



SERIE
SCHAUM

ELECTROMAGNETISMO

Teoría y
310 problemas
resueltos

Joseph A. Edminister

SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM

TEORIA Y PROBLEMAS DE ELECTROMAGNETISMO

Por

JOSEPH A. EDMINISTER, M.S.E.

*Profesor asociado de Ingeniería Eléctrica
de la Universidad de Akron*

TRADUCCION
PEDRO ALBARRACIN
Universidad de Los Andes

REVISION
SANTIAGO PINTO
Universidad Pedagógica Nacional

EDITORIAL McGRAW-HILL LATINOAMERICANA S.A.
*Bogotá, Guatemala, Madrid, México, Panamá, San Juan, Auckland, Hamburgo,
Johanesburgo, Lisboa, Londres, Montreal, Nueva Delhi, Nueva York, París,
San Francisco, San Luis, Sao Paulo, Sidney, Singapur, Tokio, Toronto*

RESERVADOS TODOS LOS DERECHOS (D.R.)

**Copyright © 1981, por EDITORIAL McGRAW-HILL LATINOAMERICANA S.A.
Bogotá, Colombia**

Ni este libro ni parte de él puede ser reproducido o transmitido
de alguna forma o por algún medio electrónico o mecánico, incluyendo fotocopia o
grabación, o por cualquier otro sistema de memoria o archivo, sin el permiso
escrito del editor.

Traducido de la primera edición de
**SCHAUM'S OUTLINE SERIES THEORY AND PROBLEMS
OF ELECTROMAGNETICS**
Copyright © 1979 por McGRAW-HILL, INC., U.S.A.

ISBN 968-451-004-7

0987654321

8765432901

Impreso en Colombia

Printed in Colombia

Impresión: Italgraf S.A., Bogotá, Colombia

Prefacio

El propósito de este libro es servir de complemento a cualquier texto introductorio de electromagnetismo para ingenieros. Se puede utilizar también como texto independiente en un curso breve de iniciación.

Como en los demás compendios de Schaum, se pone el mayor énfasis en la solución de los problemas. Cada capítulo contiene un buen número de problemas con sus soluciones detalladas y ofrece también una serie de problemas suplementarios con las respuestas, precedidas de una descripción simplificada de los principios y razones que se requieren para entenderlos y solucionarlos. Aunque los problemas electromagnéticos del mundo físico suelen ser complejos, preferimos presentar en esta obra problemas más bien cortos y sencillos. Esto parece ventajoso para el estudiante que necesita aclarar un punto específico como para el que tiene que utilizar el libro con el fin de repasar la materia.

Las matemáticas han sido manejadas con la mayor sencillez y se ha procurado no recurrir a la abstracción. Damos abundantes ejemplos concretos y numerosos gráficos y esquemas. He descubierto, en mis largos años de enseñanza, que la solución de la mayoría de los problemas comienza con un dibujo cuidadoso.

Dedico este libro a mis alumnos, pues ellos me han advertido dónde se hallaban las dificultades de los diversos temas. Deseo expresar mi gratitud al personal de McGraw-Hill por su asistencia editorial. Gracias sinceras a Thomas R. Connell por su cuidadosa revisión de los problemas y sus amables sugerencias. Asimismo agradezco a Eileen Kerns su idóneo trabajo mecanográfico. Por último, debo dar las gracias a mi familia, en particular a mi esposa Nina, por su constante apoyo y estímulo, sin los cuales el libro no se hubiera escrito.

JOSEPH A. EDMINISTER

Contenido

Capítulo 1	ANALISIS VECTORIAL	1					
1.1	Notación vectorial	1.2 Algebra vectorial	1.3 Sistemas de coordenadas	1.4 Volúmenes, superficies y elementos diferenciales de línea	1.5 Campos vectoriales	1.6 Transformaciones	
Capítulo 2	FUERZAS DE COULOMB E INTENSIDAD DEL CAMPO ELECTRICO ...	13					
2.1	Ley de Coulomb	2.2 Intensidad del campo eléctrico	2.3 Distribuciones de carga				
2.4	Configuraciones estándar de carga						
Capítulo 3	FLUJO ELECTRICO Y LEY DE GAUSS	27					
3.1	Carga neta en una región	3.2 Flujo eléctrico y densidad de flujo	3.3 Ley de Gauss				
3.4	Relación entre la densidad de flujo y la densidad de campo eléctrico	3.5 Superficies gaussianas especiales					
Capítulo 4	DIVERGENCIA Y TEOREMA DE DIVERGENCIA	39					
4.1	Divergencia	4.2 Divergencia en coordenadas cartesianas	4.3 Divergencia de \mathbf{D}				
4.4	El operador nabla	4.5 El teorema de la divergencia					
Capítulo 5	ENERGIA Y POTENCIAL ELECTRICO DE LOS SISTEMAS DE CARGA .	50					
5.1	Trabajo realizado en cargas puntuales en movimiento	5.2 Potencial eléctrico entre dos puntos	5.3 Potencial de una carga puntual	5.4 Potencial de una distribución de carga			
5.5	Gradiente	5.6 Relación entre \mathbf{E} y V	5.7 Energía en campos eléctricos estáticos				
Capítulo 6	CORRIENTE, DENSIDAD DE CORRIENTE Y CONDUCTORES	65					
6.1	Introducción	6.2 Cargas en movimiento	6.3 Densidad de la corriente de convección \mathbf{J}	6.4 Densidad de la corriente de conducción \mathbf{J}	6.5 Conductividad σ	6.6 Corriente I	6.7 Resistencia R
6.8	Densidad de la corriente laminar \mathbf{K}	6.9 Continuidad de la corriente	6.10 Condiciones límites en conductor-dieléctrico				
Capítulo 7	CAPACITANCIA Y MATERIALES DIELECTRICOS	81					
7.1	Polarización \mathbf{P} y permitividad relativa ϵ_r	7.2 \mathbf{D} y \mathbf{E} de voltaje constante	7.3 \mathbf{D} y \mathbf{E} de carga constante	7.4 Condiciones límites en la entrecara de dos capacitancias dieléctri-	AEP		

CONTENIDO

casas	7.5 Capacitancia	7.6 Condensadores de varios dieléctricos	7.7 Energía almacenada en un condensador.	
<hr/>				
Capítulo 8	ECUACION DE LAPLACE			96
8.1 Introducción	8.2 Ecuaciones de Poisson y de Laplace	8.3 Formas explícitas de la ecuación de Laplace	8.4 Teorema de la unicidad	8.5 Teoremas del valor medio y del valor máximo
8.6 Soluciones cartesianas en una variable	8.7 Solución del producto cartesiano	8.8 Solución del producto cilíndrico	8.9 Solución del producto esférico	
<hr/>				
Capítulo 9	LEY DE AMPERE Y EL CAMPO MAGNETICO			113
9.1 Introducción	9.2 Ley de Biot-Savart	9.3 Ley de Ampère	9.4 Rotacional	9.5 Densidad de corriente J y $\nabla \times H$
9.6 Densidad de flujo magnético B	9.7 Potencial vectorial magnético A	9.8 Teorema de Stokes		
<hr/>				
Capítulo 10	FUERZAS Y TORQUES EN LOS CAMPOS MAGNETICOS			128
10.1 Fuerza magnética sobre las partículas	10.2 Campos eléctricos y magnéticos combinados	10.3 Fuerza magnética sobre un elemento de corriente	10.4 Trabajo y potencia	
10.5 Torque	10.6 Momento magnético de una bobina planar			
<hr/>				
Capítulo 11	INDUCTANCIA Y CIRCUITOS MAGNETICOS			140
11.1 Voltaje de autoinducción	11.2 Inductores e inductancia	11.3 Formas estándar		
11.4 Inductancia interna	11.5 Circuitos magnéticos	11.6 Alinealidad de la curva $B-H$		
11.7 Ley de Ampère para circuitos magnéticos	11.8 Núcleos con espacios de aire	11.9 Bobinas múltiples	11.10 Circuitos magnéticos paralelos	
<hr/>				
Capítulo 12	CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO Y FEM INDUCIDA			160
12.1 Corriente de desplazamiento	12.2 Razón entre J_c y J_D	12.3 Ley de Faraday		
12.4 Conductores en movimiento a través de campos independientes del tiempo	12.5 Conductores en movimiento a través de campos dependientes del tiempo			
<hr/>				
Capítulo 13	ECUACION DE MAXWELL Y CONDICIONES LIMITES			172
13.1 Introducción	13.2 Relaciones límites para campos magnéticos	13.3 Corriente laminar en el límite	13.4 Resumen de las condiciones límites	13.5 Ecuaciones de Maxwell
<hr/>				
Capítulo 14	ONDAS ELECTROMAGNETICAS			181
14.1 Introducción	14.2 Ecuaciones de onda	14.3 Soluciones en coordenadas cartesianas	14.4 Soluciones para medios parcialmente conductores	14.5 Soluciones para dieléctrico perfectos
14.6 Soluciones para buenos conductores	14.7 Profundidad de penetración	14.8 Ondas reflejadas	14.9 Ondas estacionarias	14.10 Potencia y vector de Poynting
<hr/>				
APENDICE				197
INDICE				199

AEP

Capítulo 1

Análisis vectorial

1.1 NOTACION VECTORIAL

Para distinguir *vectores* (cantidades que tienen magnitud y dirección) de *escalares* (cantidades que tienen solo magnitud) los vectores se denotan con símbolos en negrilla. Un *vector unidad*, de valor absoluto (o magnitud o dimensión) 1, se indica siempre en este libro, por una letra minúscula en negrilla \mathbf{a} . El vector unidad que tiene la dirección del vector \mathbf{A} se determina dividiendo \mathbf{A} por su valor absoluto:

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \text{ ó } \frac{\mathbf{A}}{A}$$

donde $|\mathbf{A}| = A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$ (ver sección 1.2).

Mediante los vectores unidad \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y y \mathbf{a}_z a lo largo de los ejes x , y y z de un sistema de coordenadas cartesianas, un vector cualquiera puede ser escrito en *forma de componentes*:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$$

1.2 ALGEBRA VECTORIAL

1. Los vectores pueden sumarse y restarse:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \pm \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \pm (B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z) \\ &= (A_x \pm B_x) \mathbf{a}_x + (A_y \pm B_y) \mathbf{a}_y + (A_z \pm B_z) \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

2. Las leyes asociativa, distributiva y conmutativa se aplican

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B} \quad (k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

3. El *producto escalar* de dos vectores es, por definición,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (\text{léase "A punto B"})$$

donde θ es el ángulo menor entre \mathbf{A} y \mathbf{B} . Con la representación de componentes se puede demostrar que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

En particular,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

4. El *producto vectorial* de dos vectores es, por definición,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB \sin \theta) \mathbf{a}_n \quad (\text{léase "A cruz B"})$$

donde θ es el ángulo menor entre \mathbf{A} y \mathbf{B} y \mathbf{a}_n es un vector unidad normal al plano determinado por \mathbf{A} y \mathbf{B} cuando estos parten de un punto común. Existen dos vectores normales a este plano, así que se necesita determinar uno para mayor claridad. El vector normal que se selecciona es aquél que avanza en la misma dirección de un tornillo de rosca derecha cuando \mathbf{A} es

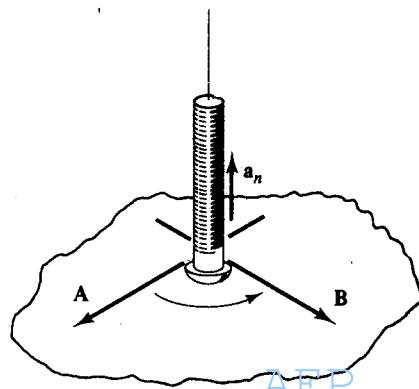


Fig. 1-1

rotado hacia \mathbf{B} (figura 1-1). Debido a este requisito de dirección, la ley conmutativa no se cumple para el producto vectorial. En cambio, se cumple que

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

Desarrollando el producto vectorial en forma de componentes, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \times (B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{a}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

lo que se expresa convenientemente como un determinante:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

1.3 SISTEMAS DE COORDENADAS

Un problema que tenga simetría esférica o cilíndrica puede expresarse y resolverse en el sistema familiar de coordenadas cartesianas. Sin embargo, la solución no mostrará la simetría y, en muchos casos, será innecesariamente compleja. Por consiguiente, a lo largo de este libro, además de los sistemas de coordenadas cartesianas, se usarán los sistemas de coordenadas esféricas y circular cilíndricas. Todas las tres serán analizadas conjuntamente para ilustrar las similitudes y las diferencias.

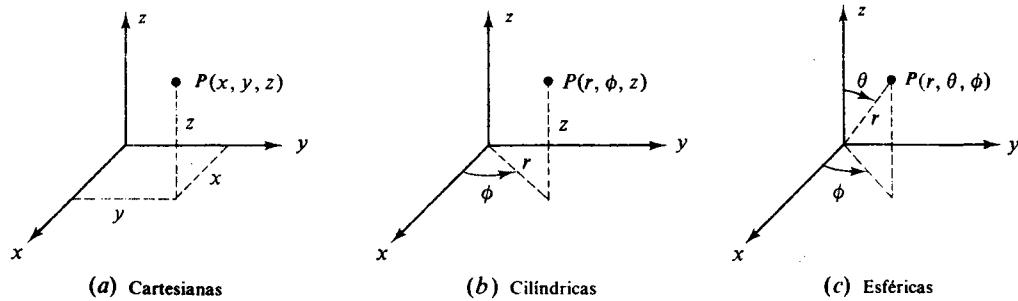


Fig. 1-2

Un punto P queda determinado por tres coordenadas en cartesiano (x, y, z), en circular cilíndrico (r, ϕ, z) y en esférico (r, θ, ϕ), tal como se muestra en la figura 1-2. El orden de especificación de las coordenadas es importante y debe seguirse cuidadosamente. El ángulo ϕ es el mismo en los sistemas esférico y cilíndrico. Pero, en el orden de las coordenadas, ϕ aparece en segundo lugar en el cilíndrico (r, ϕ, z) y en tercer lugar en esférico, (r, θ, ϕ). El mismo símbolo, r , se usa en los sistemas cilíndrico y esférico para significar dos

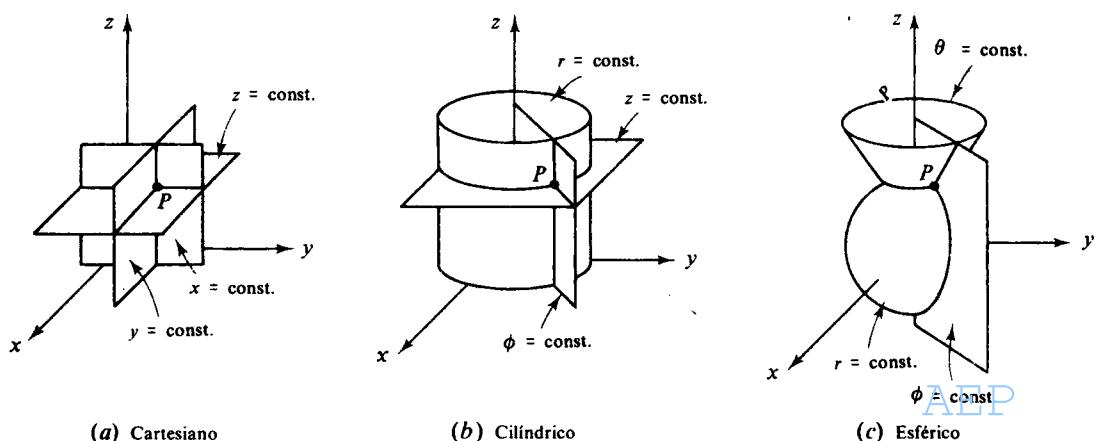


Fig. 1-3

cosas completamente diferentes. En coordenadas cilíndricas r mide la distancia desde el eje z hasta el punto en un plano normal al eje z , mientras que en el sistema esférico, r mide la distancia del origen al punto. El contexto del problema debe aclarar a cuál r se hace referencia.

La intersección de 3 superficies ortogonales determina también un punto, tal como se muestra en la figura 1-3. En coordenadas cartesianas las superficies son los planos $x = \text{constante}$, $y = \text{constante}$ y $z = \text{constante}$. En coordenadas cilíndricas, $z = \text{constante}$, es el mismo plano infinito que en las coordenadas cartesianas, $\phi = \text{constante}$ es medio plano con su borde a lo largo del eje z y $r = \text{constante}$ es un cilindro recto circular. Estas tres superficies son ortogonales y su intersección se localiza en el punto P . En coordenadas esféricas, $\phi = \text{constante}$ es el mismo medio plano que aparece en las coordenadas cilíndricas, $r = \text{constante}$ es una esfera con centro en el origen y θ es un cilindro circular recto cuyo eje es el eje z y cuyo vértice está en el origen. Obsérvese que θ está limitado al rango $0 \leq \theta \leq \pi$.

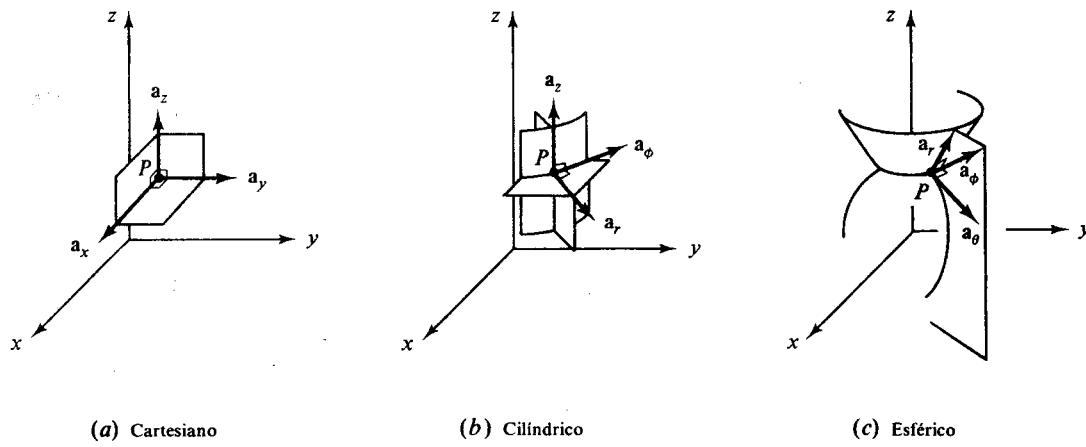


Fig. 1-4

La figura 1-4 muestra los tres vectores unidad en el punto P . En el sistema cartesiano los vectores unidad tienen direcciones fijas, independiente de la localización de P . Esto no sucede en los otros dos sistemas (excepto en el caso de \mathbf{a}_z). Cada vector unidad es normal a las superficies de coordenadas y tiene la dirección de incremento de esas coordenadas. Obsérvese que todos los sistemas son de mano derecha:

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \quad \mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z \quad \mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi$$

Las formas de componentes de un vector en los tres sistemas son:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z \quad (\text{cartesiano})$$

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z \quad (\text{cilíndrico})$$

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi \quad (\text{esférico})$$

Debe notarse que los componentes A_x , A_r , A_ϕ , etc., no son generalmente constantes sino a menudo funciones de las coordenadas en el sistema particular.

1.4 VOLUMEN, SUPERFICIE Y ELEMENTOS DIFERENCIALES DE LINEA

Cuando las coordenadas del punto P se desarrollan en $(x + dx, y + dy, z + dz)$ ó $(r + dr, \phi d\phi, z + dz)$ ó $(r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$ se forma un volumen diferencial dv . En cantidades infinitesimales de primer orden el volumen diferencial es, en los tres sistemas coordinados, una caja rectangular. El valor de dv en cada sistema aparece en la figura 1-5.

En la figura 1-5 pueden también verse las áreas de los elementos de superficie que limitan el volumen diferencial. Por ejemplo, en coordenadas esféricas, el elemento diferencial de superficie perpendicular a \mathbf{a}_r es

$$dS = (r d\theta)(r \sin\theta d\phi) = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

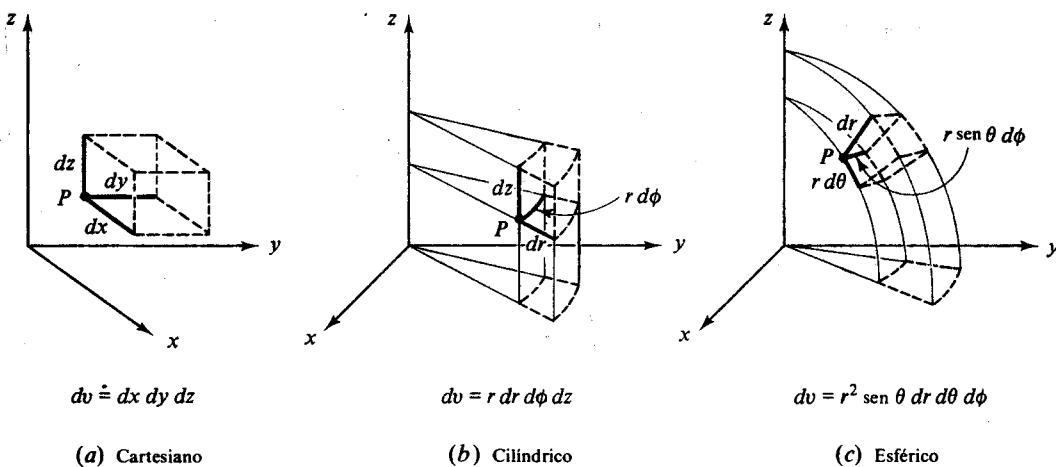


Fig. 1-5

El elemento diferencial de línea, dl , es la diagonal a través de P , por lo que

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 && \text{(cartesiano)} \\ d\ell^2 &= dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 && \text{(cil\xedndrico)} \\ d\ell^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2 && \text{(esf\xedrico)} \end{aligned}$$

1.5 CAMPOS VECTORIALES

Las expresiones vectoriales en electromagnetismo son de tal naturaleza que generalmente los coeficientes de los vectores unidad contienen las variables. Por esto, la expresión cambia de magnitud y dirección, de punto a punto, a través de la región de interés.

Consideremos por ejemplo, el vector

$$\mathbf{E} = -x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y$$

Dando diferentes valores a x y a y se obtiene E en varios puntos. Después que varios puntos han sido examinados, el patrón resulta evidente. La figura 1-6 muestra este campo.

Además, un campo vectorial puede variar con el tiempo. De esta manera al campo bidimensional examinado puede agregársele una variación temporal mediante la expresión

$$\mathbf{E} = (-x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y) \sin \omega t$$

1

$$\mathbf{E} = (-xa_x + ya_y)e^{j\omega t}$$

Los campos magnéticos y eléctricos de los capítulos posteriores variarán todos con el tiempo. Como es de esperarse, serán diferenciados o integrados respecto del tiempo. Sin embargo, ambas operaciones tendrán un curso natural y muy raramente causarán gran dificultad.

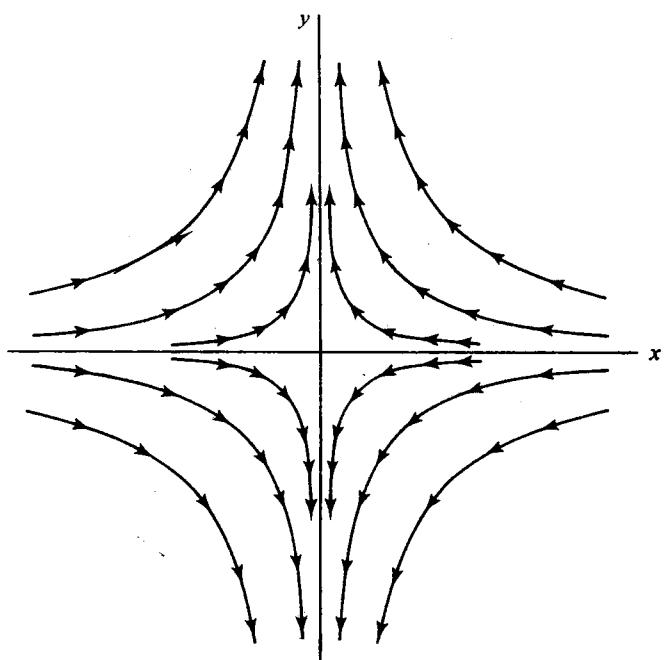


Fig. 1-6

1.6 TRANSFORMACIONES

El vector o el campo vectorial de un problema particular existe en el mundo real y, por tanto, el sistema de coordenadas que se emplea para expresarlo es únicamente un marco de referencia. Una buena elección del sistema de coordenadas puede llevar a menudo a una solución más directa del problema y a una expresión final más concisa, que muestre la simetría que esté presente. Sin embargo, es necesario a veces transformar un campo vectorial, de un sistema a otro.

EJEMPLO 1: Considérese

$$\mathbf{A} = 5\mathbf{a}_r + 2\sin\phi \mathbf{a}_\theta + 2\cos\phi \mathbf{a}_\phi$$

en coordenadas esféricas. Las variables r, θ, ϕ pueden expresarse en un sistema de coordenadas cartesianas recurriendo a la figura 1-2 y aplicando la trigonometría básica. De esta manera

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \tan\phi = \frac{y}{x}$$

Ahora las componentes esféricas del campo vectorial \mathbf{A} pueden expresarse en términos de x, y y z así:

$$\mathbf{A} = 5\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{a}_r + \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{a}_\theta + \frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{a}_\phi$$

Los vectores unidad \mathbf{a}_r , \mathbf{a}_θ y \mathbf{a}_ϕ pueden expresarse también en un sistema de coordenadas cartesianas recurriendo a la figura 1-4 y aplicando trigonometría básica. En efecto,

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_r &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{a}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{a}_y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_\theta &= \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{a}_x + \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{a}_y - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_\phi &= \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{a}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{a}_y\end{aligned}$$

Combinando éstas con las componentes transformadas resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \left(5x + \frac{2xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(x^2 + y^2)} - \frac{2yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \mathbf{a}_x \\ &\quad + \left(5y + \frac{2y^2z}{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \mathbf{a}_y \\ &\quad + \left(5z - \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

Problemas resueltos

- 1.1. Demuestre que el vector dirigido de $M(x_1, y_1, z_1)$ a $N(x_2, y_2, z_2)$ en la figura 1-7 está dado por

$$(x_2 - x_1)\mathbf{a}_x + (y_2 - y_1)\mathbf{a}_y + (z_2 - z_1)\mathbf{a}_z$$

Las coordenadas de M y N se utilizan para expresar los dos vectores de posición \mathbf{A} y \mathbf{B} de la figura 1-7.

$$\mathbf{A} = x_1\mathbf{a}_x + y_1\mathbf{a}_y + z_1\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{B} = x_2\mathbf{a}_x + y_2\mathbf{a}_y + z_2\mathbf{a}_z$$

Entonces

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = (x_2 - x_1)\mathbf{a}_x + (y_2 - y_1)\mathbf{a}_y + (z_2 - z_1)\mathbf{a}_z$$

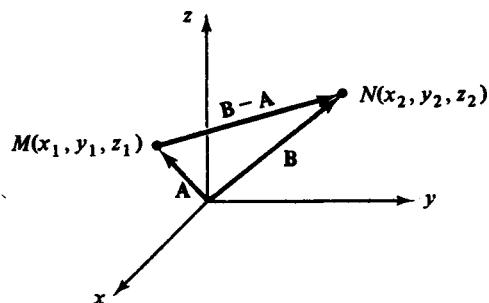


Fig. 1-7

- 1.2. Determine el vector \mathbf{A} dirigido de $(2, -4, 1)$ a $(0, -2, 0)$ en coordenadas cartesianas y determine el vector unidad a lo largo de \mathbf{A} .

$$\mathbf{A} = (0 - 2)\mathbf{a}_x + (-2 - (-4))\mathbf{a}_y + (0 - 1)\mathbf{a}_z = -2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$$

$$|\mathbf{A}|^2 = (-2)^2 + (2)^2 + (-1)^2 = 9$$

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = -\frac{2}{3}\mathbf{a}_x + \frac{2}{3}\mathbf{a}_y - \frac{1}{3}\mathbf{a}_z$$

- 1.3. Determine la distancia entre $(5, 3\pi/2, 0)$ y $(5, \pi/2, 10)$ en coordenadas cilíndricas.

Primero, obténgase los vectores de posición *cartesiana* \mathbf{A} y \mathbf{B} (ver figura 1-8).

$$\mathbf{A} = -5\mathbf{a}_y, \quad \mathbf{B} = 5\mathbf{a}_x + 10\mathbf{a}_z$$

Entonces $\mathbf{B} - \mathbf{A} = 10\mathbf{a}_x + 10\mathbf{a}_z$ y la distancia buscada entre los puntos es.

$$|\mathbf{B} - \mathbf{A}| = 10\sqrt{2}$$

Las coordenadas cilíndricas de los puntos no pueden utilizarse para obtener un vector entre los puntos con el mismo método que se siguió en el problema 1.1 en coordenadas cartesianas.

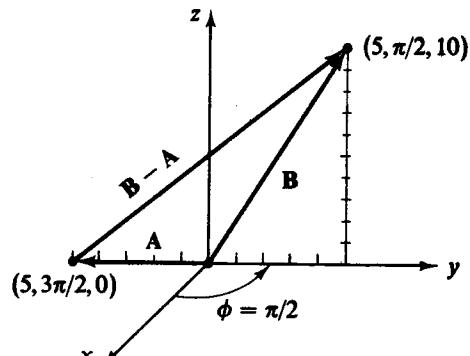


Fig. 1-8

- 1.4. Muestre que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$.

Expresé el producto escalar en forma de componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot (B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z) \\ &= (A_x \mathbf{a}_x) \cdot (B_x \mathbf{a}_x) + (A_x \mathbf{a}_x) \cdot (B_y \mathbf{a}_y) + (A_x \mathbf{a}_x) \cdot (B_z \mathbf{a}_z) \\ &\quad + (A_y \mathbf{a}_y) \cdot (B_x \mathbf{a}_x) + (A_y \mathbf{a}_y) \cdot (B_y \mathbf{a}_y) + (A_y \mathbf{a}_y) \cdot (B_z \mathbf{a}_z) \\ &\quad + (A_z \mathbf{a}_z) \cdot (B_x \mathbf{a}_x) + (A_z \mathbf{a}_z) \cdot (B_y \mathbf{a}_y) + (A_z \mathbf{a}_z) \cdot (B_z \mathbf{a}_z) \end{aligned}$$

Sin embargo, $\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1$ puesto que $\cos \theta$ en el producto escalar es igual a la unidad cuando el ángulo es cero. Cuando $\theta = 90^\circ$, $\cos \theta$ es cero. En consecuencia, todos los otros productos escalares de los vectores unidad son iguales a cero. Así pues:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

- 1.5. Dados $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z$ y $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y$, hallar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (2)(1) + (4)(-1) + (-3)(0) = -2$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z$$

- 1.6. Demuestre que $\mathbf{A} = 4\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$ y $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z$ son perpendiculares.

Como el producto escalar contiene $\cos \theta$, un producto escalar igual a cero, proveniente de dos vectores cualesquiera diferentes de cero, implica que $\theta = 90^\circ$.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (4)(1) + (-2)(4) + (-1)(-4) = 0$$

- 1.7. Dados $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y$, y $\mathbf{B} = 6\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z$, encuentre el menor ángulo entre ellos usando (a) el producto vectorial, (b) el producto escalar.

$$(a) \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -16\mathbf{a}_x + 8\mathbf{a}_y + 12\mathbf{a}_z$$

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (0)^2} = 4.47$$

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{(0)^2 + (6)^2 + (-4)^2} = 7.21$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{(-16)^2 + (8)^2 + (12)^2} = 21.54$$

Entonces, como $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta$,

$$\sin \theta = \frac{21.54}{(4.47)(7.21)} = 0.668 \quad \theta = 41.9^\circ$$

$$(b) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (2)(0) + (4)(6) + (0)(-4) = 24$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} = \frac{24}{(4.47)(7.21)} = 0.745 \quad \theta = 41.9^\circ$$

- 1.8. Dado $\mathbf{F} = (y - 1)\mathbf{a}_x + 2x\mathbf{a}_y$, hallar el vector en $(2, 2, 1)$ y su proyección sobre \mathbf{B} , donde $\mathbf{B} = 5\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$.

$$\mathbf{F}(2, 2, 1) = (2 - 1)\mathbf{a}_x + (2)(2)\mathbf{a}_y \\ = \mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y$$

Como se indica en la figura 1-9, la proyección de un vector sobre un segundo vector se obtiene expresando el vector unidad en la dirección del segundo vector y utilizando el producto escalar.

$$\text{Proy. } \mathbf{A} \text{ sobre } \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_B = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$$

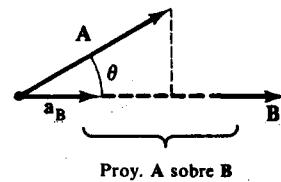


Fig. 1-9

Entonces, en $(2, 2, 1)$,

$$\text{Proy. } \mathbf{F} \text{ sobre } \mathbf{B} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{(1)(5) + (4)(-1) + (0)(2)}{\sqrt{30}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

- 1.9. Dados $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$, $\mathbf{B} = \mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_z$, y $\mathbf{C} = 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$, halle $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ y compárela con $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$$

$$\text{Entonces} \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z$$

Un cálculo similar da $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 2\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$. Como se ve, los paréntesis que indican que el producto vectorial debe efectuarse primero, son esenciales en el triple producto vectorial.

- 1.10. Utilizando los vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} del problema 1.9, halle $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ y compárela con $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$.

En el problema 1.9, $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = -4\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$. Entonces

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = (1)(-4) + (1)(-1) + (0)(2) = -5$$

También en el problema 1.9, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 2\mathbf{a}_x - 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$. Entonces

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = (2)(0) + (-2)(2) + (-1)(1) = -5$$

Los paréntesis no son necesarios en el triple producto escalar ya que sólo tienen significado cuando el producto vectorial ha de efectuarse primero. En general, puede demostrarse que:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Siempre y cuando los vectores aparezcan en el mismo orden cíclico, el resultado es el mismo. Los productos escalares triples que se aparten de este orden cíclico sufren un cambio de signo.

- 1.11.** Exprese el vector unidad que apunta desde $z = h$ en el eje z hacia $(r, \phi, 0)$ en coordenadas cilíndricas. Ver figura 1-10.

El vector \mathbf{R} es la diferencia de dos vectores:

$$\mathbf{R} = r\mathbf{a}_r - h\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{r\mathbf{a}_r - h\mathbf{a}_z}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

El ángulo ϕ no aparece explícitamente en estas expresiones. De todas maneras, tanto \mathbf{R} como \mathbf{a}_R varían con ϕ por intermedio de \mathbf{a}_r .

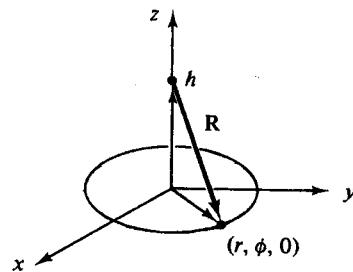


Fig. 1-10

- 1.12.** Exprese el vector unidad dirigido hacia el origen desde un punto arbitrario del plano $z = -5$, tal como se muestra en la figura 1-11.

Como el problema está planteado en coordenadas cartesianas, se puede aplicar la fórmula del problema 1.1 referente a dos puntos.

$$\mathbf{R} = -x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{-x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + 25}}$$

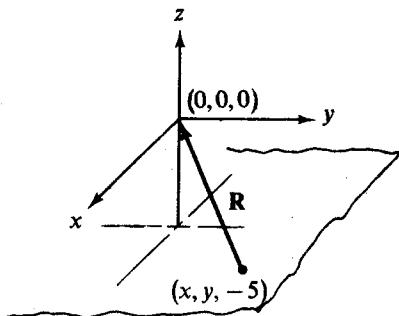


Fig. 1-11

- 1.13.** Use el sistema de coordenadas esféricas para hallar el área de la franja $\alpha \leq \theta \leq \beta$ sobre la concha esférica de radio a (figura 1-12). ¿Cuál es el resultado cuando $\alpha = 0$ y $\beta = \pi$?

El elemento diferencial de superficie es [véase figura 1-5(c)]

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

Entonces

$$A = \int_0^{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} a^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= 2\pi a^2 (\cos \alpha - \cos \beta)$$

Cuando $\alpha = 0$ y $\beta = \pi$, $A = 4\pi a^2$, área de toda la esfera.

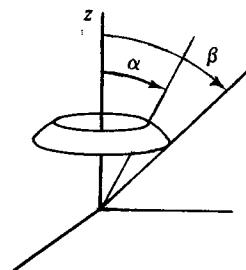


Fig. 1-12

- 1.14.** Desarrolle la ecuación para el volumen de una esfera de radio a , a partir del diferencial de volumen.

En la figura 1-5(c), $dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$. Entonces

$$v = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \frac{4}{3} \pi a^3$$

- 1.15.** Utilice el sistema de coordenadas cilíndricas para hallar el área de la superficie curva de un cilindro recto circular donde $r = 2 \text{ m}$, $h = 5 \text{ m}$, y $30^\circ \leq \phi \leq 120^\circ$ (véase figura 1-13).

El elemento diferencial de superficie es $dS = r d\phi dz$. Entonces

$$\begin{aligned} A &= \int_0^5 \int_{\pi/6}^{2\pi/3} 2 d\phi dz \\ &= 5\pi \text{ m}^2 \end{aligned}$$

- 1.16.** Transforme

$$\mathbf{A} = ya_x + xa_y + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} a_z$$

de coordenadas cartesianas a cilíndricas.

Recurriendo a la figura 1-2(b),

$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

En consecuencia,

$$\mathbf{A} = r \sin \phi a_x + r \cos \phi a_y + r \cos^2 \phi a_z$$

En seguida, se obtienen las proyecciones de los vectores unitarios cartesianos sobre a_r , a_ϕ y a_z :

$$\begin{array}{lll} a_x \cdot a_r = \cos \phi & a_x \cdot a_\phi = -\sin \phi & a_x \cdot a_z = 0 \\ a_y \cdot a_r = \sin \phi & a_y \cdot a_\phi = \cos \phi & a_y \cdot a_z = 0 \\ a_z \cdot a_r = 0 & a_z \cdot a_\phi = 0 & a_z \cdot a_z = 1 \end{array}$$

Así pues

$$a_x = \cos \phi a_r - \sin \phi a_\phi$$

$$a_y = \sin \phi a_r + \cos \phi a_\phi$$

$$a_z = a_z$$

$$\text{y } \mathbf{A} = 2r \sin \phi \cos \phi a_r + (r \cos^2 \phi - r \sin^2 \phi) a_\phi + r \cos^2 \phi a_z$$

- 1.17.** Un vector de magnitud 10 apunta en coordenadas cilíndricas de $(5, 5\pi/4, 0)$ hacia el origen (figura 1-14). Exprese el vector en coordenadas cartesianas.

En coordenadas cilíndricas, el vector puede ser expresado como $10a_r$, donde $\phi = \pi/4$. En consecuencia

$$A_x = 10 \cos \frac{\pi}{4} = \frac{10}{\sqrt{2}} \quad A_y = 10 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{10}{\sqrt{2}} \quad A_z = 0$$

así que

$$\mathbf{A} = \frac{10}{\sqrt{2}} a_x + \frac{10}{\sqrt{2}} a_y$$

Obsérvese que el valor de la coordenada radial, 5, es innecesario.

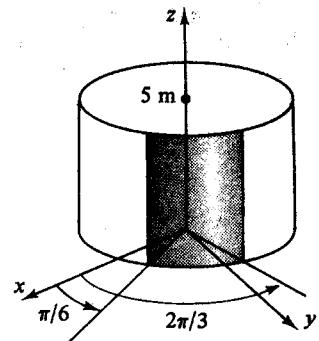


Fig. 1-13

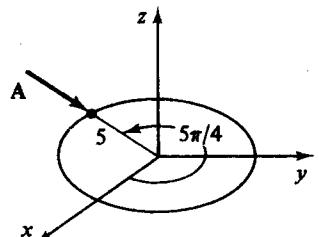


Fig. 1-14

Problemas supplementarios

- 1.18.** Dados $\mathbf{A} = 4a_y + 10a_z$ y $\mathbf{B} = 2a_x + 3a_y$, encuentre la proyección de \mathbf{A} sobre \mathbf{B} . *Resp.* $12/\sqrt{13}$

- 1.19.** Dados $\mathbf{A} = (10/\sqrt{2})(a_x + a_z)$ y $\mathbf{B} = 3(a_y + a_z)$, exprese la proyección de \mathbf{B} sobre \mathbf{A} como un vector en la dirección de \mathbf{A} . *Resp.* $1.50(a_x + a_z)$

- 1.20. Halle el ángulo entre $\mathbf{A} = 10\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z$ y $\mathbf{B} = -4\mathbf{a}_y + 0.5\mathbf{a}_z$ usando tanto el producto escalar como el producto vectorial. *Resp.* 161.5°
- 1.21. Halle el ángulo entre $\mathbf{A} = 5.8\mathbf{a}_x + 1.55\mathbf{a}_z$ y $\mathbf{B} = -6.93\mathbf{a}_y + 4.0\mathbf{a}_z$ usando tanto el producto escalar como el producto vectorial. *Resp.* 135°
- 1.22. Dado el plano $4x + 3y + 2z = 12$, halle el vector unidad normal a la superficie dirigido hacia afuera del origen. *Resp.* $(4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z)/\sqrt{29}$
- 1.23. Demuestre que los campos vectoriales \mathbf{A} y \mathbf{B} son siempre perpendiculares si $A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0$.
- 1.24. Halle la relación que deben satisfacer las componentes cartesianas de \mathbf{A} y \mathbf{B} si los campos vectoriales son siempre paralelos.

$$\text{Resp. } \frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$$

- 1.25. Exprese el vector unidad dirigido hacia el origen desde un punto arbitrario sobre la línea descrita por $x = 0$, $y = 3$.

$$\text{Resp. } \mathbf{a} = \frac{-3\mathbf{a}_y - z\mathbf{a}_z}{\sqrt{9 + z^2}}$$

- 1.26. Exprese el vector unidad dirigido hacia el punto (x_1, y_1, z_1) desde un punto arbitrario en el plano $y = -5$.

$$\text{Resp. } \mathbf{a} = \frac{(x_1 - x)\mathbf{a}_x + (y_1 + 5)\mathbf{a}_y + (z_1 - z)\mathbf{a}_z}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 + 5)^2 + (z_1 - z)^2}}$$

- 1.27. Exprese el vector unidad dirigido hacia el punto $(0, 0, h)$ desde un punto arbitrario en el plano $z = -2$. Explique el resultado cuando h se aproxima a -2 .

$$\text{Resp. } \mathbf{a} = \frac{-x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y + (h + 2)\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + (h + 2)^2}}$$

- 1.28. Dados $\mathbf{A} = 5\mathbf{a}_x$ y $\mathbf{B} = 4\mathbf{a}_x + B_y\mathbf{a}_y$, halle un B_y tal que el ángulo entre \mathbf{A} y \mathbf{B} sea 45° . Si \mathbf{B} tiene también un término $B_z\mathbf{a}_z$, ¿qué relación debe existir entre B_y y B_z ?

$$\text{Resp. } B_y = \pm 4, \quad \sqrt{B_y^2 + B_z^2} = 4$$

- 1.29. Demuestre que el valor absoluto de $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ es el volumen del paralelepípedo con aristas \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} . (*Sugerencia:* Primero demuestre que $|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|$ es el área de la base.)

- 1.30. Dados $\mathbf{A} = 2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_z$, $\mathbf{B} = 3\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$, y $\mathbf{C} = -2\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z$, demuestre que \mathbf{C} es perpendicular a \mathbf{B} y a \mathbf{A} .

- 1.31. Dados $\mathbf{A} = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_z$, y $\mathbf{C} = -\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y$, halle $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$. Examine otras variantes del triple producto escalar. *Resp.* -4

- 1.32. Con los vectores del problema 1.31, halle $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$.

$$\text{Resp. } -8\mathbf{a}_z$$

- 1.33. Encuentre el vector unidad dirigido desde $(2, -5, -2)$ hacia $(14, -5, 3)$.

$$\text{Resp. } \mathbf{a} = \frac{12}{13}\mathbf{a}_x + \frac{5}{13}\mathbf{a}_z$$

- 1.34.** Indique por qué el método del problema 1.1 no puede ser usado en coordenadas cilíndricas para los puntos (r_1, ϕ_1, z_1) y (r_2, ϕ_2, z_2) . Hágase la misma pregunta respecto de las coordenadas esféricas.

- 1.35.** Verifique que la distancia d entre los dos puntos del problema 1.34 está dada por:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) + (z_2 - z_1)^2$$

- 1.36.** Halle el vector dirigido desde $(10, 3\pi/4, \pi/6)$ hacia $(5, \pi/4, \pi)$, donde los puntos están dados en coordenadas esféricas. *Resp.* $-9.66 \mathbf{a}_x - 3.54 \mathbf{a}_y + 10.61 \mathbf{a}_z$

- 1.37.** Halle la distancia entre $(2, \pi/6, 0)$ y $(1, \pi, 2)$. Los puntos están dados en coordenadas cilíndricas. *Resp.* 3.53

- 1.38.** Halle la distancia entre $(1, \pi/4, 0)$ y $(1, 3\pi/4, \pi)$. Los puntos están dados en coordenadas esféricas. *Resp.* 2.0

- 1.39.** Utilice coordenadas esféricas e integre para hallar el área de la región $0 \leq \phi \leq \alpha$ sobre la concha esférica de radio a . ¿Cuál es el resultado cuando $\alpha = 2\pi$? *Resp.* $2\alpha a^2$, $A = 4\pi a^2$

- 1.40.** Utilice coordenadas cilíndricas para hallar el área de la superficie curva de un cilindro circular recto de radio a y radio h . *Resp.* $2\pi ah$

- 1.41.** Utilice coordenadas cilíndricas e integre para obtener el volumen del cilindro circular recto del problema 1.40. *Resp.* $\pi a^2 h$

- 1.42.** Utilice coordenadas esféricas para escribir las áreas diferenciales de superficie dS_1 y dS_2 y luego integre para obtener las áreas de las superficies marcadas con 1 y 2 en la figura 1-15. *Resp.* $\pi/4, \pi/6$

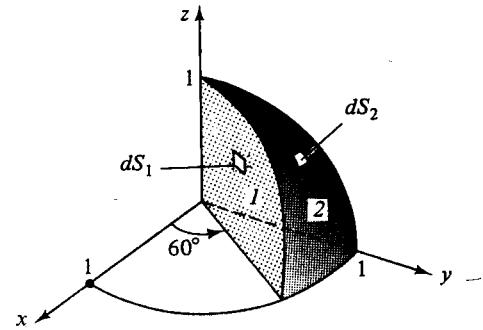


Fig. 1-15

- 1.43.** Utilice coordenadas esféricas para hallar el volumen de una concha hemisférica de radio interno 2.00 m y radio externo 2.02 m. *Resp.* 0.162 m^3

- 1.44.** Utilizando coordenadas esféricas para expresar el diferencial de volumen, integre para obtener el volumen definido por $1 \leq r \leq 2 \text{ m}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, y $0 \leq \phi \leq \pi/2$. *Resp.* $\frac{7\pi}{6} \text{ m}^3$

- 1.45.** Transforme el vector $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ a coordenadas cilíndricas. *Resp.* $\mathbf{A} = (A_x \cos \phi + A_y \sin \phi) \mathbf{a}_r + (-A_x \sin \phi + A_y \cos \phi) \mathbf{a}_\theta + A_z \mathbf{a}_z$

- 1.46.** Transforme el vector $\mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi$ a coordenadas cartesianas.

$$\begin{aligned} \text{Resp. } \mathbf{A} &= \left(\frac{A_r x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{A_\theta x z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{A_\phi y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \mathbf{a}_x \\ &+ \left(\frac{A_r y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{A_\theta y z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{A_\phi x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \mathbf{a}_y \\ &+ \left(\frac{A_r z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{A_\theta \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

- 1.47. Transforme el vector $\mathbf{F} = r^{-1}\mathbf{a}_r$, que está expresado en coordenadas esféricas, a coordenadas cartesianas.

Resp. $\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z}{x^2 + y^2 + z^2}$

- 1.48. En coordenadas cilíndricas $r = \text{constante}$ define un cilindro circular recto y $\mathbf{F} = F\mathbf{a}_r$, describe una fuerza que es normal en cualquier parte a la superficie. Exprese la superficie y la fuerza en coordenadas cartesianas.

Resp. $x^2 + y^2 = \text{const.}$, $\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

- 1.49. Transforme el campo vectorial $\mathbf{F} = 2 \cos \theta \mathbf{a}_r + \sin \theta \mathbf{a}_\theta$ a coordenadas cartesianas.

Resp. $\mathbf{F} = \frac{3xz\mathbf{a}_x + 3yz\mathbf{a}_y + (2z^2 - x^2 - y^2)\mathbf{a}_z}{x^2 + y^2 + z^2}$

- 1.50. Dibuje el campo vectorial $\mathbf{F} = y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y$. Resp. Véase figura 1-16.

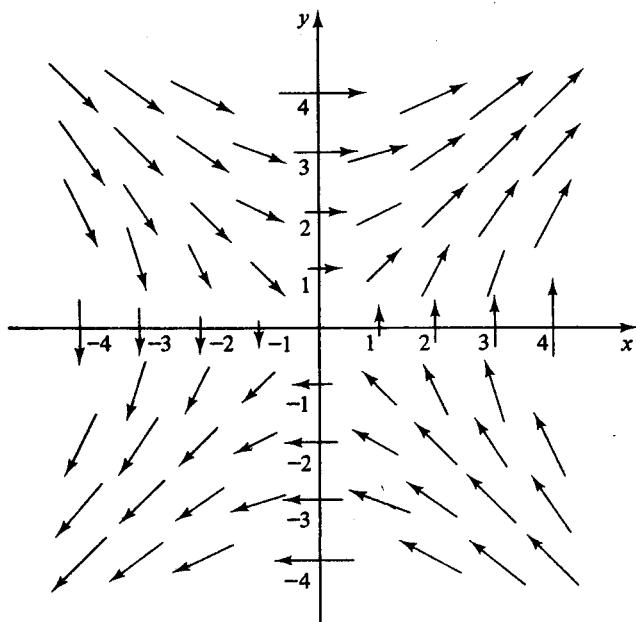


Fig. 1-16

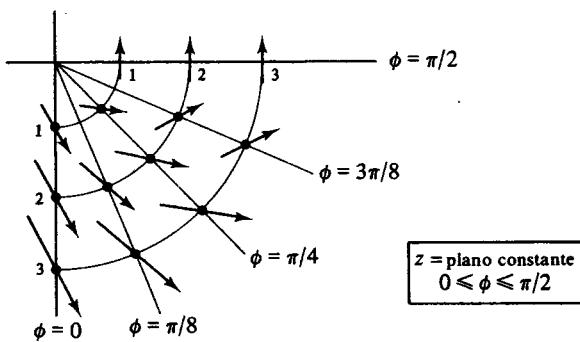


Fig. 1-17

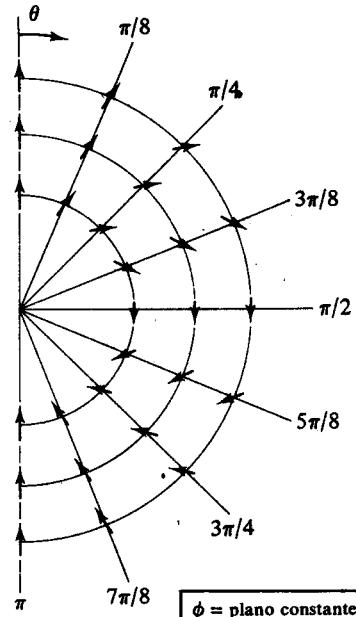


Fig. 1-18

- 1.51. Dibuje el campo de coordenadas cilíndricas $\mathbf{F} = 2r \cos \phi \mathbf{a}_r + r\mathbf{a}_\phi$. Resp. Véase figura 1-17. AEP

- 1.52. Dibuje el campo vectorial del problema 1.49, usando coordenadas esféricas. Resp. Véase figura 1-18.

Capítulo 2

Fuerzas de Coulomb e intensidad del campo eléctrico

2.1 LEY DE COULOMB

Existe una fuerza entre dos cargas, directamente proporcional a las magnitudes de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Esta es la *ley de Coulomb*, desarrollada mediante pequeños cuerpos cargados y una delicada balanza de torsión. En forma vectorial, se establece así:

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon d^2} \mathbf{a}$$

A lo largo de este libro serán utilizadas las unidades SI racionalesadas. La fuerza está dada en newtons (N), la distancia en metros (m) y la unidad (derivada) de carga es el coulomb (C). El sistema se raciona con el factor 4π , introducido en esta ley para que no aparezca más tarde en las ecuaciones de Maxwell. ϵ es la *permittividad* del medio, en unidades $C^2/N \cdot m^2$ o, lo que es lo mismo, en faradios por metro (F/m). En el espacio libre o vacío,

$$\epsilon = \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m} \approx \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ F/m}$$

En un medio diferente al espacio libre, $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, donde ϵ_r es la *permittividad relativa o constante dieléctrica*. En todos los problemas y ejemplos se debe suponer un espacio libre y adoptarse el valor aproximado dado de ϵ_0 , a menos que se establezca lo contrario.

Los subíndices ayudarán a identificar la fuerza y a expresar su dirección. De esta manera,

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \mathbf{a}_{21}$$

describe una fuerza ejercida sobre Q_1 , donde el vector \mathbf{a}_{21} está dirigido de Q_2 a Q_1 .

EJEMPLO 1: Hallar la fuerza ejercida sobre la carga Q_1 , $20 \mu\text{C}$, debida a la carga Q_2 , $-300 \mu\text{C}$, sabiendo que Q_1 se sitúa en $(0, 1, 2)$ m y Q_2 en $(2, 0, 0)$ m.

Como 1 C es una unidad más bien grande, las cargas se expresan más a menudo en microcoulombs (μC), nanocoulombs (nC) o picocoulombs (pC). (Véase apéndice para los prefijos del sistema SI.) Refiriéndonos a la figura 2-1,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{21} &= -2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z \\ \mathbf{a}_{21} &= \frac{1}{3}(-2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z)\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= \frac{(20 \times 10^{-6})(-300 \times 10^{-6})}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(3)^2} \left(\frac{-2\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{3} \right) \\ &= 6\left(\frac{2\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z}{3}\right) \text{ N}\end{aligned}$$

La magnitud de la fuerza es 6 N y la dirección es tal que Q_1 es atraída hacia Q_2 .

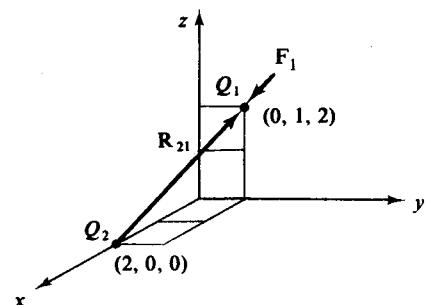


Fig. 2-1

En la región que rodea una carga puntual aislada, existe un *campo de fuerza* de simetría esférica. Este se pone en evidencia cuando la carga Q se halla fija en el origen, como en la figura 2-2, y una segunda carga, Q_T , se desplaza por los alrededores de la región. En cada punto actúa una fuerza a lo largo de la línea que une las dos cargas, dirigida hacia fuera del origen, si las cargas son del mismo signo. Esto puede expresarse en coordenadas esféricas así:

$$\mathbf{F}_T = \frac{QQ_T}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

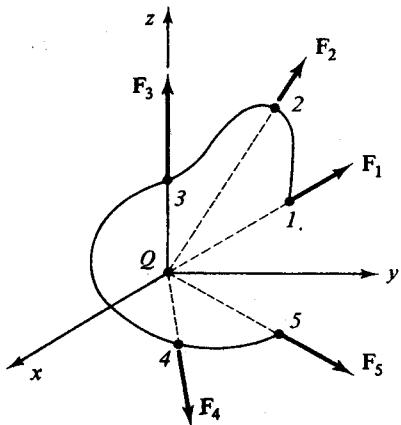


Fig. 2-2

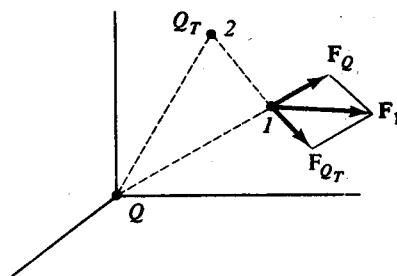


Fig. 2-3

Debe observarse que, a menos que $Q_T \ll Q$, el campo simétrico alrededor de Q está perturbado por Q_T . En el punto I de la figura 2-3 la fuerza aparece como el vector suma

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{Q_T} + \mathbf{F}_Q$$

Esto no debe sorprender, ya que si Q tiene un campo de fuerza, lo mismo sucede con Q_T . Cuando las dos cargas están en la misma región el campo resultante será, necesariamente, la suma vectorial punto por punto de los dos campos. Este es el *principio de superposición* para fuerzas de Coulomb y se extiende a un número cualquiera de cargas.

2.2 INTENSIDAD DEL CAMPO ELECTRICO

Supóngase que, en el caso anterior, la carga de prueba Q_T es suficientemente pequeña como para no perturbar significativamente el campo de la carga puntual fija Q . Entonces la *intensidad de campo eléctrico*, E , debida a Q se define como la fuerza por unidad de carga sobre Q_T :

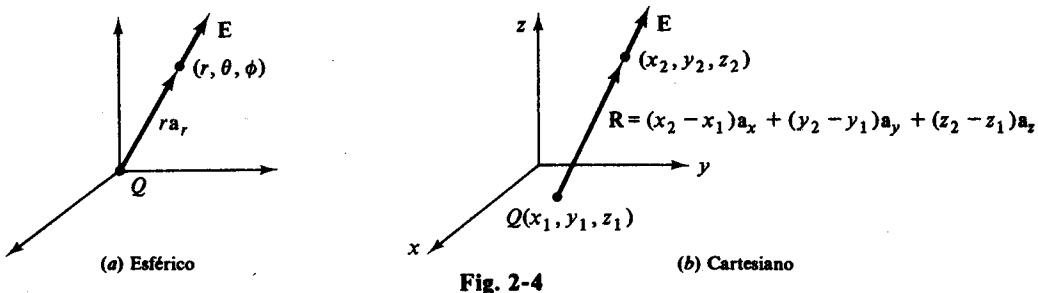
$$\mathbf{E} = \frac{1}{Q_T} \mathbf{F}_T = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

Esta expresión de E está dada en coordenadas esféricas que tienen su origen en la posición de Q [figura 2-4(a)]. Puede ser transformada a otros sistemas coordinados con el método dado en la sección 1.6. En un sistema arbitrario de coordenadas cartesianas,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$

donde el vector separación R se define en la figura 2-4(b).

Las unidades de E son newtons por coulomb (N/C) o, en forma equivalente, voltios por metro (V/m).



2.3 DISTRIBUCIONES DE CARGA

Carga volumétrica

Cuando una carga está distribuida a través de un volumen dado, cada elemento de carga contribuye al campo eléctrico en un punto externo. Se requiere entonces un proceso sumatorio o de integración para obtener el campo eléctrico total. Aun cuando se sabe que la carga eléctrica más pequeña es un electrón o un protón, es muy útil considerar distribuciones continuas (porque son diferenciables) de carga y definir una *densidad de carga* por

$$\rho = \frac{dQ}{dv} \quad (\text{C/m}^3)$$

Obsérvense las unidades entre paréntesis. Se pretende establecer que ρ está dado en C/m^3 siempre que las variables estén expresadas en las unidades SI apropiadas (C para Q y m^3 para v). Esta convención será utilizada a lo largo de todo el libro.

En relación al volumen v de la figura 2-5, cada carga diferencial dQ produce un campo eléctrico diferencial

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$

en el punto de observación P . Si se supone que la única carga de la región está contenida dentro del volumen, el campo eléctrico total en P se obtiene por integración sobre el volumen:

$$\mathbf{E} = \int_v \frac{\rho \mathbf{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} dv$$

Carga laminar (superficial)

La carga puede estar también distribuida sobre una superficie o una lámina. Entonces cada carga diferencial dQ que esté sobre la lámina produce un campo eléctrico diferencial

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$

en el punto P (véase figura 2-6). Si la *densidad superficial de carga* es ρ_s (C/m^2) y si ninguna otra carga se halla presente en la región, entonces el campo eléctrico total en P es

$$\mathbf{E} = \int_S \frac{\rho_s \mathbf{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} dS$$

Carga lineal

Si la carga está distribuida sobre una línea, cada elemento diferencial de carga a lo largo de la línea produce un campo eléctrico diferencial

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$

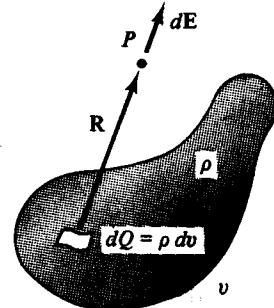


Fig. 2-5

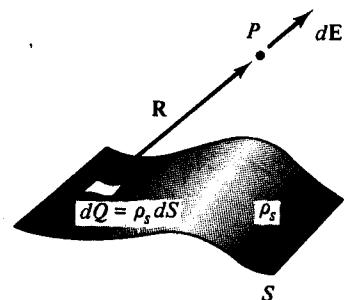


Fig. 2-6

en P (véase figura 2-7). Y si la *densidad lineal de carga* es ρ_e (C/m) y no existe ninguna otra carga en la región, entonces el campo eléctrico total en P es

$$\mathbf{E} = \int_L \frac{\rho_e \mathbf{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} d\ell$$

Debe hacerse hincapié en que en las tres distribuciones de carga anteriormente citadas y en sus correspondientes integrales para \mathbf{E} , el vector unidad \mathbf{a}_R es variable y depende de las coordenadas del elemento de carga dQ . Así pues, \mathbf{a}_R no puede ser sacado del integrando.

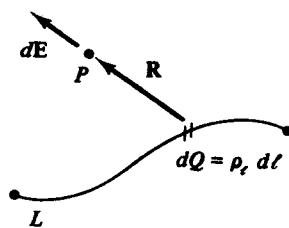


Fig. 2-7

2.4 CONFIGURACIONES ESTANDAR DE CARGA

Las integraciones de los tres casos especiales discutidos en la sección 2.3 son innecesarias o de fácil cálculo. Respecto de estas configuraciones estándar (y de otras que serán analizadas en este capítulo) debe anotarse que la carga no está "sobre un conductor". Cuando un problema establece que la carga está distribuida en la forma de disco, por ejemplo, ello no significa que hay un conductor en forma de disco con carga sobre su superficie. (En el capítulo 6, se examinan conductores con carga superficial). Aunque se requiera un esfuerzo de la imaginación se debe mirar estas cargas como algo suspendido en el espacio en una configuración especial.

Carga puntual

Como se determinó en la sección 2.3, el campo de una sola carga puntual Q está dado por

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad (\text{coordenadas esféricas})$$

Véase figura 2-4(a). Este es un campo de simetría esférica que cumple una *ley del inverso del cuadrado* (como la gravedad).

Carga de línea infinita

Si la carga está distribuida con densidad *uniforme* ρ_e (C/m) a lo largo de una línea recta *infinita* que escogeremos como eje z , entonces el campo está dado por

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_e}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{a}_r \quad (\text{coordenadas cilíndricas})$$

Véase figura 2-8. Este campo tiene simetría cilíndrica y es inversamente proporcional a la *primera potencia* de la distancia desde la línea de carga. Para una derivación de \mathbf{E} , véase el problema 2-9.

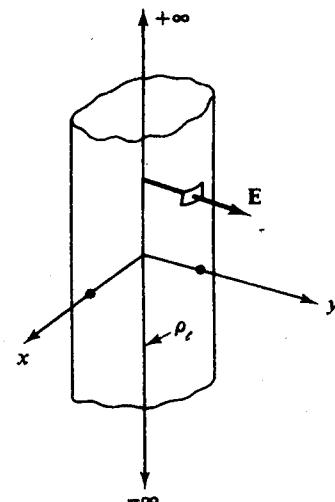


Fig. 2-8

Cargas de plano infinito

Si la carga está distribuida con densidad *uniforme* ρ_s (C/m^2) sobre un *plano infinito*, entonces el campo está dado por

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_n$$

Véase figura 2-9. Este campo es de magnitud constante y tiene simetría espectral con relación al plano de carga. Para una derivación de \mathbf{E} , véase el problema 2.12.

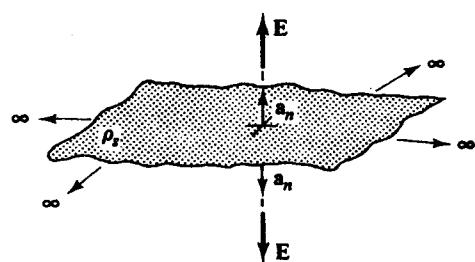


Fig. 2-9

Problemas resueltos

- 2.1.** Dos cargas puntuales, $Q_1 = 50 \mu\text{C}$ y $Q_2 = 10 \mu\text{C}$, están localizadas en $(-1, 1, -3)$ m y $(3, 1, 0)$ m respectivamente (figura 2-10). Halle la fuerza sobre Q_1 .

$$\mathbf{R}_{21} = -4\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_{21} = \frac{-4\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z}{5}$$

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{21}^2} \mathbf{a}_{21}$$

$$= \frac{(50 \times 10^{-6})(10^{-5})}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(5)^2} \left(\frac{-4\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z}{5} \right)$$

$$= (0.18)(-0.8\mathbf{a}_x - 0.6\mathbf{a}_z) \text{ N}$$

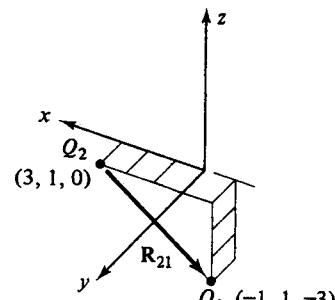


Fig. 2-10

La fuerza tiene una magnitud de 0.18 N y la dirección dada por el vector unitario $-0.8\mathbf{a}_x - 0.6\mathbf{a}_z$. En forma de componentes

$$\mathbf{F}_1 = -0.144\mathbf{a}_x - 0.108\mathbf{a}_z \text{ N}$$

- 2.2.** Respecto de la figura 2-11, halle la fuerza sobre una carga de $100 \mu\text{C}$ en $(0, 0, 3)$ m si cuatro cargas iguales de $20 \mu\text{C}$ están localizadas en los ejes x y y en ± 4 m.

Considere la fuerza debida a la carga en $y = 4$

$$\frac{(10^{-4})(20 \times 10^{-6})}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(5)^2} \left(\frac{-4\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z}{5} \right)$$

La componente y se anula por la carga en $y = -4$. En forma similar, las componentes x debidas a las otras dos cargas se anulan. Por consiguiente,

$$\mathbf{F} = 4 \left(\frac{18}{25} \right) \left(\frac{3}{5} \mathbf{a}_z \right) = 1.73 \mathbf{a}_z \text{ N}$$

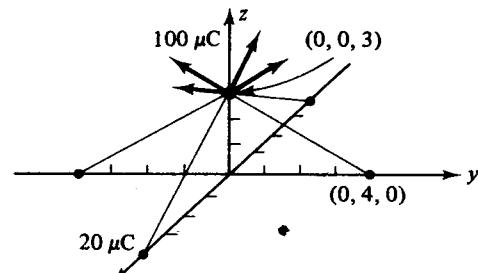


Fig. 2-11

- 2.3.** Respecto de la figura 2-12, la carga puntual $Q_1 = 300 \mu\text{C}$, situada en $(1, -1, -3)$ experimenta una fuerza

$$\mathbf{F}_1 = 8\mathbf{a}_x - 8\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z \text{ N}$$

debida a la carga puntual Q_2 en $(3, -3, -2)$ m.

Determine Q_2

$$\mathbf{R}_{21} = -2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$$

Observe que, como

$$\frac{8}{-2} = \frac{-8}{2} = \frac{4}{-1}$$

la fuerza dada está a lo largo de \mathbf{R}_{21} (véase problema 1.24), como debe ser.

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$

$$8\mathbf{a}_x - 8\mathbf{a}_y + 4\mathbf{a}_z = \frac{(300 \times 10^{-6})Q_2}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(3)^2} \left(\frac{-2\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z}{3} \right)$$

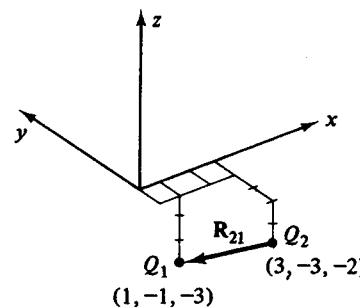


Fig. 2-12

Resolviendo, $Q_2 = -40 \mu\text{C}$.

- 2.4.** Halle la fuerza sobre una carga puntual de $50\mu\text{C}$ en $(0, 0, 5)$ m debida a una carga de $500\pi\mu\text{C}$ que está distribuida uniformemente sobre un disco circular $r \leq 5$ m, $z = 0$ m (véase figura 2-13).

La densidad de carga es

$$\rho_s = \frac{Q}{A} = \frac{500\pi \times 10^{-6}}{\pi(5)^2} = 0.2 \times 10^{-4} \text{ C/m}^2$$

En coordenadas cilíndricas,

$$\mathbf{R} = -r\mathbf{a}_r + 5\mathbf{a}_z$$

Entonces, cada carga diferencial se resuelve en una fuerza diferencial

$$d\mathbf{F} = \frac{(50 \times 10^{-6})(\rho_s r dr d\phi)}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(r^2 + 25)} \left(-r\mathbf{a}_r + 5\mathbf{a}_z \right)$$

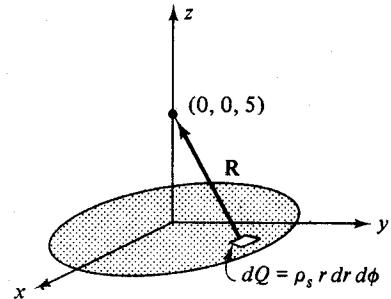


Fig. 2-13

Antes de integrar, obsérvese que la componente radial se anula y que \mathbf{a}_z es constante. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_0^{2\pi} \int_0^5 \frac{(50 \times 10^{-6})(0.2 \times 10^{-4}) 5r dr d\phi}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(r^2 + 25)^{3/2}} \mathbf{a}_z \\ &= 90\pi \int_0^5 \frac{r dr}{(r^2 + 25)^{3/2}} \mathbf{a}_z = 90\pi \left[\frac{-1}{\sqrt{r^2 + 25}} \right]_0^5 \mathbf{a}_z = 16.56 \mathbf{a}_z \text{ N} \end{aligned}$$

- 2.5.** Repita el problema 2.4 para un disco de radio igual a 2 m.

Reducir el radio tiene dos efectos: la densidad de carga se aumenta por un factor

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(5)^2}{(2)^2} = 6.25$$

mientras la integral sobre r se convierte en

$$\int_0^2 \frac{r dr}{(r^2 + 25)^{3/2}} = 0.0143 \quad \text{en lugar de} \quad \int_0^5 \frac{r dr}{(r^2 + 25)^{3/2}} = 0.0586$$

La fuerza resultante es

$$\mathbf{F} = (6.25) \left(\frac{0.0143}{0.0586} \right) (16.56 \mathbf{a}_z \text{ N}) = 25.27 \mathbf{a}_z \text{ N}$$

- 2.6.** Halle la expresión del campo eléctrico en P debido a una carga puntual Q en (x_1, y_1, z_1) . Repita el ejercicio con la carga colocada en el origen.

Como se muestra en la figura 2-14,

$$\mathbf{R} = (x - x_1)\mathbf{a}_x + (y - y_1)\mathbf{a}_y + (z - z_1)\mathbf{a}_z$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{3/2}} (x - x_1)\mathbf{a}_x + (y - y_1)\mathbf{a}_y + (z - z_1)\mathbf{a}_z \end{aligned}$$

Cuando la carga está en el origen,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$$

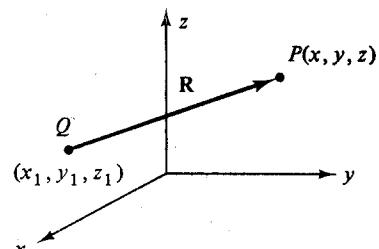


Fig. 2-14

pero esta expresión no muestra la simetría del campo. En coordenadas esféricas con Q en el origen,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

y ahora la simetría es evidente.

- 2.7.** Halle \mathbf{E} en el origen debido a una carga puntual de 64.4 nC localizada en $(-4, 3, 2) \text{ m}$, en coordenadas cartesianas.

La intensidad del campo eléctrico debido a una carga Q situada en el origen es en coordenadas esféricas:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

En este problema la distancia es $\sqrt{29} \text{ m}$ y el vector de la carga al origen, donde \mathbf{E} debe ser evaluado, es $\mathbf{R} = 4\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z$.

$$\mathbf{E} = \frac{64.4 \times 10^{-9}}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(29)} \left(\frac{4\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z}{\sqrt{29}} \right) = (20.0) \left(\frac{4\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z}{\sqrt{29}} \right) \text{ V/m}$$

- 2.8.** Halle \mathbf{E} en $(0, 0, 5) \text{ m}$ debido a $Q_1 = 0.35 \mu\text{C}$ en $(0, 4, 0) \text{ m}$ y $Q_2 = -0.55 \mu\text{C}$ en $(3, 0, 0) \text{ m}$ (ver figura 2-15).

$$\mathbf{R}_1 = -4\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{R}_2 = -3\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{0.35 \times 10^{-6}}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(41)} \left(\frac{-4\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z}{\sqrt{41}} \right) \\ = -48.0\mathbf{a}_y + 60.0\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{-0.55 \times 10^{-6}}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(34)} \left(\frac{-3\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_z}{\sqrt{34}} \right) \\ = 74.9\mathbf{a}_x - 124.9\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

$$\mathbf{y} \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 74.9\mathbf{a}_x - 48.0\mathbf{a}_y - 64.9\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

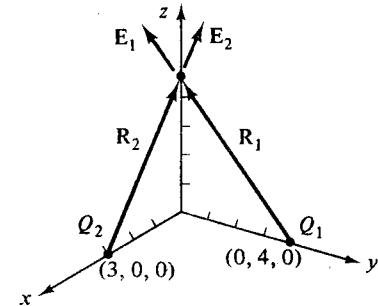


Fig. 2-15

- 2.9.** Una carga se distribuye uniformemente a lo largo de una línea recta infinita, con densidad ρ_e . Desarrolle la expresión para \mathbf{E} en un punto general P .

Se usarán coordenadas cilíndricas, siendo la línea de carga el eje z (ver figura 2-16). En P ,

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{r\mathbf{a}_r - z\mathbf{a}_z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)$$

Como para cada dQ en z hay otra carga dQ en $-z$, las componentes z se cancelan. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_e r dz}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{a}_r \\ &= \frac{\rho_e r}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z}{r^2 \sqrt{r^2 + z^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}_r = \frac{\rho_e}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{a}_r \end{aligned}$$

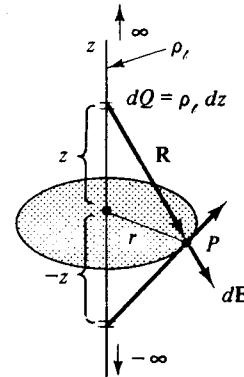


Fig. 2-16

- 2.10.** Sobre la linea descrita por $x = 2 \text{ m}$, $y = -4 \text{ m}$ se distribuye uniformemente una carga de densidad $\rho_e = 20 \text{ nC/m}$. Determine el campo eléctrico \mathbf{E} en $(-2, -1, 4) \text{ m}$.

Con algunas modificaciones debidas a las coordenadas cartesianas la expresión que se obtuvo en el problema 2.9 puede ser usada en esta carga lineal uniforme. Como la línea es paralela a \mathbf{a}_z , el campo no tiene componente z . Respecto de la figura 2-17,

$$\mathbf{R} = -4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{y} \quad \mathbf{E} = \frac{20 \times 10^{-9}}{2\pi\epsilon_0(5)} \left(\frac{-4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y}{5} \right) = -57.6\mathbf{a}_x + 43.2\mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

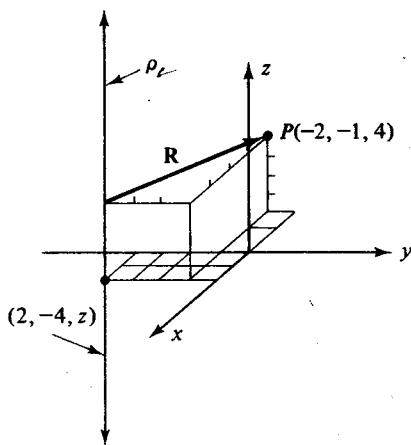


Fig. 2-17

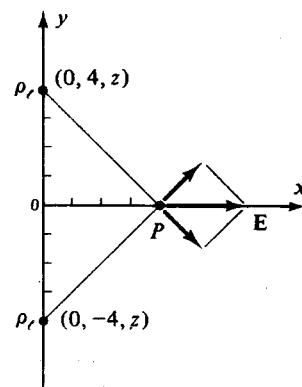


Fig. 2-18

- 2.11. Como se muestra en la figura 2-18, dos cargas lineales uniformes de densidad $\rho_t = 4 \text{ nC/m}$ caen en el plano $x = 0$ en $y = \pm 4 \text{ m}$. Hallar \mathbf{E} en $(4, 0, 10) \text{ m}$.

Las líneas de carga son ambas paralelas a \mathbf{a}_z ; sus campos son radiales y paralelos al plano xy . Para cualquier carga lineal la magnitud del campo en P es

$$E = \frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{18}{\sqrt{2}} \text{ V/m}$$

El campo debido a ambas cargas lineales es, por superposición,

$$\mathbf{E} = 2 \left(\frac{18}{\sqrt{2}} \cos 45^\circ \right) \mathbf{a}_x = 18 \mathbf{a}_x \text{ V/m}$$

- 2.12. Desarrolle una expresión para \mathbf{E} debido a cargas uniformemente distribuidas sobre un plano infinito con densidad ρ_s .

Se usará el sistema de coordenadas cilíndricas, con la carga en el plano $z = 0$ como se muestra en la figura 2-19.

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_s r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0(r^2 + z^2)} \left(-r\mathbf{a}_r + z\mathbf{a}_z \right)$$

La simetría respecto del eje z produce la cancelación de las componentes radiales.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\rho_s r^2 dr d\phi}{4\pi\epsilon_0(r^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z \\ &= \frac{\rho_s z}{2\epsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^{\infty} \mathbf{a}_z = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

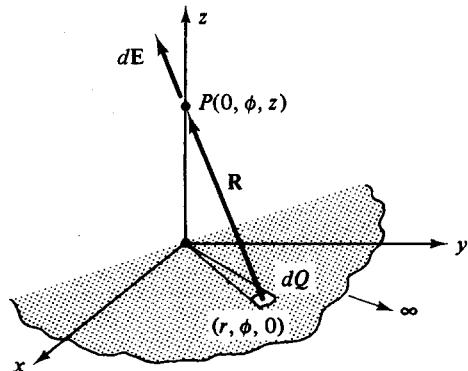


Fig. 2-19

Este resultado se aplica a los puntos que están situados por encima del plano xy . Para puntos situados por debajo del plano xy el vector unidad cambia a $-\mathbf{a}_z$. La forma generalizada puede expresarse empleando \mathbf{a}_n , o vector unidad normal:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_n$$

El campo eléctrico es en todo punto normal al plano de carga y su magnitud es independiente de la distancia al plano.

- 2.13.** Como se muestra en la figura 2-20, en el plano $y = 3$ m se distribuye uniformemente una carga de densidad $\rho_s = (10^{-8}/6\pi) \text{ C/m}^2$. Determine \mathbf{E} en todos los puntos.

Para $y > 3$ m,

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_y \\ &= 30\mathbf{a}_y \text{ V/m}\end{aligned}$$

y para $y < 3$ m,

$$\mathbf{E} = -30\mathbf{a}_y \text{ V/m}$$

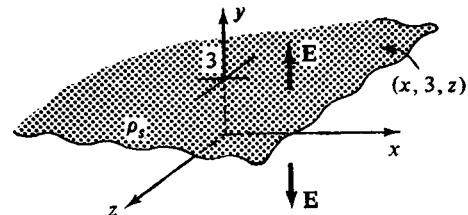


Fig. 2-20

- 2.14.** Dos cargas laminares uniformes e infinitas, cada una con densidad ρ_s , se localizan en $x = \pm 1$ (figura 2-21). Determine \mathbf{E} en todas las regiones.

En la figura 2-21 sólo se muestra parte de las dos láminas de carga. Ambas láminas producen campos \mathbf{E} que se dirigen a lo largo de x , independiente de la distancia. Entonces

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \begin{cases} -(\rho_s/\epsilon_0)\mathbf{a}_x & x < -1 \\ 0 & -1 < x < 1 \\ (\rho_s/\epsilon_0)\mathbf{a}_x & x > 1 \end{cases}$$

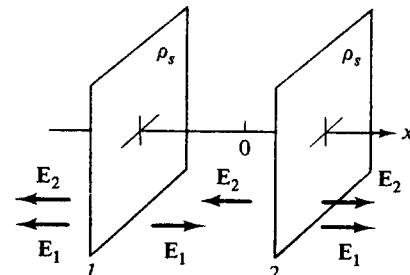


Fig. 2-21

- 2.15.** Repita el problema 2.14 con ρ_s sobre $x = -1$ y $-\rho_s$ en $x = 1$.

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ (\rho_s/\epsilon_0)\mathbf{a}_x & -1 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

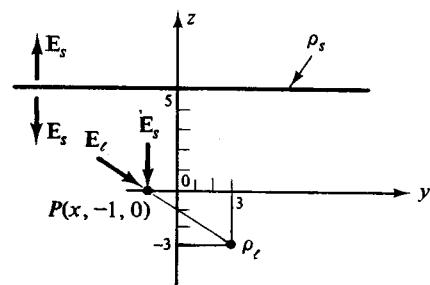
- 2.16.** Una carga laminar uniforme con $\rho_s = (1/3\pi) \text{ nC/m}^2$ está localizada en $z = 5$ m y una carga lineal uniforme con $\rho_t = (-25/9) \text{ nC/m}$ en $z = -3$ m, $y = 3$ m. Encuentre \mathbf{E} en $(x, -1, 0)$ m.

Las dos configuraciones de carga son paralelas al eje x . En consecuencia, la figura 2-22 se trazó mirando hacia plano xy desde x positivo. Debido a la carga laminar,

$$\mathbf{E}_s = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_z$$

En P , $\mathbf{a}_n = -\mathbf{a}_z$ y

$$\mathbf{E}_s = -6\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$



Debido a la carga lineal,

$$\mathbf{E}_t = \frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{a}_r$$

y en P

$$\mathbf{E}_t = 8\mathbf{a}_y - 6\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

El campo eléctrico total es la suma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_s = 8\mathbf{a}_y - 12\mathbf{a}_z \text{ V/m.}$$

Fig. 2-22

- 2.17.** Determinar \mathbf{E} en $(2, 0, 2)$ m debido a las tres distribuciones estándar de carga siguientes: una carga laminar uniforme en $x = 0$ m con $\rho_{s1} = (1/3\pi) \text{nC/m}^2$, una carga laminar uniforme en $x = 4$ m con $\rho_{s2} = (-1/3\pi) \text{nC/m}^2$ y una carga lineal uniforme en $x = 6$ m, $y = 0$ m con $\rho_t = -2 \text{nC/m}$.

Como las 3 configuraciones de carga son paralelas a \mathbf{a}_z , no existen componentes z del campo. El punto $(2, 0, z)$ tendrá el mismo campo $(2, 0, z)$. En la figura 2-23, P está localizado entre las dos láminas de carga, donde los campos se suman debido a la diferencia de signo.

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{\rho_{s1}}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_n + \frac{\rho_{s2}}{2\epsilon_0} \mathbf{a}_n + \frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{a}_r \\ &= 6\mathbf{a}_x + 6\mathbf{a}_x + 9\mathbf{a}_x \\ &= 21\mathbf{a}_x \text{ V/m}\end{aligned}$$

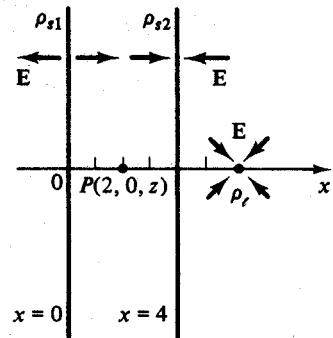


Fig. 2-23

- 2.18.** Como se muestra en la figura 2-24, a lo largo del eje z se distribuye una carga entre $z = \pm 5$ m con una densidad uniforme $\rho_t = 20 \text{nC/m}$. Determine \mathbf{E} en $(2, 0, 0)$ m en coordenadas cartesianas. También exprese la respuesta en coordenadas cilíndricas.

$$d\mathbf{E} = \frac{20 \times 10^{-9} dz}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(4+z^2)} \left(\frac{2\mathbf{a}_x - z\mathbf{a}_z}{\sqrt{4+z^2}} \right) \text{ (V/m)}$$

La simetría con respecto al plano $z = 0$ elimina cualquier componente z en el resultado.

$$\mathbf{E} = 180 \int_{-5}^5 \frac{2 dz}{(4+z^2)^{3/2}} \mathbf{a}_x = 167\mathbf{a}_x \text{ V/m}$$

En coordenadas cilíndricas $\mathbf{E} = 167\mathbf{a}_r \text{ V/m}$.

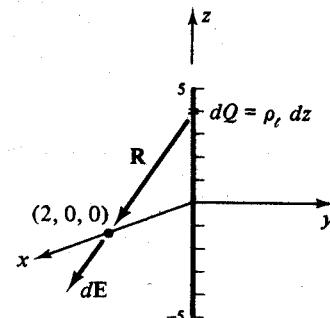


Fig. 2-24

- 2.19.** A lo largo del eje z se distribuye una carga desde $z = 5$ m hasta ∞ y desde $z = -5$ m hasta $-\infty$ (ver figura 2-25) con la misma densidad que en el problema 2.18, 20nC/m . Halle \mathbf{E} en $(2, 0, 0)$ m.

$$d\mathbf{E} = \frac{20 \times 10^{-9} dz}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(4+z^2)} \left(\frac{2\mathbf{a}_x - z\mathbf{a}_z}{\sqrt{4+z^2}} \right) \text{ (V/m)}$$

Nuevamente se elimina la componente z .

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= 180 \left[\int_5^\infty \frac{2 dz}{(4+z^2)^{3/2}} + \int_{-\infty}^{-5} \frac{2 dz}{(4+z^2)^{3/2}} \right] \mathbf{a}_x \\ &= 13\mathbf{a}_x \text{ V/m}\end{aligned}$$

En coordenadas cilíndricas, $\mathbf{E} = 13\mathbf{a}_r \text{ V/m}$.

Cuando las configuraciones de carga de los problemas 2.18 y 2.19 se superponen, el resultado es una carga lineal uniforme.

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{a}_r = 180\mathbf{a}_r \text{ V/m}$$

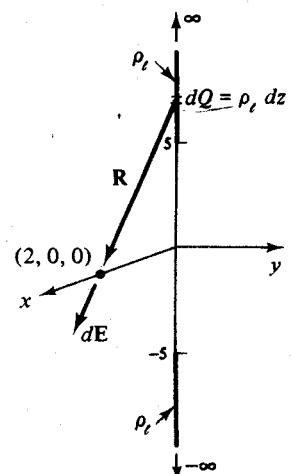


Fig. 2-25

- 2.20.** Halle, en coordenadas cilíndricas, la intensidad de campo eléctrico \mathbf{E} en $(0, \phi, z)$ debido al disco uniformemente cargado $r \leq a, z = 0$ (ver figura 2-26).

