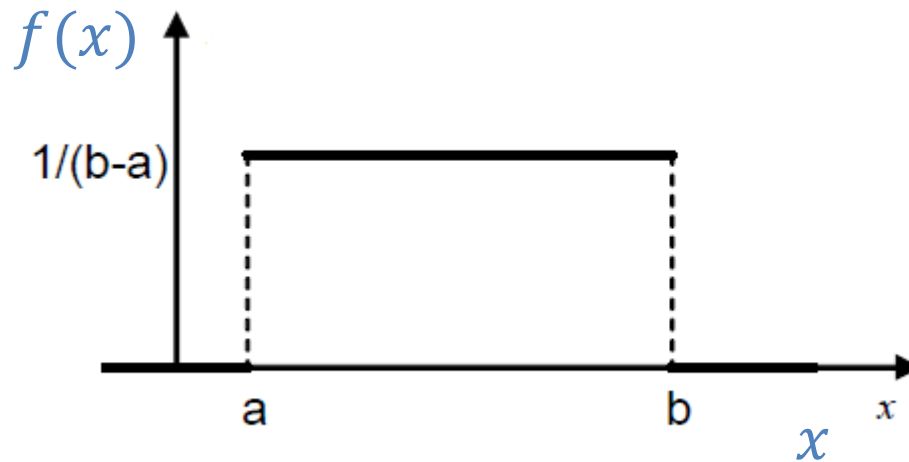
Función de distribución

Propiedades

- $F(-\infty) = 0$
- $F(\infty) = 1$
- $0 \leq F(x) \leq 1$
- $P(x_1 \leq x < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

Densidad de probabilidad

Ejemplo: La distribución uniforme



$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Densidad de probabilidad

Propiedades

- $f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx'$
- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
- $P(x_1 \leq x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$

Características de una ley de probabilidad

Promedio y varianza

- Promedio: $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

Características de una ley de probabilidad

Promedio y varianza

- Promedio: $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$
- Momento de orden n : $m_n = E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx$

Características de una ley de probabilidad

Promedio y varianza

- Promedio: $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$
- Momento de orden n : $m_n = E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx$
- Momento centrado: $\mu_n = E[(X - E(X))^n]$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^n f(x)dx$
- Varianza: $\mu_2 = E[(X - E(X))^2]$

Características de una ley de probabilidad

Promedio y varianza

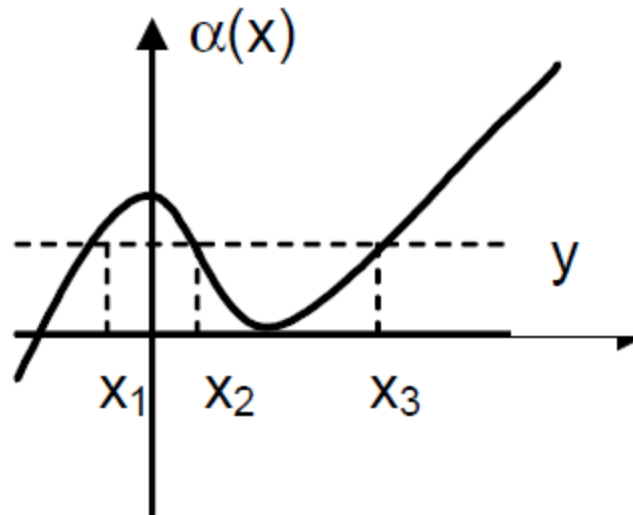
- Promedio: $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$
- Momento de orden n : $m_n = E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx$
- Momento centrado: $\mu_n = E[(X - E(X))^n]$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^n f(x)dx$
- Varianza: $\mu_2 = E[(X - E(X))^2]$

En el caso discreto las integrales se convierten en sumatorias.

