



Universidad Tecnológica de Panamá

**Facultad de Ingeniería Eléctrica
Departamento de Sistemas de Potencia**

**Apuntes, Explicaciones y Notas de
Campos Electromagnéticos**

Volumen I

ELECTROSTÁTICA

Por:

Dr. Dorindo Elam Cárdenas Estrada, CFPS

Panamá. Diciembre, 2014.

**Apuntes, Explicaciones y Notas de
Campos Electromagnéticos**

Volumen I

ELECTROSTÁTICA

Índice

1. NOTA INTRODUCTORIA	3
2. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS	5
2.1. Funciones Escalares y Campos Vectoriales	5
2.2. Operaciones con Campos Vectoriales	9
2.2.1. Suma y resta	9
2.2.2. Producto escalar	9
2.2.3. Producto vectorial	10
2.3. Los sistemas de referencia, sus vectores unitarios y elementos diferenciales	13
2.3.1. Sistema de Coordenadas Cartesianas (x, y, z)	13
2.3.1. Sistema de Coordenadas Cilíndricas (r, ϕ, z)	14
2.3.1. Sistema de Coordenadas Esféricas (R, ϕ, θ)	16
2.4. Transformaciones entre sistemas de referencia y sus vectores unitarios	18
¡Hablando de convenciones!	20
2.5. Los operadores diferenciales en espacios vectoriales	22
2.5.1. El Gradiente de una función	23
2.5.2. La Divergencia de un campo de vector	24
2.5.3. El Rotacional de un campo de vector	25
2.5.4. El Laplaciano	27
2.5.5. El D'Alembertiano	28
2.6. Circulación y flujo de un campo vectorial	30
2.6.1. Circulación de un campo vectorial	30
2.6.2. Flujo de un campo vectorial	30
2.7. Propiedades y Teoremas con Operadores Diferenciales	32
2.7.1. Propiedad del Gradiente	32
2.7.1.1. Circulación de camino cerrado y campos conservativos	32
2.7.2. El Teorema de Stokes o del Rotacional	33
2.7.3. El Teorema de Ostrogradsky, Gauss, Green o de la Divergencia	34
2.8. Identidades con Operadores Diferenciales	36
3. ELECTROSTÁTICA	37
3.1. La Carga Eléctrica	37
3.2. Distribuciones de Carga	39
3.2.1. Densidad lineal de carga	39
3.2.2. Densidad superficial de carga	39
3.2.3. Densidad volumétrica de carga	40
3.3. Ley de Coulomb	42
3.4. El Campo Eléctrico	45
3.5. Fuerzas eléctricas con cargas continuas	48
3.5.1. Fuerzas eléctricas debido a cargas continuas	48
3.5.2. Fuerzas eléctricas sobre cargas continuas	49

3.6. La Ley de Gauss y la I ^{era} Ecuación de Maxwell	51
3.6.1. I ^{era} Ecuación de Maxwell	55
3.6.1.1. I ^{era} Ecuación de Maxwell en forma diferencial (puntual)	56
4. POTENCIAL ELÉCTRICO Y ENERGÍA ELÉCTRICA	57
4.1. Introducción a los conceptos de energía	57
4.2. El potencial eléctrico	58
4.2.1. Forma puntual de la ecuación de potencial	60
4.2.2. El potencial evaluado en un punto con diferentes tipos de carga	60
4.2.3. Diferencia de potencial entre dos puntos causado por cualesquiera tipos de carga	62
4.3. Circulación de un campo eléctrico en un camino cerrado y la II ^{da} Ecuación de Maxwell	63
4.4. Energía electrostática	65
4.5. El dipolo eléctrico y su momento dipolar	72
4.6. Introducción a los multipolos eléctricos (tema opcional)	75
5. INTRODUCCIÓN A LOS MATERIALES ELÉCTRICOS	77
5.1. Descripción breve de los materiales eléctricos	77
5.2. Clasificación básica de materiales eléctricos	77
5.2.1. Conductores eléctricos	78
5.2.2. Dieléctricos	80
¡Hablemos un poco del concepto de cargas de polarización!	82
5.2.3. Condiciones de frontera entre un conductor y un dieléctrico o el vacío	87
5.2.4. Condiciones de frontera entre dos dieléctricos	89
5.2.5. Las ecuaciones de Poisson y Laplace	91
6. LA CAPACITANCIA	94
6.1. Descripción teórica de la capacitancia	94
6.2. La ecuación de circuitos del capacitor	99
6.3. La energía almacenada en un capacitor	100
7. BIBLIOGRAFÍA	102

1. Nota Introductoria

Sobre el presente texto:

Con el presente escrito, el autor no pretende reemplazar ninguno de los libros de texto aprobados para dictar el curso de Campos Electromagnéticos a nivel universitario, sino simplemente ofrecer una ayuda memoria con explicaciones muy breves tipo notas orientativas-explicativas, que puedan ser fácilmente recordadas por los estudiantes que cursan esta materia.

Se podrán encontrar algunas demostraciones que serán realizadas de una forma físico-intuitiva, sin dejar totalmente de lado el componente matemático que tan importante función tiene en éste curso, pero buscando la facilidad de la comprensión lógica ante todo, en cada uno de los conceptos fundamentales recopilados, por lo cual el componente matemático ha sido facilitado al máximo posible, buscando primeramente la comprensión física del evento antes que la del rudimento matemático de cada caso. El lector podrá hacer referencia adicionalmente a libros de matemática y a folletos propios de este mismo autor donde se tratan a nivel demostrativo algunos de los problemas matemáticos del curso, si así lo desea.

En los temas se ha considerado el orden estructural del curso de Campos Electromagnéticos 4042 dictado en la Universidad Tecnológica de Panamá, tratando de enlazar los mismos de una forma agradable y lógica, para facilitar la comprensión de aquellos estudiantes que ven el curso por primera vez.

Finalmente, el documento no tiene el objetivo de ser el documento teórico fundamental, ni de práctica del curso de Campos Electromagnéticos, sino más bien tiene el objetivo de ser un documento de ayuda primeramente a la comprensión adecuada de conceptos y luego a la memoria de los estudiantes. El documento teórico fundamental del curso continúa siendo cualquiera de los libros de texto aprobados por la UTP para dictar el curso, y un buen documento

de práctica puede ser el cuaderno de “Problemas Interesantes de Campos Electromagnéticos” de éste mismo autor.

2. Fundamentos Matemáticos

Los cursos de Campos Electromagnéticos requieren que el estudiante este totalmente claro en algunos fundamentos matemáticos, que deben haberse obtenido en asignaturas anteriores a este curso, y que se ofrecen aquí como refuerzo y ayuda a la percepción lógica y física de los mismos.

2.1. Funciones Escalares y Campos Vectoriales

Primeramente, considero adecuado ofrecer una explicación de lo que físicamente se conoce como un “campo”. Bajo una consideración sencilla podríamos indicar que *“un campo físico es una región del espacio donde existen o pudieran existir propiedades físicas”*. De aquí en adelante, el tema a plantear es la “identidad” o el “carácter” de estas propiedades físicas. De hecho, como ha es conocido de los estudiantes de nivel universitario, las propiedades físicas tienen dos posibles representaciones con entidades matemáticas; las escalares y las vectoriales (o tensoriales en un ámbito más amplio y generalista).

Definido el campo físico y la posible caracterización de sus propiedades con entidades matemáticas, es fácil ver que la medición de estas propiedades en algún punto nos puede ayudar a identificar si la misma es de tipo escalar o vectorial, pues si en el punto existe un escalar, el campo es escalar, por tanto será representado por una simple *“función escalar”*, pero si en el punto existe un vector, el campo es vectorial, y debe ser representado por una *“función de campo de vector”* o *“función vectorial”*.

NOTA DE IMPORTANCIA: Los campos ocupan “espacios”, los vectores y escalares ocupan “un punto”. Un campo está conformado por un espacio con una cantidad infinita de puntos, donde en cada punto existe “un vector” en caso de campos vectoriales, o “un escalar” en caso de campos escalares.

Diferenciación matemática entre campos escalares y campos vectoriales:

*Los campos escalares están modelados por una función que en cada punto da un único resultado o magnitud, en otras palabras un “**módulo**”.*

*Los campos vectoriales están modelados por funciones direccionadas, por tanto además del “**módulo**”, tienen “**dirección**”, y en esta dirección (o cada una de sus componentes direccionales dependiendo del sistema direccional preferencial) pueden tener al menos dos posibles “**sentidos**” que por lo general se representan por los signos + ó – de la dirección del campo. Cada vector dentro del campo vectorial tiene aparte de estas tres propiedades un “**punto de aplicación**” específico.*

Ejemplos

Ejemplo de Campo Escalar: La temperatura medida a lo largo del volumen de un líquido. Puede ser variable dependiendo del punto donde se mida, pero en cada punto solo tendrá un valor de medición tipo magnitud.

Ejemplo de Campo Vectorial: Las velocidades de corriente medidas a lo largo del volumen de un líquido. Pueden ser variables dependiendo del punto donde se midan, y las variaciones pueden ser de los valores absolutos de su magnitud, así como de las direcciones hacia las cuales vayan las velocidades de corriente del líquido.

El concepto de “campo” no era muy común en los tiempos de Newton, de hecho fue Faraday quien lo hizo popular para aplicarlo a la teoría electromagnética, y hoy por hoy se utiliza en todas las ramas de la física.

Los campos escalares pueden tener una o múltiples dependencias (x, y, z), de acuerdo al punto donde se midan, pero no tienen direcciones vectoriales (ni tensoriales).

Los campos vectoriales pueden tener una o múltiples dependencias (x, y, z), de acuerdo al punto donde se midan, y tienen al menos una dirección vectorial (o tensorial) y sentido. En física clásica es usual que los campos vectoriales tengan hasta 3 direcciones vectoriales que pueden ser n-transformadas a tensores independientes del sistema original de referencias, para lograr

transformaciones entre sistemas ortogonales. De estas transformaciones ya hay definidos al menos 12 sistemas ortogonales.

Cuando los campos no tienen variaciones con el tiempo (o sea la misma medida y direcciones se mantienen al ser tomados en un punto aún con el paso del tiempo), se dice que los mismos son “*estacionarios*”, de lo contrario son “*variables con el tiempo*”.

Ejemplo de función escalar:

$$T = 15 \ln(x + 1) \quad (\text{ec.2.1.1})$$

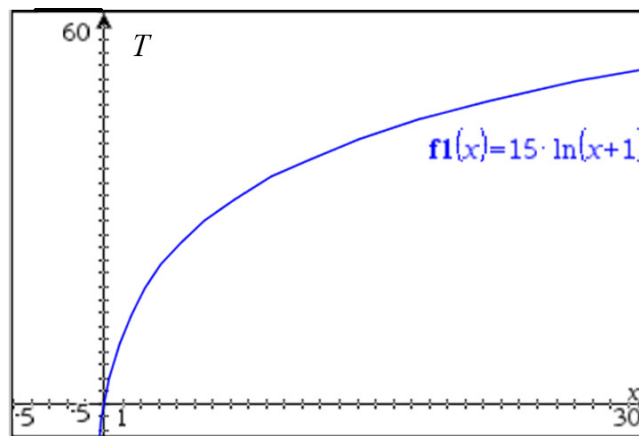


Fig. 2.1.1. Gráfico de la función escalar de la ecuación (2.1.1.)

La función anterior es un modelo escalar que expresa el valor de una variable T en función de una posición en el eje x de algún espacio. Nótese que no hay direcciones inmiscuidas en el valor de T , que podría ser algo como la distribución de temperatura de algún medio tomando como referencia un eje x de ese medio.

Ejemplo de función vectorial:

$$\vec{E} = 5(x+1) \cdot \vec{\mu}_x + 4xy^2 \cdot \vec{\mu}_y + 7e^z \cdot \vec{\mu}_z \quad (\text{ec. 2.1.2})$$

La función anterior es un modelo vectorial que expresa el valor de un vector para cualesquiera puntos (x, y, z) en un espacio definido. Nótese las tres direcciones ortogonales unitarias incluidas (vectores unitarios) para dar indicación del valor de cada una de las componentes del vector en

$\vec{\mu}_x, \vec{\mu}_y, \vec{\mu}_z$. Un campo vectorial puede tener en el sentido físico clásico de 1 a 3 componentes de dirección. Un tensor puede ser compuesto por “n” componentes. Que un campo vectorial tenga 1 sola componente no es indicativo de que en algún otro sistema de expresión o sistema de referencia mantendrá su única componente. Dentro de este curso se verá por ejemplo que los campos vectoriales radiales representados en sistemas curvilíneos con una sola componente radial, pueden tomar dos y tres componentes al ser representados en un sistema cartesiano con direcciones $\vec{\mu}_x, \vec{\mu}_y, \vec{\mu}_z$. La reducción de componentes por múltiples razones y/o consideraciones dentro de un problema físico complejo, nos ayuda a obtener modelos matemáticos de más fácil solución, en algunos casos incluso llevarlo a soluciones escalares simples que pueden representar o darnos una buena idea del comportamiento vectorial en alguna componente de interés del campo vectorial.

Podríamos decir (aunque a algunos matemáticos puros no les agrada esta percepción, pero para efectos de nuestro curso) que dentro de cada una de las direcciones ortogonales de un campo vectorial (en su función de magnitud), tenemos una función escalar para esa magnitud. Siendo de hecho que:

$$E_x = 5(x+1) \quad (\text{ec. 2.1.3})$$

$$E_y = 4xy^2 \quad (\text{ec. 2.1.4})$$

$$E_z = 7e^z \quad (\text{ec 2.1.5})$$

son tres ejemplos de funciones escalares, puedo escribir la función vectorial que he puesto de ejemplo en base a ellas como:

$$\vec{E} = E_x \vec{\mu}_x + E_y \vec{\mu}_y + E_z \vec{\mu}_z \quad (\text{ec 2.1.6})$$

2.2 Operaciones con Campos Vectoriales

Las mismas operaciones que ha aprendido el estudiante de este nivel a realizar con vectores, son aplicables a todos los campos vectoriales; de hecho la aplicación de estas operaciones a vectores simples es una particularidad de la operación general aplicada al campo vectorial en un punto específico.

2.2.1. Suma y resta

Las sumas y restas de campos de vector utilizan el esquema algebraico general, por tanto, si se tienen 2 campos de vector

$$\vec{A} = A_x \vec{\mu}_x + A_y \vec{\mu}_y + A_z \vec{\mu}_z \quad \text{y} \quad (\text{ec } 2.2.1.1)$$

$$\vec{B} = B_x \vec{\mu}_x + B_y \vec{\mu}_y + B_z \vec{\mu}_z \quad (\text{ec } 2.2.1.2)$$

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x) \vec{\mu}_x + (A_y \pm B_y) \vec{\mu}_y + (A_z \pm B_z) \vec{\mu}_z \quad (\text{ec } 2.2.1.3)$$

2.2.2. Producto Escalar

Como su nombre lo indica, será una multiplicación que dará como resultado una entidad matemática de tipo escalar, en el caso más complejo, una función escalar. Cuando se tienen dos funciones escalares, el único tipo de producto que se puede obtener de las mismas da como resultado una tercera función escalar; por lo tanto la nomenclatura “producto escalar” esta reservada para la multiplicación de tipo “escalar” de dos “campos vectoriales”.

Siendo que dos vectores unitarios en la misma dirección y sentido obtienen al ser multiplicados escalarmente el valor de unidad escalar ($\vec{\mu}_x \cdot \vec{\mu}_x = 1$), se puede decir entonces que cualquier función en la dirección de estos vectores tendrá un valor “existente” en esa dirección o “escala”;

y cualesquiera dos vectores unitarios que sean totalmente perpendiculares entre ellos tendrán una multiplicación escalar nula, al no tener “existencia” ninguno de los valores (puntos) de la escala direccionada de un vector sobre la escala direccionada del otro ($\vec{\mu}_x \cdot \vec{\mu}_y = 0$)

Como resultado, se puede ver que al tener dos campos de vector del tipo:

$$\vec{A} = A_x \vec{\mu}_x + A_y \vec{\mu}_y + A_z \vec{\mu}_z \quad \text{y} \quad (\text{ec 2.2.2.1})$$

$$\vec{B} = B_x \vec{\mu}_x + B_y \vec{\mu}_y + B_z \vec{\mu}_z \quad (\text{ec 2.2.2.2})$$

Su multiplicación escalar dará un resultado funcional del tipo:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \cdot B_x) + (A_y \cdot B_y) + (A_z \cdot B_z) \quad (\text{ec 2.2.2.3})$$

Puede demostrarse también que obteniendo las magnitudes funcionales de los campos de vector $|\vec{A}|$ y $|\vec{B}|$, para cualquier punto, la magnitud funcional del producto vectorial de los mismos en cada punto será:

$$|\vec{A} \cdot \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta_{AB} \quad (\text{ec 2.2.2.4})$$

Donde θ_{AB} es el ángulo que se forma entre los vectores de los campos vectoriales \vec{A} y \vec{B} en cada punto, lo que deja ver que se esta considerando en este tipo de producto la “proyección” de los vectores de un campo de vector sobre el otro, en palabras sencillas, “que tanto de la magnitud de un campo vectorial esta en la misma dirección del otro y puede por tanto ser multiplicada escalarmente, obteniendo una multiplicación entre las partes de cada campo vectorial que están en la misma dirección o escala”.

2.2.3. Producto vectorial

Esta multiplicación da como resultado una entidad matemática de tipo campo vectorial, y se lleva a cabo entre dos campos vectoriales. Su objetivo es encontrar la resultante de la multiplicación de las partes “no proyectadas entre sí” o “perpendiculares” de los dos campos vectoriales que se multiplican. El campo de vector resultante será en todo punto perpendicular a los campos de vectores que lo generan. Tomando como base el esquema de “rotación en sentido de tornillo positivo”, el vector resultante de multiplicar dos direcciones irá siempre hacia la dirección perpendicular a las direcciones multiplicadas y en el sentido de avance del tornillo. Por ejemplo, para el esquema mostrado en la figura 2.2.3.1, la multiplicación vectorial de $\vec{\mu}_x \times \vec{\mu}_y = \vec{\mu}_z$ según la dirección de avance del tornillo.

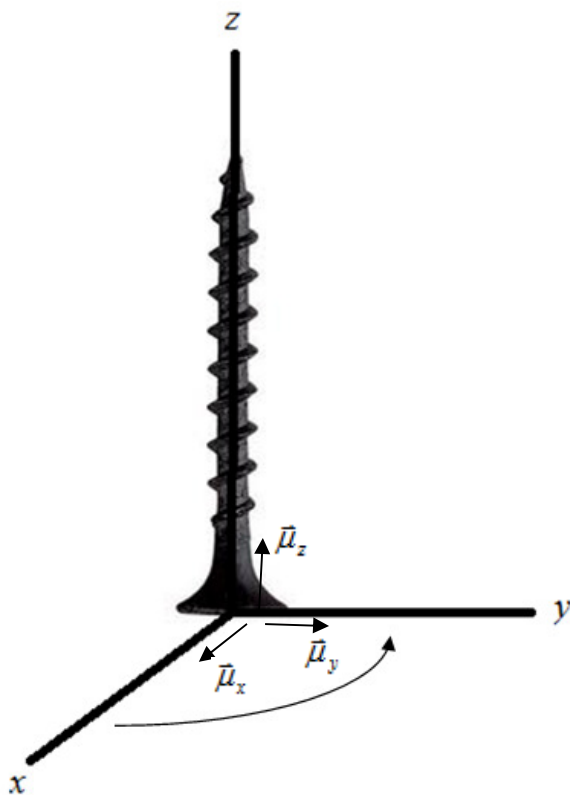


Fig 2.2.3.1 Ejemplificación gráfica de la dirección z que toma el producto vectorial de una dirección x multiplicada por una dirección y .

Como la dirección del nuevo vector en cada punto es perpendicular a los dos vectores resultantes; se puede utilizar la misma notación de multiplicación matricial, con la cual ya está familiarizado

el estudiante de éste nivel, para encontrar fácilmente las nuevas direcciones de los productos vectoriales para vectores con varias componentes.

Como resultado, se puede ver que al tener dos campos de vector del tipo:

$$\vec{A} = A_x \vec{\mu}_x + A_y \vec{\mu}_y + A_z \vec{\mu}_z \quad y \quad (ec \ 2.2.3.1)$$

$$\vec{B} = B_x \vec{\mu}_x + B_y \vec{\mu}_y + B_z \vec{\mu}_z \quad (ec \ 2.2.3.3)$$

Su multiplicación vectorial dará un resultado tipo campo vectorial caracterizado por:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{\mu}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{\mu}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{\mu}_z \quad (ec \ 2.2.3.3)$$

De acuerdo a esto, y como las magnitudes serán dadas por las componentes “no proyectadas”, se puede escribir una ecuación de magnitud análoga a (ec 2.2.2.4), pero al usar componentes “no proyectadas”, se utiliza entonces el seno del ángulo entre los vectores, en lugar del coseno.

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \text{sen } \theta_{AB} \quad (ec \ 2.2.3.4)$$

2.3. Los sistemas de referencia, sus vectores unitarios y elementos diferenciales.

Un sistema de referencia sirve para establecer un punto de origen (o referencia) y que tipo de direcciones ortogonales se utilizarán en el análisis de las magnitudes de un sistema físico. Es importante denotar que los sistemas de referencia solo sirven para el “observador” que los esta utilizando, y los problemas físicos pueden ser resueltos desde diversos sistemas de referencia (por diversos observadores), pero los resultados obtenidos serán equivalentes, es decir un observador podría predecir fácilmente los resultados obtenidos por otros observadores en el sentido clásico. Las direcciones que parten del origen de un sistema de referencia se denotan con el nombre de “coordenadas ortogonales”, y se denotan por medio de vectores de magnitud uno (1), llamados clásicamente “vectores unitarios”, los cuales en éste texto denotaremos con el símbolo $\vec{\mu}_x$ donde la “x” indica la dirección en el sentido positivo del vector. El lugar denotado dentro del dominio de estas coordenadas se le llama clásicamente “espacio euclídeo”. De acuerdo a lo anterior, dos sistemas de referencia (de dos observadores) podrían ser relacionados de forma sencilla por no más que una traslación y una rotación.

