

# 弹性力学

付佳豪

October 7, 2019



# 1 绪论

## 1.1 弹性力学内容

弹性力学，通常简称为弹性力学，又称为弹性理论，是固体力学的一个分支。弹性力学研究弹性体由于受外力作用，边界约束或温度改变等原因而发生的应力、应变和位移。

## 1.2 几个基本概念

- (1). 外力是指其他物体对研究对象的作用力，可以分为体积力和表面力，两者也分别简称为体力和面力。
- (2). 体力是分布在物体体积的力，如重力和惯性力。
- (3). 应力就是物体内部单位面积上的内力。
- (4). 应变是用来描述物体各部分线段长度和两线段夹角的改变。
- (5). 位移就是位置的移动。

## 1.3 基本假定

- (1). 连续性假定
- (2). 完全弹性假定
- (3). 均匀性假定
- (4). 各向同性假定
- (5). 小变形假设

## 2 平面问题的基本理论

### 2.1 两类问题

- (1). 平面应力问题：只在平面内有应力，与该面垂直方向的应力可忽略，例如薄板拉伸问题。

$$\underbrace{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, u, v}_{\text{独立}} \quad \underbrace{\varepsilon_z, w}_{\text{非独立}}$$

- (2). 平面应变问题：只在平面内有应变，与该面垂直方向的应变可忽略，例如水坝侧向水压问题。

$$\underbrace{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, u, v}_{\text{独立}} \quad \underbrace{\sigma_z}_{\text{非独立}}$$

### 2.2 平衡方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

### 2.3 几何方程

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad (2)$$

### 2.4 物理方程（本构关系）

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu (\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{cases} \quad (3)$$

平面应力问题：

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} \end{cases} \quad (4)$$

将 $E$ 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$ ， $\mu$ 换成 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 即可得到平面应变问题的物理方程。

## 2.5 边界条件

$$\begin{cases} l(\sigma_x)_s + m(\tau_{xy})_s = \bar{f}_x \\ m(\sigma_y)_s + l(\tau_{xy})_s = \bar{f}_y \end{cases} \quad (5)$$

## 2.6 按位移求解

位移表示的平衡微分方程：

$$\begin{cases} \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + f_x = 0 \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + f_y = 0 \end{cases} \quad (6)$$

位移表示的应力边界条件：

$$\begin{cases} \frac{E}{1-\mu^2} \left[ l \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right)_s + m \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_s \right] = \bar{f}_x \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left[ m \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)_s + l \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)_s \right] = \bar{f}_y \end{cases} \quad (7)$$

## 2.7 相容方程

应力表示的相容方程：

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (8)$$

应力表示的相容方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \mu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \mu\sigma_x) = 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (9)$$

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\mu) \left( \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) \quad (10)$$

## 2.8 应力函数

相容方程：

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (11)$$

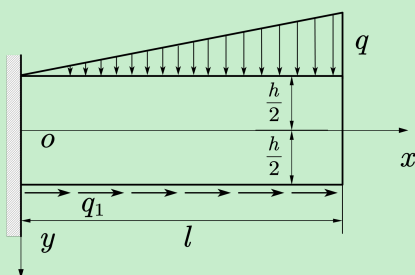
应力分量求解：

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - x f_x \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - y f_y \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (12)$$

## 2.9 圣维南原理

- (1). 圣维南原理只能应用于一小部分边界（小边界，次要边界或局部边界）。
- (2). 静力等效——指两者主矢量相同，对同一点主矩也相等。
- (3). 近处——指面力变换范围的一至二倍的局部区域。
- (4). 远处——近处以外。

### 例 2.1



解

左：

$$(u)_{x=0} = 0, (v)_{x=0} = 0$$

右：

$$(\sigma_x)_{x=l} = 0, (\tau_{xy})_{x=l} = 0$$

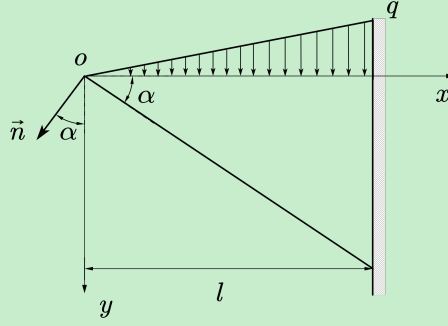
下：

$$(\sigma_y)_{y=\frac{h}{2}} = 0, (\tau_{yx})_{y=\frac{h}{2}} = q_1$$

上：

$$(\sigma_y)_{y=-\frac{h}{2}} = -q \frac{x}{l}, (\tau_{xy})_{y=-\frac{h}{2}} = 0$$