Función de una VA

X es VA con una función de densidad $f(x)$

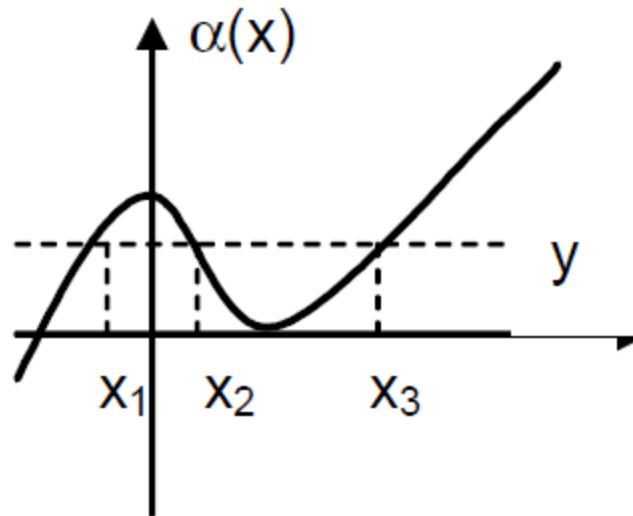
Queremos definir la ley de probabilidad de $Y = \alpha(X)$



Función de una VA

X es VA con una función de densidad $f(x)$

Queremos definir la ley de probabilidad de $Y = \alpha(X)$

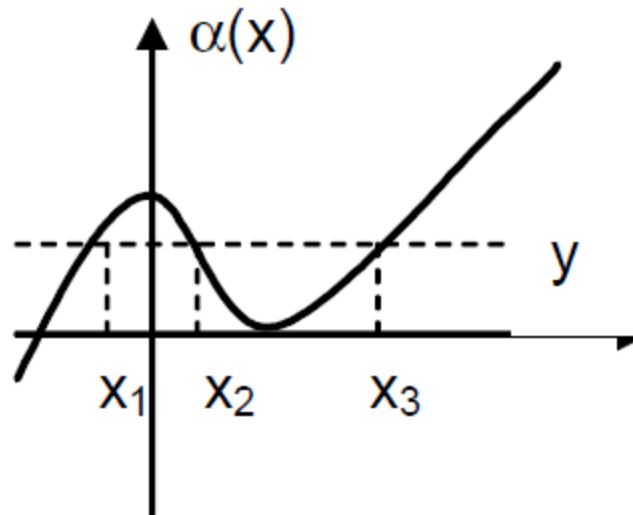


$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(\alpha(X) < y)$$
$$F_Y(y) = P(X < x_1) + P(x_2 < X < x_3)$$

Función de una VA

X es VA con una función de densidad $f(x)$

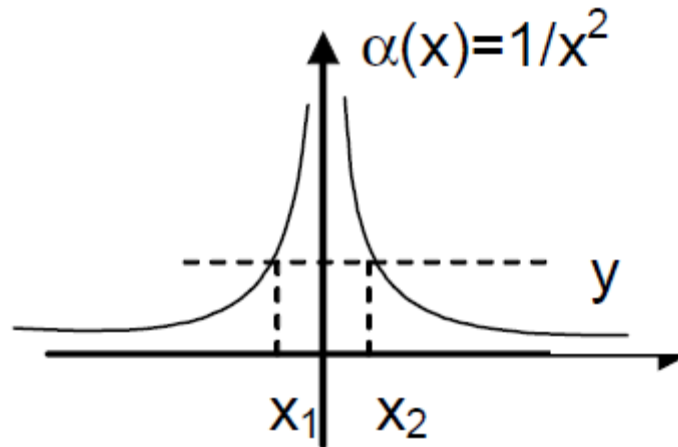
Queremos definir la ley de probabilidad de $Y = \alpha(X)$



$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|\alpha'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|\alpha'(x_2)|} + \frac{f_X(x_3)}{|\alpha'(x_3)|}$$