Aparte del sistema coordenado cartesiano rectilíneo, existen al menos unos doce sistemas curvilíneos notables que han sido perfectamente definidos, de coordenadas ortogonales. A nivel de pregrado en este curso utilizaremos solo el sistema cartesiano y los dos principales y más usuales sistemas curvilíneos; el cilíndrico y el esférico.

2.3.1. Sistema de Coordenadas Cartesianas (x, y, z)

En el sistema cartesiano, por análisis vectorial del elemento diferencial, se definen los elementos diferenciales de línea superficie y volumen siguientes, de acuerdo a lo que puede observarse en la figura 2.3.1.1.

$$d\vec{l} = dx \cdot \vec{\mu}_x + dy \cdot \vec{\mu}_y + dz \cdot \vec{\mu}_z \quad (\text{ec 2.3.1.1})$$

$$d\vec{S} = \begin{cases} d\vec{S}_x = dydz \cdot \vec{\mu}_x \\ d\vec{S}_y = dzdx \cdot \vec{\mu}_y \\ d\vec{S}_z = dxdy \cdot \vec{\mu}_z \end{cases} \quad (\text{ec 2.3.1.2})$$

$$dV = dxdydz \quad (\text{ec 2.3.1.3})$$

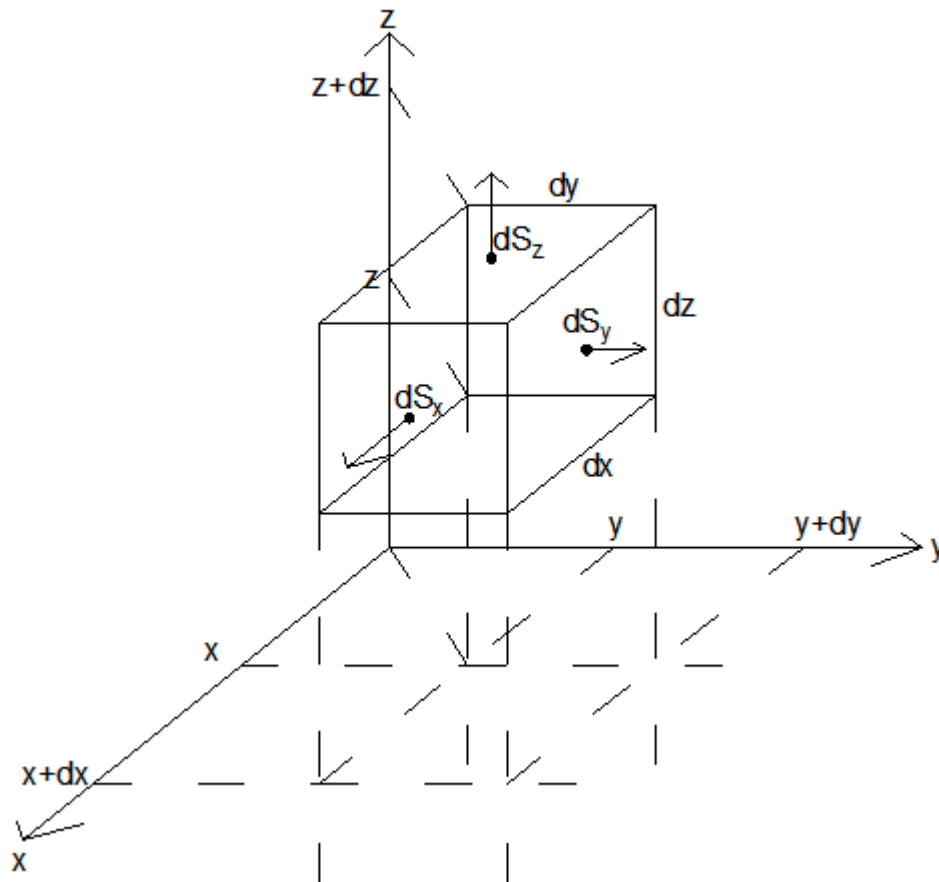


Fig. 2.3.1.1. Elemento diferencial en coordenadas cartesianas.

2.3.2. Sistema de Coordenadas Cilíndricas (r, ϕ, z)

En el sistema cilíndrico, por análisis vectorial del elemento diferencial, se definen los elementos diferenciales de línea superficie y volumen siguientes, de acuerdo a lo que puede observarse en la figura 2.3.2.1.

$$d\vec{l} = dr \cdot \vec{\mu}_r + r d\phi \cdot \vec{\mu}_\phi + dz \cdot \vec{\mu}_z \quad (\text{ec 2.3.2.1})$$

$$d\vec{S} = \begin{cases} d\vec{S}_r = r d\phi dz \cdot \vec{\mu}_r \\ d\vec{S}_\phi = dz dr \cdot \vec{\mu}_\phi \\ d\vec{S}_z = r dr d\phi \cdot \vec{\mu}_z \end{cases} \quad (\text{ec 2.3.2.2})$$

$$dV = r dr d\phi dz \quad (\text{ec 2.3.2.3})$$

Nótese la relación entre el radio horizontal r del sistema cilíndrico y las coordenadas x y y del sistema cartesiano, la cual puede ayudar mucho a la comprensión del sistema.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{ec 2.3.2.4})$$

Nótese también la relación entre el ángulo ϕ del sistema cilíndrico y las coordenadas x y y del sistema cartesiano, la cual resulta en:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{ec 2.3.2.5})$$

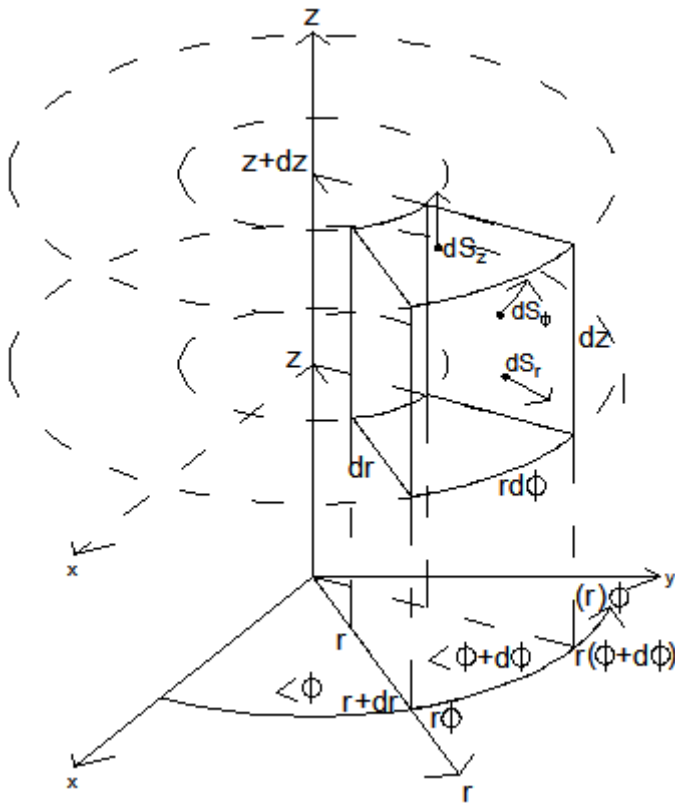


Fig. 2.3.2.1. Elemento diferencial en coordenadas cilíndricas.

2.3.3. Sistema de Coordenadas Esféricas (R, θ, ϕ)

En el sistema esférico, por análisis vectorial del elemento diferencial, se definen los elementos diferenciales de línea superficie y volumen siguientes, de acuerdo a lo que puede observarse en la figura 2.3.3.1.

$$d\vec{l} = dR \cdot \vec{\mu}_R + R d\theta \cdot \vec{\mu}_\theta + R \sin\theta d\phi \cdot \vec{\mu}_\phi \quad (\text{ec 2.3.3.1})$$

$$d\vec{S} = \begin{cases} d\vec{S}_R = R^2 \sin\theta d\theta d\phi \cdot \vec{\mu}_R \\ d\vec{S}_\theta = R \sin\theta dR d\phi \cdot \vec{\mu}_\theta \\ d\vec{S}_\phi = R dR d\theta \cdot \vec{\mu}_\phi \end{cases} \quad (\text{ec 2.3.3.2})$$

$$dV = R^2 \sin\theta dR d\theta d\phi \quad (\text{ec 2.3.3.3})$$

Nótese la relación entre los radios horizontales r (a partir del eje z) y los radios globales R (a partir del origen), la cual puede ayudar mucho a la comprensión del sistema.

$$r = R \sin\theta \quad (\text{ec 2.3.3.4})$$

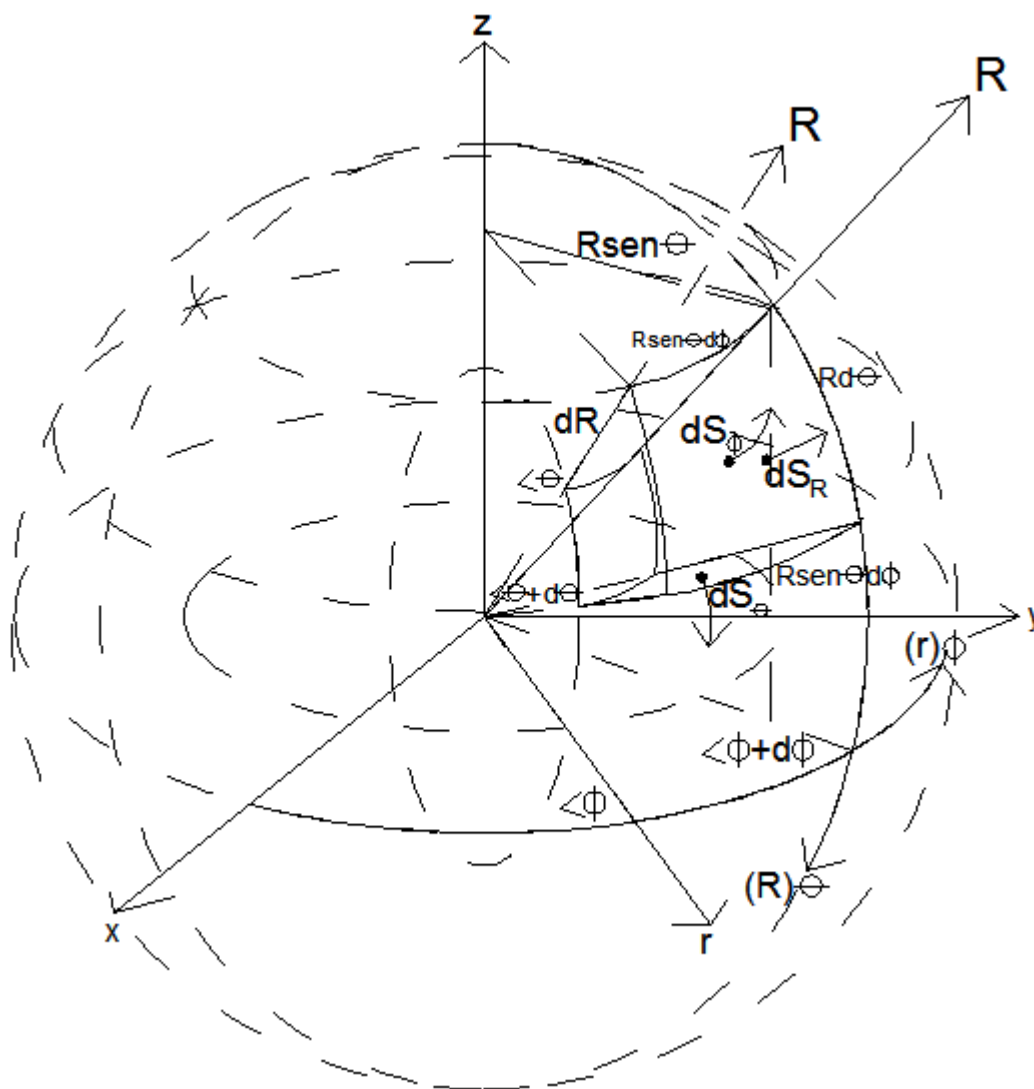


Fig. 2.3.3.1. Elemento diferencial en coordenadas esféricas.

2.4. Transformaciones entre sistemas de referencia y sus vectores unitarios

En las descripciones de los sistemas cilíndrico y esférico, se vieron dos relaciones que pueden hacer la diferencia para lograr una fácil comprensión de los mismos en base a como se relaciona con los otros dos sistemas. Se escogió como base referente el radio horizontal o radio de cilíndricas r , y esto fue hecho de esta manera porque intrínsecamente es un elemento que el estudiante viene trabajando desde hace ya muchos años (aunque en algunos casos no se haya dado cuenta). El famoso “Teorema de Pitágoras”, puede ser enunciado para obtener a r a partir de las coordenadas cartesianas, y así pasar a cilíndricas con la ecuación 2.3.2.4, pues si se observa lo que forman x , y y su resultante r , es precisamente un triángulo rectángulo.

Otro triángulo rectángulo se forma entre r y R , las cuales en este caso según se muestra en la figura 2.3.3.1 quedan relacionados por el ángulo θ y la función trigonométrica del seno, con lo que se escribió la ecuación 2.3.3.4 que relaciona a cilíndricas con esféricas de una forma fácil que ya es familiar al estudiante.

De igual forma se hubiese podido escribir el enunciado matemático de Pitágoras, como se hizo para relacionar a cartesianas con cilíndricas, pero utilizando a r y z para obtener otra relación de cilíndricas a esféricas de la siguiente forma:

$$R = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (\text{ec 2.4.1})$$

Se pueden encontrar relaciones entre las variables de los diferentes sistemas coordenados utilizando trigonometría, y los resultados de estas relaciones se presentan en las tablas 2.4.1, 2.4.2 y 2.4.3.

Relacionar los vectores unitarios que direccionan cada una de las variables en los diferentes sistemas coordenados puede no ser tan evidente como relacionar las propias variables. Para lograr estas relaciones en una forma sencilla, se debe tener presente que las reglas trigonométricas deben seguir cumpliéndose y que la magnitud del resultado final en este caso debe ser uno (1) pues es un vector unitario.

El vector unitario $\vec{\mu}_r$, obtenido a partir del sistema cartesiano, debe tener componentes de x y y ; pero su valor final debe ser 1, por tanto se debe relacionar con una función que multiplicada con un 1 en x ($\vec{\mu}_x$) y una función que multiplicada con un 1 en y ($\vec{\mu}_y$) den como resultado el valor del vector $\vec{\mu}_r$. Tal relación es:

$$\cos \phi \cdot \vec{\mu}_x + \operatorname{sen} \phi \cdot \vec{\mu}_y = \vec{\mu}_r \quad (\text{ec 2.4.2})$$

Tomando esta sencilla técnica, se pueden encontrar todas las demás relaciones entre vectores unitarios en los diferentes sistemas coordenados, las cuales se listan en las tablas 2.4.1, 2.4.2 y 2.4.3.

<i>CARTESIANO</i>	<i>CILINDRICO</i>	<i>ESFERICO</i>
x	$r \cos \phi$	$R \operatorname{sen} \theta \cos \phi$
y	$r \operatorname{sen} \phi$	$R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$
z	z	$R \cos \theta$
$\vec{\mu}_x$	$\cos \phi \vec{\mu}_r - \operatorname{sen} \phi \vec{\mu}_\phi$	$\operatorname{sen} \theta \cos \phi \vec{\mu}_R + \cos \theta \cos \phi \vec{\mu}_\theta - \operatorname{sen} \phi \vec{\mu}_\phi$
$\vec{\mu}_y$	$\operatorname{sen} \phi \vec{\mu}_r + \cos \phi \vec{\mu}_\phi$	$\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \vec{\mu}_R + \cos \theta \operatorname{sen} \phi \vec{\mu}_\theta + \cos \phi \vec{\mu}_\phi$
$\vec{\mu}_z$	$\vec{\mu}_z$	$\cos \theta \vec{\mu}_R - \operatorname{sen} \theta \vec{\mu}_\theta$

Tabla 2.4.1. Relaciones entre sistemas coordenados con resultantes en el sistema cartesiano.

<i>CARTESIANO</i>	<i>CILINDRICO</i>	<i>ESFERICO</i>
$\sqrt{x^2 + y^2}$	r	$R \operatorname{sen} \theta$
$\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$	ϕ	ϕ
z	z	$R \cos \theta$
$\cos \phi \vec{\mu}_x + \operatorname{sen} \phi \vec{\mu}_y$	$\vec{\mu}_r$	$\operatorname{sen} \theta \vec{\mu}_R + \cos \theta \vec{\mu}_\theta$
$-\operatorname{sen} \phi \vec{\mu}_x + \cos \phi \vec{\mu}_y$	$\vec{\mu}_\phi$	$\vec{\mu}_\phi$
$\vec{\mu}_z$	$\vec{\mu}_z$	$\cos \theta \vec{\mu}_R - \operatorname{sen} \theta \vec{\mu}_\theta$

Tabla 2.4.2. Relaciones entre sistemas coordenados con resultantes en el sistema cilíndrico.

<i>CARTESIANO</i>	<i>CILINDRICO</i>	<i>ESFERICO</i>
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$\sqrt{r^2 + z^2}$	R
$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$	ϕ	ϕ
$\cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$	$\cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right) \dots \text{ó} \dots \tan^{-1}\left(\frac{r}{z}\right)$	θ
$\text{sen } \theta \cos \phi \bar{\mu}_x + \text{sen } \theta \text{sen } \phi \bar{\mu}_y + \cos \theta \bar{\mu}_z$	$\text{sen } \theta \bar{\mu}_r + \cos \theta \bar{\mu}_z$	$\bar{\mu}_R$
$\cos \theta \cos \phi \bar{\mu}_x + \cos \theta \text{sen } \phi \bar{\mu}_y - \text{sen } \theta \bar{\mu}_z$	$\cos \theta \bar{\mu}_r - \text{sen } \theta \bar{\mu}_z$	$\bar{\mu}_\theta$
$-\text{sen } \phi \bar{\mu}_x + \cos \phi \bar{\mu}_y$	$\bar{\mu}_\phi$	$\bar{\mu}_\phi$

Tabla 2.4.3. Relaciones entre sistemas coordenados con resultantes en el sistema esférico.

¡Hablando de convenciones!

Las tablas anteriores solo pueden ser utilizadas si se respeta el sistema de convenciones bajo el cual han sido analizados los sistemas de referencia en los puntos anteriores. Es importante destacar siete puntos, que a veces no son notables a primera vista, pero que bastará con una simple revisión con atención por parte del lector, para comprenderlos con toda claridad, según todo lo que ya se ha visto. Los mismos son:

- Los ejes x , y , z , siempre irán alternándose en rotación en sentido de tornillo positivo (Fig 2.2.3.1).
- El radio r comienza siempre a partir del eje z a cualquier altura.
- El ángulo ϕ se mide a partir del eje x (yendo hacia y) y su vértice de giro lo forman el eje x , el punto donde choque el eje x con z (a cualquier altura), y el radio r .
- El ángulo ϕ por convención va desde 0 a 2π radianes.

- e. El radio R comienza siempre a partir del punto de origen y puede salir en cualquier dirección.
- f. El ángulo θ se mide a partir del eje z y su vértice de giro lo forman el eje z , el punto de origen del sistema, y el radio R (en la dirección en donde se encuentre hasta $-z$).
- g. El ángulo θ por convención va desde 0 a π radianes.

2.5. Los operadores diferenciales en espacios vectoriales

El lector conocerá a este nivel lo suficiente sobre operadores aritméticos. También tendrá un acervo adecuado acerca de operadores diferenciales funcionales. En este acápite nuestro interés es tratar los operadores diferenciales que se aplican a espacios vectoriales, los cuales pueden evaluar las razones de cambio de los campos vectoriales y/o relacionar ciertas funciones con dichas razones de cambio de los campos vectoriales relacionados, en los espacios euclídeos donde existan la función y el campo vectorial.

Nabla

El operador diferencial nabla, busca las razones de cambio de una entidad matemática en las tres direcciones ortogonales que definan al espacio euclídeo donde exista dicha entidad. Matemáticamente para un sistema de n coordenadas, se puede encontrar la expresión para nabla:

$$\nabla_{\text{curv-general}} = \sum_{i=1}^n \frac{\vec{\mu}_i}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (\text{ec 2.5.1})$$

Donde i es la i -ésima componente, h es un factor de escala que depende de la geometría del sistema curvilíneo utilizado y q es la coordenada del sistema.

En un sistema físico de un espacio euclídeo tridimensional

$$\nabla_{\text{curv-general}} = \frac{\vec{\mu}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\vec{\mu}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\vec{\mu}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \quad (\text{ec 2.5.2})$$

Puede demostrarse que los factores de escala son para los sistemas coordenados utilizados en este texto los se muestran en la tabla 2.5.1.1.

CARTESIANO CILINDRICO ESFERICO

$\vec{\mu}_x, \vec{\mu}_y, \vec{\mu}_z$	$\vec{\mu}_r, \vec{\mu}_\phi, \vec{\mu}_z$	$\vec{\mu}_R, \vec{\mu}_\theta, \vec{\mu}_\phi$
$h_x = 1$	$h_r = 1$	$h_R = 1$
$h_y = 1$	$h_\phi = r$	$h_\theta = R$
$h_z = 1$	$h_z = 1$	$h_\phi = R \sin \theta$

Tabla 2.5.1.1. Factores de escala para los diferentes sistemas coordenados.

