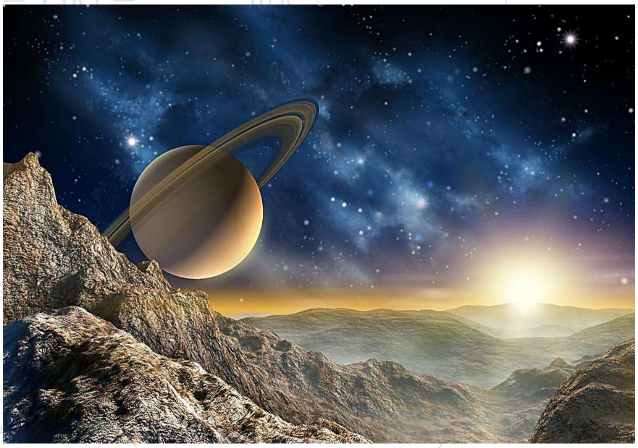
高等数学 LaTeX Note

证明专题笔记



Imagination is more important than knowledge.

整理：云淡风轻

整理时间：September 19, 2019

Email: 不告诉你 @qq.com

Version: 1.00

目　录

第 1 章
中值定理与凹凸性

1.1 罗尔定理相关问题

例 1 证明广义罗尔定理：设 $f(x)$ 在 $x \geqslant a$ 时连续，在 $x > a$ 时可导，又设 $f(a) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，则存在 $\xi \in (a,+\infty)$ 使得 $f'(\xi) = 0$。

解: 若 $f(x) \equiv C$，则一定 $\exists \xi \in (a,+\infty)$，使 $f'(\xi) = 0$

若 $f(x)$ 不恒为常数，设

$$(a) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

则一定存在

$$x_0 \in (a,+\infty)$$

使

$$f(x_0) > A\text{或}f(x_0) < A$$

不妨设

$$f(x_0) > A\,(f(x_0) < A\text{时类似可证})$$

由广义介值定理，因

$$f(x)\text{ 在 }[a,+\infty)\text{ 上连续}$$

故

$$\forall M \in (A, f(x_0)), \exists x_1 \in (a, x_0), x_2 \in (x_0,+\infty)$$

使得

$$f(x_1) = f(x_2) = M$$

因

$$f(x)\text{ 在 }[x_1,x_2]\text{ 连续，}(x_1,x_2)\text{ 可导}$$

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (x_1,x_2) \subset (a,+\infty)$$

使得

$$f'(\xi) = 0$$

□

例 2 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，试证明：若存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $f(x_0)>x_0$，则必然存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=1$。

☞ **解:** 令

$$F(x)=f(x)-x, x\in[0,1]$$

则

$$F(x_0)=f(x_0)-x_0>0, F(1)=f(1)-1=-1<0$$

则

$$F(x_0)F(1)<0$$

又 $F(x)$ 在 $[x_0,1]$ 连续，由零点存在定理

$$\exists a\in(x_0,1)$$

使得

$$F(a)=0$$

因

$$F(0)=0=F(a), F(x)\text{ 在 }[0,a]\text{ 上连续，}(0,a)\text{ 可导}$$

由罗尔定理

$$\exists\xi\in(0,a)\subset(0,1)$$

使得

$$F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=1$$

□

例 3 假设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，并且 $g''(x)\neq0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，试证明

1. 在 (a,b) 内 $g(x)=\neq0$；
2. 在 (a,b) 内至少有一点 ξ 使得 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$。

☞ **解:**

1. 若

$$\exists x_0\in(a,b)$$

使得

$$g(x_0)=0$$

那么有

$$g(a)=g(x_0)=g(b)$$

因

$$g\left(x\right)\text{在}\left(a,x_0\right)\text{连续，}\left(a,x_0\right)\text{可导，}\left[x_0,b\right]\text{连续，}\left(x_0,b\right)\text{可导}$$

由罗尔定理

$$\exists x_3\in\left(x_1,x_2\right)$$

使

$$g^{''}\left(x_3\right)=0$$

这与 $g^{''}\left(x\right)\neq 0$ 矛盾，故

$$g\left(x\right)\neq 0$$

2. 令

$$F\left(x\right)=f\left(x\right)g'\left(x\right)-g\left(x\right)f'\left(x\right)$$

因

$$F\left(a\right)=F\left(b\right)=0,F\left(x\right)\text{在}\left[a,b\right]\text{上连续，}\left(a,b\right)\text{内可导}$$