Si la densidad de carga constante es ρ_s ,

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_s r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0(r^2 + h^2)} \left(\frac{-r\mathbf{a}_r + h\mathbf{a}_z}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right) dQ$$

La componente radial se cancela. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\rho_s h}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{r dr d\phi}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z \\ &= \frac{\rho_s h}{2\epsilon_0} \left(\frac{-1}{\sqrt{a^2 + h^2}} + \frac{1}{h} \right) \mathbf{a}_z \end{aligned}$$

Notese que cuando $a \rightarrow \infty$, $\mathbf{E} \rightarrow (\rho_s/2\epsilon_0)\mathbf{a}_z$, el campo debido a una carga laminar uniforme.

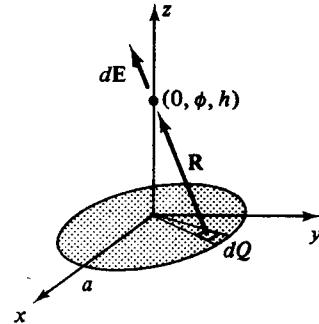


Fig. 2-26

- 2.21.** Hay una carga sobre el disco circular $r \leq a, z = 0$ de densidad $\rho_s = \rho_0 \operatorname{sen}^2 \phi$. Determine \mathbf{E} en $(0, \phi, h)$.

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_0 (\operatorname{sen}^2 \phi) r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0(r^2 + h^2)} \left(\frac{-r\mathbf{a}_r + h\mathbf{a}_z}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right) dQ$$

La distribución de carga, aunque no uniforme, tiene una simetría tal que todas las componentes radiales se cancelan.

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_0 h}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{(\operatorname{sen}^2 \phi)r dr d\phi}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z = \frac{\rho_0 h}{4\epsilon_0} \left(\frac{-1}{\sqrt{a^2 + h^2}} + \frac{1}{h} \right) \mathbf{a}_z$$

- 2.22.** Hay una carga sobre el disco circular $r \leq 4$ m, $z = 0$ de densidad $\rho_s = (10^{-4}/r)$ (C/m²). Determine \mathbf{E} en $r = 0, z = 3$ m.

$$d\mathbf{E} = \frac{(10^{-4}/r)r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0(r^2 + 9)} \left(\frac{-r\mathbf{a}_r + 3\mathbf{a}_z}{\sqrt{r^2 + 9}} \right) \text{ (V/m)}$$

Como en los problemas 2.20 y 2.21 la componente radial desaparece por simetría.

$$\mathbf{E} = (2.7 \times 10^6) \int_0^{2\pi} \int_0^4 \frac{dr d\phi}{(r^2 + 9)^{3/2}} \mathbf{a}_z = 1.51 \times 10^6 \mathbf{a}_z \text{ V/m} \quad \text{o} \quad 1.51 \mathbf{a}_z \text{ MV/m}$$

- 2.23.** Hay una carga en el plano $z = -3$ m en forma de una hoja cuadrada definida por $-2 \leq x \leq 2$ m, $-2 \leq y \leq 2$ m con densidad de carga $\rho_s = 2(x^2 + y^2 + 9)^{3/2}$ nC/m². Halle \mathbf{E} en el origen.

De la figura 2-27

$$\mathbf{R} = -x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z \quad (\text{m})$$

$$dQ = \rho_s dx dy = 2(x^2 + y^2 + 9)^{3/2} \times 10^{-9} dx dy \quad (\text{C})$$

y así

$$\begin{aligned} d\mathbf{E} &= \frac{2(x^2 + y^2 + 9)^{3/2} \times 10^{-9} dx dy}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + 9)} \\ &\times \left(\frac{-x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + 9}} \right) \text{ (V/m)} \end{aligned}$$

Debido a la simetría, solamente existe la componente z de \mathbf{E} .

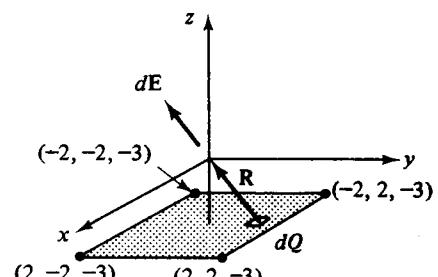


Fig. 2-27

$$\mathbf{E} = \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 \frac{6 \times 10^{-9} dx dy}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{a}_z = 864 \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

- 2.24.** Una carga de densidad uniforme $\rho_s = 0.2 \text{ nC/cm}^2$ cubre el plano $2x - 3y + z = 6 \text{ m}$. Halle \mathbf{E} en el lado del plano que contiene el origen.

Ya que la configuración de la carga es laminar uniforme, $E = \rho_s/2\epsilon_0$ y $\mathbf{E} = (17.0)\mathbf{a}_n \text{ V/m}$. Los vectores unidad normales a un plano $Ax + By + Cz = D$ son

$$\mathbf{a}_n = \pm \frac{A\mathbf{a}_x + B\mathbf{a}_y + C\mathbf{a}_z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Por lo tanto, los vectores unidad normales a este plano son

$$\mathbf{a}_n = \pm \frac{2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{14}}$$

De la figura 2-28 se desprende que el vector unidad sobre el lado del plano que contiene el origen se produce por el signo negativo. El campo eléctrico en el origen es

$$\mathbf{E} = (17.0) \left(\frac{-2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z}{\sqrt{14}} \right) \text{ V/m}$$

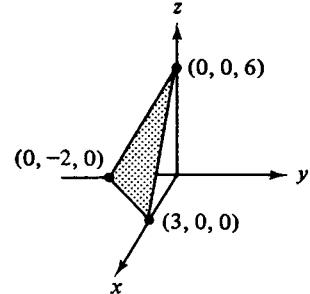


Fig. 2-28

Problemas supplementarios

- 2.25.** Dos cargas puntuales, $Q_1 = 250 \mu\text{C}$ y $Q_2 = -300 \mu\text{C}$, están localizadas en $(5, 0, 0) \text{ m}$ y $(0, 0, -5) \text{ m}$, respectivamente. Halle la fuerza sobre Q_2 . *Resp.* $\mathbf{F}_2 = (13.5) \left(\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}} \right) \text{ N}$
- 2.26.** Dos cargas puntuales, $Q_1 = 30 \mu\text{C}$ y $Q_2 = -100 \mu\text{C}$, están localizadas en $(2, 0, 5) \text{ m}$ y $(-1, 0, -2) \text{ m}$, respectivamente. Halle la fuerza sobre Q_1 . *Resp.* $\mathbf{F}_1 = (0.465) \left(\frac{-3\mathbf{a}_x - 7\mathbf{a}_z}{\sqrt{58}} \right) \text{ N}$
- 2.27.** En el problema 2.26, halle la fuerza sobre Q_2 . *Resp.* $-\mathbf{F}_1$
- 2.28.** Cuatro cargas puntuales, cada una de $20 \mu\text{C}$, están situadas en el eje x y en el eje y a $\pm 4 \text{ m}$. Halle la fuerza sobre una carga puntual de $100 \mu\text{C}$ situada en $(0, 0, 3) \text{ m}$. *Resp.* $1.73 \mathbf{a}_z \text{ N}$
- 2.29.** Diez cargas idénticas, de $500 \mu\text{C}$ cada una, están espaciadas igualmente alrededor de un círculo de radio 2 m . Encuentre la fuerza sobre una carga de $-20 \mu\text{C}$ localizada en el eje, a 2 m del plano del círculo. *Resp.* $(79.5)(-\mathbf{a}_n) \text{ N}$
- 2.30.** Determine la fuerza sobre una carga puntual de $50 \mu\text{C}$ situada en $(0, 0, 5) \text{ m}$ debida a una carga puntual de $500\pi \mu\text{C}$ en el origen. Compare la respuesta con los problemas 2.4 y 2.5, donde esta misma carga total es distribuida sobre un disco circular. *Resp.* $28.3 \mathbf{a}_z \text{ N}$
- 2.31.** Encuentre la fuerza sobre una carga puntual de $30 \mu\text{C}$ situada en $(0, 0, 5) \text{ m}$ debida a un cuadrado de 4 m en el plano $z = 0$ entre $x = \pm 2 \text{ m}$ y $y = \pm 2 \text{ m}$ con una carga total de $500 \mu\text{C}$, distribuida uniformemente. *Resp.* $4.66 \mathbf{a}_z \text{ N}$
- 2.32.** Demuestre que la fuerza sobre una carga puntual localizada en un punto cualquiera de un anillo circular de densidad de carga uniforme es cero, siempre y cuando la carga puntual permanezca en el plano del anillo.
- 2.33.** Dos cargas puntuales idénticas de Q (C) cada una, están separadas por una distancia d (m). Exprese el campo eléctrico \mathbf{E} para puntos a lo largo de la línea que une las dos cargas. *Resp.* Si las cargas están en $x = 0$ y $x = d$, entonces, para $0 < x < d$,

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(d-x)^2} \right] \mathbf{a}_x \quad (\text{V/m})$$

- 2.34.** Cargas idénticas de Q (C) están localizadas en las ocho esquinas de un cubo de lado 1 (m). Demuestre que la fuerza de Coulomb sobre cada carga tiene una magnitud $(3.29 Q^2/4 \pi \epsilon_0 \ell^2)$ N.
- 2.35.** Demuestre que el campo eléctrico \mathbf{E} fuera de una concha esférica de densidad de carga uniforme ρ_s es el mismo que \mathbf{E} debido a la carga total sobre la concha localizada en el centro.
- 2.36.** Desarrolle la expresión en coordenadas cartesianas para \mathbf{E} debido a una configuración de carga recta infinitamente larga con densidad uniforme ρ_ℓ . *Resp.* $\mathbf{E} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \frac{x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y}{x^2 + y^2}$
- 2.37.** Una distribución de carga uniforme, infinita en extensión, se encuentra a lo largo del eje z con $\rho_\ell = 20$ nC/m. Halle el campo eléctrico \mathbf{E} en (6, 8, 3) m, expresándolo tanto en sistema de coordenadas cartesianas como cilíndricas. *Resp.* $21.6\mathbf{a}_x + 28.8\mathbf{a}_y$ V/m, $36\mathbf{a}_r$ V/m
- 2.38.** Dos cargas lineales idénticas y uniformes, de $\rho_\ell = 4$ nC/m, son paralelas al eje z en $x = 0, y = \pm 4$ m. Determine el campo eléctrico \mathbf{E} en $(\pm 4, 0, z)$ m. *Resp.* $\pm 18\mathbf{a}_x$ V/m
- 2.39.** Dos cargas lineales idénticas y uniformes, de $\rho_\ell = 5$ nC/m, son paralelas al eje x , una en $z = 0, y = -2$ m y la otra en $z = 0, y = 4$ m. Halle \mathbf{E} en (4, 1, 3) m. *Resp.* $30\mathbf{a}_z$ V/m
- 2.40.** Determinar \mathbf{E} en el origen debido a una carga lineal distribuida uniformemente, con $\rho_\ell = 3.30$ nC/m, localizada en $x = 3$ m, $y = 4$ m. *Resp.* $-7.13\mathbf{a}_x - 9.50\mathbf{a}_y$ V/m
- 2.41.** Refiriéndose al problema 2-40, ¿en qué otros puntos será igual el valor de \mathbf{E} ? *Resp.* (0, 0, z)
- 2.42.** A dos metros del eje z , se sabe que el E debido a una carga lineal uniforme a lo largo del eje z es 1.80×10^4 V/m. Encuentre la densidad de carga uniforme ρ_ℓ . *Resp.* $2.0 \mu\text{C}/\text{m}$
- 2.43.** El plano $-x+3y-6z=6$ m contiene una distribución uniforme de carga $\rho_s = 0.53$ nC/m². Encuentre \mathbf{E} en el lado que contiene el origen. *Resp.* $30 \left(\frac{\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z}{\sqrt{46}} \right)$ V/m
- 2.44.** Dos láminas infinitas de densidad de carga uniforme $\rho_s = (10^{-9}/6\pi)$ C/m² están localizadas en $z = -5$ y $y = -5$ m. Determine la densidad de la carga lineal uniforme ρ_ℓ , necesaria para producir el mismo valor de \mathbf{E} en (4, 2, 2) m, si la carga lineal está localizada en $z = 0, y = 0$. *Resp.* 0.667 nC/m
- 2.45.** Teniendo en cuenta las dos distribuciones de carga uniforme siguientes: una carga laminar uniforme, de densidad $\rho_s = -50$ nC/m² en $y = 2$ m y una carga lineal uniforme de $\rho_\ell = 0.2 \mu\text{C}/\text{m}$ en $z = 2$ m, $y = -1$ m. ¿En qué puntos de la región será \mathbf{E} igual a cero? *Resp.* ($x, -2.273, 2.0$) m
- 2.46.** Una carga laminar uniforme de $\rho_s = (-1/3 \pi)$ nC/m² está localizada en $z = 5$ m y una carga lineal uniforme de $\rho_\ell = (-25/9)$ nC/m está localizada en $z = -3$ m, $y = 3$ m. Encuentre el campo eléctrico \mathbf{E} en (0, -1, 0) m. *Resp.* $8\mathbf{a}_y$ V/m
- 2.47.** Una carga lineal uniforme de $\rho_\ell = (\sqrt{2} \times 10^{-8}/6)$ C/m se encuentra a lo largo del eje x y una carga laminar uniforme está localizada en $y = 5$ m. A lo largo de la línea $y = 3$ m, $z = 3$ m el campo eléctrico \mathbf{E} tiene solo una componente z . ¿Cuál será ρ_s de la carga laminar? *Resp.* 125 pC/m²
- 2.48.** Una carga lineal uniforme de $\rho_\ell = 3.30$ nC/m está localizada en $x = 3$ m, $y = 4$ m. Una carga puntual Q está a 2 m del origen. Halle la carga Q y su localización, de tal manera que el campo eléctrico sea cero en el origen. *Resp.* 5.28 nC en (-1.2, -1.6, 0) m.
- 2.49.** Un anillo de carga circular con radio 2 m yace en el plano $z = 0$, con centro en el origen. Si la densidad de carga uniforme es $\rho_\ell = 10$ nC/m, halle la carga puntual Q , en el origen, que produciría el mismo campo eléctrico \mathbf{E} en (0, 0, 5) m. *Resp.* 100.5 nC
- 2.50.** El disco circular $r \leq 2$ m en el plano $z = 0$ tiene una densidad de carga $\rho_s = 10^{-8}/r$ (C/m²). Determine el campo eléctrico \mathbf{E} para el punto (0, ϕ , h). *Resp.* $1.13 \times 10^3 \frac{h}{\sqrt{4+h^2}} \mathbf{a}_z$ (V/m)

- 2.51.** Examine el resultado del problema 2.50 cuando h es mucho mayor que 2 m y compárelo con el campo en h que resulta cuando la carga total del disco está concentrada en el origen.

- 2.52.** Una carga laminar finita de densidad $\rho_s = 2x(x^2 + y^2 + 4)^{3/2}/(C/m^2)$, yace en el plano $z = 0$ para $0 \leq x \leq 2$ m y $0 \leq y \leq 2$ m. Determine \mathbf{E} en $(0, 0, 2)$ m.

$$\text{Resp. } (18 \times 10^9) \left(-\frac{16}{3} \mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y + 8\mathbf{a}_z \right) \text{ V/m} = 18 \left(-\frac{16}{3} \mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y + 8\mathbf{a}_z \right) \text{ GV/m}$$

- 2.53.** Determine el campo eléctrico \mathbf{E} en $(8, 0, 0)$ m debido a una carga de 10 nC distribuida uniformemente a lo largo del eje x entre $x = -5$ m y $x = 5$ m. Repita el ejercicio para la misma carga total, distribuida entre $x = -1$ m y $x = 1$ m. *Resp.* $2.31 \mathbf{a}_x$ V/m, $1.43 \mathbf{a}_x$ V/m

- 2.54.** El disco circular $r \leq 1$ m, $z = 0$ tiene una densidad de carga $\rho_s = 2(r^2 + 25)^{3/2}e^{-10r}$ (C/m^2). Encuentre \mathbf{E} en $(0, 0, 5)$ m. *Resp.* $5.66 \mathbf{a}_x$ GV/m

- 2.55.** Demuestre que el campo eléctrico es cero en cualquier punto situado dentro de una concha esférica uniformemente cargada.

- 2.56.** Hay una carga distribuida con densidad constante ρ a través de un volumen esférico de radio a . Usando los resultados de los problemas 2.35 y 2.55, muestre que

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{r\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{a}_r, & r \leq a \\ \frac{a^3\rho}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r, & r \geq a \end{cases}$$

donde r es la distancia desde el centro de la esfera.

Capítulo 3

Flujo eléctrico y ley de Gauss

3.1 CARGA NETA EN UNA REGION

A partir de la densidad de carga, tal como se definió en la sección 2.3, es posible obtener, por integración, la carga neta que está contenida en un volumen específico. Como

$$dQ = \rho dv \quad (\text{C})$$

entonces

$$Q = \int_v \rho dv \quad (\text{C})$$

Por supuesto, ρ no necesita ser constante en todo el volumen v .

3.2 FLUJO ELECTRICO Y DENSIDAD DE FLUJO

Por definición, el *flujo eléctrico*, Ψ , se origina en cargas positivas y termina en cargas negativas. En ausencia de cargas negativas, el flujo Ψ termina en el infinito. También por definición, un coulomb de carga eléctrica da lugar a un coulomb de flujo eléctrico. En consecuencia

$$\Psi = Q \quad (\text{C})$$

En la figura 3-1 (a) las líneas de flujo abandonan $+Q$ y terminan en $-Q$. Esto supone que las dos cargas son de igual magnitud. El caso en que hay una carga positiva y ninguna carga negativa en la región aparece ilustrado en la figura 3-1 (b). Aquí las líneas de flujo están igualmente espaciadas a través del ángulo sólido y se alejan hacia el infinito.

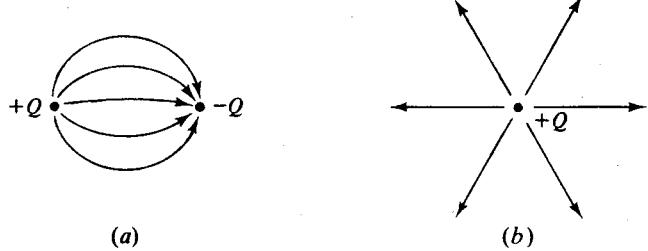


Fig. 3-1

Mientras que el flujo eléctrico Ψ es una cantidad escalar, la *densidad de flujo eléctrico*, D , es un campo vectorial que toma la dirección de las líneas de flujo. Si en la vecindad del punto P las líneas de flujo tienen la dirección del vector unidad \mathbf{a} (ver figura 3-2) y si una cantidad de flujo $d\Psi$ cruza el área diferencial dS , que es normal a \mathbf{a} , entonces la densidad de flujo eléctrico en P es

$$D = \frac{d\Psi}{dS} \mathbf{a} \quad (\text{C/m}^2)$$

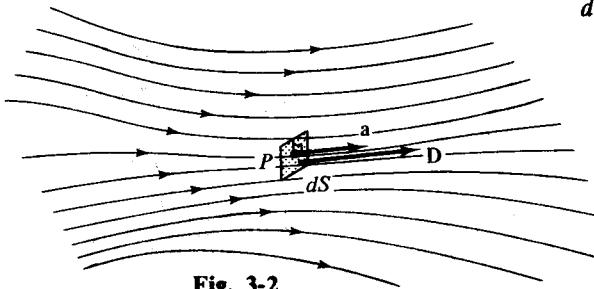


Fig. 3-2

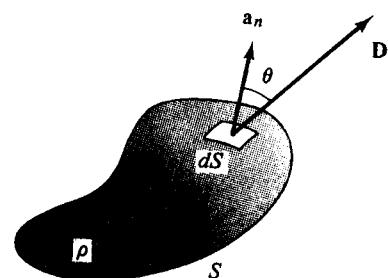


Fig. 3-3

Una distribución volumétrica de carga de densidad ρ (C/m^3) aparece rodeada por la superficie S en la figura 3-3. Ya que cada coulomb de carga Q , tiene por definición, un coulomb de flujo Ψ , se deduce que el flujo neto que cruza la superficie cerrada S es una medida exacta de la carga neta encerrada. Sin embargo, la densidad D puede variar en magnitud y dirección en cada punto de S . En general D no estará a lo largo de la normal a S . Si, en el elemento de superficie dS , D hace un ángulo θ con la normal, entonces el flujo diferencial que cruza dS está dado por

$$\begin{aligned} d\Psi &= D dS \cos \theta \\ &= \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \mathbf{a}_n \\ &= \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

donde dS es el elemento vectorial de superficie, de magnitud dS y dirección \mathbf{a}_n . El vector unidad \mathbf{a}_n se toma siempre apuntando hacia afuera de S , de tal manera que $d\Psi$ sea la cantidad de flujo que pasa desde el interior hasta el exterior de S a través de dS .

3.3 LEY DE GAUSS

La integración de la expresión anterior para $d\Psi$ sobre la superficie cerrada S da, puesto que $\Psi = Q$,

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}}$$

Esta es la ley de Gauss, que establece que *el flujo total que sale de una superficie cerrada es igual a la carga neta contenida dentro de la superficie*. Se verá que una gran cantidad de información valiosa puede ser obtenida mediante la aplicación de la Ley de Gauss sin llevar a cabo necesariamente la integración.

3.4 RELACION ENTRE LA DENSIDAD DE FLUJO Y LA INTENSIDAD DEL CAMPO ELECTRICO

Considérese una carga puntual Q (positiva, para simplificar) localizada en el origen (figura 3-4). Si está encerrada por una superficie esférica de radio r , entonces, por simetría, D debida a Q es de magnitud constante sobre la superficie y es en todo punto normal a ella. La ley de Gauss dice entonces que

$$Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \oint dS = D(4\pi r^2)$$

de donde $D = Q/4\pi r^2$. Así pues

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_n = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

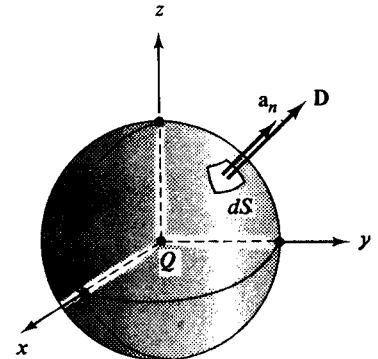


Fig. 3-4

Pero, como se estableció en la sección 2-2, la intensidad del campo eléctrico debido a Q es

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

Se concluye que $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$.

Más en general, para cualquier campo eléctrico en un medio isotrópico de permitividad ϵ ,

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

Así pues, los campos \mathbf{D} y \mathbf{E} tendrán exactamente la misma forma, ya que difieren solamente por un factor que es una constante del medio. Mientras el campo eléctrico \mathbf{E} debido a una configuración de carga es una función de la permitividad ϵ , la densidad de flujo eléctrico no lo es. En problemas que involucran múltiples dieléctricos se encontrará una ventaja particular al obtener \mathbf{D} primero y luego convertir a \mathbf{E} dentro de cada dieléctrico.

3.5 SUPERFICIES GAUSIANAS ESPECIALES

La superficie esférica utilizada en la derivación de la sección 3.4 es una superficie gausiana especial porque satisface las siguientes condiciones definitorias:

1. La superficie es cerrada.
2. En cada punto de la superficie \mathbf{D} es o normal o tangencial a la superficie.
3. D tiene el mismo valor en todos los puntos de la superficie donde \mathbf{D} es normal.

EJEMPLO 1: Utilice una superficie gausiana especial para hallar \mathbf{D} debida a una carga lineal uniforme, con ρ_t (C/m).

Tómese la línea de carga como eje z de las coordenadas cilíndricas (figura 3-5). Por simetría cilíndrica, \mathbf{D} solo puede tener una componente r , y esta componente depende solo de r . Así pues, la superficie gausiana especial para este problema es un cilindro circular recto cerrado cuyo eje es z (figura 3-6). Aplicando la ley de Gauss,

$$Q = \int_1 \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_2 \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_3 \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

\mathbf{D} y $d\mathbf{S}$ son ortogonales respecto de las superficies 1 y 3 y de esta manera las integrales se anulan. Respecto de 2, \mathbf{D} y $d\mathbf{S}$ son paralelas (o antiparalelas, si ρ_t es negativa) y D es constante puesto que r es constante. Así pues

$$Q = D \int_2 d\mathbf{S} = D(2\pi r L)$$

donde L es la longitud del cilindro. Pero la carga encerrada es $Q = \rho_t L$. Por lo tanto,

$$D = \frac{\rho_t}{2\pi r} \quad \text{and} \quad \mathbf{D} = \frac{\rho_t}{2\pi r} \mathbf{a}_r$$

Obsérvese la simplicidad de la derivación anterior si se compara con el problema 2.9.

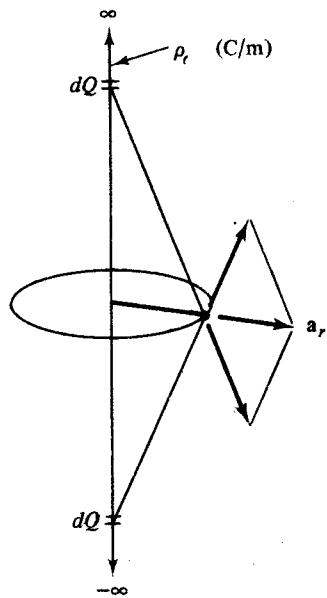


Fig. 3-5

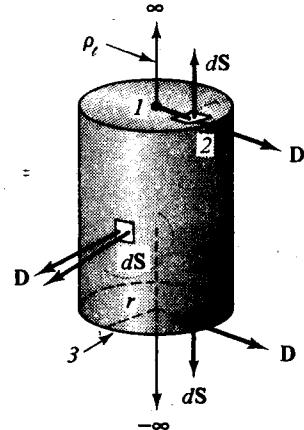


Fig. 3-6

La única limitación seria del método de superficies gausianas especiales es que solo puede ser utilizado para configuraciones altamente simétricas. Sin embargo, para otras configuraciones, el método puede proveer buenas aproximaciones al campo en lugares muy cercanos o muy lejanos de las cargas. Véase el problema 3.40.

Problemas resueltos

- 3.1.** Halle la carga en el volumen definido por $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$, $0 \leq y \leq 1 \text{ m}$ y $0 \leq z \leq 1 \text{ m}$, si $\rho = 30x^2y$ ($\mu \text{ C/m}^3$). ¿Qué cambio ocurre para los límites $-1 \leq y \leq 0 \text{ m}$?

Como $dQ = \rho dv$,

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 30x^2y \, dx \, dy \, dz \\ &= 5 \mu\text{C} \end{aligned}$$

Para el cambio en los límites de y ,

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^1 30x^2y \, dx \, dy \, dz \\ &= -5 \mu\text{C} \end{aligned}$$

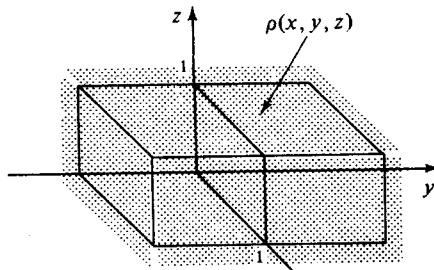


Fig. 3-7

- 3.2.** Halle la carga en el volumen definido por $1 \leq r \leq 2 \text{ m}$ en coordenadas esféricas si

$$\rho = \frac{5 \cos^2 \phi}{r^4} \quad (\text{C/m}^3)$$

Por integración,

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_1^2 \left(\frac{5 \cos^2 \phi}{r^4} \right) r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi = 5\pi \text{ C}$$

- 3.3.** Tres cargas puntuales, $Q_1 = 30 \text{ nC}$, $Q_2 = 150 \text{ nC}$ y $Q_3 = -70 \text{ nC}$, están encerradas por una superficie S .

¿Qué flujo neto cruza por S ?

Como el flujo eléctrico tiene, por definición, el origen en una carga positiva y su término en una carga negativa, parte del flujo de las cargas positivas termina en la carga negativa.

$$\Psi_{\text{neto}} = Q_{\text{neto}} = 30 + 150 - 70 = 110 \text{ nC}$$

- 3.4.** ¿Qué flujo neto cruza la superficie cerrada S que se muestra en la figura 3-8, que contiene una distribución de carga en la forma de disco plano de radio 4 m, con una densidad $\rho_s = (\sin^2 \phi)/2r$ (C/m^2)?

$$\Psi = Q = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \left(\frac{\sin^2 \phi}{2r} \right) r \, dr \, d\phi = 2\pi \text{ C}$$

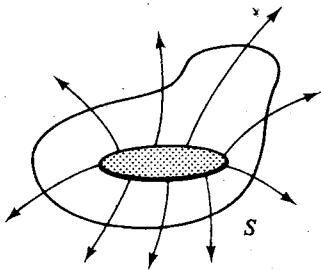


Fig. 3-8

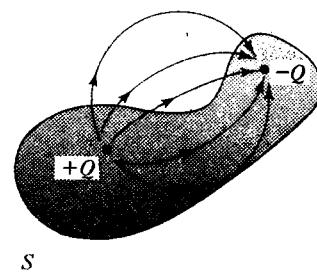


Fig. 3-9

- 3.5.** Dos cargas de la misma magnitud pero de signos opuestos están encerrados por una superficie S . ¿Puede un flujo Ψ cruzar la superficie?

Mientras el flujo puede cruzar la superficie, como se muestra en la figura 3-9, el flujo neto fuera de S será cero si las cargas son de la misma magnitud.

- 3.6. Un disco circular de radio 4 m con densidad de carga $\rho_s = 12 \sin \phi \mu C/m^2$ está encerrado por una superficie S . ¿Qué flujo neto cruza por S ?

$$\Psi = Q = \int_0^{2\pi} \int_0^4 (12 \sin \phi) r dr d\phi = 0 \mu C$$

Como el disco contiene cantidades iguales de cargas positivas y negativas [$\sin(\phi + \pi) = -\sin \phi$] no hay un flujo neto que cruce por S .

- 3.7. Carga en la forma de una hoja plana con densidad $\rho_s = 40 \mu C/m^2$ está localizada en $z = -0.5$ m. Una carga lineal uniforme de $\rho_t = -6 \mu C/m$ yace a lo largo del eje y . ¿Qué flujo neto cruza la superficie de un cubo de 2 m de arista, centrado en el origen, tal como se muestra en la figura 3-10?

$$\Psi = Q_{enc}$$

La carga encerrada en el plano es $Q = (4 \text{ m}^2)(40 \mu C/m^2) = 160 \mu C$ y la carga lineal $Q =$

$$(2 \text{ m})(-6 \mu C/m) = -12 \mu C$$

$$\text{Entonces, } Q_{enc} = \Psi = 160 - 12 = 148 \mu C$$

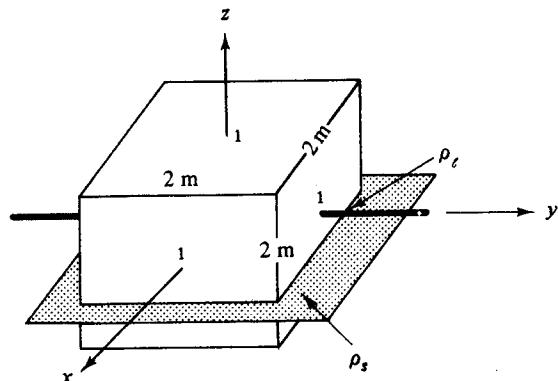


Fig. 3-10

- 3.8. Una carga puntual Q está en el origen de un sistema de coordenadas esféricas. Encontrar el flujo que cruza la porción de una concha esférica descrita por $\alpha \leq \theta \leq \beta$ (figura 3-11). ¿Cuál es el resultado si $\alpha = 0$ y $\beta = \pi/2$?

El flujo total $\Psi = Q$ cruza una concha esférica completa de área $4\pi r^2$. El área de la franja está dada por

$$A = \int_0^{2\pi} \int_\alpha^\beta r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ = 2\pi r^2 (-\cos \beta + \cos \alpha)$$

Entonces el flujo a través de la franja es

$$\Psi_{neto} = \frac{A}{4\pi r^2} Q = \frac{Q}{2} (-\cos \beta + \cos \alpha)$$

Para $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$ (un hemisferio) el flujo viene a ser $\Psi_{neto} = Q/2$.

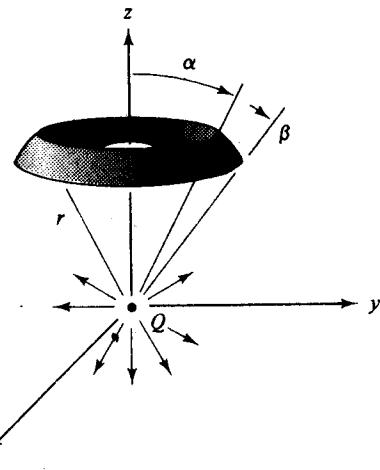


Fig. 3-11

- 3.9. Una carga lineal uniforme, con $\rho_t = 50 \mu C/m$, yace a lo largo del eje x . ¿Qué flujo por unidad de longitud, Ψ/L , cruza la porción del plano $z = -3$ m limitado por $y = \pm 2$ m?

El flujo está uniformemente distribuido alrededor de la línea de carga. Así pues, la cantidad que cruza la franja se obtiene a partir del ángulo subtendido comparado con 2π . En la figura 3-12,

$$\alpha = 2 \arctan \left(\frac{2}{3} \right) = 1.176 \text{ rad}$$

Entonces

$$\frac{\Psi}{L} = 50 \left(\frac{1.176}{2\pi} \right) = 9.36 \mu C/m$$

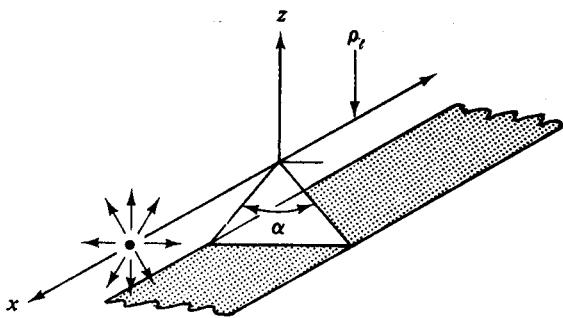


Fig. 3-12

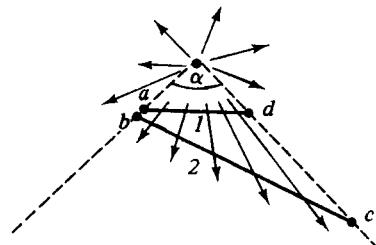


Fig. 3-13

- 3.10.** Generalice el problema 3.9 para el caso de una franja plana cuyos bordes son paralelos a una carga lineal pero que no está localizada simétricamente respecto de la línea de carga.

La figura 3-13 muestra una franja de este tipo en el numeral 2 y otra franja en el numeral 1, que está localizada en forma simétrica como en el problema 3.9. Del problema 3.9 el flujo a través de la franja 1 está determinado por el ángulo α . Pero, debido a la ausencia de carga en la región $abcd$, la ley de Gauss permite ver que el flujo que entra a 1 debe ser igual al flujo que abandona 2. De esta manera, el flujo a través de 2 también está determinado por el ángulo subtendido α .

- 3.11.** Una carga puntual $Q = 30 \text{ nC}$, está localizada en el origen de las coordenadas cartesianas. Halle la densidad de flujo eléctrico D en $(1, 3, -4) \text{ m}$.

Refiriéndose a la figura 3-14

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{Q}{4\pi R^2} \mathbf{a}_R \\ &= \frac{30 \times 10^{-9}}{4\pi(26)} \left(\frac{\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z}{\sqrt{26}} \right) \\ &= (9.18 \times 10^{-11}) \left(\frac{\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y - 4\mathbf{a}_z}{\sqrt{26}} \right) \text{ C/m}^2 \end{aligned}$$

o, más convenientemente, $D = 91.8 \text{ pC/m}^2$.

- 3.12.** Dos cargas lineales uniformes e idénticas yacen a lo largo de los ejes x y y con densidades de carga $\rho_t = 20 \mu\text{C/m}$. Obtenga D en $(3, 3, 3) \text{ m}$.

La distancia desde el punto de observación hasta cualquiera de las cargas lineales es $3\sqrt{2} \text{ m}$. Considerándose primero la carga lineal sobre el eje x ,

$$\mathbf{D}_1 = \frac{\rho_t}{2\pi r_1} \mathbf{a}_{r1} = \frac{20 \mu\text{C/m}}{2\pi(3\sqrt{2} \text{ m})} \left(\frac{\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}} \right)$$

y ahora la carga lineal sobre el eje y ,

$$\mathbf{D}_2 = \frac{\rho_t}{2\pi r_2} \mathbf{a}_{r2} = \frac{20 \mu\text{C/m}}{2\pi(3\sqrt{2} \text{ m})} \left(\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}} \right)$$

La densidad total de flujo es la suma vectorial

$$\mathbf{D} = \frac{20}{2\pi(3\sqrt{2})} \left(\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{\sqrt{2}} \right) = (1.30) \left(\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z}{\sqrt{2}} \right) \text{ } \mu\text{C/m}^2$$

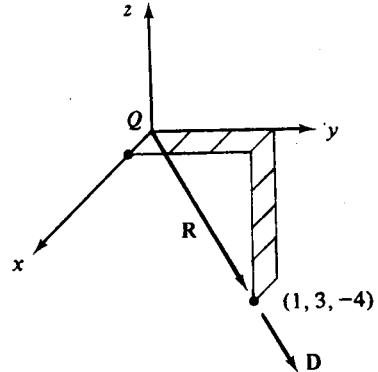


Fig. 3-14

- 3.13.** Dado que $\mathbf{D} = 10x\mathbf{a}_x$ (C/m²), determine el flujo que cruza un área de 1 m² que es normal al eje x en $x = 3$ m.

Como \mathbf{D} es constante en toda el área y es perpendicular a ella,

$$\Psi = DA = (30 \text{ C/m}^2)(1 \text{ m}^2) = 30 \text{ C}$$

- 3.14.** Determine el flujo que cruza un área de 1 mm² sobre la superficie de una concha cilíndrica en $r = 10$ m, $z = 2$ m, $\phi = 53.2^\circ$ si

$$\mathbf{D} = 2x\mathbf{a}_x + 2(1 - y)\mathbf{a}_y + 4z\mathbf{a}_z \quad (\text{C/m}^2)$$

En el punto P (ver figura 3-15),

$$x = 10 \cos 53.2^\circ = 6$$

$$y = 10 \sin 53.2^\circ = 8$$

Entonces, en P ,

$$\mathbf{D} = 12\mathbf{a}_x - 14\mathbf{a}_y + 8\mathbf{a}_z \quad \text{C/m}^2$$

El área de 1 mm² = 10^{-6} m², que es muy pequeña comparada con las unidades en \mathbf{D} , puede aproximarse así:

$$dS = 10^{-6}(0.6\mathbf{a}_x + 0.8\mathbf{a}_y) \quad \text{m}^2$$

Por lo tanto,

$$d\Psi = \mathbf{D} \cdot dS = (12\mathbf{a}_x - 14\mathbf{a}_y + 8\mathbf{a}_z) \cdot 10^{-6}(0.6\mathbf{a}_x + 0.8\mathbf{a}_y) = -4.0 \mu\text{C}$$

El signo negativo indica que el flujo cruza esta superficie diferencial dirigiéndose hacia el eje z antes que hacia afuera en la dirección de dS .

- 3.15.** Dada una densidad de flujo eléctrico $\mathbf{D} = 2x\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y$ (C/m²), determine el flujo neto que cruza la superficie de un cubo de 2 m de arista centrado en el origen. (Las aristas del cubo son paralelas a los ejes coordenados.)

$$\begin{aligned} \Psi &= \oint \mathbf{D} \cdot dS = \int_{x=1} (2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y) \cdot (dS \mathbf{a}_x) + \int_{x=-1} (-2\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y) \cdot (-dS \mathbf{a}_x) \\ &\quad + \int_{y=1} (2x\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y) \cdot (dS \mathbf{a}_y) + \int_{y=-1} (2x\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y) \cdot (-dS \mathbf{a}_y) \\ &\quad + \int_{z=1} (2x\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y) \cdot (dS \mathbf{a}_z) + \int_{z=-1} (2x\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y) \cdot (-dS \mathbf{a}_z) \\ &= 2 \int_{x=1} dS + 2 \int_{x=-1} dS + 3 \int_{y=1} dS - 3 \int_{y=-1} dS + 0 + 0 \\ &= (2 + 2 + 3 - 3)(2^2) = 16 \text{ C} \end{aligned}$$

- 3.16.** Una carga lineal uniforme de $\rho_e = 3 \mu\text{C}/\text{m}$ yace a lo largo del eje z , y un cilindro circular concéntrico de radio 2 m tiene $\rho_s = (-1.5/4\pi) \mu\text{C}/\text{m}^2$. Ambas distribuciones son infinitas en el sentido de z . Use la ley de Gauss para encontrar \mathbf{D} en todas las regiones.

Utilizando la superficie gausiana especial A que aparece en la figura 3-16 y procediendo como en el ejemplo 1, sección 3.5,

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_e}{2\pi r} \mathbf{a}_r, \quad 0 < r < 2$$

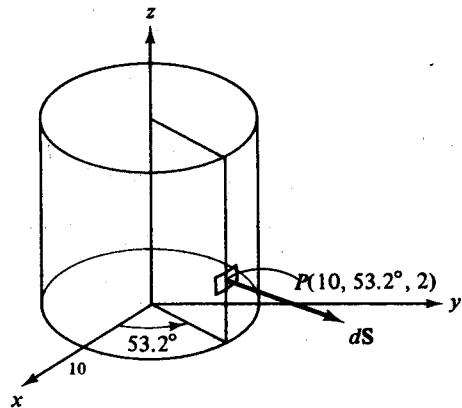


Fig. 3-15

Utilizando la superficie gausiana especial B ,

$$Q_{\text{enc}} = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

$$(\rho_t + 4\pi\rho_s)L = D(2\pi r L)$$

de lo que se desprende que

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_t + 4\pi\rho_s}{2\pi r} \mathbf{a}_r, \quad r > 2$$

Para los datos numéricos,

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \frac{0.477}{r} \mathbf{a}_r \quad (\mu\text{C}/\text{m}^2) & 0 < r < 2 \text{ m} \\ \frac{0.239}{r} \mathbf{a}_r \quad (\mu\text{C}/\text{m}^2) & r > 2 \text{ m} \end{cases}$$

- 3.17.** Utilice la ley de Gauss para demostrar que \mathbf{D} y \mathbf{E} son iguales a cero en todos los puntos del plano de un anillo circular uniformemente cargado, que están dentro del anillo.

Considere, en lugar de un anillo, la configuración de carga que aparece en la figura 3-17, donde el cilindro uniformemente cargado es infinito en extensión y está formado por muchos anillos. Para la superficie gausiana I ,

$$Q_{\text{enc}} = 0 = D \oint dS$$

En consecuencia $\mathbf{D} = 0$ para $r < R$. Puesto que Ψ tiene dirección radial, se puede tomar una tajada dz del cilindro de carga y el resultado que se encontró arriba se puede aplicar también a este anillo. Para todos los puntos que están dentro del anillo y en el plano del anillo, \mathbf{D} y \mathbf{E} son cero.

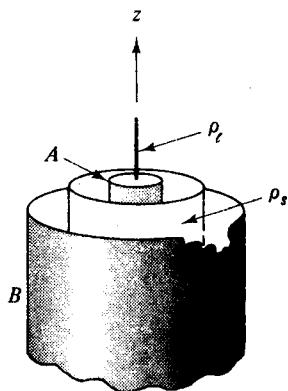


Fig. 3-16

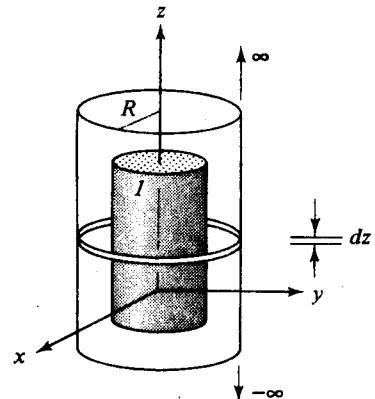


Fig. 3-17

- 3.18.** Una configuración de carga en coordenadas cilíndricas está dada por $\rho = 5re^{-2r}$ (C/m^3). Utilice la ley de Gauss para hallar \mathbf{D} .

Como ρ no es una función de ϕ o z , el flujo Ψ es completamente radial. También es cierto que, para r constante, la densidad de flujo D debe ser de magnitud constante. Entonces la superficie gausiana especial apropiada es un cilindro circular recto cerrado. La integral sobre los planos extremos se elimina, y la ley de Gauss es

$$Q_{\text{enc}} = \int_{\text{superficie lateral}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^r 5re^{-2r} r dr d\phi dz = D(2\pi r L)$$

$$5\pi L [e^{-2r}(-r^2 - r - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}] = D(2\pi r L)$$

$$\text{Por consiguiente } \mathbf{D} = \frac{2.5}{r} [\frac{1}{2} - e^{-2r}(r^2 + r + \frac{1}{2})] \mathbf{a}_r, \quad (\text{C}/\text{m}^2)$$

- 3.19.** Un volumen que, en coordenadas cilíndricas, está entre $r = 2 \text{ m}$ y $r = 4 \text{ m}$ contiene una densidad uniforme de carga ρ (C/m^3). Utilice la ley de Gauss para hallar \mathbf{D} en todas las regiones.

De la figura 3-18, para $0 < r < 2$ m,

$$Q_{\text{enc}} = D(2\pi r L)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{0}$$

Para $2 \leq r \leq 4$ m,

$$\pi\rho L(r^2 - 4) = D(2\pi r L)$$

$$\mathbf{D} = \frac{\rho}{2r} (r^2 - 4) \mathbf{a}_r \quad (\text{C/m}^2)$$

Para $r > 4$ m,

$$12\pi\rho L = D(2\pi r L)$$

$$\mathbf{D} = \frac{6\rho}{r} \mathbf{a}_r \quad (\text{C/m}^2)$$

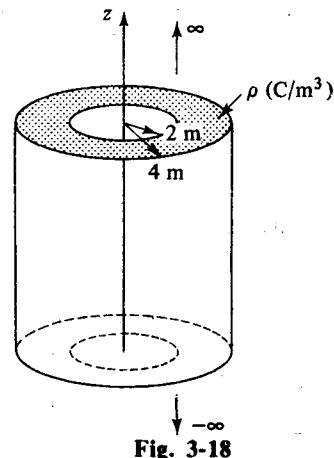


Fig. 3-18

- 3.20.** Un volumen descrito, en coordenadas esféricas, por $r \leq a$ contiene una densidad uniforme de carga ρ . Utilice la ley de Gauss para determinar \mathbf{D} y compare sus resultados con los del campo \mathbf{E} correspondiente, encontrados en el problema 2.56. ¿Qué carga puntual en el origen dará por resultado el mismo campo \mathbf{D} para $r > a$?

Para una superficie gausiana como Σ que aparece en la figura 3-19,

$$Q_{\text{enc}} = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

$$y \quad \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = D(4\pi r^2)$$

$$\mathbf{D} = \frac{\rho r}{3} \mathbf{a}_r, \quad r \leq a$$

Para puntos fuera de la distribución de carga,

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \rho = D(4\pi r^2) \quad \text{de donde } \mathbf{D} = \frac{\rho a^3}{3r^2} \mathbf{a}_r, \quad r > a$$

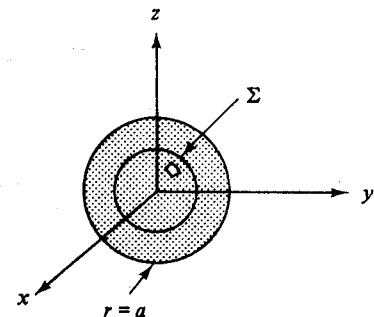


Fig. 3-19

Si una carga puntual $Q = (4/3)\pi a^3 \rho$ se coloca en el origen, el campo \mathbf{D} para $r > a$ será el mismo. Esta carga puntual es igual a la carga total contenida en el volumen.

- 3.21.** Un condensador de placas paralelas tiene una superficie de carga en el lado interior de la placa superior con $+ρ_s$ (C/m²). La superficie superior de la placa inferior contiene $-ρ_s$ (C/m²). Desprecie el efecto de bordes y utilice la ley de Gauss para hallar \mathbf{D} y \mathbf{E} en la región situada entre las placas.

Todo el flujo que abandona la carga positiva de la placa superior termina en la carga negativa igual de la placa inferior. La frase *desprecie el efecto de bordes* asegura que todo el flujo es normal a las placas. Para la superficie gausiana especial mostrada en la figura 3-20,

$$Q_{\text{enc}} = \int_{\text{arriba}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{abajo}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{lado}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= 0 + \int_{\text{abajo}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + 0$$

ó

$$\rho_s A = D \int dS = DA$$

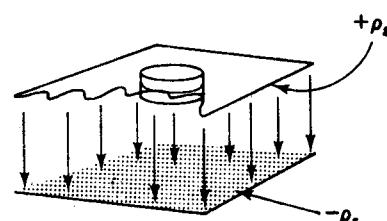


Fig. 3-20

donde A es el área. Por consiguiente,

$$\mathbf{D} = \rho_s \mathbf{a}_n (\text{C/m}^2) \quad \text{y} \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \mathbf{a}_n (\text{V/m})$$

Ambos están dirigidos de la placa positiva a la negativa.

Problemas supplementarios

- 3.22. Halle la carga neta encerrada en cubo de 2 m de arista, paralelo a los ejes y centrado en el origen, si la densidad de carga es

$$\rho = 50x^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) \quad (\mu\text{C/m}^3)$$

Resp. 84.9 μC

- 3.23. Halle la carga encerrada en el volumen $1 \leq r \leq 3 \text{ m}, 0 \leq \phi \leq \pi/3, 0 \leq z \leq 2 \text{ m}$ dada la densidad de carga $\rho = 2z \sin^2 \phi \text{ (C/m}^3)$. *Resp.* 4.91 C

- 3.24. Dada una densidad de carga en coordenadas esféricas,

$$\rho = \frac{\rho_0}{(r/r_0)^2} e^{-r/r_0} \cos^2 \phi$$

halle las cantidades de carga en los volúmenes esféricos encerrados por $r = r_0$, $r = 5r_0$ y $r = \infty$.

Resp. $3.97\rho_0 r_0^3$, $6.24\rho_0 r_0^3$, $6.28\rho_0 r_0^3$

- 3.25. Una superficie S contiene una distribución uniforme finita de carga, $0 \leq \ell \leq \pi \text{ m}$, con densidad de carga

$$\rho_\ell = -\rho_0 \sin \frac{\ell}{2} \quad (\text{C/m})$$

¿Qué flujo neto cruza la superficie S ? *Resp.* $-2\rho_0 \text{ (C)}$

- 3.26. Hay una carga distribuida en una región esférica $r \leq 2 \text{ m}$ con densidad

$$\rho = \frac{-200}{r^2} \quad (\mu\text{C/m}^3)$$

¿Qué flujo neto cruza las superficies $r = 1 \text{ m}$, $r = 4 \text{ m}$, y $r = 500 \text{ m}$?

Resp. $-800\pi \mu\text{C}$, $-1600\pi \mu\text{C}$, $-1600\pi \mu\text{C}$

- 3.27. Una carga puntual Q se encuentra en el origen de las coordenadas esféricas y una distribución de concha esférica en $r = a$ tiene una carga total de $Q' - Q$ uniformemente distribuida. ¿Qué flujo cruza la superficie $r = k$ para $k < a$ y $k > a$? *Resp.* Q , Q'

- 3.28. Una carga lineal uniforme con $\rho_\ell = 3 \mu\text{C/m}$ yace a lo largo del eje x . ¿Qué flujo cruza una superficie esférica centrada en el origen con $r = 3 \text{ m}$? *Resp.* 18 μC

- 3.29. Una carga puntual Q se encuentra en el origen. Halle una expresión para el flujo que cruza la porción de una esfera, centrada en el origen, descrita por $\alpha \leq \phi \leq \beta$. *Resp.* $\frac{\beta - \alpha}{2\pi} Q$

- 3.30.** Una carga puntual de Q (C) está en el centro de un sistema coordenado esférico. Halle el flujo Ψ que cruza un área de $4\pi m^2$ sobre una concha esférica-concéntrica de radio 3 m. *Resp.* $Q/9$ (C)
- 3.31.** Un área de $40.2 m^2$ sobre la superficie de una concha esférica de radio 4 m está cruzada por $10 \mu C$ de flujo en dirección interna. ¿Qué carga puntual está localizada en el origen? *Resp.* $-50 \mu C$
- 3.32.** Una carga lineal uniforme con ρ_e yace a lo largo del eje x . ¿Qué porcentaje de flujo de la línea cruza la franja del plano $y = 6$ que contiene $-1 \leq z \leq 1$? *Resp.* 5.26%
- 3.33.** Una carga puntual, $Q = 3 nC$, está localizada en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas. ¿Qué flujo Ψ cruza la porción del plazo $z = 2$ m para el que $-4 \leq x \leq 4$ m y $-4 \leq y \leq 4$ m? *Resp.* $0.5 nC$
- 3.34.** Una carga lineal uniforme con $\rho_e = 5 \mu C/m$ yace a lo largo del eje x . Halle \mathbf{D} en $(3, 2, 1)$ m.
Resp. $(0.356)\left(\frac{2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{5}}\right) \mu C/m^2$
- 3.35.** Una carga puntual de $+Q$ se encuentra en el origen de un sistema de coordenadas esféricas, rodeado por una distribución concéntrica uniforme de carga sobre una concha esférica en $r = a$ para la cual la carga total es $-Q$. Halle el flujo Ψ que cruza las superficies esféricas en $r < a$ y $r > a$. Obtenga D en todas las regiones.
Resp. $\Psi = 4\pi r^2 D = \begin{cases} +Q & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$
- 3.36.** Dado que $\mathbf{D} = 500e^{-0.1x}\mathbf{a}_x$ ($\mu C/m^2$), halle el flujo Ψ que cruza una superficie de área $1 m^2$ normal al eje x y localizado en $x = 1$ m, $x = 5$ m, y $x = 10$ m. *Resp.* $452 \mu C$, $303 \mu C$, $184 \mu C$
- 3.37.** Dado que $\mathbf{D} = 5x^2\mathbf{a}_x + 10z\mathbf{a}_z$ (C/m^2), halle el flujo neto saliente que cruza la superficie de un cubo de 2 m de arista centrado en el origen. Las aristas del cubo son paralelas a los ejes. *Resp.* $80 C$
- 3.38.** Dado que

$$\mathbf{D} = 30e^{-r/b}\mathbf{a}_r - 2\frac{z}{b}\mathbf{a}_z \quad (C/m^2)$$
en coordenadas cilíndricas, halle el flujo saliente que cruza el cilindro circular recto descrito por $r = 2b$, $z = 0$, y $z = 5b$ (m). *Resp.* $129b^2$ (C)
- 3.39.** Dado que

$$\mathbf{D} = 2r \cos \phi \mathbf{a}_\phi - \frac{\sin \phi}{3r} \mathbf{a}_z$$
en coordenadas cilíndricas, halle el flujo que cruza la porción del plano $z = 0$ definido por $r \leq a$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Repita el ejercicio para $3\pi/2 \leq \phi \leq 2\pi$. Suponga que el flujo positivo tiene la dirección de \mathbf{a}_z .
Resp. $-\frac{a}{3}, \frac{a}{3}$
- 3.40.** En coordenadas cilíndricas, el disco $r \leq a$, $z = 0$ contiene carga con densidad no uniforme $\rho_s(r, \phi)$. Utilice superficies gausianas especiales apropiadas para encontrar valores aproximados de D sobre el eje z , (a) muy cerca al disco ($0 < z \ll a$), (b) muy lejos del disco ($z \gg a$).
Resp. (a) $\frac{\rho_s(0, \phi)}{2}$; (b) $\frac{Q}{4\pi a^2}$ donde $Q = \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho_s(r, \phi) r dr d\phi$
- 3.41.** Una carga puntual $Q = 2000$ pC, está en el origen de coordenadas esféricas. Una distribución esférica concéntrica de carga en $r = 1$ m tiene una densidad de carga $\rho_s = 40\pi$ pC/m². ¿Qué densidad superficial de carga sobre una concha concéntrica en $r = 2$ m produciría $\mathbf{D} = 0$ para $r > 2$ m? *Resp.* -71.2 pC/m²
- 3.42.** Dada una distribución de carga con densidad $\rho = 5r$ (C/m^3) en coordenadas esféricas, utilice la ley de Gauss para hallar \mathbf{D} . *Resp.* $(5r^2/4)\mathbf{a}_r$ (C/m^2)

- 3.43.** Hay una densidad uniforme de carga de 2 C/m^3 en el volumen $2 \leq x \leq 4 \text{ m}$ (coordenadas cartesianas). Utilice la ley de Gauss para hallar \mathbf{D} en todas las regiones. *Resp. $-2\mathbf{a}_x \text{ C/m}^2$, $2(x - 3)\mathbf{a}_x (\text{C/m}^2)$, $2\mathbf{a}_x \text{ C/m}^2$*
- 3.44.** Utilice la ley de Gauss para hallar \mathbf{D} y \mathbf{E} en la región que está comprendida entre los conductores concéntricos de un condensador cilíndrico. El cilindro interior es de radio a . Desprecie el efecto de bordes.
Resp. $\rho_{sa}(a/r)$, $\rho_{sa}(a/\epsilon_0 r)$
- 3.45.** Un conductor de espesor determinado tiene una densidad superficial de carga ρ_s . Suponiendo que $\Psi = 0$ dentro del conductor, demuestre que $D = \pm \rho_s$ apenas fuera del conductor, construyendo una superficie gausiana especial.

Capítulo 4

Divergencia y teorema de divergencia

4.1 DIVERGENCIA

La forma en que un campo vectorial cambia de un punto a otro a través del espacio se caracteriza de dos maneras. La primera de ellas es la *divergencia*, que será examinada enseguida. Es un escalar y es similar a la derivada de una función. La segunda es el *rotacional*, vector que se examinará cuando se discutan los campos magnéticos en el capítulo 9.

Cuando la divergencia de un campo vectorial es diferente de cero, se dice que la región contiene *fuentes* o *sumideros*; fuentes cuando la divergencia es positiva y sumideros cuando es negativa. En los campos eléctricos estáticos hay una correspondencia entre la divergencia positiva, las fuentes y la carga eléctrica positiva Q . El flujo eléctrico Ψ se origina por definición en una carga positiva. Así pues, una región que contiene cargas positivas contiene *fuentes* de Ψ . La divergencia de la densidad de flujo eléctrico \mathbf{D} será positiva en esta región. Una correspondencia similar existe entre la divergencia negativa, los sumideros y la carga eléctrica negativa.

La divergencia del campo vectorial \mathbf{A} en el punto P está definida por

$$\text{div } \mathbf{A} \equiv \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}$$

En este caso, la integración se hace sobre un volumen infinitesimal Δv que se comprime hasta el punto P .

4.2 DIVERGENCIA EN COORDENADAS CARTESIANAS

La divergencia puede ser expresada para cualquier campo vectorial en cualquier sistema de coordenadas. Para su desarrollo en un sistema de coordenadas cartesianas, se selecciona un cubo con aristas Δx , Δy , y Δz paralelas a los ejes x , y y z , como se muestra en la figura 4-1. Entonces, el campo vectorial \mathbf{A} se define en P , esquina del cubo correspondiente a los valores menores de x , y y z .

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$$

Para expresar $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ para el cubo, deben cubrirse todas las 6 caras. Sobre cada cara la dirección de $d\mathbf{S}$ es saliente. Como las caras son normales a los ejes, sólo una componente de \mathbf{A} cruzará dos caras paralelas cualesquieras.

En la figura 4-2 el cubo ha sido girado de tal manera que la cara I tiene vista total. Las componentes x de \mathbf{A} sobre las caras a la derecha y a la izquierda de I aparecen indicadas. Como las caras son pequeñas,

$$\begin{aligned}\int_{\substack{\text{cara} \\ \text{izquierda}}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &\approx -A_x(x) \Delta y \Delta z \\ \int_{\substack{\text{cara} \\ \text{derecha}}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &\approx A_x(x + \Delta x) \Delta y \Delta z \\ &\approx \left[A_x(x) + \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z\end{aligned}$$

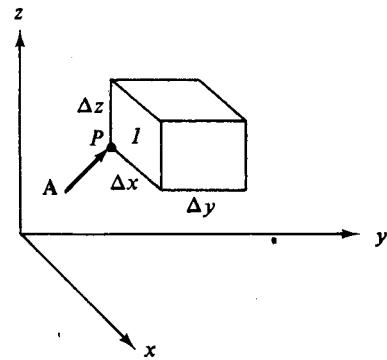


Fig. 4-1

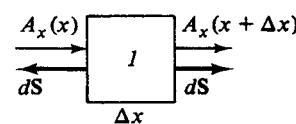


Fig. 4-2

de manera que el total para estas dos caras es

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

El mismo procedimiento se aplica a los restantes pares de caras y se combinan los resultados.

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \approx \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Dividiendo por $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta v$ y haciendo $\Delta v \rightarrow 0$, se obtiene

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{cartesiano})$$

El mismo método puede aplicarse para coordenadas cilíndricas (problema 4.1) y esféricas.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{cilíndrico})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{esférico})$$

4.3 DIVERGENCIA DE D

De la ley de Gauss (sección 3.3),

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\Delta v}$$

En el límite,

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \operatorname{div} \mathbf{D} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{Q_{\text{enc}}}{\Delta v} = \rho$$

Este importante resultado es una de las ecuaciones de Maxwell para campos estáticos:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad \text{y} \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

si ϵ es constante en toda la región que se está considerando (si no lo es, $\operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} = \rho$). Así pues, ambos campos \mathbf{E} y \mathbf{D} tendrán divergencia igual a cero en cualquier región libre de carga.

EJEMPLO 1: En coordenadas esféricas, la región $r \leq a$ contiene una densidad uniforme de carga ρ . Para $r > a$ la densidad de carga es cero. Del problema 2.56, $\mathbf{E} = E_r \mathbf{a}_r$, donde $E_r = (\rho r / 3\epsilon_0)$ para $r \leq a$ y $E_r = (\rho a^3 / 3\epsilon_0 r^2)$ para $r > a$. Entonces para $r \leq a$,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \right) = \frac{1}{r^2} \left(3r^2 \frac{\rho}{3\epsilon_0} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

y, para $r > a$,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \right) = 0$$

4.4 EL OPERADOR NABLA

El análisis vectorial tiene su propia notación que debe ser examinada con cuidado por el lector. En este punto se define un operador vectorial, simbolizado ∇ , en *coordenadas cartesianas* como

$$\nabla \equiv \frac{\partial(\)}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial(\)}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial(\)}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

En el cálculo se utiliza algunas veces el operador diferencial para representar d/dx . Los símbolos $\sqrt{ }$ y \int son también operadores. Solos, sin ninguna indicación de sobre qué operan, parecen extraños. Por eso, ∇ , solo sugiere simplemente la secuencia de ciertas derivadas parciales seguidas por un vector unitario. Sin embargo, cuando ∇ se asocia en un producto punto con el vector \mathbf{A} , el resultado es la divergencia de \mathbf{A} .

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \cdot (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{A}$$

De aquí en adelante, escribiremos la divergencia de un campo vectorial como $\nabla \cdot \mathbf{A}$.

Atención! El operador nabla sólo está definido para coordenadas cartesianas. Si $\nabla \cdot \mathbf{A}$ se utiliza para expresar la divergencia de \mathbf{A} en otros sistemas de coordenadas, ello no implica que un operador nabla pueda ser definido para esos sistemas. Por ejemplo, la divergencia en coordenadas cilíndricas se escribe como

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

(véase sección 4.2). Esto *no implica que*

$$\nabla = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \quad) \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial (\quad)}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial (\quad)}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

en coordenadas cilíndricas. En efecto, la expresión daría un *resultado falso* si se utilizara en ∇V (el gradiente, capítulo 5) o en $\nabla \times \mathbf{A}$ (el rotacional, capítulo 9).

4.5 TEOREMA DE DIVERGENCIA

La ley de Gauss establece que la integral de una superficie cerrada de $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ es igual a la carga encerrada. Si la función y la densidad de carga se conocen para todo el volumen, entonces la carga encerrada puede obtenerse de la integración de ρ en todo el volumen. Así pues,

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int \rho dv = Q_{\text{enc}}$$

Pero $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$, entonces

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla \cdot \mathbf{D}) dv$$

Este es el *teorema de divergencia*, también conocido como *teorema de divergencia de Gauss*. Es el análogo tridimensional del teorema de Green para un plano. Aunque a él se llegó a partir de relaciones conocidas entre \mathbf{D} , Q y ρ , el teorema es aplicable a cualquier campo vectorial.

$$\text{teorema de la divergencia} \quad \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_v (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv$$

Por supuesto, el volumen v es aquél que está encerrado por la superficie S .

EJEMPLO 2: La región $r \leq a$ en coordenadas esféricas tiene una intensidad de campo eléctrico

$$\mathbf{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon} \mathbf{a}_r$$

Examine ambos lados del teorema de la divergencia para este campo vectorial.

Para S , escogemos la superficie esférica $r = b \leq a$.

$$\begin{aligned} & \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ & \iint \left(\frac{\rho b}{3\epsilon} \mathbf{a}_r \right) \cdot (b^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho b^3}{3\epsilon} \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{4\pi \rho b^3}{3\epsilon} \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} & \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) dv \\ & \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\rho r}{3\epsilon} \right) = \frac{\rho}{\epsilon} \\ & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^b \frac{\rho}{\epsilon} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= \frac{4\pi \rho b^3}{3\epsilon} \end{aligned}$$

El teorema de divergencia se aplica tanto a campos estáticos como a campos variables con el tiempo en cualquier sistema de coordenadas. El teorema se usa más a menudo en derivaciones en que se hace necesario cambiar de una integral de superficie cerrada a una integral de volumen. Pero por eso puede usarse también para convertir la integral de volumen de una función, que puede ser expresada como la divergencia de un campo vectorial, en una integral de superficie cerrada.

Problemas resueltos

4.1. Desarrollar la expresión para la divergencia en coordenadas cilíndricas.

Un volumen delta aparece en la figura 4-3. Tiene por aristas Δr , $r \Delta \phi$, y Δz . El campo vectorial \mathbf{A} está definido en P , esquina correspondiente al menor valor de las coordenadas r , ϕ , y z , como

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z$$

Por definición,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}$$

Para expresar $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ deben cubrirse todas las 6 caras del volumen.

Para la componente radial de \mathbf{A} ver la figura 4-4.

En la cara izquierda,

$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \approx -A_r r \Delta \phi \Delta z$$

y en la cara derecha,

$$\begin{aligned} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &\approx A_r (r + \Delta r) (r + \Delta r) \Delta \phi \Delta z \\ &\approx \left(A_r + \frac{\partial A_r}{\partial r} \Delta r \right) (r + \Delta r) \Delta \phi \Delta z \\ &\approx A_r r \Delta \phi \Delta z + \left(A_r + r \frac{\partial A_r}{\partial r} \right) \Delta r \Delta \phi \Delta z \end{aligned}$$

donde el término en $(\Delta r)^2$ ha sido despreciado. La contribución neta de este par de caras es entonces

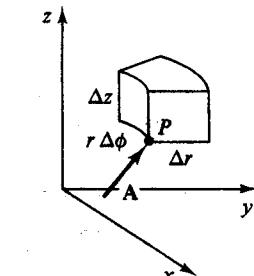


Fig. 4-3

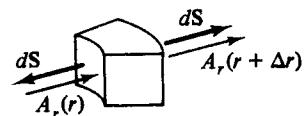


Fig. 4-4

$$\left(A_r + r \frac{\partial A_r}{\partial r} \right) \Delta r \Delta \phi \Delta z = \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) \Delta r \Delta \phi \Delta z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) \Delta v \quad (1)$$

ya que $\Delta v = r \Delta r \Delta \phi \Delta z$.

En forma similar, las caras normales a \mathbf{a}_ϕ dan

$$A_\phi \Delta r \Delta z \quad \text{y} \quad \left(A_\phi + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \Delta \phi \right) \Delta r \Delta z$$

para una contribución neta de

$$\frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \Delta v \quad (2)$$

y las caras normales a \mathbf{a}_z dan

$$A_z r \Delta r \Delta \phi \quad \text{y} \quad \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta z \right) r \Delta r \Delta \phi$$

para una contribución neta de

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta v \quad (3)$$

Cuando (1), (2) y (3) se combinan para dar $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$, la definición de divergencia es:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

4.2. Demuestre que $\nabla \cdot \mathbf{E}$ es cero para el campo de una carga lineal uniforme.

Para una carga lineal, en coordenadas cilíndricas,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_e}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{a}_r$$

Entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\rho_e}{2\pi\epsilon_0 r} \right) = 0$$

La divergencia de \mathbf{E} para esta configuración de carga es cero en todo punto, excepto en $r = 0$, donde la expresión es indeterminada.

4.3. Demuestre que el campo \mathbf{D} debido a una carga puntual tiene una divergencia de cero.

Para una carga puntual, en coordenadas esféricicas,

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

Entonces, para $r > 0$,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{Q}{4\pi r^2} \right) = 0$$

4.4. Dado $\mathbf{A} = e^{-y}(\cos x \mathbf{a}_x - \sin x \mathbf{a}_y)$, hallar $\nabla \cdot \mathbf{A}$.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x} (e^{-y} \cos x) + \frac{\partial}{\partial y} (-e^{-y} \sin x) = e^{-y}(-\sin x) + e^{-y}(\sin x) = 0$$

4.5. Dado $\mathbf{A} = x^2 \mathbf{a}_x + yz \mathbf{a}_y + xy \mathbf{a}_z$, hallar $\nabla \cdot \mathbf{A}$.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2) + \frac{\partial}{\partial y} (yz) + \frac{\partial}{\partial z} (xy) = 2x + z$$

4.6. Dado $\mathbf{A} = 5x^2 \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right) \mathbf{a}_x$, hallar $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en $x = 1$.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x} \left(5x^2 \sin \frac{\pi x}{2} \right)$$

$$= 5x^2 \left(\cos \frac{\pi x}{2} \right) \frac{\pi}{2} + 10x \sin \frac{\pi x}{2} = \frac{5}{2} \pi x^2 \cos \frac{\pi x}{2} + 10x \sin \frac{\pi x}{2}$$

$$y \quad \nabla \cdot \mathbf{A} \Big|_{x=1} = 10.$$

4.7. Dado $\mathbf{A} = (x^2 + y^2)^{-1/2} \mathbf{a}_x$, hallar $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en $(2, 2, 0)$.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-3/2} (2x) \quad y \quad \nabla \cdot \mathbf{A} \Big|_{(2, 2, 0)} = -8.84 \times 10^{-2}$$

4.8. Dado $\mathbf{A} = r \sin \phi \mathbf{a}_r + 2r \cos \phi \mathbf{a}_\phi + 2z^2 \mathbf{a}_z$, hallar $\nabla \cdot \mathbf{A}$.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (2r \cos \phi) + \frac{\partial}{\partial z} (2z^2) \\ &= 2 \sin \phi - 2 \cos \phi + 4z = 4z \end{aligned}$$

4.9. Dado $\mathbf{A} = r \sin \phi \mathbf{a}_r + r^2 \cos \phi \mathbf{a}_\phi + 2re^{-5z} \mathbf{a}_z$, hallar $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en $(1/2, \pi/2, 0)$.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (r^2 \cos \phi) + \frac{\partial}{\partial z} (2re^{-5z}) = 2 \sin \phi - r \cos \phi - 10re^{-5z}$$

$$y \quad \nabla \cdot \mathbf{A} \Big|_{(1/2, \pi/2, 0)} = 2 \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} - 10 \left(\frac{1}{2} \right) e^0 = -\frac{7}{2}$$

4.10. Dado $\mathbf{A} = 10 \sin^2 \phi \mathbf{a}_r + r \mathbf{a}_\phi + [(z^2/r) \cos^2 \phi] \mathbf{a}_z$, hallar $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en $(2, \phi, 5)$.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{10 \sin^2 \phi + 2z \cos^2 \phi}{r} \quad y \quad \nabla \cdot \mathbf{A} \Big|_{(2, \phi, 5)} = 5$$

4.11. Dado $\mathbf{A} = (5/r^2) \sin \theta \mathbf{a}_r + r \cot \theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_\phi$, hallar $\nabla \cdot \mathbf{A}$.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (5 \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \cot \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (r \sin \theta \cos \phi) = -1 - \sin \phi$$

4.12. Dado $\mathbf{A} = (5/r^2) \mathbf{a}_r + (10/\sin \theta) \mathbf{a}_\theta - r^2 \phi \sin \theta \mathbf{a}_\phi$, hallar $\nabla \cdot \mathbf{A}$.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (5) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (10) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (-r^2 \phi \sin \theta) = -r$$

4.13. Dado $\mathbf{A} = 5 \sin \theta \mathbf{a}_\theta + 5 \sin \phi \mathbf{a}_\phi$, hallar $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en $(0.5, \pi/4, \pi/4)$.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (5 \sin^2 \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (5 \sin \phi) = 10 \frac{\cos \theta}{r} + 5 \frac{\cos \phi}{r \sin \theta}$$

$$y \quad \nabla \cdot \mathbf{A} \Big|_{(0.5, \pi/4, \pi/4)} = 24.14$$

- 4.14. Sea $\mathbf{D} = \rho_0 z \mathbf{a}_z$ en la región $-1 \leq z \leq 1$ en coordenadas cartesianas y $\mathbf{D} = (\rho_0 z / |z|) \mathbf{a}_z$ en las otras partes. Halle la densidad de carga.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

Para $-1 \leq z \leq 1$,

$$\rho = \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 z) = \rho_0$$

y para $z < -1$ ó $z > 1$,

$$\rho = \frac{\partial}{\partial z} (\mp \rho_0) = 0$$

La distribución de carga aparece en la figura 4-5.

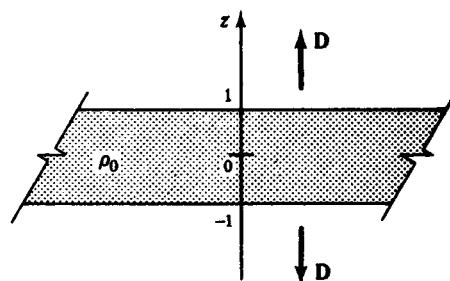


Fig. 4-5

- 4.15. Sea

$$\mathbf{D} = b(r^2 + z^2)^{-3/2}(r\mathbf{a}_r + z\mathbf{a}_z)$$

en coordenadas esféricas, halle la densidad de carga.

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [b(r^2 + z^2)^{-3/2} r^2] + \frac{\partial}{\partial z} [b(r^2 + z^2)^{-3/2} z] \\ &= \frac{b}{r} \left[-\frac{3}{2} (r^2 + z^2)^{-5/2} (2r^3) + (r^2 + z^2)^{-3/2} (2r) \right] + b \left[-\frac{3}{2} (r^2 + z^2)^{-5/2} (2z^2) + (r^2 + z^2)^{-3/2} \right] \\ &= b(r^2 + z^2)^{-5/2} [-3r^2 + (r^2 + z^2)(2) - 3z^2 + (r^2 + z^2)] = 0 \end{aligned}$$

a menos que $r = z = 0$. (El campo dado \mathbf{D} corresponde a una carga puntual en el origen.)

- 4.16. Sea $\mathbf{D} = (10r^3/4)\mathbf{a}_r$, (C/m^2) en la región $0 < r \leq 3$ m en coordenadas cilíndricas y $\mathbf{D} = (810/4r)\mathbf{a}_r$, (C/m^2) en cualquier otro sitio. Halle la densidad de carga.

Para $0 < r \leq 3$ m,

$$\rho = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (10r^4/4) = 10r^2 \quad (\text{C}/\text{m}^3)$$

y para $r > 3$ m,

$$\rho = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (810/4) = 0$$

- 4.17. Sea

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{\pi r^2} (1 - \cos 3r) \mathbf{a}_r$$

en coordenadas esféricas, halle la densidad de carga.

$$\rho = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{Q}{\pi r^2} (1 - \cos 3r) \right] = \frac{3Q}{\pi r^2} \sin 3r$$

- 4.18. Sea $\mathbf{D} = 7r^2 \mathbf{a}_r + 28 \sin \theta \mathbf{a}_\theta$ en coordenadas esféricas. Halle la densidad de carga.

$$\rho = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (7r^4) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (28 \sin^2 \theta) = 28r + \frac{56 \cos \theta}{r}$$

- 4.19. En la región $0 < r \leq 1$ m, $\mathbf{D} = (-2 \times 10^{-4}/r)\mathbf{a}_r$ (C/m^2) y para $r > 1$ m, $\mathbf{D} = (-4 \times 10^{-4}/r^2)\mathbf{a}_r$ (C/m^2), en coordenadas esféricas. Halle la densidad de carga en ambas regiones.

Para $0 < r \leq 1$ m,

$$\rho = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-2 \times 10^{-4}r) = \frac{-2 \times 10^{-4}}{r^2} \quad (\text{C/m}^3)$$

y para $r > 1$ m,

$$\rho = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-4 \times 10^{-4}) = 0$$

- 4.20. En la región $r \leq 2$, $\mathbf{D} = (5r^2/4)\mathbf{a}_r$, y para $r > 2$, $\mathbf{D} = (20/r^2)\mathbf{a}_r$, en coordenadas esféricas. Halle la densidad de carga.

Para $r \leq 2$,

$$\rho = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (5r^4/4) = 5r$$

y para $r > 2$,

$$\rho = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (20) = 0$$

- 4.21. Sea $\mathbf{D} = (10x^3/3)\mathbf{a}_x$ (C/m^2). Evalúe ambos lados del teorema de divergencia para el volumen de un cubo, de 2 m de arista, centrado en el origen y con las aristas paralelas a los ejes.

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{D}) dv$$

Como \mathbf{D} tiene sólo componentes x , $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ es cero en todas las caras excepto $x = 1$ m y $x = -1$ m (ver figura 4-6).

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{10(1)}{3} \mathbf{a}_x \cdot dy dz \mathbf{a}_x \\ &\quad + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{10(-1)}{3} \mathbf{a}_x \cdot dy dz (-\mathbf{a}_x) \\ &= \frac{40}{3} + \frac{40}{3} = \frac{80}{3} \text{ C} \end{aligned}$$

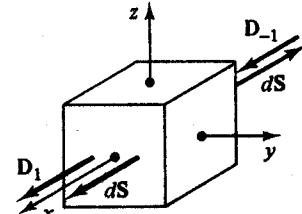


Fig. 4-6

Ahora, para el lado derecho del teorema de la divergencia, como $\nabla \cdot \mathbf{D} = 10x^2$, entonces

$$\int_{\text{vol}} (\nabla \cdot \mathbf{D}) dv = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (10x^2) dx dy dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[10 \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 dy dz = \frac{80}{3} \text{ C}$$

- 4.22. Sea $\mathbf{A} = 30e^{-r}\mathbf{a}_r - 2z\mathbf{a}_z$, en coordenadas cilíndricas. Evalúe ambos lados del teorema de divergencia para el volumen encerrado por $r = 2$, $z = 0$ y $z = 5$ (figura 4-7).

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv$$

Cabe anotar que $A_z = 0$ para $z = 0$ y, por consiguiente, $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ es cero sobre esa parte de la superficie.

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^5 \int_0^{2\pi} 30e^{-r} \mathbf{a}_r \cdot 2d\phi dz \mathbf{a}_r + \int_0^5 \int_0^2 -2(5)\mathbf{a}_z \cdot r dr d\phi \mathbf{a}_z \\ &= 60e^{-2}(2\pi)(5) - 10(2\pi)(2) = 129.4 \end{aligned}$$

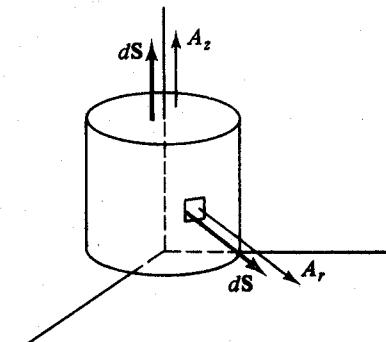


Fig. 4-7

Para el lado derecho del teorema de la divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (30re^{-r}) + \frac{\partial}{\partial z} (-2z) = \frac{30e^{-r}}{r} - 30e^{-r} - 2$$

$$y \quad \int (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv = \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(\frac{30e^{-r}}{r} - 30e^{-r} - 2 \right) r dr d\phi dz = 129.4$$

- 4.23. Sea $\mathbf{D} = (10r^3/4)\mathbf{a}_r$ (C/m^2) en coordenadas cilíndricas. Evalúe ambos lados del teorema de divergencia para el volumen encerrado por $r = 1$ m, $r = 2$ m, $z = 0$ y $z = 10$ m (ver figura 4-8).

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla \cdot \mathbf{D}) dv$$

Como \mathbf{D} no tiene componente z , $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ es cero para la parte superior y la inferior. En la superficie cilíndrica interna $d\mathbf{S}$ está en dirección $-\mathbf{a}_r$.

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{10} \int_0^{2\pi} \frac{10}{4} (1)^3 \mathbf{a}_r \cdot (1) d\phi dz (-\mathbf{a}_r) \\ &\quad + \int_0^{10} \int_0^{2\pi} \frac{10}{4} (2)^3 \mathbf{a}_r \cdot (2) d\phi dz \mathbf{a}_r \\ &= \frac{-200\pi}{4} + 16 \frac{200\pi}{4} = 750\pi C \end{aligned}$$

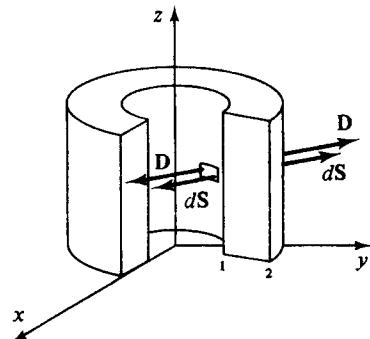


Fig. 4-8

Para el lado derecho del teorema de la divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (10r^4/4) = 10r^2$$

$$y \quad \int (\nabla \cdot \mathbf{D}) dv = \int_0^{10} \int_0^{2\pi} \int_1^2 (10r^2) r dr d\phi dz = 750\pi C$$

- 4.24. Sea $\mathbf{D} = (5r^2/4)\mathbf{a}_r$ (C/m^2) en coordenadas esféricas. Evalúe ambos lados del teorema de divergencia para el volumen encerrado por $r = 4$ m, y $\theta = \pi/4$ (ver figura 4-9).

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int (\nabla \cdot \mathbf{D}) dv$$

Como \mathbf{D} sólo tiene componente radial, $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ tiene valor diferente de cero sólo en la superficie $r = 4$ m.

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{5(4)^2}{4} \mathbf{a}_r \cdot (4)^2 \sin\theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r = 589.1 C$$

Para el lado derecho del teorema de la divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (5r^4/4) = 5r$$

$$y \quad \int (\nabla \cdot \mathbf{D}) dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^4 (5r) r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = 589.1 C$$

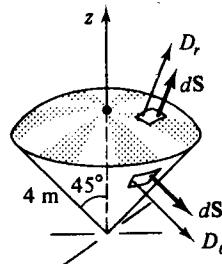


Fig. 4-9

Problemas supplementarios

4.25. Desarrolle la divergencia en coordenadas esféricas. Utilice un volumen delta con aristas Δr , $r \Delta\theta$ y $r \sin\theta \Delta\phi$.

4.26. Muestre que $\nabla \cdot \mathbf{E}$ es cero para el campo producido por una carga laminar uniforme.

4.27. El campo de un dipolo eléctrico con cargas en $\pm d/2$ sobre el eje z es

$$\mathbf{E} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos\theta \mathbf{a}_r + \sin\theta \mathbf{a}_\theta)$$

Demuestre que la divergencia de este campo es cero.

4.28. Dado $\mathbf{A} = e^{5x}\mathbf{a}_x + 2 \cos y \mathbf{a}_y + 2 \sin z \mathbf{a}_z$, halle $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en el origen. *Resp.* 7.0

4.29. Dado $\mathbf{A} = (3x + y^2)\mathbf{a}_x + (x - y^2)\mathbf{a}_y$, halle $\nabla \cdot \mathbf{A}$. *Resp.* $3 - 2y$

4.30. Dado $\mathbf{A} = 2xy\mathbf{a}_x + z\mathbf{a}_y + yz^2\mathbf{a}_z$, halle $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en $(2, -1, 3)$. *Resp.* -8.0

4.31. Dado $\mathbf{A} = 4xy\mathbf{a}_x - xy^2\mathbf{a}_y + 5 \sin z \mathbf{a}_z$, halle $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en $(2, 2, 0)$. *Resp.* 5.0

4.32. Dado $\mathbf{A} = 2r \cos^2\phi \mathbf{a}_r + 3r^2 \sin z \mathbf{a}_\phi + 4z \sin^2\phi \mathbf{a}_z$, halle $\nabla \cdot \mathbf{A}$. *Resp.* 4.0

4.33. Dado $\mathbf{A} = (10/r^2)\mathbf{a}_r + 5e^{-2z}\mathbf{a}_z$, halle $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en $(2, \phi, 1)$. *Resp.* -2.60

4.34. Dado $\mathbf{A} = 5 \cos r \mathbf{a}_r + (3ze^{-2r}/r)\mathbf{a}_z$, halle $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en (π, ϕ, z) . *Resp.* -1.59

4.35. Dado $\mathbf{A} = 10\mathbf{a}_r + 5 \sin\theta \mathbf{a}_\theta$, halle $\nabla \cdot \mathbf{A}$. *Resp.* $(2 + \cos\theta)(10/r)$

4.36. Dado $\mathbf{A} = r\mathbf{a}_r - r^2 \cot\theta \mathbf{a}_\theta$, halle $\nabla \cdot \mathbf{A}$. *Resp.* $3 - r$

4.37. Dado $\mathbf{A} = [(10 \sin^2\theta)/r]\mathbf{a}_r$, halle $\nabla \cdot \mathbf{A}$ en $(2, \pi/4, \phi)$. *Resp.* 1.25

4.38. Dado $\mathbf{A} = r^2 \sin\theta \mathbf{a}_r + 13\phi \mathbf{a}_\theta + 2r\mathbf{a}_\phi$, halle $\nabla \cdot \mathbf{A}$. *Resp.* $4r \sin\theta + \left(\frac{13\phi}{r}\right) \cot\theta$

4.39. Demuestre que la divergencia de \mathbf{E} es cero si $\mathbf{E} = (100/r)\mathbf{a}_\phi + 40\mathbf{a}_z$.

4.40. En la región $a \leq r \leq b$ (coordenadas cilíndricas),

$$\mathbf{D} = \rho_0 \left(\frac{r^2 - a^2}{2r} \right) \mathbf{a}_r$$

y para $r > b$,

$$\mathbf{D} = \rho_0 \left(\frac{b^2 - a^2}{2r} \right) \mathbf{a}_r$$

Para $r < a$, $\mathbf{D} = 0$. Halle ρ en las tres regiones. *Resp.* 0, ρ_0 , 0

4.41. En la región $0 < r \leq 2$ (coordenadas cilíndricas), $\mathbf{D} = (4r^{-1} + 2e^{-0.5r} + 4r^{-1}e^{-0.5r})\mathbf{a}_r$, y para $r > 2$, $\mathbf{D} = (2.057/r)\mathbf{a}_r$. Halle ρ en ambas regiones. *Resp.* $-e^{-0.5r}, 0$

4.42. En la región $r \leq 2$ (coordenadas cilíndricas), $\mathbf{D} = [10r + (r^2/3)]\mathbf{a}_r$, y para $r > 2$, $\mathbf{D} = [3/(128r)]\mathbf{a}_r$. Halle ρ en ambas regiones. *Resp.* $20 + r, 0$

- 4.43. Sea $\mathbf{D} = 10 \sin \theta \mathbf{a}_r + 2 \cos \theta \mathbf{a}_\theta$. Halle la densidad de carga.

$$\text{Resp. } \frac{\sin \theta}{r} (18 + 2 \cot^2 \theta)$$

- 4.44. Sea

$$\mathbf{D} = \frac{3r}{r^2 + 1} \mathbf{a}_r$$

en coordenadas esféricas. Halle la densidad de carga. *Resp.* $3(r^2 + 3)/(r^2 + 1)^2$

- 4.45. Sea

$$\mathbf{D} = \frac{10}{r^2} [1 - e^{-2r}(1 + 2r + 2r^2)] \mathbf{a}_r$$

en coordenadas esféricas. Halle la densidad de carga. *Resp.* $40e^{-2r}$

- 4.46. En la región $r \leq 1$ (coordenadas esféricas),

$$\mathbf{D} = \left(\frac{4r}{3} - \frac{r^3}{5} \right) \mathbf{a}_r$$

y para $r > 1$, $\mathbf{D} = [5/(63r^2)] \mathbf{a}_r$. Halle la densidad de carga en ambas regiones. *Resp.* $4 - r^2, 0$

- 4.47. La región $r \leq 2$ m (coordenadas esféricas) tiene un campo $\mathbf{E} = (5r \times 10^{-5}/\epsilon_0) \mathbf{a}_r$ (V/m). Halle la carga neta encerrada por la concha $r = 2$ m. *Resp.* 5.03×10^{-3} C

- 4.48. Sea $\mathbf{D} = (5r^2/4) \mathbf{a}_r$ en coordenadas esféricas. Evalúe ambos lados del teorema de divergencia para el volumen encerrado por $r = 1$ y $r = 2$. *Resp.* 75π

- 4.49. Sea $\mathbf{D} = (10r^3/4) \mathbf{a}_r$ en coordenadas cilíndricas. Evalúe ambos lados del teorema de divergencia para el volumen encerrado por $r = 2$, $z = 0$ y $z = 10$. *Resp.* 800π

- 4.50. Sea $\mathbf{D} = 10 \sin \theta \mathbf{a}_r + 2 \cos \theta \mathbf{a}_\theta$. Evalúe ambos lados del teorema de divergencia para el volumen encerrado por la concha $r = 2$. *Resp.* $40\pi^2$

Capítulo 5

Energía y potencial eléctrico de los sistemas de carga

5.1 TRABAJO REALIZADO EN CARGAS PUNTUALES EN MOVIMIENTO

En un campo eléctrico \mathbf{E} una carga puntual Q experimenta una fuerza que está dada por

$$\mathbf{F} = -Q\mathbf{E}$$

Si esta fuerza se desbalancea, se produce una aceleración de la partícula cargada y su movimiento se dirige hacia el campo si Q es positiva. (Ver figura 5-1.)