Nabla se puede multiplicar funcional, escalar o vectorialmente por la entidad matemática que corresponda en cada caso, como se mostrará a continuación.

2.5.1. El Gradiente de una función

Si se tiene una función escalar cualquiera f , la multiplicación de la misma con Nabla debe cumplir las reglas que aplican a la multiplicación de cualquier función escalar con un campo vectorial, pues Nabla tiene todas las propiedades de campo vectorial además de ser operador diferencial.

El resultado general de esta operación será

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\vec{\mu}_i}{h_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} \quad (\text{ec 2.5.1.1})$$

Se puede verificar fácilmente la forma del Gradiente en cada uno de los sistemas coordenados que utilizaremos en éste curso, los cuales resultan como se muestra a continuación:

$$\nabla f_{\text{cartesiano}} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{\mu}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{\mu}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{\mu}_z \quad (\text{ec 2.5.1.2})$$

$$\nabla f_{\text{cilindrico}} = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{\mu}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{\mu}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{\mu}_z \quad (\text{ec 2.5.1.3})$$

$$\nabla f_{\text{esférico}} = \frac{\partial f}{\partial R} \bar{\mu}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial \theta} \bar{\mu}_\theta + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \bar{\mu}_\phi \quad (\text{ec 2.5.1.4})$$

NOTA: Físicamente el gradiente será un vector que representa la dirección en la cual el campo escalar f varía más rápidamente, y su magnitud será precisamente el “ritmo de variación” de la función en la dirección del vector gradiente.

2.5.2. La Divergencia de un campo de vector

Si se tiene un campo vectorial o tensorial cualquiera \vec{A} , la multiplicación escalar de éste campo con Nabla debe cumplir las mismas reglas que aplican a la multiplicación escalar de dos campos vectoriales.

Puede verificarse que el resultado general de esta operación tendrá la forma:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n h_i} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \left(\frac{\prod_{i=1}^n h_i}{h_i} A_i \right)}{\partial q_i} \right\} \quad (\text{ec 2.5.2.1})$$

Se puede verificar fácilmente la forma de la Divergencia en cada uno de los sistemas coordenados que utilizaremos en éste curso, los cuales resultan como se muestra a continuación:

$$\nabla \cdot \vec{A}_{\text{cartesiano}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{ec 2.5.2.2})$$

$$\nabla \cdot \vec{A}_{\text{cilíndrico}} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{ec 2.5.2.3})$$

$$\nabla \cdot \vec{A}_{\text{esférico}} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial(R^2 A_R)}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{ec 2.5.2.4})$$

NOTA: Matemáticamente, la definición de divergencia esta indicada como el “flujo de campo vectorial por unidad de volumen cuando esta unidad de volumen tiende a cero”. Como puede ver el lector, a nosotros no nos ha interesado presentar esta definición tan formal, pues en la mayoría de los casos no nos otorga la representación o interpretación que deseáramos en la mente del estudiante. En nuestro afán de presentar conceptos físicos (aunque en el fondo son todos coherentes con el sentido matemático formal), nosotros diremos que físicamente la divergencia nos indica que tan rápido cambia (en el sentido positivo disminuye) la “densidad del campo vectorial” en un punto del espacio euclídeo donde este se encuentra. Una divergencia elevada indica que las líneas de campo en ese punto se están “bifurcando” o “abriendo” bastante. Una divergencia nula indica que en ese punto no hay pérdida en la densidad del campo vectorial, o que las líneas de campo son paralelas. También podríamos indicar que la divergencia mide la tasa de “expansión” o “contracción” de las líneas de flujo del campo vectorial.

2.5.3. El Rotacional de un campo de vector

Si se tiene un campo vectorial o tensorial cualquiera \vec{A} , la multiplicación vectorial de éste campo con Nabla debe cumplir las mismas reglas que aplican a la multiplicación vectorial de dos campos vectoriales.

Puede verificarse (al menos para un sistema tridimensional clásico), que el resultado general de esta operación tendrá la forma:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \\ h_1 \vec{\mu}_1 & h_2 \vec{\mu}_2 & h_3 \vec{\mu}_3 \end{vmatrix} \quad (\text{ec 2.5.3.1})$$

Se puede verificar fácilmente la forma del Rotacional en cada uno de los sistemas coordenados que utilizaremos en éste curso, los cuales resultan como se muestra a continuación:

$$\nabla \times \vec{A}_{cartesiano} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{\mu}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{\mu}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{\mu}_z \quad (\text{ec 2.5.3.2})$$

$$\nabla \times \vec{A}_{cilindrico} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \vec{\mu}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{\mu}_\phi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \vec{\mu}_z \quad (\text{ec 2.5.3.3})$$

$$\nabla \times \vec{A}_{esférico} = \frac{1}{R \sin \theta} \left(\frac{\partial(A_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \vec{\mu}_r + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_R}{\partial \phi} - \frac{\partial(RA_\phi)}{\partial R} \right) \vec{\mu}_\theta + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial(RA_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial A_R}{\partial \theta} \right) \vec{\mu}_\phi \quad (\text{ec 2.5.3.4})$$

NOTA: El rotacional físicamente nos indica la tendencia de un campo vectorial a inducir rotación. Los matemáticos optan por la definición de “límite de circulación sobre camino cerrado que encierra un área, dividido entre esa área, cuando la misma tiende a cero”; lo cual igual que sucede con la definición matemática de la divergencia, a muchos no les dirá tanto a primera vista. Se puede tener una mejor idea física de lo que es el rotacional de un campo de vector, pensando que el mismo es un campo de vector resultante que indica cuan curvadas están las líneas de campo del vector original al cual se le esta sacando el rotacional. Por cada punto del espacio euclídeo donde este uno de los vectores con líneas de campo curvas, existirá un “vector rotado” con un valor de “rotacional” que nos indicará que tan curvas son las líneas de campo en ese punto y por tanto que tanta “rotación” inducen al evento físico de fuerza que sea afectado por ese campo. ¿Por qué no se obtiene simplemente una magnitud resultante como en el caso de la divergencia? Pues imagina (o dibuja) unas líneas de campo vectorial que formen círculos perfectos cuando se ven en una dirección frontal; su “rotacional” en esa dirección será apreciable; pero si cambias la dirección de vista de esos círculos en noventa grados (giras la página donde lo dibujaste 90°), ya no serán siquiera curvas, serán rectas. El rotacional, es pues un campo de vector que te da magnitud y direcciones componentes, donde puedes obtener los valores de las distintas componentes de “inducción a rotación” por causa del campo original en sus respectivas direcciones. Un rotacional resultante nulo en alguna dirección, indica que el campo en esa dirección no induce ninguna rotación, y un rotacional no nulo en una dirección indica que las líneas de campo están curvadas en esa dirección de forma que describen una rotación.

2.5.4. El Laplaciano

Si se tiene una función cualquiera, sea esta escalar o vectorial (compuesta por varias funciones escalares en direcciones ortogonales según fue descrito en el acápite 2.1 de este texto); la multiplicación de las funciones con Nabla cuadrado da como resultado el operador llamado Laplaciano. Al tener Nabla características de campo vectorial, la obtención de Nabla cuadrado debe realizarse por medio del producto interno o escalar de Nabla consigo mismo.

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \quad (\text{ec 2.5.4.1})$$

De aquí que el Laplaciano de cualquier función f estará definido por

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f \quad (\text{ec 2.5.4.2})$$

Lo cual puede ser aplicable a funciones escalares y extendido a funciones vectoriales ortogonales tipo:

$$\vec{F} = f_1 \vec{\mu}_1 + f_2 \vec{\mu}_2 + f_3 \vec{\mu}_3 \quad (\text{ec 2.5.4.3})$$

para lo cual

$$\nabla^2 \vec{F} = (\nabla \cdot \nabla) \vec{F} = \nabla^2 f_1 \vec{\mu}_1 + \nabla^2 f_2 \vec{\mu}_2 + \nabla^2 f_3 \vec{\mu}_3 \quad (\text{ec 2.5.4.4})$$

Puede verificarse que el resultado general del Laplaciano tendrá la forma:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\prod_{i=1}^n h_i} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\prod_{i=1}^n h_i}{h_i^2} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right) \right\} \quad (\text{ec 2.5.4.5.})$$

siendo ψ una función escalar o vectorial (por cada dirección) según fue descrito en ec. 2.5.4.4.

Se puede verificar fácilmente la forma del Laplaciano en cada uno de los sistemas coordenados que utilizaremos en éste curso, los cuales resultan como se muestra a continuación:

$$\nabla^2 \psi_{\text{cartesiano}} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (\text{ec 2.5.4.6})$$

$$\nabla^2 \psi_{\text{cilindrico}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (\text{ec 2.5.4.7})$$

$$\nabla^2 \psi_{\text{esférico}} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \quad (\text{ec 2.5.4.8})$$

NOTA: Al entender los sentidos físicos de la divergencia y el gradiente, se puede entender el sentido físico del Laplaciano. Algunos estudiantes tienen dificultad para darle un sentido físico al Laplaciano pues al intentar entenderlo directamente del formulismo del propio operador, se tiene un caso similar (y más profundo por efecto de las múltiples direcciones) al que se tiene con la comprensión de sentido físico de las ecuaciones diferenciales de segundo orden o superiores, cuando son vistas por primera vez. De hecho y como puede ver el estudiante, el Laplaciano es un operador diferencial compuesto por puros términos diferenciales de segundo orden, por lo que intentar imaginar el comportamiento independiente de cada uno y sus razones de cambio se convierte un reto para algunas personas. Por otro lado, pensar en el Laplaciano como “*la divergencia de un campo compuesto de gradientes*”, podría en muchos casos facilitar la comprensión, siempre y cuando el gradiente y la divergencia hayan sido comprendidos correctamente como se ha explicado en las notas de los acápites 2.5.1 y 2.5.2. El Laplaciano cobrará mucho sentido para describir cualquier tipo de funciones armónicas espacio-tiempo-relativista para campos en espacios tetramensionales, donde la cuarta dimensión sería precisamente el tiempo.

2.5.5. El D'Alembertiano

Este operador se usa para la aplicación del modelado físico de comportamiento Laplaciano de una entidad en un espacio tetradimensional de curvatura nula, donde la cuarta dimensión es precisamente el tiempo (espacio de Minkowski). Al agregar el efecto temporal de variación de

un campo oscilante, donde la oscilación es provocada por un oscilador circular perfecto a velocidad constante (o sea provocando forma de señal senoidal), se llega a describir el comportamiento dinámico de variación del fenómeno físico descrito por el Laplaciano de la entidad a la cual se esta aplicando el D'Alembertiano. Básicamente la resultante es la descripción de comportamiento de un fenómeno ondulatorio plano senoidal.

Para un medio de propiedades isotrópicas tanto estáticas (no variación de características del medio) como dinámicas (iguales velocidades de propagación-tiempo en las direcciones tensoriales que lo dominan), el D'Alembertiano puede ser expresado como:

$$D'Alembert = \nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (\text{ec 2.5.5.1})$$

Donde v es la velocidad de propagación de la onda del campo ψ en el tiempo t , y el operador tendrá caracterización escalar o vectorial dependiendo de ψ .

Nótese que la forma del D'Alembertiano en los diferentes sistemas de referencia va a depender exclusivamente de la forma del Laplaciano $\nabla^2 \psi$.

2.6. Circulación y flujo de un campo vectorial

2.6.1. Circulación de un campo vectorial

La circulación de un campo vectorial calcula una función escalar que evalúa el efecto del producto interno entre el campo vectorial con un camino direccionado específico, en el cual se “circula”.

Siendo \vec{A} un campo vectorial cualquiera, si se desea la circulación de ese campo en un camino de un punto a a b :

$$\tilde{C} = \int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (\text{ec 2.6.1.1})$$

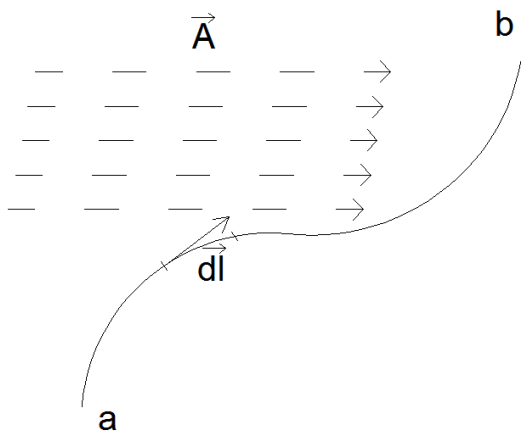


Fig. 2.6.1.1. Representación de la circulación

2.6.2. Flujo de un campo vectorial

El flujo de un campo vectorial calcula una función que evalúa el efecto del producto interno entre el campo vectorial con una superficie direccionada específica, en la cual se “fluye” o sea que el campo traspasa la superficie.

$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (\text{ec 2.6.2.1})$$

NOTA: La explicación anterior y la propia ecuación 2.6.2.1, dejan ver que ningún vector que sea perpendicular a la dirección de vector de una superficie de flujo, podrá fluir a través de ella. Es importante no confundir los términos porque de hecho cuando el vector es paralelo al vector de superficie, entonces es perpendicular a la propia superficie. Recuérdese que el vector que direcciona una superficie esta siempre en la dirección que no “compone” el área de superficie y por tanto es perpendicular a la superficie.

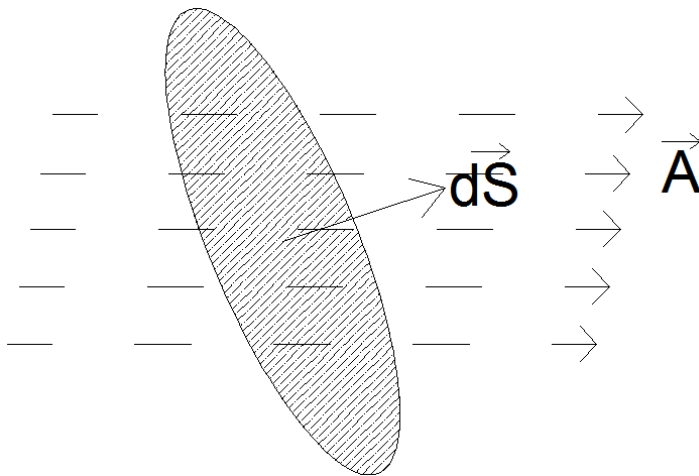


Fig. 2.6.2.1. Representación del flujo de un campo vectorial.

2.7. Propiedades y Teoremas con Operadores Diferenciales

Algunas propiedades y teoremas matemáticos ya ampliamente demostrados, nos ayudarán a encontrar soluciones más fáciles a ciertos problemas de campos electromagnéticos.

2.7.1. Propiedad del Gradiente

Al conocer que el gradiente da como resultado básico el ritmo de variación de una función en la dirección preferencial en la cual esta variará, se puede pensar en un procedimiento inverso que nos permita relacionar un vector con su respectiva función. Esta relación es tácitamente indicada por lo que se conoce como la *propiedad del gradiente*.

De esta forma, si:

$$\int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{l} = f(b) - f(a) \quad (\text{ec 2.7.1.1})$$

Entonces; f es una función escalar tal que su gradiente dará como resultado el campo vectorial \vec{A} .

De esta forma se puede expresar:

$$\vec{A} = \nabla f \quad (\text{ec 2.7.1.2})$$

$$\int_a^b \nabla f \cdot d\vec{l} = f(b) - f(a) \quad (\text{ec 2.7.1.3})$$

2.7.1.1. Circulación de camino cerrado y campos conservativos

Si la evaluación de la propiedad del gradiente sobre un camino cerrado es nula, el campo vectorial \vec{A} es un campo conservativo.

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint \nabla f \cdot d\vec{l} = 0 \text{ (en campos conservativos)} \quad (\text{ec 2.7.1.1.1})$$

NOTA: Esto quiere decir que las funciones escalares asociadas a los campos vectoriales conservativos, solo tienen un posible valor asociado a cada punto de evaluación y realizar un recorrido (cualquiera que sea la ruta de recorrido) de camino cerrado, no representará para el elemento que realice el recorrido una variación energética debida al campo conservativo.

2.7.2. El Teorema de Stokes o del Rotacional

Con base en la definición matemática diferencial formal del rotacional, se dice que el físico-matemático británico William Thompson Kelvin pudo demostrar la ecuación que lleva el nombre de George Gabriel Stokes, la cual le habría pasado a éste último en una correspondencia hacia mediados del siglo XIX, y Stokes la hizo famosa al asignarla a uno de sus exámenes, con lo que el mundo científico la bautizó con su nombre. El teorema de Stokes, relaciona a la circulación de un campo vectorial en un camino cerrado al flujo de ese mismo campo vectorial a través de la superficie que describiría ese camino cerrado (Fig. 2.7.2.1)

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (\text{ec 2.7.2.1})$$

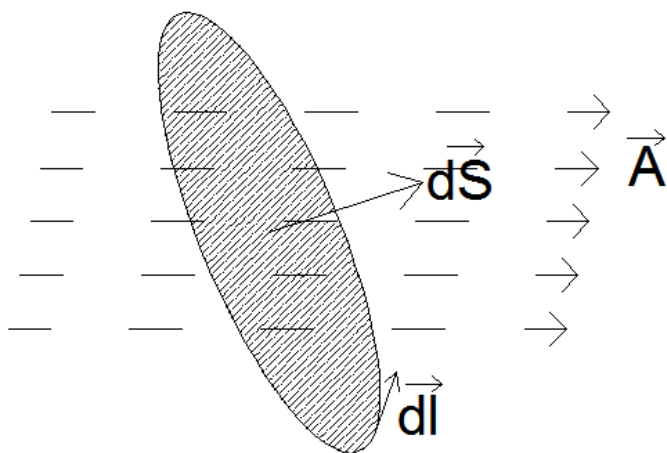


Fig. 2.7.2.1. Representación del Teorema del Rotacional o de Stokes.

2.7.3. El Teorema de Ostrogradsky, Gauss, Green, o de la Divergencia

Como puede verse en el título de este acápite, varios autores contribuyen (o reclaman) a la autoría de éste útil teorema matemático. Realmente es un caso especial o consecuencia del teorema del Rotacional o de Stokes (que como ya se indicó, aparentemente la concepción tampoco fue de Stokes), y hay datos que afirman que el teorema de la Divergencia tampoco fue concebido originalmente por ninguno de los científicos que reclama con su nombre su autoría desde el siglo XIX, sino mucho antes por Joseph Louis Lagrange en el siglo. XVIII. En éste caso, el físico-matemático ucraniano Mikhail Vasilievich Ostrogradsky si aporta la primera demostración formal documentada que se tiene del teorema, aunque no su concepción. El físico alemán Carls Friedrich Gauss, al estudiar y enunciar su famosa Ley de Gauss (que se verá más adelante en este curso), llega a una formulación matemática similar a la de Ostrogradsky de forma independiente y prácticamente en el mismo periodo, pero su publicación fue ulterior a la publicación de Ostrogradsky.

El disputado teorema, indica que el flujo total de un campo vectorial en una superficie cerrada será igual a la integral de la divergencia de ese mismo campo en todo el volumen encerrado por la superficie cerrada (Fig 2.7.3.1). Visto en el sentido que trabajó Gauss, el cual es el sentido eléctrico, el teorema puede visualizarse como el flujo de salida de campo neto en una región o

espacio euclídeo, dado por la suma de todas las fuentes de campo menos la suma de todos los sumideros en esa región.

$$\oiint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint (\nabla \cdot \vec{A}) dV \quad (\text{ec 2.7.3.1})$$

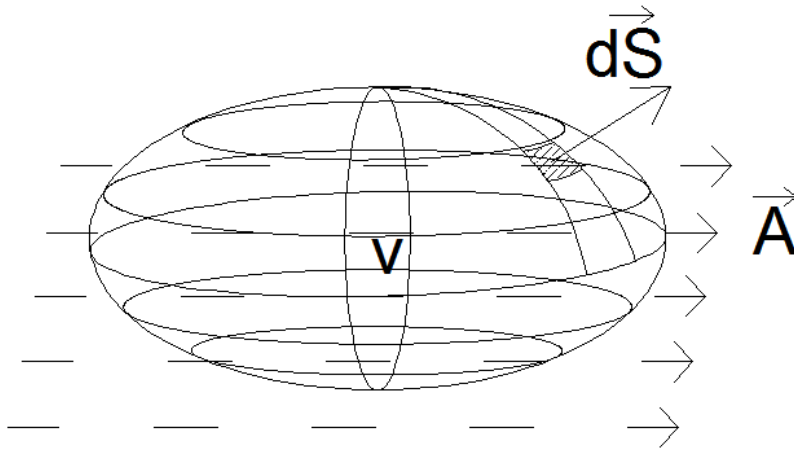


Fig. 2.7.3.1. Representación para el Teorema de la Divergencia.

