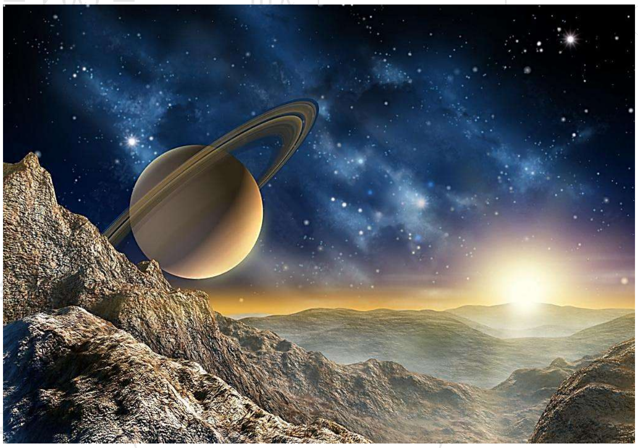
高等数学 LaTeX Note

证明专题笔记



Imagination is more important than knowledge.

整理：云淡风轻

整理时间：September 25, 2019

Email: 不告诉你 @qq.com

Version: 1.00

目　　录

第 1 章 中值定理与凹凸性

1.1 罗尔定理相关问题

例 1 证明广义罗尔定理：设 $f(x)$ 在 $x \geqslant a$ 时连续，在 $x > a$ 时可导，又设 $f(a) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，则存在 $\xi \in (a, +\infty)$ 使得 $f'(\xi) = 0$。

解: 若 $f(x) \equiv C$，则一定 $\exists\xi \in (a, +\infty)$，使 $f'(\xi) = 0$

若 $f(x)$ 不恒为常数，设

$$(a) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

则一定存在

$$x_0 \in (a, +\infty)$$

使

$$f(x_0) > A\text{或}f(x_0) < A$$

不妨设

$$f(x_0) > A\,(f(x_0) < A\text{时类似可证})$$

由广义介值定理，因

$$f(x)\text{ 在 }[a, +\infty)\text{ 上连续}$$

故

$$\forall M \in (A, f(x_0)), \exists x_1 \in (a, x_0), x_2 \in (x_0, +\infty)$$

使得

$$f(x_1) = f(x_2) = M$$

因

$$f(x)\text{ 在 }[x_1, x_2]\text{ 连续，}(x_1, x_2)\text{ 可导}$$

由罗尔定理

$$\exists\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, +\infty)$$

使得

$$f'(\xi) = 0$$

□

例 2 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，试证明：若存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $f(x_0)>x_0$，则必然存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=1$。

☞ **解:** 令

$$F(x)=f(x)-x,x\in[0,1]$$

则

$$F(x_0)=f(x_0)-x_0>0,F(1)=f(1)-1=-1<0$$

则

$$F(x_0)F(1)<0$$

又 $F(x)$ 在 $[x_0,1]$ 连续，由零点存在定理

$$\exists a\in(x_0,1)$$

使得

$$F(a)=0$$

因

$$F(0)=0=F(a),F(x)\text{ 在 }[0,a]\text{ 上连续，}(0,a)\text{ 可导}$$

由罗尔定理

$$\exists\xi\in(0,a)\subset(0,1)$$

使得

$$F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=1$$

□

例 3 假设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，并且 $g''(x)\neq0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，试证明

1. 在 (a,b) 内 $g(x)=\neq0$；
2. 在 (a,b) 内至少有一点 ξ 使得 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$。

☞ **解:**

1. 若

$$\exists x_0\in(a,b)$$

使得

$$g(x_0)=0$$

那么有

$$g(a)=g(x_0)=g(b)$$

因

$$g(x)\text{ 在 }(a,x_0)\text{ 连续，}(a,x_0)\text{ 可导，}[x_0,b]\text{ 连续，}(x_0,b)\text{ 可导}$$

由罗尔定理

$$\exists x_3\in(x_1,x_2)$$

使

$$g''(x_3)=0$$

这与 $g''(x)\neq 0$ 矛盾，故

$$g(x)\neq 0$$

2. 令

$$F(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$$

因

$$F(a)=F(b)=0,F(x)\text{ 在 }[a,b]\text{ 上连续，}(a,b)\text{ 内可导}$$

故

$$\exists\xi\in(a,b)$$

使

$$F'(\xi)=0$$

即

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}\text{成立}$$

□

注意: $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}\Longleftrightarrow f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$

$$\begin{aligned}\int\left[f(x)g''(x)-g(x)f''(x)\right]dx&=\int f(x)\,dg'(x)-\int g(x)\,df'(x)\\&=f(x)g'(x)-\int g'(x)f'(x)\,dx-g(x)f'(x)+\int f'(x)g'(x)\,dx\\&=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)\end{aligned}$$

例 4 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}$，试证明 $\exists\xi\in(0,+\infty)$ 是 $f'(\xi)=\dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$。

解: 令

$$F(x)=f(x)-\frac{x}{1+x^2},x\in[0,+\infty)$$

因

$$0\leqslant f(x)\leqslant\frac{x}{1+x^2}\text{且}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$$

由迫敛性知

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

即有

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{x}{1+x^2}\right]=0$$

因

$$F(0)=f(0)\geqslant 0,\forall x\in(0,+\infty)$$

有

$$F(x)\leqslant 0$$

又

$$F(x)\text{ 在 }[0,+\infty]\text{ 连续}$$

由零点存在定理

$$\exists x_0\in[0,+\infty]$$

使

$$F(x_0)=0$$

因

$$F(x_0)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=0\text{ 且}F(x)\text{ 在 }[x_0\ ,+\infty)\text{ 连续，}[x_0\ ,+\infty)\text{ 可导}$$