Para poner la carga en equilibrio se requiere una fuerza aplicada igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza del campo:

$$\mathbf{F}_a = -Q\mathbf{E}$$

El trabajo se define como una fuerza que actúa a distancia. Por consiguiente, la fuerza aplicada realiza una cantidad diferencial de trabajo dW cuando la partícula cargada se mueve (a velocidad constante) a lo largo de una diferencial de distancia $d\ell$. Ahora, el trabajo puede ser positivo o negativo, según la dirección de $d\ell$, vector desplazamiento, con relación a la fuerza aplicada, \mathbf{F}_a . Cuando $d\ell$ y \mathbf{F}_a no están en la misma dirección, la componente de la fuerza en la dirección de $d\ell$ debe usarse. Todo esto se expresa simplemente por:

$$dW = \mathbf{F}_a \cdot d\ell \cos \theta = \mathbf{F}_a \cdot d\ell$$

Así pues, en un campo eléctrico el diferencial de trabajo realizado por un agente externo es

$$dW = -Q\mathbf{E} \cdot d\ell$$

Adoptándose esto como expresión definitiva para el trabajo realizado al mover una partícula cargada en un campo eléctrico, un valor positivo significará que el trabajo ha sido hecho por el agente externo para occasionar un cambio de posición y un resultado negativo indicará que el trabajo ha sido realizado por el campo.

En los tres sistemas coordenados las expresiones para $d\ell$ son:

$$d\ell = dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z \quad (\text{cartesiano})$$

$$d\ell = dr \mathbf{a}_r + r d\phi \mathbf{a}_\phi + dz \mathbf{a}_z \quad (\text{cilíndrico})$$

$$d\ell = dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin\theta d\phi \mathbf{a}_\phi \quad (\text{esférico})$$

EJEMPLO 1: Halle el trabajo realizado al mover una carga de +2 C desde (2, 0, 0) m hasta (0, 2, 0) m a lo largo de la línea recta que une los dos puntos, si el campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = 2x\mathbf{a}_x - 4y\mathbf{a}_y \quad (\text{V/m})$$

El trabajo diferencial es

$$\begin{aligned} dW &= -2(2x\mathbf{a}_x - 4y\mathbf{a}_y) \cdot (dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z) \\ &= -4x dx + 8y dy \end{aligned}$$

La ecuación de la trayectoria es $x + y = 2$, por lo tanto, $dy = -dx$ a lo largo de la trayectoria. Por consiguiente,

$$dW = -4x dx + 8(2-x)(-dx) = (4x - 16) dx$$

$$y \quad W = \int_2^0 (4x - 16) dx = 24 \text{ J}$$

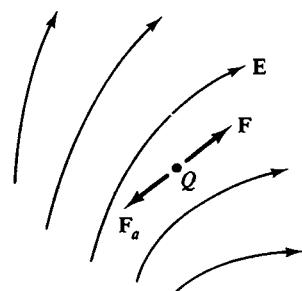


Fig. 5-1

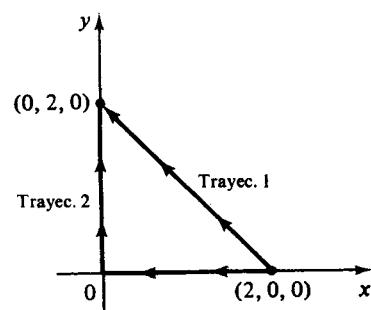


Fig. 5-2

(Recuérdese que $1 \text{ V/m} = 1 \text{ N/C} = 1 \text{ J/C} \cdot \text{m}$)

El trabajo realizado en una carga puntual en movimiento Q desde el punto B hasta el punto A en un campo eléctrico estático es el mismo para cualquier trayectoria escogida. En forma equivalente, el trabajo realizado para mover la carga alrededor de cualquier trayectoria cerrada es cero:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (\text{campos estáticos})$$

Tal campo vectorial se denomina campo *conservativo*.

EJEMPLO 2: Halle el trabajo realizado en el campo del ejemplo 1 si la carga de 2 C es movida desde (2, 0, 0) m hasta (0, 0, 0) a lo largo del eje x . Luego desde (0, 0, 0) m hasta (0, 2, 0) m a lo largo del eje y .

La trayectoria se muestra en la figura 5-2. Sobre el primer segmento, $y = dy = dz = 0$, así pues

$$dW = -2(2x\mathbf{a}_x - 0\mathbf{a}_y) \cdot (dx\mathbf{a}_x + 0\mathbf{a}_y + 0\mathbf{a}_z) = -4x dx$$

Sobre el segundo segmento, $x = dx = dz = 0$, así que:

$$dW = -2(0\mathbf{a}_x - 4ya_y) \cdot (0\mathbf{a}_x + dy\mathbf{a}_y + 0\mathbf{a}_z) = 8y dy$$

Por lo tanto,

$$W = -4 \int_2^0 x dx + 8 \int_0^2 y dy = 24 \text{ J}$$

este es el mismo valor encontrado para la trayectoria del ejemplo 1.

5.2 POTENCIAL ELECTRICO ENTRE DOS PUNTOS

El *potencial* del punto A con respecto al punto B se define como el trabajo realizado al mover una carga positiva unitaria, Q_u , desde B hasta A .

$$V_{AB} = \frac{W}{Q_u} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{J/C ó V})$$

Debe observarse que el punto inicial, o de referencia, es el límite inferior de la integral lineal. Por lo tanto, el signo menos no debe omitirse. Este signo apareció en esta expresión proveniente de la fuerza $\mathbf{F}_a = -Q\mathbf{E}$, que fue aplicada para poner la carga en equilibrio.

Puesto que \mathbf{E} es un campo conservativo,

$$V_{AB} = V_{AC} - V_{BC}$$

de aquí que V_{AB} se considere como la *diferencia de potencial* entre los puntos A y B . Cuando V_{AB} es positivo, debe realizarse trabajo para poder mover la carga unitaria positiva desde B hasta A y se dice entonces que el punto A está a un potencial más alto que el punto B . En el ejemplo 1, si el punto B se toma en (2, 0, 0) m y el punto A en (0, 2, 0) m, entonces

$$V_{AB} = \frac{24 \text{ J}}{2 \text{ C}} = 12 \text{ V}$$

El punto A está a un potencial más alto que el punto B , (lo está en 12 V). Además, el potencial V_{BA} debe ser -12 V , ya que V_{BA} difiere de V_{AB} sólo por la inversión de los límites superior e inferior en la integral definitoria, lo cual simplemente cambia el signo del resultado.

EJEMPLO 3: Encuentre el potencial de $A, (1, \phi, z)$, con respecto a $B, (3, \phi', z')$, en coordenadas cilíndricas, donde el campo eléctrico es producido por una carga lineal sobre el eje z , está dado por $\mathbf{E} = (50/r)\mathbf{a}_r$ (V/m).

Debe anotarse primero que $d\mathbf{l}$ tiene componentes en las direcciones \mathbf{a}_r , \mathbf{a}_ϕ , y \mathbf{a}_z y que \mathbf{E} tiene dirección radial. Entonces $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_r dr$, y así

$$V_{AB} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_3^1 \frac{50}{r} dr = -50 \ln \frac{1}{3} = 54.9 \text{ V}$$

El punto A está a un potencial más alto que el punto B .

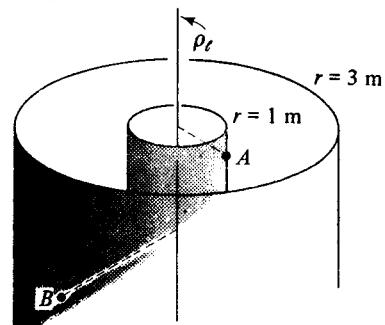


Fig. 5-3

Como no hay trabajo en movimiento a lo largo de \mathbf{a}_ϕ o \mathbf{a}_z , todos los puntos sobre el cilindro $r = \text{constante}$ deben estar al mismo potencial. En otras palabras, para una línea uniforme de carga, cilindros circulares rectos concéntricos son *superficies equipotenciales*.

5.3 POTENCIAL DE UNA CARGA PUNTUAL

Como el campo eléctrico producido por una carga puntual Q tiene dirección radial,

$$V_{AB} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{r_B}^{r_A} E_r dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_B}^{r_A} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Para una carga positiva Q el punto A está a un potencial más alto que el punto B cuando r_A es menor que r_B . Las superficies equipotenciales son conchas esféricas concéntricas.

Si al punto de referencia B se le permite ahora moverse hacia el infinito, entonces

$$V_{A\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{\infty} \right)$$

$$\text{o } V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

En el material que sigue se hará uso considerable de la anterior ecuación. El mayor peligro de ésta reside en olvidar dónde está la referencia e intentar aplicar la ecuación a distribuciones de carga que se extienden hasta infinito.

5.4 POTENCIAL DE UNA DISTRIBUCION DE CARGA

Si hay carga distribuida en algún volumen finito con una densidad de carga conocida ρ (C/m^3), entonces puede determinarse el potencial en un punto externo. Para hacerlo, se identifica una diferencial de carga dentro de algún punto en el volumen, como se muestra en la figura 5-4. Entonces en P ,

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 R}$$

La integración sobre el volumen da el potencial total en P :

$$V = \int_{\text{vol}} \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon_0 R}$$

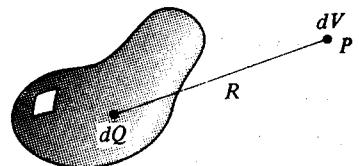


Fig. 5-4

donde dQ está reemplazado por ρdv . Ahora, no debe confundirse R con r del sistema de coordenadas esféricas. R no es un vector sino la distancia desde dQ hasta el punto P . Finalmente, R casi siempre varía de lugar a través del volumen y entonces no puede removérse del integrando.

Si la carga se distribuye sobre una superficie o una línea, la expresión de arriba para V se cumple, siempre y cuando la integración sea sobre la superficie o la línea y ρ_s o ρ_l estén usados en lugar de ρ . Debe hacerse hincapié en que todas estas expresiones para el potencial en un punto externo están basadas en una *referencia cero en el infinito*.

5.5 GRADIENTE

Llegados a este punto, se introduce otra operación del análisis vectorial. La figura 5-5(a) muestra dos puntos vecinos, M y N , de la región en que está definida una función escalar V . El vector separación de los dos puntos es

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y + dz \mathbf{a}_z$$

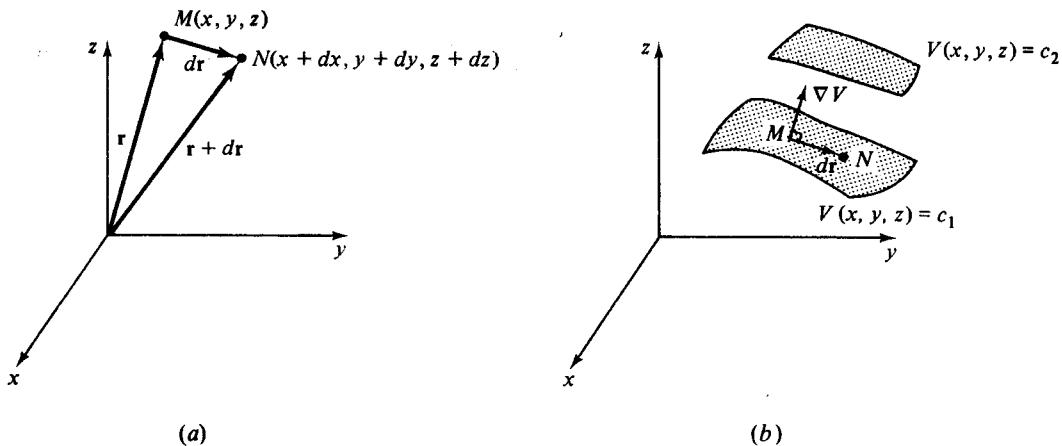


Fig. 5-5

Por el cálculo, el cambio en V desde M hasta N está dado por

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Ahora, el operador nabla, introducido en la sección 4-4, sobre V da

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

De lo que se deduce que

$$dV = \nabla V \cdot dr$$

El campo vectorial ∇V (también escrito $\text{grad } V$) se llama el *gradiente* de la función escalar V . Se ve que para una $|dr|$ fija, el cambio en V en una dirección dada dr es proporcional a la proyección de ∇V en esa dirección. Así pues ∇V *yace en la dirección de máximo incremento de la función V* .

Otra visión del gradiente se obtiene haciendo que los puntos M y N estén sobre la misma superficie equipotencial (si V es un potencial), $V(x, y, z) = c_1$ [ver figura 5-5(b)]. Entonces $dV = 0$ lo que implica que ∇V es perpendicular a dr . Pero dr es tangente a la superficie equipotencial. En efecto, para una localización adecuada de N , éste representa *cualquier* tangente a través de M . En consecuencia, ∇V debe estar a lo largo de la superficie normal a M . Como dV está en la dirección de aumento de V , apunta desde $V(x, y, z) = c_1$ hacia $V(x, y, z) = c_2$, donde $c_2 > c_1$. *El gradiente de una función potencial es un campo vectorial el cual es en todo punto normal a las superficies equipotenciales.*

El gradiente en los sistemas coordenados cilíndricos y esféricos se deriva directamente de su expresión en el sistema cartesiano. Debe anotarse que cada término contiene la derivada parcial de V con respecto a la distancia en dirección del vector unidad particular.

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (\text{cartesiano})$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{\partial V}{r \partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (\text{cilíndrico})$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{\partial V}{r \partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{\partial V}{r \sin \theta \partial \phi} \mathbf{a}_\phi \quad (\text{esférico})$$

Aunque ∇V es válido para $\text{grad } V$ en cualquier sistema coordenado, debe recordarse que el operador nabla se define sólo en coordenadas cartesianas.

5.6 RELACION ENTRE E Y V

A partir de la expresión integral para el potencial de A respecto de B , el diferencial de V puede escribirse como

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Por otro lado,

$$dV = \nabla V \cdot dr$$

Como $d\mathbf{l} = dr$ es un pequeño desplazamiento arbitrario, se deduce que

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

La intensidad del campo eléctrico \mathbf{E} puede obtenerse, cuando la función potencial V es conocida, tomando simplemente el negativo del gradiente de V . Ya se halló que el gradiente es un vector normal a las superficies equipotenciales dirigido hacia un cambio positivo en V . Con el signo negativo se encuentra que el campo \mathbf{E} se dirige de los niveles superiores a los inferiores del potencial V .

5.7 ENERGIA EN CAMPOS ELECTRICOS ESTATICOS

Considere el trabajo requerido para ensamblar, carga por carga, una distribución de $n = 3$ cargas puntuales. La región se supone inicialmente libre de carga y con $\mathbf{E} = 0$ en todas partes.

Como se ve en la figura 5-6, el trabajo requerido para colocar la primera carga Q_1 , en la posición 1 es cero. Por tanto, cuando Q_2 , se mueve hacia la región, se requiere un trabajo igual al producto de esta carga por el potencial de Q_1 . El trabajo total realizado al colocar estas tres cargas es

$$\begin{aligned} W_E &= W_1 + W_2 + W_3 \\ &= 0 + (Q_2 V_{2,1}) + (Q_3 V_{3,1} + Q_3 V_{3,2}) \end{aligned}$$

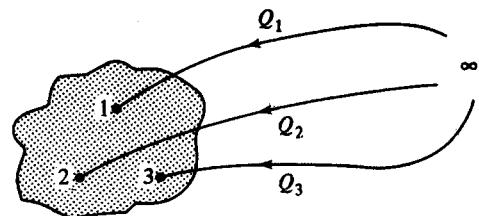


Fig. 5-6

El potencial $V_{2,1}$ debe leerse "el potencial en el punto 2 debido a la carga Q_1 en la posición 1". (Esta notación, poco usual, no aparecerá de nuevo en este libro.) El trabajo W_E es la energía almacenada en el campo eléctrico de la distribución de carga. (Ver problema 5.20 para un comentario sobre esta identificación.)

Ahora, si las tres cargas se trajeran a su sitio en orden inverso, el trabajo total sería

$$\begin{aligned} W_E &= W_3 + W_2 + W_1 \\ &= 0 + (Q_2 V_{2,3}) + (Q_1 V_{1,3} + Q_1 V_{1,2}) \end{aligned}$$

Cuando las dos expresiones arriba se suman, el resultado es dos veces la energía almacenada:

$$2W_E = Q_1(V_{1,2} + V_{1,3}) + Q_2(V_{2,1} + V_{2,3}) + Q_3(V_{3,1} + V_{3,2})$$

El término $Q_1(V_{1,2} + V_{1,3})$ era el trabajo hecho contra los campos de Q_2 y Q_3 , únicas otras cargas en la región. Así que, $V_{1,2} + V_{1,3} = V_1$, potencial en la posición 1. Entonces

$$2W_E = Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3$$

y

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n Q_m V_m$$

para una región que contiene n cargas puntuales. Para una región con densidad de carga ρ (C/m^3) el proceso sumatorio se convierte en una integración,

$$W_E = \frac{1}{2} \int \rho V dv$$

Otras expresiones (ver problema 5.15) para la energía almacenada son

$$W_E = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv \quad W_E = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dv \quad W_E = \frac{1}{2} \int \frac{D^2}{\epsilon} dv$$

En un circuito eléctrico, la energía almacenada en un condensador está dada por

$$W_E = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2$$

donde C es la capacitancia (en faradios), V es la diferencia de voltaje entre los dos conductores que constituyen el condensador y Q es la magnitud de la carga total sobre uno de los conductores.

EJEMPLO 4: Un condensador de placas paralelas, tal que $C = \epsilon A/d$, tiene un voltaje constante V aplicado entre las placas (figura 5-7). Encuentre la energía almacenada en el campo eléctrico.

Despreciando el efecto de bordes, el campo es $\mathbf{E} = (V/d)\mathbf{a}_n$ entre las placas y $\mathbf{E} = 0$ en cualquier otro lugar.

$$\begin{aligned} W_E &= \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dv \\ &= \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{V}{d} \right)^2 \int dv \\ &= \frac{\epsilon A V^2}{2d} \\ &= \frac{1}{2} C V^2 \end{aligned}$$

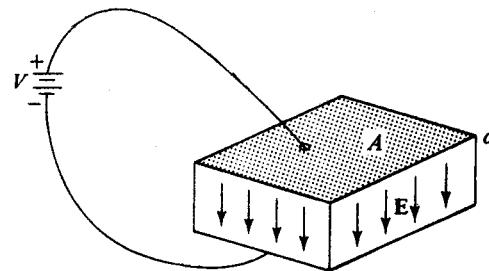


Fig. 5-7

Siguiendo un método distinto, la carga total sobre un conductor puede encontrarse a partir de \mathbf{D} en la superficie por medio de la ley de Gauss (sección 3.3).

$$\mathbf{D} = \frac{\epsilon V}{d} \mathbf{a}_n$$

$$Q = |\mathbf{D}| A = \frac{\epsilon V A}{d}$$

Entonces

$$W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon V A^2}{d} \right) = \frac{1}{2} C V^2$$

Problemas resueltos

- 5.1. Halle el trabajo realizado al mover una carga puntual $Q = -20 \mu\text{C}$ desde el origen hasta $(4, 0, 0)$ m en el campo

$$\mathbf{E} = \left(\frac{x}{2} + 2y \right) \mathbf{a}_x + 2x \mathbf{a}_y \quad (\text{V/m})$$

Para una trayectoria a lo largo del eje x , $d\mathbf{l} = dx \mathbf{a}_x$.

$$\begin{aligned} dW &= -QE \cdot d\mathbf{l} \\ &= (20 \times 10^{-6}) \left(\frac{x}{2} + 2y \right) dx \\ y \quad W &= (20 \times 10^{-6}) \int_0^4 \left(\frac{x}{2} + 2y \right) dx \\ &= 80 \mu\text{J} \end{aligned}$$

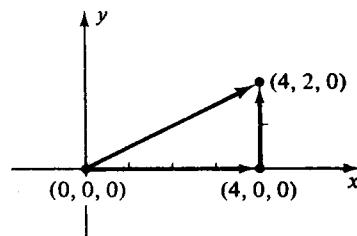


Fig. 5-8

- 5.2.** En el campo del problema 5.1, mueva la carga desde (4, 0, 0) m hasta (4, 2, 0) m y determine el trabajo realizado.

Ahora (sección figura 5-8) $d\mathbf{l} = dy \mathbf{a}_y$, y así

$$W = (20 \times 10^{-6}) \int_0^2 2x dy = (20 \times 10^{-6})(2)(4) \int_0^2 dy = 320 \mu J$$

- 5.3.** En el campo E del problema 5.1, halle el trabajo realizado al mover la carga desde el origen hasta (4, 2, 0) m a lo largo de la línea recta que conecta los puntos.

La ecuación de la línea es $x = 2y$, de lo cual $dx = 2 dy$, $dz = 0$. Entonces

$$W = (20 \times 10^{-6}) \int \left[\left(\frac{x}{2} + 2y \right) \mathbf{a}_x + 2x \mathbf{a}_y \right] \cdot (dx \mathbf{a}_x + dy \mathbf{a}_y) = (20 \times 10^{-6}) \int \left(\frac{x}{2} + 2y \right) dx + 2x dy$$

Para integrar respecto de x , y y dy se cambian a $x/2$ y $dx/2$.

$$W = (20 \times 10^{-6}) \int_0^4 \frac{5}{2} x dx = 400 \mu J$$

que es la suma de $80 \mu J$ y $320 \mu J$, datos hallados en los problemas 5.1 y 5.2.

- 5.4.** Halle el trabajo realizado al mover una carga puntual $Q = 5 \mu C$ desde el origen hasta (2 m, $\pi/4$, $\pi/2$), coordenadas esféricas, en el campo

$$\mathbf{E} = 5e^{-r/4} \mathbf{a}_r + \frac{10}{r \sin \theta} \mathbf{a}_\phi \quad (\text{V/m})$$

En coordenadas esféricas,

$$d\mathbf{l} = dr \mathbf{a}_r + r d\theta \mathbf{a}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{a}_\phi$$

Escoja la trayectoria que se muestra en la figura 5-9, a lo largo del segmento $d\theta = d\phi = 0$, y

$$dW = -QE \cdot d\mathbf{l} = (-5 \times 10^{-6})(5e^{-r/4} dr)$$

A lo largo del segmento II, $dr = d\theta = 0$, y

$$dW = -QE \cdot d\mathbf{l} = (-5 \times 10^{-6})(10 d\phi)$$

A lo largo del segmento III, $dr = d\phi = 0$, y

$$dW = -QE \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Por consiguiente,

$$W = (-25 \times 10^{-6}) \int_0^2 e^{-r/4} dr + (-50 \times 10^{-6}) \int_0^{\pi/2} d\phi = -117.9 \mu J$$

En este caso, el campo realiza al mover la carga un trabajo de $117.9 \mu J$.

- 5.5.** Sea el campo $\mathbf{E} = (k/r)\mathbf{a}_r$, en coordenadas cilíndricas. Demuestre que el trabajo necesario para mover una carga puntual desde una distancia radial r hasta un punto situado a dos veces esa distancia radial, es independiente de r .

Como el campo tiene solamente componente radial,

$$dW = -QE \cdot d\mathbf{l} = -QE_r dr = \frac{-kQ}{r} dr$$

Para los límites de integración use r_1 y $2r_1$.

$$W = -kQ \int_{r_1}^{2r_1} \frac{dr}{r} = -kQ \ln 2$$

independiente de r .

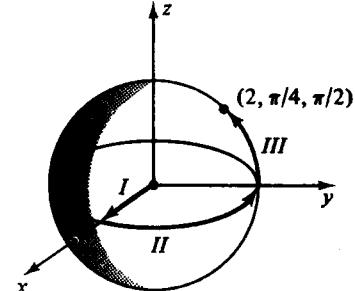


Fig. 5-9

- 5.6.** Dada una carga lineal de $\rho_e = (10^{-9}/2) \text{ C/m}$ sobre el eje z, halle V_{AB} , donde A es (2 m, $\pi/2, 0$) y B es (4 m, $\pi, 5$ m).

$$V_{AB} = - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{donde} \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{a}_r$$

Como el campo producido por la carga lineal tiene dirección radial, el producto escalar con $d\mathbf{l}$ es $E_r dr$.

$$V_{AB} = - \int_B^A \frac{10^{-9}}{2(2\pi\epsilon_0 r)} dr = -9[\ln r]_B^A = 6.24 \text{ V}$$

- 5.7.** En el campo del problema 5.6, hállese V_{BC} , donde $r_B = 4 \text{ m}$ y $r_C = 10 \text{ m}$. Luego, determíñese V_{AC} y compárese éste con la suma de V_{AB} y V_{BC} .

$$V_{BC} = -9[\ln r]_{r_C}^{r_B} = -9(\ln 4 - \ln 10) = 8.25 \text{ V}$$

$$V_{AC} = -9[\ln r]_{r_C}^{r_A} = -9(\ln 2 - \ln 10) = 14.49 \text{ V}$$

$$V_{AB} + V_{BC} = 6.24 \text{ V} + 8.25 \text{ V} = 14.49 \text{ V} = V_{AC}$$

- 5.8.** Dado el campo $\mathbf{E} = (-16/r^2)\mathbf{a}_r$ (V/m), en coordenadas esféricas. Halle el potencial del punto (2 m, $\pi, \pi/2$) respecto del punto (4 m, 0, π).

Las superficies equipotenciales son conchas esféricas concéntricas. Dejemos que $r = 2 \text{ m}$ sea A y $r = 4 \text{ m}$, sea B. Entonces

$$V_{AB} = - \int_4^2 \left(\frac{-16}{r^2} \right) dr = -4 \text{ V}$$

- 5.9.** Una carga lineal de $\rho_e = 400 \text{ pC/m}$ yace a lo largo del eje x y la superficie de potencial cero pasa por el punto (0, 5, 12) m en coordenadas cartesianas (ver figura 5-10). Halle el potencial en (2, 3, -4) m.

Como la carga lineal yace a lo largo del eje x, las coordenadas x de los dos puntos pueden ignorarse.

$$r_A = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ m} \quad r_B = \sqrt{25 + 144} = 13 \text{ m}$$

Entonces

$$V_{AB} = - \int_{r_B}^{r_A} \frac{\rho_e}{2\pi\epsilon_0 r} dr = - \frac{\rho_e}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_A}{r_B} = 6.88 \text{ V}$$

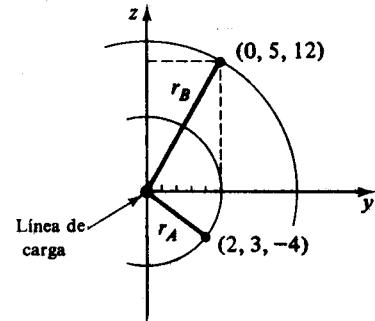


Fig. 5-10

- 5.10.** Halle el potencial en $r_A = 5 \text{ m}$ respecto de $r_B = 15 \text{ m}$ producido por una carga puntual $Q = 500 \text{ pC}$ en el origen y referencia cero en el infinito.

Debido a la carga puntual,

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

Para encontrar la diferencia de potencial, no es necesaria la referencia cero.

$$V_{AB} = \frac{500 \times 10^{-12}}{4\pi(10^{-9}/36\pi)} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{15} \right) = 0.60 \text{ V}$$

la referencia cero en el infinito puede usarse para encontrar V_5 y V_{15} .

$$V_5 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{5}\right) = 0.90 \text{ V} \quad V_{15} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{15}\right) = 0.30 \text{ V}$$

Entonces

$$V_{AB} = V_5 - V_{15} = 0.60 \text{ V}$$

- 5.11.** Una carga total de $(40/3)$ nC se distribuye uniformemente alrededor de un anillo circular de 2 m de radio. Halle el potencial en el punto situado sobre el eje, a 5 m del plano del anillo. Compare el resultado con el que se obtiene si toda la carga se concentra en el origen en forma de carga puntual.

Con la carga en una línea,

$$V = \int \frac{\rho_c d\ell}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Aquí $\rho_c = \frac{(40/3) \times 10^{-9}}{2\pi(2)} = \frac{10^{-8}}{3\pi} \text{ C/m}$

y (ver figura 5-11) $R = \sqrt{29} \text{ m}$, $d\ell = (2 \text{ m})d\phi$.

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{(10^{-8}/3\pi)(2)d\phi}{4\pi(10^{-9}/36\pi)\sqrt{29}} = 22.3 \text{ V}$$

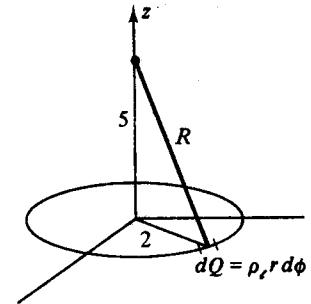


Fig. 5-11

Si la carga está concentrada en el origen.

$$V = \frac{(40/3) \times 10^{-9}}{4\pi\epsilon_0(5)} = 24.0 \text{ V}$$

- 5.12.** Repita el problema 5.11 con la carga total distribuida uniformemente sobre un disco circular de 2 m de radio (figura 5-12).

Como la carga está sobre una superficie,

$$V = \int \frac{\rho_s dS}{4\pi\epsilon_0 R}$$

con $\rho_s = \frac{(40/3) \times 10^{-9}}{\pi(2)^2} = \frac{10^{-8}}{3\pi} \text{ C/m}^2$

$$R = \sqrt{25 + r^2} \text{ (m)}$$

$$V = \frac{10^{-8}/3\pi}{4\pi(10^{-9}/36\pi)} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{r dr d\phi}{\sqrt{25 + r^2}} = 23.1 \text{ V}$$

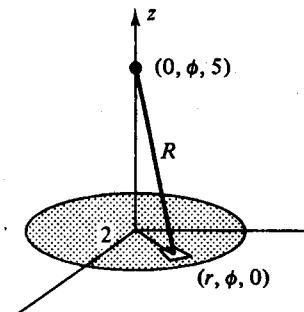


Fig. 5-12

- 5.13.** Cinco cargas puntuales iguales, $Q = 20$ nC, están localizadas en $x = 2, 3, 4, 5$ y 6 m. Encuentre el potencial en el origen.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{m=1}^5 \frac{Q_m}{R_m} = \frac{20 \times 10^{-9}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) = 261 \text{ V}$$

- 5.14.** Hay una carga distribuida uniformemente a lo largo de una línea recta de longitud finita $2L$ (figura 5-13). Demuestre que para dos puntos externos, cerca del punto medio, tales que r_1 y r_2 sean pequeños comparados con la longitud, el potencial V_{12} es el mismo que para una línea infinita de carga.

El potencial en el punto 1, con referencia cero en el infinito, es

$$\begin{aligned} V_1 &= 2 \int_0^L \frac{\rho_t dz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r_1^2)^{1/2}} \\ &= \frac{2\rho_t}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln(z + \sqrt{z^2 + r_1^2}) \right]_0^L \\ &= \frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0} [\ln(L + \sqrt{L^2 + r_1^2}) - \ln r_1] \end{aligned}$$

En forma similar, el potencial en el punto 2 es

$$V_2 = \frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0} [\ln(L + \sqrt{L^2 + r_2^2}) - \ln r_2]$$

Ahora si $L \gg r_1$ y $L \gg r_2$,

$$V_1 \approx \frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0} (\ln 2L - \ln r_1)$$

$$V_2 \approx \frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0} (\ln 2L - \ln r_2)$$

Entonces

$$V_{12} = V_1 - V_2 \approx \frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Fig. 5-13

lo que coincide con la expresión encontrada en el problema 5.9 para la línea infinita.

- 5.15.** Hay una carga distribuida en un volumen v con densidad ρ , que da lugar a un campo eléctrico con energía almacenada

$$W_E = \frac{1}{2} \int_v \rho V dv$$

Demuestre que una expresión equivalente para la energía almacenada es

$$W_E = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dv$$

La figura 5-14 muestra el volumen v que contiene la carga, encerrado dentro de una gran esfera de radio R . Como ρ es nula fuera de v ,

$$W_E = \frac{1}{2} \int_v \rho V dv = \frac{1}{2} \int_{\text{volumen esferoidal}} \rho V dv = \frac{1}{2} \int_{\text{volumen esferoidal}} (\nabla \cdot \mathbf{D}) V dv$$

El vector identidad $\nabla \cdot V\mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \nabla V + V(\nabla \cdot \mathbf{A})$, aplicado al integrando, da:

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{volumen esferoidal}} (\nabla \cdot V\mathbf{D}) dv - \frac{1}{2} \int_{\text{volumen esferoidal}} (\mathbf{D} \cdot \nabla V) dv$$

Esta expresión se cumple para un radio R arbitrariamente grande. Se debe hacer $R \rightarrow \infty$.

La primera integral sobre la derecha es igual, por el teorema de divergencia, a

$$\frac{1}{2} \oint_{\text{superficie esferoidal}} V\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

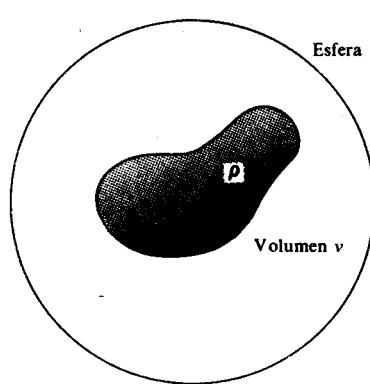
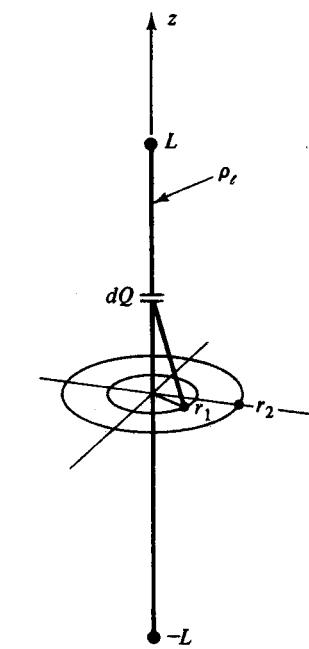


Fig. 5-14

Ahora, si la esfera envolvente se hace muy grande, el volumen encerrado parecerá una carga puntual. De esta manera, en la superficie, D aparece como k_1/R^2 y V como k_2/R . Así que el integrando decrece con $1/R^3$. Como el área de la superficie aumenta sólo con R^2 , se concluye que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\text{superficie esférica}} V D \cdot dS = 0$$

La otra integral da, en el límite,

$$W_E = -\frac{1}{2} \int (\mathbf{D} \cdot \nabla V) dv = \frac{1}{2} \int (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) dv$$

y como $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, la energía almacenada está también dada por

$$W_E = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dv \quad \text{o} \quad W_E = \frac{1}{2} \int \frac{D^2}{\epsilon} dv$$

- 5.16.** Sea la función potencial $V = 2x + 4y$ (V) en el espacio libre. Halle la energía almacenada en un volumen de 1 m^3 centrado en el origen. Examine otros volúmenes de 1 m^3 .

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z\right) = -2\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y \quad (\text{V/m})$$

Este campo es constante en magnitud ($E = \sqrt{20} \text{ V/m}$) y con dirección sobre todo el espacio, de esta manera la energía total almacenada es infinita. (El campo puede ser aquél que se produce dentro de un condensador de placas paralelas infinitas. Se necesitaría una cantidad infinita de energía para cargar tal condensador.)

De todas maneras, es posible hablar de una *densidad de energía* para éste y otros campos. La expresión

$$W_E = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dv$$

sugiere que cada volumen minúsculo dv tendrá asignado un contenido $w dv$, donde

$$w = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

Para este campo, la densidad de energía es constante:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 (20) = \frac{10^{-8}}{36\pi} \text{ J/m}^3$$

y así cada volumen de 1 m^3 contiene $(10^{-8}/36\pi) \text{ J}$ de energía.

- 5.17.** Dos semiplanos conductores delgados, en $\phi = 0$ y $\phi = \pi/6$, están aislados uno del otro a lo largo del eje z . La función potencial para $0 \leq \phi \leq \pi/6$ es $V = (-60\phi/\pi)V$. Halle la energía almacenada entre los semiplanos para $0.1 \leq r \leq 0.6 \text{ m}$ y $0 \leq z \leq 1 \text{ m}$. Suponga espacio libre.

Para encontrar la energía almacenada, W'_E , en una región limitada de espacio, se debe encontrar la densidad de energía (ver problema 5.16) a través de la región. Entre los semiplanos,

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{-60\phi}{\pi} \right) \mathbf{a}_\phi = \frac{60}{\pi r} \mathbf{a}_\phi \quad (\text{V/m})$$

y así

$$W'_E = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^1 \int_0^{\pi/6} \int_{0.1}^{0.6} \left(\frac{60}{\pi r} \right)^2 r dr d\phi dz = \frac{300\epsilon_0}{\pi} \ln 6 = 1.51 \text{ nJ}$$

- 5.18.** El campo eléctrico entre dos conductores cilíndricos concéntricos en $r = 0.01 \text{ m}$ y $r = 0.05 \text{ m}$ está dado por $\mathbf{E} = (10^5/r)\mathbf{a}_r$, (V/m), si se desprecian los efectos de los bordes. Halle la energía almacenada en una longitud de 0.5 m. Suponga espacio libre.

$$W_E' = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 E^2 dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{0.01}^{0.05} \int_0^{2\pi} \int_{0.05}^{0.05} \left(\frac{10^5}{r}\right)^2 r dr d\phi dz = 0.224 \text{ J}$$

- 5.19.** Halle la energía almacenada en un sistema de cuatro cargas puntuales idénticas, $Q = 4 \text{ nC}$, en las esquinas de un cuadrado de 1 m de lado. ¿Cuál es la energía almacenada en el sistema cuando sólo dos cargas están colocadas cada una en esquinas opuestas?

$$2W_E = Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + Q_4 V_4 = 4Q_1 V_1$$

donde la última igualdad proviene de la simetría del sistema.

$$V_1 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_4}{4\pi\epsilon_0 R_{14}} = \frac{4 \times 10^{-9}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 97.5 \text{ V}$$

Entonces

$$W_E = 2Q_1 V_1 = 2(4 \times 10^{-9})(97.5) = 780 \text{ nJ}$$

Para sólo dos cargas,

$$2W_E = Q_1 V_1 + Q_2 V_2 = 2Q_1 V_1$$

$$\text{o } W_E = Q_1 V_1 = (4 \times 10^{-9}) \left(\frac{4 \times 10^{-9}}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2}} \right) = 102 \text{ nJ}$$

- 5.20.** ¿Qué energía está almacenada en el sistema de dos cargas puntuales, $Q_1 = 3 \text{ nC}$ y $Q_2 = -3 \text{ nC}$, separadas por una distancia de $d = 0.2 \text{ m}$?

$$2W_E = Q_1 V_1 + Q_2 V_2 = Q_1 \left(\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 d} \right) + Q_2 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 d} \right)$$

$$\text{por esto } W_E = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 d} = - \frac{(3 \times 10^{-9})^2}{4\pi(10^{-9}/36\pi)(0.2)} = -405 \text{ nJ}$$

Puede parecer paradójico que la energía almacenada se torne negativa aquí, mientras $\frac{1}{2}\epsilon E^2$, y por consiguiente

$$W_E = \frac{1}{2} \int_{\text{todo el espacio}} \epsilon E^2 dv$$

es necesariamente positivo. La razón para la discrepancia está en que al igualar el trabajo realizado para ensamblar un sistema de cuatro cargas puntuales a la energía almacenada en el campo, uno desprecia la energía infinita ya existente en el campo cuando las cargas estaban en el infinito. (Tomó una cantidad infinita de trabajo separar las cargas en el infinito.) Así pues, el resultado anterior, $W_E = -405 \text{ nJ}$, puede tomarse con el significado de la energía con 405 nJ por debajo del nivel de referencia (infinito) en el infinito. Como sólo las *diferencias* de energía tienen significado físico, el nivel de referencia puede ser apropiadamente despreciado.

- 5.21.** Una concha esférica conductora de radio a , centrada en el origen, tiene un campo potencial

$$V = \begin{cases} V_0 & r \leq a \\ V_0 a/r & r > a \end{cases}$$

con referencia cero en el infinito. Halle una expresión para la energía almacenada que este campo representa.

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \begin{cases} 0 & r < a \\ (V_0 a/r^2)\mathbf{a}_r & r > a \end{cases}$$

$$W_E = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 E^2 dv = 0 + \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^\infty \left(\frac{V_0 a}{r^2} \right)^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = 2\pi\epsilon_0 V_0^2 a$$

Obsérvese que la carga total sobre la concha es, según la ley de Gauss,

$$Q = DA = \left(\frac{\epsilon_0 V_0 a}{a^2} \right) (4\pi a^2) = 4\pi\epsilon_0 V_0 a$$

mientras que el potencial en la concha es $V = V_0$. Así pues, $W_E = \frac{1}{2}QV$, resultado familiar para la energía almacenada en un condensador (en este caso, un condensador esférico con la otra placa de radio infinito).

Problemas supplementarios

- 5.22.** Halle el trabajo realizado al mover una carga $Q = -20 \mu\text{C}$ desde el origen hasta $(4, 2, 0)$ m en el campo

$$\mathbf{E} = 2(x + 4y)\mathbf{a}_x + 8x\mathbf{a}_y \quad (\text{V/m})$$

a lo largo de la trayectoria $x^2 = 8y$. *Resp.* 1.60 mJ

- 5.23.** Repita el problema 5.4 utilizando una trayectoria de dirección radial. *Resp.* $-117.9 \mu\text{J}$

- 5.24.** Repita el problema 5.4 utilizando la trayectoria mostrada en la figura 5-15. *Resp.* $-117.9 \mu\text{J}$

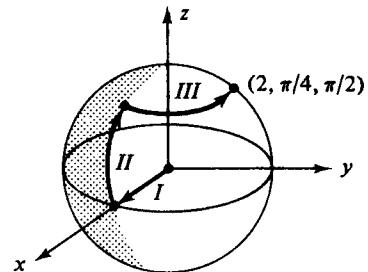


Fig. 5-15

- 5.25.** Halle el trabajo realizado al mover una carga puntual $Q = 3 \mu\text{C}$ desde $(4 \text{ m}, \pi, 0)$ hasta $(2 \text{ m}, \pi/2, 2 \text{ m})$, coordenadas cilíndricas, en el campo $\mathbf{E} = (10^5/r)\mathbf{a}_r + 10^5\mathbf{a}_z \text{ (V/m)}$. *Resp.* -0.392 J

- 5.26.** Halle la diferencia entre las cantidades de trabajo requeridas para traer una carga puntual $Q = 2 \text{ nC}$ desde el infinito hasta $r = 2 \text{ m}$ y desde el infinito hasta $r = 4 \text{ m}$, en el campo $\mathbf{E} = (10^5/r)\mathbf{a}_r \text{ (V/m)}$. *Resp.* $1.39 \times 10^{-4} \text{ J}$

- 5.27.** Una carga total de $(40/3) \text{ nC}$ está distribuida en forma de un disco circular de radio 2 m. Halle el potencial producido por esta carga en un punto situado sobre el eje, a 2 m del disco. Compare este potencial con el que se obtiene si toda la carga está en el centro del disco. *Resp.* $49.7 \text{ V}, 60 \text{ V}$

- 5.28.** Una carga lineal uniforme de densidad $\rho_e = 1 \text{ nC/m}$ está arreglada en forma de un cuadrado de 6 m de lado, como se muestra en la figura 5-16. Halle el potencial en $(0, 0, 5)$ m. *Resp.* 35.6 V

- 5.29.** Desarrolle una expresión para el potencial en un punto situado a d metros medidos radialmente hacia afuera desde el punto medio de una carga lineal finita con L metros de longitud y densidad uniforme $\rho_e \text{ (C/m)}$. Aplique este resultado, como prueba, al problema 5.28.

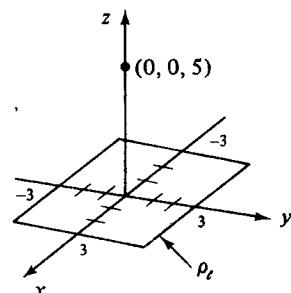


Fig. 5-16

$$\text{Resp. } \frac{\rho_e}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{L/2 + \sqrt{d^2 + L^2/4}}{d} \quad (\text{V})$$

- 5.30.** Demuestre que el potencial en el origen producido por una densidad superficial uniforme de carga ρ_s sobre el anillo $z = 0$, $R \leq r \leq R + 1$ es independiente de R .

- 5.31.** Una carga total de 160 nC está inicialmente separada en cuatro cargas puntuales iguales espaciadas a 90° de intervalo alrededor de un círculo de 3 m de radio. Halle el potencial en un punto situado sobre el eje, a 5 m del

plano del círculo. Separe la carga total en 8 partes iguales y repita el ejercicio con las cargas espaciadas a 45° de intervalo. ¿Cuál sería la respuesta en el límite $\rho_t = (160/6\pi) \text{ nC/m}^2$? Resp. 247 V

- 5.32.** En coordenadas esféricas, el punto A está en un radio 2 m y el punto B está en 4 m. Dado el campo $\mathbf{E} = (-16/r^2)\mathbf{a}_r$ (V/m), halle el potencial del punto A, con referencia cero en el infinito. Repita el ejercicio para el punto B. Ahora exprese la diferencia de potencial $V_A - V_B$ y compare el resultado con el problema 5.8.
Resp. $V_A = 2V_B = -8 \text{ V}$
- 5.33.** Si el potencial de referencia cero está en $r = 10 \text{ m}$ y una carga puntual $Q = 0.5 \text{ nC}$ está en el origen, halle los potenciales en $r = 5 \text{ m}$ y $r = 15 \text{ m}$. ¿A qué distancia radial el potencial es igual en magnitud al potencial en $r = 5 \text{ m}$, pero opuesto en signo? Resp. 0.45 V, 0.15 V, ∞
- 5.34.** Una carga puntual $Q = 0.4 \text{ nC}$ está localizada en $(2, 3, 3) \text{ m}$ en coordenadas cartesianas. Halle la diferencia de potencial V_{AB} , donde el punto A es $(2, 2, 3) \text{ m}$ y B es $(-2, 3, 3) \text{ m}$. Resp. 2.70 V
- 5.35.** Halle el potencial en coordenadas esféricas producido por dos cargas puntuales iguales, pero opuestas sobre el eje $y = \pm d/2$. Suponga $r \gg d$. Resp. $(Qd \operatorname{sen} \theta)/(4\pi\epsilon_0 r^2)$
- 5.36.** Repita el problema 5.35 con las cargas sobre el eje z. Resp. $(Qd \cos \theta)/(4\pi\epsilon_0 r^2)$
- 5.37.** Halle las densidades de carga sobre los conductores del problema 5.17.
- Resp. $\frac{+60\epsilon_0}{\pi r} (\text{C/m}^2)$ sobre $\phi = 0$, $\frac{-60\epsilon_0}{\pi r} (\text{C/m}^2)$ sobre $\phi = \pi/6$
- 5.38.** Una carga lineal uniforme con $\rho_t = 2 \text{ nC/m}$ yace en el plano $z=0$ paralelo al eje x en $y=3 \text{ m}$. Halle la diferencia de potencial V_{AB} para los puntos A(2 m, 0, 4 m) y B(0, 0, 0). Resp. -18.4 V
- 5.39.** Una carga laminar uniforme, con $\rho_s = (1/6\pi) \text{ nC/m}^2$, está en $x = 0$ y una segunda carga laminar, con $\rho_s = (-1/6\pi) \text{ nC/m}^2$, está en $x = 10 \text{ m}$. Halle V_{AB} , V_{BC} y V_{AC} para A(10 m, 0, 0) y C(0, 0, 0).
Resp. -36 V, -24 V, -60 V
- 5.40.** Dados los campos eléctricos en coordenadas cilíndricas $\mathbf{E} = (5/r)\mathbf{a}_r$ (V/m) para $0 < r \leq 2 \text{ m}$ y $\mathbf{E} = 2.5 \mathbf{a}_r$ (V/m) para $r > 2 \text{ m}$, halle la diferencia de potencial V_{AB} para A(1 m, 0, 0) y B(4 m, 0, 0). Resp. 8.47 V
- 5.41.** Un condensador de placas paralelas de 0.5 m por 1.0 m, tiene una distancia de separación de 2 cm y una diferencia de voltaje de 10 V. Halle la energía almacenada, suponiendo que $\epsilon = \epsilon_0$. Resp. 11.1 nJ
- 5.42.** El condensador descrito en el problema 5.41 tiene un voltaje aplicado de 200 V.
 - Halle la energía almacenada.
 - Mantenga d_1 (figura 5-17) en 2 cm y la diferencia de voltaje en 200 V, mientras se aumenta d_2 a 2.2 cm. Halle la energía final almacenada. (Sugerencia: $\Delta W_E = \frac{1}{2}(\Delta C)V^2$)
Resp. (a) 4.4 μJ ; (b) 4.2 μJ
-
- Fig. 5-17
- 5.43.** Halle la energía almacenada en un sistema de tres cargas puntuales iguales, $Q = 2 \text{ nC}$, dispuestas en línea con 0.5 m de separación entre ellas. Resp. 180 nJ
- 5.44.** Repita el problema 5.43 si la carga en el centro es -2 nC. Resp. -180 nJ.

- 5.45. Cuatro cargas puntuales iguales, $Q = 2 \text{ nC}$, deben ser colocadas en las esquinas de un cuadrado de $(1/3) \text{ m}$ de lado, una por una. Halle la energía en el sistema después que cada carga ha sido colocada.
Resp. $0, 108 \text{ nJ}, 292 \text{ nJ}, 585 \text{ nJ}$
- 5.46. Dado el campo eléctrico $\mathbf{E} = -5e^{-r/a}\mathbf{a}_r$, en coordenadas cilíndricas. Halle la energía almacenada en el volumen descrito por $r \leq 2a$ y $0 \leq z \leq 5a$.
Resp. $7.89 \times 10^{-10} a^3$
- 5.47. Dado un potencial $V = 3x^2 + 4y^2$ (V). Halle la energía almacenada en el volumen descrito por $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$ $0 \leq y \leq 1 \text{ m}$ y $0 \leq z \leq 1 \text{ m}$.
resp. 147 pJ

Capítulo 6

Corriente, densidad de corriente y conductores

6.1 INTRODUCCION

Corriente eléctrica es la tasa de transporte de carga eléctrica que pasa por un punto específico o a través de una superficie determinada. El símbolo I se usa generalmente para corrientes constantes y el símbolo i para corrientes que varían con el tiempo. La unidad de corriente es el *ampere* ($1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$). En el sistema SI, el ampere es la unidad básica y el coulomb la unidad derivada.

La ley de Ohm relaciona la corriente con el voltaje y la resistencia. Para circuitos dc simples, $I = V/R$. Sin embargo, cuando las cargas están suspendidas en un líquido o un gas, o cuando los portadores de carga negativa y positiva están presentes con diferentes características, la forma simple de la ley de Ohm es insuficiente. Por consiguiente, en electromagnetismo, la densidad de corriente $J (\text{A/m}^2)$ recibe más atención que la corriente I .

6.2 CARGAS EN MOVIMIENTO

Considérese la fuerza sobre una partícula cargada positivamente en un campo eléctrico en el vacío, como se muestra en la figura 6-1(a). Esta fuerza, $\mathbf{F} = +QE$, no es opuesta y produce una aceleración constante. De esta manera, la carga se mueve en dirección de E con una velocidad U que aumenta siempre que la partícula se halle en el campo E . Si la carga está en un líquido o en un gas, como se muestra en la figura 6-1(b), se estrella repetidamente con las partículas presentes en el medio, con lo cual se producen cambios de dirección al azar. Pero, si E es constante y el medio es homogéneo, las componentes aleatorias de velocidad se cancelan, y se tiene una velocidad promedio constante, conocida como *velocidad de corrimiento* U , a lo largo de la dirección E . La conducción en los metales tiene lugar mediante el movimiento de los electrones de las capas más exteriores de los átomos que conforman la estructura cristalina. De acuerdo con la teoría *electrónica de los gases*, estos electrones alcanzan una velocidad de corrimiento promedio muy similar a la de una partícula cargada que se mueve a través de un líquido o un gas. La velocidad de corrimiento es directamente proporcional a la intensidad del campo eléctrico,

$$U = \mu E$$

donde μ , la *movilidad*, se mide en unidades $\text{m}^2/\text{V}\cdot\text{s}$. Cada metro cúbico de un conductor contiene un número de átomos del orden de 10^{28} . Los buenos conductores tienen uno o dos de los electrones de cada átomo libres para moverse cuando se aplica un campo. La movilidad μ varía con la temperatura y la estructura cristalina del sólido. Las partículas presentes en el sólido tienen un movimiento vibratorio que aumenta con la temperatura. Esto dificulta aún más el movimiento de las cargas. Así pues, a altas temperaturas la movilidad μ se reduce, resultando en una menor velocidad (o corriente) de corrimiento para un E determinado. En análisis de circuitos este fenómeno se toma en cuenta para determinar la *resistividad* para cada material y especificar un aumento de esta resistividad con temperatura creciente.

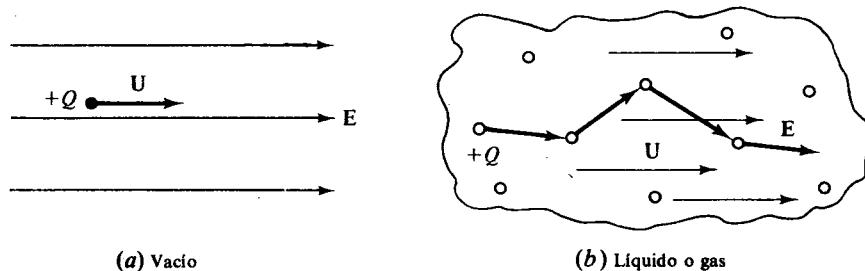


Fig. 6-1

6.3 DENSIDAD DE LA CORRIENTE DE CONVECCIÓN, J

Un conjunto de partículas cargadas que dan lugar a una densidad de carga ρ en un volumen v aparece en la figura 6-2 provisto de una velocidad U hacia la derecha. Se supone que las partículas mantienen su posición relativa dentro del volumen. Cuando esta configuración de carga pasa una superficie S ello origina una *corriente de convección*, con densidad

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{U} \quad (\text{A/m}^2)$$

Si la sección transversal de v varía o si la densidad ρ no es constante a través de v , entonces J no será constante con el tiempo. Más aún, J será cero cuando la última porción del volumen cruza S . De todas maneras, el concepto de una densidad de corriente causada por una nube de partículas cargadas en movimiento es a veces útil en el estudio de la teoría de campos electromagnéticos.

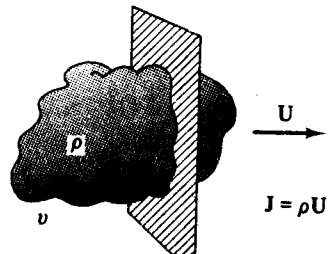


Fig. 6-2

6.4 DENSIDAD DE LA CORRIENTE DE CONDUCCIÓN, J

De más interés es la *corriente de conducción* que aparece dentro de los conductores de sección transversal fija en presencia de un campo eléctrico. La densidad de corriente está dada nuevamente por

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{U} \quad (\text{A/m}^2)$$

que, en vista de la relación $\mathbf{U} = \mu \mathbf{E}$, puede escribirse

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

donde $\sigma = \rho \mu$ es la *conductividad* del material en *siemens por metro* (S/m). En conductores metálicos los portadores de carga son los electrones, que se desplazan en dirección opuesta al campo eléctrico (figura 6-3). Por consiguiente, para los electrones, tanto ρ como μ son negativos, lo que produce una conductividad σ , positiva, tal como en el caso de portadores de carga positivos. Se deduce que \mathbf{J} y \mathbf{E} tienen la misma dirección sin importar el signo de los portadores de carga. Es conveniente tratar los electrones que se mueven a la izquierda como cargas positivas que se mueven a la derecha, y siempre tener a ρ y μ como positivos.

La relación $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ se conoce como *forma puntual de la ley de Ohm*. El factor σ tiene en cuenta la densidad de electrones libres que se mueven (ρ) y la facilidad relativa con que se mueven a través de la estructura cristalina (μ). Como podría esperarse, es una función de la temperatura.

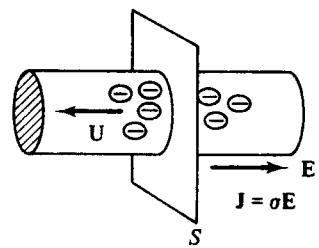


Fig. 6-3

6.5 CONDUCTIVIDAD σ

En un líquido o gas hay, generalmente iones, tanto negativos como positivos, algunos con carga sencilla y otros con carga doble y además, posiblemente, con diferente masa. Una expresión de conductividad podría incluir tales factores. Sin embargo, se supone que todos los iones negativos son iguales y lo mismo todos los iones positivos. Entonces la conductividad contiene dos términos como se ve en la figura 6-4(a). En un conductor metálico, sólo los electrones de valencia están para moverse. En la figura 6-4(b) se muestran en movimiento hacia la izquierda. La conductividad contiene entonces sólo un término, el producto de la densidad de carga de los electrones libres para moverse, ρ_e , por su movilidad, μ_e .

Una conducción más compleja es la que se da en semiconductores como el germanio y el silicio. En la estructura cristalina cada átomo tiene cuatro enlaces covalentes con átomos adyacentes. Sin embargo, a temperatura ambiente, y bajo el influjo de alguna fuente de energía como luz, los electrones pueden moverse fuera de la posición reservada para el enlace covalente. Esto crea un *par electrón-hueco* disponible para

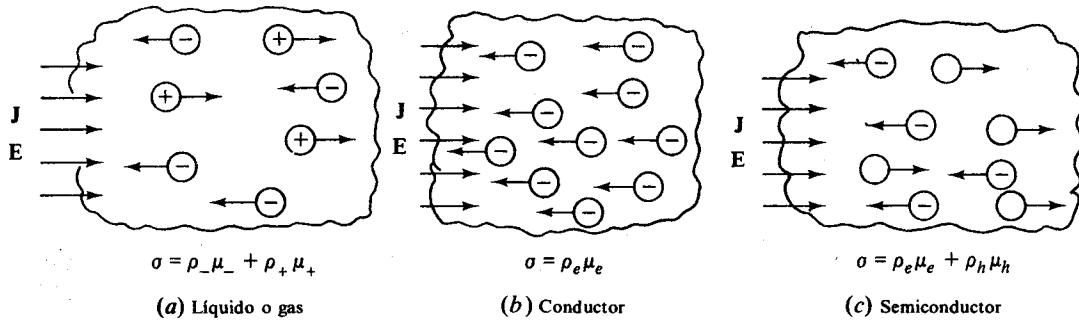


Fig. 6-4

conducción. Tales materiales se denominan semiconductores *intrínsecos*. Los pares electrón-hueco tienen un tiempo de vida breve y desaparecen por recombinación. Sin embargo, otros se van formando por lo que todo el tiempo hay algunos disponibles para conducción. Como se muestra en la figura 6-4(c), la conductividad consiste de dos términos, uno para electrones y otro para huecos. En la práctica, hay impurezas, elementos de valencia tres o de valencia cinco, que se agregan para crear materiales semiconductores *tipo p* o *tipo n*. El comportamiento intrínseco antes descrito continúa, pero está cubierto por la presencia de electrones extra en los materiales del tipo *n* o de huecos extra en los del tipo *p*. Así, en la conductividad σ , una de las densidades, ρ_e o ρ_h , excederá a la otra.

6.6 CORRIENTE I

La corriente total I (en A) que atraviesa una superficie S está dada por

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

(ver figura 6-5). Debe escogerse un vector normal para el diferencial de superficie $d\mathbf{S}$. Así pues, un resultado positivo en I indica que la corriente a través de S en la misma dirección del vector normal. Por supuesto, \mathbf{J} no tiene necesariamente que ser uniforme en S , ni tampoco S tiene que ser una superficie plana.

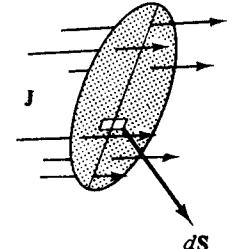


Fig. 6-5

EJEMPLO 1: Halle la corriente presente en el alambre circular que se muestra en la figura 6-6 si la densidad de corriente es $\mathbf{J} = 15(1 - e^{-1000r})\mathbf{a}_z$ (A/m²). El radio del alambre es 2 mm.

Se escoge una sección transversal para S . Entonces

$$dI = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \\ = 15(1 - e^{-1000r})\mathbf{a}_z \cdot r dr d\phi \mathbf{a}_z$$

$$y \\ I = \int_0^{2\pi} \int_0^{0.002} 15(1 - e^{-1000r})r dr d\phi \\ = 1.33 \times 10^{-4} \text{ A} = 0.133 \text{ mA}$$

Cualquier superficie S que tenga un perímetro que se ajuste a la superficie externa del conductor en todo su alrededor tendrá la misma corriente total, $I = 0.133 \text{ mA}$, cruzándola.

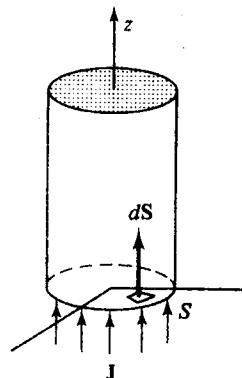


Fig. 6-6

6.7 RESISTENCIA R

Si un conductor de sección transversal uniforme A y longitud ℓ , como el que se muestra en la figura 6-7, tiene una diferencia de voltaje V entre sus extremos, entonces

$$E = \frac{V}{\ell} \quad \text{y} \quad J = \frac{\sigma V}{\ell}$$

suponiendo que la corriente está uniformemente distribuida sobre el área A . La corriente total es, entonces,

$$I = JA = \frac{\sigma AV}{\ell}$$

Como la ley de Ohm establece que $V = IR$, la resistencia es

$$R = \frac{\ell}{\sigma A} \quad (\Omega)$$

(Observe que $1 \text{ S}^{-1} = 1 \Omega$; el siemens era anteriormente conocido como el *mho*.) Esta expresión para la resistencia se aplica generalmente a todos los conductores en los que la sección transversal permanece constante sobre toda la longitud ℓ . Sin embargo, si la densidad de corriente es mayor a lo largo del área superficial del conductor que en el centro, entonces la expresión no es válida. Para tal distribución de corriente no uniforme la resistencia está dada por

$$R = \frac{V}{\int J \cdot dS} = \frac{V}{\int \sigma E \cdot dS}$$

Si se conoce E en lugar de la diferencia de voltaje entre las dos caras, la resistencia está dada por

$$R = \frac{\int E \cdot dl}{\int \sigma E \cdot dS}$$

El numerador da la caída de voltaje a través de la muestra, mientras el denominador da la corriente total I .

EJEMPLO 2: Encuentre la resistencia presente entre las superficies curvas interna y externa del bloque que aparece en la figura 6-8. El material es plata para, la cual $\sigma = 6.17 \times 10^7 \text{ S/m}$.

Si la misma corriente I cruza la superficie interna y la externa, entonces,

$$J = \frac{k}{r} \mathbf{a}_r \quad \text{y} \quad \mathbf{E} = \frac{k}{\sigma r} \mathbf{a}_r$$

Entonces ($5^\circ = 0.0873 \text{ rad}$),

$$\begin{aligned} R &= \frac{\int_{0.05}^{3.0} \frac{k}{\sigma r} \mathbf{a}_r \cdot dr \mathbf{a}_r}{\int_0^{0.2} \int_0^{0.0873} \frac{k}{r} \mathbf{a}_r \cdot r d\phi dz \mathbf{a}_r} \\ &= \frac{\ln 15}{\sigma(0.05)(0.0873)} = 1.01 \times 10^{-5} \Omega = 10.1 \mu\Omega \end{aligned}$$

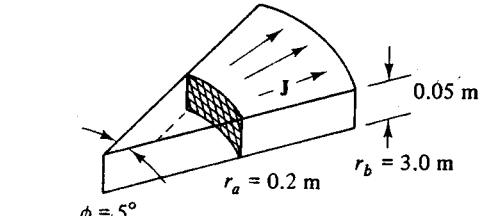


Fig. 6-8

6.8 DENSIDAD DE LA CORRIENTE LAMINAR, K

Algunas veces la corriente está confinada a una superficie de un conductor, tal como las paredes internas de una guía de onda. Para tal *corriente laminar* es útil definir el vector densidad \mathbf{K} (en A/m), que da la tasa de transporte de carga por unidad de longitud. (Algunos libros usan la notación J_s .) La figura 6-9 muestra una corriente total I , en forma de hoja cilíndrica, de radio r , que fluye en dirección z positiva. En este caso,

$$\mathbf{K} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{a}_z$$

en cada punto de la hoja. Para otras hojas, \mathbf{K} puede variar de un punto a otro (ver problema 6.19). En general, la corriente que fluye a través de una curva C dentro de una corriente laminar se obtiene integrando la

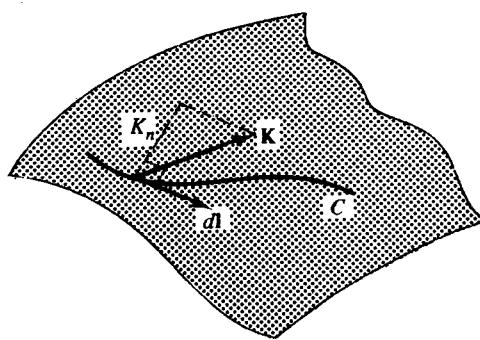
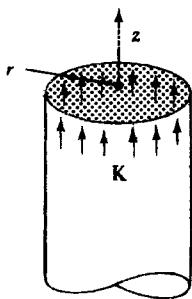


Fig. 6-9

Fig. 6-10

componente *normal* de K a lo largo de la curva (ver figura 6-10). Así pues

$$I = \int_C K_n d\ell$$

6.9 CONTINUIDAD DE LA CORRIENTE

La corriente I que cruza una superficie general S ha sido examinada para los casos en que \mathbf{J} en la superficie era conocida. Ahora, si la superficie es *cerrada*, para que salga una corriente neta debe haber una disminución de carga positiva adentro:

$$\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dv$$

donde la unidad normal en $d\mathbf{S}$ es la dirección normal hacia afuera. Dividiendo por Δv ,

$$\frac{\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\int \rho dv}{\Delta v}$$

Cuando $\Delta v \rightarrow 0$, el lado izquierdo por definición tiende a $\nabla \cdot \mathbf{J}$, divergencia de la densidad de corriente, mientras el lado derecho se aproxima a $-\partial \rho / \partial t$. Así pues

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Esta es la ecuación de *continuidad de corriente*. En ella ρ representa la densidad *neta de carga* y no sólo la densidad de carga móvil. Como se verá luego, $\partial \rho / \partial t$ puede ser diferente de cero sólo transitoriamente dentro de un conductor. Entonces la ecuación de continuidad, $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, viene a ser el campo equivalente de la ley de la corriente de Kirchoff, que establece que la corriente neta que abandona una unión de varios conductores es cero.

En el proceso de conducción, los electrones de valencia están libres para moverse bajo la aplicación de un campo eléctrico. Así que, mientras estos electrones estén en movimiento, no existirán condiciones estáticas. Sin embargo, estos electrones no deben confundirse con la *carga neta*, porque cada electrón de conducción está balanceado por un protón en el núcleo de tal manera que la carga neta es cero en cada Δv del material. Supóngase, sin embargo, que en un desbalanceo temporal, una región situada dentro de un conductor sólido presenta una densidad *neta de carga* ρ_0 en el tiempo $t = 0$. Entonces, como $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = (\sigma/\epsilon) \mathbf{D}$,

$$\nabla \cdot \frac{\sigma}{\epsilon} \mathbf{D} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

La operación de divergencia consiste en las derivadas parciales respecto de las coordenadas espaciales. Si σ y ϵ son constantes, como deben ser en una muestra homogénea, entonces deben ser removidas de las derivadas parciales.

$$\frac{\sigma}{\epsilon} (\nabla \cdot \mathbf{D}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \rho = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

o

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0$$

La solución a esta ecuación es

$$\rho = \rho_0 e^{-(\sigma/\epsilon)t}$$

Se ve que ρ , y con ella

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho$$

decae exponencialmente con una constante de tiempo ϵ/σ , también conocida como *tiempo de relajación* para el material particular. Para la plata, con $\sigma = 6.17 \times 10^7 \text{ S/m}$ y $\epsilon \approx \epsilon_0$, el tiempo de relajación es $1.44 \times 10^{-19} \text{ s}$. De esta manera, si una densidad de carga ρ_0 pudiera de alguna manera lograrse en el interior de un bloque de plata, las cargas se separarían debido a las fuerzas de Coulomb, y después de $1.44 \times 10^{-19} \text{ s}$ la densidad restante sería el 36.8% de ρ_0 . Después de cinco constantes de tiempo, o $7.20 \times 10^{-19} \text{ s}$, sólo 0.67% de ρ_0 permanecería. Así pues, puede deducirse, para campos estáticos, que *la carga neta dentro de un conductor es cero*. Si no hay carga neta presente, debe estar en la superficie externa.

6.10 CONDICIONES LIMITES EN CONDUCTOR-DIELECTRICO

Bajo condiciones estáticas toda la carga neta estará en las superficies externas de un conductor y ambos \mathbf{E} y \mathbf{D} serán por lo tanto cero dentro del conductor. Como el campo eléctrico es un campo conservativo, la integral lineal cerrada de $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ es cero para cualquier trayectoria. Una trayectoria rectangular con esquinas 1, 2, 3, 4 se muestra en la figura 6-11.

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_2^3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_3^4 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_4^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Si la trayectoria de las longitudes 2 a 3 y 4 a 1 se hacen tender a cero, conservando la interfase entre ellas, entonces la segunda y la cuarta integral son cero. La trayectoria 3 a 4 está dentro del conductor donde \mathbf{E} debe ser cero. Esto deja

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 E_t d\ell = 0$$

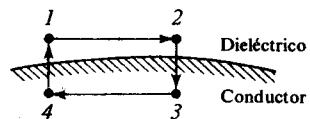


Fig. 6-11

donde E_t es la componente tangencial de \mathbf{E} en la superficie del dieléctrico. Como el intervalo de 1 a 2 puede escogerse arbitrariamente,

$$E_t = D_t = 0$$

en cada punto de la superficie.

Para encontrar las condiciones sobre las componentes normales, un cilindro circular recto, pequeño y cerrado se coloca a través de la interfase como se muestra en la figura 6-12. La ley de Gauss aplicada a esta superficie da

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}}$$

$$\int_{\text{arriba}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{abajo}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{lado}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_A \rho_s dS$$

La tercera integral es cero ya que, como se acaba de determinar, $D_n = 0$ en cualquier lado de la entrecara. La segunda integral también es cero, ya que la parte de abajo del cilindro está dentro del conductor, donde \mathbf{D} y \mathbf{E} son cero. Entonces,

$$\int_{\text{arriba}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{arriba}} D_n dS = \int_A \rho_s dS$$

lo que sólo se cumple si

$$D_n = \rho_s \quad \text{y} \quad E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon}$$

Para abreviar, bajo condiciones estáticas, el campo situado justo afuera de un conductor es cero (componentes tangencial y normal) a menos que exista una distribución superficial de carga. Sin embargo, una carga superficial no implica una carga *neta* en el conductor. Para ilustrar esto, considere una carga positiva en el origen de coordenadas esféricas. Si esta carga puntual está encerrada por una concha esférica conductora *descargada* de espesor infinito, como aparece en la figura 6-13(a), entonces el campo aún está dado por

$$\mathbf{E} = \frac{+Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{a}_r$$

excepto dentro del conductor mismo, donde \mathbf{E} debe ser cero. Las fuerzas de Coulomb causadas por $+Q$ atraen los electrones de conducción hacia la superficie interna, donde crean una ρ_{s1} de signo negativo. Entonces la deficiencia de electrones en la superficie externa constituye una densidad superficial de carga ρ_{s2} positiva. Las líneas de flujo eléctrico Ψ , que abandonan la carga puntual $+Q$, terminan en los electrones de la superficie interna del conductor, como se muestra en la figura 6-13(b). Entonces, unas líneas de flujo eléctrico Ψ se generan una vez más en las cargas positivas de la superficie externa del conductor. Debe anotarse que el flujo no pasa a través del conductor y la carga *neta* en dicho conductor permanece cero.

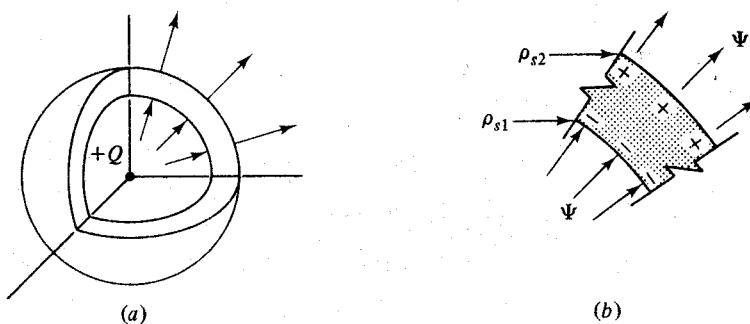


Fig. 6-13

Problemas resueltos

- 6.1. Un conductor de cobre AWG #12 tiene un diámetro de 80,8 mil. Una longitud de 50 pies conduce una corriente de 20 A. Halle la intensidad del campo eléctrico E , la velocidad de corrimiento U , la caída de voltaje y la resistencia para la sección de 50 pies.

Como un mil es 1/1000 de pulgada, el área de la sección transversal es

$$A = \pi \left[\left(\frac{0.0808 \text{ pul}}{2} \right) \left(\frac{2.54 \times 10^{-2} \text{ m}}{1 \text{ pul}} \right) \right]^2 = 3.31 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

Entonces

$$J = \frac{I}{A} = \frac{20}{3.31 \times 10^{-6}} = 6.04 \times 10^6 \text{ A/m}^2$$

Para el cobre, $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$. Entonces

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{6.04 \times 10^6}{5.8 \times 10^7} = 1.04 \times 10^{-1} \text{ V/m}$$

$$V = E\ell = (1.04 \times 10^{-1})(50)(12)(0.0254) = 1.59 \text{ V}$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1.59}{20} = 7.95 \times 10^{-2} \Omega$$

La movilidad de los electrones en el cobre es $\mu = 0.0032 \text{ m}^2/\text{V}\cdot\text{s}$, y como $\sigma = \rho\mu$, la densidad de carga es

$$\rho = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{5.8 \times 10^7}{0.0032} = 1.81 \times 10^{10} \text{ C/m}^3$$

A partir de $J = \rho U$ se encuentra la velocidad de corrimiento

$$U = \frac{J}{\rho} = \frac{6.05 \times 10^6}{1.81 \times 10^{10}} = 3.34 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

Con esta velocidad de corrimiento un electrón tarda aproximadamente 30 segundos para recorrer una distancia de un centímetro en el conductor de cobre #12.

6.2. ¿Qué densidad de corriente e intensidad del campo eléctrico corresponden a una velocidad de corrimiento de $5.3 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ en el aluminio?

Para el aluminio, la conductividad es $\sigma = 3.82 \times 10^7 \text{ S/m}$ y la movilidad $\mu = 0.0014 \text{ m}^2/\text{V}\cdot\text{s}$

$$J = \rho U = \frac{\sigma}{\mu} U = \frac{3.82 \times 10^7}{0.0014} (5.3 \times 10^{-4}) = 1.45 \times 10^7 \text{ A/m}^2$$

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{U}{\mu} = 3.79 \times 10^{-1} \text{ V/m}$$

6.3. Un conductor largo de cobre tiene una sección transversal circular de diámetro 3.0 mm y conduce una corriente de 10 A. ¿Qué porcentaje de electrones de conducción deben dejar cada segundo (para ser reemplazados por otros) una sección de 100 mm de longitud?

El número de Avogadro es $N = 6.02 \times 10^{26} \text{ átomos/kmol}$. La gravedad específica del cobre es 8.96 y el peso atómico es 63.54. Suponiendo un electrón de conducción por átomo, el número de electrones por unidad de volumen es

$$N_e = \left(6.02 \times 10^{26} \frac{\text{átomos}}{\text{kmol}} \right) \left(\frac{1 \text{ kmol}}{63.54 \text{ kg}} \right) \left(8.96 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \left(\frac{1 \text{ electrón}}{\text{átomo}} \right)$$

$$= 8.49 \times 10^{28} \text{ electrones/m}^3$$

El número de electrones en 100 mm de longitud es

$$N = \pi \left(\frac{3 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 (0.100)(8.49 \times 10^{28}) = 6.00 \times 10^{22}$$

Una corriente de 10 A requiere que

$$\left(10 \frac{\text{C}}{\text{s}} \right) \left(\frac{1}{1.6 \times 10^{-19}} \frac{\text{electrón}}{\text{C}} \right) = 6.25 \times 10^{19} \text{ electrones/s}$$

pasen un punto fijo. Entonces el porcentaje por segundo que deja los 100 mm de longitud es

$$\frac{6.25 \times 10^{19}}{6.00 \times 10^{22}} (100) = 0.104 \% \text{ por s}$$

- 6.4.** ¿Qué corriente se produce si todos los electrones de conducción presentes en un centímetro cúbico de aluminio pasaran un punto determinado en 2.0 s? Supóngase un electrón de conducción por átomo.

La densidad del aluminio es $2.70 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ y el peso atómico es 26.98 kg/kmol . Entonces

$$N_e = (6.02 \times 10^{26}) \left(\frac{1}{26.98} \right) (2.70 \times 10^3) = 6.02 \times 10^{28} \text{ electrones/m}^3$$

y

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{(6.02 \times 10^{28} \text{ electrones/m}^3)(10^{-2} \text{ m})^3 (1.6 \times 10^{-19} \text{ C/electrón})}{2 \text{ s}} = 4.82 \text{ kA}$$

- 6.5.** ¿Cuál es la densidad de electrones libres en un metal para una movilidad de $0.0046 \text{ m}^2/\text{V}\cdot\text{s}$ y una conductividad de 29.1 MS/m ?

Como $\sigma = \mu\rho$,

$$\rho = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{29.1 \times 10^6}{0.0046} = 6.33 \times 10^9 \text{ C/m}^3$$

y

$$N_e = \frac{6.33 \times 10^9}{1.6 \times 10^{-19}} = 3.96 \times 10^{28} \text{ electrones/m}^3$$

- 6.6.** Determine la conductividad de germanio intrínseco a temperatura ambiente.

A 300° K hay 2.5×10^{19} pares electrón-hueco por metro cúbico. La movilidad de los electrones es $\mu_e = 0.38 \text{ m}^2/\text{V}\cdot\text{s}$ y la movilidad de los huecos es $\mu_h = 0.18 \text{ m}^2/\text{V}\cdot\text{s}$. Como el material no está contaminado, el número de electrones y huecos es igual.

$$\sigma = N_e e(\mu_e + \mu_h) = (2.5 \times 10^{19})(1.6 \times 10^{-19})(0.38 + 0.18) = 2.24 \text{ S/m}$$

- 6.7.** Halle la conductividad del germanio tipo n a temperatura ambiente suponiendo un átomo en cada 10^8 átomos. La densidad del germanio es $5.32 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ y el peso atómico es 72.6 kg/kmol .

Existen

$$N = (6.02 \times 10^{26}) \left(\frac{1}{72.6} \right) (5.32 \times 10^3) = 4.41 \times 10^{28} \text{ átomos/m}^3$$

y esto nos da

$$N_e = 10^{-8}(4.41 \times 10^{28}) = 4.41 \times 10^{20} \text{ electrones/m}^3$$

La concentración intrínseca n_i para el germanio a 300° K es 2.5×10^{19} por m^3 . La ley de acción de masa, $N_e N_h = n_i^2$, da entonces la densidad de huecos así

$$N_h = \frac{(2.5 \times 10^{19})^2}{4.41 \times 10^{20}} = 1.42 \times 10^{18} \text{ huecos/m}^3$$

Entonces, utilizando las movilidades del problema 6.6,

$$\begin{aligned} \sigma &= N_e e \mu_e + N_h e \mu_h \\ &= (4.41 \times 10^{20})(1.6 \times 10^{-19})(0.38) + (1.42 \times 10^{18})(1.6 \times 10^{-19})(0.18) \\ &= 26.8 + 0.041 = 26.8 \text{ S/m} \end{aligned}$$

En el germanio tipo n el número de electrones en un metro cúbico es 4.41×10^{20} , al lado de 1.42×10^{18} huecos. La conductividad es entonces controlada por los electrones suministrados por el agente contaminante de valencia cinco.

- 6.8.** Un conductor de sección transversal uniforme y 150 m de largo tiene una caída de voltaje de 1.3 V y una densidad de corriente de $4.65 \times 10^5 \text{ A/m}^2$. ¿Cuál es la conductividad del material en el conductor?

Como $E = V/\ell$ y $J = \sigma E$,

$$4.65 \times 10^5 = \sigma \left(\frac{1.3}{150} \right) \quad \text{6} \quad \sigma = 5.37 \times 10^7 \text{ S/m}$$

- 6.9.** Una tabla de resistividades da 10.4 ohms mil circular por pie de cobre templado. ¿Cuál es la conductividad correspondiente en siemens por metro?

Un *mil circular* es el área de un círculo con un diámetro de 1 mil (10^{-3} pul).

$$1 \text{ mil cir} = \pi \left[\left(\frac{10^{-3} \text{ pul}}{2} \right) \left(0.0254 \frac{\text{m}}{\text{pul}} \right) \right]^2 = 5.07 \times 10^{-10} \text{ m}^2$$

La conductividad es el recíproco de la resistividad.

$$\sigma = \left(\frac{1}{10.4 \Omega \cdot \text{mil cir}} \right) \left(12 \frac{\text{pie}}{\text{pul}} \right) \left(0.0254 \frac{\text{m}}{\text{pul}} \right) \left(\frac{1 \text{ mil cir}}{5.07 \times 10^{-10} \text{ m}^2} \right) = 5.78 \times 10^7 \text{ S/m}$$

- 6.10.** Un alambre de aluminio AWG #20 tiene una resistencia de 16.7 ohms por 1000 pies. ¿Qué conductividad implica esto?

De las tablas de alambres, el #20 tiene un diámetro de 32 mils.

$$A = \pi \left[\frac{32 \times 10^{-3}}{2} (0.0254) \right]^2 = 5.19 \times 10^{-7} \text{ m}^2$$

$$\ell = (1000 \text{ pie})(12 \text{ pul/pie})(0.0254 \text{ m/pul}) = 3.05 \times 10^2 \text{ m}$$

Entonces para $R = \ell/\sigma A$,

$$\sigma = \frac{3.05 \times 10^2}{(16.7)(5.19 \times 10^{-7})} = 35.2 \text{ MS/m}$$

- 6.11.** En un conductor cilíndrico de radio 2 mm, la densidad de corriente varía con la distancia desde el eje de acuerdo a

$$J = 10^3 e^{-400r} \text{ (A/m}^2\text{)}$$

Halle la corriente total I .

$$\begin{aligned} I &= \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int J dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{0.002} 10^3 e^{-400r} r dr d\phi \\ &= 2\pi(10^3) \left[\frac{e^{-400r}}{(-400)^2} (-400r - 1) \right]_0^{0.002} = 7.51 \text{ mA} \end{aligned}$$

- 6.12.** Halle la corriente que cruza la porción del plano $y = 0$ definido por $-0.1 \leq x \leq 0.1 \text{ m}$ y $-0.002 \leq z \leq 0.002 \text{ m}$, si

$$\mathbf{J} = 10^2 |x| \mathbf{a}_y \text{ (A/m}^2\text{)}$$

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{-0.002}^{0.002} \int_{-0.1}^{0.1} 10^2 |x| \mathbf{a}_y \cdot dx dz \mathbf{a}_y = 4 \text{ mA}$$

- 6.13. Halle la corriente que cruza la porción del plano $x = 0$ definido por $-\pi/4 \leq y \leq \pi/4$ m y $-0.01 \leq z \leq 0.01$ m, si

$$\mathbf{J} = 100 \cos 2y \mathbf{a}_x \quad (\text{A/m}^2)$$

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{-0.01}^{0.01} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 100 \cos 2y \mathbf{a}_x \cdot dy dz \mathbf{a}_x = 2.0 \text{ A}$$

- 6.14. Dado $\mathbf{J} = 10^3 \sin \theta \mathbf{a}_r \text{ A/m}^2$ en coordenadas esféricas. Halle la corriente que cruza la concha esférica $r = 0.02$ m.

Como \mathbf{J} y

$$d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{a}_r$$

son radiales,

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 10^3 (0.02)^2 \sin^2 \theta d\theta d\phi = 3.95 \text{ A}$$

- 6.15. Demuestre que la resistencia de cualquier conductor de sección transversal con área A y longitud ℓ está dada por $R = \ell/\sigma A$, suponiendo una distribución uniforme de corriente.

Una sección transversal constante a lo largo de ℓ produce un E constante, y la caída de voltaje es

$$V = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E\ell$$

Si la corriente está uniformemente distribuida en el área A ,

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = JA = \sigma EA$$

donde σ es la conductividad. Entonces, como $R = V/I$,

$$R = \frac{\ell}{\sigma A}$$

- 6.16. Determine la resistencia de aislamiento en una longitud ℓ de cable coaxial, como se muestra en la figura 6-14.

Suponga una corriente total I desde el conductor interno al externo. Entonces, a una distancia radial r ,

$$J = \frac{I}{A} = \frac{I}{2\pi r\ell}$$

y así

$$E = \frac{I}{2\pi\sigma r\ell}$$

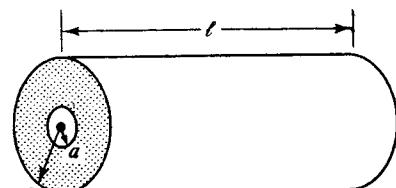


Fig. 6-14

La diferencia de voltaje entre los conductores es entonces

$$V_{ab} = - \int_b^a \frac{I}{2\pi\sigma r\ell} dr = \frac{I}{2\pi\sigma\ell} \ln \frac{b}{a}$$

y la resistencia

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma\ell} \ln \frac{b}{a}$$

- 6.17.** Una hoja de corriente de 4 m de anchura yace en el plano $z=0$ y contiene una corriente total de 10 A que se dirige desde el origen hasta (1, 3, 0) m. Encuentre una expresión para \mathbf{K} .