2.8. Identidades con Operadores Diferenciales

Algunas de las identidades matemáticas con los operadores diferenciales ya vistos, que podrían ayudarnos a resolver ciertos problemas, son las siguientes:

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f \quad (\text{ec 2.8.1})$$

$$\nabla \times (f\vec{A}) = \nabla f \times \vec{A} + f(\nabla \times \vec{A}) \quad (\text{ec 2.8.2})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (\text{ver ec 2.5.4.4 para } \nabla^2 \vec{A}) \quad (\text{ec 2.8.3})$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (\text{ec 2.8.4})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \quad (\text{ec 2.8.5})$$

$$\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f \quad (\text{ec 2.8.6})$$

$$\nabla \cdot (f\vec{A}) = f\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla f \quad (\text{ec 2.8.7})$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \nabla \times \vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B} \quad (\text{ec 2.8.8})$$

3. Electrostática

La Electrostática se encarga del estudio de los campos eléctricos estables, las fuentes que los producen (las cargas eléctricas) y sus efectos físicos. La componente eléctrica de un campo electromagnético es por ende deducida y entendida en sus tres dimensiones físicas espaciales por medio de la electrostática. La electrodinámica estudia los campos eléctricos que varían con el tiempo, por ende es un estudio en cuatro dimensiones, donde la cuarta es precisamente el tiempo. Al tener esta evolución temporal en los campos eléctricos, se verán vinculados necesariamente los campos magnéticos y cargas en movimiento, lo cual se estudiará más tarde.

3.1. La Carga Eléctrica

Cuando se habla de carga eléctrica, nos referimos a una propiedad intrínseca de la materia. Hablando desde el punto de vista más formal, esta propiedad es visible por medio de sus efectos de atracción y/o repulsión (fuerzas eléctricas), y es explicada fundamentalmente a nivel de partículas subatómicas. Explicado en base al modelo standard, la carga eléctrica sería una medida de la capacidad de una partícula subatómica de intercambiar fotones. Hasta ahora, la carga considerada como elemental en el mundo de la ingeniería eléctrica ha sido la carga del electrón, que por convención histórica se le consideró negativa. Esta carga es similar a la del protón, y por mucho tiempo se estimó que era la mínima cantidad de carga eléctrica físicamente posible. El desarrollo del modelo standard trajo consigo cargas fraccionadas del electrón (las cargas de los quarks de $1/3$ y $2/3$ las cargas de un electrón), pero no ha eliminado el concepto básico de que la carga eléctrica fundamental mínima se considera como una carga “discreta”. Lejos de intentar incursionar en la discusión de las cargas fundamentales o elementales, nuestro objetivo es trabajar sobre ella, sea cual sea, para aplicaciones de ingeniería con campos electromagnéticos, bajo el propósito de nuestro curso. Por esta razón, en este texto no nos referiremos explícitamente a la “carga elemental” o “carga fundamental” si no más bien nos estaremos refiriendo a una

“carga puntual”, que no será un electrón, ni un protón, ni a un quark, sino simplemente a un elemento puntual (o diferencial) de carga que podrá tener para efectos de nuestros análisis “cualquier carga asignada que queramos” y de allí integraremos para obtener la carga total del cuerpo que realmente nos interese analizar.

Para los efectos de esta literatura nos referiremos a cargas puntuales aisladas bajo la nomenclatura q , y nos referiremos a cargas puntuales diferenciales en un sistema continuo lineal, superficial o volumétrico bajo la nomenclatura dq . Para los efectos de solución de problemas de cargas totales en cuerpos no puntuales, es usual que utilicemos la nomenclatura Q para referirnos a la carga total de un cuerpo no puntual.

3.2. Distribuciones de carga

Las distribuciones de carga se representan por modelos matemáticos de carga distribuida de línea, superficie y volumen en base a definiciones puntuales de “densidades de carga”. Las densidades de carga se representan en base a modelos escalares en el dominio del espacio euclídeo donde las cargas existen.

3.2.1. Densidad lineal de carga

Las densidades de carga de línea tienen unidades de *carga/longitud*.

$$\lambda = f \left[\frac{\text{Coulomb}}{m} \right] \quad (\text{ec 3.2.1.1})$$

Donde f es una función escalar en el dominio del espacio donde la carga existe. Entre corchetes se muestran las unidades en el Sistema Internacional.

Si se desea obtener la carga total Q de un cuerpo lineal, se puede definir una carga puntual dq a partir de la densidad lineal de carga, e integrarla sobre todo el cuerpo:

$$dq = \lambda dl \quad (\text{ec 3.2.1.2})$$

$$Q = \int dq = \int \lambda dl \quad (\text{ec 3.2.1.3})$$

Donde dl puede tomar cualesquiera de las formas descritas en la sección 2.3, dependiendo del sistema de referencia.

3.2.2. Densidad superficial de carga

Las densidades de carga de superficie tienen unidades de *carga/superficie*.

$$\sigma = f \left[\frac{\text{Coulomb}}{m^2} \right] \quad (\text{ec 3.2.2.1})$$

Donde f es una función escalar en el dominio del espacio donde la carga existe. Entre corchetes se muestran las unidades en el Sistema Internacional.

Si se desea obtener la carga total Q de un cuerpo superficial, se puede definir una carga puntual dq a partir de la densidad superficial de carga, e integrarla sobre todo el cuerpo:

$$dq = \sigma dS \quad (\text{ec 3.2.2.2})$$

$$Q = \int dq = \iint \sigma dS \quad (\text{ec 3.2.2.3})$$

Donde dS puede tomar cualesquiera de las formas descritas en la sección 2.3, dependiendo del sistema de referencia.

3.2.3. Densidad volumétrica de carga

Las densidades de carga de volumen tienen unidades de *carga/volumen*.

$$\rho = f \left[\frac{\text{Coulomb}}{m^3} \right] \quad (\text{ec 3.2.3.1})$$

Donde f es una función escalar en el dominio del espacio donde la carga existe. Entre corchetes se muestran las unidades en el Sistema Internacional.

Si se desea obtener la carga total Q de un cuerpo volumétrico, se puede definir una carga puntual dq a partir de la densidad volumétrica de carga, e integrarla sobre todo el cuerpo:

$$dq = \rho dV \quad (\text{ec 3.2.3.2})$$

$$Q = \int dq = \iiint \rho dV \quad (\text{ec 3.2.3.3})$$

Donde dV puede tomar cualesquiera de las formas descritas en la sección 2.3, dependiendo del sistema de referencia.

3.3. La Ley de Coulomb

Esta ley, estipula la interacción de fuerzas eléctricas entre dos cargas puntuales cualesquiera, cuyo modelo es:

$$\vec{F}_{e-q1(q2)} = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{\mu}_{q2 \rightarrow q1} \quad (\text{ec 3.3.1})$$

Donde q_1 es la carga que experimenta la fuerza $\vec{F}_{e-q1(q2)}$, la cual se da debido a la existencia de la carga q_2 . El término r_{12} es la distancia (o función de distancia) que existe entre las cargas. El vector $\vec{\mu}_{q2 \rightarrow q1}$ es el vector direccionable que da dirección a la fuerza sobre q_1 la cual va siempre de la carga “causa” q_2 , a la carga sobre la cual se da el “efecto”, q_1 .

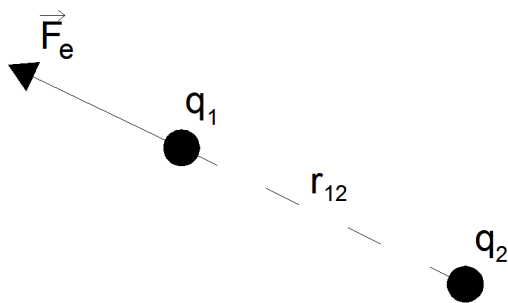


Fig. 3.3.1. Representación esquemática de la Ley de Coulomb

La Ley de Coulomb es totalmente recíproca, o sea, físicamente ambas cargas experimentan la misma fuerza de efecto Coulomb debido a la carga vecina, por lo que podríamos expresar que la carga q_2 experimenta una fuerza igual en magnitud y en dirección opuesta a la fuerza $\vec{F}_{e-q1(q2)}$, y se da debido a la existencia de q_1 . El modelo matemático de la fuerza que experimentaría q_2 en éste caso sería:

$$\vec{F}_{e-q2(q1)} = K_e \frac{q_2 q_1}{r_{21}^2} \vec{\mu}_{q1 \rightarrow q2} \quad (\text{ec 3.3.2})$$

En este texto, la notación de fuerzas (u otros tensores, vectores, o cantidades que representen efectos físicos diversos) en cargas y debido a cargas, será:

$$\vec{A}_{en_q1(debido_a_q2)}$$

donde \vec{A} es la magnitud vectorial o tensorial que se desea describir.

La constante de proporcionalidad eléctrica K_e , esta definida en función de una propiedad que se conoce como *permitividad eléctrica del medio*, (a veces llamada permisividad) la cual a su vez esta definida en función de la *permitividad eléctrica del vacío*. Esta última ha sido valorada experimentalmente obteniendo un valor en unidades del Sistema Internacional (entre corchetes) de:

$$\epsilon_0 = 8,8541878176 \times 10^{-12} \left[\frac{F}{m} \right] = 8,8541878176 \times 10^{-12} \left[\frac{C^2}{N \cdot m^2} \right] \quad (\text{ec 3.3.3})$$

Lo cual con la intención de obtener un valor fácil de recordar puede ser ajustado sin mayores efectos de error al cálculo a:

$$\epsilon_0 \cong \frac{10^{-9}}{36\pi} \left[\frac{C^2}{N \cdot m^2} \right] \quad (\text{ec 3.3.4})$$

La permitividad de los medios será la del vacío multiplicada por un factor (o función) adimensional llamado permitividad relativa (a veces llamado constante dieléctrica) ϵ_r .

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (\text{ec 3.3.5})$$

En el Sistema Internacional:

$$\epsilon \cong \frac{10^{-9}}{36\pi} \epsilon_r \left[\frac{C^2}{N \cdot m^2} \right] \quad (\text{ec 3.3.6})$$

Nótese que ϵ_r puede ser un simple factor (como en efecto lo es si se considera que el medio es lineal, homogéneo e isotrópico) como puede ser una función escalar o vectorial si se consideran medios anisotrópicos y/o variables temporales. Si la permitividad es por ejemplo tomada en función de las direcciones espaciales y el tiempo (con campos variables ondulatorios), considerando que relaciona dos campos vectoriales (que se verán con detenimiento en próximas secciones), esta podría ser convertida a una función tensorial en el dominio de la frecuencia con valores reales y complejos. En los casos más completos, la permitividad es representada matemáticamente por un tensor de orden 2. En la presente literatura, y debido al alcance de éste curso, la permitividad será considerada solamente como un factor escalar.

La constante K_e será el inverso de la permitividad eléctrica en un espacio, distribuida en todo el ángulo sólido de ese espacio desde el punto desde donde es medida la misma (que sería donde esta la carga puntual de Coulomb). De este modo:

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \quad (\text{ec 3.3.7})$$

3.4. El Campo Eléctrico

El campo eléctrico, es el campo de vectores de fuerza sobre el cual se fundamenta el modelo vectorial de la fuerza eléctrica. Cada vector de fuerza eléctrica ocupa un punto del espacio donde el vector fuerza existe. Para que exista la fuerza tiene que existir una carga que experimente dicha fuerza, sin embargo la inexistencia de la carga que experimenta dicha fuerza no inhabilita la existencia del campo que la produce. De hecho, la relación entre el campo eléctrico y la fuerza eléctrica en un punto esta dada solamente por la carga puntual en ese punto. Dicho esto, se conocerá que la fuerza eléctrica en un punto identificado como “punto 1”, donde existe una q_1 , tendrá una relación con el campo que la produce de la forma:

$$\vec{F}_{e-q1} = q_1 \vec{E}_1 \quad (\text{ec 3.4.1})$$

Nótese que la fuerza en la carga tendrá la misma dirección del campo. De acuerdo a esto y en base a la teoría relacionada de fuerza eléctrica discutida en el acápite anterior, se puede deducir que \vec{E}_1 debe ser creado por alguna otra carga, que relacionando las ecuaciones (ec 3.3.1) y (ec 3.4.1) sería una carga externa a q_1 , en nuestro caso q_2 . De allí que:

$$\vec{E}_1 = K_e \frac{q_2}{r_{12}^2} \vec{\mu}_{q2 \rightarrow 1} \quad (\text{ec 3.4.2})$$

donde q_2 es la carga que crea el campo \vec{E}_1

Es muy lógico pensar, que q_2 no será la única carga existente fuera de q_1 . De hecho podrían existir “ n ” cargas eléctricas que no son q_1 , pero que crean un campo eléctrico que puede afectar a q_1 , o en caso de que q_1 no exista, simplemente un campo que si exista en el punto 1.

Al ser el campo eléctrico un vector (o tensor de 1er orden), las diferentes cantidades vectoriales del campo de las diferentes cargas existentes pueden sumarse tensorialmente entre ellas

$$\vec{E}_1 = K_e \frac{q_2}{r_{12}^2} \vec{\mu}_{q_2 \rightarrow 1} + K_e \frac{q_3}{r_{13}^2} \vec{\mu}_{q_3 \rightarrow 1} + K_e \frac{q_4}{r_{14}^2} \vec{\mu}_{q_4 \rightarrow 1} + \cdots + K_e \frac{q_n}{r_{1n}^2} \vec{\mu}_{q_n \rightarrow 1} \quad (\text{ec 3.4.3})$$

$$\vec{E}_1 = \sum_{i=2}^n K_e \frac{q_i}{r_{1i}^2} \vec{\mu}_{q_i \rightarrow 1} \quad (\text{ec 3.4.4})$$

donde en la última ecuación la carga q_1 no existe y si existiera sería la que experimentaría la fuerza eléctrica debido al campo \vec{E}_1 causado por todas las demás cargas.

En medios continuos donde la cantidad de partículas cargadas “ n ” tiende a infinito, se utilizarán las definiciones de carga puntual del medio dq tratadas en la sección 3.2 de este texto, con lo cual podríamos escribir para el efecto de una sola de las cargas puntuales del medio continuo, que su campo eléctrico en un punto específico M puede ser expresado como:

$$d\vec{E}_M = K_e \frac{dq}{r_{M-dq}^2} \vec{\mu}_{dq \rightarrow M} \quad (\text{ec 3.4.5})$$

y la totalidad del campo eléctrico experimentado en el punto M debido a todas las cargas puntuales dq del medio, estarían dadas por la integral de la anterior ecuación en todo el medio, siempre y cuando la misma sea posible y existente.

$$\vec{E}_M = \int K_e \frac{dq}{r_{M-dq}^2} \vec{\mu}_{dq \rightarrow M} \quad (\text{ec 3.4.6})$$

Debido a las diferentes configuraciones que se pueden tener, y de acuerdo a lo visto en la sección 3.2 de distribuciones de carga, podemos ver lo siguiente:

Si la configuración que causa el campo usa una densidad lineal de carga

$$\vec{E}_M = \int K_e \frac{\lambda dl}{r_{M-dq}^2} \vec{\mu}_{dq \rightarrow M} \quad (\text{ec 3.4.7})$$

Si la configuración usa una densidad superficial de carga

$$\vec{E}_M = \iint K_e \frac{\sigma dS}{r_{M-dq}^2} \vec{\mu}_{dq \rightarrow M} \quad (\text{ec 3.4.8})$$

Si la configuración usa una densidad volumétrica de carga

$$\vec{E}_M = \iiint K_e \frac{\rho dV}{r_{M-dq}^2} \vec{\mu}_{dq \rightarrow M} \quad (\text{ec 3.4.9})$$

NOTA: Verifique siempre la existencia físico-matemática de las soluciones de las anteriores ecuaciones. La existencia matemática de una solución a una ecuación como las anteriores, no necesariamente denota una solución física; de hecho muchas veces los estudiantes encuentran soluciones matemáticas directas con software, sin la necesidad de buscar una solución física. Algunos de los errores más comunes se encuentran en la posibilidad o no que se tenga de integrar sobre el tensor $\vec{\mu}_{dq \rightarrow M}$, por lo cual habrá de ser cuidadoso en analizar esto antes de realizar las integrales. Otros posibles errores aparecen cuando se tienen integrales iteradas, en los cuales al menos dos de las coordenadas estarán relacionadas, y será necesario seguir algún orden de precedencia en la integración; esto dependerá de la definición específica que se tenga para el dq en cada problema de medios continuos.

3.5. Fuerzas eléctricas con cargas continuas

La Ley de Coulomb es aplicable a cargas puntuales, sin embargo puede ser extendida su aplicación a cargas continuas pensando en la ecuación (ec 3.4.6), que nos da el campo eléctrico debido a una carga distribuida continua. De aquí, aplicando (ec. 3.4.1.) podría calcularse la fuerza eléctrica debido a una carga continua.

3.5.1. Fuerzas eléctricas debido a cargas continuas

Una vez se conoce el cálculo del campo eléctrico debido a cualquier carga continua, puede calcularse también la fuerza que produciría esa carga sobre una carga puntual q_1

$$\vec{F}_{q_1} = q_1 \vec{E}_1 = \int K_e q_1 \frac{dq}{r_{q_1-dq}^2} \vec{\mu}_{dq \rightarrow q_1} \quad (\text{ec 3.5.1.1})$$

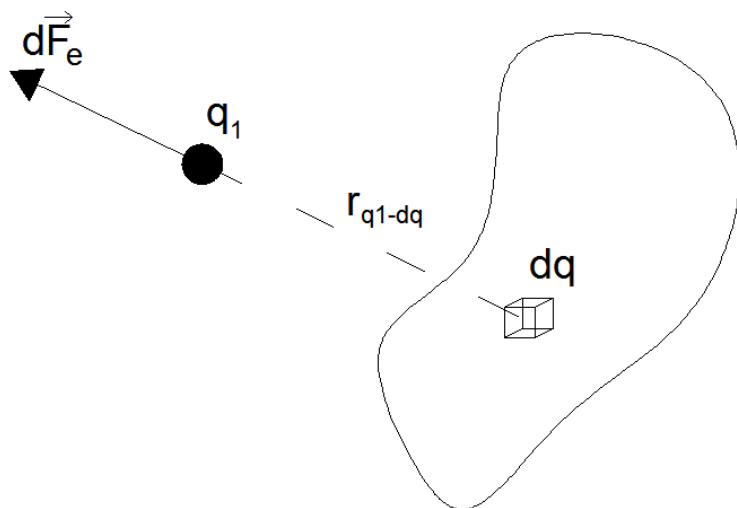


Fig. 3.4.1.1. Representación de un diferencial de fuerza eléctrica causada por un dq de una carga de cuerpo distribuido, sobre una carga puntual q_1 .

Debido a las diferentes configuraciones que se pueden tener, y de acuerdo a lo visto en la sección 3.2 de distribuciones de carga, podemos ver lo siguiente:

Si la configuración usa una densidad lineal de carga

$$\vec{F}_{q1} = \int K_e q_1 \frac{\lambda dl}{r_{q1-dq}^2} \vec{\mu}_{dq \rightarrow q1} \quad (\text{ec 3.5.1.2})$$

Si la configuración usa una densidad superficial de carga

$$\vec{F}_{q1} = \iint K_e q_1 \frac{\sigma dS}{r_{q1-dq}^2} \vec{\mu}_{dq \rightarrow q1} \quad (\text{ec 3.5.1.3})$$

Si la configuración usa una densidad volumétrica de carga

$$\vec{F}_{q1} = \iiint K_e q_1 \frac{\rho dV}{r_{q1-dq}^2} \vec{\mu}_{dq \rightarrow q1} \quad (\text{ec 3.5.1.4})$$

3.5.2. Fuerzas eléctricas sobre cargas continuas

Si se logra modelar una función vectorial de campo eléctrico \vec{E}_1 debido a cualquier carga puntual o continua, que sea válida en todo el espacio que ocupa una carga continua Q_1 (no puntual) que es afectada por este campo; puede calcularse también la fuerza que se produciría sobre esa carga continua Q_1 debido al campo que la afecta.

$$\vec{F}_{Q1} = Q_1 \vec{E}_1 = \int dQ_1 \vec{E}_1 \quad (\text{ec 3.5.2.1})$$

De esta forma si el campo afecta cargas lineales:

$$\vec{F}_{Q1} = \int \lambda dl_{Q1} \vec{E}_1 \quad (\text{ec 3.5.2.2})$$

Cargas de superficie:

$$\vec{F}_{Q1} = \iint \sigma dS_{Q1} \vec{E}_1 \quad (\text{ec 3.5.2.3})$$

O cargas de volumen:

$$\vec{F}_{Q1} = \iiint \rho dV_{Q1} \vec{E}_1 \quad (\text{ec 3.5.2.4})$$

3.6. La Ley de Gauss y la I^{era} Ecuación de Maxwell

Como se vio en la sección 2.6.2, si se tiene un campo vectorial, y se desea conocer que tanto de ese campo “fluye” a través de una superficie o área, es necesario conocer la dirección preferencial de campo que “choca” contra la superficie de forma perpendicular. Todo componente de campo que este alineado en esta dirección tendrá la capacidad de “fluir” a través de la superficie (si la superficie es una superficie de flujo y así lo permite, de lo contrario simplemente chocará con la superficie). Como ya se ha visto, las “direcciones” vectoriales de las superficies son definidas de forma perpendicular a las componentes lineales que forman la superficie (ej. Las superficies xy están en dirección z). No importando el ángulo de choque del campo con la superficie, Gauss explica como una fuente de campo encerrada en una superficie (donde la superficie debe encerrar totalmente a la fuente), siempre dará un modelo de flujo total a través de la superficie que la encierra que será único y directamente proporcional a la intensidad de la fuente de campo.