Función de una VA

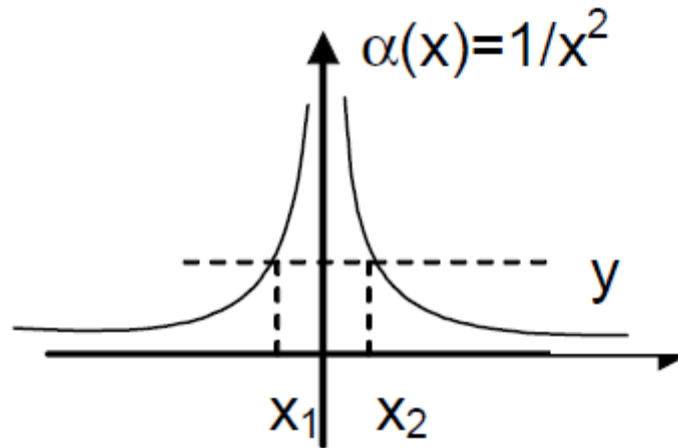
Ejemplo 1



X es VA con una función de densidad $f(x)$. Obtenga $F_Y(y)$ y $f_Y(y)$

Función de una VA

Ejemplo 1



X es VA con una función de densidad $f(x)$. Obtenga $F_Y(y)$ y $f_Y(y)$

Ejemplo 2

X es VA con una función de densidad $f(x)$. $Y = cX^2$. Obtenga $F_Y(y)$ y $f_Y(y)$

Función de una VA

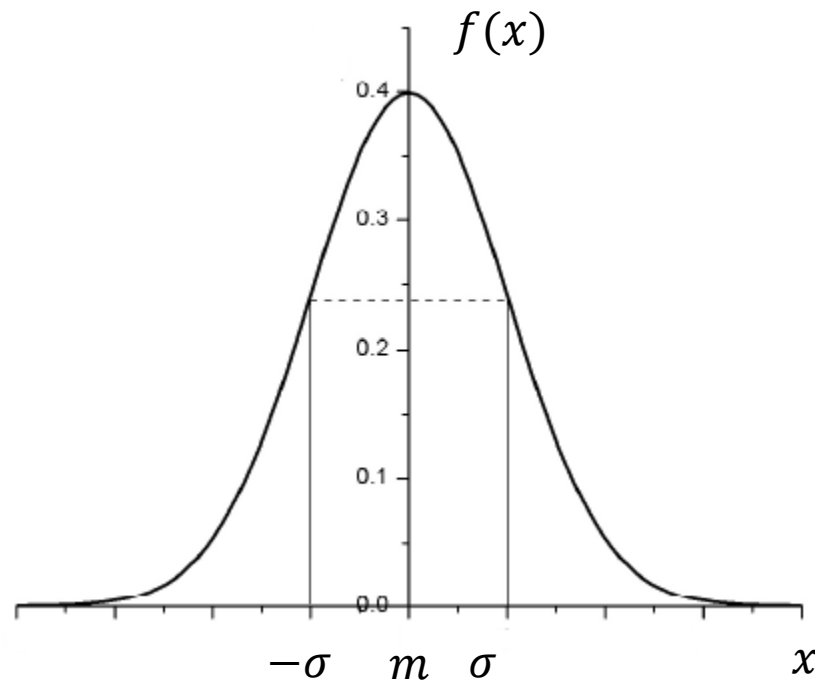
Ejemplo 3

Sea una VA X de densidad de probabilidad definida para $x \geq 0$:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

