

$$V(k_0) = \sum_{t=0}^{\infty} [\beta^t \ln(1 - \alpha\beta) + \beta^t \alpha \ln k_t]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln(1 - \alpha\beta) + \alpha \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln k_t \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln(1 - \alpha\beta) + \alpha \ln k_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{(1 - \beta)(1 - \alpha\beta)} \ln(\alpha\beta) \end{aligned}$$

$$\text{左边} = V(k) = \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{(1 - \beta)(1 - \alpha\beta)} \ln(\alpha\beta)$$



利用 FOC 和包

右边

$$= u(f(k) - g(k)) + \beta \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln g(k) + A \right]$$

Imagination is more important than knowledge.

$$\begin{aligned} &= \ln(1 - \alpha\beta) + \alpha \ln k + \beta \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} [\ln \alpha\beta + \alpha \ln k] + k \right] \\ &= \alpha \ln k + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \alpha \ln k + \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta + \beta A \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta + \beta A \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + (1 - \beta)A + \beta A \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + A \end{aligned}$$

整理：云淡风轻

整理时间：September 17, 2019

Email: 不告诉你@qq.com

所以，左边 = 右边，证毕。

目 录



第 1 章

中值定理与凹凸性



1.1 罗尔定理相关问题

例 1 证明广义罗尔定理: 设 $f(x)$ 在 $x \geq a$ 时连续, 在 $x > a$ 时可导, 又设 $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 则存在 $\xi \in (a, +\infty)$ 使得 $f'(\xi) = 0$ 。

解: 若 $f(x) \equiv C$, 则一定 $\exists \xi \in (a, +\infty)$, 使 $f'(\xi) = 0$
若 $f(x)$ 不恒为常数, 设

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

则一定存在

$$x_0 \in (a, +\infty)$$

使

$$f(x_0) > A \text{ 或 } f(x_0) < A$$

不妨设

$$f(x_0) > A \text{ (} f(x_0) < A \text{ 时类似可证)}$$

由广义介值定理, 因

$$f(x) \text{ 在 } [a, +\infty) \text{ 上连续}$$

故

$$\forall M \in (A, f(x_0)), \exists x_1 \in (a, x_0), x_2 \in (x_0, +\infty)$$

使得

$$f(x_1) = f(x_2) = M$$

因

$$f(x) \text{ 在 } [x_1, x_2] \text{ 连续, } (x_1, x_2) \text{ 可导}$$

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, +\infty)$$

使得

$$f'(\xi) = 0$$

□

例2 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 试证明: 若存在 $x_0 \in (0, 1)$ 使得 $f(x_0) > x_0$, 则必然存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f'(\xi) = 1$ 。

例3 假设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在二阶导数, 并且 $g''(x) \neq 0$, $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$, 试证明

1. 在 (a, b) 内 $g(x) \neq 0$;

2. 在 (a, b) 内至少有一点 ξ 使得 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$ 。

例4 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且 $0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$, 试证明 $\exists \xi \in (0, +\infty)$ 是 $f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$ 。

例5 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 试证明 $\exists \xi(a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi}$$

例6 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连, 在 (a, b) 内可导, 试证明 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$$

例7 设 $f(x), g(x)$ 都在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $g(x) \neq 0, f(a)g(b) = g(a)f(b)$, 试证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi)g(\xi) = f(\xi)g'(\xi)$ 。

例8 设 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且对一切 x 都有 $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$, 证明方程 $f(x) = 0$ 的任何两个不同的根之间必有 $g(x) = 0$ 的根。

例9 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 在 $(0, a)$ 内可导, $f(a) = 0$ 证明 $\forall \alpha \in (0, +\infty)$, 总存在 $\xi \in (0, a)$, 使得 $\alpha f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ 。

例10 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, λ 为实数, $f(a) = f(b) = 0$, 证明 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $\lambda f(\xi) + f'(\xi) = 0$ 。

例11 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且有 $f(a) = f(b) = 0, g(x)$ 也在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导, 求证 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0$ 。

例12 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导, 其中 $a > 0$, 且有 $f(a) = 0$, 证明 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi)$ 。

例13 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可微, 且 $f(0) = f(1) = 0, f(\frac{1}{2}) = 1$, 证明

1. $\exists \xi \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $f(\xi) = \xi$;



2. 存在一个 $\eta \in (0, \xi)$, 使得 $f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$ 。

例 14 设 $f(x), g(x)$ 均在 $[1, 6]$ 上连续, 在 $(1, 6)$ 内可导, 且 $f(1) = 5, f(5) = 1, f(6) = 12$, 求证 $\exists \xi \in (1, 6)$, 使得 $f'(\xi) + g'(\xi)[f(\xi) - 2\xi] = 2$ 。