Si se desea el flujo total de campo que causa por ejemplo un elemento diferencial de carga dq sobre la superficie mostrada en la figura 3.6.1, el mismo podría ser modelado por:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint E dS \cos \alpha = \oiint \frac{K_e dq}{R^2} dS \cos \alpha \quad (\text{ec 3.6.1})$$

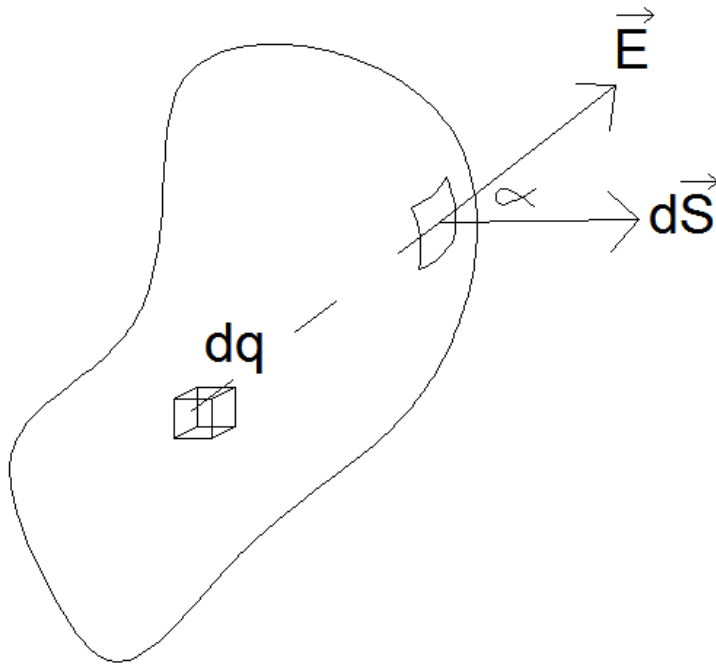


Fig 3.6.1. Superficie irregular que encierra una carga dq

Donde el ángulo α será una función variante con el punto de superficie donde se encuentre.

Utilizando para la anterior ecuación la definición de ángulo sólido, a forma de reducir la expresión de (ec.3.6.1) en función del ángulo sólido Ω de salida desde la fuente generadora de campo dq , podemos definir y reescribir:

$$\cos \alpha dS = R^2 d\Omega \quad (\text{ec 3.6.2})$$

Con lo que puedo reducir la ec 3.6.1:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint (K_e dq) d\Omega \quad (\text{ec 3.6.3})$$

Siendo que la anterior ecuación queda convertida en la integral total del ángulo sólido de una superficie cerrada, el cual tiene por resultado 4π , se puede obtener fácilmente un único resultado para la (ec 3.6.3)

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = K_e dq 4\pi \quad (\text{ec 3.6.4})$$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{dq}{\epsilon} \quad (\text{ec 3.6.5})$$

NOTA: Nótese que el anterior resultado es independiente de la forma de la superficie, y será el único posible. Si la superficie fuese por ejemplo esférica, y dq se ubicara en el centro de la misma, se vería que el ángulo α tendría en todo punto valor de cero (0), con lo que (ec 3.6.2) se convertiría en:

$$dS = R^2 d\Omega \quad (\text{ec 3.6.6})$$

En este caso es fácil verificar que la solución matemática para el flujo producido por dq , utilizando el dS esférico sobre toda la superficie de flujo conducirá al mismo resultado general ya obtenido en (ec 3.6.5)

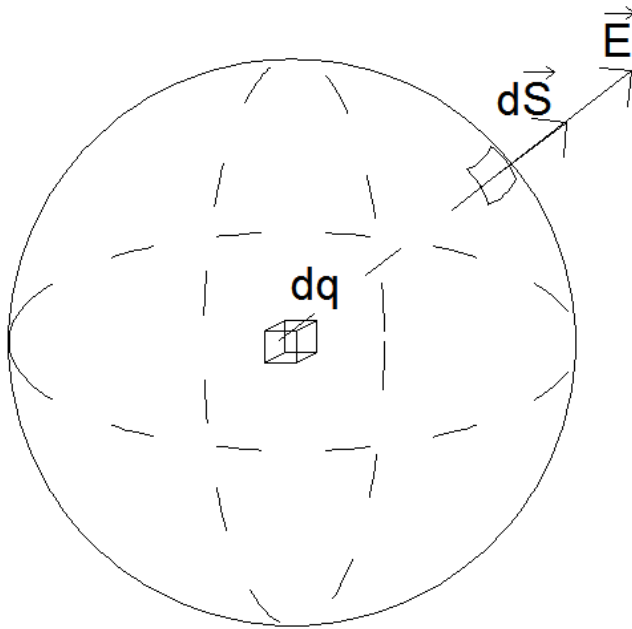


Fig 3.6.2. Superficie esférica que encierra una carga dq en su centro.

Como el resultado dado por (ec 3.6.5) es general para cualquier dq indistintamente de su posición dentro de la superficie que lo encierra o intensidad, el mismo es integrable, es decir, no importa que tan expandido esta dq dentro de la superficie que lo encierra. En otras palabras, no importa que tantas cargas existan dentro de la superficie cerrada de flujo, siempre se cumplirá que:

“El flujo total del campo eléctrico que sale de una fuente electrostática y fluye en una superficie cerrada, será igual a la suma total de las cargas electrostáticas encerradas por la superficie dividido entre la permitividad eléctrica ϵ del material de donde fluye el campo”. (Ley de Gauss)

De esta forma, dq puede tomar cualesquiera de las formas ya plenamente definidas en esta literatura, y ser integrado a cualesquiera de los límites que estén dentro del espacio euclídeo de la superficie cerrada de flujo Gaussiano.

Son formas de la Ley de Gauss las siguientes ecuaciones, donde se incluyen integrales de dq :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\int \lambda dl}{\epsilon} \quad (\text{ec 3.6.7})$$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\iint \sigma dS}{\epsilon} \quad (\text{ec 3.6.8})$$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\iiint \rho dV}{\epsilon} \quad (\text{ec 3.6.9})$$

Siendo ésta última el modelo físico-matemático más general al incluir una distribución volumétrica de cargas encerradas por la superficie gaussiana.

3.6.1. I^{era} Ecuación de Maxwell

La I^{era} ecuación de Maxwell es una adecuación que ha hecho James Clerk Maxwell a la ecuación que modela la Ley de Gauss, cuando realizó su trabajo de reunir las ecuaciones eléctricas y magnéticas para unificar el concepto de campos eléctricos y magnéticos bajo una sola teoría de campo “electromagnético”. Con el fin de facilitar el trabajo de identificación y relación de cada una de las ecuaciones de Maxwell, lo cual se realizará en capítulos posteriores de esta literatura, iremos identificando a medida que sea posible a cada una de las ecuaciones y de donde emanan las mismas, para luego recapitular en ellas y formar el sistema de ecuaciones de Maxwell.

Para escribir esta I^{era} ecuación (que de hecho originalmente se conoce que fueron unas 20 y luego de reducciones, trabajo matemático y experimental quedaron siendo 4), Maxwell introduce el concepto de vector “desplazamiento eléctrico” \vec{D} , también llamado “densidad de flujo eléctrico”, que en medios lineales, homogéneos e isotrópicos puede ser expresado como:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{ec 3.6.1.1})$$

De esta forma puede reescribir la Ley de Gauss general dada por (ec 3.6.9) a la forma integral de su Iera ecuación:

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint \rho dV \quad (\text{ec 3.6.1.2})$$

NOTA: Los objetivos de esta primera ecuación se vuelven más claros cuando se entiende que se puede manejar una matemática tensorial más sencilla eliminando la posibilidad de tener diferentes permitividades eléctricas en la región de flujo de un campo eléctrico, por lo tanto utilizando un vector matemático puro como lo es \vec{D} en lugar de uno físico-matemático como lo es \vec{E} . Ambos, en los casos más complejos estarán relacionados por un tensor de 2do orden ϵ_{ik} , pero en una gran parte de los casos de aplicación, el modelo es suficientemente aproximado considerando a ϵ como una cantidad funcional.

3.6.1.1. I^{era} Ecuación de Maxwell en forma diferencial (puntual)

Para encontrar un modelo de la forma más general (y resumida) posible, se trata siempre de buscar uno que aplique a un elemento diferencial. Aplicando el teorema de la divergencia sobre el vector \vec{D} , según lo que ya se había planteado en (ec 2.7.3.1), puede encontrarse que:

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint (\nabla \cdot \vec{D}) dV \quad (\text{ec 2.7.3.1})$$

La comparación de la anterior ecuación del teorema de la divergencia en función de \vec{D} con la ecuación (ec 3.6.1.2), hace evidente que:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{ec 3.6.1.1.1})$$

La anterior ecuación se conoce como la forma puntual o diferencial de la Iera ecuación de Maxwell.

4. Potencial Eléctrico y Energía Eléctrica

4.1 Introducción a los conceptos de energía

Los conceptos de potencial y energía están muy fuertemente relacionados. De por sí, ya el concepto de “energía” a pesar de ser utilizado comúnmente, se vuelve en muchas ocasiones muy amplio (o muy escaso) para lo que muchas veces intenta describir. En las ciencias físicas, la energía es un concepto que está relacionado a la capacidad de un sistema físico de generar una transformación, poner algo en movimiento, o simplemente afectar el “nivel energético” de otro sistema físico. Por otro lado, estos “niveles energéticos” se denominan “potenciales”, que no son nada más que magnitudes escalares relacionadas a la energía existente en un sistema. Básicamente, bajo el concepto de “energía” se erigen todos los posibles modelos de interacción entre los sistemas físicos, desde las simples afectaciones de sus “potenciales energéticos”, las transformaciones relacionadas a los cambios energéticos y hasta las acciones de las fuerzas físicas ligadas a movimientos, las cuales están ligadas a los campos de estas fuerzas, que se construyen sobre la teoría de la existencia de una “energía” que sustenta la existencia de estos campos.

4.2 El potencial eléctrico

El potencial eléctrico como se ha indicado no es más que un modelo bajo el cual se deja saber a partir de un *nivel de energía potencial de referencia*, en qué punto de un sistema se podría tener una mayor o menor energía. Realmente, cuando se habla de esto, se está hablando de una *“diferencia de energía potencial”*, pues siempre se tiene una *“referencia”* del nivel energético que tendría una carga en el *“punto de referencia”*, y con respecto a este, se indican las *“diferencias de energía potencial”* que podría tener la carga en otros puntos. Se llama *“potencial”* por el simple hecho de que realmente lo que se tiene es el punto (o espacio), pero no necesariamente la carga. Similar a la relación que indicamos entre las Fuerzas físicas y los Campos, la existencia de una Fuerza implica un *“elemento”* (alguna materia) sobre la cual se ejecute esa fuerza, mientras que el campo puede existir sin que exista dicho elemento, que en nuestro caso sería una carga. En temas de energía eléctrica, para que exista un sistema energético definido, tiene que existir tanto el campo eléctrico como la carga sobre la cual actúa el campo, y de hecho podríamos calcular la cantidad de energía eléctrica que tiene ese sistema si podemos calcular la cantidad de trabajo que cuesta construirlo (o destruirlo). Pero el hecho de que no tengamos una carga, no significa que no tendremos posibilidad de energía en ese punto; de hecho, en el momento que aparezca allí una carga, tendremos energía, y por ello se llama *“potencial”*. Muchos autores han preferido utilizar el término *“voltaje”*, para hacer una distinción idiomática más clara y directa entre esta entidad y la *“energía eléctrica”* en sí.

De acuerdo a esto, una relación sencilla entre la *“diferencia de potencial”* o *“voltaje”* y la *“energía”* de un sistema eléctrico, viene dada por la carga (o cargas) que conforman este sistema eléctrico, de la siguiente forma:

$$W_e = qV_{ab} \quad (\text{ec 4.2.1})$$

Donde W_e es la energía del sistema (el cambio energético), q es la carga y V_{ab} es la diferencia de potencial entre dos puntos a y b entre los cuales se mueve la carga q para construir o destruir el sistema, o simplemente cambiar su “estado energético”.

Como ya se indicó, físicamente la energía (o el cambio energético) puede estimarse de acuerdo al trabajo que cuesta mover la carga para “construir” o “destruir” el sistema (es decir, acercándose entre ellas o alejándose hacia el infinito), y el estudiante ya ha de conocer que el trabajo es calculado con la fuerza y la distancia recorrida por esa fuerza, por tanto la energía eléctrica no sería nada más que la circulación de la fuerza que “construye” o “destruye” el sistema (negativa a la fuerza eléctrica que experimenta la carga ante el campo eléctrico) en la región en la cual el sistema tiende a ser “construido” o “destruido”.

De acuerdo a esto y a lo que se ve gráficamente en la figura 4.2.1, para calcular el cambio energético en un sistema electrostático, con una carga en presencia de un campo, se requiere una energía calculada por:

$$W_e = \int_a^b -\vec{F}_e \cdot d\vec{l} \quad (\text{ec 4.2.2})$$

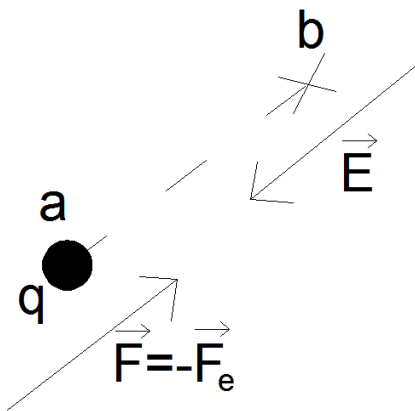


Fig 4.2.1. Representación del cambio energético de un sistema electrostático con una carga q que se mueve de un punto a a un punto b en presencia de un campo eléctrico.

Donde de acuerdo a las secciones 3.4 y 3.5 de esta literatura:

$$W_e = -q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{ec 4.2.3})$$

Haciendo un llamado a la ecuación físicamente definida en (ec 4.2.1), puede verse que la diferencia de potencial o voltaje queda intrínsecamente definido por:

$$V_{ab} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{ec 4.2.4})$$

Siendo la anterior una ecuación integral para definir la diferencia de potencial.

4.2.1. Forma puntual de la ecuación de potencial

Se puede pensar en una forma diferencial (o puntual) de la ecuación (ec 4.2.4), a la que se puede llegar fácilmente recordando que V_{ab} es una función escalar, por lo tanto haciendo uso de la Propiedad del Gradiente, explicada en la sección 2.7.1 de ésta literatura, se puede obtener directamente que:

$$- \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_b - V_a \quad (\text{ec 4.2.1.1})$$

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (\text{ec 4.2.1.2})$$

4.2.2. El potencial evaluado en un punto con diferentes tipos de carga

Como se puede apreciar de la (ec. 4.2.4), podría obtenerse una solución analítica para el potencial evaluado en un punto a partir de un elemento diferencial de la función de diferencia de potencial.

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{ec 4.2.2.1})$$

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{ec 4.2.2.2})$$

O si se desea, simplemente haciendo indefinida la integral y reemplazando en la función integrada el punto donde se desea el potencial. Aplicando la definición ya aprendida para el campo eléctrico de una carga dq , se podría determinar el potencial eléctrico creado por esa carga en un punto M a partir de dq como:

$$V_M = -\int \frac{K_e dq}{r_{M-dq}^2} \vec{\mu}_{r(dq-M)} \cdot d\vec{l} \quad (\text{ec 4.2.2.3})$$

Donde al estar el camino $d\vec{l}$ multiplicado en producto punto con un vector unitario $\vec{\mu}_{r(dq-M)}$ en la dirección del radio de alejamiento, pues la única componente válida que tendrá efecto en la multiplicación escalar, será la componente de $d\vec{l}$ que esta también en la dirección de r_{M-dq} , por tanto lo podemos reemplazar por un $d\vec{r}_{M-dq}$.

$$V_M = -\int \frac{K_e dq}{r_{M-dq}^2} dr_{M-dq} \quad (\text{ec 4.2.2.4})$$

Como el elemento diferencial dq puede ser considerado puntual, puede extraerse de la integral junto a K_e , quedando como resultado que el potencial evaluado en el punto M debido a dq , sea:

$$V_M = \frac{K_e dq}{r_{M-dq}} \quad (\text{ec 4.2.2.5})$$

Para el caso de n cargas puntuales causando un potencial en un punto M :

$$V_M = \sum_{i=1}^n \frac{K_e q_i}{r_{M-qi}} \quad (\text{ec 4.2.2.6})$$

Para el caso de carga continua lineal causando un potencial en un punto M:

$$V_M = \int \frac{K_e \lambda dl}{r_{M-dl}} \quad (\text{ec 4.2.2.7})$$

Para el caso de carga continua de superficie causando un potencial en un punto M:

$$V_M = \iint \frac{K_e \sigma dS}{r_{M-dS}} \quad (\text{ec 4.2.2.8})$$

Para el caso de carga continua volumétrica causando un potencial en un punto M:

$$V_M = \iiint \frac{K_e \rho dV}{r_{M-dV}} \quad (\text{ec 4.2.2.9})$$

4.2.3. Diferencia de potencial entre dos puntos causado por cualesquiera tipos de carga

Como se aprecia de las ecuaciones (ec 4.2.4) y (ec 4.2.2.2), la única diferencia entre el potencial en un punto y la diferencia de potenciales es la resta de la función de potencial en un punto evaluada entre los dos puntos entre los que se desea la diferencia de potencial; por lo tanto, si se tiene la evaluación del potencial causado por cualquier tipo de carga en dos puntos distintos, y se restan estos valores, se tendrá la diferencia de potencial entre esos puntos. El caso más complejo es el de carga continua volumétrica, pero funciona de igual manera para todas las otras cargas.

$$V_{ab} = V_b - V_a = \iiint \frac{K_e \rho dV}{r_{b-dV}} - \iiint \frac{K_e \rho dV}{r_{a-dV}} \quad (\text{ec 4.2.3.1})$$

4.3. Circulación de un campo eléctrico en un camino cerrado y la II^{da} Ecuación de Maxwell

Como se puede apreciar en las secciones anteriores, ante la presencia de una carga electrostática el valor del potencial en un punto es invariable, así como también lo será la diferencia de potencial entre dos puntos. De acuerdo a esto, ahora planteamos la posibilidad de calcular una diferencia de potencial a través de un camino cerrado, es decir una circulación del campo eléctrico que parte de un punto y termina en el mismo punto.

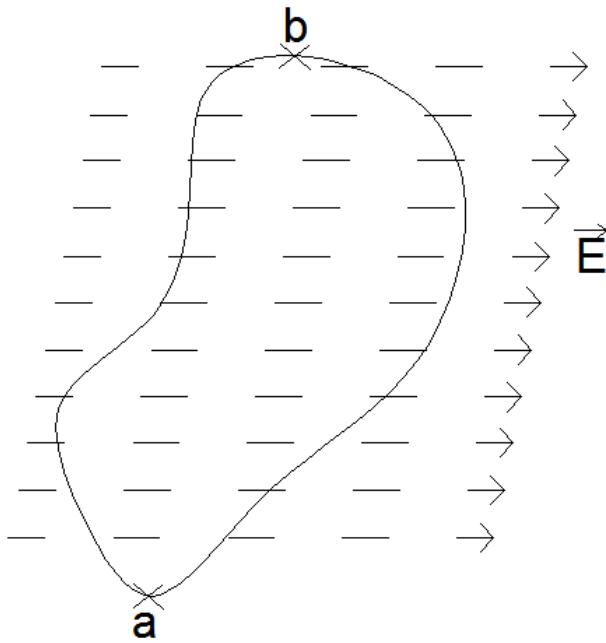


Fig. 4.3.1. Esquema representativo de camino cerrado recorrido en medio de un campo eléctrico

Como se observa de la figura 4.3.1, puede referirse el problema a la solución de dos diferencias de potencial electrostático V_{ab} y V_{ba}

$$V_{aa} = V_{ab} + V_{ba} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{ec 4.3.1})$$

Como es una integral de camino cerrado:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{ec 4.3.2})$$

La anterior ecuación es la representación en forma integral de la IIda ecuación de Maxwell cuando solo intervienen campos electrostáticos.

Como se vio en la sección 2.7.1.1. de esta literatura, puede asegurarse que el campo eléctrico electrostático será conservativo. A partir de lo explicado en la sección 2.7.2. se ve que la ecuación (ec 4.3.2.) puede ser reducida a una forma puntual usando el teorema del rotacional:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iiint \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (\text{ec 4.3.3})$$

de donde solo hay posible solución si:

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{ec 4.3.4})$$

La ecuación anterior tiene el mismo significado de la ecuación (ec 4.3.2), pero ésta última es la forma puntual o diferencial.

Cuando los campos no son electrostáticos, las ecuaciones anteriores son sometidas a correcciones que vienen por el hecho de tener variaciones con respecto al tiempo. Dichas condiciones y los cambios que provocan serán discutidos en secciones posteriores de esta literatura, cuando se hable de temas de electrodinámica.

4.4. Energía electrostática

Al inicio de éste capítulo, ya se han discutido los conceptos de energía de una forma bastante general. En este momento nos interesa saber cómo calcular la energía electrostática de un sistema, de una forma que satisfaga las condiciones físico-matemáticas establecidas por las ecuaciones de campos y de diferencia de potencial.

Se reconoce que la energía requerida para el adicionamiento de una carga q traída desde el infinito hasta una posición respecto de un sistema electrostático X , será dada según las ecuaciones (ec 4.2.3), (ec 4.2.1.1) y (ec 4.2.3.1) que reescribimos aquí:

$$W_e = -q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{ec 4.2.3})$$

$$-\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_b - V_a \quad (\text{ec 4.2.1.1})$$

$$V_{ab} = V_b - V_a = \iiint \frac{K_e \rho dV}{r_{b-dV}} - \iiint \frac{K_e \rho dV}{r_{a-dV}} \quad (\text{ec 4.2.3.1})$$

Considerando, como ya se indicó, que el punto inicial a con respecto al cual se calcula el cambio energético en esta carga q , sea un punto muy lejano (infinito), con lo cual el término $\iiint \frac{K_e \rho dV}{r_{a-dV}}$

de (ec 4.2.3.1) se vuelve nulo:

$$V_q = V_b - V_\infty = \iiint \frac{K_e \rho dV}{r_{b-dV}} \quad (\text{ec 4.4.1})$$

Y tomando por simplicidad un sistema electrostático creador inicial (el responsable del campo \vec{E}) puntual, ya sea que se considere muy pequeño o muy lejano con respecto a la q adicionada, con lo que $\rho dV = dq$, como se aprecia en la figura 4.4.1, se tiene:

$$V_q = \frac{K_e \int dq}{r_{q-dq}} = \frac{K_e Q}{r_{q-Q}} \quad (\text{ec 4.4.2})$$

se puede ver que la adición de esta carga q al presente sistema electrostático conformado por una carga ya existente $\rho dV = dq$, incrementará la energía electrostática del sistema a medida que q se acerca al sistema para adicionarse, ya que su potencial puntual V_q aumenta.

