

$$V(k_0) = \sum_{t=0}^{\infty} [\beta^t \ln(1 - \alpha\beta) + \beta^t \alpha \ln k_t]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln(1 - \alpha\beta) + \alpha \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln k_t \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln(1 - \alpha\beta) + \alpha \ln k_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \\ &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{(1 - \beta)(1 - \alpha\beta)} \ln(\alpha\beta) \end{aligned}$$

$$\text{左边} = V(k) = \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{(1 - \beta)(1 - \alpha\beta)} \ln(\alpha\beta)$$



利用 FOC 和包

右边

$$= u(f(k) - g(k)) + \beta \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln g(k) + A \right]$$

Imagination is more important than knowledge.

$$= \ln(1 - \alpha\beta) + \alpha \ln k + \beta \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta + \alpha \ln k \right] + k$$

$$= \ln(1 - \alpha\beta) + \alpha \ln k + \beta \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} [\ln \alpha\beta + \alpha \ln k] + k \right]$$

$$= \alpha \ln k + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \alpha \ln k + \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta + \beta A$$

$$= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta + \beta A$$

$$= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + (1 - \beta)A + \beta A$$

$$= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + A$$

整理：云淡风轻

整理时间：September 24, 2019

Email: 不告诉你 @qq.com

所以，左边 = 右边，证毕。

目 录



1	中值定理与凹凸性	3
1.1	罗尔定理相关问题	3
1.2	k 值法	20
1.3	拉格朗日中值定理——弦线法	21
1.4	拉格朗日中值定理——作为函数的表达	22

第 1 章

中值定理与凹凸性



1.1 罗尔定理相关问题

例 1 证明广义罗尔定理: 设 $f(x)$ 在 $x \geq a$ 时连续, 在 $x > a$ 时可导, 又设 $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 则存在 $\xi \in (a, +\infty)$ 使得 $f'(\xi) = 0$ 。

解: 若 $f(x) \equiv C$, 则一定 $\exists \xi \in (a, +\infty)$, 使 $f'(\xi) = 0$
若 $f(x)$ 不恒为常数, 设

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

则一定存在

$$x_0 \in (a, +\infty)$$

使

$$f(x_0) > A \text{ 或 } f(x_0) < A$$

不妨设

$$f(x_0) > A \text{ (} f(x_0) < A \text{ 时类似可证)}$$

由广义介值定理, 因

$$f(x) \text{ 在 } [a, +\infty) \text{ 上连续}$$

故

$$\forall M \in (A, f(x_0)), \exists x_1 \in (a, x_0), x_2 \in (x_0, +\infty)$$

使得

$$f(x_1) = f(x_2) = M$$

因

$$f(x) \text{ 在 } [x_1, x_2] \text{ 连续, } (x_1, x_2) \text{ 可导}$$

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, +\infty)$$

使得

$$f'(\xi) = 0$$

□

例2 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 试证明: 若存在 $x_0 \in (0, 1)$ 使得 $f(x_0) > x_0$, 则必然存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f'(\xi) = 1$ 。

 **解:** 令

$$F(x) = f(x) - x, x \in [0, 1]$$

则

$$F(x_0) = f(x_0) - x_0 > 0, F(1) = f(1) - 1 = -1 < 0$$

则

$$F(x_0)F(1) < 0$$

又 $F(x)$ 在 $[x_0, 1]$ 连续, 由零点存在定理

$$\exists a \in (x_0, 1)$$

使得

$$F(a) = 0$$

因

$$F(0) = 0 = F(a), F(x) \text{ 在 } [0, a] \text{ 上连续, } (0, a) \text{ 可导}$$

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (0, a) \subset (0, 1)$$

使得

$$F'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = 1$$

□

例3 假设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在二阶导数, 并且 $g''(x) \neq 0$, $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$, 试证明

1. 在 (a, b) 内 $g(x) \neq 0$;