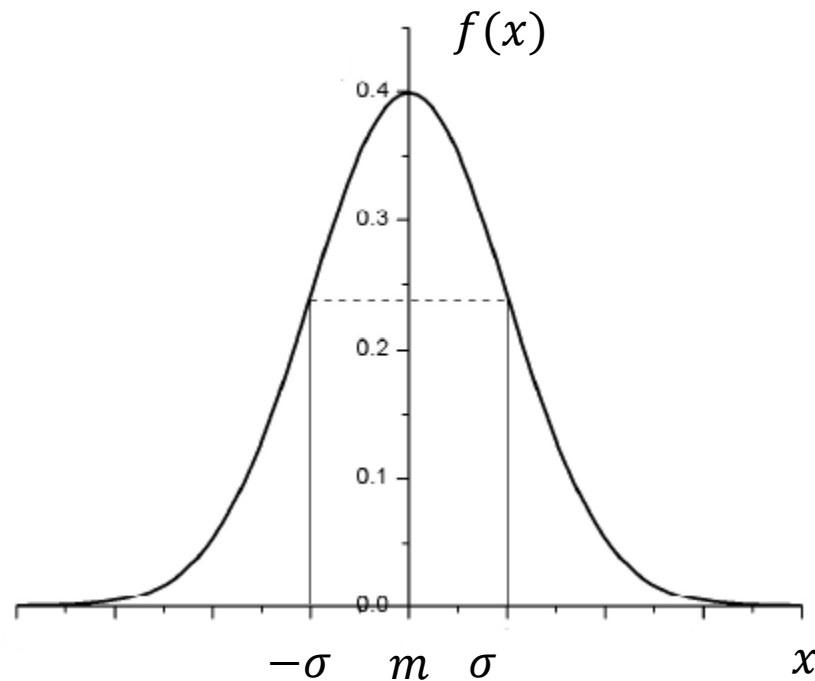
Demuestre que la VA $Y = 1/X$ tiene la misma densidad de probabilidad que la va X

La VA Gaussiana



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

La VA Gaussiana



$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\xi-m)^2}{2\sigma^2}} d\xi$$

La VA Gaussiana

$$F(x) = P(X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

La VA Gaussiana

$$F(x) = P(X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = F_R\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

función del error \longrightarrow $F_R(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \right\}$

La VA Gaussiana

Ejercicio: Demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Obtenga el valor de $E(X)$ y $V(X)$.

La VA Gaussiana

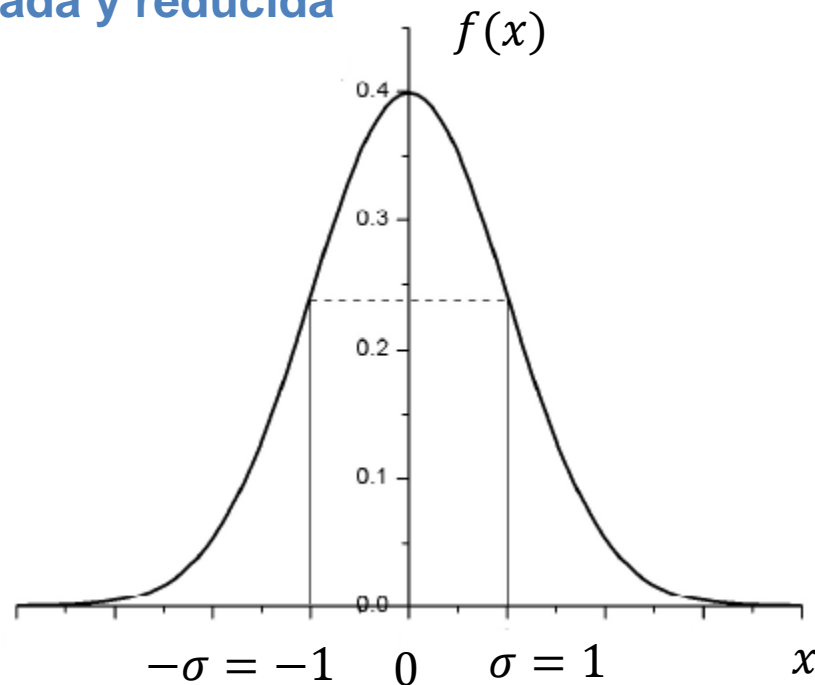
Tarea 1: Demuestre que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Obtenga el valor de $E(X)$ y $V(X)$.

Recuerde:

- $\int_{-\infty}^{\infty} a e^{-\frac{(x+b)^2}{c^2}} dx = a|c|\sqrt{\pi}$

La VA Gaussiana

VA Gaussiana centrada y reducida



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

La VA Gaussiana

Un transmisor emite una señal S , esta pasa a través de un canal de ruido blanco aditivo Gaussiano (BAG). En recepción la señal obtenida es:

$$R = S + B$$

Donde R representa la señal recibida y B es el ruido BAG. B es una va con una distribución Gaussiana, promedio cero y varianza σ^2 .