En cada punto de la hoja, la dirección de \mathbf{K} es el vector unidad

$$\frac{\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y}{\sqrt{10}}$$

y la magnitud de \mathbf{K} es (10/4) A/m. De esta manera,

$$\mathbf{K} = \frac{10}{4} \left(\frac{\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y}{\sqrt{10}} \right) \text{ A/m}$$

- 6.18.** Tal como se muestra en la figura 6-15, una corriente I_T sigue un filamento que baja por el eje z y entra en una hoja conductora delgada en $z = 0$. Exprese \mathbf{K} para esta hoja.

Considérese un círculo en el plano $z = 0$. La corriente I_T sobre la hoja se abre uniformemente sobre la circunferencia $2\pi r$. La dirección de \mathbf{K} es \mathbf{a}_r . Entonces

$$\mathbf{K} = \frac{I_T}{2\pi r} \mathbf{a}_r$$

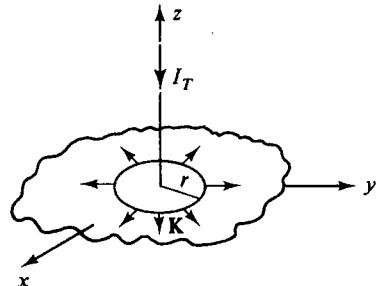


Fig. 6-15

- 6.19.** Para la hoja de corriente del problema 6.18 encuentre la corriente en una sección del plano de 30° (figura 6-16).

$$I = \int K_n d\ell = \int_0^{\pi/6} \frac{I_T}{2\pi r} r d\phi = \frac{I_T}{12}$$

Sin embargo, la integración no es necesaria, puesto que para una corriente uniformemente distribuida, un segmento de 30° contendrá 30°/360° o 1/12 del total.

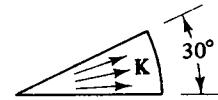


Fig. 6-16

- 6.20.** Una corriente I (A) entra a un cilindro circular recto delgado por la parte superior como se muestra en la figura 6-17. Exprese \mathbf{K} si el radio del cilindro es 2 cm.

En la parte superior, la corriente está uniformemente distribuida sobre cualquier circunferencia $2\pi r$, de tal manera que

$$\mathbf{K} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{a}_r \quad (\text{A/m})$$

Hacia abajo, la corriente está uniformemente distribuida sobre la circunferencia $2\pi(0.02)$ m, de tal manera que

$$\mathbf{K} = \frac{I}{0.04\pi} (-\mathbf{a}_z) \quad (\text{A/m})$$

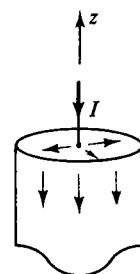


Fig. 6-17

- 6.21.** En un punto situado sobre la superficie de un conductor, $\mathbf{E} = 0.70\mathbf{a}_x - 0.35\mathbf{a}_y - 1.00\mathbf{a}_z$ V/m. ¿Cuál es la densidad superficial de carga en ese punto?

En la superficie de un conductor bajo condiciones estáticas la componente tangencial E_t es cero. En consecuencia, el vector dado debe ser normal al conductor. Suponiendo espacio libre en la superficie,

$$\rho_s = D_n = \epsilon_0 E_n = \pm \epsilon_0 |\mathbf{E}| = \pm \frac{10^{-9}}{36\pi} \sqrt{(0.70)^2 + (0.35)^2 + (1.00)^2} = \pm 11.2 \text{ pC/m}^2$$

El signo + (más) debería ser escogido si se supiera que \mathbf{E} apunta fuera de la superficie.

- 6.22.** Un conductor cilíndrico de radio 0.05 m con su eje a lo largo del eje z tiene una densidad superficial de carga $\rho_s = (\rho_0/z)$ (C/m^2). Escriba una expresión para \mathbf{E} en la superficie.

Ya que $D_n = \rho_s$, $E_n = \rho_s/\epsilon_0$. En (0.05, ϕ , z),

$$\mathbf{E} = E_n \mathbf{a}_r = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 z} \mathbf{a}_r$$

- 6.23.** Un conductor que ocupa la región $x \geq 5$ tiene una densidad superficial de carga

$$\rho_s = \frac{\rho_0}{\sqrt{y^2 + z^2}}$$

Escriba expresiones para \mathbf{E} y \mathbf{D} justo afuera del conductor.

La normal externa es $-\mathbf{a}_x$. Entonces, justo afuera del conductor,

$$\mathbf{D} = D_n(-\mathbf{a}_x) = \rho_s(-\mathbf{a}_x) = \frac{\rho_0}{\sqrt{y^2 + z^2}} (-\mathbf{a}_x)$$

y

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 \sqrt{y^2 + z^2}} (-\mathbf{a}_x)$$

- 6.24.** Dos conductores cilíndricos concéntricos, $r_a = 0.01$ m y $r_b = 0.08$ m, tienen densidades de carga $\rho_{sa} = 40 \text{ pC/m}^2$ y ρ_{sb} , tales que \mathbf{D} y \mathbf{E} existen entre los dos cilindros, pero son cero en cualquier otra parte. Ver figura 6-18. Halle ρ_{sb} , y escriba las expresiones para \mathbf{D} y \mathbf{E} entre los cilindros.

Por simetría, el campo entre los cilindros debe ser radial y solamente función de r . Entonces, para $r_a < r < r_b$,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r D_r) = 0 \quad \delta \quad r D_r = c$$

Para evaluar la constante c , utilice el hecho de que $D_n = D_r = \rho_{sa}$ en $r = r_a + 0$.

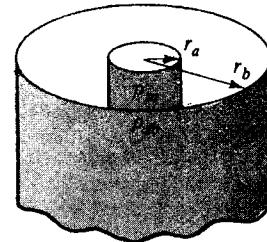


Fig. 6-18

y así

$$\mathbf{D} = \frac{4 \times 10^{-13}}{r} \mathbf{a}_r \quad (\text{C/m}^2) \quad \text{y} \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \frac{4.52 \times 10^{-2}}{r} \mathbf{a}_r \quad (\text{V/m})$$

La densidad ρ_{sb} se encuentra ahora a partir de

$$\rho_{sb} = D_n \Big|_{r=r_b-0} = -D_r \Big|_{r=r_b-0} = -\frac{4 \times 10^{-13}}{0.08} = -5 \text{ pC/m}^2$$

Problemas supplementarios

- 6.25.** Halle la movilidad de los electrones de conducción en el aluminio, dada una conductividad 38.2 MS/m y una densidad de electrones de conducción de $1.70 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$. *Resp.* $1.40 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$
- 6.26.** Repita el problema 6.25 (a) para el cobre, donde $\sigma = 58.0 \text{ MS/m}$ y $N_e = 1.13 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$; (b) para la plata, donde $\sigma = 61.7 \text{ MS/m}$ y $N_e = 7.44 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$. *Resp.* (a) $3.21 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$; (b) $5.18 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$.

- 6.27.** Halle la concentración de huecos, N_h , en germanio tipo p , donde $\sigma = 10^4 \text{ S/m}$ y la movilidad de los huecos es $\mu_h = 0.18 \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$. *Resp.* $3.47 \times 10^{23} \text{ m}^{-3}$.
- 6.28.** Utilizando los datos del problema 6.27, halle la concentración de electrones N_e , si la concentración intrínseca es $n_i = 2.5 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$. *Resp.* $1.80 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$.
- 6.29.** Halle la concentración de electrones y huecos en silicio tipo n para el que $\sigma = 10.0 \text{ S/m}$, $\mu_e = 0.13 \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$ y $n_i = 1.5 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$. *Resp.* $4.81 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$, $4.68 \times 10^{11} \text{ m}^{-3}$.
- 6.30.** Determine el número de electrones de conducción en un metro cúbico de tungsteno, cuya densidad es $18.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ y cuyo peso atómico es 184.0. Suponga dos electrones de conducción por átomo. *Resp.* 1.23×10^{29} .
- 6.31.** Halle el número de electrones de conducción en un metro cúbico de cobre si $\sigma = 58 \text{ MS/m}$ y $\mu = 3.2 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$. En promedio, ¿cuántos electrones por átomo hay? El peso atómico es 63.54 y la densidad es $8.96 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. *Resp.* 1.13×10^{29} , 1.33.
- 6.32.** Una barra de cobre de sección transversal rectangular $0.02 \times 0.08 \text{ m}$ y longitud 2.0 m tiene una caída de voltaje de 50 mV. Encuentre la resistencia, corriente, densidad de corriente, intensidad de campo eléctrico y velocidad de corrimiento de los electrones de conducción. *Resp.* $21.6 \mu\Omega$, 2.32 kA , 1.45 MA/m^2 , 25 mV/m , 0.08 mm/s .
- 6.33.** Una barra de aluminio de $0.01 \times 0.07 \text{ m}$ de sección transversal y 3 m de longitud conduce una corriente de 300 A. Halle la intensidad del campo eléctrico, densidad de corriente y velocidad de corrimiento de los electrones de conducción. *Resp.* $1.12 \times 10^{-2} \text{ V/m}$, $4.28 \times 10^5 \text{ A/m}^2$, $1.57 \times 10^{-5} \text{ m/s}$.
- 6.34.** Una reja de alambres da una resistencia de $33.31 \Omega/\text{km}$ para el alambre de cobre AWG # 20 a 20°C . ¿Qué conductividad (en S/m) implica esto para el cobre? El diámetro de AWG # 20 es 32 mils. *Resp.* $5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$.
- 6.35.** Una reja de alambres da una resistencia de $1.21 \times 10^{-3} \Omega/\text{cm}$ para el alambre AWG # 18 de platino. ¿Qué conductividad (en S/m) implica esto para el platino? El diámetro del AWG # 18 es 40 mils. *Resp.* $1.00 \times 10^7 \text{ S/m}$.
- 6.36.** ¿Cuál es la conductividad del alambre de tungsteno AWG # 32 con una resistencia de $0.0172 \Omega/\text{cm}$? El diámetro del AWG # 32 es 8.0 mils. *Resp.* 17.9 MS/m .
- 6.37.** Determine la resistencia por metro de un conductor cilíndrico hueco de aluminio con un diámetro externo de 32 mm y paredes de 6 mm de espesor. *Resp.* $53.4 \mu\Omega/\text{m}$.
- 6.38.** Halle la resistencia de una lámina cuadrada de aluminio de 1.0 mil de espesor y 5.0 cm de lado (*a*) entre bordes opuestos en la misma cara (*b*) entre las dos caras del cuadrado. *Resp.* (*a*) $1.03 \text{ m}\Omega$; (*b*) $2.66 \text{ p}\Omega$
- 6.39.** Halle la resistencia de 100 pies de conductor AWG # 4/0 tanto en cobre como en aluminio. Un alambre AWG # 4/0 tiene un diámetro de 460 mils. *Resp.* $4.91 \text{ m}\Omega$, $7.46 \text{ m}\Omega$.
- 6.40.** Determine la resistencia de un conductor de cobre de 2 m de largo con una sección transversal circular y un radio de 1 mm en un extremo que crece linealmente hasta un radio de 5 mm en el otro extremo. *Resp.* $2.20 \text{ m}\Omega$.
- 6.41.** Determine la resistencia de un conductor de cobre de 1 m de largo con una sección transversal cuadrada de 1 mm de lado en un extremo y que aumenta linealmente hasta 3 mm en el otro extremo. *Resp.* $5.75 \text{ m}\Omega$.

- 6.42. Desarrolle una expresión para la resistencia de un conductor de longitud ℓ si la sección transversal retiene la misma forma y el área aumenta linealmente desde A hasta kA sobre ℓ . *Resp.* $\frac{\ell}{\sigma A} \left(\frac{\ln k}{k-1} \right)$

- 6.43. Halle la densidad de corriente de un conductor AWG # 12 cuando conduce corriente de 30 A. Un alambre # 12 tiene un diámetro de 81 mils. *Resp.* $9.09 \times 10^6 \text{ A/m}^2$

- 6.44. Halle la corriente total en un conductor circular de 2 mm de radio si la densidad de corriente varía con r de acuerdo a $J = 10^3/r$ (A/m^2). *Resp.* $4\pi A$.

- 6.45. En coordenadas cilíndricas, $J = 10e^{-100r} \mathbf{a}_\phi$ (A/m^2) para la región $0.01 \leq r \leq 0.02 \text{ m}$, $0 < z \leq 1 \text{ m}$. Halle la corriente total que cruza la intersección de esta región con el plano $\phi = \text{constante}$.
Resp. $2.33 \times 10^{-2} \text{ A}$

- 6.46. Dada la densidad de corriente

$$\mathbf{J} = \left(\frac{10^3}{r^2} \cos \theta \right) \mathbf{a}_\theta \quad (\text{A/m}^2)$$

en coordenadas esféricas. Halle la corriente que cruza la franja cónica $\theta = \pi/4$, $0.001 \leq r \leq 0.080 \text{ m}$.
Resp. $1.38 \times 10^4 \text{ A}$

- 6.47. Halle la corriente total saliente desde un cubo de un metro con una esquina en el origen y aristas paralelos a los ejes coordinados si $\mathbf{J} = 2x^2 \mathbf{a}_x + 2xy^3 \mathbf{a}_y + 2xy \mathbf{a}_z$ (A/m^2). *Resp.* 3.0 A

- 6.48. Como se muestra en la figura 6-19, una corriente de 50 A baja por el eje z , entra a una concha esférica delgada de radio 0.03 m, y en $\theta = \pi/2$ entra a una hoja plana. Escriba las expresiones para las densidades laminares de corriente \mathbf{K} en la concha esférica y en el plano.

$$\text{Resp. } \frac{265}{\sin \theta} \mathbf{a}_\theta \quad (\text{A/m}), \quad \frac{7.96}{r} \mathbf{a}_r \quad (\text{A/m})$$

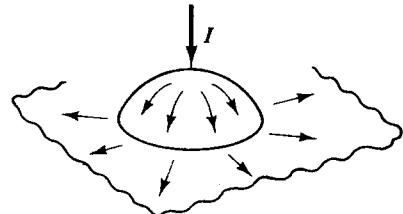


Fig. 6-19

- 6.49. Una corriente de filamento de I (A) baja por el eje z hasta $z = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$ donde entra a la porción $0 \leq \phi \leq \pi/4$ de una concha esférica de radio $5 \times 10^{-2} \text{ m}$. Halle \mathbf{K} para esta corriente laminar.

$$\text{Resp. } \frac{80I}{\pi \sin \theta} \mathbf{a}_\theta \quad (\text{A/m})$$

- 6.50. Una corriente laminar de densidad $\mathbf{K} = 20 \mathbf{a}_z$ A/m yace en el plano $x = 0$ y hay una densidad de corriente $\mathbf{J} = 10 \mathbf{a}_z$ A/m² en el espacio. (a) Halle la corriente que cruza el área encerrada por un círculo de radio 0.5 m centrado en el origen en el plano $z = 0$. (b) Halle la corriente que cruza el cuadrado $|x| \leq 0.25 \text{ m}$, $|y| \leq 0.25 \text{ m}$, $z = 0$.
Resp. (a) 27.9 A; (b) 12.5 A

- 6.51. Un conductor rectangular, hueco, de paredes delgadas, con dimensiones $0.01 \times 0.02 \text{ m}$ conduce una corriente de 10 A en la dirección x positiva. Exprese \mathbf{K} . *Resp.* $167 \mathbf{a}_x$ A/m

- 6.52. Un conductor sólido tiene una superficie descrita por $x + y = 3 \text{ m}$ y se extiende hasta el origen. En la superficie la intensidad del campo eléctrico es 0.35 V/m. Exprese \mathbf{E} y \mathbf{D} en la superficie y halle ρ_s .
Resp. $\pm 0.247 (\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y)$ V/m, $\pm 2.19 \times 10^{-12} (\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y)$ C/m², $\pm 3.10 \times 10^{-12} \text{ C/m}^2$.

- 6.53. Un conductor que se extiende dentro de la región $z < 0$ tiene una cara en el plano $z = 0$ en el que hay una densidad superficial de carga

$$\rho_s = 5 \times 10^{-10} e^{-10r} \sin^2 \phi \quad (\text{C/m}^2)$$

en coordenadas cilíndricas. Halle la intensidad del campo eléctrico en (0.15 m, $\pi/3, 0$).
Resp. $9.45 \mathbf{a}_x$ V/m.

- 6.54. Un conductor esférico centrado en el origen y de radio 3 mm tiene una densidad superficial de carga $\rho_s = \rho_0 \cos^2 \theta$. Halle \mathbf{E} en la superficie. Resp. $\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cos^2 \theta \mathbf{a}_r$
- 6.55. La intensidad del campo eléctrico sobre un punto de un conductor está dada por $\mathbf{E} = 0.2 \mathbf{a}_x - 0.3 \mathbf{a}_y - 0.2 \mathbf{a}_z$ V/m. ¿Cuál es la densidad superficial de carga en el punto? Resp. $\pm 3.65 \text{ pC/m}^2$
- 6.56. Un conductor esférico centrado en el origen tiene una intensidad de campo eléctrico en su superficie $\mathbf{E} = 0.53 (\sin^2 \phi) \mathbf{a}_r$ V/m, en coordenadas esféricas. ¿Cuál es la densidad de carga donde la esfera se encuentre con el eje y ? Resp. 4.69 pC/m^2 .

Capítulo 7

Capacitancia y materiales dieléctricos

7.1 POLARIZACION P Y PERMITIVIDAD RELATIVA ϵ_r

Los materiales dieléctricos se *polarizan* en un campo eléctrico, produciéndose una densidad de flujo eléctrico \mathbf{D} mayor de la que se tendría bajo condiciones de espacio libre, con la misma intensidad de campo. Una teoría simplificada, pero satisfactoria, de la polarización, puede obtenerse considerando un átomo del material dieléctrico como dos regiones de carga positiva y negativa superpuestas, como se muestra en la figura 7-1(a). Cuando se aplica un campo \mathbf{E} , la región de carga positiva se mueve en la dirección del campo aplicado, mientras que la región de carga negativa lo hace en la dirección opuesta. Este desplazamiento puede ser representado por un *momento eléctrico dipolar*, $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$, como se muestra en la figura 7-1(c).

En la mayoría de los materiales, las regiones de carga regresan a sus posiciones originales superpuestas cuando el campo aplicado es removido. Al igual que en un resorte, que cumple la ley de Hooke, el trabajo ejecutado durante la distorsión es recuperable cuando se permite al sistema regresar a su posición original. Durante esta distorsión se lleva a cabo un almacenamiento de energía en la misma forma que con el resorte.

Una región Δv de un dieléctrico polarizado contiene N momentos dipolares \mathbf{p} . La polarización \mathbf{P} se define como el momento dipolar por unidad de volumen:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{N\mathbf{p}}{\Delta v} \quad (\text{C/m}^2)$$

Esto hace suponer una distribución continua y uniforme de momentos eléctricos dipolares en todo el volumen, lo que, por supuesto, no se produce. Sin embargo, en una visión macroscópica, la polarización \mathbf{P} puede dar cuenta del aumento de la densidad del flujo eléctrico, según la ecuación

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

Esta ecuación permite a \mathbf{E} y \mathbf{P} tener direcciones diferentes, como sucede en ciertos dieléctricos cristalinos. En un material isotrópico y lineal, \mathbf{E} y \mathbf{P} son paralelos en cada punto, lo que se expresa por

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (\text{material isotrópico})$$

donde la *susceptibilidad eléctrica* χ_e es una constante adimensional. Entonces,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (\text{material isotrópico})$$

donde $\epsilon_r \equiv 1 + \chi_e$ es también un número puro. Dado que $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ (sección 3.4),

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

por lo que ϵ_r se denomina *permitividad relativa* (compárese con la sección 2.1).

7.2 D Y E DE VOLTAJE CONSTANTE

Un condensador de placas paralelas con espacio vacío entre las placas y voltaje V constante, como el que se muestra en la figura 7-2, tiene una intensidad de campo eléctrico \mathbf{E} constante. Despreciando el efecto de bordes,

$$\mathbf{E} = \frac{V}{d} \mathbf{a}_n \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{\epsilon_0 V}{d} \mathbf{a}_n \quad D_n = \rho_s = \frac{Q}{A}$$

Ahora, cuando un dieléctrico con permitividad ϵ_r llena el espacio entre las dos placas, entonces

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi_{\epsilon} \mathbf{E}$$

y las ecuaciones son:

$$\mathbf{E} = \frac{V}{d} \mathbf{a}_n \quad (\text{como en el espacio libre})$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

Como $D_n = \rho_s = Q/A$, la carga y la densidad de carga aumentan por el factor ϵ_r , respecto de sus valores en el espacio vacío. Este aumento de carga es suministrado por la fuente de voltaje V .

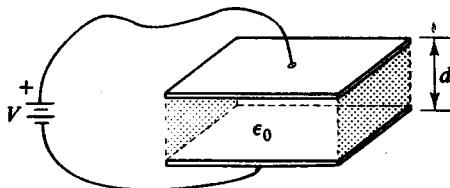


Fig. 7-2

7.3 D Y E DE CARGA CONSTANTE

El condensador de placas paralelas de la figura 7-3 tiene una carga $+Q$ en la placa superior y $-Q$ en la placa inferior. Esta carga puede haber resultado de la conexión de una fuente de voltaje V que fue posteriormente removida. Con espacio vacío entre las placas y despreciando efecto de bordes, se tiene:

$$D_n = \rho_s = \frac{Q}{A}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \mathbf{a}_n$$

En este arreglo no hay forma de que la carga aumente o disminuya, puesto que no hay una trayectoria conductora hacia las placas. Ahora, cuando se supone que un material dieléctrico llena el espacio entre las placas, las ecuaciones son:

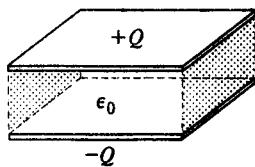


Fig. 7-3

$$D_n = \rho_s = \frac{Q}{A} \quad (\text{como en el espacio vacío})$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

Siendo Q y ρ_s constantes, \mathbf{D} debe ser igual que bajo condiciones de espacio vacío, mientras que la magnitud de \mathbf{E} disminuye por el factor $1/\epsilon_r$. La disminución en $\epsilon_0 \mathbf{E}$ es compensada por la polarización \mathbf{P} en la relación $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$. Mas generalmente, en un medio homogéneo de permitividad relativa ϵ_r , la fuerza de Coulomb entre cargas se reduce a $1/\epsilon_r$, respecto de su valor en el espacio vacío:

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \mathbf{a} \right)$$

7.4 CONDICIONES LIMITES EN LA ENTRECARA DE DOS CAPACITANCIAS DIELECTRICAS

Si el conductor de las figuras 6-11 y 6-12 se reemplaza por un segundo dieléctrico diferente entonces el mismo argumento que se desarrolló en la sección 6.10 establece las siguientes dos condiciones límites:

- (1) *La componente tangencial de E es continua a través de una entrecara de dieléctricos. En símbolos,*

$$E_{t1} = E_{t2} \quad \text{y} \quad \frac{D_{t1}}{\epsilon_{r1}} = \frac{D_{t2}}{\epsilon_{r2}}$$

- (2) *La componente normal de D tiene una discontinuidad de magnitud $|\rho_s|$ a través de una entrecara de dieléctricos. Si se escoge el vector unidad normal apuntando hacia el dieléctrico 2, entonces esta condición puede ser escrita de la siguiente manera:*

$$D_{n1} - D_{n2} = -\rho_s \quad \text{y} \quad \epsilon_{r1} E_{n1} - \epsilon_{r2} E_{n2} = -\frac{\rho_s}{\epsilon_0}$$

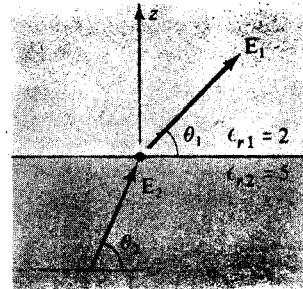
Generalmente, la entrecara no posee cargas libres ($\rho_s = 0$), por lo que:

$$D_{n1} = D_{n2} \quad \text{y} \quad \epsilon_{r1} E_{n1} = \epsilon_{r2} E_{n2}$$

EJEMPLO 1: Dado $\mathbf{E}_1 = 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z$ V/m en la entrecara de los dieléctricos libre de carga de la figura 7-4. Halle \mathbf{D}_2 y los ángulos θ_1 y θ_2 .

La entrecara es un plano $z = \text{constante}$. Las componentes x y y son tangenciales y las componentes z son normales. Por continuidad de la componente tangencial de \mathbf{E} y la componente normal de \mathbf{D} :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z \\ \mathbf{E}_2 &= 2\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_y + E_{z2}\mathbf{a}_z \\ \mathbf{D}_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1} \mathbf{E}_1 &= 4\epsilon_0 \mathbf{a}_x - 6\epsilon_0 \mathbf{a}_y + 10\epsilon_0 \mathbf{a}_z \\ \mathbf{D}_2 &= D_{x2}\mathbf{a}_x + D_{y2}\mathbf{a}_y + 10\epsilon_0 \mathbf{a}_z \end{aligned}$$



Las componentes desconocidas se hallan a partir de la relación $\mathbf{D}_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r2} \mathbf{E}_2$.

Fig. 7-4

$$D_{x2}\mathbf{a}_x + D_{y2}\mathbf{a}_y + 10\epsilon_0 \mathbf{a}_z = 2\epsilon_0 \epsilon_{r2} \mathbf{a}_x - 3\epsilon_0 \epsilon_{r2} \mathbf{a}_y + \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_{z2} \mathbf{a}_z$$

de lo que se deduce

$$D_{x2} = 2\epsilon_0 \epsilon_{r2} = 10\epsilon_0 \quad D_{y2} = -3\epsilon_0 \epsilon_{r2} = -15\epsilon_0 \quad E_{z2} = \frac{10}{\epsilon_{r2}} = 2$$

Los ángulos que se forman con el plano de la entrecara se hallan fácilmente a partir de

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{a}_z &= |\mathbf{E}_1| \cos(90^\circ - \theta_1) & \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{a}_z &= |\mathbf{E}_2| \cos(90^\circ - \theta_2) \\ 5 &= \sqrt{38} \sin \theta_1 & 2 &= \sqrt{17} \sin \theta_2 \\ \theta_1 &= 54.2^\circ & \theta_2 &= 29.0^\circ \end{aligned}$$

Una relación útil puede obtenerse de

$$\tan \theta_1 = \frac{E_{z1}}{\sqrt{E_{x1}^2 + E_{y1}^2}} = \frac{D_{z1}/\epsilon_0 \epsilon_{r1}}{\sqrt{E_{x1}^2 + E_{y1}^2}}$$

$$\tan \theta_2 = \frac{E_{z2}}{\sqrt{E_{x2}^2 + E_{y2}^2}} = \frac{D_{z2}/\epsilon_0 \epsilon_{r2}}{\sqrt{E_{x2}^2 + E_{y2}^2}}$$

En vista de las relaciones de continuidad, la división de estas dos ecuaciones da

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}$$

7.5 CAPACITANCIA

Dos cuerpos conductores cualesquiera, separados por el espacio vacío o por un material dieléctrico tienen *capacitancia* entre ellos. Si se aplica una diferencia de voltaje se produce una carga $+Q$ sobre un conductor y $-Q$ sobre el otro. La relación entre el valor absoluto de la carga y el valor absoluto de la diferencia de voltaje se define como la capacitancia del sistema:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (\text{F})$$

donde 1 faradio (F) = 1 C/V.

La capacitancia depende sólo de la geometría del sistema y de las propiedades del o de los dieléctricos involucrados. En la figura 7-5, la carga $+Q$ colocada sobre el conductor 1 y $-Q$ sobre el conductor 2 crea un campo de flujo como el que se muestra en la figura. Por consiguiente se establecen los campos \mathbf{D} y \mathbf{E} . Si se doblaran las cargas se doblarían simplemente \mathbf{D} y \mathbf{E} , y por consiguiente, se doblaría la diferencia de voltaje. Entonces, la relación Q/V permanecería fija.

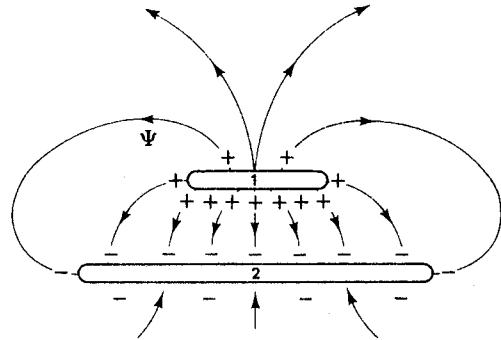


Fig. 7-5

EJEMPLO 2: Halle la capacitancia de las placas paralelas de la figura 7-6, despreciando el efecto de bordes. Con $+Q$ en la placa superior y $-Q$ en la inferior,

$$\rho_s = \frac{Q}{A} \quad D_n = \rho_s = \frac{Q}{A}$$

Como \mathbf{D} es uniforme entre las placas,

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{A} (-\mathbf{a}_z) \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r A} (-\mathbf{a}_z)$$

El voltaje de la placa en $z = d$ con respecto a la placa inferior es

$$V = - \int_0^d \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r A} (-\mathbf{a}_z) \cdot dz \mathbf{a}_z = \frac{Qd}{\epsilon_0 \epsilon_r A}$$

así

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d}$$

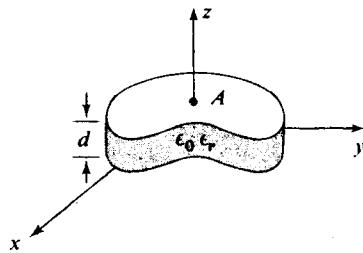


Fig. 7-6

Obsérvese que el resultado no depende de la forma de la placa.

7.6 CONDENSADORES DE VARIOS DIELECTRICOS

Cuando dos dieléctricos se presentan con la entrecara paralela a \mathbf{E} y \mathbf{D} , como en la figura 7-7 (a), la capacitancia puede encontrarse tratando el arreglo como dos condensadores paralelos:

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

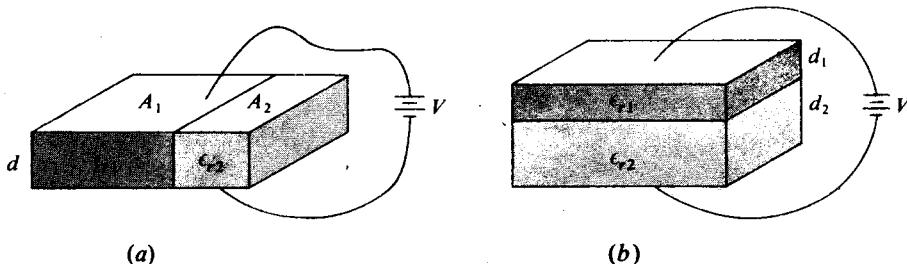


Fig. 7-7

[ver problema 7.8(a)]. Por supuesto, el resultado puede extenderse a cualquier número de dieléctricos colocados uno al lado del otro: *la capacitancia equivalente es la suma de las capacitancias individuales.*

Cuando la entrecara dieléctrica es normal a \mathbf{D} y \mathbf{E} , como en la figura 7-7(b), la capacitancia puede hallarse tratando el arreglo como dos condensadores en serie:

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

[ver problema 7.8(b)]. El resultado puede extenderse a cualquier número de dieléctricos alineados: *el reciproco de la capacitancia equivalente es la suma de los reciprocos de las capacitancias individuales.*

7.7 ENERGIA ALMACENADA EN UN CONDENSADOR

Del resultado del problema 5.15 se puede obtener la energía almacenada en un condensador así:

$$W_E = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv$$

donde la integración puede tomarse sobre el espacio entre los conductores, despreciando el efecto de bordes. Si este espacio está ocupado por un dieléctrico de permitividad relativa ϵ_r , entonces

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

y así

$$W_E = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 E^2 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}) dv = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 \epsilon_r E^2 dv$$

Estas dos expresiones muestran cómo la presencia de un dieléctrico produce un aumento de energía almacenada respecto del valor en el espacio vacío ($\mathbf{P} = 0$, $\epsilon_r = 1$), bien sea a través del término $\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}$ o a través del factor $\epsilon_r > 1$.

En términos de capacitancia,

$$W_E = \frac{1}{2} C V^2$$

y aquí, el efecto del dieléctrico se refleja en C , que es directamente proporcional a ϵ_r .

Problemas resueltos

- 7.1. Halle la polarización \mathbf{P} en un material dieléctrico con $\epsilon_r = 2.8$ si $\mathbf{D} = 3.0 \times 10^{-7} \text{ a C/m}^2$.

Suponiendo que el material es homogéneo e isotrópico,

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$$

Como $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$ y $\chi_e = \epsilon_r - 1$,

$$\mathbf{P} = \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \mathbf{D} = 1.93 \times 10^{-7} \text{ a C/m}^2$$

- 7.2. Determine el valor de \mathbf{E} en un material para el que la susceptibilidad eléctrica es 3.5 y $\mathbf{P} = 2.3 \times 10^{-7} \text{ a C/m}^2$.

Si suponemos que \mathbf{P} y \mathbf{E} tienen la misma dirección,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\chi_e \epsilon_0} \mathbf{P} = 7.42 \times 10^3 \text{ a V/m}$$

- 7.3.** Dos cargas puntuales en un medio dieléctrico donde $\epsilon_r = 5.2$ interactúan con una fuerza de 8.6×10^{-3} N. ¿Qué fuerza podría esperarse si las cargas estuvieran en el espacio vacío?

La ley de Coulomb, $F = Q_1 Q_2 / (4\pi\epsilon_0 \epsilon_r d^2)$, establece que la fuerza es inversamente proporcional a ϵ_r . En el espacio libre la fuerza tendrá su máximo valor.

$$F = \epsilon_r (8.6 \times 10^{-3}) = 4.47 \times 10^{-2} \text{ N}$$

- 7.4.** La región 1, definida por $x < 0$, es espacio vacío, mientras la región 2, $x > 0$, es un material dieléctrico para el cual $\epsilon_{r2} = 2.4$. Ver figura 7-8. Dado

$$\mathbf{D}_1 = 3\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z \text{ C/m}^2$$

halle \mathbf{E}_2 y los ángulos θ_1 y θ_2 .

Las componentes x son normales a la entrecara; D_n y E_i son continuos.

$$\mathbf{D}_1 = 3\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z \quad \mathbf{E}_1 = \frac{3}{\epsilon_0} \mathbf{a}_x - \frac{4}{\epsilon_0} \mathbf{a}_y + \frac{6}{\epsilon_0} \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{D}_2 = 3\mathbf{a}_x + D_{y2}\mathbf{a}_y + D_{z2}\mathbf{a}_z \quad \mathbf{E}_2 = E_{x2}\mathbf{a}_x - \frac{4}{\epsilon_0} \mathbf{a}_y + \frac{6}{\epsilon_0} \mathbf{a}_z$$

Entonces $\mathbf{D}_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r2} \mathbf{E}_2$ da

$$3\mathbf{a}_x + D_{y2}\mathbf{a}_y + D_{z2}\mathbf{a}_z = \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_{x2}\mathbf{a}_x - 4\epsilon_{r2}\mathbf{a}_y + 6\epsilon_{r2}\mathbf{a}_z$$

De lo que se deduce que

$$E_{x2} = \frac{3}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} = \frac{1.25}{\epsilon_0} \quad D_{y2} = -4\epsilon_{r2} = -9.6 \quad D_{z2} = 6\epsilon_{r2} = 14.4$$

Para encontrar los ángulos:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{a}_x &= |\mathbf{D}_1| \cos(90^\circ - \theta_1) \\ 3 &= \sqrt{61} \sin \theta_1 \\ \theta_1 &= 22.6^\circ \end{aligned}$$

Similarmente, $\theta_2 = 9.83^\circ$.

- 7.5.** En la región de espacio libre $x < 0$, la intensidad de campo eléctrico es $\mathbf{E}_1 = 3\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_y - 3\mathbf{a}_z$ V/m. La región $x > 0$ es un dieléctrico para el que $\epsilon_{r2} = 3.6$. Halle el ángulo θ_2 que forma el campo del dieléctrico con el plano $x = 0$

El ángulo formado por \mathbf{E}_1 se halla a partir de

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{a}_x &= |\mathbf{E}_1| \cos(90^\circ - \theta_1) \\ 3 &= \sqrt{43} \sin \theta_1 \\ \theta_1 &= 27.2^\circ \end{aligned}$$

Entonces, por la fórmula desarrollada en el ejemplo 1, sección 7.4,

$$\tan \theta_2 = \frac{1}{\epsilon_{r2}} \tan \theta_1 = 0.1428$$

y $\theta_2 = 8.13^\circ$.

- 7.6.** Una entrecara dieléctrico-espacio vacío sigue la ecuación $3x + 2y + z = 12$ m. El lado queda al origen de la entrecara tiene $\epsilon_{r1} = 3.0$ y $\mathbf{E}_1 = 2\mathbf{a}_x + 5\mathbf{a}_z$ V/m. Halle \mathbf{E}_2

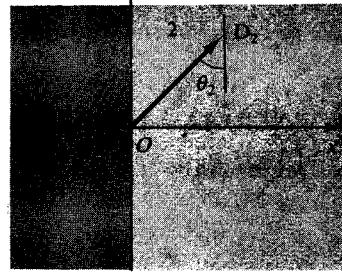


Fig. 7-8

La entrecara se indica en la figura 7-9 por su intersección con los ejes. El vector unidad normal sobre el lado del espacio libre es:

$$\mathbf{a}_n = \frac{3\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{14}}$$

La proyección de \mathbf{E}_1 sobre \mathbf{a}_n es la componente normal de \mathbf{E} en la entrecara.

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{a}_n = \frac{11}{\sqrt{14}}$$

Entonces

$$\mathbf{E}_{n1} = \frac{11}{\sqrt{14}} \mathbf{a}_n = 2.36 \mathbf{a}_x + 1.57 \mathbf{a}_y + 0.79 \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_{n1} = -0.36 \mathbf{a}_x - 1.57 \mathbf{a}_y + 4.21 \mathbf{a}_z = \mathbf{E}_{t2}$$

$$\mathbf{D}_{n1} = \epsilon_0 \epsilon_{r1} \mathbf{E}_{n1} = \epsilon_0 (7.08 \mathbf{a}_x + 4.71 \mathbf{a}_y + 2.37 \mathbf{a}_z) = \mathbf{D}_{n2}$$

$$\mathbf{E}_{n2} = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D}_{n2} = 7.08 \mathbf{a}_x + 4.71 \mathbf{a}_y + 2.37 \mathbf{a}_z$$

y finalmente

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{n2} + \mathbf{E}_{t2} = 6.72 \mathbf{a}_x + 3.14 \mathbf{a}_y + 6.58 \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

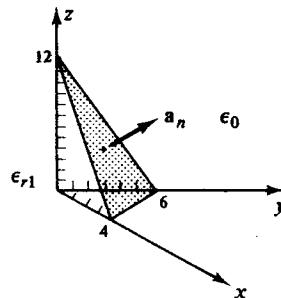


Fig. 7-9

- 7.7. La figura 7-10 muestra un bloque dieléctrico plano con espacio vacío a cada lado. Suponiendo un campo constante \mathbf{E}_2 dentro del bloque, demuestre que $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_1$.

Por continuidad de \mathbf{E}_t a través de las dos entrecaras,

$$\mathbf{E}_{t3} = \mathbf{E}_{t1}$$

Por continuidad de \mathbf{D}_n a través de las dos entrecaras (no hay cargas superficiales),

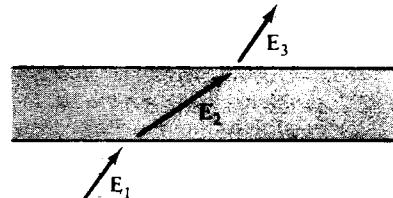


Fig. 7-10

$$\mathbf{D}_{n3} = \mathbf{D}_{n1} \quad \text{y también} \quad \mathbf{E}_{n3} = \mathbf{E}_{n1}$$

Por lo tanto, $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_1$

- 7.8. (a) Demuestre que el condensador de la figura 7-7(a) tiene una capacitancia

$$C_{eq} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} A_1}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} A_2}{d} = C_1 + C_2$$

- (b) Demuestre que el condensador de la figura 7-7(b) tiene una capacitancia

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1} A/d_1} + \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_{r2} A/d_2} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

- (a) Debido a que la diferencia de voltaje es común a los dos dieléctricos,

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \frac{V}{d} \mathbf{a}_n \quad \text{y} \quad \frac{\mathbf{D}_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = \frac{\mathbf{D}_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} = \frac{V}{d} \mathbf{a}_n$$

Donde \mathbf{a}_n es la normal que baja hacia la placa superior. Como $D_n = \rho_s$, las densidades de carga sobre las dos secciones de la placa superior son:

$$\rho_{s1} = \frac{V}{d} \epsilon_0 \epsilon_{r1} \quad \rho_{s2} = \frac{V}{d} \epsilon_0 \epsilon_{r2}$$

y la carga total es

$$Q = \rho_{s1} A_1 + \rho_{s2} A_2 = V \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} A_1}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r2} A_2}{d} \right)$$

De esta manera, la capacitancia del sistema, $C_{eq} = Q/V$, tiene la forma propuesta.

(b) Sea $+Q$ la carga sobre la placa superior. Entonces

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{A} \mathbf{a}_n$$

en cualquier punto situado entre las placas. Por lo tanto,

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_{r1} A} \mathbf{a}_n \quad \mathbf{E}_2 = -\frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_{r2} A} \mathbf{a}_n$$

Las diferencias de voltaje a través de los dos dieléctricos son, entonces:

$$V_1 = E_1 d_1 = \frac{Q d_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1} A} \quad V_2 = E_2 d_2 = \frac{Q d_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r2} A}$$

$$\text{y} \quad V = V_1 + V_2 = Q \left(\frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1} A / d_1} + \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_{r2} A / d_2} \right)$$

De aquí se ve que $1/C_{eq} = V/Q$ tiene la forma propuesta.

- 7.9.** Halle la capacitancia de un condensador coaxial de longitud L , donde el conductor interno tiene un radio a y el externo tiene un radio b . Ver figura 7-11.

Despreciando el efecto de bordes, la ley de Gauss establece que $D \propto 1/r$ entre los conductores (ver problema 6.24). En $r = a$, $D = \rho_s a$, donde ρ_s (supuesto positivo) es la densidad superficial de carga sobre el conductor interno. Por consiguiente,

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_s a}{r} \mathbf{a}_r \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_s a}{\epsilon_0 \epsilon_r r} \mathbf{a}_r$$

y la diferencia de voltaje entre los conductores es

$$V_{ab} = - \int_b^a \left(\frac{\rho_s a}{\epsilon_0 \epsilon_r r} \mathbf{a}_r \right) \cdot dr \mathbf{a}_r = \frac{\rho_s a}{\epsilon_0 \epsilon_r} \ln \frac{b}{a}$$

La carga total en el conductor interno es $Q = \rho_s (2\pi a L)$, y así

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r L}{\ln(b/a)}$$

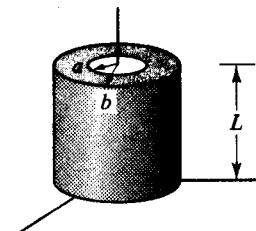


Fig. 7-11

- 7.10.** En el condensador que aparece en la figura 7-12, la región entre las placas se llena con un dieléctrico que tiene $\epsilon_r = 4.5$. Halle la capacitancia.

Despreciando el efecto de bordes, el campo \mathbf{D} entre las placas, en coordenadas cilíndricas, debe ser de la forma $\mathbf{D} = D_\phi \mathbf{a}_\phi$, donde D_ϕ depende sólo de r . Entonces, si el voltaje de la placa $\phi = \alpha$ con respecto a la placa $\phi = 0$ es V_0 ,

$$V_0 = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_0^\alpha \left(\frac{D_\phi}{\epsilon_0 \epsilon_r} \mathbf{a}_\phi \right) \cdot (r d\phi \mathbf{a}_\phi) = - \frac{D_\phi r}{\epsilon_0 \epsilon_r} \int_0^\alpha d\phi = - \frac{D_\phi r \alpha}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

De esta manera, $D_\phi = -\epsilon_0 \epsilon_r V_0 / r \alpha$, y la densidad de carga sobre la placa $\phi = \alpha$ es

$$\rho_s = D_n = -D_\phi = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r V_0}{r \alpha}$$

La carga total sobre la placa está dada entonces por

$$Q = \int \rho_s dS = \int_0^h \int_{r_1}^{r_2} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r V_0}{r\alpha} dr dz$$

$$= \frac{\epsilon_0 \epsilon_r V_0 h}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Por lo tanto $C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r h}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}$

Cuando se substituyen valores numéricos (con α convertido a radianes), se obtiene $C = 7.76 \text{ pF}$.

- 7.11.** En relación al problema 7.10, halle la separación d que se produce con la misma capacitancia cuando las placas se arreglan en forma paralela con el mismo dieléctrico en medio.

Con las placas paralelas

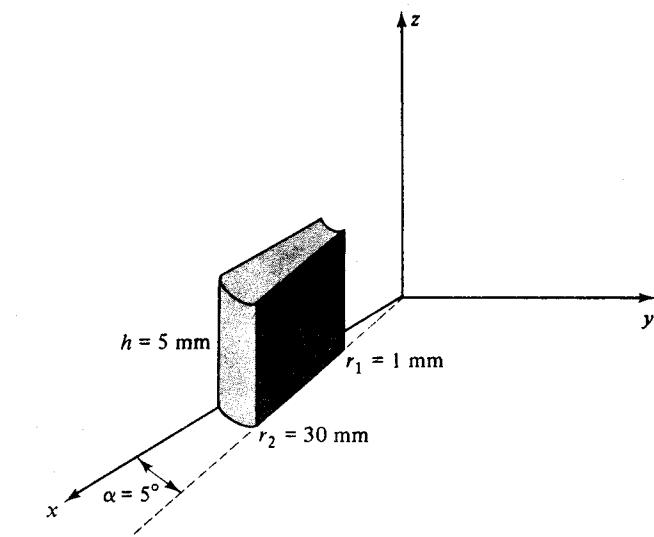


Fig. 7-12

así que

$$d = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{C} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r h(r_2 - r_1)}{(\epsilon_0 \epsilon_r h/\alpha)[\ln(r_2/r_1)]} = \frac{\alpha(r_2 - r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$$

Nótese que el numerador de la derecha es la diferencia de longitudes de arco en los dos extremos del condensador, mientras que el denominador es el logaritmo de la relación de estas longitudes de arco. Para los datos del problema 7.10, $\alpha r_1 = 0.087 \text{ mm}$, $\alpha r_2 = 2.62 \text{ mm}$ y $d = 0.74 \text{ mm}$.

- 7.12.** Halle la capacitancia de una concha esférica aislada de radio a .

El potencial de un conductor de este tipo con referencia cero en el infinito es (ver problema 2.35):

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Entonces

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 a$$

- 7.13.** Halle la capacitancia entre dos conchas esféricas de radio a separadas por una distancia $d \gg a$.

El resultado del problema 7.12 para la capacitancia de una concha esférica sencilla, $4\pi\epsilon_0 a$, puede usarse como aproximación. En la figura 7-13 los dos condensadores idénticos parecen estar en serie.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 2\pi\epsilon_0 a$$

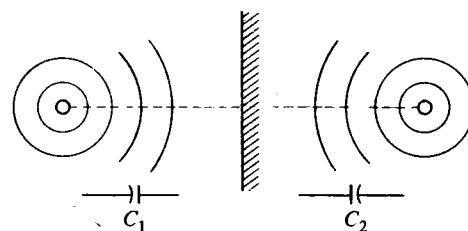


Fig. 7-13

- 7.14. Halle la capacitancia de un condensador de placas paralelas que contiene dos dieléctricos $\epsilon_r = 1.5$ y $\epsilon_{r2} = 3.5$, cada uno de los cuales abarca la mitad del volumen, tal como se muestra en la figura 7.14. Aquí $A = 2 \text{ m}^2$ y $d = 10^{-3} \text{ m}$.

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r1} A}{d} = \frac{(8.854 \times 10^{-12})(1.5)1}{10^{-3}} = 13.3 \text{ nF}$$

De manera similar, $C_2 = 31.0 \text{ nF}$. Entonces,

$$C = C_1 + C_2 = 44.3 \text{ nF}$$

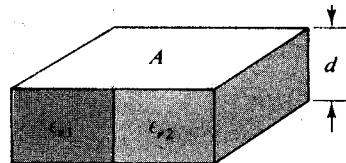


Fig. 7-14

- 7.15. Repita el problema 7.14 suponiendo que los dos dieléctricos ocupan cada uno la mitad del volumen pero tienen la entrecara paralela a las placas.

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d_1} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d/2} = \frac{(8.854 \times 10^{-12})(1.5)2}{10^{-3}/2} = 53.1 \text{ nF}$$

De manera similar, $C_2 = 124 \text{ nF}$. Entonces

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 37.2 \text{ nF}$$

- 7.16. En el condensador cilíndrico que aparece en la figura 7-15 cada dieléctrico ocupa la mitad del volumen. Halle la capacitancia.

La entrecara dieléctrica es paralela a D y E, así que la configuración puede tratarse como dos condensadores en paralelo. Como cada condensador contiene la mitad de la carga que contendría un cilindro completo, el resultado del problema 7.9 da

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon_{r1} L}{\ln(b/a)} + \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon_{r2} L}{\ln(b/a)} = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{r\text{avg}} L}{\ln(b/a)}$$

donde $\epsilon_{r\text{avg}} = \frac{1}{2}(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})$. Los dos dieléctricos se comportan como un sólo dieléctrico con una permitividad relativa promedio.

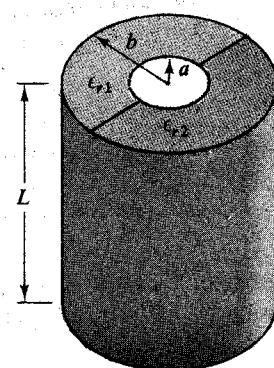


Fig. 7-15

- 7.17. Halle el voltaje a través de cada dieléctrico en el condensador que aparece en la figura 7-16 cuando el voltaje es 200 V.

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 5(1)}{10^{-3}} = 5000 \epsilon_0$$

$$C_2 = 1000 \epsilon_0 / 3$$

$$\text{y } C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 312.5 \epsilon_0 = 2.77 \times 10^{-9} \text{ F}$$

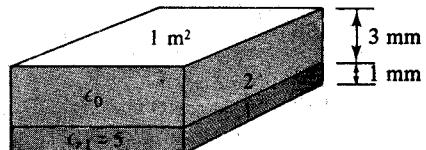


Fig. 7-16

El campo D dentro del condensador se halla ahora a partir de

$$D_n = \rho_s = \frac{Q}{A} = \frac{CV}{A} = \frac{(2.77 \times 10^{-9})(200)}{1} = 5.54 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

Entonces

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = 1.25 \times 10^4 \text{ V/m} \quad E_2 = \frac{D}{\epsilon_0} = 6.25 \times 10^4 \text{ V/m}$$

de lo que se deduce

$$V_1 = E_1 d_1 = 12.5 \text{ V} \quad V_2 = E_2 d_2 = 187.5 \text{ V}$$

- 7.18.** Halle la caída de voltaje a través de cada uno de los dieléctricos de la figura 7-17, donde $\epsilon_{r1} = 2.0$ y $\epsilon_{r2} = 5.0$. El conductor interno está en $r_1 = 2$ cm y el externo en $r_2 = 2.5$ cm, con la entrecara dieléctrica en la mitad.

La división de voltaje es la misma que la que ocurriría en un cilindro circular recto completo. El segmento mostrado, con ángulo α , tendrá una capacitancia $\alpha/2\pi$ veces la del condensador coaxial completo. Del problema 7.9,

$$C_1 = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) \frac{2\pi\epsilon_0 \epsilon_{r1} L}{\ln\left(\frac{2.25}{2.0}\right)} = \alpha L (1.5 \times 10^{-10}) \text{ (F)}$$

$$C_2 = \alpha L (4.2 \times 10^{-10}) \text{ (F)}$$

Como $Q = C_1 V_1 = C_2 V_2$ y $V_1 + V_2 = V$, se deduce que

$$V_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} V = \frac{4.2}{1.5 + 4.2} (100) = 74 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} V = \frac{1.5}{1.5 + 4.2} (100) = 26 \text{ V}$$

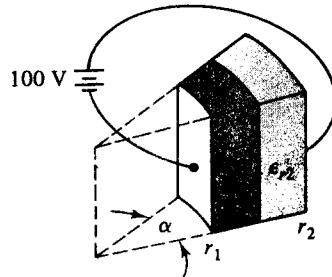


Fig. 7-17

- 7.19.** Un condensador de placas paralelas con espacio vacío entre las placas se conecta a una fuente de voltaje constante. Determine cómo cambian W_E , D , E , C , Q , ρ_s y V cuando se inserta un dieléctrico de $\epsilon_r = 2$ entre las placas.

Relación	Explicación
$V_2 = V_1$	La fuente V permanece conectada
$E_2 = E_1$	como $E = V/d$
$W_2 = 2W_1$	$W = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 \epsilon_r E^2 dv$
$C_2 = 2C_1$	$C = \epsilon_0 \epsilon_r A/d$
$D_2 = 2D_1$	$D = \epsilon_0 \epsilon_r E$
$\rho_{s2} = 2\rho_{s1}$	$\rho_s = D_n$
$Q_2 = 2Q_1$	$Q = \rho_s A$

En un problema de este tipo es aconsejable identificar primero aquellas cantidades que permanecen constantes.

- 7.20.** Un condensador de placas paralelas con espacio vacío entre ellas se conecta momentáneamente a una fuente de voltaje V , que es luego removida. Determine cómo cambian W_E , D , E , C , Q , ρ_s , y V cuando las placas se apartan a una distancia de separación $d_2 = 2d_1$ sin perturbar la carga.

Relación	Explicación
$Q_2 = Q_1$	La carga total no cambia
$\rho_{s2} = \rho_{s1}$	$\rho_s = Q/A$
$D_2 = D_1$	$D_n = \rho_s$
$E_2 = E_1$	$E = D/\epsilon_0$
$W_2 = 2W_1$	$W = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 E^2 dv$, y el volumen dobla
$C_2 = \frac{1}{2}C_1$	$C = \epsilon_0 A/d$
$V_2 = 2V_1$	$V = Q/C$

- 7.21.** Un condensador de placas paralelas con una separación $d = 1.0$ cm tiene 29 000 V cuando el espacio vacío es el único dieléctrico. Suponga que el aire tiene una resistencia dieléctrica de 30 000 V/cm. Muestre por qué el aire sucumbe cuando una delgada pieza de vidrio ($\epsilon_r = 6.5$) con una resistencia dieléctrica de 29 000 V/cm y espesor $d_2 = 0.20$ cm se inserta entre las placas como se muestra en la figura 7-18.

El problema resulta ser el de dos condensadores en serie

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{8 \times 10^{-3}} = 125\epsilon_0 A$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{2 \times 10^{-3}} = 3250\epsilon_0 A$$

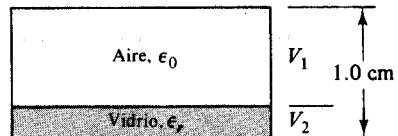


Fig. 7-18

Entonces, como en el problema 7.18,

$$V_1 = \frac{3250}{125 + 3250} (29000) = 27926 \text{ V}$$

y así

$$E_1 = \frac{27933 \text{ V}}{0.80 \text{ cm}} = 34907 \text{ V/cm}$$

lo cual excede la resistencia dieléctrica del aire.

- 7.22.** Halle la capacitancia por unidad de longitud entre un conductor cilíndrico de radio $a = 2.5 \text{ cm}$ y un plano de tierra paralelo al eje del conductor a una distancia $h = 6.0 \text{ cm}$ de él.

Una técnica útil en problemas de esta clase es el *método de imágenes*. Tome la imagen espejo del conductor en el plano de tierra y deje que este conductor imagen transporte el negativo de la distribución de carga del conductor real. Ahora, suponga que el plano de tierra es removido. Está claro que el campo eléctrico de los dos conductores obedece la condición de fronteras correcta en el conductor real, y, por simetría tiene una superficie equipotencial (sección 5.2) donde existía el plano de tierra. Por consiguiente, este campo es el campo que queda en la región comprendida entre el conductor real y el plano de tierra.

Aproximando las distribuciones de carga real e imagen a cargas lineales $+\rho_t$ y $-\rho_t$, respectivamente, en el centro de los conductores, se obtiene (ver figura 7-19):

$$\text{potencial en el radio } a \text{ debido a } +\rho_t = -\left(\frac{+\rho_t}{2\pi\epsilon_0}\right) \ln a$$

$$\text{potencial en el punto } P \text{ debido a } -\rho_t = -\left(\frac{-\rho_t}{2\pi\epsilon_0}\right) \ln(2h - a)$$

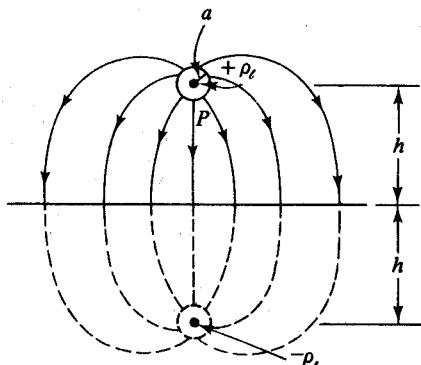


Fig. 7-19

El potencial debido a $-\rho_t$ no es constante sobre $r = a$, la superficie del conductor real. Pero lo es muy aproximadamente si $a \ll h$. Con esta aproximación, entonces, el potencial total del conductor real es

$$V_a = -\frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0} \ln a + \frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0} \ln(2h - a) \approx -\frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0} \ln a + \frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0} \ln 2h = \frac{\rho_t}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{a}$$

Similarmente, el potencial del conductor imagen es $-V_a$. Así pues, la diferencia de potencial entre los dos conductores es $2V_a$, de tal manera que la diferencia de potencial entre el conductor real y el plano de tierra es $\frac{1}{2}(2V_a) = V_a$. La capacitancia deseada por unidad de longitud es, entonces,

$$\frac{C}{L} = \frac{Q/L}{V_a} = \frac{\rho_t}{V_a} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(2h/a)}$$

Para los valores de a y h , $C/L = 9.0 \text{ pF/m}$.

La anterior expresión para C/L no es exacta, pero da una buena aproximación cuando $a \ll h$ (el caso práctico). Una solución exacta da

$$\left(\frac{C}{L}\right)_{\text{exacta}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{h + \sqrt{h^2 - a^2}}{a}\right)}$$

Obsérvese que C/L para el sistema imagen-fuente (más generalmente, para cualquier par de conductores cilíndricos paralelos con separación entre los centros de $2h$) es la mitad del valor encontrado arriba (la misma carga, dos veces el voltaje). Esto es, con $d = 2h$,

$$\frac{C}{L} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{d + \sqrt{d^2 - 4a^2}}{2a}\right)} \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/a)}$$

Problemas supplementarios

- 7.23. Halle la magnitud de \mathbf{D} en un material dieléctrico para el cual $\chi_e = 1.6$ y $P = 3.05 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$.
Resp. $4.96 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$
- 7.24. Halle las magnitudes de \mathbf{D} , \mathbf{P} y ϵ_r para un material dieléctrico en el cual $E = 0.15 \text{ MV/m}$ y $\chi_e = 4.25$.
Resp. $6.97 \mu\text{C/m}^2$, $5.64 \mu\text{C/m}^2$, 5.25
- 7.25. En un material dieléctrico con $\epsilon_r = 3.6$, $D = 285 \text{ nC/m}^2$. Halle las magnitudes de \mathbf{E} , \mathbf{P} y χ_e .
Resp. 8.94 kV/m , 206 nC/m^2 , 2.6
- 7.26. Dado $\mathbf{E} = -3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - 2\mathbf{a}_z \text{ V/m}$ en la región $z < 0$, donde $\epsilon_r = 2.0$. Halle \mathbf{E} en la región $z > 0$, para el cual $\epsilon_r = 6.5$. Resp. $-3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y - \frac{4}{6.5}\mathbf{a}_z \text{ V/m}$
- 7.27. Dado que $\mathbf{D} = 2\mathbf{a}_x - 4\mathbf{a}_y + 1.5\mathbf{a}_z \text{ C/m}^2$ en la región $x > 0$, que es espacio vacío. Halle \mathbf{P} en la región $x < 0$, que es un dieléctrico con $\epsilon_r = 5.0$. Resp. $1.6\mathbf{a}_x - 16\mathbf{a}_y + 6\mathbf{a}_z \text{ C/m}^2$
- 7.28. La región 1, $z < 0 \text{ m}$, es espacio vacío donde $\mathbf{D} = 5\mathbf{a}_y + 7\mathbf{a}_z \text{ C/m}^2$. La región 2, $0 < z \leq 1 \text{ m}$, tiene $\epsilon_r = 2.5$. Y la región 3, $z > 1 \text{ m}$, tiene $\epsilon_r = 3.0$. Halle \mathbf{E}_2 , \mathbf{P}_2 y θ_3 .
Resp. $\frac{1}{\epsilon_0} \left(5\mathbf{a}_y + \frac{7}{2.5}\mathbf{a}_z \right) \text{ (V/m)}$, $7.5\mathbf{a}_y + 4.2\mathbf{a}_z \text{ C/m}^2$, 25.02°
- 7.29. El plano entrecara entre dos dieléctricos está dado por $3x + z = 5$. En el lado que incluye el origen, $\mathbf{D}_1 = (4.5\mathbf{a}_x + 3.2\mathbf{a}_z)10^{-7}$ y $\epsilon_{r1} = 4.3$, mientras en el otro lado, $\epsilon_{r2} = 1.80$. Halle \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 , \mathbf{D}_2 y θ_2 .
Resp. 1.45×10^4 , 3.37×10^4 , 5.37×10^{-7} , 83.06°
- 7.30. Una entrecara dieléctrica está descrita por $4y + 3z = 12 \text{ m}$. El lado que incluye el origen es espacio vacío con $\mathbf{D}_1 = \mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_y + 2\mathbf{a}_z \mu\text{C/m}^2$. En el otro lado, $\epsilon_{r2} = 3.6$. Halle \mathbf{D}_2 y θ_2 . Resp. $5.14 \mu\text{C/m}^2$, 44.4°
- 7.31. Halle la capacitancia de un condensador de placas paralelas con un dieléctrico de $\epsilon_r = 3.0$, área 0.92 m^2 y separación 4.5 mm . Resp. 5.43 nF
- 7.32. Un condensador de placas paralelas de 8.0 nF tiene un área de 1.51 m^2 y una separación de 10 mm . ¿Qué separación se requeriría para obtener la misma capacitancia con espacio vacío entre las placas?
Resp. 1.67 mm

- 7.33. Halle la capacitancia entre las superficies curvas interna y externa del conductor que aparece en la figura 7-20. Desprecie el efecto de bordes. *Resp.* 6.86 pF

- 7.34. Halle la capacitancia por unidad de longitud entre un conductor cilíndrico de 2.75 pulgadas de diámetro y un plano paralelo a 28 pies del eje del conductor.
Resp. 8.99 pF/m (fíjese en las unidades)

- 7.35. Duplique el diámetro del conductor del problema 7-34 y halle la capacitancia por unidad de longitud.
Resp. 10.1 pF/m

- 7.36. Halle la capacitancia por unidad de longitud entre dos conductores cilíndricos paralelos en el aire, de radio 1.5 cm y una separación entre sus centros de 85 cm. *Resp.* 6.92 pF/m

- 7.37. Un condensador de placas paralelas con área 0.30 m^2 y separación 5.5 mm contiene 3 dieléctricos con entrecaras normales a E y D, como sigue: $\epsilon_r = 3.0, d_1 = 1.0 \text{ mm}$; $\epsilon_r = 4.0, d_2 = 2.0 \text{ mm}$; $\epsilon_r = 6.0, d_3 = 2.5 \text{ mm}$. Encuentre la capacitancia. *Resp.* 2.12 nF

- 7.38. Con un potencial de 1000 V aplicado al condensador del problema 7.37, halle la diferencia de potencial y el gradiente de potencial (intensidad del campo eléctrico) en cada dieléctrico.
Resp. 267 V, 267 kV/m; 400 V, 200 kV/m; 333 V, 133 kV/m

- 7.39. Halle la capacitancia por unidad de longitud de un conductor coaxial con radio externo de 4 mm y radio interno de 0.5 mm si el dieléctrico tiene $\epsilon_r = 5.2$. *Resp.* 139 pF/m

- 7.40. Halle la capacitancia por unidad de longitud de un cable con un conductor interno de radio 0.75 cm y un blindaje cilíndrico de 2.25 cm de radio si el dieléctrico tiene $\epsilon_r = 2.70$. *Resp.* 137 pF/m

- 7.41. El cable coaxial de la figura 7-21 tiene un conductor interno de radio 0.5 mm y un conductor externo de radio 5 mm. Halle la capacitancia por unidad de longitud con los espaciadores que aparecen. *Resp.* 45.9 pF/m

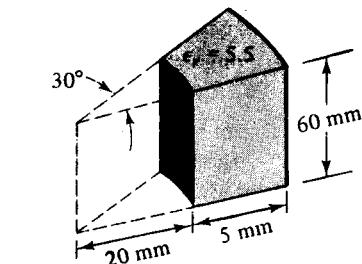


Fig. 7-20

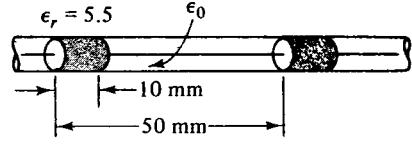


Fig. 7-21

- 7.42. Un condensador de placas paralelas con espacio vacío entre las placas se carga conectándolo momentáneamente a una fuente constante de 200 V. Después de removerlo de la fuente se inserta un dieléctrico de $\epsilon_r = 2.0$ llenando totalmente el espacio. Compare los valores de W_E , D , E , ρ_s , Q , V y C antes y después de la inserción del dieléctrico. *Resp. parcial* $V_2 = \frac{1}{2}V_1$

- 7.43. A un condensador de placas paralelas se le cambia el dieléctrico de $\epsilon_r = 2.0$ a $\epsilon_r = 6.0$. Se nota que la energía almacenada permanece fija: $W_2 = W_1$. Examine los cambios en V , C , D , E , Q y ρ_s , si hay alguno.
Resp. parcial. $\rho_{s2} = \sqrt{3}\rho_{s1}$

- 7.44. Un condensador de placas paralelas con espacio vacío entre las placas permanece conectado a una fuente de voltaje constante mientras las placas son acercadas la una a la otra, desde una separación d hasta $\frac{1}{2}d$. Examine los cambios que se producen en Q , ρ_s , C , D , E y W_E . *Resp. parcial.* $D_2 = 2D_1$

- 7.45. Un condensador de placas paralelas con espacio libre entre las placas permanece conectado a una fuente de voltaje constante mientras las placas son apartadas desde d hasta $2d$. Exprese los cambios que se producen en D , Q , ρ_s , C y W_E . *Resp. parcial.* $D_2 = \frac{1}{2}D_1$

- 7.46. Un condensador de placas paralelas tiene espacio vacío como dieléctrico y separación d . Sin perturbar la carga Q , las placas se acercan, hasta $d/2$, con un dieléctrico de $\epsilon_r = 3$, que llena completamente el espacio entre las placas. Exprese los cambios que se producen en D , E , V , C y W_E . *Resp. parcial.* $V_2 = \frac{1}{6}V_1$

- 7.47.** Un condensador de placas paralelas tiene espacio vacío entre las placas. Compare el gradiente de voltaje en este espacio vacío con el de espacio vacío cuando una hoja de mica, $\epsilon_r = 5.4$ llena 20% de la distancia entre las placas. Suponga el mismo voltaje aplicado en cada caso. *Resp.* 0.84
- 7.48.** Un cable blindado opera a un voltaje de 12.5 kV sobre el conductor interno con respecto al blindaje cilíndrico. Hay dos aislantes; el primero tiene $\epsilon_{r1} = 6.0$ y está de $r = 0.8$ cm a $r = 1.0$ cm del conductor interno, mientras que el segundo tiene $\epsilon_{r2} = 3.0$ y está desde $r = 1.0$ cm hasta $r = 3.0$ cm, dentro de la superficie interna del blindaje. Encuentre el máximo gradiente de voltaje en cada aislante. *Resp.* 0.645 MV/m, 1.03 MV/m
- 7.49.** Un cable blindado tiene un aislante de polietileno para el cual $\epsilon_r = 2.26$ y la rigidez dieléctrica es 18.1 MV/m. ¿Cuál es el límite superior del voltaje en el conductor interno con respecto al blindaje cuando el conductor interno tiene un radio de 1 cm y el lado interno del blindaje concéntrico está a un radio de 8 cm? *Resp.* 0.376 MV
- 7.50.** Para el condensador coaxial de la figura 7-15, $a = 3$ cm, $b = 12$ cm, $\epsilon_{r1} = 2.50$, $\epsilon_{r2} = 4.0$. Halle E_1 , E_2 , D_1 y D_2 si la diferencia de voltaje es 50 V. *Resp. parcial.* $E_2 = \pm(36.1/r)a_r$ (V/m)
- 7.51.** En la figura 7-22, el conductor central, $r_1 = 1$ mm, está a 100 V respecto del conductor externo en $r_3 = 100$ mm. La región $1 < r < 50$ mm es espacio vacío, mientras $50 < r < 100$ mm es un dieléctrico con $\epsilon_r = 2.0$. Halle el voltaje a través de cada región. *Resp.* 91.8 V, 8.2 V
- 7.52.** Halle la energía almacenada por unidad de longitud en las dos regiones del problema 7.51. *Resp.* 59.9 nJ/m, 5.30 nJ/m

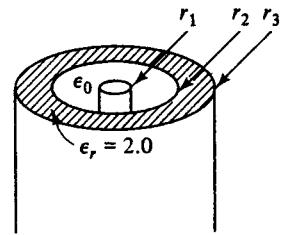


Fig. 7-22

Capítulo 8

Ecuación de Laplace

8.1 INTRODUCCION

La intensidad del campo eléctrico \mathbf{E} se determinó en el capítulo 2 por sumatoria o integración de cargas puntuales, cargas lineales y otras configuraciones de carga. En el capítulo 3, se utilizó la ley de Gauss para obtener \mathbf{D} , lo que a su turno, daba \mathbf{E} . En tanto que estos métodos son valiosos para entender la teoría de los campos electromagnéticos, tienden a ser imprácticos debido a que las distribuciones de carga son generalmente desconocidas. El método del capítulo 5, donde se encontró que \mathbf{E} era el negativo del gradiente de V , requiere que la función potencial sea conocida en toda la región. Pero generalmente no lo es. En cambio, se conocen los materiales conductores, en forma de planos, superficies curvas o líneas y el voltaje sobre uno de ellos con respecto a alguna referencia que es a menudo uno de los otros conductores. La ecuación de Laplace, entonces, ofrece un método mediante el cual se puede obtener la función potencial V dadas las condiciones de frontera de los conductores.

8.2 ECUACION DE POISSON Y DE LAPLACE

En la sección 4.3 se desarrolló una de las ecuaciones de Maxwell: $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$. Sustituyendo $\epsilon \mathbf{E} = \mathbf{D}$ y $-\nabla V = \mathbf{E}$,

$$\nabla \cdot \epsilon(-\nabla V) = \rho$$

Si en toda la región de interés el medio es homogéneo, entonces ϵ puede retirarse de las derivadas parciales involucradas en la divergencia, obteniéndose

$$\nabla \cdot \nabla V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{ó} \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

que es la *Ecuación de Poisson*.

Cuando la región de interés contiene cargas en una distribución conocida ρ , la ecuación de Poisson puede usarse para determinar la función potencial. Muy a menudo, la región está libre de carga (y tiene también permitividad uniforme). La ecuación de Poisson es, entonces,

$$\nabla^2 V = 0$$

que es la *Ecuación de Laplace*.

8.3 FORMAS EXPLICITAS DE LA ECUACION DE LAPLACE

Como el lado izquierdo de la ecuación de Laplace es la *divergencia del gradiente de V*, estas dos operaciones pueden usarse para obtener la forma de la ecuación en un sistema coordenado particular.

Coordenadas cartesianas

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

y para un campo vectorial general \mathbf{A} ,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Por consiguiente, la ecuación de Laplace es

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

$$\text{y } \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

de tal manera que la ecuación de Laplace es

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi$$

$$\text{y } \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

de tal manera que la ecuación de Laplace es

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

8.4 TEOREMA DE LA UNICIDAD

Cualquier solución a la ecuación de Laplace o a la de Poisson que satisfaga las condiciones de frontera debe ser la única solución que existe. Es *única*. A veces hay alguna confusión respecto de este punto, debido a fronteras incompletas. Como ejemplo, considérese el plano conductor en $z = 0$, que aparece en la figura 8-1, con un voltaje de 100 V. Es claro que tanto

$$V_1 = 5z + 100$$

como

$$V_2 = 100$$

satisfacen la ecuación de Laplace y el requisito de que $V = 100$ cuando $z = 0$. La respuesta está en que una superficie conductora sencilla con un voltaje especificado y ninguna referencia no forma frontera completa respecto de una región definida apropiadamente. Aun dos planos conductores finitos paralelos no forman una frontera completa, puesto que la distorsión del campo alrededor de los bordes no puede determinarse. Sin embargo, cuando se establece que se va a despreciar el efecto de los bordes, la región entre los planos tiene fronteras apropiadas.

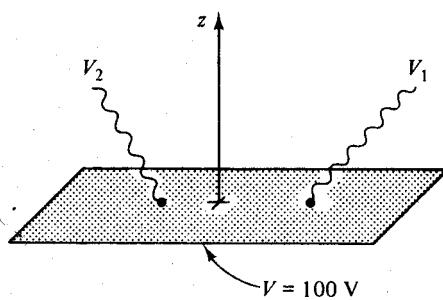


Fig. 8-

8.5 TEOREMAS DEL VALOR MEDIO Y DEL VALOR MAXIMO

Dos propiedades importantes del potencial en una región libre de carga pueden obtenerse de la ecuación de Laplace:

(1) En el centro de un círculo o esfera inscritos, el potencial V es igual al promedio de los valores que asume sobre el círculo o esfera (ver problemas 8.1 y 8.2).

(2) El potencial V no puede tener un máximo (o un mínimo) dentro de la región (ver problema 8.3).

Se entiende a partir de (2) que cualquier máximo de V debe ocurrir en el límite de la región. Ahora, ya que V obedece la ecuación de Laplace,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

al igual que $\partial V / \partial x$, $\partial V / \partial y$, y $\partial V / \partial z$. Entonces las componentes de intensidad del campo eléctrico toman sus valores máximos en el límite.

8.6 SOLUCION CARTESIANA DE UNA VARIABLE

Considere los conductores paralelos de la figura 8-2, donde $V = 0$ en $z = 0$ y $V = 100$ en $z = d$. Tomando la región entre los planos libres de carga,

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Si se desprecia el efecto de los bordes, el potencial puede variar sólo con z . Entonces

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 0$$

Integrando,

$$V = Az + B$$

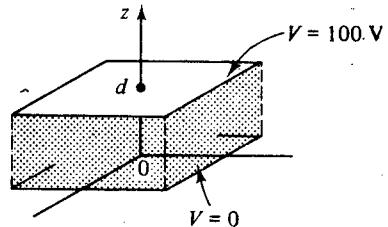


Fig. 8-2

Las condiciones de frontera $V = 0$ en $z = 0$ requieren que $B = 0$. Ahora, $V = 100$ en $z = d$ da $A = 100/d$. Entonces

$$V = 100 \left(\frac{z}{d} \right) \quad (\text{V})$$

La intensidad del campo eléctrico E puede ahora obtenerse de

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(100 \frac{z}{d} \right) \mathbf{a}_z = -\frac{100}{d} \mathbf{a}_z \quad (\text{V/m})$$

Entonces

$$\mathbf{D} = -\frac{\epsilon 100}{d} \mathbf{a}_z \quad (\text{C/m}^2)$$

En los conductores,

$$\rho_s = D_n = \pm \frac{\epsilon 100}{d} \quad (\text{C/m}^2)$$

donde el signo más se aplica en $z = d$ y el menos en $z = 0$.

8.7 SOLUCION DEL PRODUCTO CARTESIANO

Cuando el potencial en coordenadas cartesianas varía en más de una dirección, la ecuación de Laplace contiene más de un término. Supóngase que V es una función de tanto de x como de y , y tiene la forma

especial $V = X(x) Y(y)$. Esto hace posible la separación de las variables.

$$\frac{\partial^2(XY)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(XY)}{\partial y^2} = 0$$

viene a ser

$$Y \frac{d^2X}{dx^2} + X \frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$

Como el primer término es independiente de y , y el segundo lo es de x , cada uno puede igualarse a una constante. Sin embargo, la constante para uno debe ser la negativa respecto de la del otro. Sea la constante a^2 .

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = a^2 \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = -a^2$$

La solución general para X (para una a dada) es

$$X = A_1 e^{ax} + A_2 e^{-ax}$$

o equivalente,

$$X = A_3 \cosh ax + A_4 \sinh ax$$

y la solución general para Y (para una a dada) es

$$Y = B_1 e^{jay} + B_2 e^{-jay}$$

o equivalente,

$$Y = B_3 \cos ay + B_4 \sin ay$$

Por consiguiente, la función de potencial en las variables x y y puede escribirse

$$V = (A_1 e^{ax} + A_2 e^{-ax})(B_1 e^{jay} + B_2 e^{-jay})$$

ó

$$V = (A_3 \cosh ax + A_4 \sinh ax)(B_3 \cos ay + B_4 \sin ay)$$

Como la ecuación de Laplace es lineal y homogénea, una suma de productos de la forma anterior —cada uno correspondiente a un valor diferente de a — es también una solución. La solución más general puede generarse en esta forma.

Soluciones tridimensionales, $V = X(x) Y(y) Z(z)$, pueden obtenerse en forma similar, pero en ese caso hay dos constantes de separación.

8.8 SOLUCION DEL PRODUCTO CILINDRICO

Si se supone una solución de la forma $V = R(r)\Phi(\phi)Z(z)$, la ecuación de Laplace se convierte en

$$\frac{\Phi Z}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{RZ}{r^2} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + R\Phi \frac{d^2Z}{dz^2} = 0$$

Dividiendo por $R\Phi Z$ y desarrollando la derivada en r ,

$$\frac{1}{R} \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{Rr} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = -b^2$$

Los términos r y ϕ no contienen z y el término z no contiene ni r ni ϕ . Pueden ser igualados a una constante, $-b^2$, como antes. Entonces

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = b^2$$

Esta ecuación se encontró en la solución del producto cartesiano. La solución es

$$Z = C_1 \cosh bz + C_2 \operatorname{senh} bz$$

Ahora la ecuación en r y ϕ puede separarse aún más de la manera siguiente:

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} + b^2 r^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = a^2$$

La ecuación resultante en ϕ ,

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -a^2$$

tiene como solución

$$\Phi = C_3 \cos a\phi + C_4 \operatorname{sen} a\phi$$

La ecuación en r ,

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(b^2 - \frac{a^2}{r^2}\right) R = 0$$

es una forma de la *ecuación diferencial de Bessel*. Sus soluciones tienen la forma de series de potencia llamadas *funciones Bessel*.

$$R = C_5 J_a(br) + C_6 N_a(br)$$

donde

$$J_a(br) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (br/2)^{a+2m}}{m! \Gamma(a+m+1)}$$

y

$$N_a(br) = \frac{(\cos ar) J_a(br) - J_{-a}(br)}{\sin ar}$$

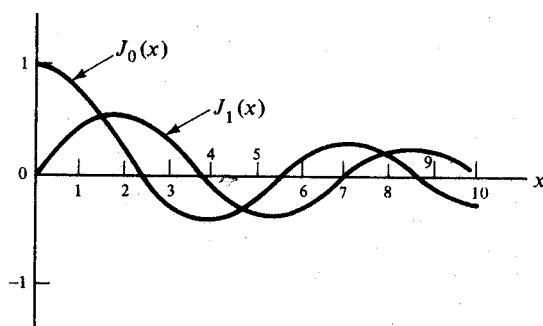
La serie $J_a(br)$ se conoce como la función Bessel de *primera clase*, orden a . Si $a = n$, un entero, la función gama de la serie de potencia puede reemplazarse por $(n+m)!$. $N_a(br)$ es una función Bessel de *segunda clase*, orden a . Si $a = n$, un entero, $N_n(br)$ se define como el límite del cociente anterior cuando $a \rightarrow n$.

La función $N_a(br)$ se comporta como $\ln r$ cerca de $r = 0$ (ver figura 8-3). Por consiguiente, no está involucrada en la solución ($C_6 = 0$) cuando se sabe que el potencial es finito en $r = 0$.

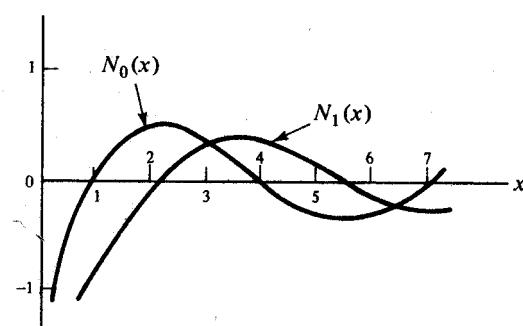
Para integral de orden n y argumento de x grande, las funciones Bessel se comportan como ondas sinusoidales amortiguadas:

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right) \quad N_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} \left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2} \right)$$

Ver figura 8-3



(a)



(b)

Fig. 8-3

8.9 SOLUCION DEL PRODUCTO ESFERICO

Los problemas en que V puede variar con r y θ pero no con ϕ , son de particular interés en coordenadas esféricas. Para una solución producto $V = R(r)\Theta(\theta)$, la ecuación de Laplace es

$$\left(\frac{r^2}{R} \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{1}{\Theta} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{\Theta \tan \theta} \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0$$

Como constante de separación se escoge $n(n + 1)$, donde n es un entero, por razones que se verán luego. Las dos ecuaciones separadas son:

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n + 1)R = 0$$

y

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{d\Theta}{d\theta} + n(n + 1)\Theta = 0$$

La ecuación en r tiene la solución

$$R = C_1 r^n + C_2 r^{-(n+1)}$$

La ecuación en θ tiene (a diferencia de la ecuación de Bessel) una solución polinomial de grado n en la variable $\xi = \cos \theta$, dada por

$$P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi^2 - 1)^n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

El polinomio $P_n(\xi)$ es el *polinomio de Legendre de orden n*. Hay una segunda solución independiente, $Q_n(\xi)$, que es logarítmicamente infinita en $\xi = \pm 1$ (ej. $\theta = 0, \pi$).

Problemas resueltos

- 8.1.** Como se muestra en la figura 8-4 (a), el potencial tiene el valor V_1 , sobre $1/n$ del círculo, y el valor 0 en el resto del círculo. Halle el potencial en el centro del círculo. Toda la región está libre de carga.

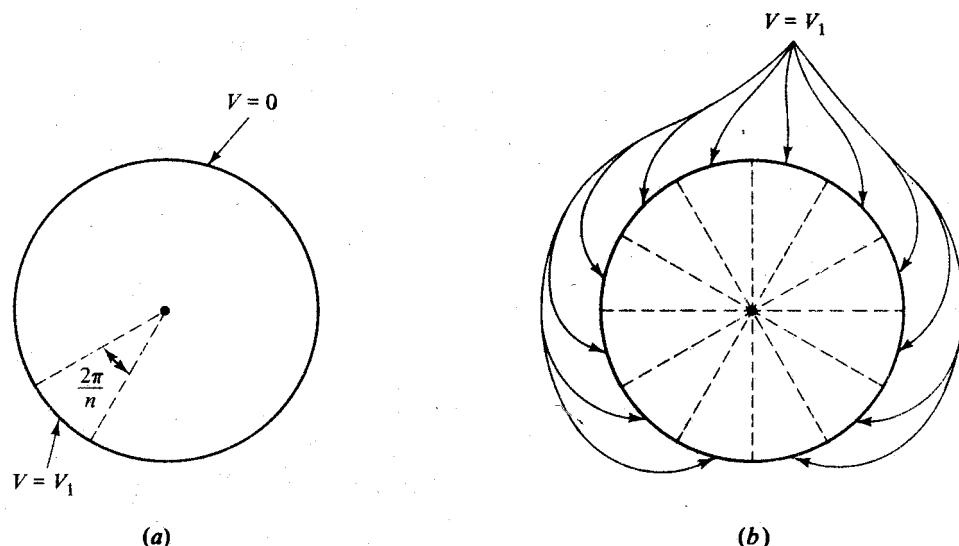


Fig. 8-4

Llámese V_c el potencial en el centro. La ecuación de Laplace permite superposición de soluciones. Si se superponen n problemas del tipo de la Figura 8-4 (a), el resultado es el problema que aparece en la figura 8-4 (b). Debido a la simetría rotacional, cada subproblema de la figura 8-4 (b) da el mismo potencial, V_c , en el centro del círculo. El potencial total en el centro es, por tanto, nV_c . Pero, está claro que la solución única para la figura 8-4(b) es $V = V_1$ en cualquier punto situado dentro del círculo, en particular en el centro. Así que,

$$nV_c = V_1 \quad \text{d} \quad V_c = \frac{V_1}{n}$$

8.2. Demuestre cómo el teorema del valor medio se deduce del resultado del problema 8.1.

Considérese primero el caso especial que aparece en la figura 8-5, donde el potencial asume n valores diferentes sobre n segmentos iguales de un círculo. Una superposición de las soluciones encontradas en el problema 8-1 da, para el potencial en el centro

$$V_c = \frac{V_1}{n} + \frac{V_2}{n} + \cdots + \frac{V_n}{n} = \frac{V_1 + V_2 + \cdots + V_n}{n}$$

que es el teorema del valor medio en este caso especial. Con $\Delta\phi = 2\pi/n$,

$$V_c = \frac{1}{2\pi} (V_1 \Delta\phi + V_2 \Delta\phi + \cdots + V_n \Delta\phi)$$

Ahora, haciendo $n \rightarrow \infty$,

$$V_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\phi) d\phi$$

que es el teorema general del valor medio para un círculo.

Exactamente el mismo razonamiento, pero con ángulos sólidos en lugar de ángulos planos, establece el teorema del valor medio para una esfera.

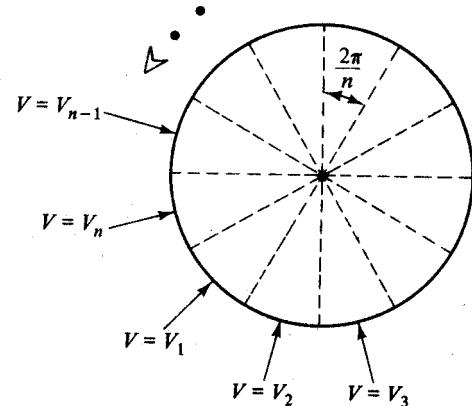


Fig. 8-5

8.3. Demuestre que dentro de una región libre de carga el potencial no puede alcanzar un valor máximo.

Supóngase que se alcanza un máximo en un punto interior P . Entonces, podrá centrarse una pequeña esfera en P , tal que el potencial V_c en P exceda el potencial en cada punto sobre la esfera. Entonces V_c excederá también el valor promedio del potencial sobre la esfera. Pero eso sería contradictorio con el teorema del valor medio.

8.4. Halle la función de potencial para la región comprendida entre los discos circulares paralelos de la figura 8-6. Desprecie el efecto de los bordes.

Como V es una función de r o ϕ , la ecuación de Laplace se reduce a

$$\frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

y la solución es $V = Az + B$.