2. 在 (a, b) 内至少有一点 ξ 使得 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$ 。

 **解:**

1. 若

$$\exists x_0 \in (a, b)$$

使得

$$g(x_0) = 0$$

那么有

$$g(a) = g(x_0) = g(b)$$



因

$g(x)$ 在 (a, x_0) 连续, (a, x_0) 可导, $[x_0, b]$ 连续, (x_0, b) 可导

由罗尔定理

$$\exists x_3 \in (x_1, x_2)$$

使

$$g''(x_3) = 0$$

这与 $g''(x) \neq 0$ 矛盾, 故

$$g(x) \neq 0$$

2. 令

$$F(x) = f(x)g'(x) - g(x)f'(x)$$

因

$F(a) = F(b) = 0$, $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导

故

$$\exists \xi \in (a, b)$$


使

$$F'(\xi) = 0$$

即

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)} \text{ 成立}$$

□

 注意: $\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)} \iff f(\xi)g''(\xi) - g(\xi)f''(\xi) = 0$

$$\begin{aligned} \int [f(x)g''(x) - g(x)f''(x)] dx &= \int f(x)dg'(x) - \int g(x)df'(x) \\ &= f(x)g'(x) - \int g'(x)f'(x)dx - g(x)f'(x) + \int f'(x)g'(x)dx \\ &= f(x)g'(x) - g(x)f'(x) \end{aligned}$$

例4 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且 $0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$, 试证明 $\exists \xi \in (0, +\infty)$ 是 $f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

 解: 令

$$F(x) = f(x) - \frac{x}{1+x^2}, x \in [0, +\infty)$$

因

$$0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2} \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$



由迫敛性知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

即有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{x}{1+x^2} \right] = 0$$

因

$$F(0) = f(0) \geq 0, \forall x \in (0, +\infty)$$

有

$$F(x) \leq 0$$

又

$$F(x) \text{ 在 } [0, +\infty] \text{ 连续}$$

由零点存在定理

$$\exists x_0 \in [0, +\infty]$$

使

$$F(x_0) = 0$$

因

$$F(x_0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ 且 } F(x) \text{ 在 } [x_0, +\infty) \text{ 连续, } [x_0, +\infty) \text{ 可导}$$

由广义罗尔定理

$$\exists \xi \in (x_0, +\infty)$$

使

$$F'(\xi) = 0$$


即

$$f'(\xi) = \frac{1 - \xi^2}{(1 + \xi^2)^2}$$

□

例5 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 试证明 $\exists \xi(a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi}$$

 **解:** 令

$$F(x) = (b - x)f(x) + f(a)x$$

有

$$F(a) = (b - a)f(a) + f(a) \cdot a = bf(a)$$

$$F(b) = F(a)b = F(a)$$

又

$$F(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 连续, } (a, b) \text{ 内可导}$$



由罗尔定理

$$\exists \xi \in (a, b)$$

使

$$F'(\xi) = 0$$

即

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - \xi}$$

□

例 6 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连, 在 (a, b) 内可导, 试证明 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$$

解:

方法一 令

$$\text{令 } F(x) = xf(x) \quad x \in [a, b]$$

因


$F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导

由拉格朗日中值定理

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a), \text{ 其中 } a < \xi < b$$

即

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$$

 注意: 对于 $\frac{bf(b) - af(a)}{b - a}$, 分子形式为 $xf(x)$, 而分母恰是端点 a, b 之差所以联想到拉格朗日中值定理或柯西中值定理

方法二 令

$$F(x) = \frac{bf(b) - af(a)}{b - a}(x - a) - xf(x) \quad x \in [a, b]$$

有

$$F(a) = -af(a), F(b) = -af(a) = F(a)$$

因

$F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (a, b)$$

使得

$$F'(\xi) = 0 \implies \frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$$





注意: 由

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b-a} = f(\xi) + \xi f'(\xi)$$

积分得到

$$\int \frac{bf(b) - af(a)}{b-a} dx = \int [f(x) + xf'(x)] dx$$

即

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b-a} (x-a) - xf(x) = C$$

□

例7 设 $f(x)$, $g(x)$ 都在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $g(x) \neq 0$, $f(a)g(b) = g(a)f(b)$, 试证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi)g(\xi) = f(\xi)g'(\xi)$ 。