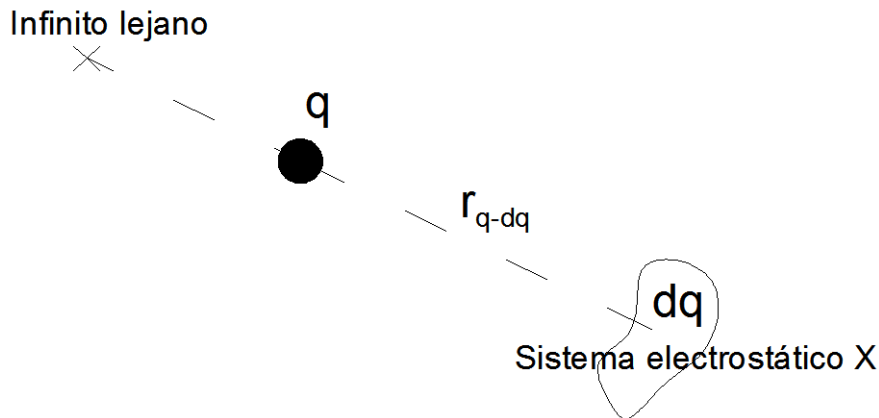


Fig 4.4.1. Representación del sistema electrostático con las cargas q y dq

Dependiendo de la distancia r_{q-dq} , a la cual logre acercarse q a dq , puede verse que si se tienen las condiciones para considerar a $\int dq = Q$ como una carga puntual, el trabajo realizado y por tanto la energía electrostática de este sistema estará dada por:

$$W_q = qV_{q(Q)} = q \frac{K_e \int dq}{r_{q-dq}} = \frac{K_e qQ}{r_{q-Q}} \quad (\text{ec 4.4.3})$$

NOTA: Nótese que si en el sistema no existen cargas previas a q , o sea si $\rho = 0$ ó $dq = 0$ (siendo ρ utilizado aquí para denotar cualquier conglomerado de cargas dentro de un volumen ya sean cargas puntuales o cargas continuas que existan previas a q en el sistema electrostático X), el cambio energético de q traída desde el infinito será nulo, debido a que la ecuación (ec 4.2.1.1) será nula.

Si quisiera traer el sistema electrostático X conformado por la carga Q (considerada puntual), hacia la carga q ; por conservación de la energía conozco que me costaría exactamente el mismo trabajo, por lo cual el cambio energético de Q al acercarse a q debe ser el mismo que el que se ha calculado para q acercándose a Q . La única diferencia sería que el cambio energético estaría reflejado sobre Q en lugar q .

$$W_Q = QV_{Q(q)} = Q \frac{K_e q}{r_{q-Q}} = \frac{K_e q Q}{r_{q-Q}} \quad (\text{ec 4.4.4})$$

En todos los casos, la energía total del sistema debe ser una sola, y debe considerar el efecto de formación del sistema a partir de su inexistencia. Como ya ha notado el estudiante, la adición de la primera carga no implica un cambio ni transformación energética debido a la inexistencia de un campo electrostático previo, por tanto la energía de formación del sistema de acuerdo a su análisis adicionando Q inicial y luego q , nos da que la energía del sistema es:

$$W_{\text{sistema}-Qi} = W_Q + W_q = 0 + qV_{q(Q)} = 0 + \frac{K_e q Q}{r_{q-Q}} \quad (\text{ec 4.4.5})$$

Y si se realiza el análisis agregando primero q inicial y luego Q , nos resulta:

$$W_{\text{sistema}-qi} = W_q + W_Q = 0 + QV_{Q(q)} = 0 + \frac{K_e q Q}{r_{q-Q}} \quad (\text{ec 4.4.6})$$

Una inspección de ambos modelos anteriores es suficiente para corroborar que aunque los cambios energéticos sean reflejados solamente sobre la carga que estamos “moviendo”, ambos cambios son iguales independientemente del valor de las cargas de cada uno y al mismo tiempo ambos reflejan la totalidad de la energía del sistema y tienen igual participación en el cálculo de la misma. De acuerdo a esto, en función de las diferencias de potencial y las cargas que las experimentan, se puede escribir:

$$2W_{sistema} = W_{sistema-Qi} + W_{sistema-qi} = qV_{q(Q)} + QV_{Q(q)} \quad (\text{ec 4.4.7})$$

$$W_{sistema} = \frac{1}{2} (qV_{q(Q)} + QV_{Q(q)}) \quad (\text{ec 4.4.8})$$

Ecuación que luego de una breve inspección de forma matemática puede generalizarse a:

$$W_{sistema} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i \quad (\text{ec 4.4.9})$$

Donde n es el número de cargas existentes en el sistema electrostático y V_i es el voltaje creado en la carga q_i debido a todas las otras cargas que la acompañan en el sistema electrostático.

Para cualquier distribución de cargas no discretas o puntuales, como las cargas distribuidas, puede considerarse un sistema con un número infinito de cargas puntuales en un volumen donde ya $\int dq = \int \rho dV$ no puede considerarse puntual.

Siguiendo la misma secuencia de operación realizada en las anteriores deducciones, se tiene que cada elemento diferencial de carga que compone a $\int \rho dV$ crea un potencial en cada punto del sistema donde existe otro elemento diferencial de carga sometido a este potencial. Aquí se hace sumamente importante el concepto de potencial electrostático en un punto, pues es la forma más fácil para presentar el cálculo de la energía electrostática de un sistema continuo, a partir de una analogía con la ecuación (ec 4.4.9), en un espacio euclídeo donde $n \rightarrow \infty$, delimitado por el

volumen $\int dV$ con una distribución de intensidades de cargas modelada por ρ . De acuerdo a esto puedo decir que cuando hay cargas continuas:

$$W_{sistema} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} dq_i V_i \quad (\text{ec 4.4.10})$$

$$W_{sistema} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (\rho dV_i) V_i \quad (\text{ec 4.4.11})$$

Donde el voltaje puntual en el punto i , denotado por V_i , se convierte en (y debe ser expresado como) una función de voltaje V_M válida de acuerdo al punto o ubicación que se ocupe en el espacio euclídeo o volumen donde existe el sistema de cargas electrostáticas continuas (sección 4.2.2), y la sumatoria infinita de diferenciales de volumen dV_i será la integral completa de las funciones de potencial y distribución de carga en ese volumen. La ecuación para una distribución volumétrica continua queda entonces expresada:

$$W_{sistema-(vol)} = \frac{1}{2} \iiint \rho V_M dV \quad (\text{ec 4.4.12})$$

La ecuación (ec 4.4.12), es de las más generales y utilizadas en el cálculo de la energía de los sistemas electrostáticos, al ser los mismos volumétricos y no puntuales. Análogamente se puede encontrar sin embargo que para un sistema de superficie, la energía electrostática será:

$$W_{sistema-(sup)} = \frac{1}{2} \iint \sigma V_M dS \quad (\text{ec 4.4.13})$$

Y para un sistema de línea, la energía electrostática será:

$$W_{sistema-(lin)} = \frac{1}{2} \int \lambda V_M dl \quad (\text{ec 4.4.14})$$

Tomando la ecuación más general (ec 4.4.12), y recordando que:

$$dV_{encerrado} = d\vec{S} \cdot (-d\vec{l}) \quad (\text{ec 4.4.15})$$

$$V_M = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{ec 4.4.16})$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint \rho dV \quad (\text{ec 3.6.1.2})$$

Considerando que el $d\vec{l}$ de un volumen encerrado en una superficie $d\vec{S}$, será perpendicular y negativo para poder describirlo tensorialmente (entra a la superficie $d\vec{S}$ para poder describir el volumen en lugar de salir de ella), y reemplazando con esta consideración las ecuaciones (ec 4.4.16) y (ec 3.6.1.2) en (ec 4.4.12), nos queda:

$$W_{sistema-(vol)} = \frac{1}{2} \iiint \rho V_M dV_{encerrado} = \frac{1}{2} \iint \vec{D} \cdot d\vec{S} \int -\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{ec 4.4.17})$$

$$W_{sistema-(vol)} = \frac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot d\vec{S} \cdot (-d\vec{l}) = \frac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot dV \quad (\text{ec 4.4.18})$$

$$W_{sistema-(vol)} = \frac{1}{2} \iiint D \cdot E \cdot dV = \frac{1}{2} \iiint \epsilon E^2 dV \quad (\text{ec 4.4.19})$$

Se define la “densidad de energía electrostática” de un sistema como la cantidad o función de cantidad de energía por unidad de volumen:

$$w_e = \frac{dW_{\text{sistema}-(vol)}}{dV} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{D^2}{2\epsilon} \quad (\text{ec 4.4.20})$$

Las ecuaciones (ec 4.4.19) y (ec 4.4.20) son ampliamente utilizadas por su simplicidad y facilidad de operación. Las dos últimas igualaciones de (ec 4.4.20) suponen medios lineales, homogéneos e isotrópicos al incluir una permitividad constante, al igual que la última igualación de (ec 4.4.19).

4.5. El dipolo eléctrico y su momento dipolar

Un dipolo eléctrico son dos cargas eléctricas que cumplen con las siguientes características:

- a. Pueden ser consideradas puntuales
- b. Son de igual magnitud
- c. Tienen signo contrario
- d. Se encuentra que la distancia entre las cargas es relativamente pequeña con respecto a la distancia a que se encuentra entre ellas y un observador (un punto M) donde se perciban los efectos electrostáticos del dipolo como tal.

El potencial percibido en el punto M , de acuerdo a lo visto en la sección 4.2.2. será según se deduce de la figura 4.5.1 con el dipolo en cuestión centrado en su origen sobre el eje z :

$$V_M = V_{M(q)} + V_{M(-q)} = \frac{K_e q}{r_q} - \frac{K_e q}{r_{-q}} = \frac{K_e q(r_{-q} - r_q)}{r_q r_{-q}} \quad (\text{ec 4.5.1})$$

Siendo que se cumplan todas las condiciones (a-d) previamente planteadas, se puede también indicar que:

$$r_{-q} \approx r_q \approx R \quad (\text{ec 4.5.2})$$

Y conociendo que la distancia dipolar (entre las cargas puntuales) es d , se puede escribir de acuerdo a la trigonometría de la figura 4.5.1:

$$r_{-q} - r_q = d \cos \theta \quad (\text{ec 4.5.3})$$

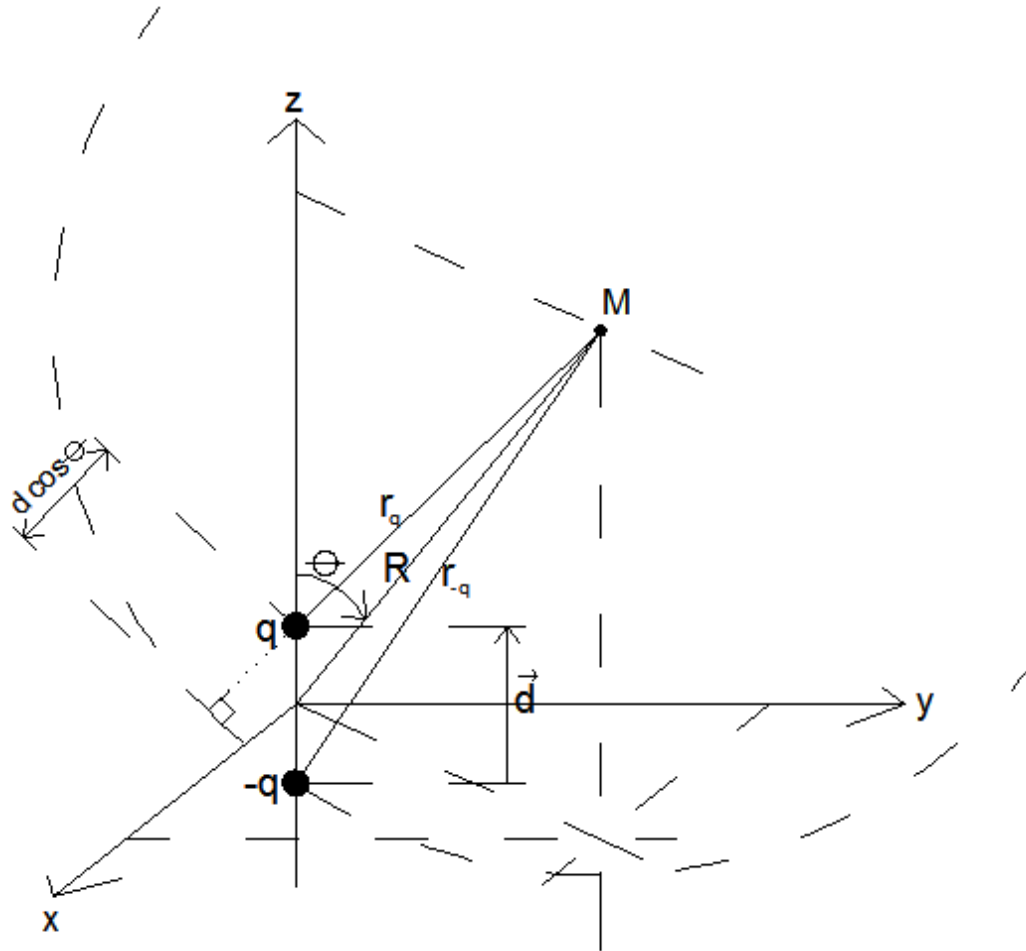


Fig. 4.5.1. Esquemático de un dipolo eléctrico.

En la ecuación anterior, d es la magnitud de un vector \vec{d} de distancia direccionada de la carga $-q$ a q ; en nuestro caso específico:

$$\vec{d} = d\vec{\mu}_z \quad (\text{ec 4.5.4})$$

Reemplazando (ec 4.5.2) y (ec 4.5.3) en (ec 4.5.1):

$$V_M = V_{M(q)} + V_{M(-q)} = \frac{K_e q (d \cos \theta)}{R^2} \quad (\text{ec 4.5.5})$$

Considerando que el valor $q(d \cos \theta)$ siempre puede ser obtenido vectorialmente a partir de la multiplicación escalar de los vectores direccionables \vec{d} que incluye la dirección, sentido y magnitud de la distancia interna (entre cargas) del dipolo y $\vec{\mu}_R$ que mostrará la dirección y sentido del centro del dipolo al punto observador M , cuya magnitud de distancia será R , se puede escribir:

$$V_M = \frac{K_e q \vec{d} \cdot \vec{\mu}_R}{R^2} \quad (\text{ec 4.5.6})$$

En la anterior ecuación, se define al vector $q\vec{d}$ como “*momento dipolar eléctrico*” \vec{p} .

$$\vec{p} = q\vec{d} \quad (\text{ec 4.5.7})$$

$$V_M = \frac{K_e \vec{p} \cdot \vec{\mu}_R}{R^2} \quad (\text{ec 4.5.8})$$

Utilizando la ecuación (ec 4.2.1.2) aplicada a (ec 4.5.5) en coordenadas esféricas, se puede obtener también una valoración del campo eléctrico producido por un dipolo; en este caso:

$$\vec{E} = -\nabla V_M = 2 \frac{K_e q (d \cos \theta)}{R^3} \vec{\mu}_R + \frac{K_e q (d \sin \theta)}{R^3} \vec{\mu}_\theta = \frac{K_e p}{R^3} (2 \cos \theta \vec{\mu}_R + \sin \theta \vec{\mu}_\theta) \quad (\text{ec 4.5.9})$$

Los dipolos y sus momentos cuentan con muchas aplicaciones cuando se tratan materiales eléctricos, pues muchos de ellos forman dipolos atómicos y moleculares que son mucho más fáciles de modelar y caracterizar utilizando las ecuaciones del dipolo que con las ecuaciones generales de potencial y campos eléctricos.

4.6. Introducción a los multipolos eléctricos (tema opcional)

Como ya se ha visto, cuando se tiene una cantidad de material eléctrico con una n cantidad de cargas, puedo utilizar un modelo distribuido de potencial en M dado por

$$V_M = \iiint \frac{K_e \rho dV}{r_{M-dV}} \quad (\text{ec 4.2.2.9})$$

Pero cuando estas cargas tienen ordenamientos específicos en multipolos eléctricos (tetrapolos, octapolos, etc), un análisis similar al dado en la sección anterior, conduce a la obtención de ecuaciones del tipo

$$V_M = V_{M(q1)} + V_{M(q2)} + V_{M(q3)} + V_{M(q4)} = \frac{K_e q}{r_{q1}} + \frac{K_e q}{r_{q2}} + \frac{K_e q}{r_{q3}} + \frac{K_e q}{r_{q4}} \approx \frac{K_e q (f(d, R))}{r_{q1} r_{q2} r_{q3} r_{q4}} \quad (\text{ec 4.6.1})$$

donde el valor de la función $f(d, R)$ depende del arreglo específico del cuadrupolo (en el caso de la ecuación anterior), pues las cargas podrían ser ordenadas de múltiples formas distintas.

Nótese que el orden de magnitud de R en el denominador definitivamente ascenderá al menos a la 3ra potencia, (considerando que alguna parte de $f(d, R)$ elimina siempre una R , como en efecto sucede) lo que es importante para verificar la caracterización del comportamiento de las cargas eléctricas que tienen formaciones multipolares en materiales. Recuerde que una carga monopolar tiene una caracterización de voltaje producido en el punto M que es inversamente proporcional a la primera potencia de R , un dipolo es inversamente proporcional a la segunda potencia de R ; y así sucesivamente, a medida que crece el número de cargas en el multipolo, la caracterización del potencial variará inversamente proporcional a una R elevada a un mayor exponente. Por su parte el campo eléctrico siempre variará de forma inversamente proporcional a una potencia adicional de R respecto al potencial del arreglo multipolar. Generalmente para solucionar esta clase de problemas se utilizan métodos numéricos que resuelven expansiones de

series Taylor para R , y notación de Einstein para simplificar el análisis tensorial de los momentos. Las resultantes dependerán de las características y localización de cargas de cada problema. Al estar este texto dedicado a personas que abordan por primera vez el curso de campos, dejamos a criterio del estudiante (o del docente) una mayor profundización en éstos temas, dependiendo de los requerimientos propios de cada clase.

Autores como García Olmedo, B (Fundamentos de Electromagnetismo, Iniciación al Cálculo Numérico con Electromagnetismo); Zhan, M (Electromagnetic Field Theory; a problem solving approach) y Reitz, J & Milford, F (Foundations of Electromagnetic Theory) cuentan con buenas aplicaciones en sus libros, para quien desee profundizar más en este tema. Si bien es cierto, los modelos multipolares no son tan usuales como los dipolares, pues una gran cantidad de materiales puede ser modelado con mucha precisión usando modelos dipolares; también tienen su importancia para algunas aplicaciones. Para los casos cuadripolares, se llega a la aproximación:

$$V_M = \frac{K_e q (3 \cos^2 \theta - 1)}{4R^3} \quad (\text{ec 4.6.2})$$

5. Introducción a los Materiales Eléctricos

5.1. Descripción breve de los materiales eléctricos

Como ya conoce el lector, el objetivo de esta literatura está mucho más enfocado a la comprensión de los modelos matemáticos que rigen los campos electromagnéticos que a extensas discusiones teóricas acerca de aspectos que son mejor tratados en libros de ciencias de materiales electromagnéticos, física de la materia, o temas relacionados. Sin embargo hemos tenido a bien resumir los aspectos más fundamentales en lo que respecta a las clasificaciones básicas de los materiales desde el punto de vista eléctrico.

5.2. Clasificación básica de materiales eléctricos

De forma muy simplista, los materiales eléctricos se clasifican en base a su capacidad para “conducir la electricidad”, es decir que tan fácil es para los portadores de carga pasar a través del material. Nótese que mientras más alta es la permitividad eléctrica del material, menos intensidad de fuerza eléctrica se requiere para mover la carga en el medio material. Aparte de esto, mientras más ancha sea la “banda de conducción” y/o más chica sea la “banda prohibida” interatómica o intermolecular de los materiales (ref. físico-química), mejores conductores serán en vista de que los electrones libres tendrán un mayor espacio para circular (mayor banda de conducción) y una menor restricción por causa de la “banda prohibida” para escapar de la “banda de valencia”.

De una forma simplista entonces, establecemos una clasificación primaria de materiales eléctricos en:

- a. Conductores: aquellos que tienen propiedades adecuadas para que las cargas eléctricas circulen con libertad en ellos

- b. Aislantes (muchas veces referenciados como dieléctricos): aquellos que no tienen propiedades adecuadas para que las cargas eléctricas circulen con libertad en ellos y por tanto, ofrecen impedimentos a la circulación de las mismas.

5.2.1. Conductores eléctricos

En los buenos **conductores**, las cargas tienden a ubicarse en las superficies externas de los mismos, debido a que una densidad de cargas agregada al material conductor tendrá en efecto la misma polaridad, por tanto cada carga repelerá la adyacente, y al poder circular libre, irá a su frontera de libre circulación que es la superficie del conductor. De acuerdo a esto, el modelado de distribución de carga de los conductores ideales se realiza tomando en consideración distribuciones de carga superficiales, y en base a la Ley de Gauss, el campo electrostático adentro del conductor, en cualquier punto debajo de la superficie del mismo debe ser cero, pues no se encierra ninguna carga. Un tercer resultado de estos eventos físicos, es que al no existir campo electrostático dentro del conductor, las diferencias de potencial son nulas; en base a esto se les llama a los conductores *cuerpos equipotenciales*.