由广义罗尔定理

$$\exists\xi\in(x_0,+\infty)$$

使

$$F'(\xi)=0$$

即

$$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$$

□

例 5 **设** $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上连续，在** (a,b) **内可导，试证明** $\exists\xi(a,b)$**，使得**

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}$$

☞ **解:** 令

$$F(x)=(b-x)f(x)+f(a)x$$

有

$$F(a)=(b-a)f(a)+f(a)\cdot a=bf(a)$$

$$F(b)=F(a)b=F(a)$$

又

$$F(x)\text{ 在 }[a,b]\text{ 连续，}(a,b)\text{ 内可导}$$

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (a, b)$$

使

$$F'(\xi) = 0$$

即

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi}$$

□

例 6 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连，在 (a,b) 内可导，试证明 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$$

解:

方法一 令

$$令 F(x) = xf(x) \quad x \in [a, b]$$

因

$$F(x)\ 在\ [a,b]\ 上连续，(a,b)\ 内可导$$

由拉格朗日中值定理

$$F(b) - F(b) = F'(\xi)(b - a)\text{，其中} a < \xi < b$$

即

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$$

注意: 对于 $\frac{bf(b) - af(a)}{b - a}$，分子形式为 $xf(x)$，而分母恰是端点 a, b 之差所以联想到拉格朗日中值定理或柯西中值定理

方法二 令

$$F(x) = \frac{bf(b) - af(a)}{b - a}(x - a) - xf(x) \quad x \in [a, b]$$

有

$$F(a) = -af(a), F(b) = -af(a) = F(a)$$

因

$$F(x)\ 在\ [a,b]\ 上连续，(a,b)\ 内可导$$

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (a, b)$$

使得

$$F'(\xi) = 0 \Longrightarrow \frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$$

注意: 由

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$$

积分得到

$$\int\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}dx=\int\left[f(x)+xf'(x)\right]dx$$

即

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}(x-a)-xf(x)=C$$

□

例 7 设 $f(x)$，$g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g(x)\ \neq=\ 0$，$f(a)g(b)=g(a)f(b)$，试证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)g(\xi)=f(\xi)g'(\xi)$。

解: 令

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\ x\in[a,b]$$

因

$$f(a)f(b)=g(a)g(b)$$

故

$$\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{f(b)}{g(b)}$$

即

$$F(a)=F(b)$$

因

$$F(x)\text{ 在 }[a,b]\text{ 连续，}(a,b)\text{ 内可导}$$

由罗尔定理

$$\exists\xi\in(a,b)$$

使

$$F'(\xi)=0$$

即

$$f'(\xi)g(\xi)=f(\xi)g'(\xi)$$

□

注意:

$$\begin{aligned}
f'(\xi)g(\xi)=f(\xi)g'(\xi)&\Longrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)}\\
&\Longrightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx\\
&\Longrightarrow\ln|f(x)|=\ln|g(x)|+\ln|C|\\
&\Longrightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=C
\end{aligned}$$

故构造

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

例 8 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导，且对一切 x 都有 $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$，证明方程 $f(x) = 0$ 的任何两个不同的根之间必有 $g(x) = 0$ 的根。

☞ **解:** 设方程 $f(x) = 0$ 的任意某两根为 $x_1, x_2\ (x_1 < x_2)$ 则

$$f(x_1) = f(x_2) = 0$$

[只要证明：$\exists x_0 \in [x_1, x_2]$, 使$g(x_0) = \mathbf{0}$ 即可]
如果不存在

$$x_0 \in [x_1, x_2]$$

使

$$g(x) \not\equiv 0$$

令

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

因

$$F(x_1) = F(x_2) = \mathbf{0}\ \text{且} F(x)\ \text{在}\ [x_1, x_2]\ \text{连续},\ (x_1, x_2)\ \text{内可导}$$

故由罗尔定理

$$\exists \xi \in (x_1, x_2)$$

使

$$f'(\xi)\, g(\xi) - g'(\xi)\, f(\xi) = \mathbf{0}\ \text{成立}$$

这与题设矛盾，故

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2)$$

使

$$g(x_0) = 0$$

得证 □

例 9 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续，在 $(0, a)$ 内可导，$f(a) = 0$ 证明 $\forall \alpha \in (0, +\infty)$，总存在 $\xi \in (0, a)$，使得 $\alpha f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$。

☞ **解:** 令

$$F(x) = x^{\alpha} f(x) \quad x \in [0,a]$$

因

$$F(0) = F(a) = 0\ \text{且} F(x)\ \text{在}\ [0,a]\ \text{上连续，}\ (0,a)\ \text{内可导}$$

故由罗尔定理

$$\exists \xi \in (0,a)$$

使

$$F'(\xi)=0$$

即

$$\alpha f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$$

□

注意：

$$\begin{aligned}\alpha f(\xi)+\xi f'(\xi)=0 &\Longrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\frac{\alpha}{\xi}\\ &\Longrightarrow \int\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}dx=-\int\frac{\alpha}{x}dx\\ &\Longrightarrow \ln|f(x)|=-\alpha\ln|x|+\ln|C|\\ &\Longrightarrow x^{\alpha}f(x)=C\end{aligned}$$

例 10 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，λ 为实数，$f(a)=f(b)=0$，证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\lambda f(\xi)+f'(\xi)=0$。

解: 令

$$F(x)=e^{\lambda x}f(x)$$

因

$$F(a)=F(b)=0\text{ 且}F(x)\text{ 在 }[a,b]\text{ 上连续，}(a,b)\text{ 内可导}$$

故有罗尔定理

$$\exists\xi\in(a,b)$$

使

$$F'(\xi)=0$$

即

$$e^{\lambda\xi}\left[\lambda f(\xi)+f'(\xi)\right]=0$$

又

$$e^{\lambda\xi}>0$$

故

$$\lambda f(\xi)+f'(\xi)=0$$

得证 □

注意：

$$\begin{aligned}\lambda f(\xi)+f'(\xi)=0 &\Longrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\lambda\\ &\Longrightarrow \int\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}dx=\int-\lambda dx\Longrightarrow\qquad \ln|f(x)|=-\lambda x+\ln|C|\\ &\Longrightarrow e^{\lambda x}f(x)=C\end{aligned}$$