解: 令

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad x \in [a, b]$$

因

$$f(a)f(b) = g(a)g(b)$$

故

$$\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)}$$

即

$$F(a) = F(b)$$

因

$F(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, (a, b) 内可导

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (a, b)$$

使

$$F'(\xi) = 0$$

即

$$f'(\xi)g(\xi) = f(\xi)g'(\xi)$$

□



注意:

$$\begin{aligned} f'(\xi)g(\xi) = f(\xi)g'(\xi) &\implies \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} \\ &\implies \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx \\ &\implies \ln |f(x)| = \ln |g(x)| + \ln |C| \\ &\implies \frac{f(x)}{g(x)} = C \end{aligned}$$



故构造

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

例 8 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且对一切 x 都有 $f'(x)g(x) \neq f(x)g'(x)$, 证明方程 $f(x) = 0$ 的任何两个不同的根之间必有 $g(x) = 0$ 的根。

 **解:** 设方程 $f(x) = 0$ 的任意某两根为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) 则

$$f(x_1) = f(x_2) = 0$$

[只要证明: $\exists x_0 \in [x_1, x_2]$, 使 $g(x_0) = 0$ 即可]

如果不存在

$$x_0 \in [x_1, x_2]$$

使

$$g(x) \neq 0$$

令

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

因

$$F(x_1) = F(x_2) = 0 \text{ 且 } F(x) \text{ 在 } [x_1, x_2] \text{ 连续, } (x_1, x_2) \text{ 内可导}$$

故由罗尔定理

$$\exists \xi \in (x_1, x_2)$$

使

$$f'(\xi)g(\xi) - g'(\xi)f(\xi) = 0 \text{ 成立}$$

这与题设矛盾, 故

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2)$$

使

$$g(x_0) = 0$$

得证 □

例 9 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 在 $(0, a)$ 内可导, $f(a) = 0$ 证明 $\forall \alpha \in (0, +\infty)$, 总存在 $\xi \in (0, a)$, 使得 $\alpha f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$ 。

 **解:** 令

$$F(x) = x^\alpha f(x) \quad x \in [0, a]$$

因

$$F(0) = F(a) = 0 \text{ 且 } F(x) \text{ 在 } [0, a] \text{ 上连续, } (0, a) \text{ 内可导}$$

故由罗尔定理

$$\exists \xi \in (0, a)$$



使

$$F'(\xi) = 0$$

即

$$\alpha f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$$

□



注意:

$$\begin{aligned}\alpha f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0 &\implies \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{\alpha}{\xi} \\ &\implies \int \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} dx = - \int \frac{\alpha}{x} dx \\ &\implies \ln |f(x)| = -\alpha \ln |x| + \ln |C| \\ &\implies x^\alpha f(x) = C\end{aligned}$$

例 10 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, λ 为实数, $f(a) = f(b) = 0$, 证明 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $\lambda f(\xi) + f'(\xi) = 0$.



解: 令

$$F(x) = e^{\lambda x} f(x)$$

因

$$F(a) = F(b) = 0 \text{ 且 } F(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续, } (a, b) \text{ 内可导}$$

故有罗尔定理

$$\exists \xi \in (a, b)$$

使

$$F'(\xi) = 0$$

即

$$e^{\lambda \xi} [\lambda f(\xi) + f'(\xi)] = 0$$

又

$$e^{\lambda \xi} > 0$$

故

$$\lambda f(\xi) + f'(\xi) = 0$$

得证

□



注意:

$$\begin{aligned}\lambda f(\xi) + f'(\xi) = 0 &\implies \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\lambda \\ &\implies \int \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} dx = \int -\lambda dx \implies \ln |f(x)| = -\lambda x + \ln |C| \\ &\implies e^{\lambda x} f(x) = C\end{aligned}$$