### 例 2.2



解

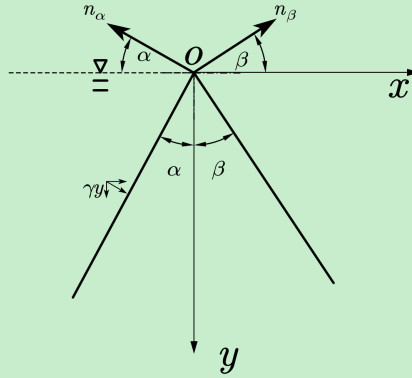
$y = 0$ 的边界上:  $(\sigma_y)_{y=0} = -q \frac{x}{l}, (\tau_{xy})_{y=0} = 0$

$x = l$ 边界上:  $(u)_{x=l} = 0, (v)_{x=l} = 0$

$y = x \tan \alpha$ 上:  $l = \cos \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = \cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha, m = \cos \alpha$

$$\begin{cases} -\sin \alpha \sigma_x + \cos \alpha \tau_{yx} = 0 \\ \cos \alpha \sigma_y - \sin \alpha \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

例 2.3 水坝，左水右空



解

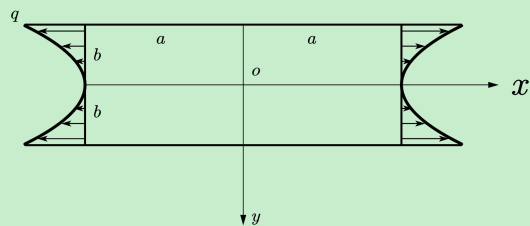
右侧:  $l = \cos \beta, m = \cos \left( \frac{\pi}{2} + \beta \right) = -\sin \beta$

$$\begin{cases} \cos \beta \sigma_x - \sin \beta \tau_{xy} = 0 \\ \cos \beta \tau_{xy} - \sin \beta \sigma_y = 0 \end{cases}$$

左侧:  $l = -\cos \alpha, m = -\sin \alpha$

$$\begin{cases} -\cos \alpha \sigma_x - \tau_{xy} \sin \alpha = \gamma y \cos \alpha \\ -\cos \alpha \tau_{xy} - \sigma_y \sin \alpha = \gamma y \sin \alpha \end{cases}$$

例 2.4

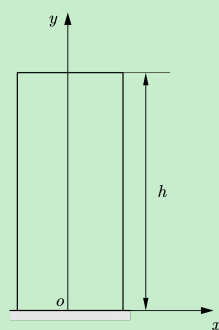


解

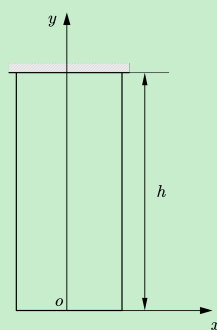
上下:  $(\sigma_y)_{y=\pm b} = 0, (\tau_{xy})_{y=\pm b} = 0$

左右:  $(\sigma_x)_{x=\pm a} = q \left(\frac{y}{b}\right)^2, (\tau_{xy})_{x=\pm a} = 0$

例 2.5 设有矩形截面的竖柱，密度为  $\rho$ , 应力分量为 
$$\begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = C_1 y + C_2 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$
 试着分别利用  $a$  和  $b$  确定常数  $C_1$  和  $C_2$ 。



$a$



$b$

上:  $(\sigma_y)_{y=h} = 0$

下:  $(\sigma_y)_{y=0} = -\rho g h$

则:

$$\begin{cases} C_1 = \rho g \\ C_2 = -\rho g h \end{cases}$$

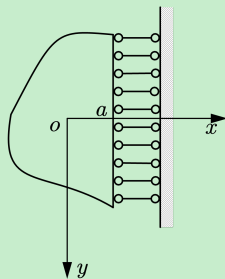
上:  $(\sigma_y)_{y=h} = -\rho g h$

下:  $(\sigma_y)_{y=0} = 0$

则:

$$\begin{cases} C_1 = -\rho g \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

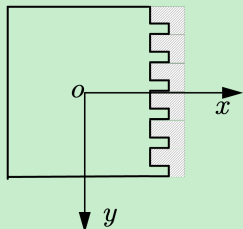
例 2.6 列出  $x = a$  的边界条件



解

$$\begin{cases} (u)_{x=a} = \bar{u} = 0 \\ (\tau_{xy})_{x=a} = \bar{f}_y = 0 \end{cases}$$