因此构造

$$F\left(x\right)=e^{\lambda x}f\left(x\right)$$

例 11 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且有 $f(a)=f(b)=0$，$g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，求证 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$。

解: 令

$$F\left(x\right)=e^{g(x)}f\left(x\right)$$

因

$$F\left(a\right)=F\left(b\right)=0\text{ 且}F\left(x\right)\text{在}\left[a,b\right]\text{上连续，}\left(a,b\right)\text{内可导}$$

由罗尔定理

$$\exists\xi\in\left(a,b\right)$$

使

$$F'\left(\xi\right)=0$$

即

$$e^{g(\xi)}\left[f'\left(\xi\right)+g'\left(\xi\right)f\left(x\right)\right]=0$$

故

$$f'\left(\xi\right)+g'\left(\xi\right)f\left(x\right)=0$$

得证 □

注意:

$$\begin{aligned}
f'\left(\xi\right)+g'\left(\xi\right)f\left(\xi\right)=0 &\Longrightarrow \frac{f'\left(\xi\right)}{f\left(\xi\right)}=-g'\left(\xi\right)\\
&\Longrightarrow \int\frac{f'\left(\xi\right)}{f\left(\xi\right)}dx=-\int g'\left(\xi\right)\\
&\Longrightarrow \ln\left|f\left(x\right)\right|=-g'\left(\xi\right)+\ln C\\
&\Longrightarrow e^{g(x)}f\left(x\right)=C
\end{aligned}$$

例 12 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，其中 $a>0$，且有 $f(a)=0$，证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$。

解: 令

$$F\left(x\right)=\left(x-b\right)^{a}f\left(x\right)\quad x\in\left[a,b\right]$$

因

$$F\left(a\right)=F\left(b\right)=0\text{ 且}F\left(x\right)\text{在}\left[a,b\right]\text{连续，}\left(a,b\right)\text{可导}$$

由罗尔定理

$$\exists\xi\in\left(a,b\right)$$

使得

$$F'(\xi) = 0$$

即

$$a(\xi - b)^{a-1} f(\xi) + (\xi - b)^{\alpha} f'(\xi) = 0$$

又

$$\xi \neq b$$

故约去

$$(\xi - b)^{a-1}$$

得

$$af(\xi) + (\xi - b) f'(\xi) = 0 \Longrightarrow f(\xi) = \frac{b - \xi}{a} f'(\xi)$$

□

注意:

$$\begin{aligned} f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi) &\Longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a}{b-x} \\ &\Longrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{a}{b-x} dx \\ &\Longrightarrow \ln|f(x)| = -a \ln|x-b| + \ln|c| \\ &\Longrightarrow (x-b)^a f(x) = c \end{aligned}$$

因此构造

$$F(x) = (x - a)^a f(x)$$

例 13 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $f(0) = f(1) = 0$，$f(\frac{1}{2}) = 1$，证明

1. $\exists \xi \in (\frac{1}{2}, 1)$，使得 $f(\xi) = \xi$；
2. 存在一个 $\eta \in (0, \xi)$，使得 $f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$。

解:

1. 令

$$F(x) = f(x) - x$$

则

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0 \text{且} F(1) = f(1) - 1 = -1 < 0$$

故

$$F\left(\frac{1}{2}\right) F(1) < 0$$

又

$$F(x) \text{ 在 } \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ 上连续}$$

故由零点存在定理知

$$\exists \xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

使得

$$F(\xi) = 0$$

即

$$f(\xi) = \xi$$

2. 令

$$F(x) = e^{-x}[f(x) - x]$$

因

$$F(0) = F(\xi) = 0 \text{ 且 } F(x) \text{ 在 } [0, \xi] \text{ 上连续，} (0, \xi) \text{ 上可导}$$

由罗尔定理

$$\exists \eta \in (0, \xi)$$

使得

$$F'(\eta) = 0$$

即

$$e^{-\eta}\left[f'(\eta) - 1 - f(\eta) + \eta\right] = 0$$

又

$$e^{-n} > 0$$

故

$$f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$$

注意:

$$\begin{aligned} f''(n) = f(n) - n + 1 &\Longrightarrow f'(x) - 1 = f(x) - x \\ &\Longrightarrow \frac{f'(x) - 1}{f(x) - x} = 1 \\ &\Longrightarrow \int \frac{f'(x) - 1}{f(x) - x} dx = \int dx \\ &\Longrightarrow \ln|f(x) - x| = x + \ln|c| \\ &\Longrightarrow e^{-x}(f(x) - x) = c \end{aligned}$$

故构造

$$F(x) = e^{-x}[f(x) - x]$$

□

例 14 设 $f(x)$，$g(x)$ 均在 $[1,6]$ 上连续，在 $(1,6)$ 内可导，且 $f(1)=5$，$f(5)=1$，$f(6)=12$，求证 $\exists\xi\in(1,6)$，使得 $f'(\xi)+g'(\xi)[f(\xi)-2\xi]=2$。

☞ **解:** 令

$$F\left(x\right)=e^{g(x)}\left[f\left(x\right)-2x\right]$$

因

$$F\left(1\right)=3e^{g(1)}>0,F\left(5\right)=-9e^{g(5)}<0$$

即

$$F\left(1\right)F\left(5\right)<0$$

又

$$F\left(x\right)\text{在}\left[1,5\right]\text{连续}$$

由零点存在定理

$$\exists x_0\in\left(1,5\right)$$

使

$$F\left(x_0\right)=0$$

另一方面

$$F\left(6\right)=0=F\left(x_0\right)\text{且}F\left(x\right)\text{在}\left[x_0,6\right]\text{上连续，}\left(x_0,6\right)\text{可导}$$