因此构造

$$F(x) = e^{\lambda x} f(x)$$

例 11 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且有 $f(a) = f(b) = 0$, $g(x)$ 也在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导, 求证 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) + g'(\xi)f(\xi) = 0$ 。

 **解:** 令

$$F(x) = e^{g(x)} f(x)$$

因

$$F(a) = F(b) = 0 \text{ 且 } F(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上连续, } (a, b) \text{ 内可导}$$

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (a, b)$$

使

$$F'(\xi) = 0$$


即

$$e^{g(\xi)} [f'(\xi) + g'(\xi) f(x)] = 0$$

故

$$f'(\xi) + g'(\xi) f(x) = 0$$

得证 □

 **注意:**

$$\begin{aligned} f'(\xi) + g'(\xi) f(\xi) = 0 &\implies \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -g'(\xi) \\ &\implies \int \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} dx = - \int g'(\xi) \\ &\implies \ln |f(x)| = -g'(\xi) + \ln C \\ &\implies e^{g(x)} f(x) = C \end{aligned}$$

例 12 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导, 其中 $a > 0$, 且有 $f(a) = 0$, 证明 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi)$ 。

 **解:** 令

$$F(x) = (x-b)^a f(x) \quad x \in [a, b]$$

因

$$F(a) = F(b) = 0 \text{ 且 } F(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 连续, } (a, b) \text{ 可导}$$

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (a, b)$$



使得

$$F'(\xi) = 0$$

即

$$a(\xi - b)^{a-1} f(\xi) + (\xi - b)^a f'(\xi) = 0$$

又

$$\xi \neq b$$

故约去

$$(\xi - b)^{a-1}$$

得

$$af(\xi) + (\xi - b)f'(\xi) = 0 \implies f(\xi) = \frac{b - \xi}{a} f'(\xi)$$

□



注意:

$$\begin{aligned} f(\xi) = \frac{b - \xi}{a} f'(\xi) &\implies \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{a}{b - x} \\ &\implies \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{a}{b - x} dx \\ &\implies \ln |f(x)| = -a \ln |x - b| + \ln |c| \\ &\implies (x - b)^a f(x) = c \end{aligned}$$

因此构造

$$F(x) = (x - a)^a f(x)$$

例 13 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可微, 且 $f(0) = f(1) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, 证明

1. $\exists \xi \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $f(\xi) = \xi$;
2. 存在一个 $\eta \in (0, \xi)$, 使得 $f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$ 。



解:

1. 令

$$F(x) = f(x) - x$$

则

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0 \text{ 且 } F(1) = f(1) - 1 = -1 < 0$$

故

$$F\left(\frac{1}{2}\right) F(1) < 0$$



又

$F(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上连续

故由零点存在定理知

$$\exists \xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

使得

$$F(\xi) = 0$$

即

$$f(\xi) = \xi$$

2. 令

$$F(x) = e^{-x} [f(x) - x]$$

因

$F(0) = F(\xi) = 0$ 且 $F(x)$ 在 $[0, \xi]$ 上连续, $(0, \xi)$ 上可导

由罗尔定理

$$\exists \eta \in (0, \xi)$$

使得

$$F'(\eta) = 0$$

即

$$e^{-\eta} [f'(\eta) - 1 - f(\eta) + \eta] = 0$$

又

$$e^{-\eta} > 0$$

故

$$f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$$



注意:

$$\begin{aligned} f''(n) = f(n) - n + 1 &\implies f'(x) - 1 = f(x) - x \\ &\implies \frac{f'(x) - 1}{f(x) - x} = 1 \\ &\implies \int \frac{f'(x) - 1}{f(x) - x} dx = \int dx \\ &\implies \ln |f(x) - x| = x + \ln |c| \\ &\implies e^{-x} (f(x) - x) = c \end{aligned}$$