La velocidad a la que se desplazan los portadores de carga en un medio conductor, está íntimamente relacionada con la intensidad de campo eléctrico en el medio y la movilidad electrónica, que es una propiedad intrínseca de cada medio. Lo anterior puede ser expresado como:

$$\vec{v}_d = \mu_e \cdot \vec{E} \quad (\text{ec 5.2.1.1})$$

Donde \vec{v}_d es la velocidad promedio a la que se mueven los portadores de carga, llamada “velocidad de deriva”, μ_e es la movilidad electrónica y \vec{E} es el campo eléctrico que causa el flujo de portadores de carga.

La densidad de portadores de carga dentro del volumen de conducción, se relaciona con la densidad de corriente por medio de esta misma velocidad de deriva, según:

$$\vec{J} = \rho \cdot \vec{v}_d \quad (\text{ec 5.2.1.2})$$

Donde \vec{J} es la densidad de corriente y ρ es la densidad de portadores de carga (nube de portadores de carga).

Reemplazando la ecuación (ec 5.2.1.1) en (ec 5.2.1.2):

$$\vec{J} = \rho \cdot \mu_e \cdot \vec{E} = \sigma_c \cdot \vec{E} \quad (\text{ec 5.2.1.3})$$

Donde la función σ_c recibe el nombre de conductividad eléctrica y como se ve de la ecuación (ec 5.2.1.3) dependerá de la movilidad electrónica, así como de la densidad de portadores de carga. Las relaciones funcionales de ρ y μ_e son difíciles de caracterizar por separado, pero en general su comportamiento puede verse reflejado en σ_c de acuerdo a los efectos obtenidos al saturar de carga a los conductores eléctricos

En la mayor parte de los conductores metálicos se ha observado hasta el momento una variación de σ_c con la temperatura, en la cual a medida que aumenta la temperatura, el valor de σ_c decae. Muchos autores prefieren caracterizar los materiales utilizando su resistividad ρ_c en lugar de su conductividad σ_c , siendo

$$\rho_c = \frac{1}{\sigma_c} \quad (\text{ec 5.2.1.4})$$

con lo cual han obtenido en diferentes metales, relaciones bastante linealizadas del tipo:

$$\rho_c = \rho_{co} \cdot [1 + \alpha \cdot (T - T_o)] \quad (\text{ec 5.2.1.5})$$

Siendo α una constante de “incremento térmico” y ρ_{co} una resistividad experimental de referencia a una temperatura T_o , suposición que es bastante válida cuando los conductores se encuentran bastante descargados, pero se aleja bastante de la realidad cuando los mismos se

encuentran muy llenos de cargas.

El autor de esta literatura, en publicaciones superiores, de carácter investigativo y de postgrado concilia esta situación elevando el nivel funcional de la constante α a carácter de función dependiente de la temperatura, con lo cual:

$$\rho_c = \rho_{co} \cdot \left[1 + \int_{T_0}^T \alpha_{(T)} \cdot dT \right] \quad (\text{ec 5.2.1.6})$$

Por tanto si se desea expresar la resistencia total de un conductor en el camino de corriente:

$$R = \frac{\rho_c \cdot L}{A_p} = \frac{\rho_{co} \cdot L}{A_p} \cdot \left[1 + \int_{T_0}^T \alpha_{(T)} \cdot dT \right] \quad (\text{ec 5.2.1.7})$$

Donde L es la longitud total del conductor y A_p es el área de sección transversal al camino de corriente. Las ecuaciones (ec 5.2.1.6) y (ec 5.2.1.7) conducen a expresiones de modelado que caracterizan los conductores eléctricos homogéneos así como los no homogéneos. Al lector que le interese profundizar más en tema de conductores eléctricos se le recomienda la lectura de publicaciones indexadas del autor de la presente literatura, concernientes a temas de conductores eléctricos sobrecargados.

5.2.2. Dieléctricos

Por su parte los **dieléctricos** tienen muchos modelos distintos dependiendo de sus comportamientos diversos, los cuales pueden ser lineales, isotrópicos, homogéneos, no lineales, anisotrópicos, no homogéneos, etc. En muchos casos, con muchos materiales comunes sólidos líquidos o gaseosos, existen ciertos rangos de operación principalmente vinculados con la temperatura y características geométricas de profundidades mínimas y máximas bandas de material o “películas de material”, para la penetración de campos eléctricos, en las que los dieléctricos pueden ser modelados como lineales, homogéneos e isotrópicos (básicamente

ideales). Para la mayoría de estos materiales puede aproximarse también su caracterización eléctrica considerando que se polarizan ante la presencia de un campo eléctrico, formando dipolos atómicos o moleculares, dando como resultado un momento dipolar eléctrico o intensidad de polarización general del material denotada matemáticamente por \vec{P} , que considera todas las formaciones de momentos dipolares interatómicos \vec{p} dentro del mismo.

Muchos autores ofrecen una ecuación muy simplista al cálculo de \vec{P} , como:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i}{\Delta V} \quad (\text{ec 5.2.2.1})$$

Sin embargo las interacciones dipolares son modeladas como se indicó antes en rangos bastante reducidos como se muestra en esta ecuación. Aparte, algunos materiales tienen interacciones multipolares con caracterizaciones y modelos muy diferentes.

Ante la gran diversidad de casos y materiales existentes, cada uno debe ser tratado separadamente, y verificado por medio de valores experimentales. Los modelos en materiales lineales, homogéneos e isotrópicos desembocan en la creación de un parámetro llamado *susceptibilidad eléctrica*, χ_e , que realmente queda siendo una función de temperatura y otros factores que otorgan algunos rangos aceptables de modelado, y se referencia en base a la permitividad del vacío.

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \quad (\text{ec 5.2.2.2})$$

El efecto final de un campo electrostático **en un dieléctrico** donde se pueda formar un vector de polarización, viene dado por un incremento en la intensidad del vector desplazamiento eléctrico \vec{D} que existiría en condiciones de vacío, por causa de \vec{P} .

$$\vec{D}_{total} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{ec 5.2.2.3})$$

NOTA: Hay dieléctricos que no tienen moléculas polarizables, se les conoce a menudo como “*dieléctricos con moléculas no polares*” y no tienen arreglos de dipolo en sus moléculas. Nótese adicionalmente que cuando no hay polarización en el material, el vector de polarización \vec{P} es nulo. Realmente todos los materiales tienen alguna cantidad de polarización, no así el vacío, y es de notar que cuando \vec{P} es nulo en la ecuación (ec 5.2.2.3), el valor y la definición de \vec{D}_{total} se reducen a la \vec{D} que se definió en la sección 3.6.1, ecuación (ec 3.6.1.1), con $\epsilon = \epsilon_0$. Como las ecuaciones (ec 3.6.1.1) y (ec 5.2.2.3) realmente deben ser equivalentes cuando se esta hablando cualquier otro material diferente al vacío, se encuentra que puede modelarse a todo $\epsilon \neq \epsilon_0$ en función de la *susceptibilidad eléctrica*, χ_e , considerando que:

$$\vec{D}_{total} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi_e \epsilon_0 \vec{E} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \vec{E} \quad (\text{ec 5.2.2.4})$$

Recordando que:

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (\text{ec 3.3.5})$$

Y comparando con:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{ec 3.6.1.1})$$

Es evidente que para cualquier material distinto al vacío:

$$\epsilon_r = (1 + \chi_e) \quad (\text{ec.5.2.2.5})$$

¡Hablemos un poco del concepto de cargas de polarización!

Ya conociendo que en un dieléctrico (polarizable) se obtienen momentos dipolares que producen un efecto de cambio en la intensidad del campo electrostático, siempre que exista uno inicial, muchos autores utilizan un modelo de “cargas de polarización”, que son cargas ligadas a la polarización de las moléculas. Como se puede entrever, los dieléctricos no poseen cargas libres

(al menos no en grandes cantidades, como si las hay en los buenos conductores), pero haciendo una analogía de la Iera ecuación de Maxwell en la cual se considerara al vector \vec{P} , se considera que “alguna carga” tiene que representar la $\nabla \cdot \vec{P}$, así como $\nabla \cdot \vec{D}$ es la carga libre encerrada. De hecho, para “homologar” el modelo de la Iera ecuación de Maxwell adentro de un dieléctrico, se crea entonces este concepto de “carga de polarización”, ρ_{pol} , donde para que sea matemáticamente cónsono a las ecuaciones que ya hemos escrito:

$$\nabla \cdot \vec{P} = -\rho_{pol} \quad (\text{ec.5.2.2.6})$$

Ya que debe cumplirse que:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho + \rho_{pol}}{\epsilon_0} \quad (\text{ec.5.2.2.7})$$

Con la anterior ecuación estoy haciendo cumplir la Ley de Gauss e indicando que el campo \vec{E} existente en el vacío (ϵ_0) se relaciona con ambos tipos de carga, las cargas libres ρ y las cargas de polarización ρ_{pol} . que existan además de las cargas libres, en el material real que encierra en la superficie gaussiana donde se mide el campo. Aunque a algunos matemáticos no les agrade, debe cumplirse también que $\nabla \cdot \vec{D}$ sólo se relacione a la carga libre encerrada (principio de modelado de Maxwell), de forma que:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{ec.5.2.2.8})$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) = \rho + \rho_{pol} = \nabla \cdot \vec{D} - \nabla \cdot \vec{P} \quad (\text{ec.5.2.2.9})$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) + \nabla \cdot \vec{P} = \nabla \cdot \vec{D} \quad (\text{ec.5.2.2.10})$$

$$\nabla \cdot [(\epsilon_0 \vec{E}) + \vec{P}] = \nabla \cdot \vec{D} \quad (\text{ec.5.2.2.11})$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{ec.5.2.2.12})$$

Que es la misma ecuación (ec 5.2.2.3) ya postulada.

En caso contrario, posiblemente un matemático muy purista podría indicar:

$$\nabla \cdot \vec{D}_{total} = \rho + \rho_{pol} , \quad (ec.5.2.2.13)$$

ecuación errada que sale pensando en que si el vector \vec{E} se relaciona a ambos tipos de carga, \vec{D} también debe hacerlo, lo cual no conducirá a ninguna consonancia con las ecuaciones del modelo de Maxwell, sin embargo declarando que:

$$\nabla \cdot \vec{D}_{total} = \rho \quad (ec.5.2.2.14)$$

Donde ρ se refiere solo a las cargas libres, y combinando con la ecuación (ec 5.2.2.3):

$$\nabla \cdot \vec{D}_{total} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) + \nabla \cdot \vec{P} \quad (ec.5.2.2.15)$$

$$\nabla \cdot \vec{D}_{total} - \nabla \cdot \vec{P} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) \quad (ec.5.2.2.16)$$

$$\rho + \rho_{pol} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) \quad (ec.5.2.2.17)$$

$$\frac{\rho + \rho_{pol}}{\epsilon_0} = \nabla \cdot \vec{E} \quad (ec.5.2.2.18)$$

Que es la misma ecuación (ec.5.2.2.7)

NOTA: Se verifica que físicamente \vec{E} tiene relación con todos los tipos de carga $\rho + \rho_{pol}$ y se basa su interpretación en base a la permitividad eléctrica del vacío; \vec{D} (en cualquier material) solamente tiene relación con las cargas libres ρ que existan encerradas en la superficie gaussiana por donde fluye, y \vec{P} que solo existe cuando hay cargas de polarización ρ_{pol} y solo tiene relación con estas últimas.

Nótese también que las siguientes relaciones son equivalentes:

$$\frac{\rho + \rho_{pol}}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon} = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\rho}{\epsilon_0 (1 + \chi_e)} = \nabla \cdot \vec{E} \quad (\text{ec.5.2.2.19})$$

$$\rho = \nabla \cdot \vec{E} \epsilon_0 (1 + \chi_e) = \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E}) = \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \nabla \cdot \vec{D} \quad (\text{ec.5.2.2.20})$$

Las expresiones del potencial electrostático en un dieléctrico hacen extensivo el uso de los conceptos de cargas de polarización. Si quisiéramos calcular el potencial en un dieléctrico con moléculas polarizadas en dipolos, tendríamos que relacionarlo a un vector de polarización \vec{P} dipolar, que escrito en base a las ecuaciones ya observadas para un potencial dipolar macroscópico, combinando (ec 4.5.8) y (ec.5.2.2.1), en un sistema esférico general, nos quedaría:

$$V_M = \iiint \frac{K_e \vec{P} dV \cdot \vec{\mu}_R}{R^2} \quad (\text{ec 5.2.2.21})$$

$$V_M = \iiint K_e \vec{P} \cdot \left(\frac{\vec{\mu}_R}{R^2} \right) dV \quad (\text{ec 5.2.2.22})$$

Considerando que:

$$\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\vec{\mu}_R}{R^2} \quad (\text{ec 5.2.2.23})$$

Y asumiendo también el hecho que una solución general en este caso (infinitud de dipolos en superposición) debe considerar coordenadas relativas en las cuales el sentido positivo del gradiente no necesariamente es el obtenido en la ecuación de un gradiente en coordenadas esféricas, suprimimos el signo (-) de la ecuación anterior y lo dejamos dentro de las funciones:

$$V_M = \iiint K_e \vec{P} \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dV \quad (\text{ec 5.2.2.24})$$

Haciendo uso de la identidad otorgada en la ecuación (ec 2.8.7), para separar la integral:

$$V_M = \iiint K_e \nabla \cdot \left(\frac{\vec{P}}{R} \right) dV - \iiint K_e \frac{1}{R} \nabla \cdot \vec{P} dV \quad (\text{ec 5.2.2.25})$$

Aplicando el teorema de la divergencia al primer término de la ecuación anterior y reordenando el segundo:

$$V_M = \iint K_e \left(\frac{\vec{P}}{R} \right) \cdot d\vec{S} + \iiint K_e \frac{(-\nabla \cdot \vec{P})}{R} dV \quad (\text{ec 5.2.2.26})$$

Reemplazando por la carga de polarización volumétrica ya conocida ρ_{pol} según (ec 5.2.2.6), y llevando el vector unitario de la superficie relativa envolvente $d\vec{S}$ que llamaremos \vec{n}_s adentro de la integral:

$$V_M = \iint K_e \left(\frac{\vec{P} \cdot \vec{n}_s}{R} \right) dS + \iiint K_e \frac{\rho_{pol}}{R} dV \quad (\text{ec 5.2.2.27})$$

Se crea entonces el concepto de densidad superficial de polarización, para que sumada a la componente de la densidad volumétrica interna de polarización en el dieléctrico de moléculas dipolares, nos otorgue la ecuación de potencial. Según ello, la densidad superficial de polarización es:

$$\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n}_s \quad (\text{ec 5.2.2.28})$$

Con lo que el potencial en un dieléctrico con moléculas dipolares queda siendo:

$$V_M = \iint K_e \frac{\sigma_{pol}}{R} dS + \iiint K_e \frac{\rho_{pol}}{R} dV \quad (\text{ec 5.2.2.29})$$

NOTA: la dirección formal de \vec{n}_s en coordenadas esféricas sería la que dejamos en (ec 5.2.2.23), o sea $-\vec{\mu}_R$, siendo la dS de distribución de σ_{pol} , la cara interna de la esfera que serviría de límite al dieléctrico.

5.2.3. Condiciones de frontera entre un conductor y un dieléctrico o el vacío

Ya conociendo las características básicas de los materiales eléctricos, se puede modelar el comportamiento de los campos electrostáticos en sus fronteras utilizando las dos ecuaciones de Maxwell electrostáticas. En muchas aplicaciones se encuentran fronteras entre materiales conductores y dieléctricos, talvés la más común de ellas en número sea la de los conductores eléctricos comerciales revestidos por un aislante, utilizados en todos los sistemas de ingeniería eléctrica, electrónica y sistemas de comunicación.

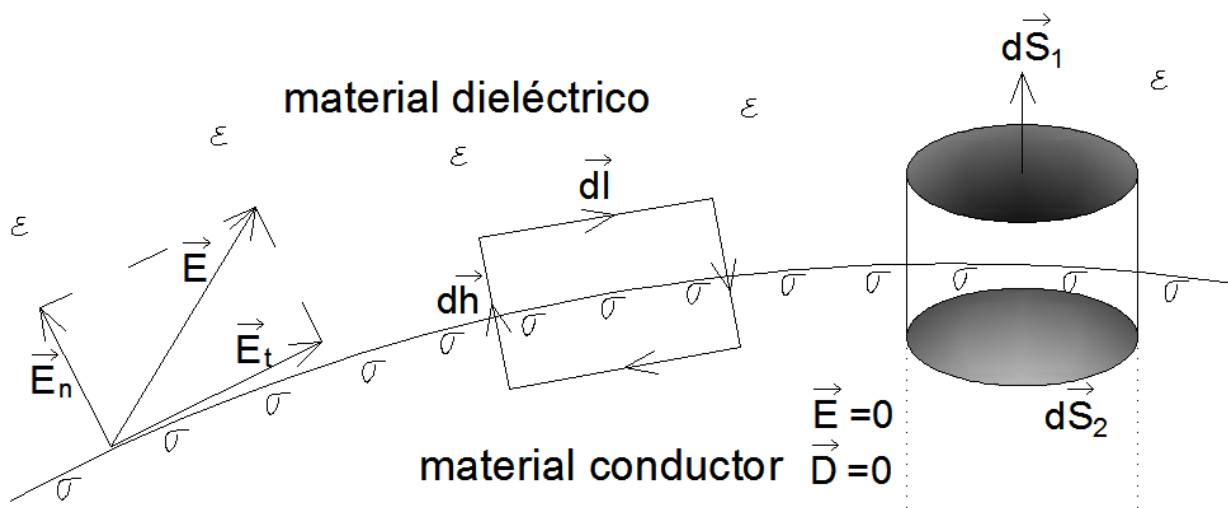


Fig. 5.2.3.1. Representación de las condiciones de frontera entre un conductor y un dieléctrico.

Aplicando la IIda ecuación de Maxwell al camino cerrado de circulación marcado en Fig 5.2.3.1, considerando que no hay campo electrostático en la región del conductor (de hecho ya se ha dibujado en la figura que \vec{E} solo existe en el dieléctrico), y que el elemento diferencial de línea $d\vec{h}$ tiene una parte en conductor y una en dieléctrico (realmente no importa cuánto de este

elemento está en cada material pero consideremos que la mitad esta en cada uno), puede verse que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int \vec{E}_t \cdot d\vec{l} - \int \vec{E}_n \cdot \frac{d\vec{h}}{2} + \int \vec{E}_n \cdot \frac{d\vec{h}}{2} = 0 \quad (\text{ec 5.2.3.1})$$

Que sólo tiene solución viable si:

$$E_t = 0 \quad (\text{ec 5.2.3.2})$$

$$D_t = 0 \quad (\text{ec 5.2.3.3})$$

Las ecuaciones anteriores resumen una de las condiciones de frontera entre un conductor y un dieléctrico (o el vacío). *Solamente existe campo electrostático normal a la superficie del conductor.*

Aplicando la Iera ecuación de Maxwell sobre una superficie cuyo elemento diferencial sea el que está marcado envolviendo el volumen en la Fig 5.2.3.1, puede verse que al no existir campo electrostático en el material conductor, su flujo será solo por la superficie $d\vec{S}_1$ que está del lado del dieléctrico. \vec{E}_n no produce flujo en las paredes con $d\vec{S}_r$ radiales y el flujo total de \vec{E}_t por elemento diferencial cerrado de estas paredes del volumen marcado es cero debido a que ya se vio que el valor de \vec{E}_t es nulo. Finalmente considerando todas estas cosas, y utilizando \vec{D} me queda que:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iint \sigma dS_\sigma \quad (\text{ec 5.2.3.4})$$

$$\vec{D}_n \cdot d\vec{S}_1 + 0 \cdot d\vec{S}_2 + \vec{D}_t \cdot d\vec{S}_t = \sigma dS_\sigma \quad (\text{ec 5.2.3.5})$$

Siendo $d\vec{S}_1 = dS_\sigma$

$$D_n = \sigma \quad (\text{ec 5.2.3.6})$$

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (\text{ec 5.2.3.7})$$

Las ecuaciones anteriores resumen la segunda condición de frontera entre un conductor y un dieléctrico (o el vacío). *El valor del campo normal a la superficie del conductor es directamente proporcional a la carga superficial del conductor.* En el caso del vacío, simplemente $\epsilon = \epsilon_0$.

5.2.4. Condiciones de frontera entre dos dieléctricos

Los dieléctricos no tienen cargas libres en ninguna superficie, pero como se vio en secciones precedentes, sus moléculas (o átomos) se polarizan en presencia de un campo electrostático, y actúan hasta cierto punto produciendo un campo electrostático de polarización que está ligado a estas moléculas polarizadas que en general son llamadas “cargas de polarización”.