Los discos circulares paralelos tienen una función potencial idéntica a la de cualquier par de planos paralelos. Para cualquier elección de ejes, la función potencial lineal podría ser $Ay + B$ o $Ax + B$.

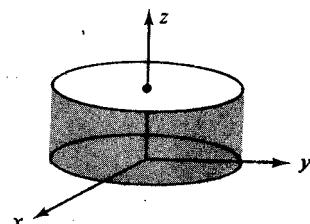


Fig. 8-6

8.5. Dos planos conductores paralelos en el espacio libre están en $y = 0$ e $y = 0.02$ m, y el voltaje de referencia cero está en $y = 0.01$. Si $D = 253 \text{ a}_0 \text{ nC/m}^2$ entre los conductores. Determine los voltajes del conductor.

Ejemplo 8.4. $V = Ay + B$. Entonces

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} = -\nabla V = -A\mathbf{a}_y$$

$$\frac{253 \times 10^{-9}}{8.854 \times 10^{-12}} \mathbf{a}_y = -A\mathbf{a}_y$$

lo que $A = -2.86 \times 10^4 \text{ V/m}$. Entonces,

$$0 = (-2.86 \times 10^4)(0.01) + B$$

$$B = 2.86 \times 10^2 \text{ V}$$

y

$$V = -2.86 \times 10^4 y + 2.86 \times 10^2 \text{ (V)}$$

Entonces, para $y = 0$, $V = 286 \text{ V}$ y para $y = 0.02$, $V = -286 \text{ V}$.

- 8.6.** Los discos conductores paralelos de la figura 8-7 están separados por 5 mm y contienen un dieléctrico para el cual $\epsilon_r = 2.2$. Determine las densidades de carga sobre los discos.

Como $V = AZ + B$,

$$A = \frac{\Delta V}{\Delta z} = \frac{250 - 100}{5 \times 10^{-3}} = 3 \times 10^4 \text{ V/m}$$

y

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -3 \times 10^4 \mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = -5.84 \times 10^{-7} \mathbf{a}_z \text{ C/m}^2$$

Como \mathbf{D} es constante entre los discos, y $\mathbf{D}_n = \rho_s \mathbf{a}_z$ en una superficie conductora,

$$\rho_s = \pm 5.84 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

+ en la placa superior; y - en la placa inferior.

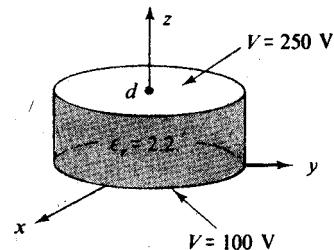


Fig. 8-7

- 8.7.** Halle la función de potencial y la intensidad del campo eléctrico para la región entre dos cilindros circulares rectos concéntricos, donde $V = 0$ en $r = 1 \text{ mm}$ y $V = 150 \text{ V}$ en $r = 20 \text{ mm}$. Desprecie el efecto de los bordes.

El potencial es constante con ϕ y z . Entonces la ecuación de Laplace se reduce a

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

Integrando una vez, $r \frac{dV}{dr} = A$

y otra vez, $V = A \ln r + B$. Aplicando las condiciones de frontera

$$0 = A \ln 0.001 + B \quad 150 = A \ln 0.020 + B$$

lo que da $A = 50.1$, $B = 345.9$. Entonces

$$V = 50.1 \ln r + 345.9 \text{ (V)}$$

y

$$\mathbf{E} = \frac{50.1}{r} (-\mathbf{a}_r) \text{ (V/m)}$$

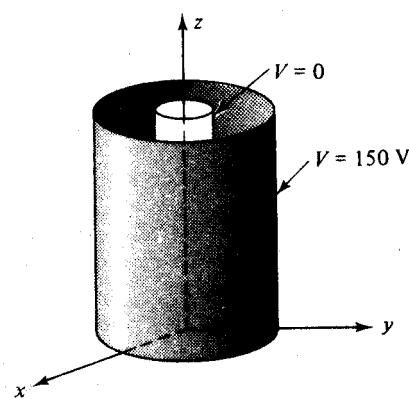


Fig. 8-8

- 8.8.** En coordenadas cilíndricas dos planos $\phi = \text{constante}$ están colocados a lo largo del eje z , como se muestra en la figura 8-9. Desprecie el efecto de los bordes y halle la expresión para \mathbf{E} entre los planos, asumiendo un potencial de 100 V para $\phi = \alpha$ y referencia cero en $\phi = 0$.

Este problema ya había sido resuelto en el problema 7.10. Aquí, la ecuación de Laplace se utilizará para obtener el mismo resultado.

Como el potencial es constante con r y z , la ecuación de Laplace es

$$\frac{1}{r} \frac{d^2V}{dr\phi^2} = 0$$

Integrando, $V = A\phi + B$. Aplicando condiciones de frontera,

$$0 = A(0) + B \quad 100 = A(\alpha) + B$$

$$\text{de lo que} \quad A = \frac{100}{\alpha} \quad B = 0$$

Así pues

$$V = 100 \frac{\phi}{\alpha} \text{ V}$$

$$\text{y} \quad \mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{r} \frac{d}{d\phi} \left(100 \frac{\phi}{\alpha} \right) \mathbf{a}_\phi = -\frac{100}{r\alpha} \mathbf{a}_\phi \quad (\text{V/m})$$

- 8.9.** En coordenadas esféricas, $V = 0$ para $r = 0.10 \text{ m}$ y $V = 100 \text{ V}$ para $r = 2.0 \text{ m}$. Suponiendo espacio vacío entre estas conchas esféricas concéntricas, halle \mathbf{E} y \mathbf{D} .

Como V no es función de θ o ϕ , la ecuación de Laplace se reduce a

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

Integrando da:

$$r^2 \frac{dV}{dr} = A$$

y una segunda integración da:

$$V = \frac{-A}{r} + B$$

Las condiciones límites dan:

$$0 = \frac{-A}{0.10} + B \quad \text{y} \quad 100 = \frac{-A}{2.00} + B$$

de donde $A = 10.53 \text{ V}\cdot\text{m}$, $B = 105.3 \text{ V}$. Entonces

$$V = \frac{-10.53}{r} + 105.3 \quad (\text{V})$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr} \mathbf{a}_r = -\frac{10.53}{r^2} \mathbf{a}_r \quad (\text{V/m})$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{-9.32 \times 10^{-11}}{r^2} \mathbf{a}_r \quad (\text{C/m}^2)$$

- 8.10.** En coordenadas esféricas, $V = -25 \text{ V}$ sobre un conductor en $r = 2 \text{ cm}$ y $V = 150 \text{ V}$ en $r = 35 \text{ cm}$. El espacio entre los conductores es un dieléctrico para el cual $\epsilon_r = 3.12$. Halle la densidad superficial de carga sobre los conductores.

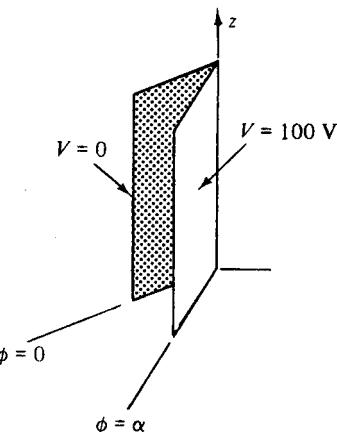


Fig. 8-9

Del problema 8.9,

$$V = \frac{-A}{r} + B$$

Las constantes se determinan de las condiciones de frontera

$$-25 = \frac{-A}{0.02} + B \quad 150 = \frac{-A}{0.35} + B$$

obteniéndose

$$V = \frac{-3.71}{r} + 160.61 \text{ (V)}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{d}{dr}\left(\frac{-3.71}{r} + 160.61\right) \mathbf{a}_r = \frac{-3.71}{r^2} \mathbf{a}_r \text{ (V/m)}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \frac{-0.103}{r^2} \mathbf{a}_r \text{ (nC/m}^2)$$

Sobre una superficie conductora, $D_n = \rho_s$.

$$\text{en } r = 0.02 \text{ m: } \rho_s = \frac{-0.103}{(0.02)^2} = -256 \text{ nC/m}^2$$

$$\text{en } r = 0.35 \text{ m: } \rho_s = \frac{+0.103}{(0.35)^2} = +0.837 \text{ nC/m}^2$$

- 8.11.** Resuelva la ecuación de Laplace para la región entre los conos coaxiales, como se muestra en la figura 8-10. Un potencial V_1 se asume en θ_1 y $V=0$ en θ_2 . Los vértices de los conos se aíslan en $r=0$.

El potencial es constante con r y ϕ . La ecuación de Laplace se reduce a

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) = 0$$

Integrando,

$$\sin \theta \left(\frac{dV}{d\theta} \right) = A$$

y

$$V = A \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) + B$$

Las constantes se encuentran de

$$V_1 = A \ln \left(\tan \frac{\theta_1}{2} \right) + B \quad 0 = A \ln \left(\tan \frac{\theta_2}{2} \right) + B$$

En consecuencia

$$V = V_1 \frac{\ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) - \ln \left(\tan \frac{\theta_2}{2} \right)}{\ln \left(\tan \frac{\theta_1}{2} \right) - \ln \left(\tan \frac{\theta_2}{2} \right)}$$

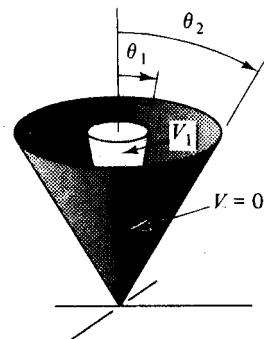


Fig. 8-10

- 8.12.** En el problema 8.11, sea $\theta_1 = 10^\circ$, $\theta_2 = 30^\circ$ y $V_1 = 100 \text{ V}$. Halle el voltaje en $\theta = 20^\circ$. ¿A qué ángulo θ el voltaje es 50 V?

Sustituyendo los valores en la expresión general del potencial se obtiene

$$V = -89.34 \left[\ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) - \ln 0.268 \right] = -89.34 \ln \left(\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{0.268} \right)$$

Entonces, en $\theta = 20^\circ$,

$$V = -89.34 \ln \left(\frac{\tan 10^\circ}{0.268} \right) = 37.40 \text{ V}$$

Para $V = 50 \text{ V}$,

$$50 = -89.34 \ln \left(\frac{\tan \theta/2}{0.268} \right)$$

Resolviendo $\theta = 17.41^\circ$.

- 8.13.** Halle la distribución de carga sobre los planos conductores en $\theta_2 = 90^\circ$. Ver figura 8-11.

El potencial se obtiene sustituyendo $\theta_2 = 90^\circ$, $\theta_1 = 10^\circ$ y $V_1 = 100 \text{ V}$ en la expresión del problema 8.11. Así pues

$$V = 100 \frac{\ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)}{\ln (\tan 5^\circ)}$$

Entonces

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{r} \frac{dV}{d\theta} \mathbf{a}_\theta = \frac{-100}{(r \sin \theta) \ln (\tan 5^\circ)} \mathbf{a}_\theta = \frac{41.05}{r \sin \theta} \mathbf{a}_\theta$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{3.63 \times 10^{-10}}{r \sin \theta} \mathbf{a}_\theta \quad (\text{C/m}^2)$$

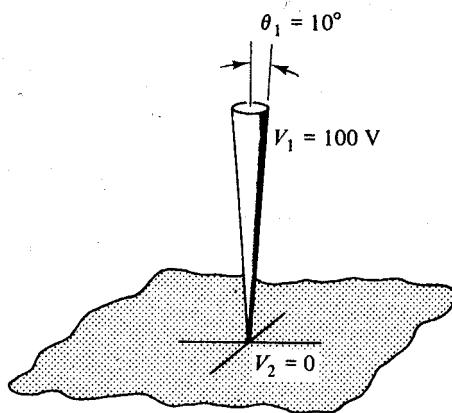


Fig. 8-11

Sobre el plano $\theta = 90^\circ$, $\sin \theta = 1$ la dirección de \mathbf{D} requiere que la carga superficial sobre el plano tenga signo negativo. Por consiguiente,

$$\rho_s = -\frac{3.63 \times 10^{-10}}{r} \quad (\text{C/m}^2)$$

- 8.14.** Halle la capacitancia entre los dos conos de la figura 8-12. Suponga espacio vacío.

Si se desprecia el efecto de los bordes, la función de potencia está dada por la expresión del problema 8.11 con $\theta_1 = 75^\circ$, $\theta_2 = 105^\circ$. Así pues:

$$\begin{aligned} V &= V_1 \frac{\ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) - \ln (\tan 52.5^\circ)}{\ln (\tan 37.5^\circ) - \ln (\tan 52.5^\circ)} \\ &= (-1.89 V_1) \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) + \text{const.} \end{aligned}$$

de lo cual se deduce que

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 \left(-\frac{1}{r} \frac{dV}{d\theta} \mathbf{a}_\theta \right) = \frac{1.89 \epsilon_0 V_1}{r \sin \theta} \mathbf{a}_\theta$$

La densidad de carga en la placa superior es, entonces,

$$\rho_s = D_n = \frac{1.89 \epsilon_0 V_1}{r \sin 75^\circ}$$

así que la carga total en la placa superior es

$$Q = \int \rho_s dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\csc 75^\circ} \frac{1.89 \epsilon_0 V_1}{r \sin 75^\circ} r \sin 75^\circ dr d\phi = 12.28 \epsilon_0 V_1$$

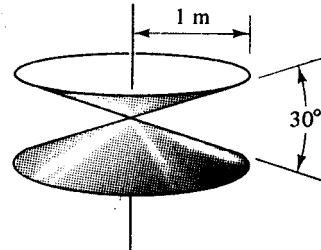


Fig. 8-12

- 8.15.** La región entre dos cilindros circulares rectos concéntricos contiene una densidad uniforme de carga ρ . Utilice la ecuación de Poisson para encontrar V .

Despreciando el efecto de los bordes, la ecuación de Poisson se reduce a

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho r}{\epsilon}$$

Integrando,

$$r \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho r^2}{2\epsilon} + A$$

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{\rho r}{2\epsilon} + \frac{A}{r}$$

$$V = -\frac{\rho r^2}{4\epsilon} + A \ln r + B$$

Obsérvese que los problemas estáticos que involucran distribuciones de carga en el espacio son ejercicios teóricos, ya que no existe ninguna forma de retener las cargas en su posición contra las fuerzas de Coulomb.

- 8.16.** La región

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{z}{z_0} < \frac{\pi}{2}$$

tiene una densidad de carga $\rho = 10^{-8} \cos(z/z_0)$ (C/m^3). En cualquier otro lugar la densidad es cero. Halle V y E de la ecuación de Poisson y compare con los resultados de la Ley de Gauss.

Como V no es una función de x o y , la ecuación de Poisson es:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} = -\frac{10^{-8} \cos(z/z_0)}{\epsilon}$$

Integrando dos veces,

$$V = \frac{10^{-8} z_0^2 \cos(z/z_0)}{\epsilon} + Az + B \quad (V)$$

y

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \left(\frac{10^{-8} z_0 \sin(z/z_0)}{\epsilon} - A \right) \mathbf{a}_z \quad (\text{V/m})$$

Pero, por simetría de la distribución de carga, el campo debe desaparecer sobre el plano $z=0$. Por consiguiente, $A=0$ y

$$\mathbf{E} = \frac{10^{-8} z_0 \sin(z/z_0)}{\epsilon} \mathbf{a}_z \quad (\text{V/m})$$

La figura 8-13 muestra una superficie gausiana especial centrada respecto de $z=0$. D sólo corta las superficies superior e inferior, cada una de área A . Más aún, como la distribución de carga es simétrica con respecto a $z=0$, D debe ser antisimétrica con relación a $z=0$, así que $D_{\text{superior}} = Da_z$, $D_{\text{inferior}} = D(-a_z)$.

$$D \int_{\text{superior}} dS + D \int_{\text{inferior}} dS = \int_{-z}^z \int \int 10^{-8} \cos(z/z_0) dx dy dz$$

$$2DA = 2z_0 A 10^{-8} \sin(z/z_0)$$

$$\therefore D = z_0 10^{-8} \sin(z/z_0) \quad \text{para } 0 < z < \pi z_0/2.$$

Entonces, para $-\pi z_0/2 < z < \pi z_0/2$,

$$\mathbf{D} = z_0 10^{-8} \sin(z/z_0) \mathbf{a}_z \quad (\text{C/m}^2)$$

y $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon$ coincide con el resultado de la ecuación de Poisson.

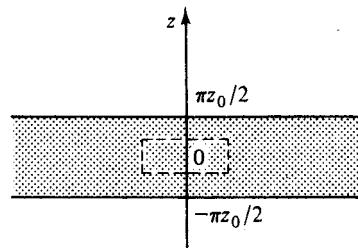


Fig. 8-13

- 8.17.** Un potencial en coordenadas cilíndricas es función de r y ϕ , pero no de z . Obtenga ecuaciones diferenciales separadas para R y Φ , donde $V = R(r)\Phi(\phi)$, y resuélvalas. La región es libre de carga.

La ecuación de Laplace viene a ser

$$\Phi \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{\Phi}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{R}{r^2} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0$$

ó

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2}$$

El lado izquierdo es una función de r solamente, mientras el lado derecho es una función de ϕ únicamente. Por tanto, ambos lados son iguales a una constante, a^2 ,

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} = a^2$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{a^2 R}{r^2} = 0$$

con solución $R = C_1 r^a + C_2 r^{-a}$. También,

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = a^2$$

con solución $\Phi = C_3 \cos a\phi + C_4 \sin a\phi$.

- 8.18.** Dada la función potencial $V = V_0(\operatorname{senh} ax)(\operatorname{sen} az)$ (ver sección 8.7), determine la forma y localización de las superficies sobre las cuales $V = 0$ y $V = V_0$. Suponga que $a > 0$.

Como el potencial no es una función de y , las superficies equipotenciales se extienden hasta $\pm \infty$ en la dirección y . Como $\operatorname{sen} az = 0$ para $z = n\pi/a$, donde $n = 0, 1, 2, \dots$, los planos $z = 0$ y $z = \pi/a$ están a un potencial cero. Como $\operatorname{senh} ax = 0$ para $x = 0$, el plano $x = 0$ también está a potencial cero. El equipotencial $V = 0$ se indica con la línea gruesa de la figura 8-14.

La superficie sobre la que $V = V_0$ tiene coordenadas x y z que satisfacen la ecuación

$$V_0 = V_0(\operatorname{senh} ax)(\operatorname{sen} az) \quad \text{ó} \quad \operatorname{senh} ax = \frac{1}{\operatorname{sen} az}$$

Cuando se sustituyen valores de z entre cero y π/a , las correspondientes coordenadas x se obtienen fácilmente. Por ejemplo:

az	1.57 1.57	1.02 2.12	0.67 2.47	0.49 2.65	0.28 2.86	0.10 3.04
ax	0.88	1.0	1.25	1.50	2.00	3.00

El equipotencial, que es simétrico a $z = \pi/2a$, se muestra en la figura 8-14. Como V es periódico en z , y en razón a que $V(-x, -z) = V(x, z)$, todo el plano xz puede llenarse siguiendo la franja mostrada en la figura 8-14.

- 8.19.** halle la función de potencial para la región que queda dentro de la cubeta rectangular mostrada en la figura 8-15.

El potencial es una función de x y z , de la forma (ver sección 8.7).

$$V = (C_1 \operatorname{cosh} az + C_2 \operatorname{senh} az)(C_3 \cos ax + C_4 \operatorname{sen} ax)$$

Las condiciones $V = 0$ en $x = 0$ y $z = 0$ requieren que las constantes C_1 y C_3 sean cero. Entonces, como $V = 0$ en $x = c$, $a = n\pi/c$, donde n es un entero. Reemplazando $C_2 C_4$ por C , la expresión

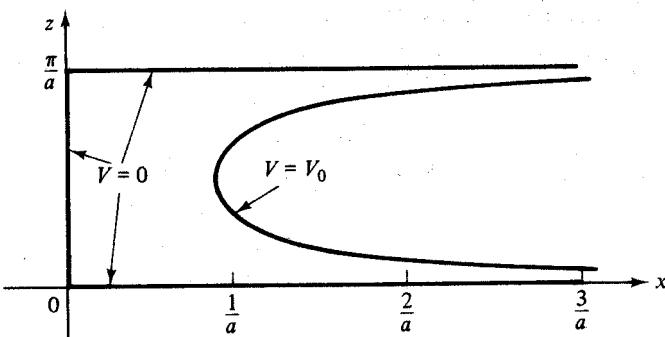


Fig. 8-14

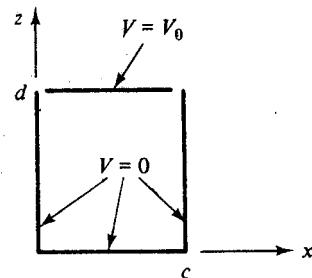


Fig. 8-15

viene a ser

$$V = C \operatorname{senh} \frac{n\pi z}{c} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c}$$

o más generalmente, por superposición,

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{senh} \frac{n\pi z}{c} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c}$$

Las condiciones límites de frontera requieren que

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \operatorname{senh} \frac{n\pi d}{c} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} \quad (0 < x < c)$$

Entonces las constantes $b_n \equiv C_n \operatorname{senh}(n\pi d/c)$ se determinan según los coeficientes de la *série sinusoidal de Fourier* para $f(x) \equiv V_0$ en el rango $0 < x < c$. La bien conocida fórmula para los coeficientes de Fourier,

$$b_n = \frac{2}{c} \int_0^c f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

da

$$b_n = \frac{2V_0}{c} \int_0^c \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} dx = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ 4V_0/n\pi & n \text{ impar} \end{cases}$$

La función potencial es entonces

$$V = \sum_{n \text{ impar}} \frac{4V_0}{n\pi} \frac{\operatorname{senh}(n\pi z/c)}{\operatorname{senh}(n\pi d/c)} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c}$$

para $0 < x < c$, $0 < z < d$.

8.20. Identifique la solución del producto esférico

$$V = \frac{C_2}{r^2} P_1(\cos \theta) = \frac{C_2 \cos \theta}{r^2}$$

(Sección 8.9, con $C_1 = 0$, $n = 1$) con un dipolo puntual en el origen.

La figura 8-16 muestra un dipolo finito a lo largo del eje z , que consta de una carga puntual $+Q$ en $z = +d/2$ y una carga puntual $-Q$ en $z = -d/2$. La cantidad $p = Qd$ es el momento del dipolo (sección 7.1). El potencial en el punto P es

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 d} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

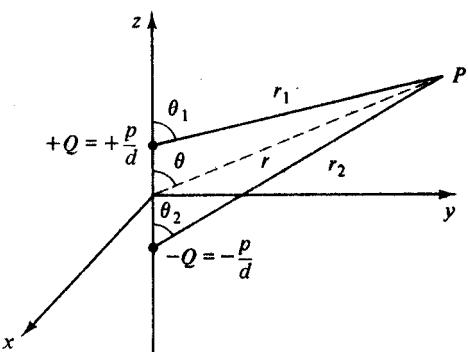


Fig. 8-16

Un dipolo puntual en el origen se obtiene en el límite cuando $d \rightarrow 0$. Para un d pequeño,

$$r_2 - r_1 \approx d \cos \theta_2 \approx d \cos \theta \quad \text{y} \quad r_1 r_2 \approx r^2$$

Por lo tanto, en la frontera,

$$V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

que es la solución del producto esférico con $C_2 = p/4\pi\epsilon_0$.

En forma similar, el polinomio de Legendre de mayor orden corresponde a cuadrupolos puntuales, octupolos, etc.

Problemas supplementarios

- 8.21.** En coordenadas cartesianas un potencial es función de x solamente. En $x = -2.0$ cm, $V = 25.0$ V y $E = 1.5 \times 10^3 (-\hat{a}_x)$ V/m en toda la región. Halle V en $x = 3.0$ cm. *Resp.* 100 V
- 8.22.** En coordenadas cartesianas un plano en $z = 3.0$ cm es el voltaje de referencia. Halle el voltaje y la densidad de carga en el conductor $z = 0$ si $E = 6.67 \times 10^3 \hat{a}_z$ V/m para $z > 0$ y la región contiene un dieléctrico para el cual $\epsilon_r = 4.5$. *Resp.* 200 V, 266 nC/m^2
- 8.23.** En coordenadas cilíndricas, $V = 75.0$ V en $r = 5$ mm y $V = 0$ en $r = 60$ mm. Halle el voltaje en $r = 130$ mm si el potencial depende sólo de r . *Resp.* -23.34 V
- 8.24.** Cilindros circulares, rectos, concéntricos en el espacio vacío en $r = 5$ mm y $r = 25$ mm tienen voltaje de 0 y V_0 respectivamente. Si $E = -8.28 \times 10^3 \hat{a}_r$ V/m en $r = 15$ mm, halle V_0 y la densidad de carga en el conductor externo. *Resp.* 200 V, $+44 \text{ nC/m}^2$
- 8.25.** Para cilindros conductores concéntricos, $V = 75$ V en $r = 1$ mm y $V = 0$ en $r = 20$ mm. Halle D en la región entre los cilindros, donde $\epsilon_r = 3.6$. *Resp.* $(798/r) \hat{a}_r$ (pC/m^2)
- 8.26.** Planos conductores en $\phi = 10^\circ$ y $\phi = 0^\circ$ en coordenadas cilíndricas tienen voltajes de 75 V y cero respectivamente. Obtenga D en la región entre planos, que contiene un material con $\epsilon_r = 1.65$. *Resp.* $(-6.28/r) \hat{a}_r$ (nC/m^2)
- 8.27.** Dos planos conductores cuadrados con 50 cm de lado están separados por 2.0 cm a lo largo de un lado y 2.5 cm a lo largo del otro (figura 8-17). Suponga una diferencia de voltaje y compare la densidad de carga en el centro de un plano, con la que existiría si la separación fuese uniforme de 2.0 cm. *Resp.* 0.89
- 8.28.** El voltaje de referencia está en $r = 15$ mm en coordenadas esféricas y el voltaje es V_0 en $r = 200$ mm. Dado $E = -334.7 \hat{a}_r$ V/m en $r = 110$ mm, halle V_0 . El potencial es función de r solamente. *Resp.* 250 V
- 8.29.** En coordenadas esféricicas, $V = 865$ V en $r = 50$ cm y $E = 748.2 \hat{a}_r$ V/m en $r = 85$ cm. Determine la localización del voltaje de referencia si el potencial depende sólo de r . *Resp.* $r = 250$ cm
- 8.30.** Con referencia cero en el infinito y $V = 45.0$ V en $r = 0.22$ m en coordenadas esféricas, un dieléctrico de $\epsilon_r = 1.72$ ocupa la región $0.22 < r < 1.00$ m y el espacio libre ocupa $r > 1.00$ m. Determine D en $r = 1.00 \pm 0$ m. *Resp.* 8.55 V/m, 14.7 V/m

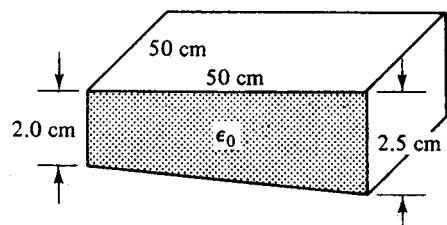


Fig. 8-17

- 8.31.** En la figura 8-18, el cono en $\theta = 45^\circ$ tiene un voltaje V respecto de la referencia en $\theta = 30^\circ$. En $r = 0.25$ m y $\theta = 30^\circ$, $E = -2.30 \times 10^3 \mathbf{a}_\theta$ V/m. Determine la diferencia de voltaje V . *Resp.* 125.5 V

- 8.32.** En el problema 8-31 determine las densidades superficiales de carga sobre los conos conductores en 30° y 45° , $\epsilon_r = 2.45$ entre los conos.

$$\text{Resp. } \frac{-12.5}{r} (\text{nC/m}^2), \frac{8.84}{r} (\text{nC/m}^2)$$

- 8.33.** Halle E en la región que queda entre los conos que aparecen en la figura 8-19.

$$\text{Resp. } \frac{0.288 V_1}{r \sin \theta} (\text{V/m})$$

- 8.34.** En coordenadas cilíndricas, $\rho = 111/r$ (pC/m³). Dado que $V=0$ en $r=1.0$ m y $V=50$ V en $r=3.0$ m, debido a esta configuración de carga, halle la expresión para E .

$$\text{Resp. } \left(12.5 - \frac{68.3}{r} \right) \mathbf{a}_r (\text{V/m})$$

- 8.35.** Determine E en coordenadas esféricas, a partir de la ecuación de Poisson, suponiendo una densidad uniforme de carga

$$\text{Resp. } \left(\frac{\rho r}{3\epsilon} - \frac{A}{r^2} \right) \mathbf{a}_r$$

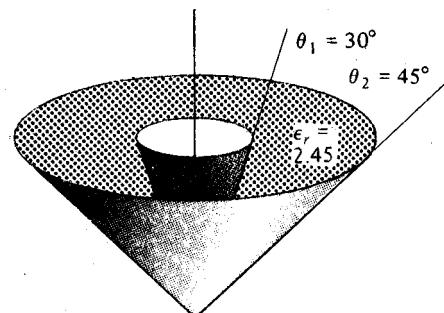


Fig. 8-18

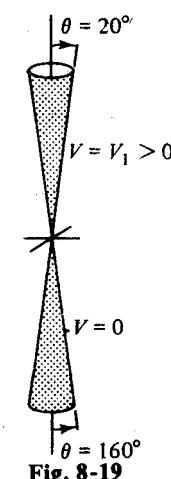


Fig. 8-19

- 8.36.** Particularice la solución encontrada en el problema 8.35 al caso de una esfera uniformemente cargada. *Resp.* Ver problema 2.56.

- 8.37.** Suponga que un potencial en coordenadas cilíndricas es una función de r y z , pero no de ϕ , $V = R(r)Z(z)$. Escriba la ecuación de Laplace y obtenga las ecuaciones diferenciales separadas en r y z . Demuestre que las soluciones en r son funciones Bessel y que las soluciones en z tienen la forma de funciones exponenciales o hiperbólicas.

- 8.38.** Verifique que los primeros cinco polinomios de Legendre son:

$$P_0(\cos \theta) = 1$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$$

$$P_4(\cos \theta) = \frac{1}{8}(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)$$

y haga una gráfica con $\xi = \cos \theta$.

Resp. Ver figura 8-20.

- 8.39.** Obtenga E para el problema 8.18 y trace algunos valores en la figura 8-14. Observe la ortogonalidad de E y las superficies equipotenciales. *Resp.* $E = -V_0 a[\cosh ax](\sin az)\mathbf{a}_x + (\sinh az)(\cos az)\mathbf{a}_z]$

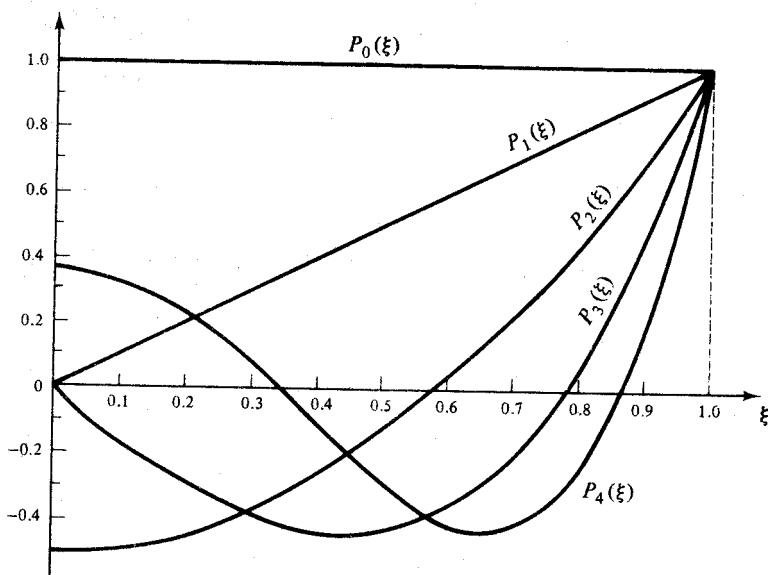


Fig. 8-20

- 8.40.** Dado $V = V_0(\cosh ax)(\sin ay)$, donde $a > 0$, determine la forma y localización de las superficies sobre las cuales $V = 0$ y $V = V_0$. Haga un trazo similar a la figura 8-14. *Resp.* Ver figura 8-21.

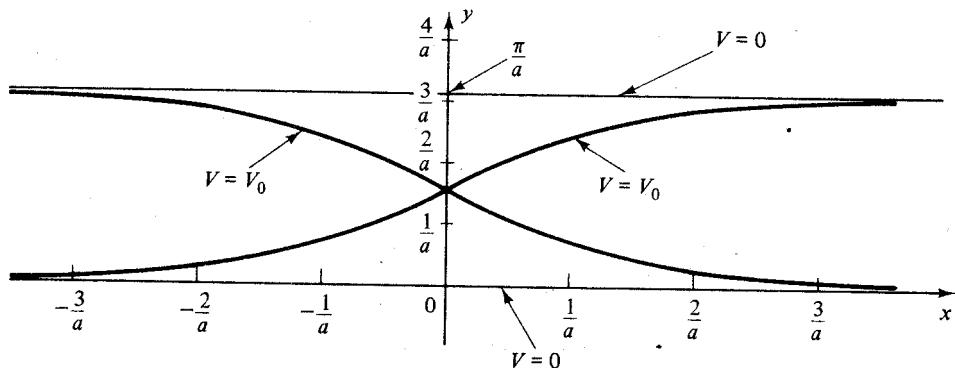


Fig. 8-21

- 8.41.** De la función potencial del problema 8.40, obtenga \mathbf{E} e indique algunos valores sobre el trazo de las superficies equipotenciales, figura 8-21.

Resp. $\mathbf{E} = -V_0 a [(\operatorname{senh} ax)(\operatorname{sen} ay)\mathbf{a}_x + (\cosh ax)(\cos ay)\mathbf{a}_y]$

- 8.42.** Utilice una superposición de los productos solución encontrados en el problema 8.17 para obtener la función potencial para la franja semicircular que aparece en la figura 8-22.

Resp. $V = \sum_{n \text{ variable}} \frac{4V_0}{n\pi} \frac{r^n - (a^2/r)^n}{b^n - (a^2/b)^n} \operatorname{sen} n\phi$

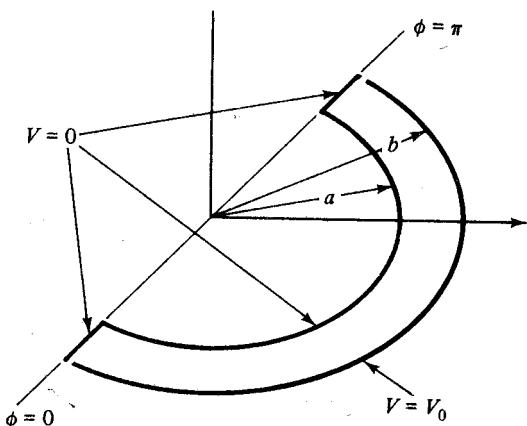


Fig. 8-22

Capítulo 9

Ley de Ampère y campo magnético

9.1 INTRODUCCIÓN

Un campo magnético estático puede originarse por una corriente constante o por un imán permanente. Este capítulo trata los campos magnéticos de corrientes constantes. Los campos magnéticos variables con el tiempo, que coexisten con los campos eléctricos variables con el tiempo, se examinan en los capítulos 12 y 13.

9.2 LEY DE BIOT-SAVART

Un diferencial de *intensidad de campo magnético*, $d\mathbf{H}$, se produce por un elemento diferencial de corriente $I dl$. El campo varía inversamente con el cuadrado de la distancia, es independiente del medio que le rodea y tiene la dirección dada por el producto cruz de $I dl$ y \mathbf{a}_R . Esta relación se conoce como *ley de Biot-Savart*:

$$d\mathbf{H} = \frac{I dl \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2} \quad (\text{A/m})$$

\mathbf{R} está dirigido desde el elemento de corriente hasta el punto en que $d\mathbf{H}$ se determina, tal como se ve en la figura 9-1.

Los elementos de corriente no tienen existencia separada. Todos los elementos que conforman el filamento de corriente contribuyen a \mathbf{H} y deben incluirse. La sumatoria conduce a la forma integral de la ley de Biot-Savart:

$$\mathbf{H} = \oint \frac{I dl \times \mathbf{a}_R}{4\pi R^2}$$

La integral lineal cerrada requiere simplemente que *todos* los elementos de corriente se incluyan para obtener \mathbf{H} completo. (El contorno puede cerrarse en ∞).

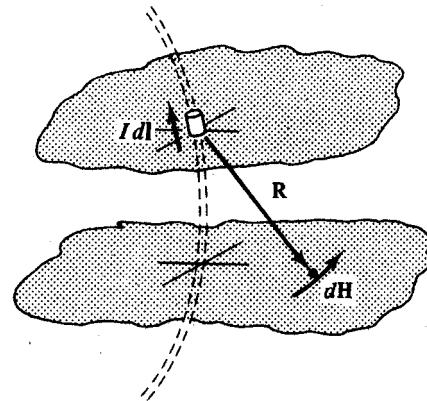


Fig. 9-1

EJEMPLO 1: Un filamento de corriente, recto, de longitud infinita, a lo largo del eje z en coordenadas cilíndricas, se muestra en la figura 9-2. Se selecciona, sin perder generalidad, un punto en el plano $z = 0$. En forma diferencial,

$$d\mathbf{H} = \frac{I dz \mathbf{a}_z \times (r\mathbf{a}_\phi - z\mathbf{a}_z)}{4\pi(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{I dz r \mathbf{a}_\phi}{4\pi(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

La variable de integración es z . Como \mathbf{a}_ϕ no cambia con z , puede removérse del integrando antes de la operación.

$$\mathbf{H} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{I r dz}{4\pi(r^2 + z^2)^{3/2}} \right] \mathbf{a}_\phi = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi$$

Este importante resultado muestra que \mathbf{H} es inversamente proporcional a la distancia radial. Se ve que la dirección está de acuerdo con la "regla de la mano derecha" porque los dedos de la mano derecha apuntan en dirección del campo cuando el conductor se toma de tal manera que el dedo pulgar derecho apunte en dirección de la corriente.

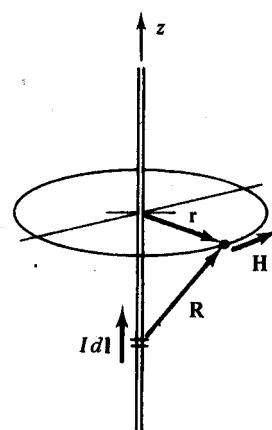


Fig. 9-2

Los campos magnéticos de corrientes laminares o corrientes volumétricas también están dados por la forma integral de la ley de Biot-Savart, reemplazándose $I dl$ por $K dS$ o $J dv$ respectivamente, y con la integración extendida a toda la lámina o volumen. Un caso particular de importancia es el de la lámina plana infinita de densidad constante K . Como se muestra en el problema 9.3, el campo en este caso es constante:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} K \times \mathbf{a}_n$$

9.3 LEY DE AMPÈRE

La integral lineal de la componente tangencial de \mathbf{H} alrededor de una trayectoria cerrada es igual a la corriente encerrada por la trayectoria.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}}$$

Esta es la *ley de Ampère*.

A primera vista, podría pensarse que la ley de Ampère se utiliza para determinar la corriente I por una integración. Sin embargo, la corriente es usualmente conocida y la ley más bien provee un método para hallar \mathbf{H} . Esto es similar al uso de la ley de Gauss para hallar \mathbf{D} dada la distribución de carga.

Para utilizar la ley de Ampère para determinar \mathbf{H} debe haber un grado considerable de simetría en el problema. Deben cumplirse dos condiciones:

1. En cada punto de la trayectoria cerrada \mathbf{H} es o tangencial o normal a la trayectoria.
2. H tiene el mismo valor en todos los puntos de la trayectoria donde \mathbf{H} es tangencial.

Es evidente que la ley de Biot-Savart ayuda a seleccionar una trayectoria apropiada.

EJEMPLO 2: Utilice la ley de Ampère para obtener \mathbf{H} producido por un filamento recto de corriente e infinitamente largo.

La ley de Biot-Savart muestra que en cada punto del círculo de la figura 9-2 \mathbf{H} es tangencial y de la misma magnitud. Entonces

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H(2\pi r) = I$$

así que

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi$$

9.4 ROTACIONAL (ROTOR)

El *rotacional* de un campo vectorial \mathbf{A} es otro campo vectorial. El punto P de la figura 9-3 yace en un área plana ΔS limitada por una curva cerrada C . En la integración que define el rotacional, C se recorre de tal manera que el área encerrada está a la izquierda. La normal unitaria \mathbf{a}_n , determinada por la regla de la mano derecha, es la que aparece en la figura. Entonces la *componente* del rotacional de \mathbf{A} en la dirección \mathbf{a}_n se define como

$$(\text{rotacional } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_n \equiv \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}$$

En los sistemas de coordenadas, el rotacional \mathbf{A} queda especificado completamente por sus componentes a lo largo de los tres vectores unitarios. Por ejemplo, la componente x en coordenadas cartesianas se define tomando como contorno C un cuadrado en el plano $x = \text{constante}$ a través de P , tal como se muestra en la figura 9-4.

$$(\text{rotacional } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_x = \lim_{\Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta y \Delta z}$$

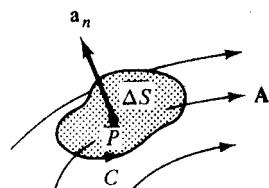


Fig. 9-3

Si $\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$ en la esquina ΔS más cercana al origen (punto I), entonces

$$\begin{aligned}\oint &= \int_1^2 + \int_2^3 + \int_3^4 + \int_4^1 \\ &= A_y \Delta y + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y} \Delta y \right) \Delta z \\ &\quad + \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z} \Delta z \right) (-\Delta y) + A_z (-\Delta z) \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z \\ y \quad (\text{rotacional } \mathbf{A}) &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\end{aligned}$$

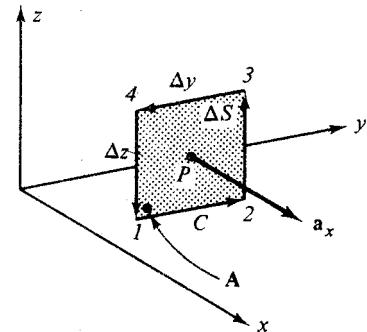


Fig. 94

Las componentes y y z pueden determinarse en forma similar. Combinando las tres componentes,

$$\text{rotacional } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z \quad (\text{cartesiano})$$

Puede escribirse un determinante de tercer orden cuyo desarrollo sea el rotacional cartesiano de \mathbf{A} .

$$\text{rotacional } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Los elementos de la segunda fila son los componentes del operador nabla. Esto sugiere (ver sección 1.2) que el rotacional \mathbf{A} se puede escribir como $\nabla \times \mathbf{A}$. Como con otras expresiones del análisis vectorial, esta conveniente notación se usa para rotacional \mathbf{A} en otros sistemas coordenados aunque ∇ sólo está definido en el cartesiano.

Las expresiones para el rotacional \mathbf{A} en coordenadas cilíndricas y esféricas pueden derivarse en la misma forma antes mencionada, aunque con más dificultad.

$$\text{rotacional } \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{a}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{a}_\phi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_z \quad (\text{cilíndrico})$$

$$\text{rotacional } \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(A_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} \right] \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi \quad (\text{esférico})$$

Dos propiedades del operador rotacional frecuentemente útiles son:

- (1) *la divergencia de un rotacional es cero.* Esto es,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

para cualquier campo vectorial \mathbf{A} .

- (2) *el rotacional de un gradiente es cero.* Esto es,

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

para cualquier función escalar de posición f (ver problema 9.22).

Bajo condiciones estáticas, $\mathbf{E} = -\nabla V$, y así, de (2),

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

9.5 DENSIDAD DE CORRIENTE J Y $\nabla \times \mathbf{H}$

La componente x de $\nabla \times \mathbf{H}$ se determina por $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$, donde la trayectoria yace en un plano normal al eje x . La ley de Ampère establece que esta integral es igual a la corriente encerrada. La dirección es \mathbf{a}_x , así que la corriente puede llamarse I_x . Entonces,

$$(\text{rotacional } \mathbf{H}) \cdot \mathbf{a}_x = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{I_x}{\Delta S} = J_x$$

la componente x de la densidad de corriente \mathbf{J} . En igual forma se procede para las direcciones y y z . Por consiguiente,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

Este importante resultado es una de las ecuaciones de Maxwell para campos estáticos. Si \mathbf{H} se conoce a través de una región particular, entonces $\nabla \times \mathbf{H}$ dará \mathbf{J} para esa región. Ver problema 9.15.

9.6 DENSIDAD DE FLUJO MAGNETICO B

Como \mathbf{D} , la intensidad del campo magnético \mathbf{H} depende sólo de las cargas (en movimiento) y es independiente del medio. El campo de fuerza asociado con \mathbf{H} es la *densidad de flujo magnético* \mathbf{B} , que está dada por

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

donde $\mu = \mu_0 \mu_r$ es la permeabilidad del medio. La unidad de \mathbf{B} es el *tesla*,

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

La permeabilidad del espacio vacío μ_0 tiene un valor numérico de $4\pi \times 10^{-7}$ con unidades de *henrys por metro*, H/m ; μ_r , la permeabilidad relativa del medio, es un número puro muy cercano a la unidad, excepto para un pequeño grupo de materiales *ferromagnéticos* que serán tratados en el capítulo 11.

El flujo magnético, Φ , a través de una superficie se define como

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

El signo de Φ puede ser positivo o negativo según como se escoja la superficie normal en $d\mathbf{S}$. La unidad del flujo magnético es el *weber*, Wb . Las diferentes unidades magnéticas están relacionadas por:

$$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2 \quad 1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A}$$

EJEMPLO 3: Encuentre el flujo que cruza la porción del plano $\phi = \pi/4$ definido por $0.01 < r < 0.05 \text{ m}$ y $0 < z < 2 \text{ m}$ (ver figura 9-5). Un filamento de corriente de 2.50 A a lo largo del eje z está en la dirección \mathbf{a}_z .

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi$$

$$d\mathbf{S} = dr dz \mathbf{a}_\phi$$

$$\Phi = \int_0^2 \int_{0.01}^{0.05} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi \cdot dr dz \mathbf{a}_\phi$$

$$= \frac{2\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{0.05}{0.01}$$

$$= 1.61 \times 10^{-6} \text{ Wb} \quad \text{o} \quad 1.61 \mu\text{Wb}$$

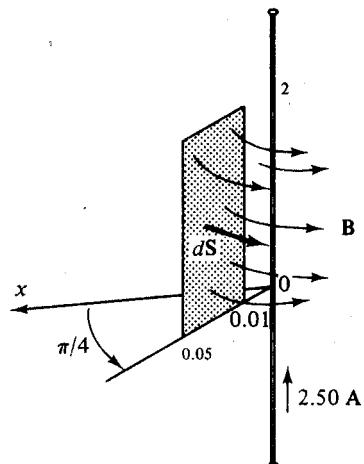


Fig. 9-5

Obsérvese que las líneas de flujo magnético Φ son curvas cerradas, sin punto de comienzo ni de terminación. Esto contrasta con el flujo eléctrico Ψ , que se origina en cargas positivas y termina en cargas negativas. En la figura 9-6 todo el flujo magnético Φ que entra en la superficie cerrada debe abandonarla. Así pues, los campos \mathbf{B} no tienen fuentes o sumideros, lo que se expresa matemáticamente por

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

(ver sección 4.1).

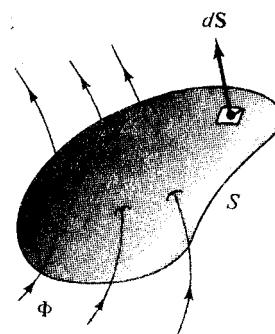


Fig. 9-6

9.7 POTENCIAL VECTORIAL MAGNETICO A

La intensidad del campo eléctrico \mathbf{E} se obtuvo primero a partir de configuraciones de carga conocidas. Luego se desarrolló el potencial V y se encontró que \mathbf{E} podría obtenerse como el gradiente negativo de V , es decir, $\mathbf{E} = -\nabla V$. La ecuación de Laplace proporcionó un método de obtener V a partir de potenciales conocidos sobre las superficies de los conductores. En forma similar, un *potencial vectorial magnético*, \mathbf{A} , definido de tal manera que

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

sirve como cantidad intermedia de la cual puede calcularse \mathbf{B} y, por consiguiente, \mathbf{H} . Obsérvese que la definición de \mathbf{A} es consistente con el requerimiento de que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Las unidades de \mathbf{A} son Wb/m o $\text{T}\cdot\text{m}$.

Si se impone la condición adicional

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

entonces, el potencial vectorial magnético puede determinarse a partir de las corrientes conocidas de la región de interés. Para las tres configuraciones estándar de corriente las expresiones son las siguientes:

$$\text{filamento de corriente } \mathbf{A} = \int \frac{\mu I d\ell}{4\pi R}$$

$$\text{corriente de lámina: } \mathbf{A} = \int_S \frac{\mu K dS}{4\pi R}$$

$$\text{corriente de volumen: } \mathbf{A} = \int_v \frac{\mu J dv}{4\pi R}$$

Aquí, R es la distancia que hay desde el elemento de corriente hasta el punto en el que el potencial vectorial magnético se calcula. Como la integral análoga para el potencial eléctrico (ver sección 5.4), las expresiones anteriores para \mathbf{A} presuponen un nivel cero en el infinito. No pueden aplicarse si las mismas distribuciones de corriente se extienden a infinito.

EJEMPLO 4: Halle el potencial vectorial magnético para el filamento de corriente, recto e infinito, en el espacio vacío.

En la figura 9-7 el filamento de corriente se halla a lo largo del eje z y el punto de observación es (x, y, z) . El elemento particular de corriente

$$I d\ell = I d\ell \mathbf{a}_z$$

en $\ell = 0$ se muestra, donde ℓ es la variable que se desplaza a lo largo del eje z . Es claro que la integral

$$\mathbf{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi R} \mathbf{a}_z$$

no existe, ya que, cuando ℓ es grande, $R \approx \ell$. Este es el caso de una distribución de corriente que se extiende hasta infinito.

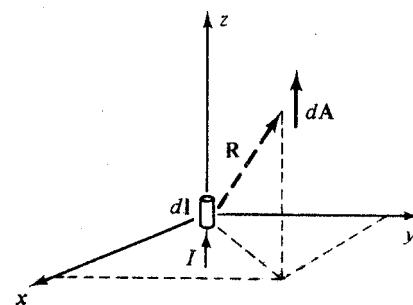


Fig. 9-7

Es posible, sin embargo, considerar el potencial vectorial *diferencial*

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi R} \mathbf{a}_z$$

y obtener de él un *diferencial* de \mathbf{B} . Así pues, para el elemento particular de corriente en $\ell = 0$,

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \mathbf{a}_z$$

$$y \quad d\mathbf{B} = \nabla \times d\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi} \left[\frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{a}_x + \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{a}_y \right]$$

Este resultado concuerda con el de $d\mathbf{H} = (1/\mu_0) d\mathbf{B}$ dado por la ley de Biot-Savart.

Para una forma de definir \mathbf{A} para el filamento infinito de corriente, ver problema 9.19.

9.8 TEOREMA DE STOKES

Considérese una superficie S abierta cuyo límite sea una curva cerrada C . El *teorema de Stokes* establece que la integral de la componente tangencial de un campo vectorial \mathbf{F} alrededor de C es igual a la componente normal del rotacional \mathbf{F} en S :

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

Si se escoge \mathbf{F} de tal manera que sea el potencial vectorial magnético \mathbf{A} , el teorema de Stokes da

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi$$

Problemas resueltos

- 9.1. Halle \mathbf{H} en el centro de una varilla cuadrada de corriente de lado L .

Escójase un sistema de coordenadas cartesianas de tal manera que el lazo esté localizado como se muestra en la figura 9-8. Por simetría, cada medio lado contribuye la misma cantidad a \mathbf{H} en el centro. Para el medio lado $0 \leq x \leq L/2, y = -L/2$, la ley de Biot-Savart da para el campo en el origen

$$d\mathbf{H} = \frac{(I dx \mathbf{a}_x) \times [-x\mathbf{a}_x + (L/2)\mathbf{a}_y]}{4\pi[x^2 + (L/2)^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{I dx(L/2)\mathbf{a}_z}{4\pi[x^2 + (L/2)^2]^{3/2}}$$

En consecuencia, el campo total en el origen es

$$\mathbf{H} = 8 \int_0^{L/2} \frac{I dx(L/2)\mathbf{a}_z}{4\pi[x^2 + (L/2)^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}I}{\pi L} \mathbf{a}_z = \frac{2\sqrt{2}I}{\pi L} \mathbf{a}_n$$

donde \mathbf{a}_n es la normal unitaria al plano de la varilla dada por la regla de la mano derecha.

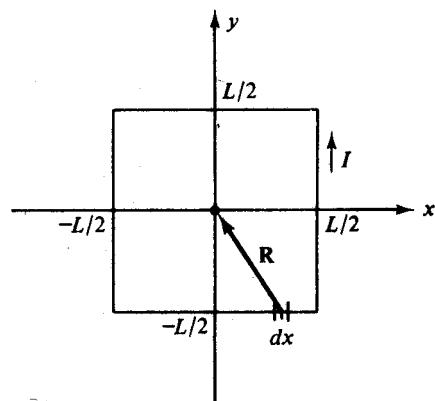


Fig. 9-8

- 9.2. Un filamento de corriente de 5.0 A en dirección \mathbf{a}_y , es paralelo al eje y en $x = 2 \text{ m}$, $z = -2 \text{ m}$. Halle \mathbf{H} en el origen.

La expresión para \mathbf{H} producido por un filamento recto de corriente se aplica,

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi$$

donde $r = 2\sqrt{2}$ y (utilizando la regla de la mano derecha)

$$\mathbf{a}_\phi = \frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}}$$

Así pues

$$\mathbf{H} = \frac{5.0}{2\pi(2\sqrt{2})} \left(\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}} \right) = (0.281) \left(\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}} \right) \text{ A/m}$$

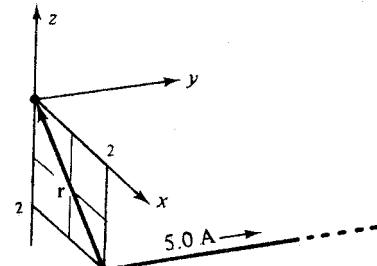


Fig. 9-9

- 9.3. Determine una expresión para \mathbf{H} producido por una lámina de corriente plana e infinita de densidad uniforme \mathbf{K} .

La ley de Biot-Savart y las consideraciones debidas a la simetría muestran que \mathbf{H} sólo tiene una componente x , que es independiente de x y y , si $\mathbf{K} = K\mathbf{a}_y$ (ver figura 9-10). Aplicando la ley de Ampère al contorno cuadrado 12341, y aprovechando el hecho de que \mathbf{H} debe ser antisimétrico en z ,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (H)(2a) + 0 + (H)(2a) + 0 = (K)(2a) \quad \text{o} \quad H = \frac{K}{2}$$

Entonces, para todo $z > 0$, $\mathbf{H} = (K/2)\mathbf{a}_x$. Más generalmente, para una orientación arbitraria de la lámina de corriente,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{K} \times \mathbf{a}_n$$

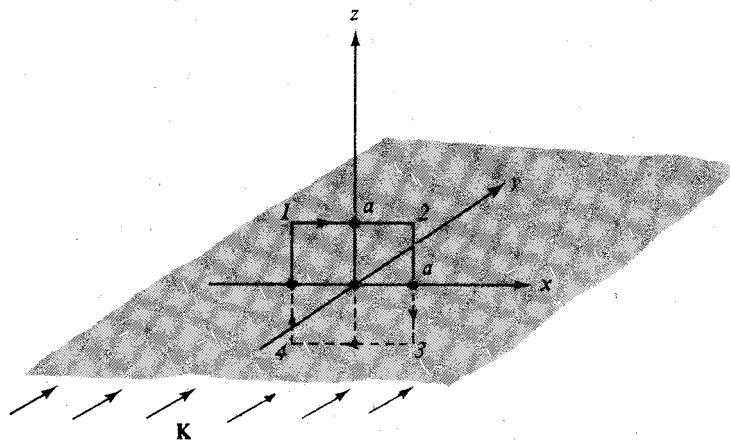


Fig. 9-10

- 9.4. Una lámina de corriente, $\mathbf{K} = 10\mathbf{a}_z \text{ A/m}$, yace en el plano $x = 5 \text{ m}$ y una segunda lámina, $\mathbf{K} = -10\mathbf{a}_z \text{ A/m}$, está en $x = -5 \text{ m}$. Halle \mathbf{H} en todos los puntos.

En la figura 9-11 se hace patente que para los puntos entre las láminas, $\mathbf{K} \times \mathbf{a}_n$ produce $-K\mathbf{a}_y$ para cada lámina. Entonces, para $-5 < x < 5$, $\mathbf{H} = 10(-\mathbf{a}_y) \text{ A/m}$. En toda otra parte $\mathbf{H} = 0$.

- 9.5. Un conductor cilíndrico delgado de radio a , longitud infinita, porta una corriente I . Halle \mathbf{H} en todos los puntos utilizando la ley de Ampère.

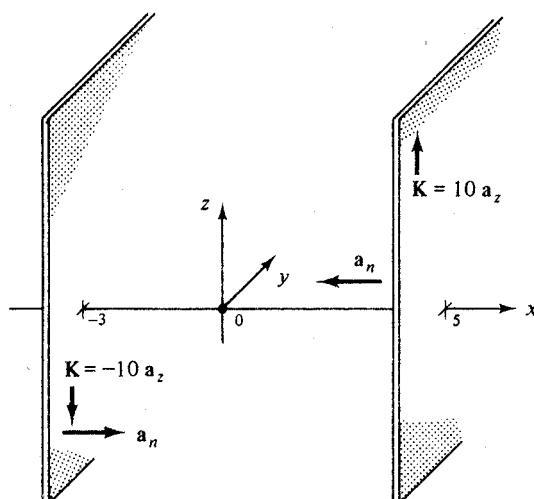


Fig. 9-11

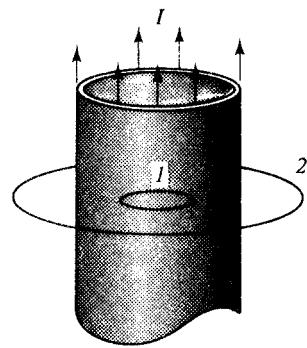


Fig. 9-12

La ley de Biot-Savart establece que \mathbf{H} sólo tiene una componente ϕ . Más aún, H_ϕ es una función de r solamente. Las trayectorias apropiadas para la ley de Ampère son los círculos concéntricos. Para la trayectoria 1 que se muestra en la figura 9-12.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H_\phi = I_{\text{enc}} = 0$$

y para la trayectoria 2,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H_\phi = I$$

Entonces, para los puntos dentro de la concha cilíndrica de conducción, $\mathbf{H} = 0$, y para los puntos externos, $\mathbf{H} = (I/2\pi r)\mathbf{a}_\phi$, resultaría el mismo campo de una corriente de filamento I a lo largo de los ejes.

- 9.6.** Determine \mathbf{H} para un conductor cilíndrico sólido de radio a , estando la corriente distribuida uniformemente sobre la sección transversal.

Aplicando la ley de Ampère al contorno 1 en la figura 9-13,

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{enc}}$$

$$H(2\pi r) = I \left(\frac{\pi r^2}{\pi a^2} \right)$$

$$\mathbf{H} = \frac{Ir}{2\pi a^2} \mathbf{a}_\phi$$

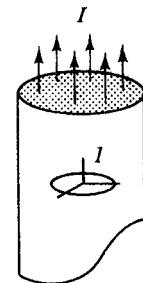


Fig. 9-13

Para puntos externos, $\mathbf{H} = (I/2\pi r)\mathbf{a}_\phi$.

- 9.7.** En la región $0 < r < 0.5$ m, en coordenadas cilíndricas, la densidad de corriente es

$$\mathbf{J} = 4.5 e^{-2r} \mathbf{a}_z \quad (\text{A/m}^2)$$

y $\mathbf{J} = 0$ en cualquier otra parte. Utilice la ley de Ampère para hallar \mathbf{H} .

Como la densidad de corriente es simétrica respecto del origen, puede usarse una trayectoria circular en la ley de Ampère, con la corriente encerrada dada por $\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$. Así, para $r < 0.5$ m,

$$H_\phi(2\pi r) = \int_0^{2\pi} \int_0^r 4.5 e^{-2r} r dr d\phi$$

$$\mathbf{H} = \frac{1.125}{r} (1 - e^{-2r} - 2re^{-2r}) \mathbf{a}_\phi \quad (\text{A/m})$$

Para cualquier $r \geq 0.5$ m la corriente encerrada es la misma, 0.594π A. Entonces

$$H_\phi(2\pi r) = 0.594\pi \quad \delta \quad H = \frac{0.297}{r} a_\phi \text{ (A/m)}$$

- 9.8.** Halle \mathbf{H} sobre el eje de una varilla circular de corriente de radio a . Particularice el resultado en el centro de la varilla.

Para el punto mostrado en la figura 9-14,

$$\mathbf{R} = -a\mathbf{a}_x + h\mathbf{a}_z$$

$$d\mathbf{H} = \frac{(Ia d\phi \mathbf{a}_\phi) \times (-a\mathbf{a}_x + h\mathbf{a}_z)}{4\pi(a^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{(Ia d\phi)(a\mathbf{a}_z + ha_x)}{4\pi(a^2 + h^2)^{3/2}}$$

La inspección muestra que los elementos de corriente diametralmente opuestos producen componentes r que se cancelan. Entonces,

$$\mathbf{H} = \int_0^{2\pi} \frac{Ia^2 d\phi}{4\pi(a^2 + h^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z = \frac{Ia^2}{2(a^2 + h^2)^{3/2}} \mathbf{a}_z$$

$$\text{En } h = 0, \quad \mathbf{H} = (I/2a)\mathbf{a}_z.$$

- 9.9.** Una lámina de corriente, $\mathbf{K} = 6.0 \mathbf{a}_x$ A/m, yace en el plano $z=0$ y un filamento de corriente está localizado en $y=0, z=4$ m, como se muestra en la figura 9-15. Determine I y sus direcciones si $\mathbf{H}=0$ en $(0, 0, 1.5)$ m.

Producido por la hoja de corriente,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mathbf{K} \times \mathbf{a}_n = \frac{6.0}{2}(-\mathbf{a}_y) \text{ A/m}$$

Para que el campo se anule en $(0, 0, 1.5)$ m, $|\mathbf{H}|$ debido al filamento debe ser 3.0 A/m.

$$|\mathbf{H}| = \frac{I}{2\pi r}$$

$$3.0 = \frac{I}{2\pi(2.5)}$$

$$I = 47.1 \text{ A}$$

Para cancelar \mathbf{H} de la lámina, esta corriente debe estar en la dirección \mathbf{a}_x , como se muestra en la figura 9-15.

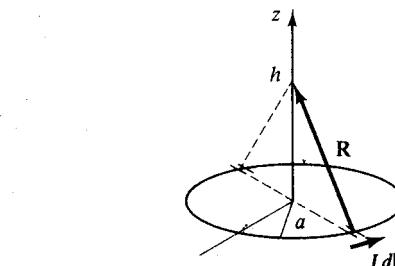


Fig. 9-14

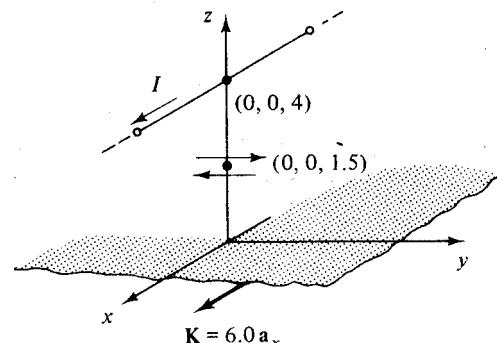


Fig. 9-15.

- 9.10.** Dado el campo vectorial general $\mathbf{A} = (y \cos ax)\mathbf{a}_x + (y + e^x)\mathbf{a}_z$, halle $\nabla \times \mathbf{A}$ en el origen.

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y \cos ax & 0 & y + e^x \end{vmatrix} = \mathbf{a}_x - e^x \mathbf{a}_y - \cos ax \mathbf{a}_z$$

en $(0, 0, 0)$, $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y - \mathbf{a}_z$.

- 9.11.** Calcule el rotacional de \mathbf{H} en coordenadas cartesianas producido por un filamento de corriente a lo largo del eje z con corriente I en la dirección \mathbf{a}_z .

A partir del ejemplo 1,

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{-y\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y}{x^2 + y^2} \right)$$

y así

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \right] \mathbf{a}_z \\ &= 0\end{aligned}$$

excepto en $x = y = 0$. Esto es consistente con $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$.

- 9.12.** Dado el campo vectorial general $\mathbf{A} = 5r \sin \phi \mathbf{a}_z$, en coordenadas cilíndricas, halle el rotacional \mathbf{A} en $(2, \pi, 0)$.

Como \mathbf{A} tiene solo una componente z , apenas dos parciales en la expresión rotacional son diferentes de cero.

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (5r \sin \phi) \mathbf{a}_r - \frac{\partial}{\partial r} (5r \sin \phi) \mathbf{a}_\phi = 5 \cos \phi \mathbf{a}_r - 5 \sin \phi \mathbf{a}_\phi$$

Entonces

$$\nabla \times \mathbf{A} \Big|_{(2, \pi, 0)} = -5 \mathbf{a}_r$$

- 9.13.** Dado el campo vectorial general $\mathbf{A} = 5e^{-r} \cos \phi \mathbf{a}_r - 5 \cos \phi \mathbf{a}_z$, en coordenadas cilíndricas, halle el rotacional \mathbf{A} en $(2, 3\pi/2, 0)$.

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (-5 \cos \phi) \mathbf{a}_r + \left[\frac{\partial}{\partial z} (5e^{-r} \cos \phi) - \frac{\partial}{\partial r} (-5 \cos \phi) \right] \mathbf{a}_\phi - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (5e^{-r} \cos \phi) \mathbf{a}_z \\ &= \left(\frac{5}{r} \sin \phi \right) \mathbf{a}_r + \left(\frac{5}{r} e^{-r} \sin \phi \right) \mathbf{a}_z\end{aligned}$$

Entonces

$$\nabla \times \mathbf{A} \Big|_{(2, 3\pi/2, 0)} = -2.50 \mathbf{a}_r - 0.34 \mathbf{a}_z$$

- 9.14.** Dado el campo vectorial general $\mathbf{A} = 10 \sin \theta \mathbf{a}_\theta$, en coordenadas esféricas, halle el $\nabla \times \mathbf{A}$ en $(2, \pi/2, 0)$.

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[- \frac{\partial}{\partial \phi} (10 \sin \theta) \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (10r \sin \theta) \mathbf{a}_\phi = \frac{10 \sin \theta}{r} \mathbf{a}_\phi$$

Entonces

$$\nabla \times \mathbf{A} \Big|_{(2, \pi/2, 0)} = 5 \mathbf{a}_\phi$$

- 9.15.** En el problema 9.6 se halló la intensidad del campo magnético producido por un conductor circular con densidad de corriente uniforme. Ahora, por el contrario, halle \mathbf{J} de \mathbf{H} .

Dado $\mathbf{H} = (Ir/2\pi a^2) \mathbf{a}_\phi$ dentro del conductor,

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Ir}{2\pi a^2} \right) \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Ir^2}{2\pi a^2} \right) \mathbf{a}_z = \frac{I}{\pi a^2} \mathbf{a}_z$$

lo que en efecto corresponde a una sección transversal circular πa^2 y una corriente I en la dirección $+z$.

Por fuera del conductor, $\mathbf{H} = (I/2\pi r) \mathbf{a}_\phi$, y así

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{I}{2\pi r} \right) \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{I}{2\pi} \right) = 0$$

como era de esperarse.

- 9.16.** Un conductor circular de radio $r_0 = 1$ cm tiene un campo interno

$$\mathbf{H} = \frac{10^4}{r} \left(\frac{1}{a^2} \sin ar - \frac{r}{a} \cos ar \right) \mathbf{a}_\phi \quad (\text{A/m})$$

donde $a = \pi/2r_0$. Halle la corriente total en el conductor.

Hay dos métodos: (1) calcular $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$ y entonces integrar; (2) utilizar la ley de Ampère. El segundo es más simple, en este caso.

$$\begin{aligned} I_{\text{enc}} &= \oint_{r=r_0} \mathbf{H} \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} \frac{10^4}{r_0} \left(\frac{4r_0^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{2r_0^2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} \right) r_0 d\phi \\ &= \frac{8 \times 10^4 r_0^2}{\pi} = \frac{8}{\pi} \text{ A} \end{aligned}$$

- 9.17.** Un campo radial

$$\mathbf{H} = \frac{2.39 \times 10^6}{r} \cos \phi \mathbf{a}_r \quad \text{A/m}$$

sale al espacio vacío. Halle el flujo magnético Φ que cruza la superficie definida por $-\pi/4 \leq \phi \leq \pi/4$, $0 \leq z \leq 1$ m. Ver figura 9-16.

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{3.00}{r} \cos \phi \mathbf{a}_r \quad (\text{T})$$

$$\Phi = \int_0^1 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{3.00}{r} \cos \phi \right) \mathbf{a}_r \cdot r d\phi dz \mathbf{a}_r$$

$$= 4.24 \text{ Wb}$$

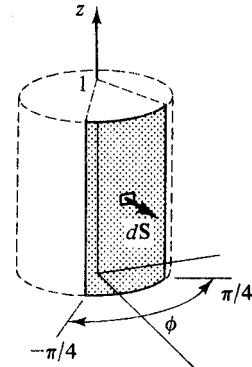


Fig. 9-16

Como \mathbf{B} es inversamente proporcional a r (como requiere $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$), no causa ninguna diferencia la distancia radial que se escoja, pues el flujo total será el mismo.

- 9.18.** En coordenadas cilíndricas, $\mathbf{B} = (2.0/r)\mathbf{a}_\phi$ (T). Determine el flujo magnético Φ que cruza la superficie plana definida por $0.5 \leq r \leq 2.5$ m y $0 \leq z \leq 2.0$ m. Ver figura 9-17.

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_0^{2.0} \int_{0.5}^{2.5} \frac{2.0}{r} \mathbf{a}_\phi \cdot dr dz \mathbf{a}_\phi \\ &= 4.0 \left(\ln \frac{2.5}{0.5} \right) = 6.44 \text{ Wb} \end{aligned}$$

- 9.19.** Obtenga el potencial vectorial magnético \mathbf{A} en la región que rodea una corriente filamentaria, recta e infinitamente larga, I .

Como se muestra en el ejemplo 4, la expresión directa para \mathbf{A} como una integral no puede usarse. Sin embargo, la relación

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi$$

puede tratarse como una ecuación diferencial vectorial para \mathbf{A} . Como \mathbf{B} sólo tiene una componente ϕ , únicamente la componente ϕ del rotor cilíndrico es necesaria.

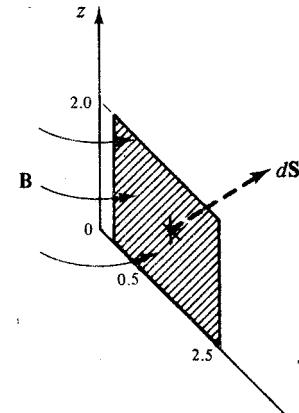


Fig. 9-17

Es evidente que \mathbf{A} no puede ser función de z , ya que el filamento es uniforme con z . Entonces,

$$-\frac{dA_z}{dr} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \delta \quad A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + C$$

La constante de integración permite la localización de una referencia cero. Con $A_z = 0$ en $r = r_0$, la expresión viene a ser

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln \frac{r_0}{r} \right) \mathbf{a}_z$$

- 9.20.** Obtenga el potencial vectorial magnético \mathbf{A} para la hoja de corriente del problema 9.3.

Para $z > 0$,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} = \frac{\mu_0 K}{2} \mathbf{a}_x$$

de lo cual

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\mu_0 K}{2}$$

Como \mathbf{A} debe ser independiente de x y y ,

$$-\frac{dA_y}{dz} = \frac{\mu_0 K}{2} \quad \delta \quad A_y = -\frac{\mu_0 K}{2} (z - z_0)$$

Entonces, para $z > 0$, $\mathbf{A} = -\frac{\mu_0 K}{2} (z - z_0) \mathbf{a}_y = -\frac{\mu_0}{2} (z - z_0) \mathbf{K}$

Para $z < 0$, cámbiese el signo de la anterior expresión.

- 9.21.** Utilizando el potencial vectorial magnético hallado en el problema 9.20, halle el flujo magnético que cruza el área rectangular que aparece en la figura 9-18.

Sea la referencia cero $z_0 = 2$, tal que

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{2} (z - 2) \mathbf{K}$$

En la integral lineal

$$\Phi = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

\mathbf{A} es perpendicular al contorno en dos lados y desaparece en el tercero ($z = 2$). Entonces,

$$\Phi = \int_{y=0}^{y=2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\mu_0}{2} (1 - 2) \int_0^2 K dy = \mu_0 K$$

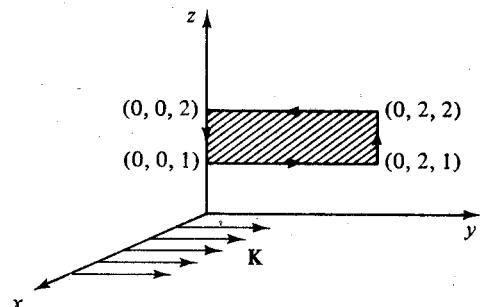


Fig. 9-18

Obsérvese como la elección de una referencia simplificó el cálculo. Por el teorema de Stokes es $\nabla \times \mathbf{A}$, y no \mathbf{A} lo que determina Φ . Por consiguiente, la referencia cero puede escogerse a voluntad.

- 9.22.** Demuestre que el rotacional de un gradiente es cero.

De la definición de la rotacional \mathbf{A} dada en la sección 9.4, se ve que $\nabla \times \mathbf{A}$ es cero en una región si

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

para cualquier trayectoria cerrada en la región. Pero, si $\mathbf{A} = \nabla f$, donde f es una función de valor simple,

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint \nabla f \cdot d\mathbf{l} = \oint df = 0$$

(ver sección 5.5).

Problemas supplementarios

- 9.23.** Demuestre que el campo magnético producido por el elemento finito de corriente que aparece en la figura 9-19 está dado por

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi r} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \mathbf{a}_\phi$$

- 9.24.** Obtenga $d\mathbf{H}$ en un punto general (r, θ, ϕ) en coordenadas esféricas, producido por un elemento diferencial de corriente $I d\ell$ en el origen en dirección de z positivo.

$$\text{Resp. } \frac{I d\ell \sin \theta}{4\pi r^2} \mathbf{a}_\phi$$

- 9.25.** Las corrientes en los conductores interno y externo de la figura 9-20 están uniformemente distribuidas. Utilice la ley de Ampère para demostrar que para $b \leq r \leq c$,

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right) \mathbf{a}_\phi$$

- 9.26.** Dos lazos idénticos de corriente, circulares, de radio $r = 3$ m e $I = 20$ A están en planos paralelos, separados respecto de su eje común por 10 m. Halle \mathbf{H} en un punto medio entre los dos lazos.

Resp. $0.908 \mathbf{a}_n \text{ A/m}$

- 9.27.** Utilice la ley de Biot-Savart para demostrar que $\mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{K} \times \mathbf{a}_n$ para una lámina plana de corriente de densidad constante \mathbf{K} .

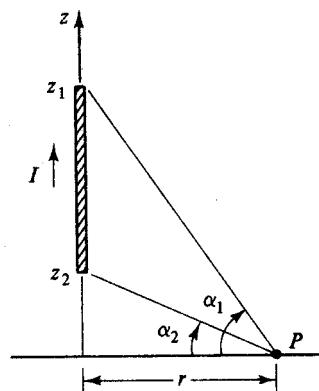


Fig. 9-19

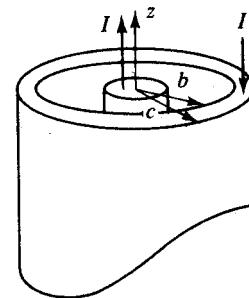


Fig. 9-20

- 9.28.** Un filamento de corriente de 10 A en dirección $+y$, yace a lo largo del eje y y una lámina de corriente, $\mathbf{K} = 2.0 \mathbf{a}_z$ A/m, está localizada en $z = 4$ m. Determine \mathbf{H} en el punto $(2, 2, 2)$ m.

Resp. $0.398 \mathbf{a}_x + 1.0 \mathbf{a}_y - 0.398 \mathbf{a}_z \text{ A/m}$

- 9.29.** Demuestre que el rotacional de $(x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z)/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ es cero. (Sugerencia: $\nabla \times \mathbf{E} = 0$.)

- 9.30.** Dado el vector general $\mathbf{A} = (-\cos x)(\cos y)\mathbf{a}_z$, halle el rotacional de \mathbf{A} en el origen. *Resp.* 0

- 9.31.** Dado el vector general $\mathbf{A} = (\cos x)(\sin y)\mathbf{a}_x + (\sin x)(\cos y)\mathbf{a}_y$, halle el rotacional de \mathbf{A} para todos los puntos. *Resp.* 0

- 9.32.** Dado el vector general $\mathbf{A} = (\sin 2\phi)\mathbf{a}_\phi$ en coordenadas cilíndricas, halle el rotacional de \mathbf{A} en $(2, \pi/4, 0)$. *Resp.* $0.5 \mathbf{a}_z$

- 9.33.** Dado el vector general $\mathbf{A} = e^{-2z}(\sin \frac{1}{2}\phi)\mathbf{a}_\phi$ en coordenadas cilíndricas, halle el rotacional de \mathbf{A} en $(0.800, \pi/3, 0.500)$. *Resp.* $0.368 \mathbf{a}_r + 0.230 \mathbf{a}_z$

- 9.34. Dado el vector general $\mathbf{A} = (\operatorname{sen} \phi) \mathbf{a}_r + (\operatorname{sen} \theta) \mathbf{a}_\phi$ en coordenadas esféricas, halle el rotacional de \mathbf{A} en el punto $(2, \pi/2, 0)$. *Resp.* 0

- 9.35. Dado el vector $\mathbf{A} = 2.50 \mathbf{a}_\theta + 5.00 \mathbf{a}_\phi$ en coordenadas esféricas, halle el rotacional de \mathbf{A} en $(2, 0, \pi/6, 0)$. *Resp.* $4.33 \mathbf{a}_r - 2.50 \mathbf{a}_\theta + 1.25 \mathbf{a}_\phi$

- 9.36. Dado el vector general

$$\mathbf{A} = \frac{2 \cos \theta}{r^3} \mathbf{a}_r + \frac{\operatorname{sen} \theta}{r^3} \mathbf{a}_\theta$$

demuestre que el rotacional de \mathbf{A} es en todo punto cero.

- 9.37. Un conductor cilíndrico de radio 10^{-2} m tiene un campo magnético interno

$$\mathbf{H} = (4.77 \times 10^4) \left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3 \times 10^{-2}} \right) \mathbf{a}_\phi \quad (\text{A/m})$$

¿Cuál es la corriente total en el conductor? *Resp.* 5.0 A

- 9.38. En coordenadas cilíndricas, $\mathbf{J} = 10^5 (\cos^2 2r) \mathbf{a}_z$ en una cierta región. Obtenga \mathbf{H} a partir de esta densidad de corriente y luego tome el rotacional de \mathbf{H} y compárela con \mathbf{J} . *Resp.* $\mathbf{H} = 10^5 \left(\frac{r}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4r}{8} + \frac{\cos 4r}{32r} - \frac{1}{32r} \right) \mathbf{a}_\phi$

- 9.39. En coordenadas cartesianas, una densidad constante de corriente, $\mathbf{J} = J_0 \mathbf{a}_y$, existe en la región $-a \leq z \leq a$. Ver figura 9-21. Utilice la ley de Ampère para hallar \mathbf{H} en todas las regiones. Obtenga el rotacional de \mathbf{H} y compárela con \mathbf{J} .

$$\text{Resp. } \mathbf{H} = \begin{cases} J_0 z \mathbf{a}_x & z > a \\ J_0 z \mathbf{a}_x & -a \leq z \leq a \\ -J_0 z \mathbf{a}_x & z < -a \end{cases}$$

rotacional $\mathbf{H} = \mathbf{J}$

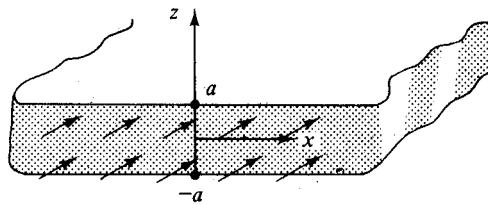


Fig. 9-21

- 9.40. Calcule el flujo magnético total Φ que cruza el plano $z = 0$ en coordenadas cilíndricas para $r \leq 5 \times 10^{-2}$ m si

$$\mathbf{B} = \frac{0.2}{r} (\operatorname{sen}^2 \phi) \mathbf{a}_z \quad (\text{T})$$

Resp. 3.14×10^{-2} Wb

- 9.41. Sea

$$\mathbf{B} = 2.50 \left(\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} \right) e^{-2y} \mathbf{a}_z \quad (\text{T})$$

halle el flujo magnético total que cruza la franja $z = 0$, $y \geq 0$, $0 \leq x \leq 2$ m. *Resp.* 1.59 Wb

- 9.42. Un cable coaxial cuyo conductor interno tiene radio a y el externo tiene radios interno y externo b y c respectivamente, transporta una corriente I en el conductor interno. Halle el flujo magnético por unidad de longitud que cruza un plano $\phi = \text{constante}$ entre los conductores. *Resp.* $\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$

- 9.43. Una hoja uniforme de corriente, $\mathbf{K} = K_0 \mathbf{a}_y$, está en $z = b > 2$ y otra $\mathbf{K} = K_0 (-\mathbf{a}_y)$, está en $z = -b$. Halle el flujo magnético que cruza el área definida por $x = \text{constante}$, $-2 \leq z \leq 2$, $0 \leq y \leq L$. Suponga espacio vacío. *Resp.* $4\mu_0 K_0 L$

- 9.44. Utilice el potencial vectorial magnético del problema 9.19 para obtener el flujo que cruza un plano $\phi = \text{constante}$ para $r_1 \leq r \leq r_0$ y $0 \leq z \leq L$ producido por una corriente de filamento I sobre el eje z .

$$\text{Resp. } \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln \frac{r_0}{r_1}$$

- 9.45. Sea el potencial vectorial magnético dentro de un conductor cilíndrico de radio a igual a

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0 I r^2}{4\pi a^2} \mathbf{a}_z$$

halle el correspondiente \mathbf{H} . *Resp.* Ver problema 9.6.

- 9.46. Una lámina uniforme de corriente, $\mathbf{K} = K_0(-\mathbf{a}_y)$, está localizada en $x = 0$ y otra, $\mathbf{K} = K_0 \mathbf{a}_y$, está en $x = a$. Halle el potencial vectorial magnético entre las láminas. *Resp.* $(\mu_0 K_0 x + C) \mathbf{a}_y$

- 9.47. Entre las hojas de corriente del problema 9.46 una porción del plano $z = \text{constante}$ está definida por $0 \leq x \leq b$ y $0 \leq y \leq a$. Halle el flujo Φ que cruza esta porción, desde $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ y desde $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$. *Resp.* $ab\mu_0 K_0$

Capítulo 10

Fuerzas y torques en los campos magnéticos

10.1 FUERZA MAGNETICA SOBRE LAS PARTICULAS

Una partícula cargada *en movimiento* experimenta en un campo magnético una fuerza en ángulo recto respecto de su velocidad, con una magnitud proporcional a la carga, la velocidad y la densidad de flujo magnético. La expresión completa está dada por el producto cruz.

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{U} \times \mathbf{B}$$

Por consiguiente, la dirección de una partícula en movimiento puede ser cambiada por un campo magnético. La magnitud de la velocidad, U , y por consiguiente la energía cinética, permanecen iguales. Esto contrasta con los campos eléctricos, en los que la fuerza $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$ efectúa trabajo sobre las partículas y cambia así su energía cinética.

Si el campo \mathbf{B} es uniforme en una región y la partícula tiene una velocidad inicial normal al campo, la trayectoria de la partícula es un círculo de un radio r . La fuerza del campo es de magnitud $F = |Q|UB$ y se dirige hacia el centro del círculo. La aceleración centrípeta es de magnitud $\omega^2 r = U^2/r$. Entonces, por la segunda ley de Newton,

$$|Q|UB = m \frac{U^2}{r} \quad \text{o} \quad r = \frac{mU}{|Q|B}$$

Obsérvese que r es una medida del momento lineal de la partícula, mU .

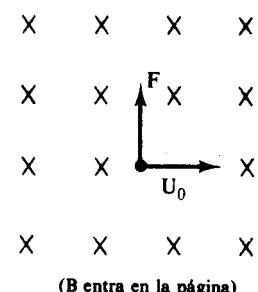
EJEMPLO 1: Halle la fuerza sobre una partícula de masa 1.70×10^{-27} kg y carga 1.6×10^{-19} C si entra a un campo $B = 5$ mT con una velocidad inicial de 83.5 km/s.

A menos que las direcciones de \mathbf{B} y \mathbf{U}_0 sean conocidas, (\mathbf{U}_0 = velocidad inicial de la partícula), la fuerza no puede ser calculada. Suponiendo que \mathbf{U}_0 y \mathbf{B} sean perpendiculares, como se muestra en la figura 10-1,

$$\begin{aligned} F &= |Q|UB \\ &= (1.60 \times 10^{-19})(83.5 \times 10^3)(5 \times 10^{-3}) \\ &= 6.68 \times 10^{-17} \text{ N} \end{aligned}$$

EJEMPLO 2: Para la partícula del ejemplo 1, halle el radio de la trayectoria circular y el tiempo requerido para una revolución.

$$\begin{aligned} r &= \frac{mU}{|Q|B} = \frac{(1.70 \times 10^{-27})(83.5 \times 10^3)}{(1.60 \times 10^{-19})(5 \times 10^{-3})} = 0.177 \text{ m} \\ T &= \frac{2\pi r}{U} = 13.3 \mu\text{s} \end{aligned}$$



(B entra en la página)

Fig. 10-1

10.2 CAMPOS ELECTRICOS Y MAGNETICOS COMBINADOS

Cuando los dos campos se hallan presentes al mismo tiempo en una región, la fuerza sobre una partícula está dada por

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B})$$

Esta fuerza, junto con las condiciones iniciales, determina la trayectoria de la partícula.

EJEMPLO 3: Una región contiene una densidad de flujo magnético $\mathbf{B} = 5.0 \times 10^{-4} \mathbf{a}_z$ T y un campo eléctrico $\mathbf{E} = 5.0 \mathbf{a}_x$ V/m. Un protón ($Q_p = 1.602 \times 10^{-19}$ C, $m_p = 1.673 \times 10^{-27}$ kg) ingresa a los campos en el origen con una velocidad inicial $\mathbf{U}_0 = 2.5 \times 10^5 \mathbf{a}_y$ m/s. Describa el movimiento del protón y de su posición después de 3 revoluciones completas.

La fuerza inicial sobre la partícula es

$$\mathbf{F}_0 = Q(\mathbf{E} + \mathbf{U}_0 \times \mathbf{B}) = Q_p(E \mathbf{a}_z - U_0 B \mathbf{a}_y)$$

La componente z (componente eléctrica) de la fuerza es constante, y produce una aceleración constante en la dirección z . De esta manera la ecuación de movimiento en la dirección z es

$$z = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{Q_p E}{m_p}\right)t^2$$

La otra componente (magnética), que cambia a $-Q_p U B \mathbf{a}_r$, produce un movimiento circular perpendicular al eje z , con periodo.

$$T = \frac{2\pi r}{U} = \frac{2\pi m_p}{Q_p B}$$

El movimiento resultante es helicoidal, como se muestra en la figura 10-2.