故构造

$$F(x) = e^{-x} [f(x) - x]$$



□

例 14 设 $f(x), g(x)$ 均在 $[1, 6]$ 上连续, 在 $(1, 6)$ 内可导, 且 $f(1) = 5, f(5) = 1, f(6) = 12$, 求证 $\exists \xi \in (1, 6)$, 使得 $f'(\xi) + g'(\xi)[f(\xi) - 2\xi] = 2$ 。

 **解:** 令

$$F(x) = e^{g(x)} [f(x) - 2x]$$

因

$$F(1) = 3e^{g(1)} > 0, F(5) = -9e^{g(5)} < 0$$

即

$$F(1)F(5) < 0$$

又

$$F(x) \text{ 在 } [1, 5] \text{ 连续}$$

由零点存在定理

$$\exists x_0 \in (1, 5)$$

使

$$F(x_0) = 0$$

另一方面

$$F(6) = 0 = F(x_0) \text{ 且 } F(x) \text{ 在 } [x_0, 6] \text{ 上连续, } (x_0, 6) \text{ 可导}$$

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (x_0, 6)$$

使得

$$F'(\xi) = 0$$

即

$$e^{g(\xi)} [f'(\xi) - 2 + e^{g(\xi)} (f(\xi) - 2\xi)] = 0$$

又

$$e^{g(\xi)} > 0$$

故

$$f'(\xi) + e^{g(\xi)} [f(\xi) - 2\xi] = 2$$

□





注意:

$$\begin{aligned}
 f'(\xi) + g'(\xi)[f(\xi) - 2\xi] &= 2 \implies [f'(x) - 2] + g'(x)[f(x) - 2x] = 0 \\
 &\implies \frac{f'(x) - 2}{f(x) - 2x} = -g'(x) \\
 &\implies \int \frac{f'(x) - 2}{f(x) - 2x} dx = - \int g'(x) dx \\
 &\implies \ln |f(x) - 2x| = -g(x) + \ln |c| \\
 &\implies e^{g(x)} [f(x) - 2x] = C
 \end{aligned}$$

故构造

$$F(x) = e^{g(x)} [f(x) - 2x]$$

例 15 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $f(0) = 0$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内非零, 试证明在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$ 。



解: 令

$$F(x) = f(x)f(1-x) \quad x \in [0, 1]$$

因

$$F(0) = F(1) = 0 \text{ 且 } F(x) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 连续, } (0, 1) \text{ 可导}$$

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (0, 1)$$

使得

$$F'(\xi) = 0$$

即

$$f'(\xi)f(1-\xi) - f(\xi)f'(1-\xi) = 0$$

又

$$\forall x \in (0, 1), \text{ 有 } f(x) \neq 0$$

故

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

□



注意:

$$\begin{aligned}
 \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)} &\implies \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(1-x)}{f(1-x)} \\
 &\implies \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{f'(1-x)}{f(1-x)} dx \\
 &\implies \ln |f(x)| = -\ln |f(1-x)| + \ln |C| \\
 &\implies f(x)f(1-x) = C
 \end{aligned}$$



故构造

$$F(x) = f(x)f(1-x)$$

例 16 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $f(0) = 0$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内非零, 试证在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $\frac{mf'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{nf'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$ 。

 **解:** 令

$$F(x) = [f(x)]^m [f(1-x)]^n$$

因

$$F(0) = F(1) = 0 \text{ 且 } F(x) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 连续, } (0, 1) \text{ 可导}$$

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (0, 1)$$

使得

$$F'(\xi) = 0$$

即

$$m[f(\xi)]^{m-1}f'(\xi)[f(1-\xi)]^n - n[f(1-\xi)]^{n-1}f'(1-\xi)[f(\xi)]^m = 0$$

又

$$\forall x \in (0, 1), \text{ 有 } f(x) \neq 0$$

故

$$\frac{mf'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{nf'(1-\xi)}{f'(1-\xi)}$$

□

例 17 设 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(4) = 2$, 证明至少存在一点 $\xi \in (0, 4)$, 使得 $f''(\xi) = -\frac{1}{3}$ 。