由罗尔定理

$$\exists\xi\in\left(x_0,6\right)$$

使得

$$F'\left(\xi\right)=0$$

即

$$e^{g(\xi)}\left[f'\left(\xi\right)-2+e^{g(\xi)}\left(f\left(\xi\right)-2\xi\right)\right]=0$$

又

$$e^{g(\xi)}>0$$

故

$$f'\left(\xi\right)+e^{g(\xi)}\left[f\left(\xi\right)-2\xi\right]=2$$

□

注意:

$$\begin{aligned} f'(\xi)+g'(\xi)[f(\xi)-2\xi]=2 &\Longrightarrow [f'(x)-2]+g'(x)[f(x)-2x]=0 \\ &\Longrightarrow \frac{f'(x)-2}{f(x)-2x}=-g'(x) \\ &\Longrightarrow \int \frac{f'(x)-2}{f(x)-2x}dx=-\int g'(x)\,dx \\ &\Longrightarrow \ln|f(x)-2x|=-g(x)+\ln|c| \\ &\Longrightarrow e^{g(x)}[f(x)-2x]=C \end{aligned}$$

故构造

$$F(x)=e^{g(x)}[f(x)-2x]$$

例 15 **设** $f(x)$ **在** $[0,1]$ **上连续，在** $(0,1)$ **内可导，**$f(0)=0$**，**$f(x)$ **在** $(0,1)$ **内非零，试证明在** $(0,1)$ **内至少存在一点** ξ**，使得** $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$。

解: 令

$$F(x)=f(x)f(1-x)\ \ x\in[0,1]$$

因

$$F(0)=F(1)=0 \text{且} F(x) \text{在} [0,1] \text{连续，} (0,1) \text{可导}$$

由罗尔定理

$$\exists\xi\in(0,1)$$

使得

$$F'(\xi)=0$$

即

$$f'(\xi)f(1-\xi)-f(\xi)f'(1-\xi)=0$$

又

$$\forall x\in(0,1)\,,\text{有} f(x)\neq 0$$

故

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

□

注意:

$$\begin{aligned} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)} &\Longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(1-x)}{f(1-x)} \\ &\Longrightarrow \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{f'(1-x)}{f(1-x)}dx \\ &\Longrightarrow \ln|f(x)|=-\ln|f(1-x)|+\ln|C| \\ &\Longrightarrow f(x)f(1-x)=C \end{aligned}$$

故构造

$$F(x) = f(x)\, f(1-x)$$

例 16 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内非零，试证在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $\dfrac{mf'(\xi)}{f(\xi)} = \dfrac{nf'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$。

解: 令

$$F(x) = [f(x)]^m [f(1-x)]^n$$

因

$$F(0) = F(1) = 0 \text{且} F(x) \text{在} [0,1] \text{连续，} (0,1) \text{可导}$$

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (0,1)$$

使得

$$F'(\xi) = 0$$

即

$$m[f(\xi)]^{m-1} f'(\xi)[f(1-\xi)]^n - n[f(1-\xi)]^{n-1} f'(1-\xi)[f(x)]^m = 0$$

又

$$\forall x \in (0,1), \text{有} f(x) \neq 0$$

故

$$\frac{mf'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{nf'(1-\xi)}{f'(1-\xi)}$$

□

例 17 设 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(4)=2$，证明至少存在一点 $\xi \in (0,4)$，使得 $f''(\xi) = -\dfrac{1}{3}$。

解: 令

$$F(x) = f(x) + \frac{x^2}{6} - \frac{7}{6}x$$

有

$$F(0) = F(1) = F(4) = 0$$

又

$$F(x) \text{在} [0,1] \text{连续，} (0,1) \text{可导，} [1,4] \text{连续，} (1,4) \text{可导}$$

故由罗尔定理

$$\exists \xi_1 \in (0,1)\text{，} \xi_2 \in (1,4)$$

使

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$$

又

$$F'(x)\text{ 在 }[\xi_1,\xi_2]\text{ 内连续，}(\xi_1,\xi_2)\text{ 可导}$$

由罗尔定理

$$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\text{，使}F''(\xi)=0$$

即

$$f''(\xi)=-\frac{1}{3}$$

得证 □

注意:

$$\begin{aligned}f''(\xi)=-\frac{1}{3}&\Longrightarrow f''(x)=-\frac{1}{3}\\&\Longrightarrow f'(x)=-\frac{x}{3}+C_1\\&\Longrightarrow f(x)=-\frac{x^2}{6}+C_1x+C_2\end{aligned}$$

只需要找一个 $g(x)$, 使得 $F(0)=F(0)=F(1)=F(4)$，即可得出结论

$$\begin{cases}g(0)=f(0)=0\\g(1)=f(1)=1\\g(4)=f(4)=2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}C_2=0\\-\frac{1}{6}+C_1+C_2=1\\-\frac{3}{8}+4C_1+C_2=2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}C_1=\frac{7}{6}\\C_2=0\end{cases}$$

例 18 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明

1. 存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；
2. 存在一点 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$。

解:

1. 令

$$F(x)=f(x)-x$$

由题

$$f(x)\text{ 奇函数}\Longrightarrow f(-1)=-f(1)=-1\text{且}f(0)=0$$

因

$$F(0)=F(1)=0\text{且}F(x)\text{ 在 }[0,1]\text{ 连续，}(0,1)\text{ 可导}$$

由罗尔定理

$$\exists\xi\in(0,1)$$

使

$$F'(\xi) = 0$$

即

$$f'(\xi) = 1$$

2. 令

$$G(x) = e^x \left[f'(x) - 1\right] = e^x F'(x)$$

由 $F(x)$ 为奇函数得

$$F(-1) = F(0) = 0$$

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (0, 1)$$

使得

$$F'(-\xi) = 0$$

则

$$G(\xi) = G(-\xi) = 0 \text{且} G(x) \text{在} [-\xi\text{，}\xi] \text{上连续，} (-\xi, \xi) \text{可导}$$

由罗尔定理

$$\exists \eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1, 1)$$

使得

$$G'(\eta) = 0$$

即

$$f''(\eta) + f'(\eta) = 1$$

□

例 19 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且 $f(a)f(b) > 0$，$f(a)f(\frac{a+b}{2}) < 0$，证明对任何实数 k，必定存在 $\xi \in (a, b)$，使得 $f'(\xi) = kf(\xi)$。

☞ **解:** 令

$$F(x) = e^{-kx} f(x) \quad x \in [a, b]$$

不妨设

$$f(a) > 0$$

则由题意知

$$f(b) > 0, f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$$

即

$$f(a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0, f\left(\frac{a+b}{2}\right) f(b) < 0$$

因

$$f(x) \text{在} \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \text{上连续}$$

由零点存在定理

$$\exists x_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right), x_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$$

使得

$$f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right) = 0$$

即

$$F\left(x_1\right) = F\left(x_2\right) = 0$$

又因

$$F\left(x\right) \text{ 在 } [x_1, x_2] \text{ 上连续，} (x_1, x_2) \text{ 上可导}$$

由罗尔定理

$$\exists \xi \in \left(x_1, x_2\right)$$

使得

$$F'\left(\xi\right) = 0$$

即

$$e^{-k\xi}\left[f'\left(\xi\right) - kf\left(\xi\right)\right] = 0$$

又

$$e^{-k\xi} > 0$$

故

$$f'\left(\xi\right) = kf\left(\xi\right)$$

得证 □

例 20 **设** $f(\xi)$ **在闭区间** $[a, b]$ **上连续，在** (a, b) **内可导，且** $f(a) = f(b) = \frac{a}{2}$**，**$f(\frac{a+b}{2}) = a + b$**，其中** $0 < a < b$**，证明对任意的** λ**，存在** $\xi \in (a, b)$**，使得**

$$f'(\xi) = \lambda\left[f(\xi) - \frac{1}{2}\xi\right] + \frac{1}{2}$$

☞ **解:** 令

$$F\left(x\right) = e^{-\lambda x}\left[f\left(x\right) - \frac{x}{2}\right] \quad g\left(x\right) = f\left(x\right) - \frac{x}{2}$$

由题意得

$$g\left(a\right) = f\left(a\right) - \frac{a}{2} = 0\text{，}g\left(b\right) = f\left(b\right) - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2} < 0\text{，}g\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{a+b}{4} > 0$$

得

$$g\left(b\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$$

因

$$g\left(x\right) \text{ 在 } \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \text{ 上连续}$$

由零点存在定理

$$\exists x_1 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$$

使得

$$g(x_1) = 0$$

故

$$F(a) = F(x_1) = 0$$

又

$$F(x) \text{ 在 } [a, x_1] \text{ 连续 } (a, x_1) \text{ 可导}$$

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (a, x_1)$$

使

$$F'(\xi) = 0$$

即

$$e^{-\lambda\xi}\left[f''(\xi) - \frac{1}{2} - \lambda\left(f'(\xi) - \frac{\xi}{2}\right)\right] = 0$$

即

$$f'(\xi) = \lambda\left[f(\xi) - \frac{\xi}{2}\right] + \frac{1}{2}$$

□

例 21 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f'(0) = 0$，试证明存在 $\xi \in (0,1)$，使 $f''(\xi) = \dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$。

☞ **解:** 令

$$F(x) = (1-x)^2 f'(x) \quad x \in [0,1]$$

因

$$F(0) = F(1) = 0 \text{且} F(x) \text{ 在 } [0,1] \text{ 连续，} (0,1) \text{ 可导}$$

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (0,1)$$

使

$$F'(\xi) = 0$$

即

$$-2(1-\xi) f'(\xi) + (1-\xi)^2 f''(\xi) = 0$$

又

$$1 - \xi \neq 0$$

故

$$f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$$

得证

□

例 22 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$，试证明存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$。

☞ **解:** 令

$$F\left(x\right)=\left(1-x\right)^{2}f'\left(x\right)$$

因

$$f\left(0\right)=f\left(1\right)=0\text{且}f\left(x\right)\text{在}\left[0,1\right]\text{连续，}\left(0,1\right)\text{可导}$$

由罗尔定理

$$\exists\xi\in\left(\xi,1\right)$$

使

$$F'\left(\xi\right)=0$$

即

$$-2\left(1-\xi\right)f'\left(\xi\right)+\left(1-\xi\right)^{2}f''\left(\xi\right)=0$$

又

$$1-\xi\neq0$$

故

$$f''\left(\xi\right)=\frac{2f'\left(\xi\right)}{1-\xi}$$

得证 □

例 23 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数，$f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)$，证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=f(\xi)$。

☞ **解:** 令

$$F\left(x\right)=e^{x}\left[f'\left(x\right)-f\left(x\right)\right]$$

因

$$F\left(0\right)=F\left(1\right)=0\text{且}F\left(x\right)\text{在}\left[0,1\right]\text{连续，}\left(0,1\right)\text{可导}$$

由罗尔定理

$$\exists\xi\in\left(0\text{，}1\right)$$

使

$$F'\left(\xi\right)=0$$

即

$$e^{\xi}\left[f''\left(\xi\right)-f'\left(\xi\right)+f'\left(\xi\right)-f\left(\xi\right)\right]=0$$