例 15 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $f(0) = 0, f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内非零, 试证明在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$ 。

例 16 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $f(0) = 0, f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内非零, 试证在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $\frac{mf'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{nf'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$ 。

例 17 设 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1, f(4) = 2$, 证明至少存在一点 $\xi \in (0, 4)$, 使得 $f''(\xi) = -\frac{1}{3}$ 。

例 18 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) = 1$, 证明

1. 存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$;
2. 存在一点 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$ 。

例 19 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a)f(b) > 0, f(a)f(\frac{a+b}{2}) < 0$, 证明对任何实数 k , 必定存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = kf(\xi)$ 。

例 20 设 $f(\xi)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = \frac{a}{2}, f(\frac{a+b}{2}) = a+b$, 其中 $0 < a < b$, 证明对任意的 λ , 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \lambda \left[f(\xi) - \frac{1}{2}\xi \right] + \frac{1}{2}$$

例 21 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f'(0) = 0$, 试证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$ 。

例 22 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 试证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$ 。

例 23 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有二阶导数, $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1)$, 证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) = f(\xi)$ 。

例 24 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导, $f(a) = f(b) = 0$, 且有 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 证明

1. 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = f(\xi)$;



2. 在 (a, b) 内至少存在一点 η , $\eta \neq \xi$, 使得 $f''(\eta) = f(\eta)$ 。

例 25 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数, 且存在相等的最大值, 又 $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$ 。

例 26 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n 个实数, 并满足 $a_1 - \frac{a_2}{3} + \dots + (-1)^n \frac{a_n}{2n-1} = 0$, 证明方程 $a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \dots + a_n \cos(2n-1)x = 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 至少有一实根。

例 27 设 $\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0$, 证明方程 $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ 至少有一个不小于 1 的实根。

例 28 证明方程 $2^x - x^2 = 1$ 有且仅有三个实根。

例 29 若 $f(x)$ 为可导函数, $g(x)$ 为连续函数, 试证明在 $f(x)$ 的两个零点之间, 一定有 $f'(x) - kf(x)g(x) = 0$ 的零点。

例 30 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且满足 $f(1) = k \int_a^b x e^{1-x} f(x) dx (k > 1)$, 证明至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = (1 - \frac{1}{\xi})f(\xi)$ 。

例 31 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 试证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(\xi) \int_{\xi}^b g(x) dx = g(\xi) \int_a^{\xi} f(x) dx$$

例 32 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内二阶可导, 且 $f(1) = 0$, 设函数 $g(x) = x^2 f(x)$, 证明至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $g''(\xi) = 0$ 。

例 33 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $f(1) > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$, 证明

1. 方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在一个实根;
2. 方程 $f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在两个不同的实根。

例 34 已知函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f(a) = f(b)$, $f'(x) \neq 0$, 证明 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $[f'(\xi)]^2 = f(\xi)f''(\xi)$ 。

例 35 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = \int_a^b f(x) dx = 0$, 证明

1. $\exists \xi_1 \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi_1) = f(\xi_1)$;
2. $\exists \xi_2 \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi_2) - 3f'(\xi_2) + 2f(\xi_2) = 0$ 。



例 36 设 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 在 $(0, \pi)$ 内二阶可导, 且 $f(0) + f(\pi) = 0$, 证明 $\exists \xi \in (0, \pi)$, 使得 $f''(\xi) + f(\xi) = 0$ 。

例 37 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有连续导数, $f(0) = 1$, 且对一切 $x \geq 0$ 有 $|f(x)| \leq e^{-x}$, 证明存在一点 $\xi \in (0, +\infty)$, 使得 $f'(\xi) = -e^{-\xi}$ 。

例 38 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 证明至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\xi^2 f''(\xi) + 4\xi f(\xi) = 2f(\xi) = 0$ 。

例 39 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f(0) = 0$, 证明存在 $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$f''(\xi) = f(\xi)(1 + \tan^2 \xi)$$

1.2 k 值法

例 40 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, $f(a) = f(b) = 0$, 证明对每个 $x \in (a, b)$, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$ 。

例 41 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上三阶可导, 且 $f(0) = -1$, $f(1) = 0$, $f'(0) = 0$, 证明存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(x) = -1 + x^2 + \frac{x^2(x-1)}{3!}f'''(\xi)$ 。

例 42 设 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有三阶导数, $0 < a < b < 1$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f'(a) + f'(b)] - \frac{(b-a)^3}{12}f'''(\xi)$ 。

例 43 设 $f(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 证明在 $a < x < b$ 上有

$$\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b} = \frac{1}{2}f''(\xi) \quad (a < \xi < b)$$

例 44 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有连续的二阶导数, 求证 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f'''(\xi)$$

例 45 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 求证至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3$$

例 46 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 求证 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$$