 **解:** 令

$$F(x) = f(x) + \frac{x^2}{6} - \frac{7}{6}x$$

有

$$F(0) = F(1) = F(4) = 0$$

又

$$F(x) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 连续, } (0, 1) \text{ 可导, } [1, 4] \text{ 连续, } (1, 4) \text{ 可导}$$

故由罗尔定理

$$\exists \xi_1 \in (0, 1), \xi_2 \in (1, 4)$$

使

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$$



又

$F'(x)$ 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 内连续, (ξ_1, ξ_2) 可导

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2), \text{ 使 } F''(\xi) = 0$$

即

$$f''(\xi) = -\frac{1}{3}$$

得证 □



注意:

$$\begin{aligned} f''(\xi) = -\frac{1}{3} &\implies f''(x) = -\frac{1}{3} \\ &\implies f'(x) = -\frac{x}{3} + C_1 \\ &\implies f(x) = -\frac{x^2}{6} + C_1x + C_2 \end{aligned}$$

只需要找一个 $g(x)$, 使得 $F(0) = F(0) = F(1) = F(4)$, 即可得出结论

$$\begin{cases} g(0) = f(0) = 0 \\ g(1) = f(1) = 1 \\ g(4) = f(4) = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} C_2 = 0 \\ -\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 1 \\ -\frac{3}{8} + 4C_1 + C_2 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 = \frac{7}{6} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

例 18 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) = 1$, 证明

1. 存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$;
2. 存在一点 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$ 。

解:

1. 令

$$F(x) = f(x) - x$$

由题

$$f(x) \text{ 奇函数} \implies f(-1) = -f(1) = -1 \text{ 且 } f(0) = 0$$

因

$$F(0) = F(1) = 0 \text{ 且 } F(x) \text{ 在 } [0, 1] \text{ 连续, } (0, 1) \text{ 可导}$$

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (0, 1)$$



使

$$F'(\xi) = 0$$

即

$$f'(\xi) = 1$$

2. 令

$$G(x) = e^x [f'(x) - 1] = e^x F'(x)$$

由 $F(x)$ 为奇函数得

$$F(-1) = F(0) = 0$$

由罗尔定理

$$\exists \xi \in (0, 1)$$

使得

$$F'(-\xi) = 0$$

则

$$G(\xi) = G(-\xi) = 0 \text{ 且 } G(x) \text{ 在 } [-\xi, \xi] \text{ 上连续, } (-\xi, \xi) \text{ 可导}$$

由罗尔定理

$$\exists \eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1, 1)$$

使得

$$G'(\eta) = 0$$

即

$$f''(\eta) + f'(\eta) = 1$$

□

例 19 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a)f(b) > 0$, $f(a)f(\frac{a+b}{2}) < 0$, 证明对任何实数 k , 必定存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = kf(\xi)$ 。

例 20 设 $f(\xi)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = \frac{a}{2}$, $f(\frac{a+b}{2}) = a+b$, 其中 $0 < a < b$, 证明对任意的 λ , 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \lambda \left[f(\xi) - \frac{1}{2}\xi \right] + \frac{1}{2}$$

例 21 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f'(0) = 0$, 试证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$ 。

例 22 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 试证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使 $f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$ 。



例 23 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有二阶导数, $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1)$, 证明存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f''(\xi) = f(\xi)$ 。

例 24 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导, $f(a) = f(b) = 0$, 且有 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 证明

1. 在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = f(\xi)$;
2. 在 (a, b) 内至少存在一点 η , $\eta \neq \xi$, 使得 $f''(\eta) = f(\eta)$ 。

例 25 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数, 且存在相等的最大值, 又 $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$ 。

例 26 设 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n 个实数, 并满足 $a_1 - \frac{a_2}{3} + \dots + (-1)^n \frac{a_n}{2n-1} = 0$, 证明方程 $a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \dots + a_n \cos(2n-1)x = 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 至少有一实根。

例 27 设 $\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0$, 证明方程 $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ 至少有一个不小于 1 的实根。