故

$$\exists\xi\in\left(a,b\right)$$

使

$$F'\left(\xi\right)=0$$

即

$$\frac{f\left(\xi\right)}{g\left(\xi\right)}=\frac{f^{''}\left(\xi\right)}{g^{''}\left(\xi\right)}\text{成立}$$

□

注意: $\dfrac{f\left(\xi\right)}{g\left(\xi\right)}=\dfrac{f^{''}\left(\xi\right)}{g^{''}\left(\xi\right)}\Longleftrightarrow f\left(\xi\right)g^{''}\left(\xi\right)-g\left(\xi\right)f^{''}\left(\xi\right)=0$

$$\begin{aligned}\int\left[f\left(x\right)g^{''}\left(x\right)-g\left(x\right)f^{''}\left(x\right)\right]dx&=\int f\left(x\right)dg'\left(x\right)-\int g\left(x\right)df'\left(x\right)\\&=f\left(x\right)g'\left(x\right)-\int g'\left(x\right)f'\left(x\right)dx-g\left(x\right)f'\left(x\right)+\int f'(x)g'\left(x\right)dx\\&=f\left(x\right)g'\left(x\right)-g\left(x\right)f'\left(x\right)\end{aligned}$$

例 4 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}$，试证明 $\exists\xi\in(0,+\infty)$ 是 $f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$。

解: 令

$$F\left(x\right)=f\left(x\right)-\frac{x}{1+x^2},x\in\left[0,+\infty\right)$$

因

$$0\leqslant f\left(x\right)\leqslant\frac{x}{1+x^2}\text{且}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$$

由追敛性知

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=0$$

即有

$$\lim_{x\to+\infty} F\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-\frac{x}{1+x^2}\right]=0$$

因

$$F\left(0\right)=f\left(0\right)\geqslant 0,\forall x\in\left(0,+\infty\right)$$

有

$$F\left(x\right)\leqslant 0$$

又

$$F\left(x\right)\text{在}\left[0,+\infty\right]\text{连续}$$

由零点存在定理

$$\exists x_0\in\left[0,+\infty\right]$$

使

$$F\left(x_0\right)=0$$

因

$$F\left(x_0\right)=\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=0\text{ 且}F\left(x\right)\text{在}\left[x_0\text{ },+\infty\right)\text{连续，}\left[x_0\text{ },+\infty\right)\text{可导}$$

由广义罗尔定理

$$\exists\xi\in\left(x_0,+\infty\right)$$

使

$$F'\left(\xi\right)=0$$

即

$$f'\left(\xi\right)=\frac{1-\xi^2}{\left(1+\xi^2\right)^2}$$

□

例 5 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，试证明 $\exists\xi(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}$$

☞ **解:** 令

$$F\left(x\right)=\left(b-x\right)f\left(x\right)+f\left(a\right)x$$

有

$$F\left(a\right)=\left(b-a\right)f\left(a\right)+f\left(a\right)\cdot a=bf\left(a\right)$$

$$F\left(b\right)=F\left(a\right)b=F\left(a\right)$$

又

$$F\left(x\right)\text{在}\left[a,b\right]\text{连续，}\left(a,b\right)\text{内可导}$$

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (a, b)$$

使

$$F'(\xi) = 0$$

即

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi}$$

□

例 6 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连，在 (a, b) 内可导，试证明 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$$

☞ **解:**

方法一 令

$$令 F(x) = xf(x) \ \ x \in [a, b]$$

因

$$F(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续，} (a, b) \text{ 内可导}$$

由拉格朗日中值定理

$$F(b) - F(b) = F'(\xi)(b - a)\text{，其中} a < \xi < b$$

即

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$$

注意: 对于 $\dfrac{bf(b) - af(a)}{b - a}$，分子形式为 $xf(x)$，而分母恰是端点 a, b 之差所以联想到拉格朗日中值定理或柯西中值定理

方法二 令

$$F(x) = \frac{bf(b) - af(a)}{b - a}(x - a) - xf(x) \ \ x \in [a, b]$$

有

$$F(a) = -af(a), F(b) = -af(a) = F(a)$$

因

$$F(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续，} (a, b) \text{ 内可导}$$

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (a, b)$$

使得

$$F'(\xi) = 0 \Longrightarrow \frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$$

注意: 由

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$$

积分得到

$$\int\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}dx=\int[f(x)+xf'(x)]\,dx$$