例 47 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 在 (a, b) 内二阶可导, 若 $a < c < b$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2}f''(\xi)$ 。

例 48 设有实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 其中 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, 函数 $f(x)$ 在 $[a_1, a_n]$ 上具有 n 阶导数, 并满足 $f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_n) = 0$, 证明对任意的 $c \in [a_1, a_n]$, 都相应的有 $\xi \in (a_1, a_n)$, 使得 $f(c) = \frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!}f^{(n)}(\xi)$ 。

1.3 拉格朗日中值定理——弦线法

例 49 设不恒为零的函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$, 证明在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) > 0$ 。

例 50 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, 证明如果 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内不恒等于零, 则必定存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi)f(\xi) > 0$ 。

例 51 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$, $f(c) < 0$ ($a < c < b$), 证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) > 0$ 。

例 52 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 连接点 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ 的直线段 AB 与曲线 $y = f(x)$ 相交于点 $C(c, f(c))$ ($a < c < b$), 证明 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $f''(\xi) = 0$ 。

例 53 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 又 $f(x)$ 不是线性函数, 且 $f(b) > f(a)$, 试证明 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 。

例 54 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, k_1, k_2, \dots, k_n 为 n 个正数, 证明在 $[0, 1]$ 内存在一组互不相等的数 x_1, x_2, \dots, x_n 使得 $\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^n k_i$ 。

例 55 已知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 证明

1. 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;
2. 存在两个不同的 $\alpha, \beta \in (0, 1)$, 使得 $f'(\alpha)f'(\beta) = 1$ 。

例 56 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 试证明对于任意给定的正数 a, b , 在 $(0, 1)$ 内存在不同的点 ξ 和 η 使得 $\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b$ 。

例 57 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 试证明在区间 $[0, 1]$ 上存在两个不同的点 x_1, x_2 使得 $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$ 。



例 58 已知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 证明存在互不相等的 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_8 \in (0, 1)$, 使得对正的常数 $\ln H, \ln A^2, \ln E^2, \ln P^2, \ln Y^2, \ln R, \ln W, \ln N$ 满足下式

$$e^{\frac{\ln H}{f'(\xi_1)} + \frac{\ln N}{f'(\xi_2)} + \frac{\ln W}{f'(\xi_3)} + \frac{\ln R}{f'(\xi_4)} + \frac{\ln A^2}{f'(\xi_5)} + \frac{\ln P^2}{f'(\xi_6)} + \frac{\ln Y^2}{f'(\xi_7)} + \frac{\ln E^2}{f'(\xi_8)}} = \text{HAPPY} \cdot \text{NEW} \cdot \text{YEAR}$$

例 59 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, a, b 为给定的正数, 证明 $\exists \xi, \eta, 0 < \xi < \eta < 1$, 使得 $af'(\xi) + bf'(\eta) = a + b$ 。

1.4 拉格朗日中值定理——作为函数的表达

例 60 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可微, 且 $f(0) = 0$, 并设有实数 $A > 0$, 使得 $|f'(x)| \leq A|f(x)|$, 在 $[0, +\infty)$ 成立, 试证明在 $[0, +\infty)$ 上 $f(x) \equiv 0$ 。

例 61 设 $[0, a]$ 上 $|f''(x)| \leq M$, $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内取最大值, 试证明

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma$$

例 62 证明若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可微, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ 。

例 63 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可导, 且当 $x > a$ 时, $f'(x) > k > 0$, 其中 k , 证明若 $f(a) < 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 在 $[a, a - \frac{f(a)}{k}]$ 内有且仅有一个实根。

例 64 设 $f(x)$ 在有限区间 (a, b) 内可导, 且 $f'(x)$ 在该区间内有界, 证明

1. $f(x)$ 在 (a, b) 内有界;
2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 均存在。

例 65 证明若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导且无界, 则 $f'(x)$ 在 (a, b) 内也无界。

例 66

1. 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内可导, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 都存在, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$;
2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ 都存在, 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ 。

例 67 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = A > 0$, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 。



例 68 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且当 $x > 0$ 时, $a < f'(x) < \frac{1}{x^2}$, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在。

例 69 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续导数, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 证明 $|\int_a^b f(x) dx| \leq \frac{M}{4}$, 其中 M 是 $|f'(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值。

例 70 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续导数, 且 $f(0) = 0$, 证明 $|\int_a^b f(x) dx| \leq \frac{M}{2}$, 其中 M 是 $|f'(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值。

例 71 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明 $|\int_a^b f(x) dx| \leq \frac{(b-a)^2 M}{4}$, 其中 M 是 $|f'(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值。

例 72 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二次可微且有界, 试证明存在 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 使得 $f''(x_0) = 0$ 。

例 73 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \beta < 0$, 又存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) < 0$, 试证明方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有且只有两个实根。