又

$$e^{\xi}>0$$

即

$$f''(\xi) = f(\xi)$$

得证 □

例 24 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数，且存在相等的最大值，又 $f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$。

☞ **解:** 令

$$F(x) = f(x) - g(x), x \in [a,b]$$

若 $f(x), g(x)$ 在同一点 x_0 处取得最大值, 则

$$F(a) = F(b) = F(x_0) = 0$$

由罗尔定理，结论是显然的。
若 $f(x), g(x)$ 不在同一点处取到最大值, 不妨设 $f(x)$ 在 x_1 处取最大值, $g(x)$ 在 x_2 处取最大值, 且 $x_1 < x_2$
则有

$$F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) \geqslant 0\text{，} F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) \leqslant 0$$

因为 $F(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续由零点存在性定理得

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2)$$

使得

$$F(x_0) = 0$$

故

$$F(a) = F(b) = F(x_0) = 0$$

连续使用罗尔定理，结论成立 □

例 25 设 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 为 n 个实数，并满足 $a_1 - \frac{a_2}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{a_n}{2n-1} = 0$，证明方程 $a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \cdots + a_n \cos(2n-1)x = 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 至少有一实根。

☞ **解:** 令

$$F(x) = a_1 \sin x + \frac{a_2}{3} \sin 3x + \cdots \cdot + \frac{a_n}{2n-1} \sin(2n-1)x$$

有

$$F(0) = 0, F\left(\frac{\pi}{2}\right) = a_1 - \frac{a_2}{3} + \cdots + \frac{a_n}{2n-1}(-1)^{n-1} = 0$$

即

$$F(0) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

又

$$F(x)\text{ 在 }\left[o, \frac{\pi}{2}\right]\text{ 上连续，}\left(o, \frac{\pi}{2}\right)\text{ 可导}$$

由罗尔定理

$$\exists \xi \in \left(o, \frac{\pi}{2}\right)$$

使得

$$F'(\xi) = 0$$

且

$$F'(x) = a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \cdot\cdot + a_n \cos(2n-1)x$$

结论成立 □

例 26 设 $\dfrac{a_0}{n+1} + \dfrac{a_1}{n} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0$，证明方程 $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ 至少有一个不小于 1 的实根。

解: 令

$$F(x) = f(x) - g(x) \quad x \in [a, b]$$

若 $f(x), g(x)$ 在同一点 x_0 处取得最大值
则

$$F(a) = F(b) = F(x) = 0$$

由罗尔定理, 结论是显然的.
若 $f(x), g(x)$ 不在同一点取得最大值，不妨设 $f(x)$ 在$x = x_1$ 处取最大值，$g(x)$ 在$x = x_2$ 处取最大值，且 $x_1 < x_2$，则有

$$F(x_1) = f(x_1) - g(x_1) \geqslant 0\text{，}F(x_2) = f(x_2) - g(x_2) \leqslant 0$$

因 $F(x)$ 在 $[x_1, x_2]$
由零点存在定理

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2)$$

使得

$$F(x_0) = 0$$

故

$$F(a) = F(b) = F(x_0) = 0$$

连续使用罗尔定理，结论成立。 □

例 27 证明方程 $2^x - x^2 = 1$ 有且仅有三个实根。

解: 令

$$F(x) = 2^x - x^2 - 1$$

有

$$F(0) = 0, F(1) = 0, F(4) = -1, F(5) = 6 > 0$$

因

$$F(4) \cdot F(5) < 0$$

由零点存在定理，至少存在一点 $\xi \in (4,5)$，使得

$$F(\xi) = 0$$

故 $F(x)$ 至少存在三实根
再证:$F(x)$ 仅有三个实根
若

$$\exists x_1, x_2, x_3, x_4$$

使得

$$F(x_1) = F(x_2) = F(x_3) = F(x_4) = 0$$

其中 x_1, x_2, x_3, x_4 互不相等
由罗尔定理

$$F'\left(x_1^{'}\right) = F'\left(x_2^{'}\right) = F'\left(x_3^{'}\right) = 0 \Rightarrow F''\left(x_1^{''}\right) = F''\left(x_2^{''}\right) = 0 \Rightarrow F'''\left(x_0^{'''}\right) = 0$$

事实上

$$F'(x) = \ln 2 \cdot 2^x - 2x$$

$$F''(x) = (\ln 2)^2 \cdot 2^x - 2$$

$$F'''(x) = (\ln 2)^3 \cdot 2^x \neq 0$$

与 $F'''\left(x_0^{'''}\right) = 0$ 矛盾, 故 $F(x)$ 仅三个零点。 □

例 28 **若 $f(x)$ 为可导函数，$g(x)$ 为连续函数，试证明在 $f(x)$ 的两个零点之间，一定有 $f'(x) - kf(x)g(x) = 0$ 的零点。**

☞ **解:** 设

$$f(a) = f(b) = 0 \text{ 其中} a < b$$

令

$$F(x) = f(x)\, e^{-k\int_a^x g(t)dt}$$

则有

$$F(a) = F(b) = 0$$

又

$$F(x) \text{ 在 } [a,b] \text{ 连续}, (a,b) \text{ 可导}$$

则由罗尔定理

$$\exists \xi \in (a,b)$$

使得

$$F'(\xi) = 0$$

因

$$F'(x) = e^{-k\int_a^x g(t)dt}\left[f'(x) - kg(x)f(x)\right]$$

又

$$e^{-k\int_a^\xi g(t)dt}>0$$

故

$$F'(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)-kg(\xi)f(\xi)=0$$

命题得证 □

例 29 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $f(1)=k\int_a^b xe^{1-x}f(x)\,\mathrm{d}x(k>1)$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\frac{1}{\xi})f(\xi)$。