即

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}(x-a)-xf(x)=C$$

□

例 7 设 $f(x)$，$g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g(x)\neq=0$，$f(a)g(b)=g(a)f(b)$，试证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)g(\xi)=f(\xi)g'(\xi)$。

解: 令

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\ x\in[a,b]$$

因

$$f(a)f(b)=g(a)g(b)$$

故

$$\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{f(b)}{g(b)}$$

即

$$F(a)=F(b)$$

因

$$F(x)\text{ 在 }[a,b]\text{ 连续，}(a,b)\text{ 内可导}$$

由罗尔定理

$$\exists\xi\in(a,b)$$

使

$$F'(\xi)=0$$

即

$$f'(\xi)g(\xi)=f(\xi)g'(\xi)$$

□

注意:

$$\begin{aligned}f'(\xi)g(\xi)=f(\xi)g'(\xi)&\Longrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)}\\&\Longrightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx\\&\Longrightarrow\ln|f(x)|=\ln|g(x)|+\ln|C|\\&\Longrightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=C\end{aligned}$$

故构造

$$F\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$$

例 8 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且对一切 x 都有 $f'(x)g(x)\neq f(x)g'(x)$，证明方程 $f(x)=0$ 的任何两个不同的根之间必有 $g(x)=0$ 的根。

☞ **解:** 设方程 $f(x)=0$ 的任意某两根为 $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$ 则

$$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=0$$

[只要证明：$\exists x_0\in\left[x_1,x_2\right]$, 使$g\left(x_0\right)=\mathbf{0}$ 即可]
如果不存在

$$x_0\in\left[x_1,x_2\right]$$

使

$$g\left(x\right)\not\equiv 0$$

令

$$F\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$$

因

$$F\left(x_1\right)=F\left(x_2\right)=\mathbf{0}\text{ 且}F\left(x\right)\text{ 在 }\left[x_1,x_2\right]\text{ 连续, }\left(x_1,x_2\right)\text{ 内可导}$$

故由罗尔定理

$$\exists\xi\in\left(x_1,x_2\right)$$

使

$$f'\left(\xi\right)g\left(\xi\right)-g'\left(\xi\right)f\left(\xi\right)=\mathbf{0}\text{ 成立}$$

这与题设矛盾，故

$$\exists x_0\in\left(x_1,x_2\right)$$

使

$$g\left(x_0\right)=0$$

得证 □

例 9 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，$f(a)=0$ 证明 $\forall\alpha\in(0,+\infty)$，总存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $\alpha f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

☞ **解:** 令

$$F\left(x\right)=x^{\alpha}f\left(x\right)\quad x\in[0,a]$$

因

$$F\left(0\right)=F\left(a\right)=0\text{ 且}F\left(x\right)\text{ 在 }[0,a]\text{ 上连续，}(0,a)\text{ 内可导}$$

故由罗尔定理

$$\exists\xi\in(0,a)$$

使

$$F'(\xi) = 0$$

即

$$\alpha f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$$

□

注意:

$$\begin{aligned}\alpha f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0 &\Longrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{\alpha}{\xi} \\ &\Longrightarrow \int \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} dx = -\int \frac{\alpha}{x} dx \\ &\Longrightarrow \ln|f(x)| = -\alpha \ln|x| + \ln|C| \\ &\Longrightarrow x^{\alpha} f(x) = C\end{aligned}$$

例 10 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，λ 为实数，$f(a) = f(b) = 0$，证明 $\exists\xi \in (a,b)$，使得 $\lambda f(\xi) + f'(\xi) = 0$。

例 11 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且有 $f(a) = f(b) = 0$，$g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，求证 $\exists\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0$。

例 12 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，其中 $a > 0$，且有 $f(a) = 0$，证明 $\exists\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = \dfrac{b-\xi}{a} f'(\xi)$。

例 13 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $f(0) = f(1) = 0$，$f(\frac{1}{2}) = 1$，证明

1. $\exists\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$，使得 $f(\xi) = \xi$；
2. 存在一个 $\eta \in (0,\xi)$，使得 $f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$。

例 14 设 $f(x)$，$g(x)$ 均在 $[1,6]$ 上连续，在 $(1,6)$ 内可导，且 $f(1) = 5$，$f(5) = 1$，$f(6) = 12$，求证 $\exists\xi \in (1,6)$，使得 $f'(\xi) + g'(\xi)[f(\xi) - 2\xi] = 2$。

例 15 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0) = 0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内非零，试证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$。

例 16 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0) = 0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内非零，试证在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $\dfrac{mf'(\xi)}{f(\xi)} = \dfrac{nf'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$。