Después de 3 revoluciones $x = y = 0$ y

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{Q_p E}{m_p}\right)(3T)^2 = \frac{18\pi^2 E m_p}{Q_p B^2} = 37.0 \text{ m}$$

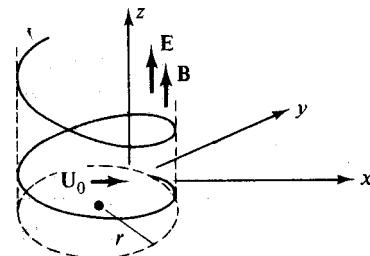


Fig. 10-2

10.3 FUERZA MAGNETICA SOBRE UN ELEMENTO DE CORRIENTE

Una situación que se da frecuentemente es la de un conductor que transporta corriente en un campo magnético externo. Como $I = dQ/dt$, la ecuación de fuerza diferencial puede escribirse

$$d\mathbf{F} = dQ(\mathbf{U} \times \mathbf{B}) = (I dt)(\mathbf{U} \times \mathbf{B}) = I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

donde $d\mathbf{l} = \mathbf{U} dt$ es la longitud del elemento en la dirección de la corriente convencional I . Si el conductor es recto y el campo es constante a lo largo de él, la fuerza diferencial puede integrarse para dar

$$F = ILB \sin\theta$$

La fuerza magnética se ejerce realmente sobre los electrones que conforman la corriente I . Sin embargo, como los electrones están confinados al conductor, la fuerza se transfiere efectivamente a la estructura pesada. Esta fuerza transferida puede efectuar trabajo sobre el conductor como un todo. Mientras este hecho provee una introducción razonable al comportamiento de conductores que transportan corriente en máquinas eléctricas, ciertas consideraciones esenciales han sido omitidas. No se mencionó, ni se mencionará en la sección 10.4, la fuente de corriente y la energía que se requiere para mantener una corriente constante I . La ley de inducción de Faraday (sección 12.3) no se aplicó. En la teoría de las máquinas eléctricas el resultado estará modificado por estas consideraciones. Los conductores en movimiento en campos magnéticos se tratarán en el capítulo 12. Ver, en particular, los problemas 12.13 y 12.16.

EJEMPLO 4: Halle la fuerza ejercida sobre un conductor de longitud 0.30 m que transporta una corriente de 5.0 A en dirección $-\mathbf{a}_z$, donde el campo es $\mathbf{B} = 3.50 \times 10^{-3}(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y)$ T.

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= I(\mathbf{L} \times \mathbf{B}) \\ &= (5.0)[(0.30)(-\mathbf{a}_z) \times 3.50 \times 10^{-3}(\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y)] \\ &= 7.42 \times 10^{-3} \left(\frac{-\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y}{\sqrt{2}} \right) \text{ N} \end{aligned}$$

La fuerza de magnitud 7.42 mN, se ejerce en ángulos rectos tanto

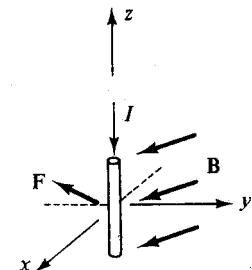


Fig. 10-3

respecto del campo \mathbf{B} como de la dirección de la corriente, como se muestra en la figura 10-3.

10.4 TRABAJO Y POTENCIA

Las fuerzas magnéticas que se ejercen sobre las partículas cargadas y los conductores de corriente que se examinaron anteriormente, son el resultado de los campos. Para contrarrestar estas fuerzas y establecer el equilibrio, fuerzas iguales y opuestas, \mathbf{F}_a , deben aplicarse. Si hay movimiento, el trabajo hecho sobre el sistema por el agente externo que aplica la fuerza se da por la integral

$$W = \int_{l \text{ inicial}}^{l \text{ final}} \mathbf{F}_a \cdot dl$$

Un resultado positivo de la integración indica que el trabajo fue efectuado por el agente sobre el sistema para mover las partículas o el conductor de su localización inicial a la final en contra del campo. Como la fuerza magnética, y en consecuencia \mathbf{F}_a , es generalmente no conservativa, la trayectoria entera de integración que une las localizaciones inicial y final del conductor deben estar especificadas.

EJEMPLO 5: Halle el trabajo y la potencia que se requiere para mover el conductor que aparece en la figura 10-4 en una revolución completa en la dirección mostrada en 0.02 s, si $\mathbf{B} = 2.50 \times 10^{-3} \mathbf{a}_z \text{ T}$ y la corriente es 45.0 A.

$$\mathbf{F} = I(l \times \mathbf{B}) = 1.13 \times 10^{-2} \mathbf{a}_\phi \text{ N}$$

y así $\mathbf{F}_a = -1.13 \times 10^{-2} \mathbf{a}_\phi \text{ N}$.

$$\begin{aligned} W &= \int \mathbf{F}_a \cdot dl \\ &= \int_0^{2\pi} (-1.13 \times 10^{-2}) \mathbf{a}_\phi \cdot r d\phi \mathbf{a}_\phi \\ &= -2.13 \times 10^{-3} \text{ J} \end{aligned}$$

y $P = W/t = -0.107 \text{ W}$.

El signo negativo significa que el trabajo realizado por el campo magnético para mover el conductor tiene la dirección de la figura. Para el movimiento en la dirección opuesta, los límites invertidos proveerán el cambio de signo y no debe colocarse signo negativo en $r d\phi \mathbf{a}_\phi$.

10.5 TORQUE

El *momento de una fuerza o torque* respecto de un punto dado es el producto cruz del *brazo de palanca* de ese punto y de la fuerza. El brazo de palanca, \mathbf{r} , se dirige desde el punto para el que se calcula el torque hasta el punto de aplicación de la fuerza. En la figura 10-5 la fuerza en P tiene un torque con relación a O dado por

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

donde \mathbf{T} tiene las unidades $\text{N} \cdot \text{m}$ (se han propuesto las unidades $\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$ para distinguir el torque de la energía.)

En la figura 10-5, \mathbf{T} yace a lo largo de un eje (en el plano xy) que pasa por O . Si P estuviera unido a O por una barra rígida pivoteada en O , entonces la fuerza aplicada tendería a hacer rotar P alrededor de ese eje. Se dice que el torque \mathbf{T} se aplica *alrededor del eje*, antes que *alrededor del punto O* .

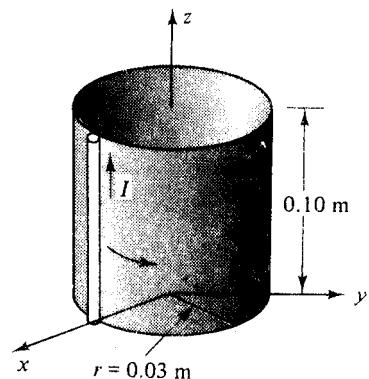


Fig. 10-4

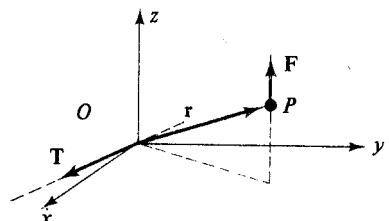


Fig. 10-5

10.6 MOMENTO MAGNETICO DE UNA BOBINA PLANAR

Considérese la bobina de espira sencilla en el plano $z = 0$ que aparece en la figura 10-6, de ancho w en la dirección x y longitud ℓ en la dirección y . El campo \mathbf{B} es uniforme y tiene dirección $+x$. Las únicas fuerzas son producto de los lados ℓ de la bobina. Para el lado de la izquierda,

$$\mathbf{F} = I(\ell \mathbf{a}_y \times \mathbf{B} \mathbf{a}_x) = -BI\ell \mathbf{a}_z$$

y para el lado de la derecha

$$\mathbf{F} = BI\ell \mathbf{a}_z$$

El torque alrededor del eje y producido por el elemento de corriente de la izquierda requiere un brazo de palanca $r = -(w/2)\mathbf{a}_x$; El signo cambiará para el brazo de palanca del elemento de corriente a la derecha. El torque producido por ambos elementos es

$$\mathbf{T} = (-w/2)\mathbf{a}_x \times (-BI\ell)\mathbf{a}_z + (w/2)\mathbf{a}_x \times BI\ell\mathbf{a}_z = BI\ell w(-\mathbf{a}_y) = BI A(-\mathbf{a}_y)$$

donde A es el área de la bobina. Puede demostrarse que esta expresión para el torque se cumple para una bobina de forma arbitraria (y para cualquier eje paralelo al eje y).

El *momento magnético*, \mathbf{m} , de una espiral planar de corriente se define como $IA\mathbf{a}_n$, donde la normal unitaria \mathbf{a}_n está determinada por la regla de la mano derecha. (El pulgar derecho da la dirección de \mathbf{a}_n cuando los dedos apuntan en dirección de la corriente.) Se ve que el torque sobre una bobina planar se relaciona con el campo aplicado por

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Este concepto de momento magnético es esencial para entender el comportamiento de las partículas cargadas con movimiento orbital. Por ejemplo, una carga positiva Q moviéndose en una órbita circular a una velocidad U , o una velocidad angular ω , es equivalente a una corriente $I = (\omega/2\pi)Q$, y así da lugar a un momento magnético

$$\mathbf{m} = \frac{\omega}{2\pi} QA\mathbf{a}_n$$

como se muestra en la figura 10-7. Más importante que la presente discusión es el hecho de que en presencia de un campo magnético \mathbf{B} , se produce un torque $\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ que tiende a girar la espira de corriente hasta que \mathbf{m} y \mathbf{B} estén en la misma dirección, y en tal orientación el torque es cero.

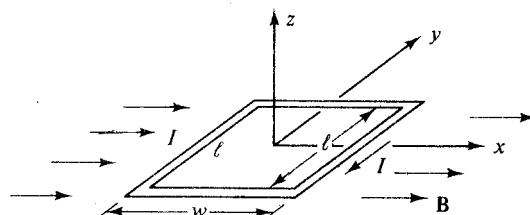


Fig. 10-6

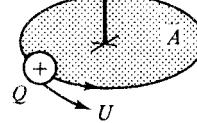


Fig. 10-7

Problemas resueltos

- 10.1.** Un conductor de 4 m de largo yace a lo largo del eje y con una corriente de 10.0 A en dirección \mathbf{a}_y . Halle la fuerza sobre el conductor si el campo en la región es $\mathbf{B} = 0.05 \mathbf{a}_x$ T.

$$\mathbf{F} = IL \times \mathbf{B} = 10.0(4\mathbf{a}_y \times 0.05 \mathbf{a}_x) = -2.0 \mathbf{a}_z \text{ N}$$

- 10.2.** Un conductor de longitud 2.5 m localizado en $z=0$, $x=4$ m lleva una corriente de 12.0 A en dirección $-\mathbf{a}_y$. Halle el campo \mathbf{B} uniforme en la región si la fuerza sobre el conductor es 1.20×10^{-2} N en la dirección $(-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z)/\sqrt{2}$.

De $\mathbf{F} = IL \times \mathbf{B}$,

$$(1.20 \times 10^{-2}) \left(\frac{-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 0 & -(12.0)(2.5) & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -30B_z \mathbf{a}_x + 30B_x \mathbf{a}_z$$

de lo que

$$B_z = B_x = \frac{4 \times 10^{-4}}{\sqrt{2}} \text{ T}$$

La componente y de \mathbf{B} puede tener cualquier valor.

- 10.3.** Una franja de corriente de 2 cm de ancho lleva una corriente de 15.0 A en la dirección \mathbf{a}_x , tal como se muestra en la figura 10-8. Halle la fuerza por unidad de longitud sobre la franja si el campo uniforme es $\mathbf{B} = 0.20 \mathbf{a}_y$ T.

En las expresiones para $d\mathbf{F}$, $I d\mathbf{l}$ puede ser reemplazado por $\mathbf{K} dS$.

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= (\mathbf{K} dS) \times \mathbf{B} \\ &= \left(\frac{15.0}{0.02} \right) dx dy (0.20) \mathbf{a}_z \\ \mathbf{F} &= \int_{-0.01}^{0.01} \int_0^L 150.0 dx dy \mathbf{a}_z \\ \mathbf{F}/L &= 3.0 \mathbf{a}_z \text{ N/m} \end{aligned}$$

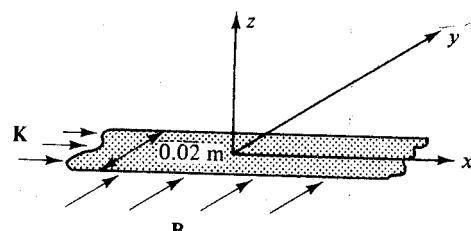


Fig. 10-8

- 10.4.** Halle las fuerzas por unidad de longitud sobre dos conductores paralelos, largos y rectos si cada uno lleva una corriente de 10.0 A en la misma dirección y la distancia de separación es 0.20 m.

Considérese el arreglo en coordenadas cartesianas que aparece en la figura 10-9. El conductor sobre la izquierda crea un campo cuya magnitud en el conductor del lado derecho es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(10.0)}{2\pi(0.20)} = 10^{-5} \text{ T}$$

y cuya dirección es $-\mathbf{a}_z$. Entonces, la fuerza sobre el conductor derecho es

$$\mathbf{F} = IL \mathbf{a}_y \times B(-\mathbf{a}_z) = ILB(-\mathbf{a}_x)$$

y

$$\mathbf{F}/L = 10^{-4}(-\mathbf{a}_x) \text{ N/m}$$

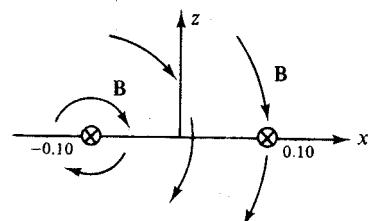


Fig. 10-9

Una fuerza igual pero opuesta actúa sobre el conductor del lado izquierdo. La fuerza aparece como fuerza de atracción. Dos conductores paralelos que llevan fuerzas en la misma dirección tendrán fuerzas que tienden a juntarlos.

- 10.5.** Un conductor lleva corriente I paralelamente a una franja de corriente de densidad K_0 y ancho w , como la que se muestra en la figura 10-10. Halle una expresión para la fuerza por unidad de longitud sobre el conductor. ¿Cuál es el resultado cuando el ancho w tiende a infinito?

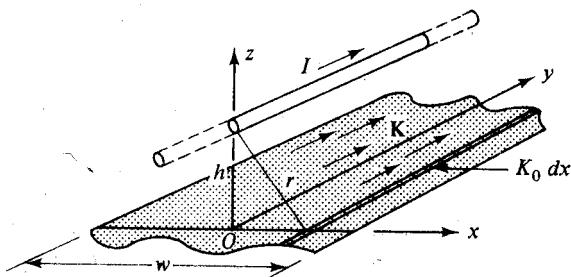


Fig. 10-10

Del problema 10.4, el filamento $K_0 dx$ que aparece en la figura 10-10 ejerce una fuerza de atracción

$$d\mathbf{F}/L = IB\mathbf{a}_r = I \frac{\mu_0(K_0 dx)}{2\pi r} \mathbf{a}_r$$

sobre el conductor. Agregando a ésta la fuerza debida al filamento similar en $-x$, las componentes en la dirección x se cancelan y dan como resultado

$$d\mathbf{F}/L = I \frac{\mu_0(K_0 dx)}{2\pi r} \left(2 \frac{h}{r}\right) (-\mathbf{a}_z) = \frac{\mu_0 IK_0 h}{\pi} \frac{dx}{h^2 + x^2} (-\mathbf{a}_z)$$

Integrando sobre la mitad del ancho de la franja,

$$\mathbf{F}/L = \frac{\mu_0 IK_0 h}{\pi} (-\mathbf{a}_z) \int_0^{w/2} \frac{dx}{h^2 + x^2} = \left(\frac{\mu_0 IK_0 h}{\pi} \arctan \frac{w}{2h}\right) (-\mathbf{a}_z)$$

La fuerza es de atracción, como se esperaba.

Cuando el ancho de la franja tiende a infinito, $\mathbf{F}/L \rightarrow (\mu_0 IK_0/2)(-\mathbf{a}_z)$.

- 10.6.** Halle el torque alrededor del eje y para los dos conductores de longitud ℓ , separados por una distancia fija w , en el campo uniforme \mathbf{B} que aparece en la figura 10-11.

El conductor de la izquierda experimenta la fuerza

$$\mathbf{F}_1 = I\ell \mathbf{a}_y \times B\mathbf{a}_x = BI\ell(-\mathbf{a}_z)$$

y su torque es

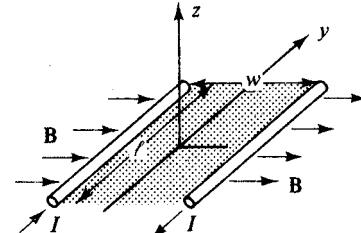


Fig. 10-11

La fuerza sobre el conductor de la derecha produce el mismo torque. La suma es, por lo tanto:

$$\mathbf{T} = BI\ell w(-\mathbf{a}_y)$$

- 10.7.** El movimiento de un medidor de D' Arsonval tiene un campo radial uniforme de $B = 0.10$ T y un resorte de restauración con un torque $T = 5.87 \times 10^{-5}\theta$ (N · m), donde el ángulo de rotación está en radianes. La bobina contiene 35 vueltas y mide 23 mm por 17 mm. ¿Qué ángulo de rotación produce una corriente de 15 mA en la bobina?

Las piezas que tienen forma de polos, que se muestran en la figura 10-12, producen un campo radial uniforme con un limitado rango de deflexión. Suponiendo que toda la longitud de la bobina está en el campo, el torque producido es

$$T = nBI/w = 35(0.10)(15 \times 10^{-3})(23 \times 10^{-3})(17 \times 10^{-3}) \\ = 2.05 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}$$

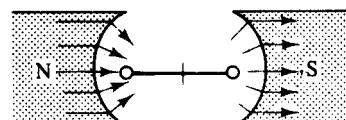


Fig. 10-12

Esta bobina gira hasta que el torque iguala el del resorte.

$$2.05 \times 10^{-5} = 5.87 \times 10^{-5}\theta$$

$$\theta = 0.349 \text{ rad } \approx 20^\circ$$

- 10.8.** La bobina rectangular de la figura 10-13 está en un campo

$$\mathbf{B} = 0.05 \frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y}{\sqrt{2}} \text{ T}$$

Halle el torque alrededor del eje z cuando la bobina está en la posición de la figura y lleva una corriente de 5.0 A.

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= IA\mathbf{a}_n = 1.60 \times 10^{-2} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{T} &= \mathbf{m} \times \mathbf{B} = 1.60 \times 10^{-2} \mathbf{a}_x \times 0.05 \frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y}{\sqrt{2}} \\ &= 5.66 \times 10^{-4} \mathbf{a}_z \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

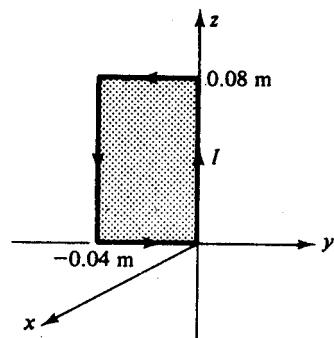


Fig. 10-13

Si la bobina da un giro de 45° , la dirección de \mathbf{m} será $(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y)/\sqrt{2}$ y el torque será cero.

- 10.9.** Halle el máximo torque sobre una bobina rectangular de 85 vueltas, 0.2 m por 0.3 m, que conduce una corriente de 2.0 A en un campo $B = 6.5$ T.

$$T_{\max} = nBI\ell w = 85(6.5)(2.0)(0.2)(0.3) = 66.3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

- 10.10.** Halle el torque máximo sobre una partícula cargada en giro orbital si la carga es 1.602×10^{-19} C, la trayectoria circular tiene un radio de 0.5×10^{-10} m, la velocidad angular es 4.0×10^{16} rad/s, y $B = 0.4 \times 10^{-3}$ T.

La carga orbitante tiene un momento magnético

$$\mathbf{m} = \frac{\omega}{2\pi} QA\mathbf{a}_n = \frac{4 \times 10^{16}}{2\pi} (1.602 \times 10^{-19})\pi(0.5 \times 10^{-10})^2 \mathbf{a}_n = 8.01 \times 10^{-24} \mathbf{a}_n \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

Entonces, el máximo torque se produce cuando \mathbf{a}_n es normal a \mathbf{B} .

$$T_{\max} = mB = 3.20 \times 10^{-27} \text{ N} \cdot \text{m}$$

- 10.11.** Un conductor de 4 m de longitud con corriente sostenida en 10 A en dirección \mathbf{a}_y , yace a lo largo del eje y entre $y = \pm 2$ m. Si el campo es $\mathbf{B} = 0.05 \mathbf{a}_x$ T, halle el trabajo efectuado para mover el conductor paralelamente a sí mismo, a velocidad constante, hasta $x = z = 2$ m.

Para todo el movimiento,

$$\mathbf{F} = IL \times \mathbf{B} = -2.0 \mathbf{a}_z$$

La fuerza aplicada es igual y opuesta,

$$\mathbf{F}_a = 2.0 \mathbf{a}_z$$

Como esta fuerza es constante y, por lo tanto, conservativa, el conductor puede moverse primero a lo largo de z y luego en dirección x , como se muestra en la figura 10-14. Como \mathbf{F}_a está en dirección z , no se hace ningún trabajo en el movimiento a lo largo de x . Entonces,

$$W = \int_0^2 (2.0 \mathbf{a}_z) \cdot dz \mathbf{a}_z = 4.0 \text{ J}$$

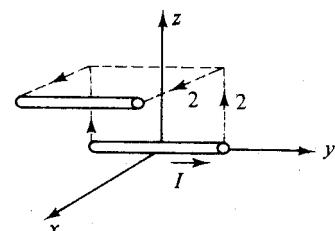


Fig. 10-14

- 10.12.** Un conductor yace a lo largo del eje z $-1.5 \leq z \leq 1.5$ m y lleva una corriente fija de 10.0 A en la dirección $-\mathbf{a}_z$. Para un campo

$$\mathbf{B} = 3.0 \times 10^{-4} e^{-0.2x} \mathbf{a}_y \text{ (T)}$$

halle el trabajo y la potencia requeridos para mover el conductor a velocidad constante hasta $x = 2.0 \text{ m}$, $y = 0$ en $5 \times 10^{-3} \text{ s}$. Suponga movimiento paralelo a lo largo del eje x .

$$\mathbf{F} = IL \times \mathbf{B} = 9.0 \times 10^{-3} e^{-0.2x} \mathbf{a}_x$$

$$\text{Entonces } \mathbf{F}_a = -9.0 \times 10^{-3} e^{-0.2x} \mathbf{a}_x \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} W &= \int_0^2 (-9.0 \times 10^{-3} e^{-0.2x} \mathbf{a}_x) \cdot dx \mathbf{a}_x \\ &= -1.48 \times 10^{-2} \text{ J} \end{aligned}$$

El campo mueve al conductor y , en consecuencia, el trabajo es negativo. La potencia está dada por

$$P = \frac{W}{t} = \frac{-1.48 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-3}} = -2.97 \text{ W}$$

- 10.13.** Halle el trabajo y la potencia requeridos para mover el conductor, que aparece en la figura 10-16, dándole una vuelta completa en dirección positiva a una frecuencia rotacional de N revoluciones por minuto, si $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{a}_r$, (B_0 una constante positiva).

La fuerza sobre el conductor es

$$\mathbf{F} = IL \times \mathbf{B} = IL \mathbf{a}_z \times B_0 \mathbf{a}_r = B_0 IL \mathbf{a}_\phi$$

así que la fuerza aplicada es

$$\mathbf{F}_a = B_0 IL(-\mathbf{a}_\phi)$$

El conductor debe rotarse en la dirección \mathbf{a}_ϕ . Por tanto, el trabajo requerido para una revolución completa es

$$W = \int_0^{2\pi} B_0 IL(-\mathbf{a}_\phi) \cdot r d\phi \mathbf{a}_\phi = -2\pi r B_0 IL$$

Como N revoluciones por minuto es $N/60$ por segundo, la potencia es

$$P = -\frac{2\pi r B_0 IL N}{60}$$

Los signos negativos del trabajo y de la potencia indican que el campo realiza el trabajo. El hecho de que se efectúe trabajo alrededor de una trayectoria cerrada muestra que la fuerza es no-conservativa en este caso.

- 10.14.** En la configuración que aparece en la figura 10-16 el conductor tiene 100 mm de longitud y lleva una corriente constante de 5.0 A en dirección \mathbf{a}_z . Si el campo es

$$\mathbf{B} = -3.5 \sin \phi \mathbf{a}_r \text{ mT}$$

y $r = 25 \text{ mm}$, halle el trabajo realizado al mover el conductor a velocidad constante desde $\phi = 0$ hasta $\phi = \pi$, en la dirección mostrada. Si la dirección de la corriente se invierte para $\pi < \phi < 2\pi$, ¿cuál es el trabajo total requerido para una revolución completa?

$$\mathbf{F} = IL \times \mathbf{B} = -1.75 \times 10^{-3} \sin \phi \mathbf{a}_\phi \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_a = 1.75 \times 10^{-3} \sin \phi \mathbf{a}_\phi \text{ N}$$

Entonces

$$W = \int_0^\pi 1.75 \times 10^{-3} \sin \phi \mathbf{a}_\phi \cdot r d\phi \mathbf{a}_\phi = 87.5 \mu\text{J}$$

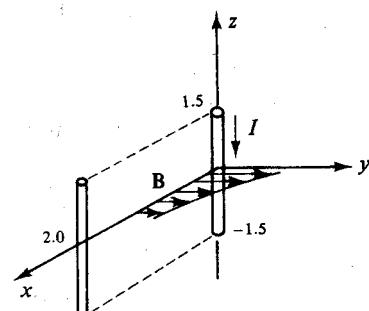


Fig. 10-15

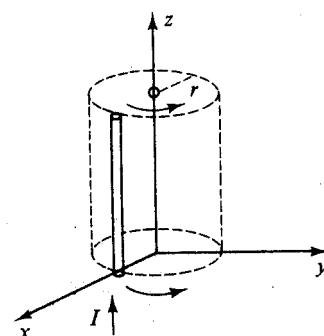


Fig. 10-16

Si la dirección de la corriente cambia cuando el conductor está entre π y 2π , el trabajo será el mismo. El trabajo total es $175 \mu J$.

- 10.15.** Calcule la fuerza centrípeta necesaria para mantener un electrón ($m_e = 9.107 \times 10^{-31} \text{ kg}$) en una órbita circular de radio $0.35 \times 10^{-10} \text{ m}$ con velocidad angular de $2 \times 10^{16} \text{ rad/s}$.

$$F = m_e \omega^2 r = (9.107 \times 10^{-31})(2 \times 10^{16})^2(0.35 \times 10^{-10}) = 1.27 \times 10^{-8} \text{ N}$$

- 10.16.** Hayan campo magnético uniforme $\mathbf{B} = 85.3 \mathbf{a}_z \mu T$ en la región $x \geq 0$. Si un electrón entra a este campo en el origen con una velocidad $\mathbf{U}_0 = 450 \mathbf{a}_x \text{ km/s}$, halle la posición de salida. ¿Dónde saldría un protón con la misma velocidad inicial?

$$r_e = \frac{m_e U_0}{|Q|B} = 3.00 \times 10^{-2} \text{ m}$$

El electrón experimenta una fuerza inicial en dirección \mathbf{a}_y y deja el campo en $x = z = 0, y = 6 \text{ cm}$.

El protón girará en el otro sentido y parte de la trayectoria circular se muestra en P en la figura 10-17. Con $m_p = 1840 m_e$,

$$r_p = \frac{m_p}{m_e} r_e = 55 \text{ m}$$

y el protón sale en $x = z = 0, y = -110 \text{ m}$.

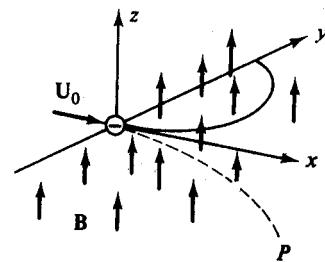


Fig. 10-17

- 10.17.** Si un protón tiene una posición fija y un electrón gira alrededor de él en trayectoria circular de radio $0.35 \times 10^{-10} \text{ m}$, ¿cuál es el campo magnético en el protón?

El protón y el electrón se atraen por la fuerza de Coulomb,

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

lo que proporciona la fuerza centrípeta en el movimiento circular. De esta manera

$$\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_e \omega^2 r \quad \text{o} \quad \omega^2 = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r^3}$$

Ahora, el electrón es equivalente a una espira de corriente $I = (\omega/2\pi)Q$. El campo en el centro de la espira es, según el problema 9.8:

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0 \omega Q}{4\pi r}$$

Substituyendo el valor de ω encontrado antes

$$B = \frac{(\mu_0/4\pi)Q^2}{r^2 \sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r}} = \frac{(10^{-7})(1.6 \times 10^{-19})^2}{(0.35 \times 10^{-10})^2 \sqrt{(\frac{1}{4}\pi \times 10^{-9})(9.1 \times 10^{-31})(0.35 \times 10^{-10})}} = 35 \text{ T}$$

Problemas supplementarios

- 10.18.** Un elemento de corriente de 2 m de longitud yace a lo largo del eje y centrado en el origen. La corriente es 5.0 A en dirección \mathbf{a}_y . Si experimenta una fuerza $1.50(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z)/\sqrt{2} \text{ N}$ debido a un campo uniforme \mathbf{B} , determine \mathbf{B} . *Resp.* $0.106(-\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z) \text{ T}$
- 10.19.** Un campo magnético, $\mathbf{B} = 3.5 \times 10^{-2} \mathbf{a}_z \text{ T}$, ejerce una fuerza sobre un conductor de 0.30 m a lo largo del eje x . Si la corriente del conductor es 5.0 A en la dirección $-\mathbf{a}_x$, ¿qué fuerza debe aplicarse para mantener el conductor en posición? *Resp.* $-5.25 \times 10^{-2} \mathbf{a}_y \text{ N}$

- 10.20. Una lámina de corriente, $K = 30.0 \text{ A/m}$, yace en el plano $z = -5 \text{ m}$ y un conductor filamentario está sobre el eje y con una corriente de 5.0 A en la dirección \mathbf{a}_y . Halle la fuerza por unidad de longitud.
Resp. $94.2 \mu\text{N}/\text{m}$ (atracción)

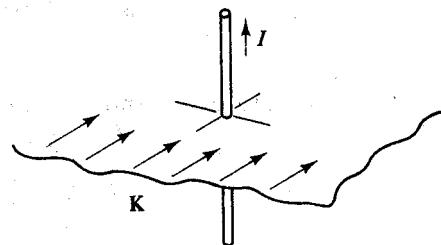


Fig. 10-18

- 10.21. Un conductor con corriente I atraviesa una lámina plana de corriente K ortogonalmente, tal como se muestra en la figura 10-18. Halle la fuerza por unidad de longitud sobre el conductor, arriba y abajo de la lámina.
Resp. $\pm \mu_0 K I / 2$

- 10.22. Halle la fuerza sobre un conductor de 2 m de largo sobre el eje z con una corriente de 5.0 A en la dirección \mathbf{a}_z si

$$\mathbf{B} = 2.0\mathbf{a}_x + 6.0\mathbf{a}_y \text{ T}$$

$$\text{Resp. } -60\mathbf{a}_x + 20\mathbf{a}_y \text{ N}$$

- 10.23. Dos láminas infinitas de corriente, cada una con densidad constante K_0 , son paralelas y tienen sus corrientes dirigidas de manera opuesta. Halle la fuerza por unidad de área sobre las láminas. ¿Es la fuerza de atracción o de repulsión?
Resp. $\mu_0 K_0^2 / 2$ (repulsión)

- 10.24. La espira circular de corriente que aparece en la figura 10-19 yace en el plano $z = h$, paralelamente a una lámina de corriente uniforme, $\mathbf{K} = K_0 \mathbf{a}_y$, en $z = 0$. Exprese la fuerza sobre un diferencial de longitud de la espira. Integre y demuestre que la fuerza total es cero.
Resp. $d\mathbf{F} = \frac{1}{2} I a \mu_0 K_0 \cos \phi d\phi (-\mathbf{a}_z)$

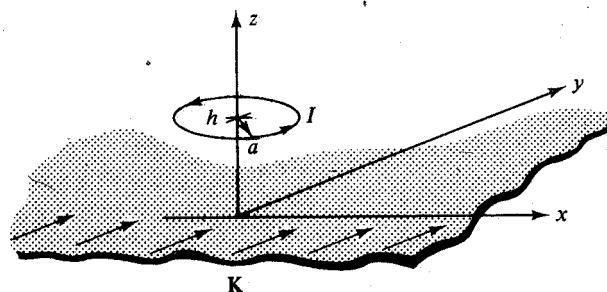


Fig. 10-19

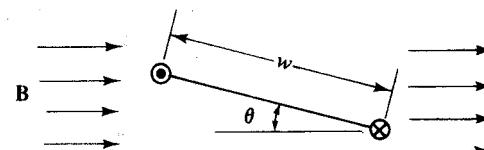


Fig. 10-20

- 10.25. Dos conductores de longitud l normales a \mathbf{B} , aparecen en la figura 10-20. Tienen una separación fija w . Demuestre que el torque alrededor de cualquier eje paralelo a los conductores está dado por $B l \ell w \cos \theta$.

- 10.26. Una espira circular de radio r y corriente I yace en el plano $z = 0$. Halle el torque que se produce si la corriente está en dirección \mathbf{a}_ϕ y si existe un campo uniforme $\mathbf{B} = B_0(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z)/\sqrt{2}$.
Resp. $(\pi r^2 B_0 I / \sqrt{2}) \mathbf{a}_y$

- 10.27. Una espira de corriente de radio $r = 0.35 \text{ m}$ está centrada alrededor del eje x en el plano $x = 0$ y en $(0, 0, 0.35) \text{ m}$ la corriente está en dirección $-\mathbf{a}_y$ con magnitud 5.0 A . Halle el torque si el campo uniforme es $\mathbf{B} = 88.4(\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_z) \mu\text{T}$.
Resp. $1.70 \times 10^{-4} (-\mathbf{a}_y) \text{ N} \cdot \text{m}$

- 10.28. Una corriente de 2.5 A está dirigida generalmente en dirección \mathbf{a}_ϕ alrededor de una espira conductora cuadrada centrada en el origen, en el plano $z = 0$ con lados de 0.60 m paralelos a los ejes x e y . Halle las fuerzas y el torque sobre el lazo si $\mathbf{B} = 15 \text{ a}_y \text{ mT}$. ¿Sería diferente el torque si el lazo fuera rotado 45° en el plano $z = 0$?
Resp. $1.35 \times 10^{-2} (-\mathbf{a}_x) \text{ N} \cdot \text{m}; \quad \mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$

- 10.29. Una bobina rectangular de 200 vueltas, 0.30 m por 0.15 m , con una corriente de 5.0 A , está en un campo uniforme $B = 0.2 \text{ T}$. Halle el momento magnético m y el máximo torque.
Resp. $45.0 \text{ A} \cdot \text{m}^2, 9.0 \text{ N} \cdot \text{m}$

- 10.30.** Dos conductores de longitud 4.0 m están sobre un cascarón esférico de 2.0 m de radio centrado en el eje z tal como se muestra en la figura 10-21. Corrientes de 10.0 A están dirigidas tal como se muestra y hay un campo externo $\mathbf{B} = 0.5 \mathbf{a}_x$ T en $\phi = 0$ y $\mathbf{B} = -0.5 \mathbf{a}_x$ T en $\phi = \pi$. Halle la suma de las fuerzas y el torque alrededor del eje. *Resp.* $-40 \mathbf{a}_y$ N, 0

- 10.31.** Un cilindro circular recto contiene 550 conductores sobre la superficie curva y cada uno tiene una corriente de magnitud constante 7.5 A. El campo magnético es $\mathbf{B} = 38 \sin \phi \mathbf{a}_z$ mT. La dirección de la corriente es \mathbf{a}_z para $0 < \phi < \pi$ y $-\mathbf{a}_z$ para $\pi < \phi < 2\pi$. Halle la potencia mecánica requerida para hacer girar el cilindro a 1.600 revoluciones por minuto en dirección $-\mathbf{a}_\phi$. *Resp.* 60.2 W

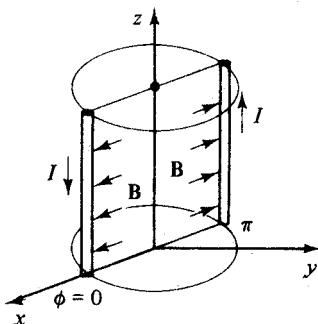


Fig. 10-21

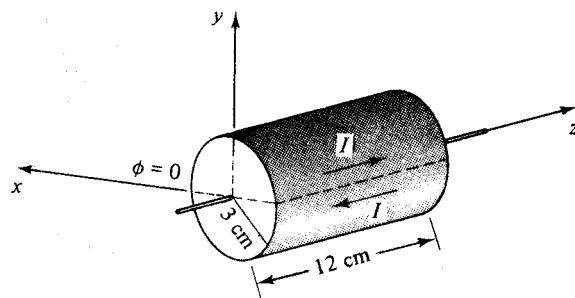


Fig. 10-22

- 10.32.** Obtenga una expresión para la potencia requerida para girar un conjunto cilíndrico de n conductores (ver figura 10-22) en contra del campo a N revoluciones por minuto si $\mathbf{B} = B_0 \sin 2\phi \mathbf{a}_z$, y las corrientes cambian de dirección en cada cuadrante, donde el signo de \mathbf{B} cambia. *Resp.* $\frac{B_0 n I \ell r N}{60}$ (W)

- 10.33.** Un conductor de longitud ℓ yace a lo largo del eje x con corriente I en dirección \mathbf{a}_x . Halle el trabajo realizado para rotarlo a velocidad constante, tal como se muestra en la figura 10-23, si el campo uniforme es $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{a}_z$. *Resp.* $\pi B_0 \ell^2 I / 4$

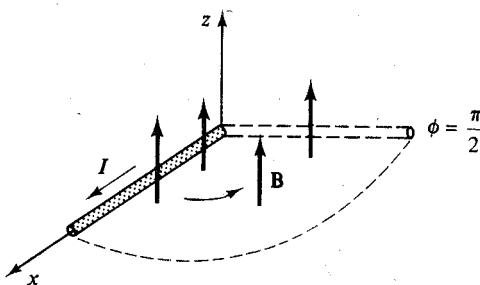


Fig. 10-23

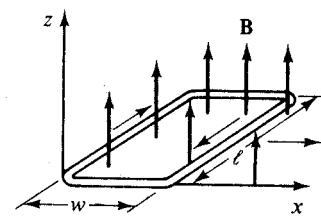


Fig. 10-24

- 10.34.** Una espira rectangular de corriente, de longitud ℓ a lo largo del eje y , está en un campo uniforme $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{a}_z$, tal como se muestra en la figura 10-24. Demuestre que el trabajo realizado para mover la espira a lo largo del eje x a velocidad constante es cero.

- 10.35.** Para la configuración que aparece en la figura 10-24, el campo magnético es

$$\mathbf{B} = B_0 \left(\sin \frac{\pi x}{w} \right) \mathbf{a}_z$$

Halle el trabajo realizado al mover la espira a una distancia w a lo largo del eje x , a velocidad constante, partiendo del punto que se muestra. *Resp.* $-4B_0 I \ell w / \pi$

- 10.36.** Un conductor de longitud 0.25 m yace a lo largo del eje y lleva una corriente de 25.0 A en dirección \mathbf{a}_y . Halle la potencia requerida para la translación paralela del conductor hasta $x = 5.0$ m a velocidad constante en 3.0 s, si el campo uniforme es $\mathbf{B} = 0.06 \mathbf{a}_z$ T. *Resp.* -0.625 W

- 10.37. Halle la velocidad tangencial de un protón en un campo $B = 30 \mu\text{T}$ si la trayectoria circular tiene un diámetro de 1 cm. *Resp.* 14.4 m/s
- 10.38. Una partícula alfa y un protón ($Q_\alpha = 2 Q_p$) entran un campo magnético $B = 1 \mu\text{T}$ con una velocidad inicial $U_0 = 8.5 \text{ m/s}$. Dadas las masas $6.68 \times 10^{-27} \text{ kg}$ y $1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$ para la partícula alfa y el protón respectivamente, halle el radio de las trayectorias circulares. *Resp.* 177 mm, 88.8 mm
- 10.39. Si un protón en un campo magnético completa una órbita circular en $2.35 \mu\text{s}$, ¿cuál es la magnitud de \mathbf{B} ? *Resp.* $2.79 \times 10^{-2} \text{ T}$
- 10.40. Un electrón en un campo $B = 4.0 \times 10^{-2} \text{ T}$ tiene una trayectoria circular de radio $0.35 \times 10^{-10} \text{ m}$ y un torque máximo de $7.85 \times 10^{-26} \text{ N} \cdot \text{m}$. Determine la velocidad angular. *Resp.* $2.0 \times 10^{16} \text{ rad/s}$.
- 10.41. Una región contiene campos \mathbf{B} y \mathbf{E} uniformes en la misma dirección, con $B = 650 \mu\text{T}$. Un electrón siguió una trayectoria helicoidal, cuyo círculo tiene un radio de 35 mm. Si el electrón tenía velocidad inicial cero en la dirección axial y avanzó 431 mm a lo largo del eje en el tiempo requerido para un círculo completo, halle la magnitud de \mathbf{E} . *Resp.* 1.62 kV/m

Inductancia y circuitos magnéticos

11.1 VOLTAJE DE AUTOINDUCCION

Un voltaje aparece en los terminales de una bobina de N vueltas, como la que aparece en la figura 11-1, donde el flujo ϕ común a todas las vueltas es variable con el tiempo. Este voltaje inducido se da por la ley de Faraday:

$$v = -N \frac{d\phi}{dt}$$

Para una discusión acerca de la polaridad, ver el capítulo 12. Si se define la *autoinductancia* de la bobina por

$$L = N \frac{d\phi}{di}$$

la ley de Faraday puede ser reescrita en la forma

$$v = -L \frac{di}{dt}$$

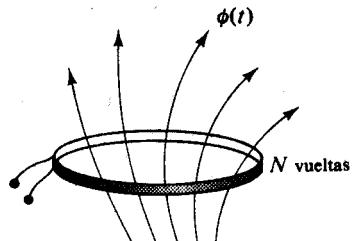


Fig. 11-1

Las unidades de L son *henrys*, donde $1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A}$.

En los cálculos de autoinductancia, el resultado que se obtiene con espacio vacío será muy diferente del que se obtiene cuando una porción de la región contiene materiales ferromagnéticos.

11.2 INDUCTORES E INDUCTANCIA

Un *inductor* (también llamado *inductancia*) está formado por dos conductores separados por espacio vacío, con una disposición tal que el flujo magnético de uno enlaza al otro. Para una corriente I estática (o al menos de baja frecuencia) en los conductores el flujo total que enlaza los conductores está dado por:

$$\lambda = \begin{cases} N\Phi & \text{para bobinas} \\ \Phi & \text{para otras disposiciones} \end{cases}$$

Entonces, la *inductancia* del inductor se define como

$$L = \frac{\lambda}{I}$$

Debe notarse que L será siempre el producto de μ_0 y un factor geométrico que tiene dimensiones de longitud. Compárese ésta con las expresiones para la resistencia R (capítulo 6) y la capacitancia C (capítulo 7).

EJEMPLO 1: Halle la inductancia por unidad de longitud de un conductor coaxial tal como el que se muestra en la figura 11-2.

Entre los conductores,

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi$$

Las corrientes de los dos conductores están enlazadas por el flujo a través de la superficie $\phi = \text{const}$. Para una longitud ℓ ,

$$\lambda = \int_0^\ell \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr dz = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

y

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (\text{H/m})$$

Las expresiones para la energía almacenada en el campo magnético del análisis de circuitos y la teoría de campos proveen otra expresión definitoria para la inductancia

$$W = \frac{1}{2} L I^2 \quad \text{y} \quad W = \frac{1}{2} \int_v (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dv$$

dan

$$L = \int_v \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dv}{I^2}$$

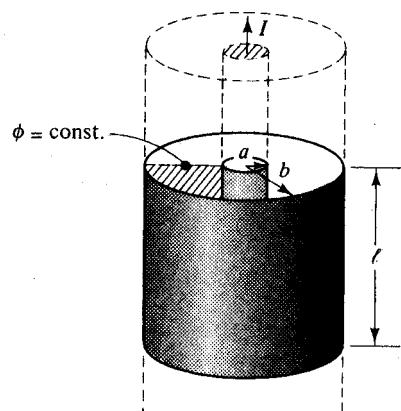


Fig. 11-2

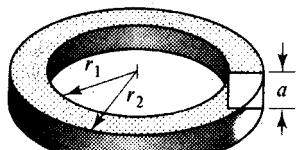
EJEMPLO 2: El conductor coaxial del ejemplo 1 puede ser tratado con cualquiera de los dos métodos. Usando los campos \mathbf{B} y \mathbf{H} del ejemplo 1,

$$L = \frac{\mu_0}{I^2} \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \int_a^b \left(\frac{I^2}{4\pi^2 r^2} \right) r dr d\phi dz = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (\text{H/m})$$

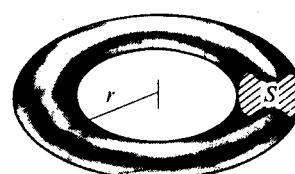
11.3 FORMAS ESTANDAR

Además de los conductores coaxiales, las configuraciones de conductores más comunes para los que se requiere la inductancia se muestran en las figuras 11-3 a 11-9. Las ecuaciones definitorias dadas antes pueden aplicarse para desarrollar las expresiones para L , excepto en el caso de bobinas con núcleo de aire, donde deben derivarse empíricamente. Todas las dimensiones se dan en metros.



N vueltas

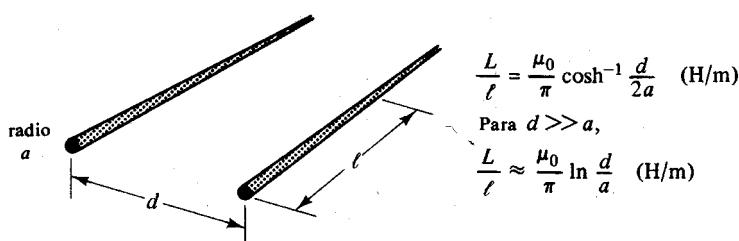
Fig. 11-3. Toroide, sección transversal cuadrada



$$L \approx \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi r} \quad (\text{H})$$

(Suponiendo densidad de flujo promedio en radio promedio r)

Fig. 11-4. Toroide, sección transversal general S .



$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2a} \quad (\text{H/m})$$

Para $d \gg a$,

$$\frac{L}{\ell} \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a} \quad (\text{H/m})$$

Fig. 11-5. Conductores paralelos de radio a

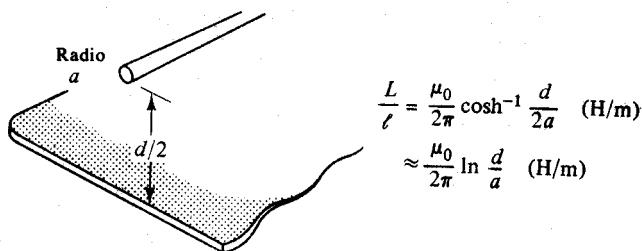


Fig. 11-6. Conductor cilíndrico paralelo a un plano de tierra

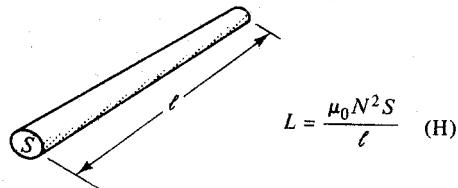
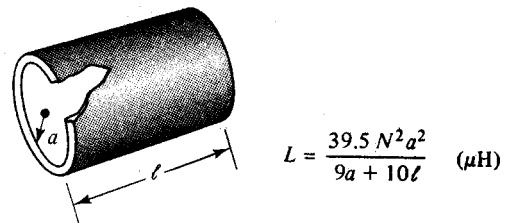
Fig. 11-7. Solenoide largo de sección transversal pequeña, S 

Fig. 11-8. Bobina de una sola capa con núcleo de aire

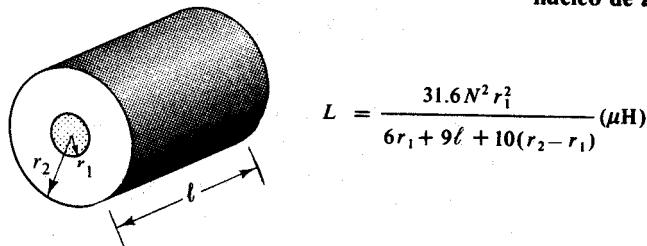


Fig. 11-9. Bobina de varias capas con núcleo de aire

11.4 INDUCTANCIA INTERNA

El flujo magnético tiene lugar dentro de la sección transversal de un conductor tanto como fuera de ella. Este flujo interno da lugar a una *inductancia interna*, que es a menudo pequeña comparada con la inductancia externa y frecuentemente ignorada. En la figura 11-10(a) aparece un conductor de sección transversal circular con una corriente I que se supone uniformemente distribuida sobre el área (esta suposición es válida sólo con bajas frecuencias, ya que el efecto pelicular a las altas frecuencias obliga la corriente a concentrarse hacia la superficie externa). Dentro del conductor de radio a , la ley de Ampere da

$$\mathbf{H} = \frac{Ir}{2\pi a^2} \mathbf{a}_\phi \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2} \mathbf{a}_\phi$$

La pieza recta de conductor que aparece en figura 11-10(a) debe imaginarse como una pequeña sección de un toroide infinito, como se sugiere en la figura 11-10(b). Los filamentos de corriente se convierten en círculos de radio infinito. Las líneas de flujo $d\Phi$ a través de la franja ℓ/dr encierran sólo aquellos filamentos cuya distancia desde el eje del conductor es menor que r . De esta manera, una superficie abierta limitada por uno de esos filamentos es cortada una vez (o un número impar de veces) por las líneas de $d\Phi$, mientras que, para un filamento tal como 1 ó 2, la superficie es cortada cero veces (o un número par de veces). Se deduce que $d\Phi$ se enlaza sólo con la fracción $\pi r^2/\pi a^2$ de la corriente total, de tal manera que el enlace total de flujo está dado por la "suma" ponderada

$$\lambda = \int \left(\frac{\pi r^2}{\pi a^2} \right) d\Phi = \int_0^a \left(\frac{\pi r^2}{\pi a^2} \right) \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2} \ell dr = \frac{\mu_0 I \ell}{8\pi}$$

$$\text{y} \quad \frac{L}{\ell} = \frac{\lambda/I}{\ell} = \frac{\mu_0}{8\pi} = \frac{1}{2} \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

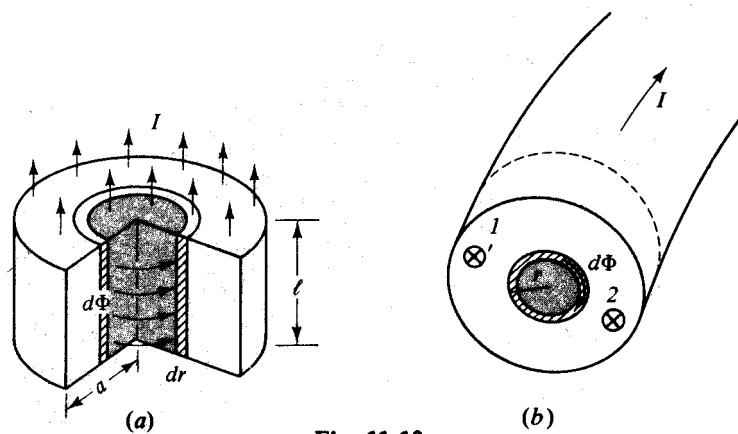


Fig. 11-10

Este resultado es independiente del radio del conductor. La inductancia total es la suma de las inductancias externa e interna. Si la inductancia externa es del orden de $\frac{1}{2} \times 10^{-7}$ H/m, la inductancia interna no debe ignorarse.

11.5 CIRCUITOS MAGNETICOS

En el capítulo 9 se examinaron la intensidad del campo magnético H , el flujo Φ , y la densidad de flujo magnético B y se resolvieron algunos problemas para los cuales el medio era el espacio vacío. Por ejemplo, cuando la ley de Ampère se aplica a la trayectoria cerrada C a través de la bobina larga de núcleo de aire mostrada en la figura 11-11, el resultado es

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$$

Pero como las líneas de flujo se esparcen bastante fuera de la bobina, B es pequeño allí. El flujo se restringe efectivamente al interior de la bobina, donde

$$H \approx \frac{NI}{\ell}$$

Los materiales ferromagnéticos tienen permeabilidades relativas μ_r del orden de miles. Por consiguiente, la densidad de flujo $B = \mu_0 \mu_r H$ es, para un H dado, mucho mayor de lo que resultaría en el espacio vacío. En la figura 11-12, la bobina no está distribuida sobre el núcleo de hierro. Aún así, el producto NI de la bobina causa un flujo Φ que sigue el núcleo. Podría decirse que el flujo prefiere el núcleo al espacio que queda alrededor, en una relación de varios miles a uno. Esto es tan diferente del magnetismo de espacio vacío del capítulo 9 que toda una área temática completa, conocida como *magnetismo de núcleo de hierro* o *circuitos magnéticos* ha sido desarrollada. Esta breve introducción al tema supone que todo el flujo está dentro del núcleo. Más aún, se supone que el flujo está uniformemente distribuido sobre la sección transversal del núcleo. Las longitudes del núcleo necesarias para calcular las caídas NI , son longitudes medias.

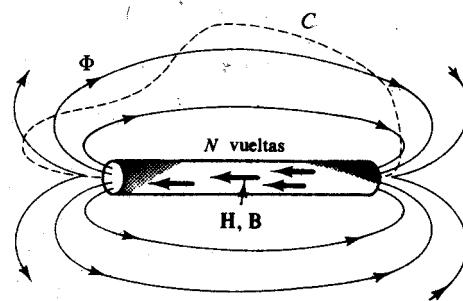


Fig. 11-11

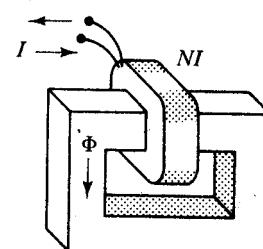
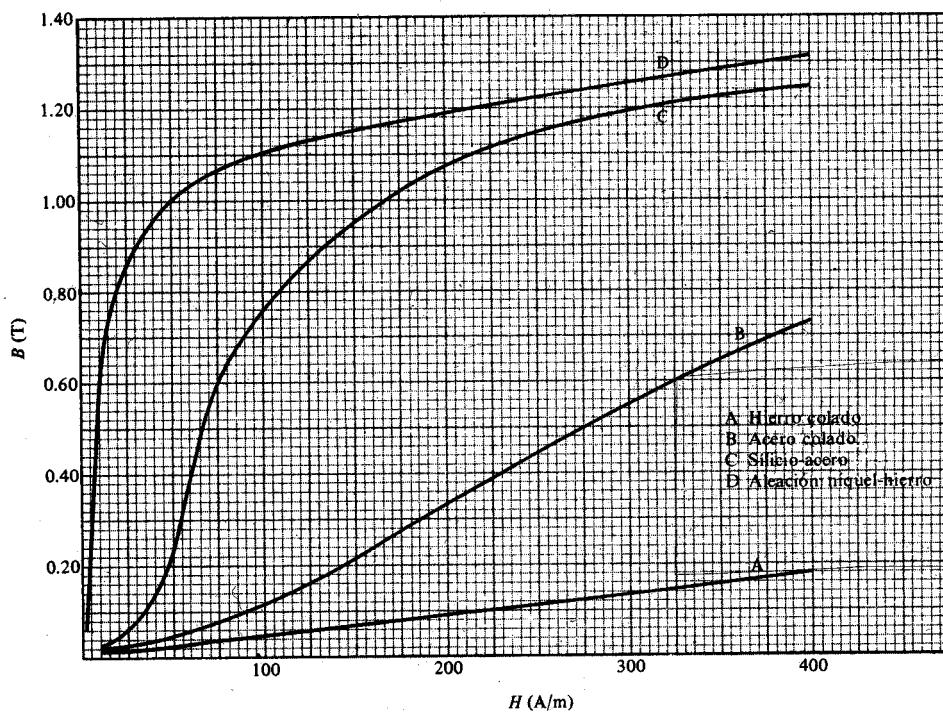
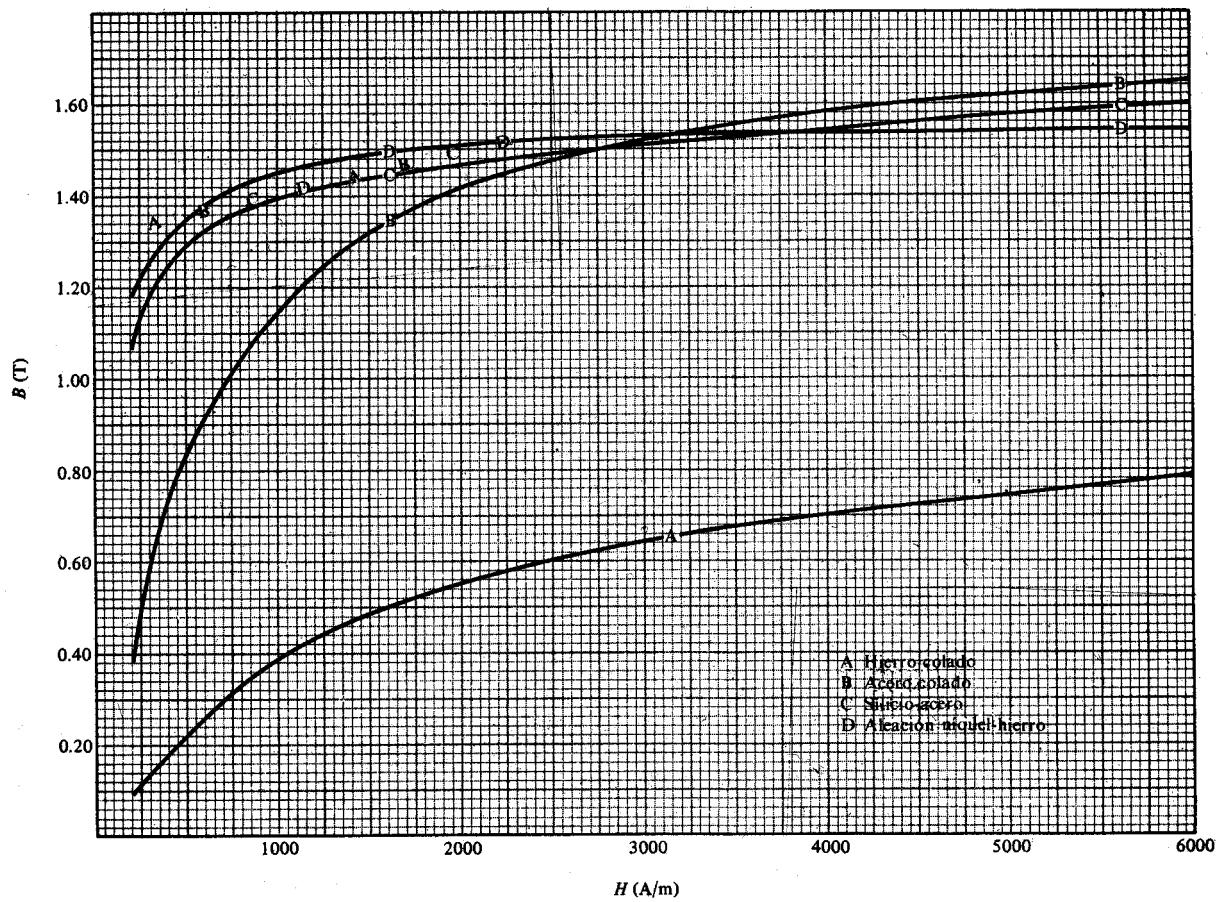


Fig. 11-12

11.6 ALINEALIDAD DE LA CURVA $B-H$

Se puede probar una muestra de material ferromagnético aplicando valores crecientes de H y midiendo los correspondientes valores de la densidad de flujo B . En las figuras 11-13 y 11-14 aparecen algunas curvas de

Fig. 11-13. Curvas B - H , $H < 400$ A/mFig. 11-14. Curvas B - H , $H > 400$ A/m

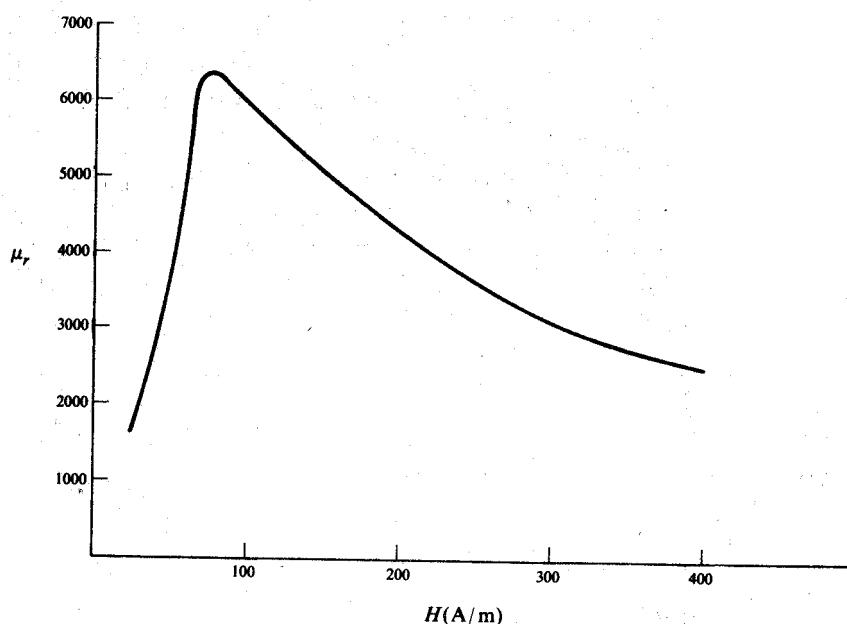


Fig. 11-15

magnetización, o simplemente *curvas B-H*, para algunos materiales ferromagnéticos comunes. La permeabilidad puede calcularse de la curva *B-H* por el uso de $\mu_r = B/\mu_0 H$. La figura 11-15 muestra la extrema alinealidad de μ_r contra H para silicio-acero. Esta alinealidad requiere que los problemas sean resueltos gráficamente.

11.7 LEY DE AMPERE PARA CIRCUITOS MAGNETICOS

Una bobina de N vueltas y corriente I alrededor de un núcleo ferromagnético produce una *fuerza magnetomotriz* (fmm) dada por NI . Algunas veces se usa el símbolo F para simbolizar fmm. Las unidades son amperios. La ley de Ampère, aplicada alrededor de la trayectoria en el centro del núcleo que aparece en la figura 11-16(a) da

$$\begin{aligned} F &= NI = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_1 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_2 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_3 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \\ &= H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 \end{aligned}$$

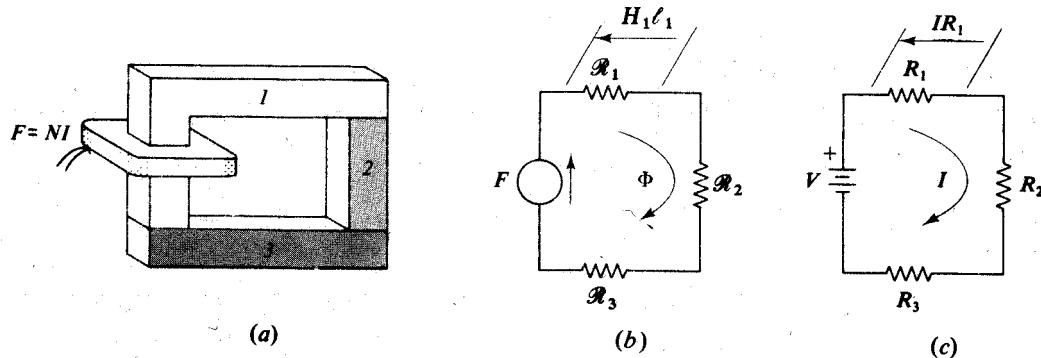


Fig. 11-16

La comparación con la ley de Kirchhoff alrededor de una espira simple cerrada con tres resistencias y una fem V .

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

sugiere que F puede visualizarse como aumento en NI y los términos $H\ell$ considerarse como caídas de NI , en analogía con la subida de voltaje V y las caídas de voltaje V_1, V_2, V_3 . La analogía se desarrolla en la figura 11-16(b) y (c). El flujo Φ en la figura 11-16(b) es análogo a la corriente I , y la *reluctancia* \mathcal{R} , es análoga a la resistencia R . Una expresión para la reluctancia puede desarrollarse de la manera siguiente:

$$NI \text{ caída de} = H\ell = BA \left(\frac{\ell}{\mu A} \right) = \Phi \mathcal{R}$$

por tanto

$$\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu A} \quad (\text{H}^{-1})$$

Si las reluctancias son conocidas, entonces la ecuación

$$F = NI = \Phi(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3)$$

puede escribirse para el circuito magnético de la figura 11-15(b). Sin embargo, μ_r debe conocerse para cada material antes que pueda calcularse su reluctancia. Y solamente después que B o H se conozcan puede conocerse el valor de μ_r . Esto contrasta con la relación.

$$R = \frac{\ell}{\sigma A}$$

(Sección 6.7), en el que la conductividad σ es independiente de la corriente.

11.8 NUCLEOS CON ESPACIOS DE AIRE

Los circuitos magnéticos con pequeños espacios de aire son muy comunes. Los espacios, generalmente, se mantienen tan pequeños como sea posible, puesto que la caída NI en el espacio de aire es a menudo mucho mayor que la caída en el núcleo. El flujo se desparrama hacia afuera en el espacio, de tal manera que el área del espacio excede el área del núcleo adyacente. Siempre que la longitud del espacio ℓ_a sea menor que $1/10$ de la dimensión más pequeña del núcleo, un área aparente S_a , del espacio de aire puede calcularse. Para un núcleo rectangular de dimensiones a y b ,

$$S_a = (a + \ell_a)(b + \ell_a)$$

Si el flujo total en el espacio de aire es conocido, H_a y $H_a \ell_a$ puede encontrarse directamente,

$$H_a = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\Phi}{S_a} \right) \quad H_a \ell_a = \frac{\ell_a \Phi}{\mu_0 S_a}$$

Para un núcleo uniforme de hierro de longitud ℓ_i con un espacio sencillo de aire, la ley de Ampere establece que

$$NI = H_i \ell_i + H_a \ell_a = H_i \ell_i + \frac{\ell_a \Phi}{\mu_0 S_a}$$

Si el flujo Φ es conocido, no es difícil calcular la caída NI en el espacio de aire, obtener B_i , tomar H_i de la curva $B-H$ apropiada y encontrar la caída NI en el núcleo $H_i \ell_i$. La suma es el NI necesario para establecer el flujo Φ . Sin embargo, con un NI dado, obtener B_i y Φ , es cuestión de prueba y error como se verá en los problemas. También existen métodos gráficos de solución.

11.9 BOBINAS MULTIPLES

Dos o más bobinas podrían enrollarse en un núcleo de tal manera que sus fmm's se ayudarán mutuamente o se opusieran. Por tanto, un método para indicar la polaridad se da en la figura 11-17. La dirección supuesta para el flujo Φ podría ser incorrecta, al igual que una corriente supuesta en un circuito dc con dos o más fuentes de voltaje puede ser incorrecta. Un resultado negativo significa simplemente que el flujo está en la dirección opuesta.

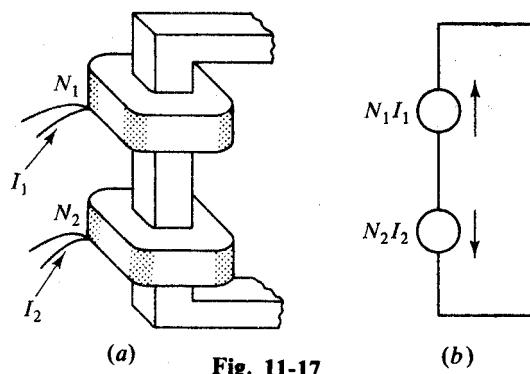


Fig. 11-17

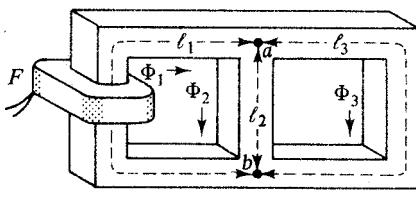
11.10 CIRCUITOS MAGNETICOS PARALELOS

El método de resolver un circuito magnético paralelo está sugerido por el circuito equivalente de dos bucles que aparece en la figura 11-19(b). En el extremo de la izquierda hay una subida de NI y una caída de NI . La caída NI entre las uniones a y b puede escribirse para cada extremidad así:

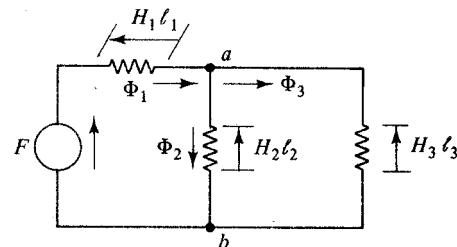
$$F - H_1\ell_1 = H_2\ell_2 = H_3\ell_3$$

y los flujos satisfacen

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$$



(a)



(b)

Fig. 11-18

Si hay diferentes materiales para las partes del núcleo se necesitará trabajar con varias curvas $B-H$. Un espacio de aire en una de las extremidades conducirá a $H_i\ell_i + H_a\ell_a$ para la fmm entre las uniones, para esa extremidad.

Los circuitos magnéticos equivalentes deben dibujarse para problemas de circuitos magnéticos paralelos. Es una buena práctica marcar los tipos de material, áreas de secciones transversales y longitudes medias directamente sobre el diagrama. En problemas más complejos un esquema como el de la tabla 11-1 puede ser útil. Los datos se insertan directamente en la tabla y las cantidades restantes son entonces calculadas o tomadas de la curva $B-H$.

Tabla 11-1

Parte	Material	Area	ℓ	Φ	B	H	$H\ell$
1							
2							
3							

Problemas resueltos

- 11.1.** Halle la inductancia por unidad de longitud en el cable coaxial de la figura 11-2 si $a = 1$ mm y $b = 3$ mm. Suponga $\mu_r = 1$ y omita la inductancia interna.

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} \ln 3 = 0.22 \mu\text{H/m}$$

- 11.2.** Halle la inductancia por unidad de longitud de los conductores cilíndricos paralelos que aparecen en la figura 11-5, donde $d = 25$ pies, $a = 0.803$ pul.

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{\pi} \cosh^{-1} \frac{d}{2a} = (4 \times 10^{-7}) \cosh^{-1} \frac{25(12)}{2(0.803)} = 2.37 \mu\text{H/m}$$

La fórmula aproximada da

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a} = 2.37 \mu\text{H/m}$$

Cuando $d/a \geq 10$, la fórmula aproximada puede usarse con un error menor de 0.5%.

- 11.3.** Un conductor circular con el mismo radio que el del problema 11.2 está a 12.5 pies de un plano conductor infinito. Halle la inductancia.

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d}{a} = (2 \times 10^{-7}) \ln \frac{25(12)}{0.803} = 1.18 \mu\text{H/m}$$

Este resultado es 1/2 del problema 11.2. Un plano conductor puede insertarse en el medio de los conductores de la figura 11-5. La inductancia entre cada conductor y el plano es $1.18 \mu\text{H/m}$. Como están en serie, la inductancia total es $2.37 \mu\text{H/m}$.

- 11.4.** Un solenoide con núcleo de aire de 300 vueltas y de 0.50 m de longitud tiene una capa sencilla de conductores enrollados con radio de 0.02 m. Halle la inductancia L .

Usando la fórmula empírica

$$L = \frac{39.5 N^2 a^2}{9a + 10\ell} = 275 \mu\text{H}$$

La ecuación para un solenoide largo de pequeña sección transversal es

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(300)^2 \pi (0.02)^2}{0.50} = 284 \mu\text{H}$$

Esta última ecuación es una aproximación basada en la suposición de que la intensidad del campo magnético H es constante en todo el interior de la bobina.

- 11.5.** Halle la inductancia de la bobina que aparece en la figura 11-9 donde $N = 300$, $r_1 = 9$ mm, $r_2 = 25$ mm, $\ell = 20$ mm.

$$L = \frac{31.6(300)^2 (9 \times 10^{-3})^2}{54 \times 10^{-3} + 180 \times 10^{-3} + 160 \times 10^{-3}} = 585 \mu\text{H}$$

- 11.6.** Suponga que el toroide con núcleo de aire de la figura 11-4 tiene una sección transversal circular de radio 4 mm. Halle la inductancia si hay 2.500 vueltas y si el radio medio es $r = 20$ mm.

$$L = \frac{\mu N^2 S}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(2500)^2 \pi (0.004)^2}{2\pi(0.020)} = 3.14 \text{ mH}$$

- 11.7.** Suponga que el toroide de núcleo de aire de la figura 11-3 tiene 700 vueltas, un radio interno de 1 cm, un radio externo de 2 cm y altura $a = 1.5$ cm. halle L utilizando (a) la fórmula para toroides de sección transversal cuadrada, (b) la fórmula aproximada para un toroide general, que supone un H uniforme a un radio medio.

$$(a) L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(700)^2(0.015)}{2\pi} \ln 2 = 1.02 \text{ mH}$$

$$(b) L = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(700)^2(0.01)(0.015)}{2\pi(0.015)} = 0.98 \text{ mH}$$

Con un radio más grande comparado con la sección transversal, las dos fórmulas ofrecen el mismo resultado. Ver problema 11.29.

- 11.8.** Utilice la integral de energía para encontrar la inductancia interna por unidad de longitud de un conductor cilíndrico de radio a .

A una distancia $r \leq a$ del eje del conductor,

$$\mathbf{H} = \frac{Ir}{2\pi a^2} \mathbf{a}_\phi \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2} \mathbf{a}_\phi$$

$$\text{de lo que se deduce} \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^4} r^2$$

La inductancia correspondiente al almacenamiento de energía dentro de una longitud ℓ del conductor es, entonces,

$$L = \int \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dv}{I^2} = \frac{\mu_0}{4\pi^2 a^4} \int_0^a r^2 2\pi r \ell dr = \frac{\mu_0 \ell}{8\pi}$$

o $L/\ell = \mu_0/8\pi$. Esto concuerda con el resultado de la sección 11.4.

- 11.9.** El núcleo de hierro colado que se muestra en la figura 11-9 tiene un radio interno de 7 cm y un radio externo de 9 cm. Halle el flujo Φ si la fmm de la bobina es 500 A.

$$\ell = 2\pi(0.08) = 0.503 \text{ m}$$

$$H = \frac{F}{\ell} = \frac{500}{0.503} = 995 \text{ A/m}$$

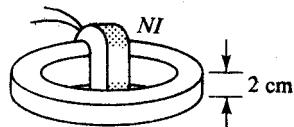


Fig. 11-19

De la curva $B-H$ para hierro colado en la figura 11-14, $B = 0.40 \text{ T}$.

$$\Phi = BS = (0.40)(0.02)^2 = 0.16 \text{ mWb}$$

- 11.10.** El circuito magnético que se muestra en la figura 11-20 tiene una parte de acero colado en forma de C, 1, y una parte de hierro colado, 2. Halle la corriente necesaria en la bobina de 150 vueltas si la densidad de flujo en el hierro colado es $B_2 = 0.45 \text{ T}$.

Las áreas calculadas son $S_1 = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ y $S_2 = 3.6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$. Las longitudes medias son

$$\ell_1 = 0.11 + 0.11 + 0.12 = 0.34 \text{ m}$$

$$\ell_2 = 0.12 + 0.009 + 0.009 = 0.138 \text{ m}$$

De la curva $B-H$ para hierro colado en la figura 11-14, $H_2 = 1270 \text{ A/m}$.

$$\Phi = B_2 S_2 = (0.45)(3.6 \times 10^{-4}) = 1.62 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1} = 0.41 \text{ T}$$

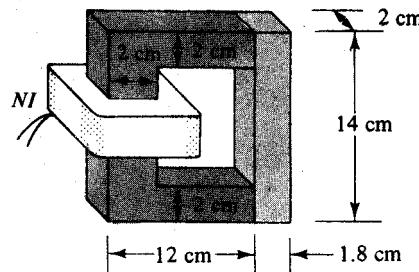


Fig. 11-20

Entonces, de la curva de acero colado en la figura 11-13, $H_1 = 233 \text{ A/m}$.

El circuito equivalente, figura 11-21, da la ecuación

$$\begin{aligned} F &= NI = H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 \\ 150I &= 233(0.34) + 1270(0.138) \\ I &= 1.70 \text{ A} \end{aligned}$$

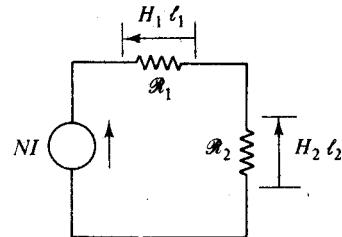


Fig. 11-21

- 11.11.** El circuito magnético que aparece en la figura 11-22 es de hierro colado con una longitud media $\ell_i = 0.44 \text{ m}$ y sección transversal cuadrada de $0.02 \times 0.02 \text{ m}$. La longitud de la brecha de aire es $\ell_a = 2 \text{ mm}$ y la bobina contiene 400 vueltas. Halle la corriente I necesaria para establecer un flujo en el espacio de 0.141 mWb .

El flujo Φ en el espacio es también el flujo en el núcleo.

$$B_i = \frac{\Phi}{S_i} = \frac{0.141 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-4}} = 0.35 \text{ T}$$

De la figura 11-14, $H_i = 850 \text{ A/m}$. Entonces

$$H_i \ell_i = 850(0.44) = 374 \text{ A}$$

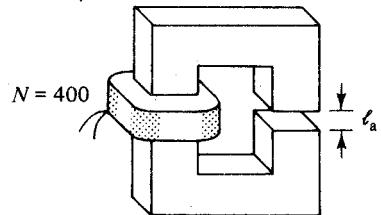


Fig. 11-22

Para el espacio de aire, $S_a = (0.02 + 0.002)^2 = 4.84 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, y así

$$H_a \ell_a = \frac{\Phi}{\mu_0 S_a} \ell_a = \frac{0.141 \times 10^{-3}}{(4\pi \times 10^{-7})(4.84 \times 10^{-4})} (2 \times 10^{-3}) = 464 \text{ A}$$

Por tanto, $F = H_i \ell_i + H_a \ell_a = 838 \text{ A}$ y

$$I = \frac{F}{N} = \frac{838}{400} = 2.09 \text{ A}$$

- 11.12.** Determine la reluctancia de un espacio de aire en una máquina de donde el área aparente es $S_a = 4.26 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ y la longitud del espacio $\ell_a = 5.6 \text{ mm}$.

$$\mathcal{R} = \frac{\ell_a}{\mu_0 S_a} = \frac{5.6 \times 10^{-3}}{(4\pi \times 10^{-7})(4.26 \times 10^{-2})} = 1.05 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

- 11.13.** El núcleo magnético de hierro colado que aparece en la figura 11-23 tiene un área $S_i = 4 \text{ cm}^2$ y una longitud media 0.438 m . El espacio de aire de 2 mm tiene un área aparente $S_a = 4.84 \text{ cm}^2$. Determine el flujo Φ en el espacio.

El núcleo es bastante largo comparado con la longitud del espacio y el hierro colado no es particularmente un buen material magnético. Como primera estimación, por tanto, suponga que 600 del total de amperios-vuelta caen en el espacio, es decir, $H_a \ell_a = 600 \text{ A}$.

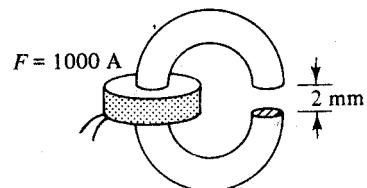


Fig. 11-23

$$H_a \ell_a = \frac{\Phi}{\mu_0 S_a} \ell_a$$

$$\Phi = \frac{600(4\pi \times 10^{-7})(4.84 \times 10^{-4})}{2 \times 10^{-3}} = 1.82 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

Entonces $B_i = \Phi / S_i = 0.46 \text{ T}$, y de la figura 11-14, $H_i = 1340 \text{ A/m}$. La caída del núcleo es entonces

$$H_i \ell_i = 1340(0.438) = 587 \text{ A}$$

así que

$$H_i \ell_i + H_a \ell_a = 1187 \text{ A}$$

Esta suma excede los 100 A fmm de la bobina. Por consiguiente, deben tratarse valores de B_i menores que 0.46 T hasta que la suma de $H_i \ell_i$ y $H_a \ell_a$ sea 1000 A. Los valores $B_i = 0.41$ T y $\Phi = 1.64 \times 10^{-4}$ Wb resultan en una suma muy cercana a 1000 A.

- 11.14.** Resuelva el problema 11.13 utilizando la reluctancia y el circuito magnético equivalente, figura 11-24.

De los valores de B_i y H_i obtenidos en el problema 11.13,

$$\mu_0 \mu_r = \frac{B_i}{H_i} = 3.83 \times 10^{-4} \text{ H/m}$$

Entonces, para el núcleo,

$$\mathcal{R}_i = \frac{\ell_i}{\mu_0 \mu_r S_i} = \frac{0.438}{(3.83 \times 10^{-4})(4 \times 10^{-4})} = 2.86 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

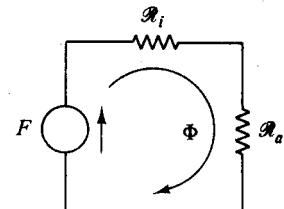


Fig. 11-24

y para el espacio de aire,

$$\mathcal{R}_a = \frac{\ell_a}{\mu_0 S_a} = \frac{2 \times 10^{-3}}{(4\pi \times 10^{-7})(4.84 \times 10^{-4})} = 3.29 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

La ecuación del circuito,

$$F = \Phi(\mathcal{R}_i + \mathcal{R}_a)$$

da

$$\Phi = \frac{1000}{(2.86 \times 10^6 + 3.29 \times 10^6)} = 1.63 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

La correspondiente densidad de flujo en el hierro es 0.41 T, en concordancia con los resultados del problema 11.13. Mientras la reluctancia de la brecha puede calcularse de las dimensiones y μ_0 , no sucede lo mismo con la reluctancia del hierro. La razón es que μ_r para el hierro depende de los valores de B_i y H_i .

- 11.15.** Resuelva el problema 11.13 gráficamente con una curva de Φ vs F.

En la primera columna de la tabla 11-2 se listan los valores de H_i de 700 hasta 1100 A/m. Los valores correspondientes de B_i se encuentran de la curva de hierro colado, figura 11-14. Los valores de Φ y $H_i \ell_i$ se calculan y $H_a \ell_a$ se obtiene de $\Phi \ell_a / \mu_0 S_a$. Entonces F se da como la suma de $H_i \ell_i$ y $H_a \ell_a$. Como el espacio de aire es lineal, sólo se requieren dos puntos.

Tabla 11-2

H_i (A/m)	B_i (T)	Φ (Wb)	$H_i \ell_i$ (A)	$H_a \ell_a$ (A)	F (A)
700	0.295	1.18×10^{-4}	307	388	695
800	0.335	1.34×10^{-4}	350	441	791
900	0.365	1.46×10^{-4}	395	480	874
1000	0.400	1.60×10^{-4}	438	526	964
1100	0.420	1.68×10^{-4}	482	552	1034

El flujo Φ para $F = 1000$ A es como se ve en la figura 11-25, aproximadamente igual a 1.65×10^{-4} Wb.

Este método es simplemente un trazado de los datos de prueba y error usados en el problema 11.13. Sin embargo, es muy útil si se examinan varias bobinas o corrientes de bobinas.

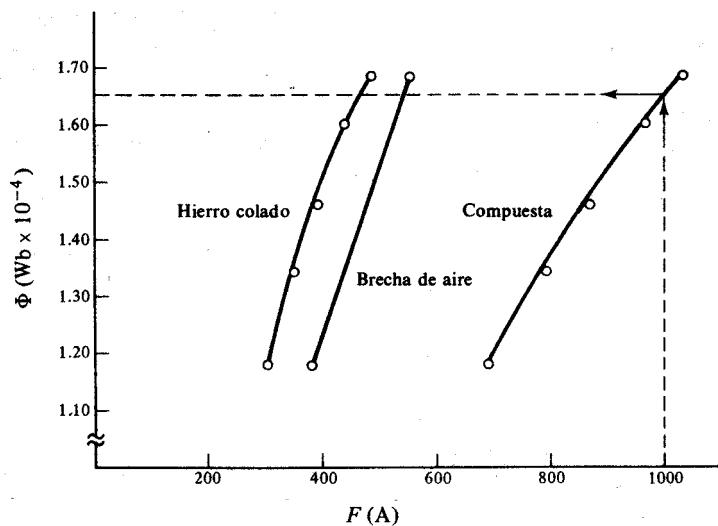


Fig. 11-25

- 11.16. Determine los flujos Φ en el núcleo del problema 11.13 para una fmm de bobina de 800 y 1200 A. Utilice un método gráfico y la *línea negativa de la brecha de aire*.

Los datos de Φ vs $H_i \ell_i$ para el núcleo de hierro colado, desarrollados en el problema 11.5, se grafican en la figura 11-26. El flujo Φ del espacio vs F es lineal. Un extremo de la línea negativa del espacio para una fmm de bobina de 800 A está en $\Phi = 0$, $F = 800$ A. El otro extremo supone $H_a \ell_a = 800$ A, de donde

$$\Phi = \frac{\mu_0 S_a (H_a \ell_a)}{\ell_a} = 2.43 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

lo que localiza este extremo en $\Phi = 2.43 \times 10^{-4}$ Wb, $F = 0$.

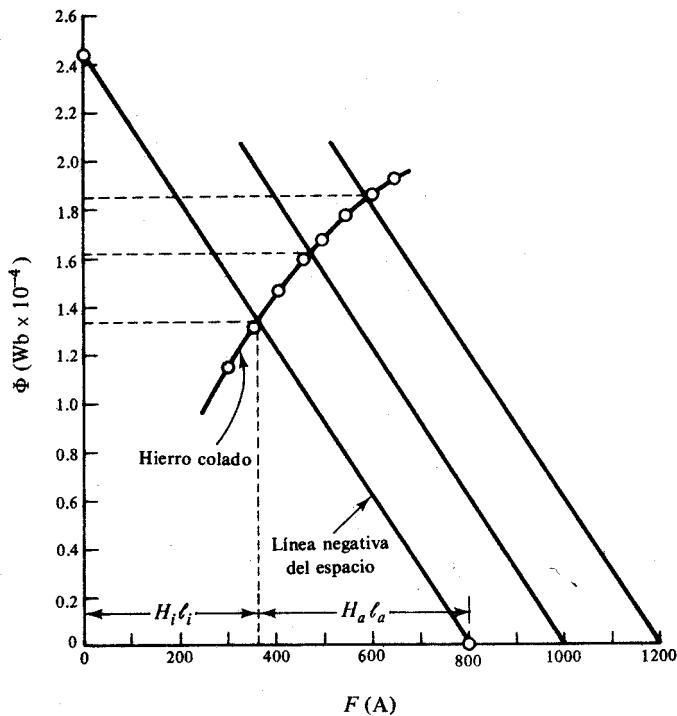


Fig. 11-26

La intersección de la línea negativa del espacio con la curva no lineal de Φ contra F para el núcleo de hierro colado da $\Phi = 1.34 \times 10^{-4}$ Wb. Otras líneas negativas de espacio tienen la misma pendiente negativa. Para una bobina de fmm de 1000 A, $\Phi = 1.62 \times 10^{-4}$ Wb y para 1200 A, $\Phi = 1.85 \times 10^{-4}$ Wb.

- 11.17.** Resuelva el problema 11.13 para una fmm de bobina de 1000 A utilizando la curva B - H para el hierro colado.