例 28 证明方程 $2^x - x^2 = 1$ 有且仅有三个实根。

例 29 若 $f(x)$ 为可导函数, $g(x)$ 为连续函数, 试证明在 $f(x)$ 的两个零点之间, 一定有 $f'(x) - kf(x)g(x) = 0$ 的零点。

例 30 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且满足 $f(1) = k \int_a^b x e^{1-x} f(x) dx (k > 1)$, 证明至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = (1 - \frac{1}{\xi})f(\xi)$ 。

例 31 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 试证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(\xi) \int_{\xi}^b g(x) dx = g(\xi) \int_a^{\xi} f(x) dx$$

例 32 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内二阶可导, 且 $f(1) = 0$, 设函数 $g(x) = x^2 f(x)$, 证明至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $g''(\xi) = 0$ 。

例 33 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $f(1) > 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$, 证明

1. 方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在一个实根;
2. 方程 $f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内至少存在两个不同的实根。

例 34 已知函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f(a) = f(b), f'(x) \neq 0$, 证明 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $[f'(\xi)]^2 = f(\xi)f''(\xi)$ 。



例 35 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = \int_a^b f(x) dx = 0$, 证明

1. $\exists \xi_1 \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi_1) = f(\xi_1)$;
2. $\exists \xi_2 \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi_2) - 3f'(\xi_2) + 2f(\xi_2) = 0$.

例 36 设 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 在 $(0, \pi)$ 内二阶可导, 且 $f(0) + f(\pi) = 0$, 证明 $\exists \xi \in (0, \pi)$, 使得 $f''(\xi) + f(\xi) = 0$.

例 37 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有连续导数, $f(0) = 1$, 且对一切 $x \geq 0$ 有 $|f(x)| \leq e^{-x}$, 证明存在一点 $\xi \in (0, +\infty)$, 使得 $f'(\xi) = -e^{-\xi}$.

例 38 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 证明至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\xi^2 f''(\xi) + 4\xi f(\xi) = 2f(\xi) = 0$.

例 39 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f(0) = 0$, 证明存在 $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$f''(\xi) = f(\xi)(1 + \tan^2 \xi)$$

1.2 k 值法

例 40 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, $f(a) = f(b) = 0$, 证明对每个 $x \in (a, b)$, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$.

例 41 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上三阶可导, 且 $f(0) = -1$, $f(1) = 0$, $f'(0) = 0$, 证明存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(x) = -1 + x^2 + \frac{x^2(x-1)}{3!}f'''(\xi)$, $x \in (0, 1)$.

例 42 设 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有三阶导数, $0 < a < b < 1$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f'(a) + f'(b)] - \frac{(b-a)^3}{12}f'''(\xi)$.

例 43 设 $f(x)$ 在 $a \leq x \leq b$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 证明在 $a < x < b$ 上有

$$\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b} = \frac{1}{2}f''(\xi) \quad (a < \xi < b)$$

例 44 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有连续的二阶导数, 求证 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f'''(\xi)$$



例 45 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 求证至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3$$

例 46 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 求证 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi)$$

例 47 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 在 (a, b) 内二阶可导, 若 $a < c < b$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2} f''(\xi)$ 。

例 48 设有实数 a_1, a_2, \dots, a_n , 其中 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, 函数 $f(x)$ 在 $[a_1, a_n]$ 上具有 n 阶导数, 并满足 $f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_n) = 0$, 证明对任意的 $c \in [a_1, a_n]$, 都相应的有 $\xi \in (a_1, a_n)$, 使得 $f(c) = \frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!} f^{(n)}(\xi)$ 。

1.3 拉格朗日中值定理——弦线法

例 49 设不恒为零的函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$, 证明在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) > 0$ 。

例 50 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, 证明如果 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内不恒等于零, 则必定存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi)f(\xi) > 0$ 。

例 51 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有二阶导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$, $f(c) < 0$ ($a < c < b$), 证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) > 0$ 。

例 52 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导, 连接点 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ 的直线段 AB 与曲线 $y = f(x)$ 相交于点 $C(c, f(c))$ ($a < c < b$), 证明 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $f''(\xi) = 0$ 。