例 17 设 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上可导，且 $f(0) = 0$，$f(1) = 1$，$f(4) = 2$，证明至少存在一点 $\xi \in (0,4)$，使得 $f''(\xi) = -\dfrac{1}{3}$。

例 18 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明

1. 存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；
2. 存在一点 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$。

例 19 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)f(b)>0$，$f(a)f(\frac{a+b}{2})<0$，证明对任何实数 k，必定存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=kf(\xi)$。

例 20 设 $f(\xi)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=\frac{a}{2}$，$f(\frac{a+b}{2})=a+b$，其中 $0<a<b$，证明对任意的 λ，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\lambda\left[f(\xi)-\frac{1}{2}\xi\right]+\frac{1}{2}$$

例 21 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f'(0)=0$，试证明存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$。

例 22 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$，试证明存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$。

例 23 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数，$f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)$，证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=f(\xi)$。

例 24 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，且有 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$，证明

1. 在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$；
2. 在 (a,b) 内至少存在一点 η，$\eta\neq\xi$，使得 $f''(\eta)=f(\eta)$。

例 25 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数，且存在相等的最大值，又 $f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$。

例 26 设 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 为 n 个实数，并满足 $a_1-\frac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{a_n}{2n-1}=0$，证明方程 $a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 至少有一实根。

例 27 设 $\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$，证明方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 至少有一个不小于 1 的实根。

例 28 证明方程 $2^x-x^2=1$ 有且仅有三个实根。

例 29 若 $f(x)$ 为可导函数，$g(x)$ 为连续函数，试证明在 $f(x)$ 的两个零点之间，一定有 $f'(x)-kf(x)g(x)=0$ 的零点。

例 30 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $f(1)=k\displaystyle\int_a^b xe^{1-x}f(x)\,\mathrm{d}x(k>1)$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\dfrac{1}{\xi})f(\xi)$。

例 31 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，试证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)\int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x=g(\xi)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$$

例 32 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，且 $f(1)=0$，设函数 $g(x)=x^2f(x)$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $g''(\xi)=0$。

例 33 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(1)>0$，$\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$，证明

1. 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；
2. 方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同的实根。

例 34 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)$，$f'(x)\neq0$，证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $[f'(\xi)]^2=f(\xi)f''(\xi)$。

例 35 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$，证明

1. $\exists\xi_1\in(a,b)$，使得 $f''(\xi_1)=f(\xi_1)$；
2. $\exists\xi_2\in(a,b)$，使得 $f''(\xi_2)-3f'(\xi_2)+2f(\xi_2)=0$。

例 36 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内二阶可导，且 $f(0)+f(\pi)=0$，证明 $\exists\xi\in(0,\pi)$，使得 $f''(\xi)+f(\xi)=0$。

例 37 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有连续导数，$f(0)=1$，且对一切 $x\geqslant0$ 有 $|f(x)|\leqslant e^{-x}$，证明存在一点 $\xi\in(0,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=-e^{-\xi}$。

例 38 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi^2f''(\xi)+4\xi f(\xi)=2f(\xi)=0$。

例 39 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $f(0)=0$，证明存在 $\xi\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得

$$f''(\xi)=f(\xi)(1+\tan^2\xi)$$

1.2 k 值法

例 40 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，证明对每个 $x\in(a,b)$，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(x)=\dfrac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$。

例 41 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导，且 $f(0)=-1$，$f(1)=0$，$f'(0)=0$，证明存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(x)=-1+x^2+\dfrac{x^2(x-1)}{3!}f'''(\xi)x\in(0,1)$。

例 42 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有三阶导数，$0<a<b<1$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)=f(a)+\dfrac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\dfrac{(b-a)^3}{12}f'''(\xi)$。

例 43 设 $f(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，证明在 $a<x<b$ 上有

$$\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b}=\frac{1}{2}f''(\xi)\quad(a<\xi<b)$$

例 44 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，求证 $\exists\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}(b-a)^3f'''(\xi)$$

例 45 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，求证至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3$$

例 46 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，求证 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

例 47 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，在 (a,b) 内二阶可导，若 $a<c<b$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{1}{2}f''(\xi)$。

例 48 设有实数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n，其中 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，函数 $f(x)$ 在 $[a_1,a_n]$ 上具有 n 阶导数，并满足 $f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_n)=0$，证明对任意的 $c\in[a_1,a_n]$，都相应的有 $\xi\in(a_1,a_n)$，使得 $f(c)=\dfrac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!}f^{(n)}(\xi)$。