Este método evita la construcción de una curva adicional como en los problemas 11.15 y 11.16. Ahora, para trazar la línea del espacio sobre la curva B - H del hierro, deben hacerse algunos ajustes para las diferentes áreas y longitudes. La tabla 11-3 sugiere los cálculos necesarios.

$$\frac{F}{\ell_i} = \frac{1000}{0.438} = 2283 \text{ A/m}$$

Tabla 11-3

B_a (T)	H_a (A/m)	$B_a \left(\frac{S_a}{S_i} \right)$ (T)	$H_a \left(\frac{\ell_a}{\ell_i} \right)$ (A/m)	$\frac{F}{\ell_i} - H_a \left(\frac{\ell_a}{\ell_i} \right)$ (A/m)
0.10	0.80×10^5	0.12	363	1920
0.30	2.39×10^5	0.36	1091	1192
0.50	3.98×10^5	0.61	1817	466

Los datos de la tercera y la quinta columna pueden colocarse directamente sobre la curva B - H para el hierro, como se muestra en la figura 11-27. El espacio de aire es lineal y sólo se necesitan dos puntos. Se puede ver que la respuesta es $B_i = 0.41$ T. El método puede utilizarse también con dos partes alineales de núcleos (ver problema 11.18).

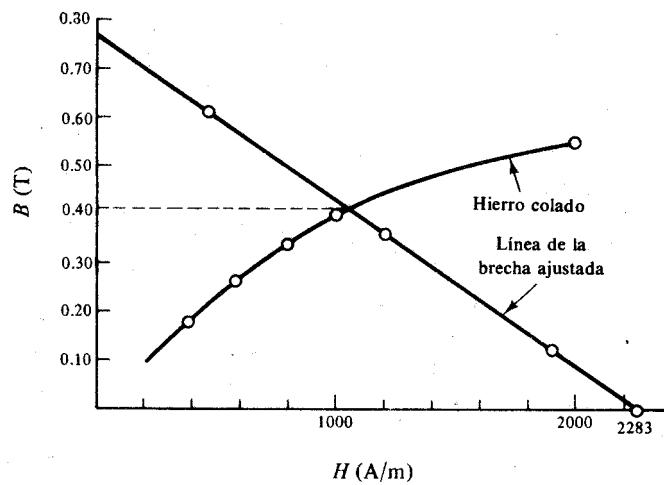


Fig. 11-27

- 11.18.** El circuito magnético de la figura 11-28 es de una aleación níquel-hierro en la parte 1, con $\ell_1 = 10$ cm y $S_1 = 2.25 \text{ cm}^2$ y de acero colado en la parte 2, con $\ell_2 = 8$ cm y $S_2 = 3 \text{ cm}^2$. Halle las densidades de flujo B_1 y B_2 .

Los datos de la parte 2 de acero colado serán convertidos y graficados en la curva de B - H para la parte 1 de aleación níquel-hierro ($F/\ell_1 = 400$ A/m). La tabla 11-4 sugiere los cálculos necesarios.

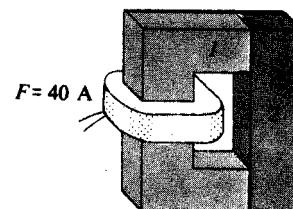


Fig. 11-28

Tabla 11-4

B_2 (T)	H_2 (A/m)	$B_2 \left(\frac{S_2}{S_1} \right)$ (T)	$H_2 \left(\frac{\ell_2}{\ell_1} \right)$ (A/m)	$\frac{F}{\ell_1} - H_2 \left(\frac{\ell_2}{\ell_1} \right)$ (A/m)
0.33	200	0.44	160	240
0.44	250	0.59	200	200
0.55	300	0.73	240	160
0.65	350	0.87	280	120
0.73	400	0.97	320	80
0.78	450	1.04	360	40
0.83	500	1.11	400	0

De la gráfica, figura 11-29, $B_1 = 1.01$ T. Entonces, como $B_1 S_1 = B_2 S_2$,

$$B_2 = 1.01 \left(\frac{2.25 \times 10^{-4}}{3 \times 10^{-4}} \right) = 0.76 \text{ T}$$

Estos valores pueden verificarse obteniendo los H_1 y H_2 correspondientes de las curvas B - H apropiados y sustituyendo en

$$F = H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2$$

- 11.19.** El circuito paralelo magnético de acero colado de la figura 11-30(a) tiene una bobina de 500 vueltas. Las longitudes medias son $\ell_2 = \ell_3 = 10$ cm, $\ell_1 = 4$ cm. Halle la corriente en la bobina si $\Phi_3 = 0.173$ mWb.

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$$

Como el área de la sección transversal de la extremidad central es dos veces la de las extremidades laterales, la densidad de flujo es la misma en todo el núcleo, es decir:

$$B_1 = B_2 = B_3 = \frac{0.173 \times 10^{-3}}{1.5 \times 10^{-4}} = 1.15 \text{ T}$$

La figura 11-14 da $H = 1030$ A/m, correspondiente a $B = 1.15$ T. La caída NI entre los puntos a y b se utiliza ahora para escribir la siguiente ecuación [ver figura 11-30(b)]:

$$F - H\ell_1 = H\ell_2 = H\ell_3 \quad 6 \quad F = H(\ell_1 + \ell_2) = 1030(0.14) = 144.2 \text{ A}$$

Entonces

$$I = \frac{F}{N} = \frac{144.2}{500} = 0.29 \text{ A}$$

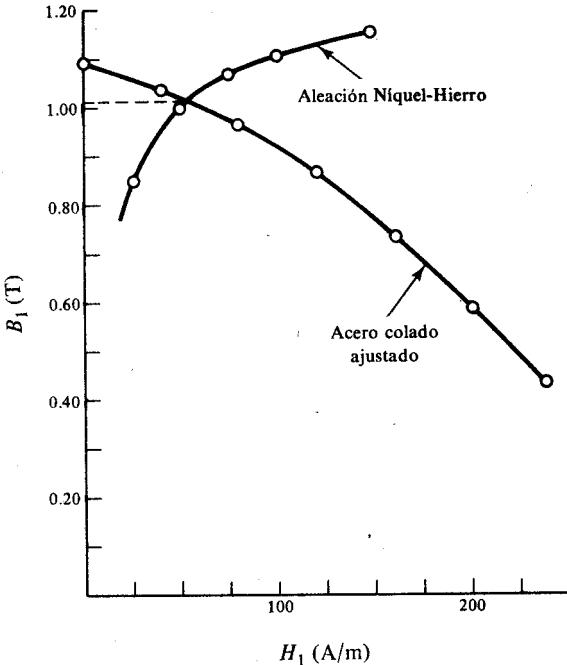


Fig. 11-29

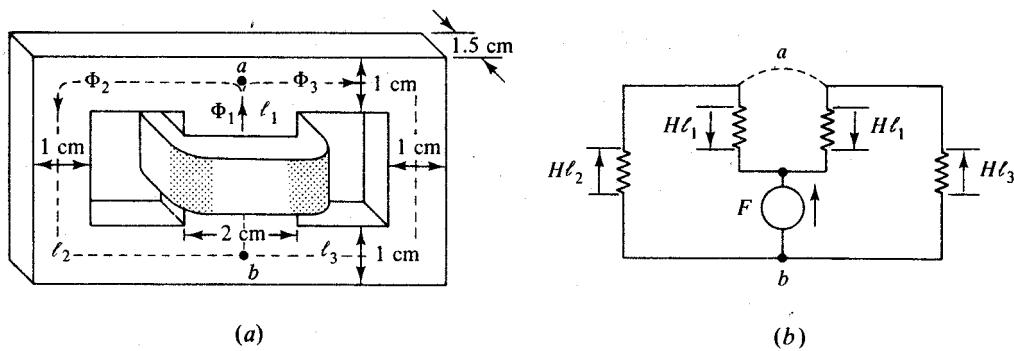


Fig. 11-30

- 11.20.** El mismo núcleo de acero colado del problema 11.19, bobinas idénticas de 500 vueltas en las extremidades exteriores con el sentido del bobinado que se muestra en la figura 11-31(a). De nuevo $\Phi_3 = 0.173 \text{ mWb}$. Halle las corrientes en las bobinas.

Las densidades de flujo son las mismas en todo el núcleo y, por lo tanto, H es el mismo. El circuito equivalente en la figura 11-31(b) sugiere que el problema puede ser resuelto sobre la base *por polo*.

$$B = \frac{\Phi_3}{S_3} = 1.15 \text{ T} \quad \text{y} \quad H = 1030 \text{ A/m} \quad (\text{De la figura 11-14})$$

$$F_3 = H(\ell_1 + \ell_3) = 1030(0.14) = 144.2 \text{ A} \quad I = 0.29 \text{ A}$$

Cada bobina debe tener una corriente de 0.29 A.

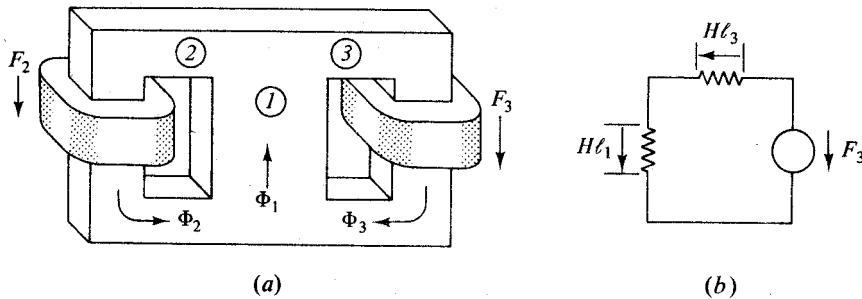


Fig. 11-31

- 11.21.** El circuito magnético paralelo de la figura 11-32(a) es de silicio-acero con la misma área de sección transversal en toda su extensión, $S = 1.30 \text{ cm}^2$. Las longitudes medias son $\ell_1 = \ell_3 = 25 \text{ cm}$, $\ell_2 = 5 \text{ cm}$. Las bobinas tienen 50 vueltas cada una. Dado que $\Phi_1 = 90 \mu\text{Wb}$ y $\Phi_3 = 120 \mu\text{Wb}$, halle las corrientes de las bobinas.

$$\Phi_2 = \Phi_3 - \Phi_1 = 0.30 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$B_1 = \frac{90 \times 10^{-6}}{1.30 \times 10^{-4}} = 0.69 \text{ T}$$

De la curva $B-H$ para silicio-acero, $H_1 = 87 \text{ A/m}$. Entonces, $H_1\ell_1 = 21.8 \text{ A}$. Similarmente, $B_2 = 0.23 \text{ T}$, $H_2 = 49 \text{ A/m}$, $H_2\ell_2 = 2.5 \text{ A}$ y $B_3 = 0.92 \text{ T}$, $H_3 = 140 \text{ A/m}$, $H_3\ell_3 = 35.0 \text{ A}$. El circuito equivalente de la figura 11-32(b) sugiere las siguientes ecuaciones para la caída NI entre los puntos *a* y *b*:

$$H_1\ell_1 - F_1 = H_2\ell_2 = F_3 - H_3\ell_3$$

$$21.8 - F_1 = 2.5 = F_3 - 35.0$$

de donde $F_1 = 19.3 \text{ A}$ y $F_3 = 37.5 \text{ A}$. Las corrientes son $I_1 = 0.39 \text{ A}$ y $I_3 = 0.75 \text{ A}$.

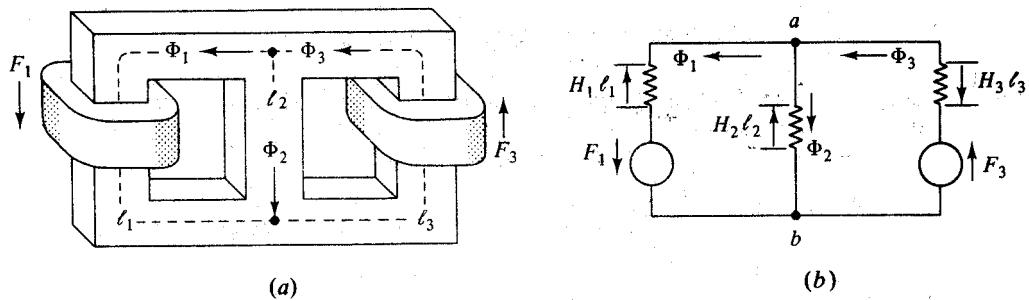


Fig. 11-32

- 11.22. Obtenga el circuito magnético equivalente para el problema 11.21 utilizando la reluctancia para las tres extremidades, y calcule el flujo en el núcleo sabiendo que $F_1 = 19.3$ A y $F_3 = 37.5$ A.

$$\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu_0 \mu_r S}$$

De los valores de B y H que se encontraron en el problema 11.21,

$$\mu_0 \mu_{r1} = 7.93 \times 10^{-3} \text{ H/m} \quad \mu_0 \mu_{r2} = 4.69 \times 10^{-3} \text{ H/m} \quad \mu_0 \mu_{r3} = 6.57 \times 10^{-3} \text{ H/m}$$

Ahora se calculan las reluctancias:

$$\mathcal{R}_1 = \frac{\ell_1}{\mu_0 \mu_{r1} S_1} = 2.43 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$$

$\mathcal{R}_2 = 8.20 \times 10^4 \text{ H}^{-1}$, $\mathcal{R}_3 = 2.93 \times 10^5 \text{ H}^{-1}$. De la figura 11-33,

$$F_3 = \Phi_3 \mathcal{R}_3 + \Phi_2 \mathcal{R}_2 \quad (1)$$

$$F_1 = \Phi_1 \mathcal{R}_1 - \Phi_2 \mathcal{R}_2 \quad (2)$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_3 \quad (3)$$

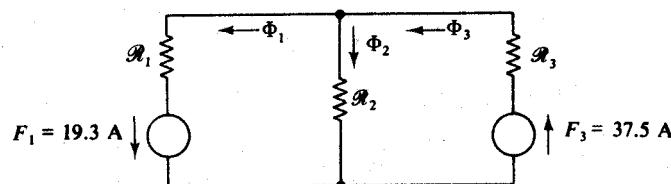


Fig. 11-33

Sustituyendo Φ_2 de (3) en (1) y (2) se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones simultáneas en Φ_1 y Φ_3 :

$$\begin{aligned} F_1 &= \Phi_1(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2) - \Phi_3 \mathcal{R}_2 \\ F_3 &= -\Phi_1 \mathcal{R}_2 + \Phi_3(\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3) \end{aligned} \quad \text{ó} \quad \begin{aligned} 19.3 &= \Phi_1(3.25 \times 10^5) - \Phi_3(0.82 \times 10^5) \\ 37.5 &= -\Phi_1(0.82 \times 10^5) + \Phi_3(3.75 \times 10^5) \end{aligned}$$

Resolviendo, $\Phi_1 = 89.7 \mu\text{Wb}$, $\Phi_2 = 30.3 \mu\text{Wb}$, $\Phi_3 = 120 \mu\text{Wb}$.

Aunque las anteriores ecuaciones simultáneas y la similitud con el problema de un circuito de dos mallas puede ser interesante, debe observarse que las densidades de flujo B_1 , B_2 y B_3 debían conocerse antes de que las permeabilidades relativas y las reluctancias pudieran calcularse. Pero si B es conocido, ¿por qué no encontrar el flujo directamente de $\Phi = BS$? La reluctancia simplemente no es de mucha ayuda para resolver problemas de este tipo.

Problemas supplementarios

- 11.23.** Halle la inductancia por unidad de longitud de un conductor coaxial con un radio interno $a = 2$ mm y un conductor externo en $b = 9$ mm. Suponga $\mu_r = 1$. *Resp.* $0.301 \mu\text{H}/\text{m}$
- 11.24.** Halle la inductancia por unidad de longitud de dos conductores cilíndricos paralelos, donde el radio de los conductores es 1 mm y la separación de un centro a otro es de 12 mm. *Resp.* $0.992 \mu\text{H}/\text{m}$
- 11.25.** Dos conductores cilíndricos paralelos separados por 1 mm tienen una inductancia por unidad de longitud de $2.12. \mu\text{H}/\text{m}$. ¿Cuál es el radio del conductor? *Resp.* 5 mm
- 11.26.** Un solenoide con núcleo de aire con 2500 vueltas uniformemente espaciadas tiene una longitud de 1.5 m y radio $2 \times 10^{-2} \text{ m}$. Halle la inductancia L . *Resp.* 6.58 mH
- 11.27.** Halle la inductancia de la bobina de la figura 11-9 si $r_1 = 1$ cm, $r_2 = 2$ cm, $\ell = 3$ cm y $N = 800$. *Resp.* 4.70 mH
- 11.28.** Un toroide de núcleo de aire con sección transversal cuadrada como el de la figura 11-3 tiene radio interno de 5 cm, externo de 7 cm y altura de 1.5 cm. Si la inductancia es $495 \mu\text{H}$, ¿cuántas vueltas hay en el toroide? Examine la fórmula aproximada y compare el resultado. *Resp.* 700, 704
- 11.29.** Un toroide de núcleo de aire con sección cuadrada como el de la figura 11-3 tiene $r_1 = 80$ cm, $r_2 = 82$ cm, $a = 1.5$ cm y 700 vueltas. Halle L utilizando ambas fórmulas y compare los resultados. (Ver problema 11.7.) *Resp.* $36.3 \mu\text{H}$ (mediante ambas fórmulas).
- 11.30.** Determine las permeabilidades relativas del hierro colado, del acero colado, del silicio-acero y de la aleación níquel-hierro a una densidad de flujo de 0.4 T. Utilice las figuras 11-13 y 11-14. *Resp.* 318, 1384, 5305, 42440
- 11.31.** Un espacio de aire de longitud $\ell_a = 2$ mm tiene una densidad de flujo de 0.4 T. Determine la longitud de un núcleo magnético con la misma caída NI si el núcleo es de (a) hierro colado, (b) acero colado, (c) silicio-acero. *Resp.* (a) 0.64 m (b) 2.77 m; (c) 10.6 m
- 11.32.** Un circuito magnético consta de dos partes del mismo material ferromagnético ($\mu_r = 4000$). La parte 1 tiene $\ell_1 = 50$ mm, $S_1 = 104 \text{ mm}^2$; la parte 2 tiene $\ell_2 = 30$ mm, $S_2 = 120 \text{ mm}^2$. El material está en una parte de la curva donde la permeabilidad relativa es proporcional a la densidad de flujo. Halle el flujo Φ si la fmm es 4.0 A. *Resp.* $26.3 \mu\text{Wb}$
- 11.33.** Un toroide con sección transversal circular de radio 20 mm tiene una longitud media de 280 mm y un flujo $\Phi = 1.50 \text{ mWb}$. Halle la fmm requerida si el núcleo es de silico-acero. *Resp.* 83.2 A
- 11.34.** Lados partes del circuito magnético de la figura 11-34 son de acero colado. La parte 1 tiene $\ell_1 = 34$ cm y $S_1 = 6 \text{ cm}^2$; la parte 2 tiene $\ell_2 = 16$ cm y $S_2 = 4 \text{ cm}^2$. Determine la corriente de bobina I_1 , si $I_2 = 0.5$ A, $N_1 = 200$ vueltas, $N_2 = 100$ vueltas y $\Phi = 120 \mu\text{Wb}$. Halle la fmm. *Resp.* 0.65 A
- 11.35.** El núcleo de silicio-acero que aparece en la figura 11-35 tiene una sección transversal rectangular de 10 mm por 8 mm y una longitud media de 150 mm. La longitud del espacio de aire es 0.8 mm y el flujo en el espacio es $80 \mu\text{Wb}$. Halle la fmm. *Resp.* 561.2 A
- 11.36.** Resuelva el problema 11.35 a la inversa: se sabe que la fmm de la bobina es 561.2 A y el flujo en el espacio debe determinarse. Utilice el método de prueba y error, comenzando con la suposición de que el 90% de la caída NI se produce en el espacio.

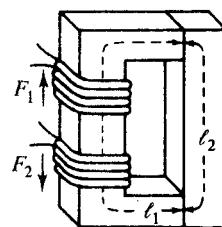


Fig. 11-34

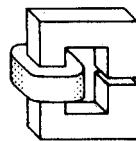


Fig. 11-35

- 11.37.** El circuito magnético de silicio-acero del problema 11.35 tiene una fmm de 600 A. Determine el flujo en el espacio. *Resp.* $85.2 \mu\text{Wb}$

- 11.38.** Para el circuito magnético de silicio-acero del problema 11.35, calcule la reluctancia del hierro, \mathcal{R}_i , y la reluctancia del espacio, \mathcal{R}_a . Suponga el flujo $\Phi = 80 \mu\text{Wb}$ y resuelva para F . Ver figura 11-36.
Resp. $\mathcal{R}_i = 0.313 \mu\text{H}^{-1}$, $\mathcal{R}_a = 6.70 \mu\text{H}^{-1}$, $F = 561 \text{ A}$

- 11.39.** Un núcleo de silicio-acero como el que aparece en la figura 11-35 tiene una sección transversal rectangular de área $S_1 = 80 \text{ mm}^2$ y un espacio de aire de longitud $\ell_a = 0.8 \text{ mm}$ con área $S_a = 95 \text{ mm}^2$. La longitud media del núcleo es 150 mm y la fmm es 600 A. Halle gráficamente el flujo trazando Φ contra F a la manera del problema 11.15.
Resp. $85 \mu\text{Wb}$

- 11.40.** Resuelva el problema 11.39 gráficamente utilizando la línea negativa del espacio de aire para una fmm de 600 A.
Resp. $85 \mu\text{Wb}$

- 11.41.** Resuelva el problema 11.39 gráficamente, a la manera del problema 11.17, hallando la densidad de flujo en el núcleo. *Resp.* 1.06 T

- 11.42.** Un núcleo ferromagnético rectangular de $40 \times 60 \text{ mm}$ tiene un flujo $\Phi = 1.44 \text{ mWb}$. En el núcleo hay un espacio de aire de longitud $\ell_a = 2.5 \text{ mm}$. Halle la caída NI en la brecha. *Resp.* 1079 A

- 11.43.** Un toroide de sección transversal de radio 2 cm tiene núcleo de silicio-acero de longitud media 28 cm con un espacio de aire de 1 mm de longitud. Suponga que el área del espacio es 10% mayor que el núcleo adyacente y halle la fmm necesaria para establecer un flujo en el espacio de 1.5 mWb . *Resp.* 952 A

- 11.44.** El circuito magnético que aparece en la figura 11-37 tiene una fmm de 500 A. La parte 1 es de acero colado con $\ell_1 = 340 \text{ mm}$ y $S_1 = 400 \text{ mm}^2$; la parte 2 es hierro colado con $\ell_2 = 138 \text{ mm}$ y $S_2 = 360 \text{ mm}^2$. Determine el flujo Φ .
Resp. $229 \mu\text{Wb}$

- 11.45.** Resuelva el problema 11.44 gráficamente, a la manera del problema 11-18. *Resp.* $229 \mu\text{Wb}$

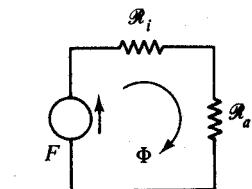


Fig. 11-36

- 11.46.** Un toroide de sección transversal cuadrada, con $r_1 = 2 \text{ cm}$, $r_2 = 3 \text{ cm}$ y altura $a = 1 \text{ cm}$, tiene un núcleo de dos partes. La parte 1 es de silicio-acero de longitud media 7.9 cm; la parte 2 es de aleación níquel-hierro de longitud media 7.9 cm. Halle el flujo que resulta de una fmm de 17.38 A. *Resp.* 10^{-4} Wb

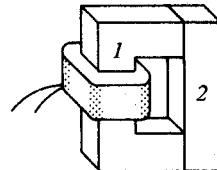


Fig. 11-37

- 11.47.** Resuelva el problema 11.46 por el método gráfico del problema 11.17. ¿Por qué el trazado de la segunda curva inversa de B - H sobre la primera no es tan difícil como podría esperarse?
Resp. 10^{-4} Wb . Las longitudes medias y las áreas de las secciones transversales son las mismas.

- 11.48.** El circuito magnético paralelo de acero colado de la figura 11-38 tiene una bobina de 500 vueltas en la parte central, donde la sección transversal tiene un área dos veces mayor que en el resto del núcleo. Las dimensiones son: $\ell_a = 1 \text{ mm}$, $S_2 = S_3 = 150 \text{ mm}^2$, $S_1 = 300 \text{ mm}^2$, $\ell_1 = 40 \text{ mm}$, $\ell_2 = 110 \text{ mm}$ y $\ell_3 = 109 \text{ mm}$. Halle la corriente necesaria para producir un flujo en el espacio de aire de $125 \mu\text{Wb}$. Suponga que S_a excede a S_3 por un 17%. *Resp.* 1.34 A

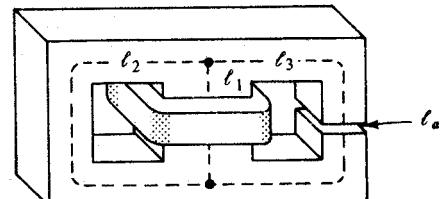


Fig. 11-38

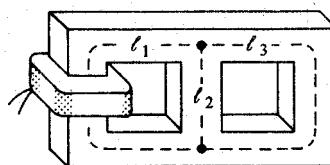


Fig. 11-39

- 11.49.** El núcleo del circuito paralelo de hierro colado de la figura 11-39 tiene una bobina de 500 vueltas y una sección transversal uniforme de 1.5 cm^2 a todo lo largo. Las longitudes medias son $\ell_1 = \ell_3 = 10 \text{ cm}$ y $\ell_2 = 4 \text{ cm}$. Determine la corriente necesaria en la bobina para dar como resultado una densidad de flujo de 0.25 T en la extremidad 3. *Resp. 1.05 A*

- 11.50.** Dos bobinas idénticas de 500 vueltas tienen corrientes iguales y están bobinadas como se indica en la figura 11-40. El núcleo de acero colado tiene un flujo en la extremidad 3 de $120 \mu\text{Wb}$. Determine las corrientes de bobina y el flujo en la extremidad 1. *Resp. 0.41 A, 0 Wb*

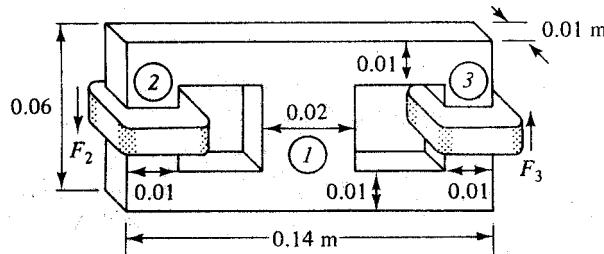


Fig. 11-40

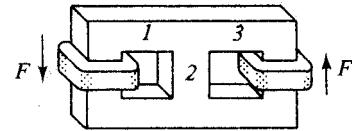


Fig. 11-41

- 11.51.** Dos bobinas idénticas están enrolladas como se indica en la figura 11-41. El núcleo de silicio-acero tiene una sección de 6 cm^2 en toda su extensión. Las longitudes medias son $\ell_1 = \ell_3 = 14 \text{ cm}$ y $\ell_2 = 4 \text{ cm}$. Halle las fmms de las bobinas si el flujo en la extremidad 1 es 0.7 mWb . *Resp. 38.5 A*

Capítulo 12

Corriente de desplazamiento FEM inducida

12.1 CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO

Para campos estáticos, el rotacional de \mathbf{H} es igual a \mathbf{J} , densidad de corriente en el punto (ver sección 9.5). Esta densidad de corriente, producida por movimiento de cargas reales tales como electrones, protones e iones, será llamada ahora densidad de *corriente de conducción* y se denotará por \mathbf{J}_c . Es claro que si $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c$ también se cumpliera para campos variables con el tiempo, entonces $\nabla \cdot \mathbf{J}_c = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$ (ver sección 9.4.) Pero esto sería incompatible con la ecuación de continuidad,

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_c = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

que se obtuvo en la sección 6.9. Por eso, James Clerk Maxwell postuló que

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_D$$

donde la densidad de *corriente de desplazamiento*, \mathbf{J}_D , se define por

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Agregándose la corriente de desplazamiento a la corriente de conducción, la ecuación de continuidad se "salva". En efecto,

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_c = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \nabla \cdot \mathbf{J}_D = 0 - \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

donde $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ (sección 4.3) fue utilizada.

La corriente de desplazamiento (en amperios) a través de una superficie abierta específica, se obtiene por integración exactamente en la misma forma como la corriente de conducción. De esta manera

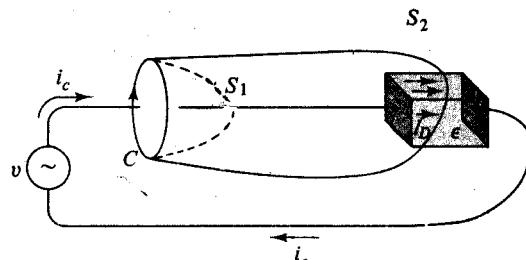
$$i_c = \int_S \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} \quad i_D = \int_S \mathbf{J}_D \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

La expresión para i_D puede interpretarse en términos de movimiento de cargas. Si la carga Q se mueve con una velocidad \mathbf{U} , el campo eléctrico que rodea a Q también avanza con velocidad \mathbf{U} . Por consiguiente, aunque Q puede cruzar físicamente una superficie S (lo que constituiría una corriente de conducción), las líneas de \mathbf{D} cambiando a través de S , producen una corriente de desplazamiento.

EJEMPLO 1: Un voltaje variable con el tiempo aplicado a un condensador de placas paralelas (figura 12-1) produce una corriente i_c (variable con el tiempo) en los alambres conectores. Aparecen dos superficies abiertas con un contorno común C en la figura. Como $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0$, el teorema de la divergencia (sección 4.5) da

$$\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

$$6 \quad \int_{S_1} \left(\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} \left(\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$



En ausencia de efecto de borde, D sólo cambiaría dentro del condensador. Más aún, no puede haber movimiento de cargas ($J_c = 0$) en el dieléctrico. Así pues

$$\int_{S_1} \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_3} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

donde S_3 es la parte de S_2 que yace dentro del dieléctrico. La integral de la izquierda es i_c , simplemente corriente de conducción formada por el movimiento de cargas en los conductores. La integral de la derecha es la corriente de desplazamiento i_D en el dieléctrico.

La igualdad entre i_c e i_D para este caso se verifica en el problema 12.1

12.2 RAZON ENTRE J_c Y J_D

Algunos materiales no son ni buenos conductores ni dieléctricos perfectos, así que se da tanto la corriente de conducción como la de desplazamiento. Un modelo de un conductor pobre o de un dieléctrico deficiente aparece en la figura 12-2. Supóngase que hay dependencia de E respecto del tiempo $e^{j\omega t}$, entonces la densidad total de corriente es:

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_D = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \mathbf{E}) = \sigma \mathbf{E} + j\omega \epsilon \mathbf{E}$$

de lo que se deduce

$$\frac{J_c}{J_D} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$$

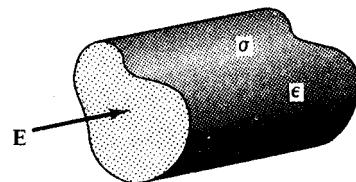


Fig. 12-2

Como se esperaba, la corriente de desplazamiento se vuelve más importante cuando la frecuencia aumenta.

12.3 LEY DE FARADAY

Cuando un conductor se mueve a través de un campo magnético, cortando el flujo, se induce un voltaje en el conductor. En forma similar, cuando el flujo cruza un conductor estacionario, también se induce un voltaje. En cualquier caso, el voltaje y la de tasa de corte de flujo están relacionados por la ley de Faraday:

$$v = - \frac{d\phi}{dt}$$

La polaridad del voltaje inducido es algunas veces ilustrada por un campo de flujo distorsionado como el que se muestra en la figura 12-3. Las líneas parecen empujadas hacia adelante del conductor en movimiento. Un flujo en contra de las manecillas del reloj aparece alrededor del conductor que crearía el mismo flujo de campo distorsionado. Por la regla de la mano derecha, si se proporcionara una trayectoria cerrada, la corriente dejaría el conductor tal como se muestra en la figura. La figura 12-14(a) muestra la dirección de la corriente a través de un circuito externo.

El signo negativo en la ley de Faraday puede explicarse reescribiendo la ecuación en forma integral.

$$v = - \frac{d\phi}{dt}$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

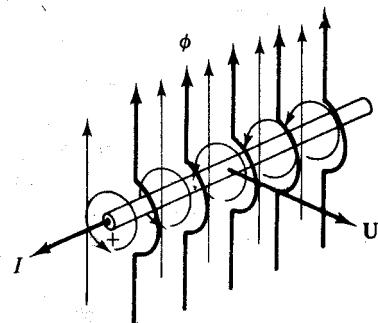


Fig. 12-3

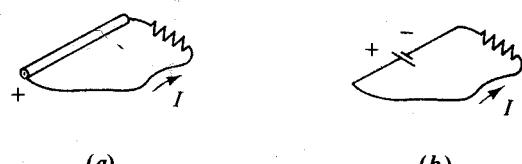


Fig. 12-4

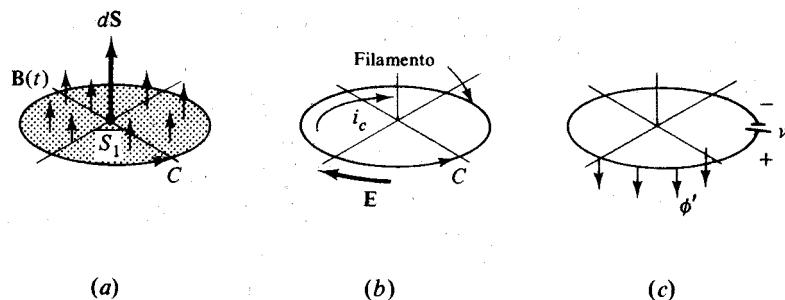


Fig. 12-5

El contorno C alrededor del cual se toma la integral de la izquierda encierra el área plana S de la superficie integral a la derecha. Una dirección positiva se asigna a C y la dirección de la normal, dS , se determina entonces por la regla familiar de la mano derecha. Ver figura 12-5(a). Una densidad de flujo magnético variable, $B(t)$, se presenta dentro del contorno. Si B aumenta con el tiempo, la derivada en el tiempo será positiva y, de esta manera, el lado derecho de la ecuación será negativo. Para que la integral de la izquierda sea negativa, la dirección de E debe ser opuesta a la del contorno. Ver figura 12-5(b). Un filamento conductor, en lugar del contorno, conduciría una corriente i_c , también en dirección de E . Como se muestra en la figura 12-5(c), tal lazo de corriente genera un flujo ϕ' que se opone al aumentar B . La ley de Lenz resume esta discusión algo compleja: *el voltaje inducido por un flujo variable tiene una polaridad tal que la corriente establecida en una trayectoria cerrada da lugar a un flujo que se opone a la variación en el flujo.*

En el caso especial de un conductor que se mueve a través de un campo magnético estacionario, la polaridad predicha por la ley de Lenz siempre será tal que el conductor experimenta fuerzas magnéticas que se oponen a su movimiento.

12.4 CONDUCTORES EN MOVIMIENTO A TRAVÉS DE CAMPOS INDEPENDIENTES DEL TIEMPO

En el capítulo 10, se examinó la fuerza F sobre una carga Q en un campo magnético B , donde la carga se mueve con velocidad U :

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{U} \times \mathbf{B})$$

La intensidad de campo eléctrico móvil, \mathbf{E}_m , puede definirse como la fuerza por unidad de carga:

$$\mathbf{E}_m = \frac{\mathbf{F}}{Q} = \mathbf{U} \times \mathbf{B}$$

Cuando un conductor con gran número de cargas libres se mueve a través de un campo B , el \mathbf{E}_m crea una diferencia de voltaje entre los dos extremos del conductor, cuya magnitud depende de como se oriente \mathbf{E}_m respecto del conductor. Denominando los extremos del conductor a y b , el voltaje de a respecto de b es

$$v_{ab} = \int_b^a \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = \int_b^a (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Si la velocidad U y el campo B están en ángulo recto y el conductor es normal a ambos, entonces un conductor de longitud ℓ tendrá un voltaje

$$v = BlU$$

Para una trayectoria cerrada la integral lineal debe tomarse alrededor de toda la espira:

$$v = \oint (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Por supuesto, si sólo una parte de toda la espira está en movimiento, es necesario que la integral sólo cubra esta parte, ya que \mathbf{E}_m será cero en cualquier otro sitio.

EJEMPLO 2: En la figura 12-6, dos barras conductoras se mueven hacia afuera con velocidades $U_1 = 12.5(-\mathbf{a}_y)$ m/s y $U_2 = 8.0\mathbf{a}_y$ m/s en el campo $\mathbf{B} = 0.35\mathbf{a}_z$ T. Halle el voltaje de b respecto de c .

En los dos conductores,

$$\mathbf{E}_{m1} = \mathbf{U}_1 \times \mathbf{B} = 4.38(-\mathbf{a}_x) \text{ V/m}$$

$$\mathbf{E}_{m2} = \mathbf{U}_2 \times \mathbf{B} = 2.80\mathbf{a}_x \text{ V/m}$$

y así

$$v_{ab} = \int_0^{0.50} 4.38(-\mathbf{a}_x) \cdot d\mathbf{x} \mathbf{a}_x = -2.19 \text{ V} \quad v_{dc} = \int_0^{0.50} 2.80\mathbf{a}_x \cdot d\mathbf{x} \mathbf{a}_x = 1.40 \text{ V}$$

$$v_{bc} = v_{ba} + v_{ad} + v_{dc} = 2.19 + 0 + 1.40 = 3.59 \text{ V}$$

Como b es positiva con respecto a c , la corriente en el medidor tendrá la dirección \mathbf{a}_y . En el circuito esta corriente del mismo sentido de las manecillas del reloj aumenta el flujo en dirección $-\mathbf{a}_z$, lo que de acuerdo con la ley de Lenz, se opone el aumento en el flujo en la dirección $+\mathbf{a}_z$ debido a la expansión del circuito. Más aún, las fuerzas que \mathbf{B} ejerce sobre los conductores en movimiento tienen dirección opuesta a sus velocidades.

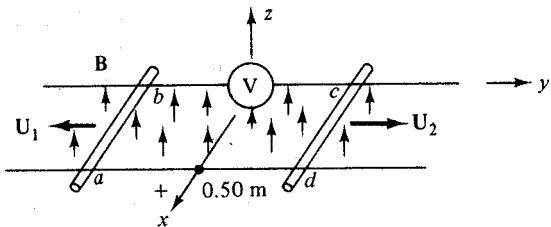


Fig. 12-6

12.5 CONDUCTORES EN MOVIMIENTO A TRAVÉS DE CAMPOS DEPENDIENTES DEL TIEMPO

Cuando una espira conductora cerrada está en movimiento (esto incluye cambio de forma) y el campo \mathbf{B} es función del tiempo (como también de la posición), entonces el voltaje total inducido se forma de la contribución de cada una de las dos fuentes de cambio de flujo. La ley de Faraday se convierte en

$$v = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_C (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

El primer término de la derecha es el voltaje producido por el cambio en \mathbf{B} , manteniendo fija la espira. El segundo término es el voltaje que se produce con el movimiento de la espira manteniendo fijo a \mathbf{B} . La polaridad de cada término se halla a partir de la forma apropiada de la ley de Lenz y los dos términos se agregan entonces en relación con esas polaridades. Ver problema 12.17.

Problemas resueltos

- 12.1.** Demuestre que la corriente de desplazamiento en el dieléctrico de un condensador de placas paralelas es igual a la corriente de conducción en los conectores.

Ver figura 12-1. La capacitancia del condensador es:

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

donde A es el área de la placa y d es la separación. La corriente de conducción es entonces

$$i_c = C \frac{dv}{dt} = \frac{\epsilon A}{d} \frac{dv}{dt}$$

Por otro lado, el campo eléctrico es, despreciando el efecto de los bordes, $E = v/d$. Por tanto,

$$D = \epsilon E = \frac{\epsilon}{d} v \quad \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\epsilon}{d} \frac{dv}{dt}$$

y la corriente de desplazamiento es (\mathbf{D} es normal a las placas)

$$i_D = \int_A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_A \frac{\epsilon}{d} \frac{dv}{dt} dS = \frac{\epsilon A}{d} \frac{dv}{dt} = i_c$$

- 12.2. En un material para el cual $\sigma = 5.0 \text{ S/m}$ y $\epsilon_r = 1$ la intensidad de campo eléctrico es $E = 250 \sin 10^{10}t \text{ (V/m)}$. Halle las densidades de las corrientes de conducción y desplazamiento y la frecuencia para la cual éstas tienen magnitudes iguales.

$$J_c = \sigma E = 1250 \sin 10^{10}t \text{ (A/m}^2\text{)}$$

Sobre la suposición de que la dirección del campo no varía con el tiempo,

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \epsilon_r 250 \sin 10^{10}t) = 22.1 \cos 10^{10}t \text{ (A/m}^2\text{)}$$

Para $J_c = J_D$,

$$\sigma = \omega \epsilon \quad \delta \quad \omega = \frac{5.0}{8.854 \times 10^{-12}} = 5.65 \times 10^{11} \text{ rad/s}$$

lo que es equivalente de una frecuencia $f = 8.99 \times 10^{10} \text{ Hz} = 89.9 \text{ GHz}$

- 12.3. Un condensador coaxial con radio interno de 5 mm, externo de 6 mm y longitud 500 mm tiene un dieléctrico para el que $\epsilon_r = 6.7$ y un voltaje aplicado $250 \sin 377t \text{ (V)}$. Determine la corriente de desplazamiento i_D y compárela con la corriente de conducción i_c .

Suponga que el conductor interno está en $v = 0$. Entonces, del problema 8.7, el potencial en $0.005 \leq r \leq 0.006 \text{ m}$ es

$$v = \left[\frac{250}{\ln(6/5)} \sin 377t \right] \left(\ln \frac{r}{0.005} \right) \text{ (V)}$$

De aquí,

$$\mathbf{E} = -\nabla v = -\frac{1.37 \times 10^3}{r} \sin 377t \mathbf{a}_r \text{ (V/m)}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = -\frac{8.13 \times 10^{-8}}{r} \sin 377t \mathbf{a}_r \text{ (C/m}^2\text{)}$$

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{3.07 \times 10^{-5}}{r} \cos 377t \mathbf{a}_r \text{ (A/m}^2\text{)}$$

$$i_D = J_D (2\pi r L) = 9.63 \times 10^{-5} \cos 377t \text{ (A)}$$

El método de análisis de circuitos para i_c requiere la capacitancia,

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln(6/5)} = 1.02 \times 10^{-9} \text{ F}$$

$$\text{Entonces } i_c = C \frac{dv}{dt} = (1.02 \times 10^{-9})(250)(377)(\cos 377t) = 9.63 \times 10^{-5} \cos 377t \text{ (A)}$$

Se ve que $i_c = i_D$.

- 12.4. El suelo húmedo tiene una conductividad de 10^{-3} S/m y $\epsilon_r = 2.5$. Halle J_c y J_D donde

$$E = 6.0 \times 10^{-6} \sin 9.0 \times 10^9 t \text{ (V/m)}$$

Primero, $J_c = \sigma E = 6.0 \times 10^{-9} \sin 9.0 \times 10^9 t \text{ (A/m}^2\text{)}$. Entonces, como $D = \epsilon_0 \epsilon_r E$,

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial E}{\partial t} = 1.20 \times 10^{-6} \cos 9.0 \times 10^9 t \text{ (A/m}^2\text{)}$$

- 12.5.** En la figura 12-7 un conductor de tres metros de largo se mueve paralelamente al eje x con velocidad $U = 2.50 \mathbf{a}_y$ m/s en un campo uniforme $\mathbf{B} = 0.50 \mathbf{a}_z$ T. Halle el voltaje inducido.

Como el campo uniforme está en ángulo recto respecto de la velocidad y el conductor es normal a ambos, entonces

$$v = B/U = 3.75 \text{ V}$$

Las líneas de flujo alrededor del conductor en movimiento, o ley de Lenz, muestran que el extremo a es positivo.

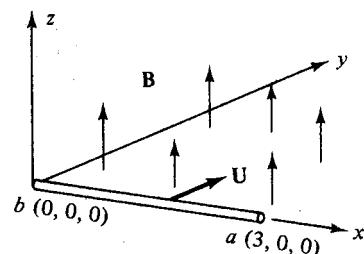


Fig. 12-7

- 12.6.** Con el mismo campo y velocidad del problema 12.5, halle el voltaje inducido en un conductor de 3 m que yace a lo largo del eje y .

El campo móvil \mathbf{E} es $\mathbf{U} \times \mathbf{B} = 1.25 \mathbf{a}_x$ V/m, como antes. Entonces, si los extremos están en $(0, 0, 0)$ y en $(0, 3, 0)$ m.

$$v = \int_0^3 1.25 \mathbf{a}_x \cdot dy \mathbf{a}_y = 0$$

Más generalmente, un conductor que se mueve a lo largo de su propia longitud no corta ningún flujo magnético.

- 12.7.** Halle el voltaje inducido en el conductor de la figura 12-8 donde $\mathbf{B} = 0.04 \mathbf{a}_y$ T y

$$\mathbf{U} = 2.5 \operatorname{sen} 10^3 t \mathbf{a}_z \text{ (m/s)}$$

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{U} \times \mathbf{B} = 0.10 \operatorname{sen} 10^3 t (-\mathbf{a}_x) \text{ (V/m)}$$

$$v = \int_0^{0.20} 0.10 \operatorname{sen} 10^3 t (-\mathbf{a}_x) \cdot dx \mathbf{a}_x$$

$$= -0.02 \operatorname{sen} 10^3 t \text{ (V)}$$

El conductor se mueve primero en la dirección \mathbf{a}_z . El extremo $x = 0.20$ es negativo respecto del extremo en el eje z para este medio ciclo.

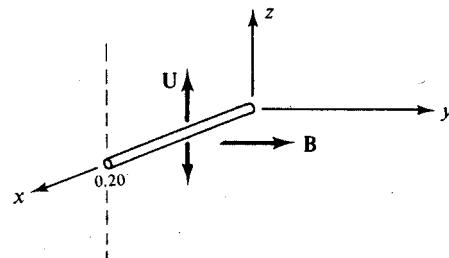


Fig. 12-8

- 12.8.** Un área de 0.65 m^2 en el plano $z = 0$ está encerrada por un filamento conductor. Halle el voltaje inducido, sabiendo que

$$\mathbf{B} = 0.05 \cos 10^3 t (\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)/\sqrt{2} \text{ (T)}$$

Ver figura 12-9.

$$\begin{aligned} v &= - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot dS \mathbf{a}_z \\ &= \int_S 50 \operatorname{sen} 10^3 t \left(\frac{\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z}{\sqrt{2}} \right) \cdot dS \mathbf{a}_z \\ &= 23.0 \operatorname{sen} 10^3 t \text{ (V)} \end{aligned}$$

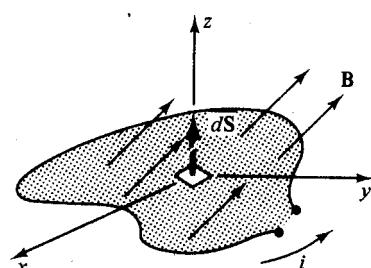


Fig. 12-9

El campo decrece en el primer medio ciclo de la función coseno. La dirección de i en un circuito cerrado debe ser tal que se oponga a esta disminución. De esta manera la corriente convencional debe tener la dirección que aparece en la figura 12-9.

- 12.9.** La espira conductora circular que aparece en la figura 12-10, yace en el plano $z=0$, tiene un radio de 0.10 m y una resistencia de 5.0Ω . Dado $\mathbf{B} = 0.20 \sin 10^3 t \mathbf{a}_z$ (T), determine la corriente.

$$\phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = 2 \times 10^{-3} \pi \sin 10^3 t \text{ (Wb)}$$

$$v = -\frac{d\phi}{dt} = -2\pi \cos 10^3 t \text{ (V)}$$

$$i = \frac{v}{R} = -0.4 \pi \cos 10^3 t \text{ (A)}$$

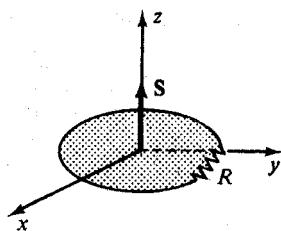


Fig. 12-10

En $t = 0+$ el flujo aumenta. Para oponerse a este aumento, la corriente de la espira debe tener una dirección instantánea $-\mathbf{a}_y$, donde la espira cruza el eje x positivo.

- 12.10.** La espira rectangular de la figura 12-11 se mueve hacia el origen a una velocidad $U = -250 \mathbf{a}_x$ m/s en un campo

$$\mathbf{B} = 0.80 e^{-0.50y} \mathbf{a}_z \text{ (T)}$$

Halle la corriente en el instante en que los lados de la bobina se encuentran en $y = 0.50$ m y 0.60 m, si $R = 2.5 \Omega$.

Sólo los lados de 1.0 m tienen voltajes inducidos. Sea el lado l en $y = 0.50$ m.

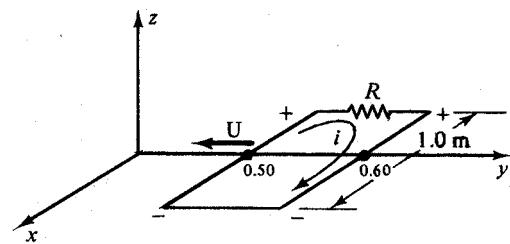


Fig. 12-11

$$v_1 = B_1 l U = 0.80 e^{-0.25}(1)(250) = 155.8 \text{ V}$$

$$v_2 = B_2 l U = 0.80 e^{-0.50}(1)(250) = 148.2 \text{ V}$$

Los voltajes tienen la polaridad que se muestra. La corriente instantánea es

$$i = \frac{155.8 - 148.2}{2.5} = 3.04 \text{ A}$$

- 12.11.** Un conductor de longitud 1 cm es paralelo al eje z y rota a un radio de 25 cm a 1200 rev/min (ver figura 12-12). Halle el voltaje inducido si el campo radial está dado por $\mathbf{B} = 0.5 \mathbf{a}_r$ T.

La velocidad angular es

$$\left(1200 \frac{\text{rev}}{\text{min}}\right) \left(\frac{1}{60} \frac{\text{min}}{\text{s}}\right) \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}}\right) = 40\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

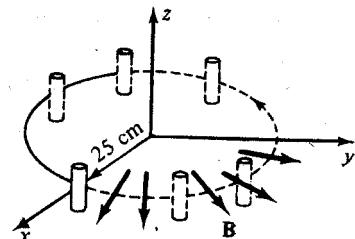


Fig. 12-12

Por tanto,

$$U = r\omega = (0.25)(40\pi) \text{ m/s}$$

$$\mathbf{E}_m = 10\pi \mathbf{a}_\phi \times 0.5 \mathbf{a}_r = 5.0\pi (-\mathbf{a}_z) \text{ V/m}$$

$$v = \int_0^{0.01} 5.0\pi (-\mathbf{a}_z) \cdot d\mathbf{z} \mathbf{a}_z = -5.0 \times 10^{-2}\pi \text{ V}$$

El signo negativo indica que el extremo inferior del conductor es positivo respecto del extremo superior.

- 12.12.** Un cilindro conductor de 7 cm de radio y 15 cm de altura rota a 600 rev/min en un campo radial $\mathbf{B} = 0.20 \mathbf{a}_r$ T. Hay unos contactos deslizantes en la parte superior y en la inferior que se conectan a un

voltímetro tal como se muestra en la figura 12-13. Halle el voltaje inducido.

$$\omega = (600)(\frac{1}{60})(2\pi) = 20\pi \text{ rad/s}$$

$$\mathbf{U} = (20\pi)(0.07)\mathbf{a}_\phi \text{ m/s}$$

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{U} \times \mathbf{B} = 0.88(-\mathbf{a}_z) \text{ V/m}$$

Cada elemento vertical de la superficie curva corta el mismo flujo y tiene el mismo voltaje inducido. Estos elementos están efectivamente en una conexión paralela y el voltaje inducido de cualquier elemento es el mismo que el total.

$$v = \int_0^{0.15} 0.88(-\mathbf{a}_z) \cdot dz \mathbf{a}_z = -0.13 \text{ V} \quad (+ \text{ en el fondo})$$

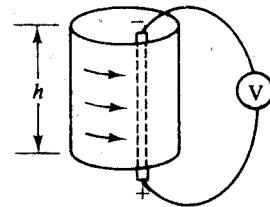


Fig. 12-13

- 12.13. En la figura 12-14 una espira conductora rectangular, con resistencia $R = 0.20 \Omega$, gira a 500 rev/min. El conductor vertical en $r_1 = 0.03 \text{ m}$ está en un campo $\mathbf{B}_1 = 0.25 \mathbf{a}_r \text{ T}$, y el conductor en $r_2 = 0.05 \text{ m}$ está en un campo $\mathbf{B}_2 = 0.80 \mathbf{a}_r \text{ T}$. Halle la corriente en la espira.

$$\mathbf{U}_1 = (500)(\frac{1}{60})(2\pi)(0.03)\mathbf{a}_\phi = 0.50\pi\mathbf{a}_\phi \text{ m/s}$$

$$v_1 = \int_0^{0.50} (0.50\pi\mathbf{a}_\phi \times 0.25\mathbf{a}_r) \cdot dz \mathbf{a}_z = -0.20 \text{ V}$$

Similarmente, $\mathbf{U}_2 = 0.83\pi\mathbf{a}_\phi \text{ m/s}$ y $v_2 = -1.04 \text{ V}$. Entonces

$$i = \frac{1.04 - 0.20}{0.20} = 4.20 \text{ A}$$

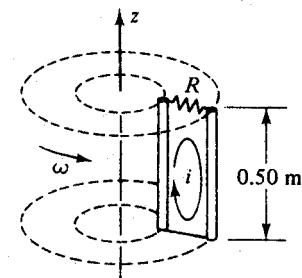


Fig. 12-14

en la dirección que aparece en el diagrama.

- 12.14. El disco circular de la figura 12-15 rota a ω (rad/s) en una densidad uniforme de flujo $\mathbf{B} = B\mathbf{a}_z$. Hay unos contactos deslizantes que conectan un voltímetro al disco. ¿Qué voltaje se indica en el medidor de este *generador homopolar de Faraday*?

Se examina un elemento radial. Un punto general sobre este elemento radial tiene velocidad $\mathbf{U} = \omega r\mathbf{a}_\phi$, así que

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{U} \times \mathbf{B} = \omega r\mathbf{B}\mathbf{a}_r$$

$$\text{y } v = \int_0^a \omega r\mathbf{B}\mathbf{a}_r \cdot dr \mathbf{a}_r = \frac{\omega a^2 B}{2}$$

donde a es el radio del disco. El resultado positivo indica que el punto exterior es positivo con respecto al centro para las direcciones que aparecen de \mathbf{B} y ω .

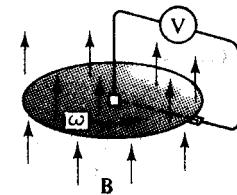


Fig. 12-15

- 12.15. Una espira cuadrada de 0.60 m de lado, rota alrededor del eje x a $\omega = 60\pi \text{ rad/s}$ en un campo $\mathbf{B} = 0.80\mathbf{a}_x \text{ T}$, tal como se muestra en la figura 12-16(a). Halle el voltaje inducido.

Suponiendo que la espira está inicialmente en el plano xy ,

$$\alpha = \omega t = 60\pi t \text{ (rad)}$$

El área proyectada sobre el plano xy viene a ser [ver figura 12-16(b)]:

$$A = (0.6)(0.6 \cos 60\pi t) (\text{m}^2)$$

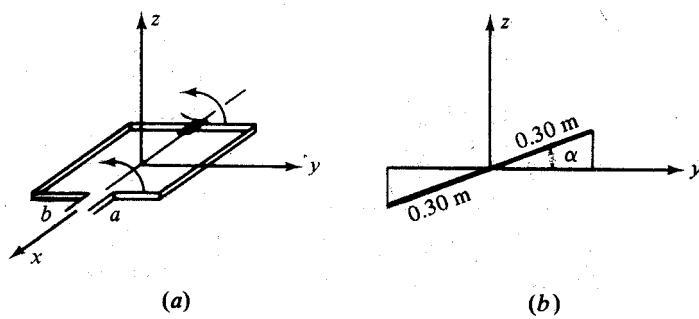


Fig. 12-16

Entonces $\phi = BA = 0.288 \cos 60\pi t$ (Wb) y

$$v = -\frac{d\phi}{dt} = 54.3 \sin 60\pi t \text{ (V)}$$

La ley de Lenz establece que éste es el voltaje de *a* con respecto a *b*.

Otro método

Cada lado paralelo al eje *x* tiene una componente *y* de velocidad cuya magnitud es

$$|U_y| = |r\omega \sin \alpha| = |18.0\pi \sin 60\pi t| \text{ (m/s)}$$

Los voltajes $B\ell |U_y|$ para los dos lados se agregan, dando

$$|v| = 2(B\ell |U_y|) = |54.3 \sin 60\pi t| \text{ (V)}$$

La ley de Lenz, de nuevo, determina el signo apropiado.

- 12.16.** Halle la potencia eléctrica generada en la espira del problema 12.13. Verifique el resultado calculando la tasa a la que se realiza trabajo mecánico en la espira.

La potencia eléctrica es la pérdida de potencia en la resistencia:

$$P_e = i^2 R = (4.20)^2 (0.20) = 3.53 \text{ W}$$

Las fuerzas ejercidas por el campo sobre los dos conductores verticales son:

$$\mathbf{F}_1 = i(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}_1) = (4.20)(0.50)(0.25)(\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r) = 0.525 \mathbf{a}_\phi \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_2 = i(\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_2) = (4.20)(0.50)(0.80)(-\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_r) = -1.68 \mathbf{a}_\phi \text{ N}$$

Para girar la espira, las fuerzas $-\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_2$ deben aplicarse. Estas realizan trabajo a una tasa

$$P = (-\mathbf{F}_1) \cdot \mathbf{U}_1 + (-\mathbf{F}_2) \cdot \mathbf{U}_2 = (-0.525)(0.50\pi) + (1.68)(0.83\pi) = 3.55 \text{ W}$$

Teniendo en cuenta los errores de redondeo, $P = P_e$.

- 12.17.** Como se muestra en la figura 12-17 (a), una espira conductora planar rota con velocidad angular ω alrededor del eje *x*. En $t = 0$ está en el plano *xy*. Está presente un campo magnético variable con el tiempo, $\mathbf{B} = B(t) \mathbf{a}_z$. Halle el voltaje inducido en la espira (a) utilizando $v = -d\phi/dt$, (b) Utilizando

$$v = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

- (a) La figura 12-17(b) muestra la espira en el tiempo *t*. Si el área de la espira es *A*, entonces el área proyectada, normal al campo, es *A*, $\cos \omega t$, así que

$$\phi = B(t)(A \cos \omega t)$$

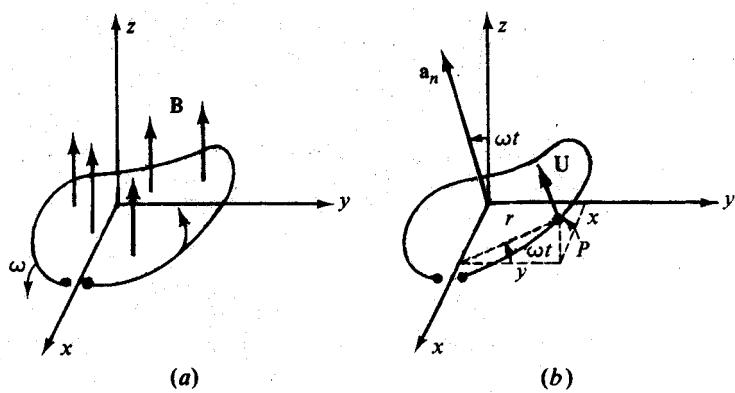


Fig. 12-17

$$\text{y } \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_n = \cos \omega t. \quad v = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{dB}{dt} A \cos \omega t + BA \omega \sin \omega t$$

(b) La contribución a v debida a la variación de \mathbf{B} es

$$v_1 = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{dB}{dt} \mathbf{a}_z \cdot dS \mathbf{a}_n = - \frac{dB}{dt} A \cos \omega t$$

ya que $\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_n = \cos \omega t$.

Para calcular la segunda contribución móvil a v , es necesaria la velocidad \mathbf{U} de un punto sobre la espira. De la figura 12-17 (b) se ve que

$$\mathbf{U} = r\omega \mathbf{a}_n = \frac{y}{\cos \omega t} \omega \mathbf{a}_n$$

así que

$$\mathbf{U} \times \mathbf{B} = \frac{y}{\cos \omega t} \omega \mathbf{a}_n \times B \mathbf{a}_z = \frac{y}{\cos \omega t} \omega B \sin \omega t (-\mathbf{a}_x)$$

ya que $\mathbf{a}_n \times \mathbf{a}_z = \sin \omega t (-\mathbf{a}_x)$. Por tanto,

$$v_2 = \oint (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) \cdot d\ell = -\frac{\omega B \sin \omega t}{\cos \omega t} \oint y \mathbf{a}_x \cdot d\ell$$

El teorema de Stokes (sección 9.8) puede usarse para evaluar la última integral. Como $\nabla \times y \mathbf{a}_x = -\mathbf{a}_z$,

$$\oint y \mathbf{a}_x \cdot d\ell = \int_S (\nabla \times y \mathbf{a}_x) \cdot d\mathbf{S} = \int_S (-\mathbf{a}_z) \cdot dS \mathbf{a}_n = -A \cos \omega t$$

Entonces

$$v_2 = -\frac{\omega B \sin \omega t}{\cos \omega t} (-A \cos \omega t) = BA \omega \sin \omega t$$

Se ve que v_1 y v_2 son precisamente los dos términos encontrados en la parte (a).

Problemas supplementarios

- 12.18. Sea la densidad de corriente de conducción en un dieléctrico deficiente igual a $J_c = 0.02 \sin 10^9 t$ (A/m^2). Halle la densidad de corriente de desplazamiento si $\sigma = 10^3 \text{ S}/\text{m}$ y $\epsilon_r = 6.5$.
Resp. $1.15 \times 10^{-6} \cos 10^9 t$ (A/m^2)

- 12.19.** Un conductor con sección circular cuyo radio es 1.5 mm lleva una corriente $i_c = 5.5 \sin 4 \times 10^{10}t$ (μA). ¿Cuál es la amplitud de la densidad de corriente de desplazamiento, si $\sigma = 35 \text{ MS/m}$ y $\epsilon_r = 1$?
Resp. $7.87 \times 10^{-3} \mu\text{A}/\text{m}^2$
- 12.20.** * Halle la frecuencia a la que las densidades de corriente de conducción y desplazamiento son iguales en (a) agua destilada, donde $\sigma = 2.0 \times 10^{-4} \text{ S/m}$ y $\epsilon_r = 81$; (b) agua de mar, donde $\sigma = 4.0 \text{ S/m}$ y $\epsilon_r = 1$.
Resp. (a) $4.44 \times 10^4 \text{ Hz}$; (b) $7.19 \times 10^{10} \text{ Hz}$
- 12.21.** Dos conchas conductoras esféricas concéntricas en $r_1 = 0.5 \text{ mm}$ y $r_2 = 1 \text{ mm}$ están separadas por un dieléctrico para el cual $\epsilon_r = 8.5$. Halle la capacitancia y calcule i_c dado un voltaje aplicado $v = 150 \sin 5000t$ (V). Obtenga la corriente de desplazamiento i_D y compárela con i_c .
Resp. $i_c = i_D = 7.09 \times 10^{-7} \cos 5000t$ (A)
- 12.22.** Dos placas conductoras paralelas de área 0.05 m^2 están separadas por 2 mm de un dieléctrico deficiente para el cual $\epsilon_r = 8.3$ y $\sigma = 8.0 \times 10^{-4} \text{ S/m}$. Dado un voltaje aplicado $v = 10 \sin 10^7t$ (V), halle la corriente rms total.
Resp. 0.192 A
- 12.23.** Un condensador de placas paralelas de 0.6 mm de separación y con un dieléctrico de $\epsilon_r = 15.3$ tiene un voltaje rms aplicado de 25 V a una frecuencia de 15 GHz. Halle la densidad rms de corriente de desplazamiento. Desprecie el efecto de los bordes.
Resp. $5.32 \times 10^5 \text{ A/m}^2$
- 12.24.** Un conductor en el eje x entre $x = 0$ y $x = 0.2 \text{ m}$ tiene una velocidad $U = 6.0 \mathbf{a}_x \text{ m/s}$ en un campo $\mathbf{B} = 0.04 \mathbf{a}_y \text{ T}$. Halle el voltaje inducido usando (a) la intensidad del campo eléctrico móvil, (b) $d\phi/dt$ y (c) B/U . Determine la polaridad y discuta la ley de Lenz si el conductor estuviera conectado a un lazo cerrado.
Resp. 0.048 V (el extremo $x = 0$ es positivo)
- 12.25.** Repita el problema 12.24 para $\mathbf{B} = 0.04 \sin k z \mathbf{a}_y$ (T). Examine la ley de Lenz cuando el conductor se mueve del flujo de una dirección a la dirección inversa.
Resp. $0.048 \sin kz$ (V)
- 12.26.** La barra conductora paralela al eje y que aparece en la figura 12-18 completa una espira mediante un contacto deslizante con los conductores en $y = 0$ y $y = 0.05 \text{ m}$ (a). Halle el voltaje inducido cuando la barra está estacionaria en $x = 0.05 \text{ m}$ y $\mathbf{B} = 0.30 \sin 10^4 t \mathbf{a}_z$ (T). (b) Repita el ejercicio para una velocidad de la barra $U = 150 \text{ a m/s}$. Examine la polaridad.
Resp. (a) $-7.5 \cos 10^4 t$ (V); (b) $-7.5 \cos 10^4 t - 2.25 \sin 10^4 t$ (V)

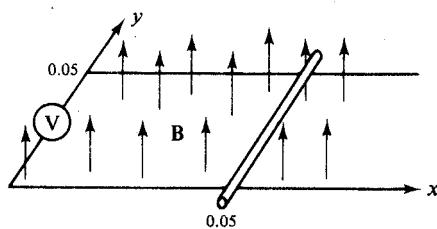


Fig. 12-18

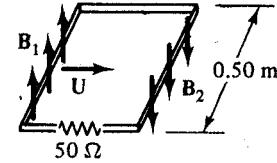


Fig. 12-19

- 12.27.** La espira rectangular de la figura 12-19 se mueve a la derecha a una velocidad $U = 2.5 \text{ m/s}$. El lado izquierdo corta el flujo en ángulos rectos, donde $B_1 = 0.30 \text{ T}$, mientras el lado derecho corta el flujo igual en la dirección opuesta. Halle la corriente instantánea en la espira y examine su dirección utilizando la ley de Lenz.
Resp. 15 mA (en contra de las manecillas del reloj)
- 12.28.** Una espira conductora rectangular en el plano $z = 0$ con lados paralelos a los ejes tiene dimensión $y = 1 \text{ cm}$ y dimensión $x = 2 \text{ cm}$. Su resistencia es 5.0Ω . En el momento en que los lados de la espira están en $x = 20 \text{ cm}$ y $x = 22 \text{ cm}$ se mueve hacia el origen a una velocidad de 2.5 m/s a lo largo del eje x . Halle la corriente si $\mathbf{B} = 5.0 e^{-10x} \mathbf{a}_z$ (T). Repita el ejercicio para los lados de la espira en $x = 5 \text{ cm}$ y $x = 7 \text{ cm}$.
Resp. $0.613 \text{ mA}, 2.75 \text{ mA}$

- 12.29.** El conductor de 2.0 m que aparece en la figura 12-20 rota a 1200 rev/min en el campo radial $B = 0.10 \sin \phi \text{ a}, \text{T}$. Halle la corriente en la espira cerrada con una resistencia de 100Ω . Examine la polaridad y la dirección de la corriente. *Resp.* $5.03 \times 10^{-2} \sin 40\pi t (\text{A})$

- 12.30.** En un campo radial $B = 0.50 \text{ a}, \text{T}$, dos conductores en $r = 0.23 \text{ m}$ y $r = 0.25 \text{ m}$ son paralelos al eje z y tienen una longitud de 0.01 m. Si los dos conductores están en el plano $\phi = 40\pi t$, ¿qué voltaje está disponible para hacer circular una corriente cuando los dos conductores están conectados por conductores radiales?

Resp. 12.6 mV

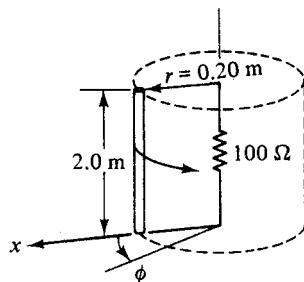


Fig. 12-20

- 12.31.** En la figura 12-21 un conductor radial, $3 \leq r \leq 6 \text{ cm}$, aparece incrustado en un disco giratorio de vidrio. Dos resistencias de $11.2 \Omega \text{ m}$ completan los dos circuitos. El disco gira a 12 rev/min. Si el campo en el disco es $B = 0.30 \text{ a}, \text{T}$, calcule la potencia eléctrica generada. ¿Cuál es el efecto de ésta sobre la rotación? Examine el efecto de la ley de Lenz si ésta se aplica al problema. *Resp.* $46.3 \mu\text{W}$

- 12.32.** ¿Qué voltaje desarrolla un disco generador de Faraday (problema 12.14) con las conexiones del medidor en $r_1 = 1 \text{ mm}$ y $r_2 = 100 \text{ mm}$ cuando el disco gira a 500 rev/min en una densidad de flujo de 0.80 T? *Resp.* 0.209 V

- 12.33.** Una espira como la que se muestra en la figura 12-16(a) tiene 75 mm de ancho (dimensión y) y 100 mm de largo (dimensión x). ¿Cuál es la velocidad de rotación si se desarrolla un voltaje de 0.25 V (rms) en el campo uniforme $B = 0.45 \text{ a}, \text{T}$? *Resp.* 1000 rev/min

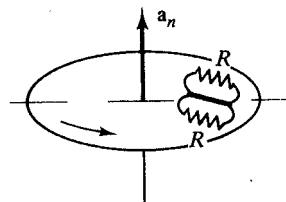


Fig. 12-21

Capítulo 13

Ecuaciones de Maxwell y condiciones límites

13.1 INTRODUCCION

El comportamiento de la intensidad de campo eléctrico \mathbf{E} y de la densidad de flujo eléctrico \mathbf{D} a través de la entrecara de dos materiales diferentes se examinó en el capítulo 7, donde los campos eran estáticos. Un tratamiento similar se dará ahora a la intensidad del campo magnético \mathbf{H} y a la densidad de flujo magnético \mathbf{B} , de nuevo con campos estáticos. Esto completa el estudio de las condiciones límite en los cuatro principales campos vectoriales.

En el capítulo 12, donde se trataron campos variables con el tiempo, se introdujo el concepto de densidad de corriente de desplazamiento \mathbf{J}_D y se examinó la ley de Faraday. En este capítulo, esas mismas ecuaciones y otras desarrolladas antes se agrupan para formar un conjunto conocido como las *ecuaciones de Maxwell*. Estas ecuaciones son el fundamento de toda la teoría de los campos electromagnéticos. Deben memorizarse.

13.2 RELACIONES LIMITES PARA CAMPOS MAGNETICOS

Cuando \mathbf{H} y \mathbf{B} se examinan en la entrecara de dos materiales diferentes, pueden esperarse cambios abruptos, similares a los anotados en \mathbf{E} y \mathbf{D} en la entrecara entre dos dieléctricos diferentes (ver sección 7.4).

En la figura 13-1 se muestra una entrecara que separa el material 1, con propiedades σ_1 y μ_{r1} , de 2 con σ_2 y μ_{r2} . El comportamiento de \mathbf{B} puede determinarse por el uso de un pequeño cilindro circular recto colocado a través de la entrecara tal como se muestra en la figura. Como las líneas de flujo magnético son continuas,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{plano 1}} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{\text{cil}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{plano 2}} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 = 0$$

Ahora bien, si se permite a los planos acercarse el uno al otro, conservando la entrecara entre ellos, el área bajo la superficie curva tenderá a cero, por lo que

$$\int_{\text{plano 1}} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \int_{\text{plano 2}} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 = 0$$

6

$$-B_{n1} \int_{\text{plano 1}} dS_1 + B_{n2} \int_{\text{plano 2}} dS_2 = 0$$

Por lo tanto,

$$B_{n1} = B_{n2}$$

En palabras, la componente normal de \mathbf{B} es continua a través de una entrecara. Obsérvese que cualquiera de las normales a la entrecara puede usarse para calcular B_{n1} y B_{n2} .

La variación en \mathbf{H} a través de una entrecara se obtiene aplicando la ley de Ampère alrededor de una trayectoria rectangular cerrada, tal como se muestra en la figura 13-2. Suponiendo que no haya

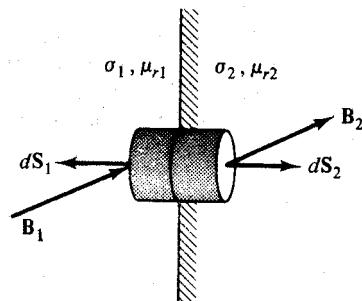


Fig. 13-1

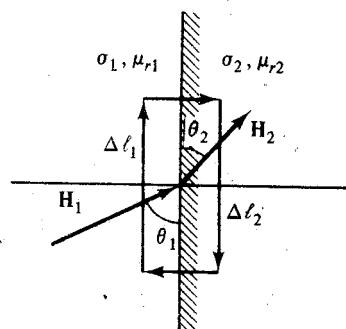


Fig. 13-2

corriente en la entrecara y haciendo que el rectángulo se comprima hasta cero en la forma usual,

$$0 = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \rightarrow H_{t1} \Delta \ell_1 - H_{t2} \Delta \ell_2$$

De lo que

$$H_{t1} = H_{t2}$$

De esta manera, la componente tangencial de \mathbf{H} tiene la misma proyección a lo largo de los dos lados del rectángulo. Como el rectángulo puede rotarse 90° y el argumento puede repetirse, se deduce que

$$H_{t1} = H_{t2}$$

En palabras, la componente tangencial de \mathbf{H} es continua a través de una entrecara libre de corriente.

La relación

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_r 2}{\mu_r 1}$$

entre los ángulos formados por \mathbf{H}_1 y \mathbf{H}_2 con una entrecara libre de corriente (ver figura 13-2) se obtiene por analogía con el ejemplo 1, sección 7.4.

13.3 CORRIENTE LAMINAR EN EL LIMITE

Si un material de la entrecara tiene conductividad diferente de cero, puede existir una corriente. Sin embargo, el caso de la corriente laminar en la entrecara es de más interés.

La figura 13-3 muestra una corriente laminar uniforme. En el sistema de coordenadas indicado la corriente laminar tiene una densidad $\mathbf{K} = K_0 \mathbf{a}_y$, y se localiza en la entrecara $x=0$ entre las regiones 1 y 2. El campo magnético \mathbf{H}' producido por esta corriente laminar está dado según el problema 9.3 por:

$$\mathbf{H}'_1 = \frac{1}{2} \mathbf{K} \times \mathbf{a}_{n1} = \frac{1}{2} K_0 \mathbf{a}_z \quad \mathbf{H}'_2 = \frac{1}{2} \mathbf{K} \times \mathbf{a}_{n2} = \frac{1}{2} K_0 (-\mathbf{a}_z)$$

Así, \mathbf{H}' presenta una discontinuidad tangencial de magnitud $|K_0|$ en la entrecara. Si un segundo campo magnético, \mathbf{H}'' , producido por alguna otra fuente, está presente, su componente tangencial será continua en la entrecara. El campo magnético resultante,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' + \mathbf{H}''$$

tendrá entonces una discontinuidad de magnitud $|K_0|$ en su componente tangencial. Esto se expresa por la fórmula vectorial

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{a}_{n12} = \mathbf{K}$$

donde \mathbf{a}_{n12} es la normal unitaria de la región 1 a la región 2. La relación vectorial, que es independiente del sistema de coordenadas que se escoga, también se cumple para corriente laminar no uniforme, donde \mathbf{K} es el valor de la densidad de corriente en el punto considerado de la entrecara.

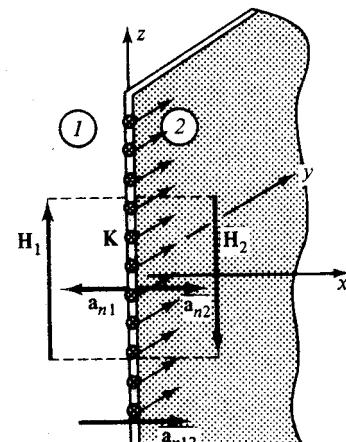


Fig. 13-3

13.4 RESUMEN DE LAS CONDICIONES LIMITES

Con el propósito de referencia, se muestran a continuación junto con las relaciones para \mathbf{H} y \mathbf{B} , las relaciones para \mathbf{E} y \mathbf{D} a través de la entrecara de dos dieléctricos.

Campos magnéticos

$$\begin{aligned} B_{n1} &= B_{n2} \\ \left\{ \begin{array}{ll} H_{t1} = H_{t2} & (\text{libre de corriente}) \\ (H_1 - H_2) \times a_{n12} = K & (\text{con corriente laminar}) \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_r 2}{\mu_r 1} \quad (\text{libre de corriente})$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} D_{n1} = D_{n2} & (\text{libre de carga}) \\ (D_1 - D_2) \cdot a_{n12} = -\rho_s & (\text{con carga superficial}) \end{array} \right.$$

$$E_{t1} = E_{t2}$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_r 2}{\epsilon_r 1} \quad (\text{libre de carga})$$

Estas relaciones se obtuvieron para condiciones estáticas. Sin embargo, en el capítulo 14 se verá que se cumplen también para campos variables con el tiempo.

13.5 ECUACIONES DE MAXWELL

Un campo estático E puede existir en ausencia de un campo magnético H . Un condensador con carga estática Q constituye un ejemplo. De la misma manera, un conductor con una corriente constante I tiene un campo magnético H sin que haya un campo E . Sin embargo, cuando los campos son variables con el tiempo, H no puede existir sin E ni E puede existir sin H . En tanto que mucha valiosa información puede derivarse de la teoría de campos estáticos, la teoría completa de los campos electromagnéticos sólo puede ser demostrada con campos variables con el tiempo. Los experimentos de Faraday y Hertz y los análisis teóricos de Maxwell involucran todos los campos variables con el tiempo.

Las ecuaciones agrupadas abajo, llamadas *ecuaciones de Maxwell*, se desarrollaron separadamente y se examinaron en capítulos anteriores. En la tabla 13-1 se presenta la forma más general, donde tanto cargas como corriente de conducción pueden estar presentes en la región.

Tabla 13-1. Ecuaciones de Maxwell, Sistema General

Forma Puntual	Forma Integral
$\nabla \times H = J_c + \frac{\partial D}{\partial t}$	$\oint H \cdot dL = \int_S \left(J_c + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot dS \quad (\text{ley de Ampère})$
$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$\oint E \cdot dL = \int_S \left(-\frac{\partial B}{\partial t} \right) \cdot dS \quad (\text{ley de Faraday}; S \text{ fijo})$
$\nabla \cdot D = \rho$	$\oint D \cdot dS = \int_v \rho dv \quad (\text{ley de Gauss})$
$\nabla \cdot B = 0$	$\oint B \cdot dS = 0 \quad (\text{no existencia de monopolio})$

Obsérvese que las formas puntual e integral de las primeras dos ecuaciones son equivalentes bajo el teorema de Stokes, mientras que las formas puntual e integral de las últimas dos ecuaciones son equivalentes bajo el teorema de divergencia.

Para espacio vacío, donde no hay cargas ($\rho = 0$) y no hay corrientes de conducción ($J_c = 0$), las ecuaciones de Maxwell toman la forma de la tabla 13-2.

La primera y segunda ecuación de forma puntual en espacio vacío pueden usarse para mostrar que los campos E y H variables con el tiempo no pueden existir independientemente. Por ejemplo, si E es una función del tiempo, entonces $D = \epsilon_0 E$ también será una función del tiempo, de tal manera que $\partial D / \partial t$ será diferente de cero. Por consiguiente $\nabla \times H$ no es cero y entonces debe existir un H diferente de cero. En forma similar, la segunda ecuación puede usarse para mostrar que si H es una función del tiempo, debe estar presente un campo E .

La forma puntual de las ecuaciones de Maxwell se usa más frecuentemente en los problemas. Sin embargo, la forma integral es importante porque despliega las leyes físicas básicas.

Tabla 13-2. Ecuaciones de Maxwell, conjunto de espacio libre

Forma Puntual	Forma Integral
$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$
$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$	$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$

Problemas resueltos

- 13.1. En la región 1 de la figura 13-4, $\mathbf{B}_1 = 1.2\mathbf{a}_x + 0.8\mathbf{a}_y + 0.4\mathbf{a}_z$ T. Halle \mathbf{H}_2 (ej. \mathbf{H} en $z = +0$) y los ángulos entre los campos vectoriales y una tangente de la entrecara.

Escriba \mathbf{H}_1 directamente bajo de \mathbf{B}_1 . Luego escriba aquellos componentes de \mathbf{H}_2 y \mathbf{B}_2 que se obtienen directamente de las dos reglas: \mathbf{B} normal es continuo y \mathbf{H} tangencial es continuo a través de una entrecara libre de corriente.

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1 &= 1.2\mathbf{a}_x + 0.8\mathbf{a}_y + 0.4\mathbf{a}_z \text{ T} \\ \mathbf{H}_1 &= \frac{1}{\mu_0} (8.0\mathbf{a}_x + 5.33\mathbf{a}_y + 2.67\mathbf{a}_z) 10^{-2} \text{ (A/m)} \\ \mathbf{H}_2 &= \frac{1}{\mu_0} (8.0\mathbf{a}_x + 5.33\mathbf{a}_y + 10^2 \mu_0 H_{z2} \mathbf{a}_z) 10^{-2} \text{ (A/m)} \\ \mathbf{B}_2 &= B_{x2} \mathbf{a}_x + B_{y2} \mathbf{a}_y + 0.4\mathbf{a}_z \text{ (T)}\end{aligned}$$

Ahora, los restantes términos se obtienen directamente:

$$B_{x2} = \mu_0 \mu_{r2} H_{x2} = 8.0 \times 10^{-2} \text{ T} \quad B_{y2} = 5.33 \times 10^{-2} \text{ T} \quad H_{z2} = \frac{B_{z2}}{\mu_0 \mu_{r2}} = \frac{0.4}{\mu_0} \text{ (A/m)}$$

El ángulo θ_1 es $90^\circ - \alpha_1$, donde α_1 es el ángulo entre \mathbf{B}_1 y la normal, \mathbf{a}_z .

$$\cos \alpha_1 = \frac{\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{a}_z}{|\mathbf{B}_1|} = 0.27$$

por lo tanto, $\alpha_1 = 74.5^\circ$ y $\theta_1 = 15.5^\circ$. Similarmente, $\theta_2 = 76.5^\circ$.

Verificación: $(\tan \theta_1)/(\tan \theta_2) = \mu_{r2}/\mu_{r1}$.

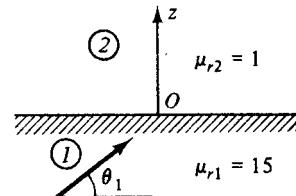


Fig. 13-4

- 13.2. La región 1, para la que $\mu_{r1} = 3$, está definida para $x < 0$ y la región 2, $x > 0$, tiene $\mu_{r2} = 5$. Dado

$$\mathbf{H}_1 = 4.0\mathbf{a}_x + 3.0\mathbf{a}_y - 6.0\mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

demuestre que $\theta_2 = 19.7^\circ$ y que $H_2 = 7.12$ A/m.

Proceda como en el problema 13.1

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1 &= 4.0\mathbf{a}_x + 3.0\mathbf{a}_y - 6.0\mathbf{a}_z \text{ A/m} \\ \mathbf{B}_1 &= \mu_0 (12.0\mathbf{a}_x + 9.0\mathbf{a}_y - 18.0\mathbf{a}_z) \text{ (T)} \\ \mathbf{B}_2 &= \mu_0 (12.0\mathbf{a}_x + 15.0\mathbf{a}_y - 30.0\mathbf{a}_z) \text{ (T)} \\ \mathbf{H}_2 &= 2.40\mathbf{a}_x + 3.0\mathbf{a}_y - 6.0\mathbf{a}_z \text{ A/m}\end{aligned}$$

Ahora

$$H_2 = \sqrt{(2.40)^2 + (3.0)^2 + (-6.0)^2} = 7.12 \text{ A/m}$$

El ángulo α_2 entre \mathbf{H}_2 y la normal está dada por

$$\cos \alpha_2 = \frac{H_{x2}}{H_2} = 0.34 \quad \text{o} \quad \alpha_2 = 70.3^\circ$$

Entonces $\theta_2 = 90^\circ - \alpha_2 = 19.7^\circ$

- 13.3.** La región 1, donde $\mu_{r1} = 4$, es el lado del plano $y+z=1$ que contiene el origen (ver figura 13-5). En la región 2, $\mu_{r2} = 6$. Dado $\mathbf{B}_1 = 2.0\mathbf{a}_x + 1.0\mathbf{a}_y$ T, halle \mathbf{B}_2 y \mathbf{H}_2 .

Si se escoge la normal unitaria $\mathbf{a}_n = (\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)/\sqrt{2}$,

$$\mathbf{B}_{n1} = (2.0\mathbf{a}_x + 1.0\mathbf{a}_y) \cdot (\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$$

$$\mathbf{B}_{n1} = (1/\sqrt{2})\mathbf{a}_n = 0.5\mathbf{a}_y + 0.5\mathbf{a}_z = \mathbf{B}_{n2}$$

$$\mathbf{B}_{t1} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_{n1} = 2.0\mathbf{a}_x + 0.5\mathbf{a}_y - 0.5\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{H}_{t1} = \frac{1}{\mu_0} (0.5\mathbf{a}_x + 0.125\mathbf{a}_y - 0.125\mathbf{a}_z) = \mathbf{H}_{t2}$$

$$\mathbf{B}_{t2} = \mu_0 \mu_{r2} \mathbf{H}_{t2} = 3.0\mathbf{a}_x + 0.75\mathbf{a}_y - 0.75\mathbf{a}_z$$

Ahora, se combinan las partes tangencial y normal de \mathbf{B}_2 .

$$\mathbf{B}_2 = 3.0\mathbf{a}_x + 1.25\mathbf{a}_y - 0.25\mathbf{a}_z \text{ T}$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{\mu_0} (0.50\mathbf{a}_x + 0.21\mathbf{a}_y - 0.04\mathbf{a}_z) \text{ (A/m)}$$

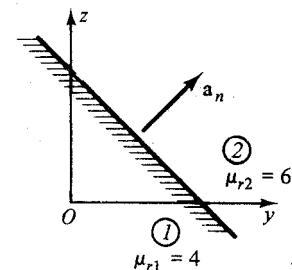


Fig. 13-5

- 13.4.** En la región 1, definida por $z < 0$, $\mu_{r1} = 3$ y

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{\mu_0} (0.2\mathbf{a}_x + 0.5\mathbf{a}_y + 1.0\mathbf{a}_z) \text{ (A/m)}$$

Halle \mathbf{H}_2 si se sabe que $\theta_2 = 45^\circ$.

$$\cos \alpha_1 = \frac{\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{a}_z}{|\mathbf{H}_1|} = 0.88 \quad \text{o} \quad \alpha_1 = 28.3^\circ$$

Entonces, $\theta_1 = 61.7^\circ$ y

$$\frac{\tan 61.7^\circ}{\tan 45^\circ} = \frac{\mu_{r2}}{3} \quad \text{o} \quad \mu_{r2} = 5.57$$

De la continuidad de \mathbf{B} normal, $\mu_{r1} H_{z1} = \mu_{r2} H_{z2}$, y así

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{\mu_0} \left(0.2\mathbf{a}_x + 0.5\mathbf{a}_y + \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}} 1.0\mathbf{a}_z \right) = \frac{1}{\mu_0} (0.2\mathbf{a}_x + 0.5\mathbf{a}_y + 0.54\mathbf{a}_z) \text{ (A/m)}$$

- 13.5.** Una corriente laminar, $\mathbf{K} = 6.5\mathbf{a}_z$ A/m, en $x=0$ separa la región 1, $x < 0$, donde $\mathbf{H}_1 = 10\mathbf{a}_y$ A/m y la región 2, $x > 0$. Halle \mathbf{H}_2 en $x = +0$.