例 53 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 又 $f(x)$ 不是线性函数, 且 $f(b) > f(a)$, 试证明 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 。

例 54 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, k_1, k_2, \dots, k_n 为 n 个正数, 证明在 $[0, 1]$ 内存在一组互不相等的数 x_1, x_2, \dots, x_n 使得 $\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^n k_i$ 。

例 55 已知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, 证明

1. 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;



2. 存在两个不同的 $\alpha, \beta \in (0, 1)$, 使得 $f'(\alpha)f'(\beta) = 1$ 。

例 56 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 试证明对于任意给定的正数 a, b , 在 $(0, 1)$ 内存在不同的点 ξ 和 η 使得 $\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b$ 。

例 57 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $f(0) = 0, f(1) = 1$, 试证明在区间 $[0, 1]$ 上存在两个不同的点 x_1, x_2 使得 $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$ 。

例 58 已知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明存在互不相等的 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_8 \in (0, 1)$, 使得对正的常数 $\ln H, \ln A^2, \ln E^2, \ln P^2, \ln Y^2, \ln R, \ln W, \ln N$ 满足下式

$$e^{\frac{\ln H}{f'(\xi_1)} + \frac{\ln N}{f'(\xi_2)} + \frac{\ln W}{f'(\xi_3)} + \frac{\ln R}{f'(\xi_4)} + \frac{\ln A^2}{f'(\xi_5)} + \frac{\ln P^2}{f'(\xi_6)} + \frac{\ln Y^2}{f'(\xi_7)} + \frac{\ln E^2}{f'(\xi_8)}} = \text{HAPPY} \cdot \text{NEW} \cdot \text{YEAR}$$

例 59 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1, a, b$ 为给定的正数, 证明 $\exists \xi, \eta, 0 < \xi < \eta < 1$, 使得 $af'(\xi) + bf'(\eta) = a + b$ 。

1.4 拉格朗日中值定理——作为函数的表达

例 60 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可微, 且 $f(0) = 0$, 并设有实数 $A > 0$, 使得 $|f'(x)| \leq A|f(x)|$, 在 $[0, +\infty)$ 成立, 试证明在 $[0, +\infty)$ 上 $f(x) \equiv 0$ 。

例 61 设 $[0, a]$ 上 $|f''(x)| \leq M, f(x)$ 在 $(0, a)$ 内取最大值, 试证明

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma$$

例 62 证明若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可微, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ 。

例 63 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可导, 且当 $x > a$ 时, $f'(x) > k > 0$, 其中 k , 证明若 $f(a) < 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 在 $[a, a - \frac{f(a)}{k}]$ 内有且仅有一个实根。

例 64 设 $f(x)$ 在有限区间 (a, b) 内可导, 且 $f'(x)$ 在该区间内有界, 证明

1. $f(x)$ 在 (a, b) 内有界;
2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 均存在。

例 65 证明若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导且无界, 则 $f'(x)$ 在 (a, b) 内也无界。

例 66



1. 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内可导, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 都存在, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$;
2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ 都存在, 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ 。

例 67 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = A > 0$, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 。

例 68 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且当 $x > 0$ 时, $a < f'(x) < \frac{1}{x^2}$, 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在。

例 69 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续导数, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 证明 $|\int_a^b f(x) dx| \leq \frac{M}{4}$, 其中 M 是 $|f'(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值。

例 70 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续导数, 且 $f(0) = 0$, 证明 $|\int_a^b f(x) dx| \leq \frac{M}{2}$, 其中 M 是 $|f'(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值。

例 71 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续导数, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明 $|\int_a^b f(x) dx| \leq \frac{(b-a)^2 M}{4}$, 其中 M 是 $|f'(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值。

例 72 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二次可微且有界, 试证明存在 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 使得 $f''(x_0) = 0$ 。

例 73 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \beta < 0$, 又存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) < 0$, 试证明方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有且只有两个实根。