☞ **解:** 由积分中值定理

$$\exists x_0\in\left(0,\frac{1}{k}\right)$$

使得

$$\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x}f(x)\,dx=\frac{1}{k}x_0e^{1-x_0}f(x_0)$$

令

$$F(x)=xe^{1-x}f(x)$$

则

$$F(1)=f(1)=k\cdot\frac{1}{k}x_0e^{1-x_0}f(x_0)=F(x_0)$$

又

$$F(x)\text{在}[x_0,1]\text{连续}$$

使得

$$F'(\xi)=0$$

由

$$e^{1-\xi}>0,F'(\xi)=0$$

得

$$\xi f'(\xi)=(\xi-1)f(\xi)$$

又

$$\xi\neq0$$

故

$$f'(\xi)=(\xi-1)f(\xi)$$

得证 □

例 30 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，试证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)\int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x=g(\xi)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x$$

解: 令

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \int_x^b g(t)\,dt$$

由

$$F(a) = F(b) = 0$$

又

$$F(x) \text{ 在 } [a,b] \text{ 连续，} (a,b) \text{ 内可导}$$

故由罗尔定理

$$\exists \xi \in (a,b)$$

使

$$F'(\xi) = 0$$

即

$$f(\xi)\int_\xi^b g(x)\,dx = g(\xi)\int_a^\xi f(x)\,dx$$

□

注意:

$$\begin{aligned} f(\xi)\int_\xi^b g(x)\,dx = g(\xi)\int_a^\xi f(x)\,dx &\Longrightarrow \frac{f(\xi)}{\int_a^\xi f(x)\,dx} = \frac{g(\xi)}{\int_\xi^b g(x)\,dx} \\ &\Longrightarrow \int \frac{f(x)}{\int_a^x f(t)\,dt}dx = \int \frac{g(x)}{\int_x^b g(t)\,dt}dx \\ &\Longrightarrow ln\left|\int_a^x f(t)\,dt\right| = -\ln\left|\int_x^b g(t)\,dt\right| \\ &\Longrightarrow \int_a^x f(t)\,dt \int_x^b g(t)\,dt = C \end{aligned}$$

例 31 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，且 $f(1) = 0$，设函数 $g(x) = x^2 f(x)$，证明至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使得 $g''(\xi) = 0$。

例 32 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(1) > 0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x} < 0$，证明

1. 方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；
2. 方程 $f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同的实根。

解: 因

$$g(0) = g(1) = 0 \text{且} g(x) \text{ 在 } [0,1] \text{ 连续，} (0,1) \text{ 可导}$$

则由罗尔定理

$$\exists x_1 \in (0,1)$$

使得

$$g'(x_1) = 0$$

因

$$g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x)$$

故

$$g'(0) = g'(x_1) = 0$$

又

$$g'(x) \text{ 在 } [0, x_1] \text{ 连续，} (0, x_1) \text{ 可导}$$

则由罗尔定理

$$\exists \xi \in (0, x)$$

使得

$$g''(\xi) = 0$$

得证 □

例 33 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a) = f(b)$，$f'(x) \neq 0$，证明 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $[f'(\xi)]^2 = f(\xi)f''(\xi)$。

☞ **解:**

1.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0 \Longleftrightarrow \exists \delta > 0, \text{当} 0 < x < \delta \text{时，有} \frac{f(x)}{x} < 0$$

故

$$\exists x_0 \in (0, \delta)$$

使

$$\frac{f(x_0)}{x_0} < 0 \Longleftrightarrow f(x_0) < 0$$

又

$$f(x_0) < 0, f(1) > 0, f(x) \text{ 在 } [x, 1] \text{ 连续}$$

由零点存在定理

$$\exists \xi \in (0, 1)$$

使

$$f(\xi) = 0$$

2. 令

$$F(x) = f(x) f'(x)$$

因 $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$存在，且$f(x)$在$x = 0$处连续

故

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

由拉格朗日中值定理

$$\exists x_1 \in (x_0, 1)$$

使

$$f'(x_1) = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x_0} > 0$$

又

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) < 0 \text{且} f'(x) \text{在} [0, x_1] \text{上连续}$$

由零点存在定理

$$\exists x_2 \in (0, x_1)$$

使

$$f'(x_1) = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x_0} > 0$$

使

$$f'(x_2) = 0$$

故

$$F(0) = F(x_2) = F(\xi) = 0$$

由罗尔定理

$$\exists x', x'' \text{且} x' \neq x''$$

使

$$F'(x') = F'(x'') = 0$$

得证

□

例 34 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内二阶可导，且 $f(a) = f(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$，证明

1. $\exists \xi_1 \in (a, b)$，使得 $f''(\xi_1) = f(\xi_1)$；
2. $\exists \xi_2 \in (a, b)$，使得 $f''(\xi_2) - 3f'(\xi_2) + 2f(\xi_2) = 0$。

例 35 设 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续，在 $(0, \pi)$ 内二阶可导，且 $f(0) + f(\pi) = 0$，证明 $\exists \xi \in (0, \pi)$，使得 $f''(\xi) + f(\xi) = 0$。

例 36 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有连续导数，$f(0) = 1$，且对一切 $x \geqslant 0$ 有 $|f(x)| \leqslant e^{-x}$，证明存在一点 $\xi \in (0, +\infty)$，使得 $f'(\xi) = -e^{-\xi}$。

例 37 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导，且 $f(0) = f(1) = 0$，证明至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$，使得 $\xi^2 f''(\xi) + 4\xi f(\xi) = 2f(\xi) = 0$。