Nada se dice acerca de la permeabilidad de las dos regiones. Sin embargo, como \mathbf{H}_1 es completamente tangencial, un cambio de permeabilidad no tendría ningún efecto. Como $B_{n1} = 0$, $B_{n2} = 0$ y en consecuencia $H_{n2} = 0$.

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{a}_{n12} = \mathbf{K}$$

$$(10\mathbf{a}_y - H_{y2}\mathbf{a}_y) \times \mathbf{a}_x = 6.5\mathbf{a}_z$$

$$(10 - H_{y2})(-\mathbf{a}_z) = 6.5\mathbf{a}_z$$

$$H_{y2} = 16.5 \text{ A/m}$$

De esta manera, $\mathbf{H}_2 = 16.5\mathbf{a}_y$ A/m.

- 13.6. Una corriente laminar $\mathbf{K} = 9.0 \mathbf{a}_y$ A/m, está localizada en $z = 0$, la interfase entre la región 1, $z < 0$, con $\mu_{r1} = 4$ y la región 2, $z > 0$, $\mu_{r2} = 3$. Dado que $\mathbf{H}_2 = 14.5 \mathbf{a}_x + 8.0 \mathbf{a}_z$ A/m, halle \mathbf{H}_1 .

La corriente laminar que aparece en la figura 13-6 se examina primero, sola.

$$\mathbf{H}'_1 = \frac{1}{2}(9.0) \mathbf{a}_y \times (-\mathbf{a}_z) = 4.5(-\mathbf{a}_x)$$

$$\mathbf{H}'_2 = \frac{1}{2}(9.0) \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = 4.5 \mathbf{a}_x$$

De la región 1 a la región 2, H_x aumentará en 9.0 A/m a causa de la corriente laminar.

Ahora examinamos los campos \mathbf{B} y \mathbf{H} completos.

$$\mathbf{H}_2 = 14.5 \mathbf{a}_x + 8.0 \mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0(43.5 \mathbf{a}_x + 24.0 \mathbf{a}_z) \text{ T}$$

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0(22.0 \mathbf{a}_x + 24.0 \mathbf{a}_z) \text{ T}$$

$$\mathbf{H}_1 = 5.5 \mathbf{a}_x + 6.0 \mathbf{a}_z \text{ A/m}$$

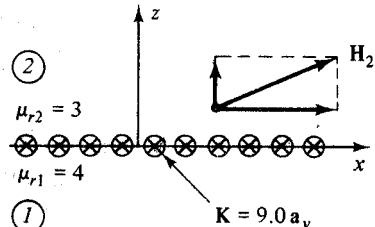


Fig. 13-6

Obsérvese que H_{x1} debe tener 9.0 A/m menos que H_{x2} a causa de la corriente laminar. B_{x1} se obtiene como $\mu_0 \mu_{r1} H_{x1}$.

Un método distinto consiste en aplicar $(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{a}_{n12} = \mathbf{K}$:

$$(H_{x1} \mathbf{a}_x + H_{y1} \mathbf{a}_y + H_{z1} \mathbf{a}_z) \times \mathbf{a}_z = \mathbf{K} + (14.5 \mathbf{a}_x + 8.0 \mathbf{a}_z) \times \mathbf{a}_z$$

$$-H_{x1} \mathbf{a}_y + H_{y1} \mathbf{a}_x = -5.5 \mathbf{a}_y$$

de lo que $H_{x1} = 5.5$ A/m y $H_{y1} = 0$. Este método tiene que ver exclusivamente con \mathbf{H} tangencial. Cualquier componente normal debe determinarse por el método anterior.

- 13.7. La región 1, $z < 0$, tiene $\mu_{r1} = 1.5$ mientras que la región 2, $z > 0$, tiene $\mu_{r2} = 5$. Cerca a $(0, 0, 0)$,

$$\mathbf{B}_1 = 2.40 \mathbf{a}_x + 10.0 \mathbf{a}_z \text{ T} \quad \mathbf{B}_2 = 25.75 \mathbf{a}_x - 17.7 \mathbf{a}_y + 10.0 \mathbf{a}_z \text{ T}$$

Si la entrecara tiene una corriente laminar, ¿cuál es la densidad en el origen?

Cerca del origen,

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{\mu_0 \mu_{r1}} \mathbf{B}_1 = \frac{1}{\mu_0} (1.60 \mathbf{a}_x + 6.67 \mathbf{a}_z) \text{ A/m}$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{\mu_0} (5.15 \mathbf{a}_x - 3.54 \mathbf{a}_y + 2.0 \mathbf{a}_z) \text{ A/m}$$

El valor local de \mathbf{K} está dado por

$$\mathbf{K} = (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{a}_{n12} = \frac{1}{\mu_0} (-3.55 \mathbf{a}_x + 3.54 \mathbf{a}_y + 4.67 \mathbf{a}_z) \times \mathbf{a}_z = \frac{5.0}{\mu_0} \left(\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y}{\sqrt{2}} \right) \text{ A/m}$$

- 13.8. Dado $\mathbf{E} = E_m \operatorname{sen}(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y$ en el espacio vacío, halle \mathbf{D} , \mathbf{B} y \mathbf{H} . Dibuje \mathbf{E} y \mathbf{H} en $t = 0$.

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 E_m \operatorname{sen}(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y$$

La ecuación de Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ da

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_m \operatorname{sen}(\omega t - \beta z) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \beta E_m \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x$$

Integrando,

$$\mathbf{B} = -\frac{\beta E_m}{\omega} \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x$$

donde la constante de integración, que es un campo estático, ha sido despreciada. Entonces,

$$\mathbf{H} = -\frac{\beta E_m}{\omega \mu_0} \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x$$

Obsérvese que \mathbf{E} y \mathbf{H} son mutuamente perpendiculares. En $t = 0$, $\sin(\omega t - \beta z) = -\sin \beta z$. La figura 13-7 muestra los dos campos a lo largo del eje z , suponiendo que E_m y β son positivos.

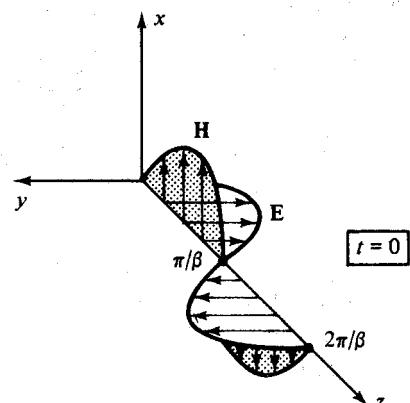


Fig. 13-7

- 13.9. Demuestre que los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} del problema 13.8 constituyen una onda que viaja en dirección z . Verifique que la velocidad de la onda $y E/H$ dependen sólo de las propiedades del espacio vacío.

\mathbf{E} y \mathbf{H} varían ambos como $\sin(\omega t - \beta z)$. Un estado dado de \mathbf{E} y \mathbf{H} se caracteriza entonces por

$$\omega t - \beta z = \text{const.} = \omega t_0 \quad \delta \quad z = \frac{\omega}{\beta}(t - t_0)$$

Pero ésta es la ecuación de un plano que se mueve con velocidad

$$c = \frac{\omega}{\beta}$$

en la dirección de su normal, \mathbf{a}_z . (Se supone que tanto β , como ω , son positivos. Para β negativo, la dirección del movimiento sería $-\mathbf{a}_z$.) De esta manera el patrón completo de la figura 13-7 se mueve por el eje z con velocidad c .

La ecuación de Maxwell $\nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t$ da

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\beta E_m}{\omega \mu_0} \sin(\omega t - \beta z) & 0 & 0 \end{array} \right| = \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon_0 E_m \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y]$$

$$\frac{\beta^2 E_m}{\omega \mu_0} \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y = \epsilon_0 E_m \omega \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega^2}{\beta^2}$$

Por lo tanto,

$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} \approx \sqrt{\frac{1}{(10^{-9}/36\pi)(4\pi \times 10^{-7})}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Más aún,

$$\frac{E}{H} = \frac{\omega \mu_0}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi \text{ V/A} = 120\pi \Omega$$

- 13.10. Sea $\mathbf{H} = H_m e^{j(\omega t + \beta z)} \mathbf{a}_x$, en el espacio vacío. Halle \mathbf{E} .

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} H_m e^{j(\omega t + \beta z)} \mathbf{a}_y = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$j\beta H_m e^{j(\omega t + \beta z)} \mathbf{a}_y = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\beta H_m}{\omega} e^{j(\omega t + \beta z)} \mathbf{a}_y$$

y $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon_0$.

- 13.11. Sean

$$\mathbf{E} = 30\pi e^{j(10^8 t + \beta z)} \mathbf{a}_x \quad (\text{V/m}) \quad \mathbf{H} = H_m e^{j(10^8 t + \beta z)} \mathbf{a}_y \quad (\text{A/m})$$

en el espacio vacío. Halle H_m y β ($\beta > 0$).

Esta es una onda plana, esencialmente la misma de los problemas 13.8 (excepto que allí \mathbf{E} estaba en la dirección y y \mathbf{H} en la dirección x). El resultado del problema 13.9 para cualquier onda como ésa en el espacio vacío fue:

$$\frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \quad \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \Omega$$

De esta manera, para una onda dada,

$$\beta = \frac{10^8}{3 \times 10^8} = \frac{1}{3} \text{ rad/m} \quad H_m = \pm \frac{30\pi}{120\pi} = \pm \frac{1}{4} \text{ A/m}$$

Para fijar el signo de H_m , aplíquese $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$:

$$j\beta 30\pi e^{j(10^8 t + \beta z)} \mathbf{a}_y = -j10^8 \mu_0 H_m e^{j(10^8 t + \beta z)} \mathbf{a}_y$$

lo que demuestra que H_m debe ser negativo.

- 13.12. En una región homogénea no conductora donde $\mu_r = 1$, halle ϵ_r y ω si

$$\mathbf{E} = 30\pi e^{j[\omega t - (4/3)y]} \mathbf{a}_z \quad (\text{V/m}) \quad \mathbf{H} = 1.0 e^{j[\omega t - (4/3)y]} \mathbf{a}_x \quad (\text{A/m})$$

Aquí, por analogía con el problema 13.9,

$$\frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \text{ (m/s)} \quad \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \text{ (\Omega)}$$

Así pues, como $\mu_r = 1$,

$$\frac{\omega}{4/3} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad 30\pi = 120\pi \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

lo que da $\epsilon_r = 16$, $\omega = 10^8 \text{ rad/s}$. En este medio la velocidad de la luz es $c/4$.

Problemas supplementarios

- 13.13. La región 1, donde $\mu_{r1} = 5$, está al lado del plano $6x + 4y + 3z = 12$ que incluye el origen. En la región 2, $\mu_{r2} = 3$. Dado

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{\mu_0} (3.0 \mathbf{a}_x - 0.5 \mathbf{a}_y) \quad (\text{A/m})$$

halle \mathbf{B}_2 y θ_2 . Resp. $12.15 \mathbf{a}_x + 0.60 \mathbf{a}_y + 1.58 \mathbf{a}_z \text{ T}, 56.6^\circ$

- 13.14. La entrecara entre dos regiones diferentes es normal a uno de los tres ejes cartesianos. Si

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0(43.5\mathbf{a}_x + 24.0\mathbf{a}_z) \quad \mathbf{B}_2 = \mu_0(22.0\mathbf{a}_x + 24.0\mathbf{a}_z)$$

¿cuál será la relación $(\tan \theta_1)/(\tan \theta_2)$? *Resp.* 0.506

- 13.15. Dentro de un cilindro circular recto, $\mu_{r1} = 1000$. El exterior es espacio vacío. Si $\mathbf{B}_1 = 2.5\mathbf{a}_\phi$ T dentro del cilindro, determine \mathbf{B}_2 justo afuera. *Resp.* $2.5\mathbf{a}_\phi$ mT

- 13.16. En coordenadas esféricas, la región 1 es $r < a$, la región 2 es $a < r < b$ y la región 3 es $r > b$. Las regiones 1 y 3 son espacio vacío, mientras que $\mu_{r2} = 500$. Dado $\mathbf{B}_1 = 0.20 \mathbf{a}_r$ T, halle \mathbf{H} en cada región.

$$\text{Resp. } \frac{0.20}{\mu_0} (\text{A/m}), \quad \frac{4 \times 10^{-4}}{\mu_0} (\text{A/m}), \quad \frac{0.20}{\mu_0} (\text{A/m})$$

- 13.17. Una hoja de corriente, $\mathbf{K} = (8.0/\mu_0)\mathbf{a}_y$ (A/m), en $x=0$ separa la región 1, $x < 0$ y $\mu_{r1}=3$, de la región 2, $x > 0$ y $\mu_{r2}=1$. Dado $\mathbf{H}_1 = (10.0/\mu_0)(\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)$ (A/m), halle \mathbf{H}_2 .

$$\text{Resp. } \frac{1}{\mu_0} (10.0\mathbf{a}_y + 2.0\mathbf{a}_z) \quad (\text{A/m})$$

- 13.18. El plano $x=0$ contiene una corriente laminar de densidad \mathbf{K} que separa la región 1, $x < 0$ y $\mu_{r1}=2$, de la región 2, $x > 0$ y $\mu_{r2}=7$. Dado

$$\mathbf{B}_1 = 6.0\mathbf{a}_x + 4.0\mathbf{a}_y + 10.0\mathbf{a}_z \quad \text{T} \quad \mathbf{B}_2 = 6.0\mathbf{a}_x - 50.96\mathbf{a}_y + 8.96\mathbf{a}_z \quad \text{T}$$

$$\text{halle } \mathbf{K}. \quad \text{Resp. } \frac{1}{\mu_0} (3.72\mathbf{a}_y - 9.28\mathbf{a}_z) \quad (\text{A/m})$$

- 13.19. En el espacio vacío, $\mathbf{D} = D_m \sin(\omega t + \beta z)\mathbf{a}_x$. Utilizando las ecuaciones de Maxwell, demuestre que

$$\mathbf{B} = \frac{-\omega\mu_0 D_m}{\beta} \sin(\omega t + \beta z) \mathbf{a}_y$$

Dibuje los campos en $t=0$ a lo largo del eje z , suponiendo que $D_m > 0$, $\beta > 0$.
Resp. Ver figura 13-8

- 13.20. En el espacio vacío,

$$\mathbf{B} = B_m e^{j(\omega t + \beta z)} \mathbf{a}_y$$

Demuestre que

$$\mathbf{E} = -\frac{\omega B_m}{\beta} e^{j(\omega t + \beta z)} \mathbf{a}_x$$

- 13.21. En una región homogénea donde $\mu_r = 1$ y $\epsilon_r = 50$,

$$\mathbf{E} = 20\pi e^{j(\omega t - \beta z)} \mathbf{a}_x \quad (\text{V/m}) \quad \mathbf{B} = \mu_0 H_m e^{j(\omega t - \beta z)} \mathbf{a}_y \quad (\text{T})$$

Halle ω y H_m si la longitud de onda es 1.78 m. *Resp.* 1.5×10^8 rad/s, 1.18 A/m

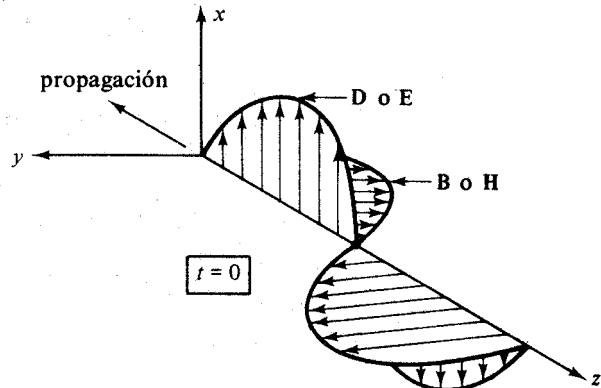


Fig. 13-8

Capítulo 14

Ondas electromagnéticas

14.1 INTRODUCCION

Algunas soluciones de onda de las ecuaciones de Maxwell han sido encontradas ya en los problemas resueltos del capítulo 13. El presente capítulo dará un tratamiento más minucioso de las ondas electromagnéticas. Como la mayoría de las regiones de interés son libres de carga, se supone que $\rho = 0$. Por otro lado, hay que suponer, materiales lineales isotrópicos, de tal manera que $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ y $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$.

14.2 ECUACIONES DE ONDA

Con base en los principios anteriores y suponiendo que tanto \mathbf{E} como \mathbf{H} son dependientes del tiempo $e^{j\omega t}$, las ecuaciones de Maxwell (tabla 13-1) se transforman en

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (4)$$

Ahora aplicamos la identidad vectorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

donde, *tan sólo en coordenadas cartesianas*,

$$\nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla^2 A_x) \mathbf{a}_x + (\nabla^2 A_y) \mathbf{a}_y + (\nabla^2 A_z) \mathbf{a}_z$$

Tomando el rotacional de (1) y (2), y utilizando (3) y (4),

$$-\nabla^2 \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)(\nabla \times \mathbf{E})$$

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -j\omega\mu(\nabla \times \mathbf{H})$$

Ahora, sustituyendo $\nabla \times \mathbf{E}$ y $\nabla \times \mathbf{H}$ de (2) y (1), se obtienen las *ecuaciones de onda vectoriales*

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \gamma^2 \mathbf{H} \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \gamma^2 \mathbf{E}$$

donde $\gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)$. La *constante de propagación*, γ , es la raíz cuadrada de γ^2 cuyas partes real e imaginaria son positivas:

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

con

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1 \right)} \quad (5)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} + 1 \right)} \quad (6)$$

La constante α se llama *factor de atenuación* y β se llama *constante de corrimiento de fase*. La razón de estos nombres se hará evidente en la sección 14.4. De la ecuación de onda se ve que γ tiene unidades m^{-1} . Sin embargo, es costumbre dar α y β en Np/m y rad/m , respectivamente, donde el *néper* (Np) es una unidad adimensional como el radián.

14.3 SOLUCIONES EN COORDENADAS CARTESIANAS

La familiar ecuación escalar de onda en una dimensión,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{1}{U^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

tiene soluciones de la forma $F = f(z - Ut)$ y $F = g(z + Ut)$, donde f y g son funciones arbitrarias. Estas representan ondas que viajan con velocidad U en las direcciones $+z$ y $-z$, respectivamente. Ver figura 14-1. En particular, si se supone una variación armónica de tiempo $e^{j\omega t}$, la ecuación de onda se convierte en

$$\frac{d^2 F}{dz^2} = -\beta^2 F \quad (\beta = \frac{\omega}{U})$$

con soluciones (incluyendo el factor temporal) de la forma

$$F = C e^{j(\omega t - \beta z)} \quad F = D e^{j(\omega t + \beta z)}$$

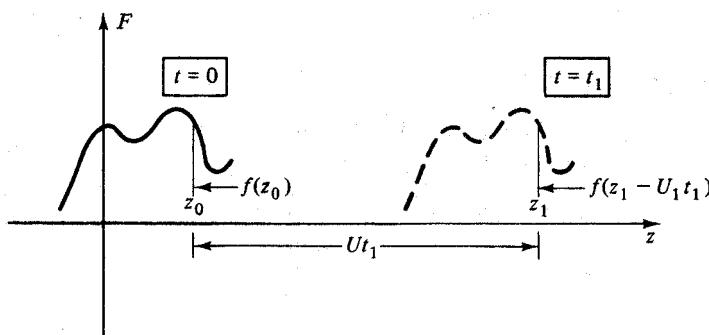


Fig. 14-1

o en las partes real o imaginaria de éstas. La figura 14-2 muestra una de estas soluciones, $F = \operatorname{sen}(\omega t - \beta z)$, en $t = 0$ y en $t = \pi/2\omega$; durante este intervalo de tiempo la onda se ha movido una distancia $d = U(\pi/2\omega) = \pi/2\beta$ a la derecha. Para cualquier t fijo, la forma de la onda se repite cuando z cambia a $2\pi/\beta$. La distancia

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

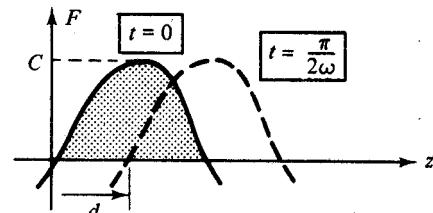


Fig. 14-2

se llama *longitud de onda*. De esta manera en la figura 14-2, la onda ha avanzado un cuarto de longitud de onda a la derecha. La longitud de onda y la *frecuencia*, $f = \omega/2\pi$, guardan entre sí la relación conocida

$$\lambda f = U$$

También, $\lambda = TU$, donde $T = 2\pi/\omega$ es el *periodo*.

Las ecuaciones vectoriales de onda, de la sección 14.2, tienen soluciones similares a las ya discutidas. Como los vectores unidad \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y , y \mathbf{a}_z en coordenadas cartesianas tienen direcciones fijas, la ecuación de onda para \mathbf{H} puede reescribirse bajo la forma

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} = \gamma^2 \mathbf{H}$$

De especial interés son las soluciones (ondas planas) que dependen sólo de una coordenada espacial, digamos z . La ecuación se convierte entonces en

$$\frac{d^2 \mathbf{H}}{dz^2} = \gamma^2 \mathbf{H}$$

dando

$$\mathbf{H} = H_0 e^{\pm \gamma z} \mathbf{a}_H \quad \text{ó} \quad \mathbf{H}(z, t) = H_0 e^{\pm \gamma z} e^{j\omega t} \mathbf{a}_H$$

Las soluciones correspondientes para el campo eléctrico son

$$\mathbf{E} = E_0 e^{\pm \gamma z} \mathbf{a}_E \quad \text{ó} \quad \mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{\pm \gamma z} e^{j\omega t} \mathbf{a}_E$$

Aquí, \mathbf{a}_H y \mathbf{a}_E son vectores unidad fijos. La cantidad compleja γ se definió en la sección 14.2. En el problema 14.2 se demuestra que

$$\mathbf{a}_H \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_E \cdot \mathbf{a}_z = 0$$

es decir, que ningún campo tiene componente en la dirección de propagación. Siendo esto así se pueden rotar siempre los ejes para colocar uno de los campos, digamos \mathbf{E} , a lo largo del eje x . Entonces, a partir de (2) de la sección 14.2 se demuestra que \mathbf{H} yace a lo largo del eje y .

La solución de onda plana que se acaba de obtener depende, vía γ , de las propiedades del medio (μ , ϵ y σ). Esta dependencia se examinará en las siguientes tres secciones.

14.4 SOLUCIONES PARA MEDIOS PARCIALMENTE CONDUCTORES

Para una región de poca conductividad (ej.: suelo húmedo, agua de mar), la solución de la ecuación de onda en \mathbf{E} es

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_x$$

Entonces, a partir de (2), de la sección 14.2,

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\sigma + j\omega\epsilon}{j\omega\mu}} E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_y$$

La razón E/H es característica del medio (también depende de la frecuencia). Más específicamente, para ondas $\mathbf{E} = E_x \mathbf{a}_x$, $\mathbf{H} = H_y \mathbf{a}_y$ que se propaga en la dirección $+z$, la *impedancia intrínseca*, η , del medio se define por:

$$\eta = \frac{E_x}{H_y}$$

De esta manera,

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

donde la raíz cuadrada correcta puede escribirse en forma polar $|\eta|/\theta$, con

$$|\eta| = \sqrt{\frac{\mu/\epsilon}{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}} \quad \tan 2\theta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \quad \text{y} \quad 0^\circ < \theta < 45^\circ$$

(Si la onda se propaga en la dirección $-z$, $E_x/H_y = -\eta$. En efecto, γ se reemplaza por $-\gamma$ y se usa la otra raíz cuadrada).

Al introducir el factor tiempo $e^{j\omega t}$ y al escribir $\gamma = \alpha + j\beta$ se obtiene las siguientes ecuaciones para campos en una región parcialmente conductora:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= E_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{H}(z, t) &= \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z - \theta)} \mathbf{a}_y \end{aligned}$$

El factor $e^{-\alpha z}$ atenúa las magnitudes de \mathbf{E} y de \mathbf{H} cuando se propagan en dirección $+z$. La expresión para α , (5) de la sección 14.2, demuestra que existe atenuación a menos que la conductividad σ sea cero, lo que

sólo es el caso de dieléctricos perfectos o de espacio vacío. De la misma manera, la diferencia de fase temporal θ , entre $\mathbf{E}(z, t)$ y $\mathbf{H}(z, t)$ desaparece sólo cuando σ es cero.

La velocidad de propagación y la longitud de onda están dadas por:

$$U = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right)}}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right)}}$$

Si se conoce la velocidad de propagación, $\lambda f = U$ puede usarse para determinar la longitud de onda λ . El término $(\sigma/\omega\epsilon)^2$ reduce tanto el valor de la velocidad como el de la longitud de onda, de lo que serían en espacio vacío o en dieléctricos perfectos, donde $\sigma = 0$. Observese que el medio es *dispersivo*, es decir, ondas con frecuencias diferentes ω tienen diferentes velocidades U .

14.5 SOLUCIONES PARA DIELECTRICOS PERFECTOS

Para un dieléctrico perfecto, $\sigma = 0$, y así

$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \angle 0^\circ$$

Como $\alpha = 0$, no hay atenuación de las ondas \mathbf{E} y \mathbf{H} . El ángulo cero sobre η produce un \mathbf{H} que está en fase temporal con \mathbf{E} en cada localización fija. Suponiendo \mathbf{E} en \mathbf{a}_x y la propagación en \mathbf{a}_z , las ecuaciones de campo pueden obtenerse como límites de las de la sección 14.4:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= E_0 e^{j(\omega t - \beta z)} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{H}(z, t) &= \frac{E_0}{\eta} e^{j(\omega t - \beta z)} \mathbf{a}_y \end{aligned}$$

La velocidad y longitud de onda son:

$$U = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Soluciones en espacio vacío

El espacio vacío no es más que un dieléctrico perfecto, para el cual

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \quad \epsilon = \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m} \approx \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ F/m}$$

Para espacio vacío: $\eta = \eta_0 \approx 120\pi \Omega$ y $U = c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

14.6 SOLUCIONES PARA BUENOS CONDUCTORES

En los materiales ordinarios que se clasifican como conductores, $\sigma \gg \omega\epsilon$ en el rango de las frecuencias prácticas. Por ejemplo, en el cobre, para el cual $\sigma = 5.80 \times 10^7 \text{ S/m}$ y $\epsilon \approx \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$, sería necesario que las frecuencias fuesen del orden de 10^{16} Hz antes que $\omega\epsilon/\sigma$ debiera retenerse en las expresiones para la constante de propagación y la impedancia intrínseca. Por lo tanto, haciendo $\omega\epsilon/\sigma \rightarrow 0$,

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi\mu\sigma} \quad \eta = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \angle 45^\circ$$

Se ve que para todos los conductores las ondas \mathbf{E} y \mathbf{H} resultan atenuadas. Ejemplos numéricos mostrarán que ésta es una atenuación rápida: α siempre será igual a β . En cada localización fija, \mathbf{H} está desfasado con \mathbf{E} por 45° o $\pi/4$ rad. Una vez más, suponiendo que \mathbf{E} tiene dirección \mathbf{a}_x y propagación \mathbf{a}_z , las ecuaciones de campo son, a partir de la sección 14.4:

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \mathbf{a}_x \quad \mathbf{H}(z, t) = \frac{E_0}{|\eta|} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z - \pi/4)} \mathbf{a}_y$$

Más aún,

$$U = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} = \omega\delta \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = 2\pi\delta$$

La velocidad y la longitud de onda en un medio conductor se escriben aquí en términos de *profundidad de penetración*,

$$\delta \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

El significado de este parámetro se examina en la sección 14.7.

14.7 PROFUNDIDAD DE PENETRACION

Las ondas \mathbf{E} y \mathbf{H} , cuando viajan en un medio conductor, son atenuadas por el factor $e^{-\alpha z}$ al avanzar a lo largo de z . Esta atenuación es tan rápida que a menudo las ondas pueden considerarse cero sólo a unos pocos milímetros de avance.

Considérese que la región $z \geq 0$ es un conductor y, justo adentro del conductor, en $z = +0$, \mathbf{E} tiene magnitud 1.0 V/m. La *profundidad de penetración*, δ , se define como la distancia a partir de la cual $|\mathbf{E}|$ ha disminuido a $e^{-1} = 0.368$ V/m. De esta manera

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \text{ (m)}$$

Por conveniencia, $z = 5\delta$ se toma a menudo como el punto donde la función es cero, ya que ahí su valor es 0.0067 ó 0.67% del valor inicial. A una frecuencia de 100

MHz, en el caso del cobre, la profundidad de penetración es $6.61 \mu\text{m}$. Las ondas se atenúan en 0.67% en 5δ , ó $33.0 \mu\text{m}$. Por consiguiente, el término *propagación*, cuando se utiliza conjuntamente con el comportamiento de la onda dentro de un conductor, es causa de mala interpretación. Las ondas \mathbf{E} y \mathbf{H} difícilmente se propagan. Como se verá en breve, la mayor parte de una onda incidente sobre la superficie de un conductor se refleja. Sin embargo, la porción que continúa dentro del conductor y se atenúa rápidamente no puede ignorarse completamente, porque da lugar a una densidad de corriente de conducción J_c y a sus concomitantes pérdidas de potencia de tipo óhmico.

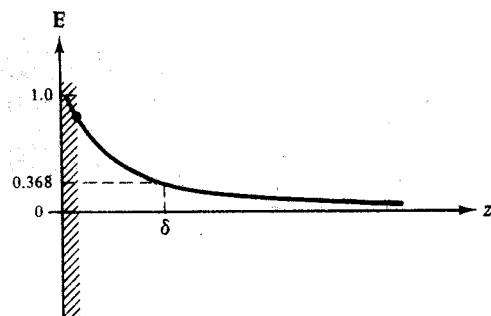


Fig. 14-3

14.8 ONDAS REFLEJADAS

Cuando una onda viajera llega a una entrecara entre dos regiones diferentes, es parcialmente reflejada y parcialmente transmitida, y las magnitudes de estas dos partes están determinadas por las constantes de las dos regiones. En la figura 14-4, una onda viajera \mathbf{E} se aproxima a la entrecara $z = 0$ desde la región 1, $z < 0$. \mathbf{E}^i y \mathbf{E}' están en $z = -0$, mientras \mathbf{E}' está en $z = +0$ (en región 2). Aquí, i significa "incidente", r "reflejado" y t "transmitida". Se supone incidencia normal. Las ecuaciones para \mathbf{E} y \mathbf{H} pueden escribirse

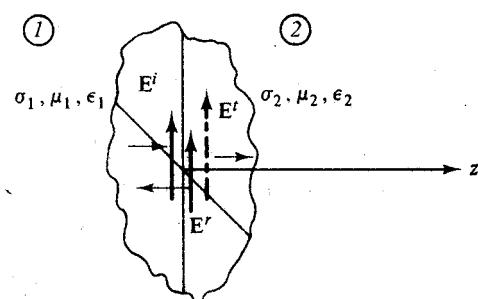


Fig. 14-4

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^i(z, t) &= E_0^i e^{-\gamma_1 z} e^{j \omega t} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{E}'(z, t) &= E_0' e^{\gamma_1 z} e^{j \omega t} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{E}'(z, t) &= E_0' e^{-\gamma_2 z} e^{j \omega t} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{H}^i(z, t) &= H_0^i e^{-\gamma_1 z} e^{j \omega t} \mathbf{a}_y \\ \mathbf{H}'(z, t) &= H_0' e^{\gamma_1 z} e^{j \omega t} \mathbf{a}_y \\ \mathbf{H}'(z, t) &= H_0' e^{-\gamma_2 z} e^{j \omega t} \mathbf{a}_y\end{aligned}$$

Con incidencia normal, \mathbf{E} y \mathbf{H} son completamente tangenciales a la entrecara y de esta manera son continuos a través de ella. En $z = 0$, esto implica

$$E_0^i + E_0' = E_0^i \quad H_0^i + H_0' = H_0'$$

Más aún, la impedancia intrínseca en cualquier región es igual a $\pm E_x/H_y$ (ver sección 14.4).

$$\frac{E_0^i}{H_0^i} = \eta_1 \quad \frac{E_0'}{H_0'} = -\eta_1 \quad \frac{E_0'}{H_0'} = \eta_2$$

Las cinco ecuaciones anteriores pueden combinarse para producir las siguientes relaciones dadas en términos de las impedancias intrínsecas:

$$\begin{aligned}\frac{E_0'}{E_0^i} &= \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} & \frac{H_0'}{H_0^i} &= \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \\ \frac{E_0'}{E_0^i} &= \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} & \frac{H_0'}{H_0^i} &= \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2}\end{aligned}$$

Las impedancias intrínsecas para varios materiales fueron examinadas antes. Aquí se repiten con el propósito de referencia:

medio parcialmente conductor:	$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$
medio conductor:	$\eta = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} / 45^\circ$
dieléctrico perfecto:	$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$
espacio vacío:	$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi \Omega$

EJEMPLO 1: Las ondas viajeras, \mathbf{E} y \mathbf{H} , en el espacio vacío (región 1) inciden normalmente en la entrecara con un dieléctrico perfecto (región 2), para el que $\epsilon_r = 3.0$. Compare las magnitudes de las ondas \mathbf{E} y \mathbf{H} incidentes, reflejadas y transmitidas en la entrecara.

$$\eta_1 = \eta_0 = 120\pi \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} = 217.7$$

$$\begin{aligned}\frac{E_0'}{E_0^i} &= \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} = -0.268 & \frac{H_0'}{H_0^i} &= \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = 0.268 \\ \frac{E_0'}{E_0^i} &= \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = 0.732 & \frac{H_0'}{H_0^i} &= \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} = 1.268\end{aligned}$$

14.9 ONDAS ESTACIONARIAS

Cuando ondas viajeras en un dieléctrico perfecto ($\sigma_1 = \alpha_1 = 0$) inciden normalmente en la entrecara con conductor perfecto ($\sigma_2 = \infty$, $\eta_2 = 0$), la onda reflejada en combinación con la onda incidente produce

una onda estacionaria. En tal onda, tal como se demuestra fácilmente mediante una cuerda tensa y fija, las oscilaciones en todos los puntos de un intervalo de media longitud de onda están en fase. La combinación de las ondas incidente y reflejada puede escribirse

$$\mathbf{E}(z, t) = [E_0^i e^{j(\omega t - \beta z)} + E_0^r e^{j(\omega t + \beta z)}] \mathbf{a}_x = e^{j\omega t} (E_0^i e^{-j\beta z} + E_0^r e^{j\beta z}) \mathbf{a}_x$$

como $\eta_2 = 0$, $E_0^r/E_0^i = -1$ y

$$\mathbf{E}(z, t) = e^{j\omega t} (E_0^i e^{-j\beta z} - E_0^i e^{j\beta z}) \mathbf{a}_x = -2jE_0^i \sin \beta z e^{j\omega t} \mathbf{a}_x$$

o, tomando la parte real,

$$\mathbf{E}(z, t) = 2E_0^i \sin \beta z \sin \omega t \mathbf{a}_x$$

La onda estacionaria aparece en la figura 14-5, a intervalos de $T/8$, donde $T = 2\pi/\omega$ es el período. En $t = 0$, $\mathbf{E} = 0$ en todos los puntos. En $t = 1 (T/8)$, los puntos extremos del vector \mathbf{E} yacen en la curva seno 1. En $t = 2 (T/8)$, yacen en la curva seno 2 y así sucesivamente. Las curvas sinusoidales 2 y 6 forman una envolvente para las oscilaciones. La amplitud de esta envolvente es dos veces la amplitud de la onda incidente. Obsérvese que los segmentos adyacentes de media longitud de onda están desfasados en 180° uno del otro.

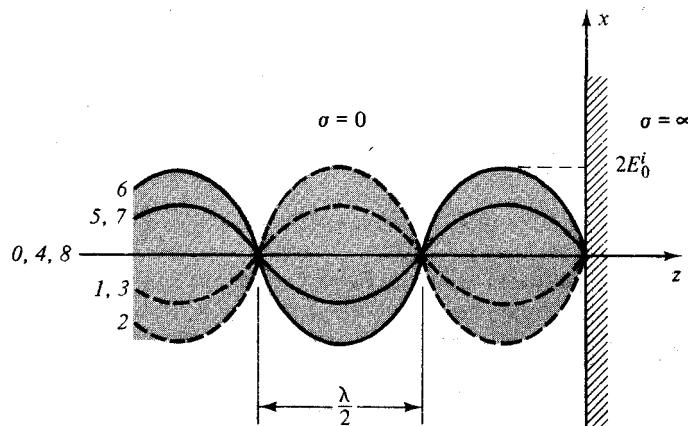


Fig. 14-5

14.10 POTENCIA Y VECTOR DE POYNTING

Se escribe la primera ecuación de Maxwell para una región de conductividad σ y luego se toma el producto escalar de \mathbf{E} con cada término:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \sigma E^2 + \mathbf{E} \cdot \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

donde, como es usual, $E^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$. Se utiliza la identidad vectorial $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ para cambiar el lado izquierdo de la ecuación.

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \sigma E^2 + \mathbf{E} \cdot \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Por la segunda ecuación de Maxwell,

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{H} \cdot \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\frac{\mu}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t}$$

Similarmente,

$$\mathbf{E} \cdot \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t}$$

Sustituyendo y reordenando términos,

$$\sigma E^2 = -\frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} - \frac{\mu}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

Si esta igualdad es válida, entonces la integración de sus términos sobre un volumen general v debe ser válida también.

$$\int_v \sigma E^2 dv = - \int_v \left(\frac{\epsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{\mu}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} \right) dv - \oint_s (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

donde el último término ha sido convertido a una integral sobre la superficie de v mediante el teorema de divergencia.

La integral de la izquierda tiene unidades watts y es el término óhmico conocido para representar la energía disipada en calor por unidad de tiempo. Esta energía disipada tiene su fuente en las integrales de la derecha. Como $\epsilon E^2/2$ y $\mu H^2/2$ son las densidades de energía almacenadas en los campos eléctrico y magnético respectivamente, las derivadas negativas respecto del tiempo pueden considerarse como una disminución en esta energía almacenada. Por consiguiente, la integral final (incluyendo el signo menos) debe ser la tasa de energía que penetra el volumen desde fuera. Un cambio de signo produce el *valor instantáneo de energía que abandona el volumen*:

$$P(t) = \oint_s (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_s \mathcal{P} \cdot d\mathbf{S}$$

donde $\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ es el *vector de Poynting*, tasa instantánea de flujo de energía por unidad de área en un punto.

En el producto vectorial que define el vector de Poynting, los campos se suponen reales. Pero si, \mathbf{E} y \mathbf{H} se expresan en forma compleja y dependen en común del tiempo, $e^{j\omega t}$, entonces el promedio de tiempo de \mathcal{P} está dado por

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$$

donde \mathbf{H}^* es la conjugada compleja de \mathbf{H} . De esto se sigue la *potencia compleja* del análisis de circuitos, $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{VI}^*$, de la que la potencia es la parte real, $P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \mathbf{VI}^*$.

Para ondas planas, la dirección del flujo de energía es la dirección de propagación. De esta manera, el vector de Poynting ofrece una forma útil y libre del sistema de coordenadas de hallar la dirección de propagación o de determinar las direcciones de los campos, si la dirección de propagación es conocida. Esto puede tener mucho valor cuando se examinan ondas incidentes, transmitidas y reflejadas.

Problemas resueltos

- 14.1.** Una onda viajera está descrita por $y = 10 \sin(\beta z - \omega t)$. Dibuje la onda en $t = 0$ y en $t = t_1$, cuando ha avanzado $\lambda/8$, si la velocidad es 3×10^8 m/s y la frecuencia angular $\omega = 10^6$ rad/s. Repita el ejercicio para $\omega = 2 \times 10^6$ rad/s y el mismo tiempo t_1 .

La onda avanzada λ en un período, $T = 2\pi/\omega$. Por tanto,

$$t_1 = \frac{T}{8} = \frac{\pi}{4\omega}$$

$$\frac{\lambda}{8} = ct_1 = (3 \times 10^8) \frac{\pi}{4(10^6)} = 236 \text{ m}$$

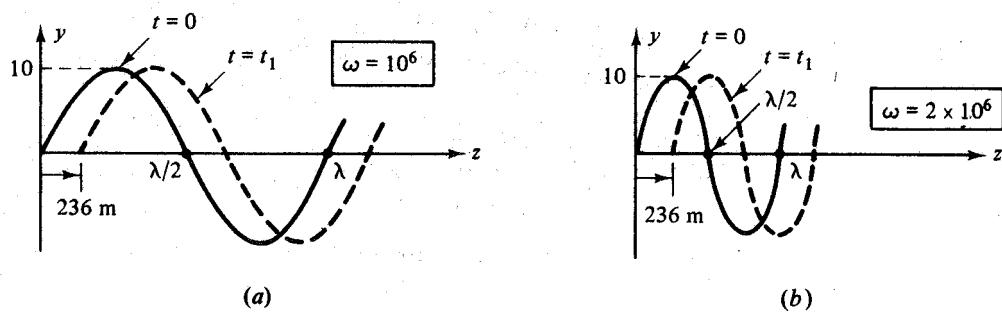


Fig. 14-6

La onda se muestra en $t = 0$ y $t = t_1$ en la figura 14-6(a). A una distancia de dos veces la frecuencia, la longitud de onda λ es la mitad y la constante de desfasaje β es dos veces el valor anterior. Ver figura 14-6(b). En t_1 la onda avanzó también 236 m, pero esta distancia es ahora $\lambda/4$.

- 14.2.** Demuestre que para la onda plana (omitiéndose la dependencia con el tiempo)

$$\mathbf{H} = H_0 e^{\pm \gamma z} \mathbf{a}_H$$

donde \mathbf{a}_H es un vector unitario fijo, $\mathbf{a}_H \cdot \mathbf{a}_z = 0$.

En términos de vectores cartesianos unidad,

$$\mathbf{a}_H = (\mathbf{a}_H \cdot \mathbf{a}_x)\mathbf{a}_x + (\mathbf{a}_H \cdot \mathbf{a}_y)\mathbf{a}_y + (\mathbf{a}_H \cdot \mathbf{a}_z)\mathbf{a}_z$$

y así

$$\mathbf{H} = H_0 e^{\pm \gamma z} (\mathbf{a}_H \cdot \mathbf{a}_x) \mathbf{a}_x + H_0 e^{\pm \gamma z} (\mathbf{a}_H \cdot \mathbf{a}_y) \mathbf{a}_y + H_0 e^{\pm \gamma z} (\mathbf{a}_H \cdot \mathbf{a}_z) \mathbf{a}_z$$

La ecuación de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ da entonces

$$\frac{\partial}{\partial z} [H_0 e^{\pm \gamma z} (\mathbf{a}_H \cdot \mathbf{a}_z)] = 0 \quad \text{or} \quad \pm \gamma H_0 e^{\mp \gamma z} (\mathbf{a}_H \cdot \mathbf{a}_z) = 0$$

lo que sólo se cumple si $\mathbf{a}_H \cdot \mathbf{a}_z = 0$.

- 14.3. En el espacio vacío, $\mathbf{E}(z, t) = 10^3 \operatorname{sen}(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y$ (V/m). Obtenga $\mathbf{H}(z, t)$.

Un examen de la fase, $\omega t - \beta z$, revela que la dirección de la propagación es $+z$. Como $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ debe estar también dirigido según $+z$, \mathbf{H} debe tener dirección $-a_z$. Por lo tanto,

$$\frac{E_y}{-H_x} = \eta_0 = 120\pi \Omega \quad \text{ó} \quad H_x = -\frac{10^3}{120\pi} \sin(\omega t - \beta z) \quad (\text{A/m})$$

$$\mathbf{H}(z, t) = -\frac{10^3}{120\pi} \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x \quad (\text{A/m})$$

- 14.4.** Sea la onda del problema 14.3. Determine la constante de propagación γ , sabiendo que la frecuencia es $f = 95.5 \text{ MHz}$.

En general, $\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$. En el espacio vacío, $\sigma = 0$, así que

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = j(2\pi f/c) = j \frac{2\pi(95.5 \times 10^6)}{3 \times 10^8} = j(2.0) \text{ m}^{-1}$$

Obsérvese que este resultado demuestra que el factor de atenuación es $\alpha = 0$ y la constante de desfasaje es $\beta = 2.0 \text{ rad/m}$.

14.5. Examine el campo

$$\mathbf{E}(z, t) = 10 \sin(\omega t + \beta z) \mathbf{a}_x + 10 \cos(\omega t + \beta z) \mathbf{a}_y$$

en el plano $z = 0$, para $\omega t = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ y π .

Los cálculos se presentan en la tabla 14-1.

Tabla 14-1

ωt	$E_x = 10 \sin \omega t$	$E_y = 10 \cos \omega t$	$\mathbf{E} = E_x \mathbf{a}_x + E_y \mathbf{a}_y$
0	0	10	$10 \mathbf{a}_y$
$\pi/4$	$10/\sqrt{2}$	$10/\sqrt{2}$	$10 \left(\frac{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y}{\sqrt{2}} \right)$
$\pi/2$	10	0	$10 \mathbf{a}_x$
$3\pi/4$	$10/\sqrt{2}$	$-10/\sqrt{2}$	$10 \left(\frac{\mathbf{a}_x - \mathbf{a}_y}{\sqrt{2}} \right)$
π	0	-10	$10(-\mathbf{a}_y)$

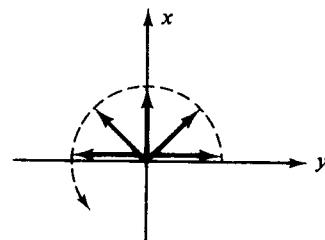


Fig. 14-7

Como se muestra en la figura 14-7, $\mathbf{E}(z, t)$ tiene polarización circular. Además, la onda viaja en dirección $-\mathbf{a}_z$.

- 14.6.** Un campo \mathbf{H} viaja en dirección $-\mathbf{a}_z$ en el espacio vacío con una constante de desfasaje de 30.0 rad/m y una amplitud de $(1/3\pi) \text{ A/m}$. Si el campo tiene dirección $-\mathbf{a}_y$ cuando $t = 0$ y $z = 0$, escriba las expresiones apropiadas para \mathbf{E} y \mathbf{H} . Determine la frecuencia y la longitud de onda.

En un medio de conductividad σ , la impedancia intrínseca η , que relaciona \mathbf{E} y \mathbf{H} sería compleja y por tanto, la fase de \mathbf{E} y \mathbf{H} debería escribirse en forma compleja. En el espacio vacío esta restricción es innecesaria. Utilizando coseños, entonces,

$$\mathbf{H}(z, t) = -\frac{1}{3\pi} \cos(\omega t + \beta z) \mathbf{a}_y$$

Para la propagación en $-z$,

$$\frac{E_x}{H_y} = -\eta_0 = -120\pi \Omega \quad \delta \quad E_x = +40 \cos(\omega t + \beta z) \text{ (V/m)}$$

De esta manera $\mathbf{E}(z, t) = 40 \cos(\omega t + \beta z) \mathbf{a}_x \text{ (V/m)}$

Como $\beta = 30 \text{ rad/m}$,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\pi}{15} \text{ m} \quad f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{\pi/15} = \frac{45}{\pi} \times 10^8 \text{ Hz}$$

- 14.7.** Determine la constante de propagación γ para un material que tiene $\mu_r = 1$, $\epsilon_r = 8$ y $\sigma = 0.25 \text{ pS/m}$, si la frecuencia de la onda es 1.6 MHz.

En este caso,

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{0.25 \times 10^{-12}}{2\pi(1.6 \times 10^6)(8)(10^{-9}/36\pi)} \approx 10^{-9} \approx 0$$

así que

$$\alpha \approx 0 \quad \beta \approx \omega\sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi f \frac{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}{c} = 9.48 \times 10^{-2} \text{ rad/m}$$

y $\gamma = \alpha + j\beta \approx j9.48 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}$. El material se comporta como un dieléctrico perfecto a la frecuencia dada. La conductividad del orden de 1 pS/m indica que el material es más aislante que conductor.

14.8. Determine el factor de conversión entre el néper y el decibel.

Considérese una onda plana viajera en dirección $+z$, cuya amplitud decae de acuerdo con la expresión

$$E = E_0 e^{-\alpha z}$$

A partir de la sección 14.10, la potencia conducida por la onda es proporcional a E^2 , de tal manera que

$$P = P_0 e^{-2\alpha z}$$

Entonces, según la definición de decibel, la caída de la potencia en una distancia z es $10 \log_{10}(P_0 / P) \text{ dB}$. Pero

$$10 \log_{10} \frac{P_0}{P} = \frac{10}{2.3026} \ln \frac{P_0}{P} = \frac{20}{2.3026} (\alpha z) = 8.686 (\alpha z)$$

Así pues, αz népers es equivalente a 8.686(αz) decibeles, es decir

$$1 \text{ Np} = 8.686 \text{ dB}$$

14.9. ¿A qué frecuencia puede considerarse la tierra un dieléctrico perfecto, si $\sigma = 5 \times 10^{-3} \text{ S/m}$, $\mu_r = 1$, y $\epsilon_r = 8$? ¿Puede suponerse $\alpha = 0$ a estas frecuencias?

Suponga arbitrariamente que

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \leq \frac{1}{100}$$

marca la frecuencia de corte. Entonces

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \geq \frac{100\sigma}{2\pi\epsilon} = 1.13 \text{ GHz}$$

Para $\sigma/\omega\epsilon$ pequeño,

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1 \right) \\ &\approx \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right]} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} (120\pi) = 0.333 \text{ Np/m} \end{aligned}$$

Así pues, no importa qué tan alta sea la frecuencia, α será alrededor de 0.333 Np/m, o casi 3 dB/m (ver problema 14.8); α no puede suponerse cero.

14.10. Halle la profundidad de penetración δ a una frecuencia de 1.6 MHz en el aluminio, donde $\sigma = 38.2 \text{ MS/m}$ y $\mu_r = 1$. También halle γ y la velocidad de onda U .

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = 6.44 \times 10^{-5} \text{ m} = 64.4 \mu\text{m}$$

Como $\alpha = \beta = \delta^{-1}$,

$$\gamma = 1.55 \times 10^4 + j1.55 \times 10^4 = 2.20 \times 10^4 \angle 45^\circ \text{ m}^{-1}$$

y

$$U = \frac{\omega}{\beta} = \omega\delta = 647 \text{ m/s}$$

- 14.11.** Calcule la impedancia intrínseca η , la constante de propagación γ y la velocidad de la onda U para un medio conductor en el que $\sigma = 58 \text{ MS/m}$, $\mu_r = 1$, a una frecuencia $f = 100 \text{ MHz}$.

$$\gamma = \sqrt{\omega\mu\sigma} \angle 45^\circ = 2.14 \times 10^5 \angle 45^\circ \text{ m}^{-1}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \angle 45^\circ = 3.69 \times 10^{-3} \angle 45^\circ \Omega$$

$$\alpha = \beta = 1.51 \times 10^5 \quad \delta = \frac{1}{\alpha} = 6.61 \mu\text{m} \quad U = \omega\delta = 4.15 \times 10^3 \text{ m/s}$$

- 14.12.** Una onda plana que viaja en la dirección $+z$, en el espacio vacío, ($z < 0$) incide en forma normal en $z = 0$ sobre un conductor ($z > 0$) para el que $\sigma = 61.7 \text{ MS/m}$, $\mu_r = 1$. La onda \mathbf{E} en el espacio vacío, tiene una frecuencia $f = 1.5 \text{ MHz}$ y una amplitud de 1.0 V/m . En la entrecara está dada por

$$\mathbf{E}(0, t) = 1.0 \operatorname{sen} 2\pi ft \mathbf{a}_y \text{ (V/m)}$$

Halle $\mathbf{H}(z, t)$ para $z > 0$.

Para $z > 0$, en forma compleja,

$$\mathbf{E}(z, t) = 1.0 e^{-\alpha z} e^{j(2\pi ft - \beta z)} \mathbf{a}_y \text{ (V/m)}$$

donde se tomará finalmente la parte imaginaria. En el conductor,

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \sqrt{\pi (1.5 \times 10^6)(4\pi \times 10^{-7})(61.7 \times 10^6)} = 1.91 \times 10^4$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \angle 45^\circ = 4.38 \times 10^{-4} e^{j\pi/4}$$

Entonces, como $E_y / (-H_x) = \eta$,

$$\mathbf{H}(z, t) = -2.28 \times 10^3 e^{-\alpha z} e^{j(2\pi ft - \beta z - \pi/4)} \mathbf{a}_x \text{ (A/m)}$$

o, tomando la parte imaginaria,

$$\mathbf{H}(z, t) = -2.28 \times 10^3 e^{-\alpha z} \operatorname{sen}(2\pi ft - \beta z - \pi/4) \mathbf{a}_x \text{ (A/m)}$$

donde f , α , y β los que se dieron antes.

- 14.13.** En el espacio vacío $\mathbf{E}(z, t) = 50 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x \text{ (V/m)}$. Halle la potencia promedio que cruza un área circular de radio 2.5 m en el plano $z = \text{constante}$.

En forma compleja,

$$\mathbf{E} = 50 e^{j(\omega t - \beta z)} \mathbf{a}_x \text{ (V/m)}$$

y como $\eta = 120\pi \Omega$ y la propagación es en $+z$,

$$\mathbf{H} = \frac{5}{12\pi} e^{j(\omega t - \beta z)} \mathbf{a}_y \text{ (A/m)}$$

Entonces $P_{\text{prom}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{2}(50) \left(\frac{5}{12\pi} \right) \mathbf{a}_z \text{ W/m}^2$

El flujo es normal al área, y así

$$P_{\text{prom}} = \frac{1}{2}(50) \left(\frac{5}{12\pi} \right) \pi (2.5)^2 = 65.1 \text{ W}$$

- 14.14.** Una fuente de voltaje v , se conecta a una resistencia pura R mediante una extensión de cable coaxial, como se muestra en la figura 14-8(a). Demuestre que utilizando el vector de Poynting \mathcal{P} en el dieléctrico, se obtiene la misma potencia instantánea en la resistencia que con el método de análisis de circuitos.

Del problema 7.9 y la ley de Ampere,

$$\mathbf{E} = \frac{v}{r \ln(b/a)} \mathbf{a}_r \quad \text{y} \quad \mathbf{H} = \frac{i}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi$$

donde a y b son los radios de los conductores interno y externo, tal como se muestra en la figura 14-8(b). Entonces

$$\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{vi}{2\pi r^2 \ln(b/a)} \mathbf{a}_z$$

Esta es la densidad instantánea de potencia. La potencia instantánea total sobre la sección transversal del dieléctrico es

$$P(t) = \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{vi}{2\pi r^2 \ln(b/a)} \mathbf{a}_z \cdot r dr d\phi \mathbf{a}_z = vi$$

lo que se obtiene también a partir de la teoría de circuitos para la pérdida instantánea de potencia en la resistencia.

- 14.15.** Determine las amplitudes de \mathbf{E} y \mathbf{H} reflejadas y transmitidas en la entrecara que aparece en la figura 14-9, si $E_0^i = 1.5 \times 10^{-3}$ V/m en la región 1, en la cual $\epsilon_{r1} = 8.5$, $\mu_{r1} = 1$ y $\sigma_1 = 0$. La región 2 es espacio vacío. Suponga incidencia normal.

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_{r1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}}} = 129 \Omega \quad \eta_2 = 120\pi \Omega = 377 \Omega$$

$$E_0^r = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_0^i = 7.35 \times 10^{-4} \text{ V/m}$$

$$E_0^t = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_0^i = 2.24 \times 10^{-3} \text{ V/m}$$

$$H_0^i = \frac{E_0^i}{\eta_1} = 1.16 \times 10^{-5} \text{ A/m}$$

$$H_0^r = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} H_0^i = -5.69 \times 10^{-6} \text{ A/m}$$

$$H_0^t = \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} H_0^i = 5.91 \times 10^{-6} \text{ A/m}$$

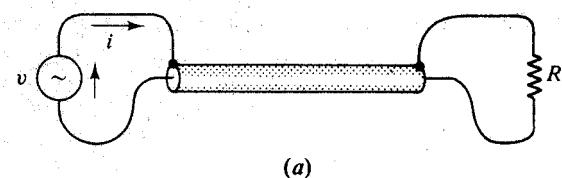
- 14.16.** La amplitud de \mathbf{E}^i en el espacio libre (región 1) en la entrecara con la región 2 es 1.0 V/m. Si $H_0^r = -1.41 \times 10^{-3}$ A/m, $\epsilon_{r2} = 18.5$ y $\sigma_2 = 0$, halle μ_{r2} .

De

$$\frac{E_0^r}{H_0^r} = -120\pi \Omega = -377 \Omega \quad \text{y}$$

$$\frac{E_0^r}{E_0^i} = \frac{\eta_2 - 377}{377 + \eta_2}$$

$$\frac{E_0^r}{H_0^r} = \frac{1.0}{-1.41 \times 10^{-3}} = \frac{-377(377 + \eta_2)}{\eta_2 - 377} \quad \therefore \quad \eta_2 = 1234 \Omega$$



(a)

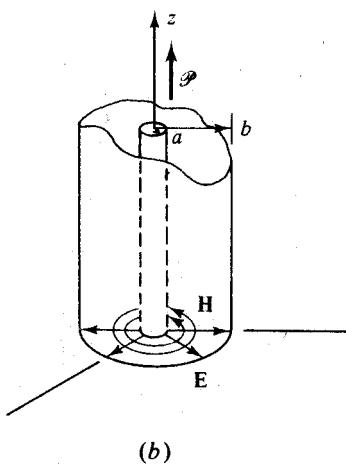


Fig. 14-8

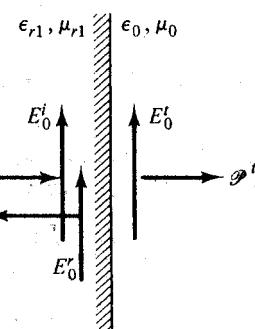


Fig. 14-9

Entonces

$$1234 = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 (18.5)}} \quad \text{ó} \quad \mu_r = 198.4$$

- 14.17.** Un campo normalmente incidente tiene amplitud $E_0^i = 1.0 \text{ V/m}$ en el espacio vacío justo afuera del agua de mar para la cual $\epsilon_r = 80$, $\mu_r = 1$ y $\sigma = 2.5 \text{ S/m}$. Dada una frecuencia de 30 MHz, ¿a qué profundidad tendrá E una amplitud de 1.0 mV/m?

Sea el espacio vacío la región 1 y el agua de mar la región 2.

$$\eta_1 = 377 \Omega \quad \eta_2 = 9.73 / 43.5^\circ \Omega$$

Entonces la amplitud de E justo dentro del agua de mar es E_0' .

$$\frac{E_0'}{E_0^i} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \quad \text{ó} \quad E_0' = 5.07 \times 10^{-2} \text{ V/m}$$

De $\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = 24.36 / 46.53^\circ \text{ m}^{-1}$.

$$\alpha = 24.36 \cos 46.53^\circ = 16.76 \text{ Np/m}$$

Entonces, de

$$1.0 \times 10^{-3} = (5.07 \times 10^{-2}) e^{-16.76 z}$$

$$z = 0.234 \text{ m.}$$

- 14.18.** Un campo E que viaja en el espacio libre, de amplitud 100 V/m, golpea una hoja de plata de espesor 5 μm , como la que se muestra en la figura 14-10. Suponiendo $\sigma = 61.7 \text{ MS/m}$ y una frecuencia $f = 200 \text{ MHz}$, halle las amplitudes E_2 , E_3 y E_4 .

Para la plata a 200 MHz, $\eta = 5.06 \times 10^{-3} / 45^\circ \Omega$.

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{2(5.06 \times 10^{-3} / 45^\circ)}{377 + 5.06 \times 10^{-3} / 45^\circ} \quad \text{ó} \quad E_2 = 2.68 \times 10^{-3} \text{ V/m}$$

Dentro del conductor,

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = 2.21 \times 10^5$$

De esta manera, además de la atenuación hay un desfasaje cuando la onda viaja por el conductor. Como E_3 y E_4 representan valores máximos de ondas que varían sinusoidalmente, este desfasaje no se invierte.

$$E_3 = E_2 e^{-\alpha z} = (2.68 \times 10^{-3}) e^{-(2.21 \times 10^5)(5 \times 10^{-6})} = 8.88 \times 10^{-4} \text{ V/m}$$

y

$$\frac{E_4}{E_3} = \frac{2(377)}{377 + 5.06 \times 10^{-3} / 45^\circ} \quad \text{ó} \quad E_4 = 1.78 \times 10^{-3} \text{ V/m}$$

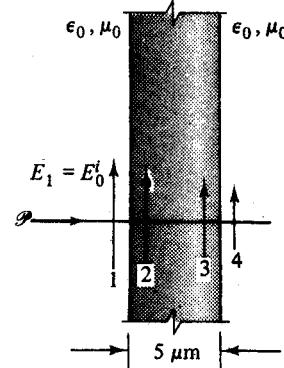


Fig. 14-10

Problemas supplementarios

- 14.19.** Dado

$$\mathbf{E}(z, t) = 10^3 \sin(6 \times 10^8 t - \beta z) \mathbf{a}_y \quad (\text{V/m})$$

en el espacio vacío, haga el trazo de la onda en $t = 0$ y en un tiempo t_1 , cuando ha viajado $\lambda/4$ a lo largo del eje z. Halle t_1 , β y λ . Resp. $t_1 = 2.62 \text{ ns}$, $\beta = 2 \text{ rad/m}$, $\lambda = \pi \text{ m}$. Ver figura 14-11.

- 14.20. En el espacio vacío,

$$\mathbf{H}(z, t) = 1.0 e^{j(1.5 \times 10^6 t + \beta z)} \mathbf{a}_x \quad (\text{A/m})$$

Obtenga una expresión para $\mathbf{E}(z, t)$ y determine la dirección de propagación.

Resp. $E_0 = 377 \text{ V/m}$, $-\mathbf{a}_z$

- 14.21. En el espacio vacío,

$$\mathbf{H}(z, t) = 1.33 \times 10^{-1} \times \cos(4 \times 10^7 t - \beta z) \mathbf{a}_x \quad (\text{A/m})$$

Obtenga una expresión para $\mathbf{E}(z, t)$. Halle β y λ .

Resp. $E_0 = 50 \text{ V/m}$, $(4/30) \text{ rad/m}$, $15\pi \text{ m}$

- 14.22. Una onda viajera tiene una velocidad de 10^6 m/s y está descrita por

$$y = 10 \cos(2.5z + \omega t)$$

Dibuje la onda como función de z en $t = 0$ y $t = t_1 = 0.838 \mu\text{s}$. ¿Qué fracción de la longitud de onda es recorrida entre estos dos tiempos?

Resp. $1/3$. Ver figura 14-12.

- 14.23. Halle la magnitud y dirección de

$$\mathbf{E}(z, t) = 10 \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x - 15 \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y \quad (\text{V/m})$$

en $t = 0$, $z = 3\lambda/4$. Resp. 18.03 V/m , $0.555 \mathbf{a}_x - 9.832 \mathbf{a}_y$

- 14.24. Determine γ a 500 kHz para un medio en el cual $\mu_r = 1$, $\epsilon_r = 15$, $\sigma = 0$. A qué velocidad viajará un campo electromagnético en este medio? Resp. $j4.06 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}$, $7.74 \times 10^7 \text{ m/s}$

- 14.25. Una onda electromagnética en el espacio vacío tiene una longitud de onda de 0.20 m . Cuando esta onda penetra un dieléctrico perfecto, la longitud de onda cambia a 0.09 m . Suponiendo que $\mu_r = 1$, determine ϵ_r y la velocidad de propagación. Resp. 4.94 , $1.35 \times 10^8 \text{ m/s}$

- 14.26. Una onda electromagnética en el espacio vacío tiene una constante de desfasaje de 0.524 rad/m . La misma onda tiene una constante de desfasaje de 1.81 rad/m después de entrar en un dieléctrico perfecto. Suponiendo que $\mu_r = 1$, determine ϵ_r y la velocidad de propagación. Resp. 11.9 , $8.69 \times 10^7 \text{ m/s}$

- 14.27. Halle la constante de propagación a una frecuencia de 400 MHz para un medio en el cual $\epsilon_r = 16$, $\mu_r = 4.5$ y $\sigma = 0.6 \text{ S/m}$. Halle la razón entre la velocidad U y la velocidad en el espacio vacío.
Resp. $99.58 / 60.34^\circ \text{ m}^{-1}$, 0.097

- 14.28. En un medio parcialmente conductor, $\epsilon_r = 18.5$, $\mu_r = 800$ y $\sigma = 1 \text{ S/m}$. Halle α , β , η y la velocidad U , para una frecuencia de 10^9 Hz . Determine $\mathbf{H}(z, t)$, dado

$$\mathbf{E}(z, t) = 50.0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y \quad (\text{V/m})$$

Resp. 1130 Np/m , 2790 rad/m , $2100 / 22.1^\circ \Omega$, $2.25 \times 10^6 \text{ m/s}$, $2.38 \times 10^{-2} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - 0.386 - \beta z) (-\mathbf{a}_x) \quad (\text{A/m})$

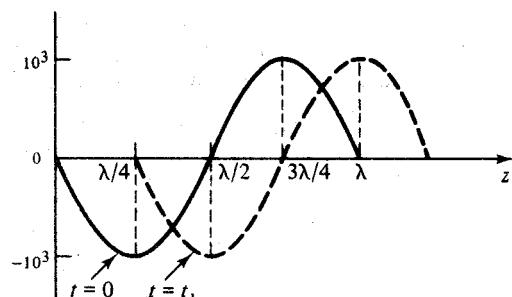


Fig. 14-11

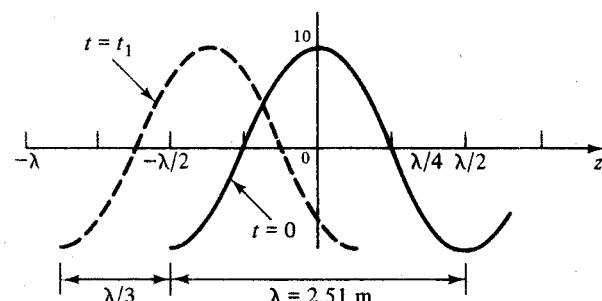


Fig. 14-12

- 14.29. Para la plata, $\sigma = 3.0 \text{ MS/m}$. A qué frecuencia la profundidad de penetración δ será 1 mm?
Resp. 84.4 kHz

- 14.30. A cierta frecuencia, la constante de desfasaje $3.71 \times 10^5 \text{ rad/m}$ en el cobre ($\sigma = 58.0 \text{ MS/m}$). Determine la frecuencia. Resp. 601 MHz

- 14.31. La amplitud de \mathbf{E} justo dentro de un líquido es 10.0 V/m y las constantes son: $\mu_r = 1$, $\epsilon_r = 20$ y $\sigma = 0.50 \text{ S/m}$. Determine la amplitud de \mathbf{E} a una distancia de 10 cm dentro del medio para frecuencias de (a) 5 MHz, (b) 50 MHz, y (c) 500 MHz. Resp. (a) 7.32 V/m ; (b) 3.91 V/m ; (c) 1.42 V/m

- 14.32. En el espacio vacío, $\mathbf{E}(z, t) = 1.0 \sin(\omega t - z)\mathbf{a}_x (\text{V/m})$. Demuestre que la potencia promedio que cruza un disco circular de radio 15.5 m en un plano $z = \text{constante}$ es 1 W.

- 14.33. En coordenadas esféricas, la *onda esférica*

$$\mathbf{E} = \frac{100}{r} \sin\theta \cos(\omega t - \beta r) \mathbf{a}_\theta \quad (\text{V/m}) \quad \mathbf{H} = \frac{0.265}{r} \sin\theta \cos(\omega t - \beta r) \mathbf{a}_\phi \quad (\text{A/m})$$

representa el campo a grandes distancias r de una cierta antena dipolo en el espacio vacío. Halle la potencia promedio que pasa a través del cascarón hemisférico $r = 1 \text{ km}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Resp. 55.5 W

- 14.34. En el espacio vacío, $\mathbf{E}(z, t) = 150 \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x (\text{V/m})$. Halle la potencia total que pasa a través de un área rectangular de lados 30 mm y 15 mm, en el plano $z = 0$. Resp. 13.4 mW

- 14.35. Una entrecara de espacio vacío y plata tiene $E_0^i = 100 \text{ V/m}$ en el lado del espacio vacío. La frecuencia es 15 MHz y las constantes de la plata son: $\epsilon_r = \mu_r = 1$, $\sigma = 61.7 \text{ MS/m}$. Determine E_0' y H_0' en la entrecara.

Resp. $\sim 100 \text{ V/m}$, $7.35 \times 10^{-4} / 45^\circ \text{ V/m}$

- 14.36. Una entrecara de espacio vacío y conductor tiene $H_0^i = 1.0 \text{ A/m}$ en el lado del espacio vacío. La frecuencia es 31.8 MHz y las constantes del conductor son: $\epsilon_r = \mu_r = 1$, $\sigma = 1.26 \text{ MS/m}$. Determine H_0' y H_0^i y la profundidad de penetración de \mathbf{H} . Resp. 1.0 A/m, 2.0 A/m, $80 \mu\text{m}$

- 14.37. Un campo \mathbf{H} que viaja en el espacio vacío, de amplitud 1.0 A/m y frecuencia de 200 MHz golpea una hoja de plata de $5 \mu\text{m}$ de espesor con $\sigma = 61.7 \text{ MS/m}$, tal como se muestra en la figura 14-13. Halle H_0' justo después de pasar la hoja. Resp. $1.78 \times 10^{-5} \text{ A/m}$

- 14.38. Un campo \mathbf{E} que viaja en el espacio vacío, de amplitud 100 V/m, golpea un dieléctrico perfecto, como el que se muestra en la figura 14-14. Determine E_0' . Resp. 59.7 V/m

- 14.39. Un campo \mathbf{E} que viaja en el espacio vacío golpea un medio parcialmente conductor, tal como se muestra en la figura 14-15. Dada una frecuencia de 500 MHz y $E_0^i = 100 \text{ V/m}$, determine E_0' y H_0' .
Resp. 19.0 V/m, 0.0504 A/m

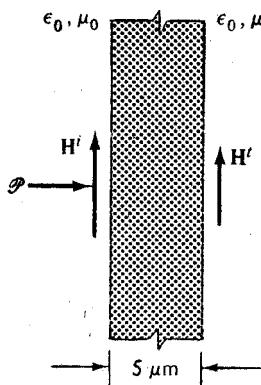


Fig. 14-13

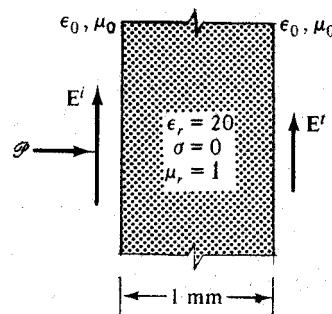


Fig. 14-14

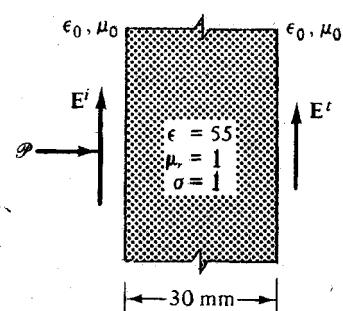


Fig. 14-15

Apéndice

Prefijos de unidades SI

Factor	Prefijo	Símbolo	Factor	Prefijo	Símbolo
10^{18}	exa	E	(10^{-1})	deci	d)
10^{15}	peta	P	(10^{-2})	centi	c)
10^{12}	tera	T	10^{-3}	milli	m
10^9	giga	G	10^{-6}	micro	μ
10^6	mega	M	10^{-9}	nano	n
10^3	kilo	k	10^{-12}	pico	p
(10^2)	hecto	h)	10^{-15}	femto	f
(10)	deka	da)	10^{-18}	atto	a

Divergencia, Rotacional, Gradiente y Laplaciano

Coordenadas cartesianas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{a}_z$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{a}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{a}_\phi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_z$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \operatorname{sen} \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{a}_\phi$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{a}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{a}_\phi$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

INDICE

Ampere (unidades), 65

B (véase densidad de flujo magnético)

Bobinas

- de núcleo de aire, inductancias de, 142
- múltiples, 147
- planares (planas), momentos magnéticos de, 131

Campo eléctrico diferencial, 15

Campo eléctrico, intensidad del, (E), 13-26

- a través de la entrecara (interfase) de dos dieléctricos, 173-174
- carga puntual que causa, 19
- componente tangencial de, 83
- de carga constante, 82
- definición de, 14-15
- densidad de flujo y, 28
- de ondas viajeras, 185
- de voltaje constante, 82
- dieléctricos, 173-174
- ecuación de onda para, 183
- en movimiento, 162
- función potencial y, 54
- intensidad de campo magnético y, 174

Campos:

- conservativos, SI
- de dipolos eléctricos, 48
- dependientes del tiempo, conductores en movimiento a través de, 163
- estáticos, ecuaciones de Maxwell para, 40, 116
- independientes del tiempo, conductores en movimiento a través de, 162
- vectoriales, 4

Campos eléctricos

- diferenciales, 15
- estáticos, energía en, 54-55
- fuerza sobre cargas en, 65
- totales, 15-16
- y campos magnéticos combinados, 128-129

Campos magnéticos:

- de corrientes constantes, 113
- estáticos, 113
- externos, 129
- fuerzas y torques, 128-139
- relaciones límite (en la frontera) para, 172-173
- y campos eléctricos combinados, 128-129

Campos vectoriales, 4

- condiciones límite (en la frontera) en divergencias de, 41
- rotaciones de, 114-115

Capacitancia, 55, 81-95

definición de, 84
equivalente, 85

Carga

- diferencial, 15, 52
- en movimiento, 65
- en un campo eléctrico, 65
- meta, en una región, 27
- sobre un disco circular, 18

Carga laminar, 15

Carga puntual, 16-28

- aislada, 14
- intensidad del campo eléctrico debido a la, 19
- potencial de la, 52
- trabajo efectuado para mover la, 50-51

Carga superficial, 15

Cilindros circulares, rectos, 12
como superficies equipotenciales, 52

Circuitos magnéticos, 140-159

- con pequeños espacios (brechas) de aire, 146
- definición de, 143
- Ley de Ampère para, 145
- paralelos

Conchas esféricas concéntricas como superficies equipotenciales, 52

Condiciones límite (en la frontera)

- conductor dieléctrico, 70-71
- en la entrecara (interfase) de dos dieléctricos, 83
- para campos magnéticos, 172-173
- resumen de, 173-174
- sobre campos vectoriales, 172

Condensadores (capacitores):

- de múltiples dieléctricas, 84-85
- de placas paralelas, 35
- energía almacenada en, 55, 85
- en serie, 85

Conductores, 65-80

- buenos, soluciones de ecuación de onda para, 184-185
- cilindros, inductancias de 142

en movimiento:

- a través de campos no variables con el tiempo, 162
- a través de campos variables con el tiempo, 163
- paralelos, inductancia de, 141
- portadores de corriente, 129

Conductividad de materiales, 66-67, 146

Configuraciones de carga:

- en coordenadas cilíndricas, 34
- estándar, 16

Configuraciones de conductores, común, 141-142

- Constante dieléctrica, 13
 Corriente eléctrica, 65
 Corriente laminar:
 en el límite (en la frontera), 173
 intensidad de campo magnético en, 173
 Corrientes eléctricas, 65
 a través de una superficie, 67
 constantes, campos magnéticos de, 113
 Corriente de desplazamiento,
 definición de, 160-171
 Corrientes laminares,
 campos magnéticos de, 114
 vector potencial magnético, 117
 Coulomb (unidad), 13, 27
 Curvas B - H, 144-145
- D** (véase densidad de flujo eléctrico)
 Decibel (unidad), 191
 Densidad de carga, 15
 lineal, 16
 neta, 69
 Densidad de corriente, (J), 65, 66, 116
 divergencia de la, 69
 (véase también densidad de corriente de conducción)
 Densidad de corriente de conducción, (J), 66, 160, 161
 (véase también densidad de corriente)
 Densidad de corriente de convección, 66
 Densidad de corriente de desplazamiento, 160-161
 Densidad de corriente laminar, 68-69
 Densidad de energía de campos eléctricos, 60
 Densidad de flujo, 27
 intensidad del campo eléctrico y, 28
 magnético (véase densidad de flujo magnético)
 Densidad de flujo magnético (B), 116-117
 componente normal de la, 172
 como continua, 175
 Densidad superficie de carga, 15
 Desfasaje constante de, 181
 Desplazamiento, vector, 50
 Dieléctricos
 condiciones límite (en la frontera) en la entrecara (interfase) de dos, 83
 múltiples, 28
 perfectos: impedancia intrínseca para, 186
 soluciones de la ecuación de onda para, 184
 polarización de, 81
 relación de campo a través de la entrecara (interfase) de dos, 173-174
 Diferencia de voltaje entre dos conductores, 55
 Diferencial de superficie, 67
 Dipolo eléctrico, campo del, 48
 Dipolo eléctrico, momento del, 81
 Dipolo puntual, 110
 Dipolos:
 campo de los eléctricos, puntuales, 48
 Disco circular, carga sobre un, 18
 Distribuciones de carga, 15-16
 potencial de, 52
 Distribuciones, no uniformes de corriente, 68
 Divergencia, 39-49
 definición de, 39
 en coordenadas cartesianas, 39-40
 en coordenadas cilíndricas, 40
 en coordenadas esféricas, 40
 de la densidad de corriente, 69
 de la densidad de flujo eléctrico, 39-40
 del campo vectorial, 41
 del gradiente de la función potencial, 96
- E (véase intensidad del campo eléctrico)
 Ecuación de fuerza diferencial, 129
 Ecuación de Laplace, 96-112
 definición de la, 96
 formas explícitas de la, 96-97
 Ecuación escalar de onda, 181
 Ecuaciones de continuidad de corriente, 69
 Ecuaciones de Maxwell, 160, 172, 180, 187
 conjunto de espacio libre de las, 175
 definiciones de, 172, 174-175
 para campos estáticos, 40, 116
 sistema general de, 174
 soluciones de onda de las, 181-185
 soluciones en coordenadas cartesianas, 181-183
 Ecuaciones de onda
 escalar, 182
 para intensidad del campo eléctrico, 183
 para intensidad del campo magnético, 182-183
 vectorial, 181
 Ecuaciones de onda, soluciones de:
 en espacio vacío, 184
 para buenos conductores, 184-185
 para dieléctricos perfectos, 184
 para medios parcialmente conductores, 183-184
 Ecuaciones vectoriales de onda, 181
 Efectos de bordes de placas condensadores (capacitores), 85
 Elementos de corriente, fuerzas magnéticas sobre, 129
 Elemento diferencial de línea, 4
 Elemento diferencial de superficie, 3
 Elemento vectorial de superficie, 28
 Energía:
 de sistemas de carga, 50-64
 en campos eléctricos estáticos, 54-55
 en condensadores (capacitores), 55, 85
 valor instantáneo de, dejando un volumen, 188
 Escalares, 1
 Espacio vacío: impedancia intrínseca para, 186
 soluciones de la ecuación de onda en el, 184
 Espacios (brechas)
 circuitos magnéticos con pequeños, de aire, 146
 núcleos con, de aire, 146
- Factor de atenuación, 181
 Faradio (unidad), 84
 FEM (fuerza electromotriz), incluida, 160-171
 Filamento de corriente, vector potencial magnético, 117
 Fuentes de flujo eléctrico, 39
 Funciones de Bessel, 100
 Fuerza:
 aplicadas, 50
 en campos magnéticos, 128-139
 momentos de, 130
 sobre cargas, en campos eléctricos, 65
 Fuerza magnética,
 sobre partículas cargadas, 128
 sobre elementos de corriente, 129

- Fuerzas de Coulomb, 13-26
principio de superposición para, 14
- Flujo:
diferencial, 28
eléctrico, 27-38
- Flujo diferencial, 28
eléctrico (véase flujo eléctrico)
neto, 30
- Flujo eléctrico, 27-38
definición de, 27
fuentes o sumideros de, 39
- Flujo eléctrico, densidad del, (\mathbf{D}), 27
a través de la entrecara (interfase) de dos dieléctricos, 173-174
componente normal del, 83
de carga fija, 82
de voltaje fijo, 81-82
divergencia del, 39-40
- Flujo magnético, 116
- Frecuencias de formas de onda, 182
- Generador homopolar de Faraday, 167
- Gradiente:
rotacional (rotor) del, 115
de la función potencial, 53
divergencias del, 96
- H** (véase intensidad del campo magnético)
- Imágenes, método de, 92
- Impedancia intrínseca, 183, 186, 190
- Inductancia de un inductor, 140
externa, 143
interna, 142-143
- Inductor, inductancia del, 140
- Infinito, referencia cero en el, 52
- Integral de superficie, cambio a integral de volumen, 42
- Integral de volumen, de integración de superficie, 42
- Intensidad del campo magnético, (\mathbf{H}), 113-127
componente tangencial de la, 173
continuidad de la, 175
de las ondas viajeras, 185
diferencial, 113
ecuaciones de onda para, 182-183
intensidad de campo eléctrico e, 174
- J** (véase densidad de corriente de conducción, densidad de corriente)
- Kirchoff, ley de corrientes de, 69, 145
- Lámina plana infinita, 114
- Ley de acción de masas, 73
- Ley de Ampère, 113-127, 174
definición de, 114
para inductancia interna, 142
para circuitos magnéticos, 145-146
- Ley de Biot-Savart, 113-114
- Ley de Faraday, 140, 161-162, 163, 174
- Ley de Gauss, 28, 174
- Ley del inverso del cuadrado para cargas puntuales, 16
- Ley de Lenz, 162, 163
- Ley de Ohm
forma puntual de la, 66
- Línea de carga, 15-16
infinita, 16
- Línea infinita de carga, 16
- Línea negativa de espacio (brecha) de aire, 152-153
- Longitud de onda de formas de onda, 182, 184
- Magnetismo de núcleo de hierro, 143
- Magnetización, curvas de, 144-145
- Magnetomotriz, fuerza, 145
- Materiales semiconductores tipo n , 67
- Materiales semiconductores tipo p , 67
- Medio dispersante, 184
- Medio isotrópico, permitividad del, 28
- Método de imágenes, 92
- Mho (unidad), 68
- Mil, circular, 74
- Momento de fuerza, 130
- Momento magnético:
de bobina planar, 131
de espiral (lazo) planar de corriente, 131
- Momento magnético de una espiral (lazo) planar (plana) de corriente, 131
- Movilidad de electrones, 65
- Movimiento del medidor de D'Arsonval, 133
- Néper (unidad), 181
equivalente en decibeles, 191
- Newton (unidad), 13
- Notación vectorial, 1
- Número de Avogadro, 72
- Núcleos con espacios (brechas) de aire, 146
- Onda esférica, 196
- Ondas (véase también ondas electromagnéticas)
electromagnéticas, 181-196
esféricas, 196
estacionarias, 186-187
reflejadas, 185-186
viajeras, 185
- Operador nabla, 40-41
rotacional y, 115
- Pares electrón-hueco, 66-67
- Partículas cargadas, fuerza magnética sobre, 128
- Penetración, profundidad de, 185
- Período de forma onda, 182
- Permeabilidad, 116
relativa, 116, 144-145
- Permitividad, 13
de un medio isotrópico, 28
relativa, 13, 81-82
- Plano infinito de carga, 16
- Polarización de materiales dieléctricos, 81
- Polinomios de Legendre
cinco primeros, 111-112
de orden n , 101
- Potencia, 130
compleja, 188
vector de Poynting y, 187-188
- Potencial, diferencia de, 51
- Potencial eléctrico:
de cargas puntuales, 52
de distribución de carga, 52
de un sistema de carga, 50-64
entre dos puntos, 51

- Potencial función
 gradiente de la, 53
 divergencia del, 96
 intensidad del campo eléctrico y, 54
 Potencial magnético, vector, 117-118
 Poynting, vector de, 187-188
 Principio de superposición para fuerzas de Coulomb, 14
 Producto escalar de dos vectores, 1
 Producto vectorial de dos vectores, 1-2
 propagación, constante de, 183
 Propagación, velocidad de, 184
- Rotacional (rotor), 39
 operador nabla y, 115
 divergencia del, 115
 del gradiente, 115
 del campo vectorial, 114-115
 Referencia cero en el infinito, 52
 Regla de la mano derecha, 113, 162
 Reluctancia, 146
 Resistencia, 67-68
 Resistencia de los materiales, 65
- Semiconductores, 66
 intrínsecos, 67
 Serie seno de Fourier, 109
 Siemens (unidad), 68
 Sistemas coordenadas, 2-3
 transformaciones de, 5
 vectores unitarios en, 3
 (véase también sistema de coordenadas circulares cilíndricas, sistema de coordenadas esféricas)
 Sistemas de carga, energía y potencial eléctrico de, 50-64
 Sistema de coordenadas cartesianas, 2-3
 rotacional en, 115
 operador nabla en, 41
 divergencia en, 39-40
 gradiente en, 53
 ecuación de Laplace en, 96
 en una variable, 98
 producto solución de, 98-99
 ecuaciones de Maxwell en, 181-182
 desplazamiento vectorial en, 50
 Sistema de coordenadas cilíndricas (véase también sistema de coordenadas circulares cilíndricas)
 Sistemas de coordenadas cilíndricas circulares, 2-3
 divergencia en, 40
 ecuación de Laplace en, 96
 producto solución de la, 100-101
 gradiente en, 53
 rotacional (rotor), 115
 desplazamiento vectorial en, 50
 Sistema de coordenadas esféricas, 2-3
 divergencias en, 40
 ecuación de Laplace en, 96
 producto solución de la, 101-102
 gradiente en, 40
 rotacional (rotor), 115
 vector desplazamiento en, 50
 Solenoide, inductancia del, 142
 Suma de vectores. 1
- Sumideros de flujo eléctrico, 39
 Superficie
 corriente a través de una, 67
 diferencial, 67
 Superficies equipotenciales, cilindros circulares rectos como, 52
 Superficies gaussianas especiales, 29
 Susceptibilidad eléctrica, 81
 Sustracción de vectores, 1
 Soluciones de onda de las ecuaciones de, 181-185
- Teorema de la divergencia, 41-42, 174
 Teorema de la divergencia de Gauss, 41-42
 Teorema de la unicidad, 97
 Teorema del valor máximo, 97-98
 Teorema del valor medio, 97-98
 Teorema de Stokes, 118, 174
 Teoría electrón-gas, 65
 Tesla (unidad), 116
 Tiempo de relajación, 70
 Toroide, inductancia del, 140
 Torques, 130
 en campos magnéticos, 128-139
 Trabajo, 130
 definición de, 50
 diferencial, 50
 realizado en cargas puntuales en movimiento, 50-51
 Transformaciones de sistemas coordenadas, 5
 Triple producto,
 escalar, 8
 vectorial, 7
- Unidades SI, prefijos de, 197
 Unidades SI racionализadas, 13
- V (véase función potencial)
 Variación armónica con el tiempo, 182
 Vector densidad, 68
 Vector normal unitario, 20
 Vector potencial magnético diferencial, 118
 Velocidad:
 de desplazamiento, 65
 de propagación, 184
 Velocidad de corrimiento, 65
 Voltaje de autoinducción, 140
 Volumen de carga, 15
 campos magnéticos del, 114
 vector potencial magnético del, 117
 Volumen diferencial, 3-4
 Vector desplazamiento, 50
 Vector(es), 1
 de posición, 5
 forma de componentes de, 1
 producto escalar de dos, 1
 producto vectorial de dos, 1-2
 proyección de uno, sobre un segundo, 7
 unitario normal, 20
 Vectores unitarios, 1
 en sistemas coordenados, 3
 Vector potencial magnético, 117-118
 diferencial, 118
 Vectores en forma de componentes, 1
 Watt (unidad), 188
 Weber (unidad), 116