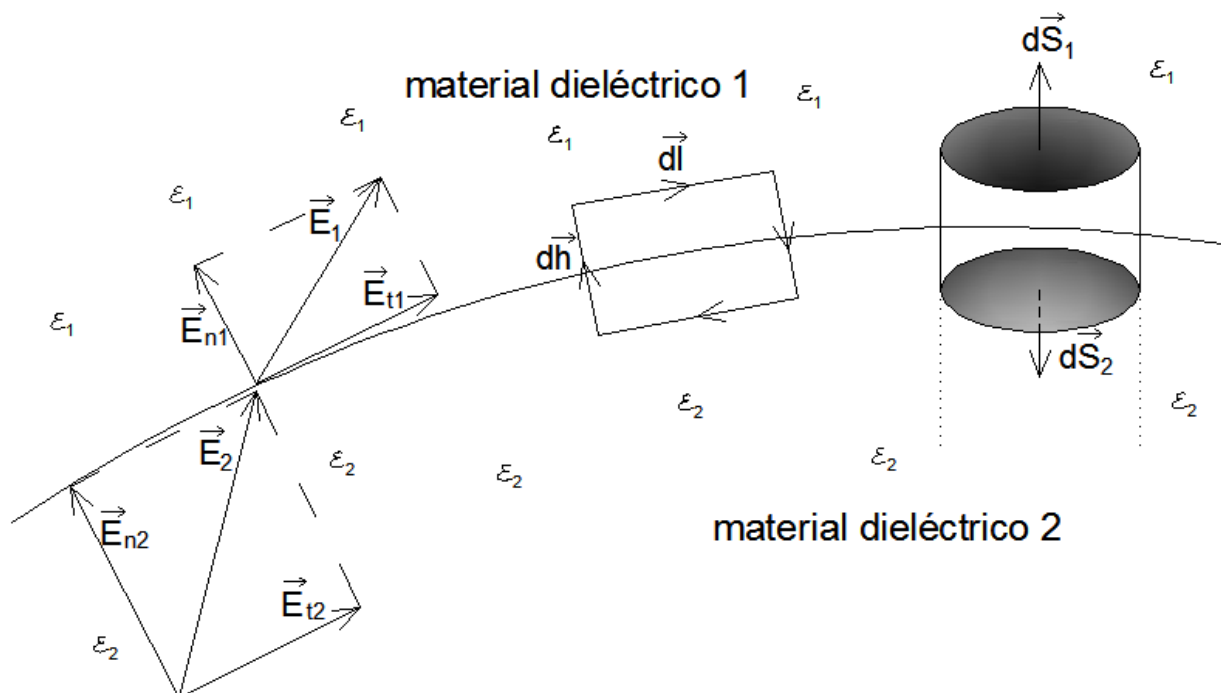


Fig. 5.2.4.1. Representación de las condiciones de frontera entre un conductor y un dieléctrico.

Aplicando la Iida ecuación de Maxwell al camino cerrado de circulación marcado en Fig 5.2.4.1, considerando las condiciones para los dieléctricos en presencia de un campo electrostático, puede escribirse:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int \vec{E}_{t1} \cdot d\vec{l} - \int \vec{E}_{n1} \cdot \frac{d\vec{h}}{2} - \int \vec{E}_{n2} \cdot \frac{d\vec{h}}{2} - \int \vec{E}_{t2} \cdot d\vec{l} + \int \vec{E}_{n2} \cdot \frac{d\vec{h}}{2} + \int \vec{E}_{n1} \cdot \frac{d\vec{h}}{2} = 0$$

(ec 5.2.4.1)

con lo que se obtiene como resultado que:

$$E_{t1} = E_{t2} \quad \text{(ec 5.2.4.2)}$$

$$\frac{D_{t1}}{\epsilon_1} = \frac{D_{t2}}{\epsilon_2} \quad \text{(ec 5.2.4.3)}$$

Lo que deja ver la primera condición de frontera entre dos dieléctricos, la cual es que *los campos electrostáticos tangenciales permanecen inalterados al pasar de un dieléctrico a otro.*

Aplicando la Iera ecuación de Maxwell sobre una superficie cuyo elemento diferencial sea el que está marcado envolviendo el volúmen en la Fig 5.2.4.1, puede notarse que al permanecer el campo tangencial inalterado, tendrá el mismo valor en ambos dieléctricos. Si se considera que la fuente de campo tangencial \vec{E}_t está fuera del volumen, la misma cantidad de líneas de \vec{E}_t que entran al volumen tendrán que salir de por vía de las paredes radiales de superficie $d\vec{S}_r$, por tanto todo el flujo tangencial tendría que sumarse y luego restarse. También podría considerarse que la fuente de \vec{E}_t esta dentro del volumen (no esta dibujado así en nuestra figura 5.2.4.1, pero es una percepción y posibilidad de análisis que cualquier estudiante podría tener), el campo \vec{E}_t solamente “saldría” del volumen pero saldría haciendo flujo en infinitas direcciones $\vec{\mu}_r$. Como se vio al principio de esta literatura, sería necesario descomponer esta dirección de superficie en direcciones integrables, lo que conduciría a la anulación de todos los flujos de campo. Ante ambos análisis, los flujos de campo tangenciales son nulos, y cualquiera otra posibilidad conducirá a los mismos resultados. De acuerdo a esto, puedo expresar para un dieléctrico:

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{ec 5.2.4.4})$$

$$\vec{D}_{n1} \cdot d\vec{S}_1 - \vec{D}_{n2} \cdot d\vec{S}_2 + \vec{D}_t \cdot d\vec{S}_t = 0 \quad (\text{ec 5.2.4.5})$$

Siendo que $\vec{D}_t \cdot d\vec{S}_t = 0$

$$D_{n1} = D_{n2} \quad (\text{ec 5.2.4.6})$$

$$\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2} \quad (\text{ec 5.2.4.7})$$

Estas últimas ecuaciones establecen la segunda condición de frontera entre dos dieléctricos, la cual es que *los campos electrostáticos normales se comprimen (o amplían) dependiendo de la relación existente entre las permitividades eléctricas.*

NOTA: Obsérvese que al quedar inalterados los campos tangenciales y comprimidos (o ampliados) los campos normales, el ángulo de incidencia general del campo electrostático \vec{E} que cruza de un dieléctrico a otro se ve alterado. Este fenómeno es conocido como “refracción de campos”.

5.2.5. Las ecuaciones de Poisson y Laplace

Al aplicar la primera ecuación de Maxwell o Ley de Gauss a un medio material isotrópico, homogéneo y lineal, se puede encontrar un modelo diferencial para la región a partir de los potenciales existentes en la misma.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{ec 5.2.5.1})$$

y en un medio material:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{ec 5.2.5.2})$$

Siendo que en la ecuación (ec 4.2.1.2) se definió:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (\text{ec 4.2.1.2})$$

Se puede reescribir (ec 5.2.5.2):

$$\nabla \cdot (-\nabla V) = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{ec 5.2.5.3})$$

Extrayendo el signo negativo del paréntesis y realizando un cambio de signos en la ecuación:

$$\nabla \cdot (\nabla V) = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{ec 5.2.5.4})$$

Aplicando la identidad presentada en (ec 2.8.1) se llega a la *ecuación de Poisson*:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{ec 5.2.5.5})$$

Cuando no existen cargas libres en el medio donde es aplicado este modelo matemático, $\rho = 0$, conduciendo a lo que se conoce como *ecuación de Laplace*:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (\text{ec 5.2.5.5})$$

NOTA: La ventaja que ofrecen estas dos ecuaciones, es que resumen el comportamiento de los campos eléctricos a una solución tipo función escalar de potencial eléctrico. La solución de un Laplaciano para obtener la función V puede ser tan sencilla como resolver una ecuación diferencial lineal y homogénea de segundo orden cuando V esta en función solo de una variable, o tan complicada que se requiera utilizar métodos numéricos diferenciales (con separación de variables donde sea posible), cuando V sea dependiente de 3 variables o 4 cuando se considere el tiempo.

La solución de estos modelos requiere también conocer las condiciones de frontera de las variables espaciales, y las condiciones iniciales cuando se dependa también del tiempo. Los mismos modelos matemáticos se utilizan para obtener distribuciones de temperaturas en un

campo de conducción de calor, distribución de función de esfuerzos en un campo de flujo de fluidos, potencial magnético en magnetostática y así muchas aplicaciones más que encajan dentro del modelo diferencial de Poisson y Laplace.

6. La Capacitancia

6.1 Descripción teórica de la capacitancia

La capacitancia es uno de los efectos con mayor aplicación a partir de los campos electrostáticos. Para describir esto, se parte de la base de comportamiento de un material dieléctrico (corrientemente llamado aislante), frente a un campo eléctrico. A este nivel, se asumirá que los dieléctricos utilizados son lineales, isotrópicos y homogéneos, por lo cual las ecuaciones del capítulo anterior nos servirán para caracterizarlos.

Una capacitancia (comúnmente referida como capacitor), físicamente no es más una conformación de dos conductores polarizados, separados por un dieléctrico (Fig 6.1.1). Como ya se comprenderá, entre estos dos conductores existirá un campo eléctrico y en el dieléctrico se formará un vector de polarización. A la relación que existe entre la magnitud de la carga, en uno de los conductores (ya sea el positivo o el negativo) y el potencial que se forma entre ellos se le llama “capacidad”, aunque muchos autores utilizan indistintamente el término “capacitancia” para ésta relación, así como para el arreglo físico que la produce (para el cual otros autores diferencian con el término “capacitor”), y se mide en “faradios”, siendo un faradio equivalente a un coulomb por volt⁻¹.

$$C = \frac{Q}{V} \quad (\text{ec 6.1.1})$$

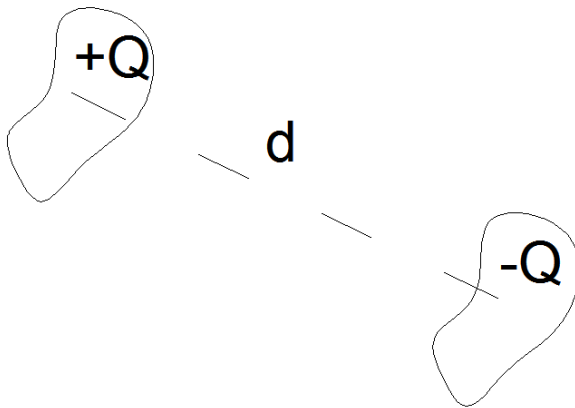


Fig 6.1.1. Esquemático de una capacitancia.

El fenómeno de la capacitancia puede ser físicamente demostrado al pensar que los conductores estarán sometidos a un potencial eléctrico que será directamente proporcional a la carga que crea ese potencial en ellos. Recuerde que la carga que crea potencial en un conductor, no puede ser la carga del propio conductor, debe ser externa al mismo, por lo que de forma general, el potencial en un conductor “ i ” que denominemos V_i será proporcional a cualquier carga externa a él Q_j . Podemos expresar esto de una forma sencilla con una ecuación de proporcionalidad (que en el caso de múltiples conductores se vuelve una ecuación matricial de proporcionalidad):

$$V_i = f_p Q_j \quad (\text{ec 6.1.2})$$

Donde f_p es el factor de proporcionalidad del que hablamos, denominado por algunos autores “coeficiente de potencial”, en el caso de dos conductores; y es la inversa de la capacitancia.

Cuando se tienen múltiples conductores, existirán múltiples factores de proporcionalidad (coeficientes de potencial) entre ellos, llevando la ecuación anterior a:

$$V_i = \sum f_{p-ij} Q_j \quad (\text{ec 6.1.3})$$

Donde f_{p-ij} es el coeficiente de potencial entre cada V_i y Q_j , lo que puede expresarse matricialmente como:

$$[V_i] = [f_{p-ij}] [Q_j] \quad (\text{ec 6.1.4})$$

Siendo en este caso $[f_{p-ij}]$ una matriz de coeficientes de potencial cuya inversa daría lugar a una matriz de coeficientes de capacidad

$$[C_{ij}] = [f_{p-ij}]^{-1} \quad (\text{ec 6.1.5})$$

De forma tal que:

$$[Q_j] = [C_{ij}] [V_i] \quad (\text{ec 6.1.6})$$

Las matrices $[f_{p-ij}]$ y $[C_{ij}]$ serán cuadradas y simétricas respecto a su diagonal principal debido a la simetría física causa-efecto entre dos conductores cualesquiera.

Para el caso que presentamos inicialmente de dos cargas Q y $-Q$, matricialmente se podría escribir:

$$\begin{bmatrix} Q \\ -Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (\text{ec 6.1.7})$$

Considerando que $C_{12} = C_{21}$, y aplicando una condición de que los conductores sean geoméricamente iguales, con lo que $C_{11} = C_{22}$, se llegará a la condición que $C_{11} = C_{22} = -C_{12} = -C_{21} = C$, con lo que ambas ecuaciones reflejadas en (ec 6.1.7), serán:

$$Q = C(V_1 - V_2) \quad (\text{ec 6.1.8})$$

Aquí, C será la capacidad del sistema de dos conductores. Considerando que en la ecuación (ec 6.1.1) V se refiere al potencial existente entre los conductores, se ve que $V = V_1 - V_2$, con lo que (ec 6.1.1) y (ec 6.1.8) son equivalentes.

Recordando de forma general que:

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{ec 4.2.2.2})$$

$$Q = \int dq = \iiint \rho dV \quad (\text{ec 3.2.2.3})$$

Puedo escribir:

$$C = \frac{\iiint \rho dV}{-\int \vec{E} \cdot d\vec{l}} \quad (\text{ec 6.1.9})$$

Recordando la Iera ecuación de Maxwell:

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint \rho dV \quad (\text{ec 3.6.1.2})$$

reescribo:

$$C = \frac{\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S}}{-\int \vec{E} \cdot d\vec{l}} \quad (\text{ec 6.1.10})$$

En un medio lineal, homogéneo e isotrópico:

$$C = \frac{\oiint \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S}}{-\int \vec{E} \cdot d\vec{l}} \quad (\text{ec 6.1.11})$$

Y si el capacitor tiene superficies totalmente planas, iguales en magnitud y perpendiculares al campo eléctrico, totalmente equidistantes en toda su extensión, lo que hace a $-\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ una constante con $\int d\vec{l} = d$; se hace referencia del mismo como un “*capacitor plano*”, con un

espesor de material dieléctrico d , y superficie total $\oiint dS = S$ (superficie de las dos placas del capacitor que es equivalente a la superficie de Gauss envolvente del dieléctrico por donde fluye \vec{E}) con lo que la ecuación anterior se reduce a:

$$C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d} \quad (\text{ec 6.1.12})$$

NOTA: El signo negativo del denominador se elimina al considerar para este reemplazo que

$-\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ será igual a la diferencia de potencial generada por dos placas consideradas infinitas, lo

cual es $-\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_{2_placas_inf} = \frac{\sigma d}{\epsilon}$ y el campo de las mismas para el flujo de Gauss

$E_{2_placas_inf} = \frac{\sigma}{\epsilon}$. Aplicando los conceptos aprendidos en capítulos anteriores, el estudiante

llegará fácilmente a estas deducciones.

6.2 La ecuación de circuitos del capacitor

Posiblemente la mayor aplicación de los capacitores es en temas de circuitos. Aunque no es parte de este curso, ofrecemos una deducción muy simple de cómo se puede llegar al modelo reducido de circuito del capacitor, donde lo que se desea es relacionar por medio de la capacitancia a un potencial eléctrico (voltaje) y corriente lineales a través de un capacitor considerado también lineal.

Conociendo que la corriente eléctrica es el movimiento de cargas en el tiempo, podemos escribir para la misma en un capacitor:

$$i_c = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{ec 6.2.1})$$

Reemplazando Q según (ec 6.1.1):

$$i_c = \frac{d}{dt}[CV] \quad (\text{ec 6.2.2})$$

Considerando que el capacitor es lineal y tiene una capacidad constante:

$$i_c = C \frac{dV}{dt} \quad (\text{ec 6.2.3})$$

La ecuación anterior es el modelo base fundamental para el tratamiento de capacitores en todos los temas de circuitos eléctricos, donde V es una función de voltaje entre las placas del capacitor en el tiempo y por tanto i_c será igual una función de corriente en las placas del capacitor (que entre o salga) en el tiempo.

6.3. La energía almacenada en un capacitor

De la ecuación general que dedujimos para la energía electrostática, podemos obtener la energía que puede ser almacenada en un capacitor. Recordando según fue presentado en el capítulo cuarto, podemos calcular la energía almacenada en un capacitor cualquiera utilizando:

$$W_{sistema-(vol)} = \frac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot dV \quad (\text{ec 4.4.18})$$

Si el dieléctrico es lineal, homogéneo e isotrópico:

$$W_{sistema-(vol)} = \frac{1}{2} \iiint \epsilon E^2 dV \quad (\text{ec 4.4.19})$$

Si se consideran placas planas equidistantes y semi-infinitas en los conductores (ver nota anterior acerca del capacitor plano):

$$W_{Cap_plano} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \iiint dV = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \iint dS \int dl = \frac{1}{2} \epsilon E^2 S \cdot d \quad (\text{ec 6.3.1})$$

$$W_{Cap_plano} = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{\sigma}{\epsilon} \right)^2 S \cdot d \left[\frac{d}{d} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon S}{d} \right) \left(\frac{\sigma d}{\epsilon} \right)^2 \quad (\text{ec 6.3.2})$$

$$W_{Cap_plano} = \frac{1}{2} C V^2 \quad (\text{ec 6.3.3})$$

$$W_{Cap_plano} = \frac{1}{2} C \left(\frac{Q}{C} \right)^2 \quad (\text{ec 6.3.4})$$

$$W_{Cap_plano} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (\text{ec 6.3.5})$$

$$W_{Cap_plano} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\left(\frac{Q}{V}\right)} \quad (\text{ec 6.3.6})$$

$$W_{Cap_plano} = \frac{1}{2} QV \quad (\text{ec 6.3.7})$$

Las ecuaciones de energía en capacitores planos dadas por (ec 6.3.3), (ec 6.3.5) y (ec 6.3.7), son muy usuales como modelos simplificados cuando se tratan temas de circuitos eléctricos.

6. Bibliografía

Alonso, Marcelo; Finn, Edward (1998). Física Vol II, Campos y Ondas. Editorial Interamericano, México, 1032 pp.

Anderson, J.D. (1995). Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications, New York, 550 pp.

Carozzi, T.; Eriksson, A; Lundborg, B. (2006). Electromagnetic Field Theory. Bo Thidé, Sweden, 187 pp.

Drysdale Douglas (1985). An Introduction to Fire Dynamics. John Wiley and Sons, St. Edmundsbury, 424 pp.

Edminister, Joseph (1992). Electromagnetismo. McGraw –Hill, Mexico, 202 pp.

Fernandez, G; Fernandez, J. (1995). Electricidad, teoría de circuitos y magnetismo. Edicions UPC y ETSEIB, Barcelona, España, 234 pp.

García O., B. (2005). Fundamentos de Electromagnetismo. Iniciación al Cálculo Numérico en Electromagnetismo, Universidad de Granada, Granada, España, 720 pp.

Halliday, David; Resnick, Robert . (1972). Física II. CECOSA, México, 1757 pp.

Hyat, William (1991). Teoría Electromagnética, McGraw – Hill, Mexico, 525 pp.

Knowlton, Archer E. (1957). Standard Handbook for Electrical Engineers, McGraw – Hill & Kogakusha Company LTD, Tokyo Japan, New York, Toronto, London; 2230 pp.

Kraus, J; Carver, K. (1973). Electromagnetics, McGraw – Hill & Kogakusha LTD, Tokyo, Japan, 828 pp.

Matsh, Leander W. (1974). Máquinas Electromagnéticas y Electromecánicas, Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A., México, 524 pp.

McCaffrey, B (1981). Some Measurements of the Radiative Power Output of Difusión Flames, Western States Section Meeting of the Combustion Institute, U.S.A., Paper WSS/CI 81-15.

Montgomery, Douglas (1991). Design and Analysis of Experiments, John Wiley & Sons, New York, 649 pp.

NFPA 70: Código Eléctrico Nacional. , National Fire Protection Association, Quincy, MA. 2008.

NFPA 70B: Recommended Practice for Electrical Equipment Maintenance, National Fire Protection Association, Quincy, MA. 2006.

NFPA 70E: Standard for Electrical Safety Requirements for Employee Workplaces, National Fire Protection Association, Quincy, MA. 2009.

NFPA 77: Recommended Practice on Static Electricity. , National Fire Protection Association, Quincy, MA. 2007.

NFPA 79: Electrical Standard for Industrial Machinery. , National Fire Protection Association, Quincy, MA. 2007.

Quintiere, James (2006). Fundamentals of Fire Phenomena, John Wiley & Sons LTD, Chichester, England, 439 pp.

Reitz, J.; Mildford, F. (1967). Foundations of Electromagnetic Theory, Addison Wesley, U.S.A., 435 pp.

Reitz, J.; Mildford, F. (1969). Fundamentos de la Teoría Electromagnética, Addison Wesley, U.S.A., 465 pp.

Rohsenow, W.; Hartnett, J.; Cho, J. (1998). Handbook of Heat Transfer, McGraw – Hill, U.S.A., 1344 pp.

Rudin, Walter (1964). Principles of Mathematical Analysis, McGraw – Hill, New York, 270 pp.

Sadiku, Matthew (2003). Elementos de Electromagnetismo, Oxford University Press, México, 767 pp.

Sanjuro, Rafael (1988). Electromagnetismo, McGraw – Hill, España, 309 pp.

Selfridge, R.; Arnold, D.; Warnick, K. (2001). Electromagnetics, Brigham Young University, Provo, 47 pp.

Spiegel, Murray (1969). Análisis Vectorial, McGraw – Hill, México, 222 pp.

Welty, James (1978). Transferencia de Calor Aplicada a la Ingeniería, Limusa, México, 545 pp.

Welty, James (2001). Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor y Masa, Limusa – Wiley, México, 929 pp.

Yearance, Robert (1997). Electrical Fire Analysis, John Wiley, U.S.A., 263 pp.

Zahn, M. (2003) Electromagnetic Field Theory (a problem solving approach), Massachusetts Institute of Technology, Krieger Pub Co, U.S.A., 752 pp.