- Cual es la función densidad de probabilidad $f(x)$ de B .
- Dibuje la función de densidad $f(x)$ de B .

Otras distribuciones

Ley binomial $\rightarrow P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{1-k}$

Ley de Poisson $\rightarrow P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Ley de Poisson: ley binomial con un valor grande de n y un valor de p pequeño.

Otras distribuciones

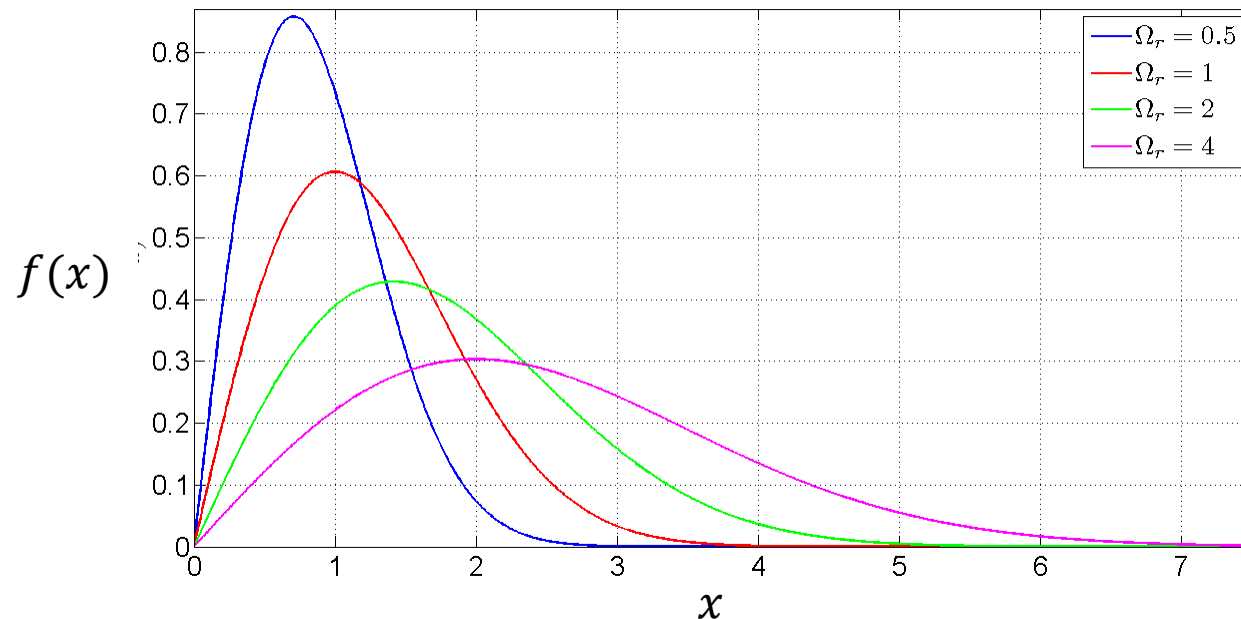
		Parámetros		$f(x)$	$E[X]$	σ
Cauchy	→	$\alpha > 0$	\mathbb{R}	$\frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{x^2 + \alpha^2}$		
Exponencial	→	$\lambda > 0$	\mathbb{R}^+	$\frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}$	λ	λ
Laplace	→	$m, b > 0$	\mathbb{R}	$\frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{ x-m }{b}\right)$	m	$b\sqrt{2}$
χ^2 a n	→	$n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}^+	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}$	n	$\sqrt{2n}$
Student	→	$n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}	$\frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi n}\Gamma(n/2)} \frac{1}{\left(\frac{x^2}{n} + 1\right)^{(n+1)/2}}$	0	$\frac{n}{n-2}$