1.3 拉格朗日中值定理——弦线法

例 49 设不恒为零的函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)>0$。

例 50 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，证明如果 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内不恒等于零，则必定存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)f(\xi)>0$。

例 51 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$f(c)<0(a<c<b)$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)>0$。

例 52 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，连接点 $A(a,f(a))$，$B(b,f(b))$ 的直线段 AB 与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))(a<c<b)$，证明 $\exists\in\xi(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=0$。

例 53 设 $f(X)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，又 $f(x)$ 不是线性函数，且 $f(b)>f(a)$，试证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

例 54 设 $f(X)$ 在 $[0,1]$ 上可微，$f(0)=0$，$f(1)=1$，k_1，k_2，$\cdots$，k_n 为 n 个正数，证明在 $[0,1]$ 内存在一组互不相等的数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{k_i}{f'(x_i)}=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i$。

例 55 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明

1. 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；
2. 存在两个不同的 α，$\beta\in(0,1)$，使得 $f'(\alpha)f'(\beta)=1$。

例 56 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，试证明对于任意给定的正数 a，b，在 $(0,1)$ 内存在不同的点 ξ 和 η 使得 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$。

例 57 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，试证明在区间 $[0,1]$ 上存在两个不同的点 x_1，x_2 使得 $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2$。

例 58 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明存在互不相等的 ξ_1，ξ_2，$\cdots$，$\xi_8\in(0,1)$，使得对正的常数 $\ln H$，$\ln A^2$，$\ln E^2$，$\ln P^2$，$\ln Y^2$，$\ln R$，$\ln W$，$\ln N$ 满足下式

$$e^{\frac{\ln H}{f'(\xi_1)}+\frac{\ln N}{f'(\xi_2)}+\frac{\ln W}{f'(\xi_3)}+\frac{\ln R}{f'(\xi_4)}+\frac{\ln A^2}{f'(\xi_5)}+\frac{\ln P^2}{f'(\xi_6)}+\frac{\ln Y^2}{f'(\xi_7)}+\frac{\ln E^2}{f'(\xi_8)}}=HAPPY\cdot NEW\cdot YEAR$$

例 59 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，a，b 为给定的正数，证明 $\exists\xi$，η，$0<\xi<\eta<1$，使得 $af'(\xi)+bf'(\eta)=a+b$。

1.4 拉格朗日中值定理——作为函数的表达

例 60 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微，且 $f(0)=0$，并设有实数 $A>0$，使得 $|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$，在 $[0,+\infty)$ 成立，试证明在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv 0$。

例 61 设 $[0,a]$ 上 $|f''(x)| \leqslant M$，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取最大值，试证明

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leqslant Ma$$

例 62 证明若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可微，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(x) = 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$。

例 63 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可导，且当 $x > a$ 时，$f'(x) > k > 0$，其中 k，证明若 $f(a) < 0$，则方程 $f(x) = 0$ 在 $[a, a - \dfrac{f(a)}{k}]$ 内有且仅有一个实根。

例 64 设 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内可导，且 $f'(x)$ 在该区间内有界，证明

1. $f(x)$ 在 (a,b) 内有界；
2. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 均存在。

例 65 证明若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导且无界，则 $f'(x)$ 在 (a,b) 内也无界。

例 66

1. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导,则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 都存在,证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$；
2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ 都存在,证明 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$。

例 67 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = A > 0$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$。

例 68 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且当 $x > 0$ 时，$a < f'(x) < \dfrac{1}{x^2}$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在。

例 69 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，且 $f(0) = f(1) = 0$，证明 $|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| \leqslant \dfrac{M}{4}$，其中 M 是 $|f'(x)|$ 在 $[0,1]$ 上的最大值。

例 70 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，且 $f(0) = 0$，证明 $|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| \leqslant \dfrac{M}{2}$，其中 M 是 $|f'(x)|$ 在 $[0,1]$ 上的最大值。

例 71 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数,且 $f(a) = f(b) = 0$,证明 $|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| \leqslant \dfrac{(b-a)^2 M}{4}$，其中 M 是 $|f'(x)|$ 在 $[0,1]$ 上的最大值。

例 72 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二次可微且有界，试证明存在 $x_0 \in (-\infty,+\infty)$，使得 $f''(x_0) = 0$。

例 73 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$，又存在一点 x_0，使得 $f(x_0)<0$，试证明方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有且只有两个实根。