例 38 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $f(0) = 0$，证明存在 $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，使得

$$f''(\xi) = f(\xi)(1 + \tan^2 \xi)$$

1.2 k 值法

例 39 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，证明对每个 $x\in(a,b)$，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(x)=\dfrac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$。

例 40 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导，且 $f(0)=-1$，$f(1)=0$，$f'(0)=0$，证明存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(x)=-1+x^2+\dfrac{x^2(x-1)}{3!}f'''(\xi)x\in(0,1)$。

例 41 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有三阶导数，$0<a<b<1$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)=f(a)+\dfrac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\dfrac{(b-a)^3}{12}f'''(\xi)$。

例 42 设 $f(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，证明在 $a<x<b$ 上有

$$\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b}=\frac{1}{2}f''(\xi)\quad(a<\xi<b)$$

例 43 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，求证 $\exists\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}(b-a)^3f'''(\xi)$$

例 44 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，求证至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3$$

例 45 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，求证 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$

例 46 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，在 (a,b) 内二阶可导，若 $a<c<b$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{1}{2}f''(\xi)$。

例 47 设有实数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n，其中 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，函数 $f(x)$ 在 $[a_1,a_n]$ 上具有 n 阶导数，并满足 $f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_n)=0$，证明对任意的 $c\in[a_1,a_n]$，都相应的有 $\xi\in(a_1,a_n)$，使得 $f(c)=\dfrac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!}f^{(n)}(\xi)$。

1.3 拉格朗日中值定理——弦线法

例 48 设不恒为零的函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)>0$。

例 49 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，证明如果 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内不恒等于零，则必定存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)f(\xi)>0$。

例 50 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$，$f(c)<0(a<c<b)$，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)>0$。

例 51 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，连接点 $A(a,f(a))$，$B(b,f(b))$ 的直线段 AB 与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))(a<c<b)$，证明 $\exists\in\xi(a,b)$ 使得 $f''(\xi)=0$。

例 52 设 $f(X)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，又 $f(x)$ 不是线性函数，且 $f(b)>f(a)$，试证明 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

例 53 设 $f(X)$ 在 $[0,1]$ 上可微，$f(0)=0$，$f(1)=1$，k_1，k_2，$\cdots$，k_n 为 n 个正数，证明在 $[0,1]$ 内存在一组互不相等的数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{k_i}{f'(x_i)}=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i$。

例 54 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明

1. 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；
2. 存在两个不同的 α，$\beta\in(0,1)$，使得 $f'(\alpha)f'(\beta)=1$。

例 55 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，试证明对于任意给定的正数 a，b，在 $(0,1)$ 内存在不同的点 ξ 和 η 使得 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$。

例 56 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$，试证明在区间 $[0,1]$ 上存在两个不同的点 x_1，x_2 使得 $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2$。

例 57 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明存在互不相等的 ξ_1，ξ_2，$\cdots$，$\xi_8\in(0,1)$，使得对正的常数 $\ln H$，$\ln A^2$，$\ln E^2$，$\ln P^2$，$\ln Y^2$，$\ln R$，$\ln W$，$\ln N$ 满足下式

$$e^{\frac{\ln H}{f'(\xi_1)}+\frac{\ln N}{f'(\xi_2)}+\frac{\ln W}{f'(\xi_3)}+\frac{\ln R}{f'(\xi_4)}+\frac{\ln A^2}{f'(\xi_5)}+\frac{\ln P^2}{f'(\xi_6)}+\frac{\ln Y^2}{f'(\xi_7)}+\frac{\ln E^2}{f'(\xi_8)}}=HAPPY\cdot NEW\cdot YEAR$$

例 58 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，a，b 为给定的正数，证明 $\exists\xi$，η，$0<\xi<\eta<1$，使得 $af'(\xi)+bf'(\eta)=a+b$。

1.4 拉格朗日中值定理——作为函数的表达

例 59 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微，且 $f(0)=0$，并设有实数 $A>0$，使得 $|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$，在 $[0,+\infty)$ 成立，试证明在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv 0$。

例 60 设 $[0,a]$ 上 $|f''(x)| \leqslant M$，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取最大值，试证明

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leqslant Ma$$

例 61 证明若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可微，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(x) = 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$。

例 62 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可导，且当 $x > a$ 时，$f'(x) > k > 0$，其中 k，证明若 $f(a) < 0$，则方程 $f(x) = 0$ 在 $[a, a - \dfrac{f(a)}{k}]$ 内有且仅有一个实根。

例 63 设 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内可导，且 $f'(x)$ 在该区间内有界，证明

1. $f(x)$ 在 (a,b) 内有界；
2. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 均存在。

例 64 证明若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导且无界，则 $f'(x)$ 在 (a,b) 内也无界。

例 65

1. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导,则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 都存在,证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$;
2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ 都存在,证明 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$。

例 66 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = A > 0$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$。

例 67 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且当 $x > 0$ 时，$a < f'(x) < \dfrac{1}{x^2}$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在。

例 68 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，且 $f(0) = f(1) = 0$，证明 $|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| \leqslant \dfrac{M}{4}$，其中 M 是 $|f'(x)|$ 在 $[0,1]$ 上的最大值。

例 69 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，且 $f(0) = 0$，证明 $|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| \leqslant \dfrac{M}{2}$，其中 M 是 $|f'(x)|$ 在 $[0,1]$ 上的最大值。

例 70 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数,且 $f(a) = f(b) = 0$,证明 $|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| \leqslant \dfrac{(b-a)^2 M}{4}$，其中 M 是 $|f'(x)|$ 在 $[0,1]$ 上的最大值。

例 71 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二次可微且有界，试证明存在 $x_0 \in (-\infty,+\infty)$，使得 $f''(x_0) = 0$。

例 72 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$，又存在一点 x_0，使得 $f(x_0)<0$，试证明方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有且只有两个实根。