Otras distribuciones

Distribución de Rayleigh

$$f(x) = \frac{2x}{\Omega_r} e^{-\frac{x^2}{\Omega_r}} \quad x \geq 0$$

$$\Omega_r = 2\sigma_r^2$$



Otras distribuciones

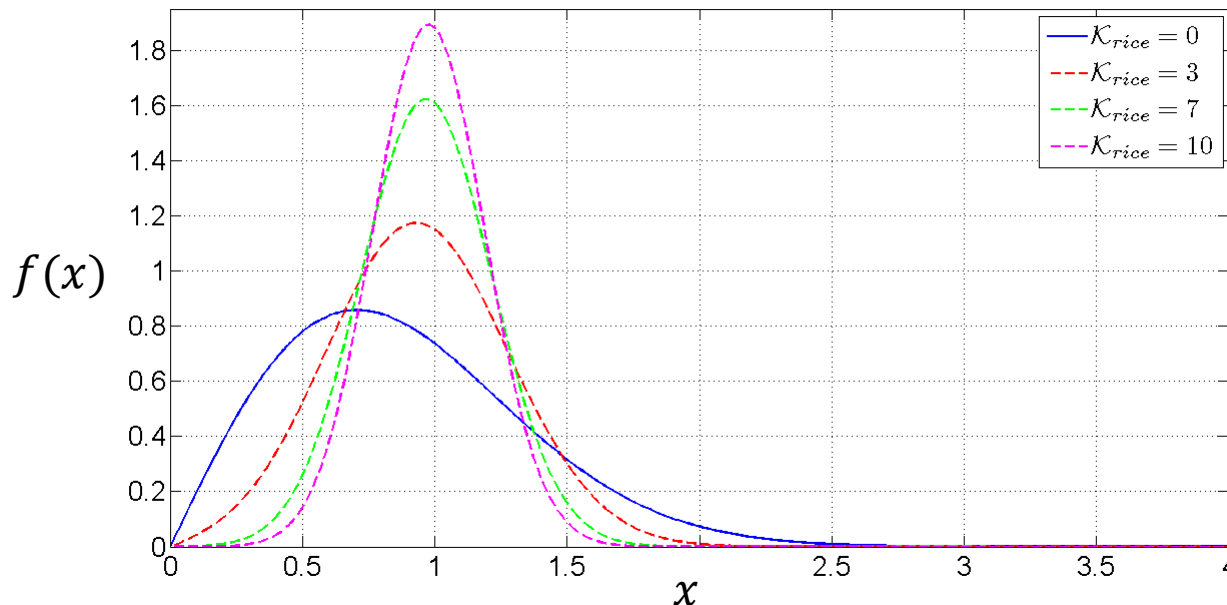
Distribución de Rice

$$f(x) = \frac{x}{\sigma_r^2} e^{-\frac{x^2 + \mu_r^2}{2\sigma_r^2}} \mathcal{J}_0\left(\frac{x\mu_r}{\sigma_r^2}\right) \quad x \geq 0$$

$$\mathcal{J}_0(y) \triangleq \int_0^{2\pi} e^{-y \cos(z)} dz$$

$$\Omega_r = \mu_r^2 + 2\sigma_r^2$$

$$\mathcal{K}_{rice} = \frac{\mu_r^2}{2\sigma_r^2}$$



La VA Gaussiana

Un componente electrónico funciona solamente si se la aplica una tensión comprendida entre 22 V y 26 V. Su alimentación es una VA Gaussiana de promedio 24 V y desviación estándar $\sigma = 1.8V$. Determine la probabilidad a la cual el componente funciona. Determine la probabilidad que el componente se destruya. Suponga que una tensión mayor a 29 V destruye el componente. Que valor de σ es necesario para que la probabilidad de que el componente funcione sea 85%.

Teorema del límite central

Definición:

La suma de N variables aleatorias independientes de varianza $\sigma^2 \neq 0$, donde N tiende a infinito tiene como resultado una variable aleatoria de distribución normal.

Bibliografía

1. Roy D. Yates y David J. Goodman, Probability and Stochastic Processes, John Wiley & Sons Inc., 2005.
2. Charles W. Therrien, Discrete random signals and statistical signal processing, Prentice Hall, 1992.