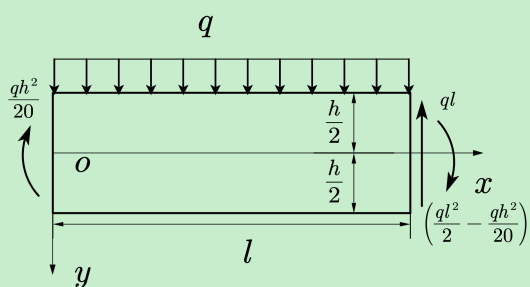
例 2.7 列出边界条件



解

$$\begin{cases} (\sigma_x)_s = 0 \\ (v)_s = 0 \end{cases}$$

例 2.8 列出边界条件



解

上:

$$(\sigma_y)_{y=-\frac{h}{2}} = -q, (\tau_{xy})_{y=-\frac{h}{2}} = 0$$

下:

$$(\sigma_y)_{y=\frac{h}{2}} = 0, (\tau_{xy})_{y=\frac{h}{2}} = 0$$

左:

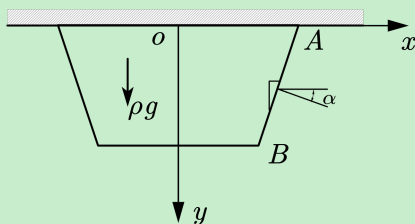
$$\begin{cases} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=0} dy \cdot 1 = F_N = 0 \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y \cdot (\sigma_x)_{x=0} dy \cdot 1 = M = -\frac{1}{2}ql^2 \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy})_{x=0} dy \cdot 1 = F_s = ql \end{cases}$$



右:

$$\begin{cases} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=l} dy \cdot 1 = 0 \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y (\sigma_x)_{x=l} dy \cdot 1 = 0 \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy})_{x=l} dy \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

**例 2.9** 试推导无面力作用时AB边界上的 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 之间的关系。



**解**

应力边界条件:

$$\begin{cases} (l\sigma_x + m\tau_{xy})_{s_\sigma} = \bar{f}_x(s_\sigma) \\ (l\tau_{xy} + m\sigma_y)_{s_\sigma} = \bar{f}_y(s_\sigma) \end{cases}$$

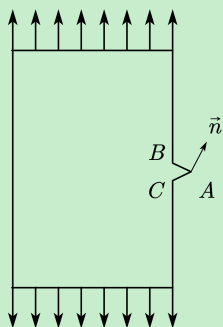
其中:

$$l = \cos \alpha, m = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha, \bar{f}_x = 0, \bar{f}_y = 0$$

则:

$$\begin{cases} \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha = 0 \\ \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = -\tau_{xy} \tan \alpha \\ \tau_{xy} = -\sigma_y \tan \alpha \\ \sigma_x = \sigma_y \tan^2 \alpha \end{cases}$$

**例 2.10** 证明A处无应力存在。



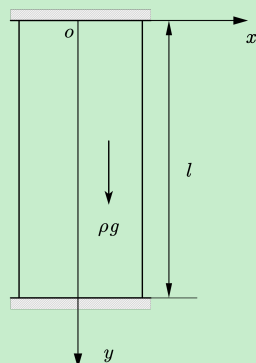
**证明.** 边界条件:

$$\begin{cases} l\sigma_x + m\tau_{xy} = 0 \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y = 0 \end{cases}$$

$l, m$  是任意系数, 则矩阵  $\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$  为零矩阵, 即  $A$  处无应力。

□

**例 2.11** 考虑两端固定的一维杆件, 只受重力作用,  $f_x = 0, f_y = \rho g$  使用位移法求解。



**解**

$$\begin{cases} \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + f_x = 0 \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + f_y = 0 \end{cases}$$

可设  $u = 0, v = v(y)$

代入第一式自然满足。

代入第二式得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{-\rho g}{E} \Rightarrow v = -\frac{\rho g}{E} y^2 + Ay + B$$

由位移边界条件得:

$$\begin{cases} v_{y=0} = 0 \\ v_{y=l} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{\rho g l}{2E} \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow v = \frac{\rho g}{2E} (ly - y^2)$$

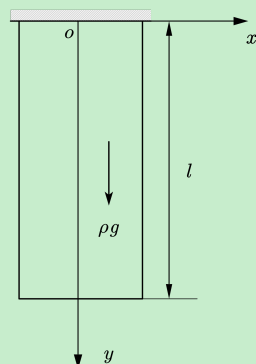
代入几何方程得:

$$\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = \frac{\rho g}{2E} (1 - 2y), \gamma_{xy} = 0$$

代入物理方程得:

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = \frac{\rho g}{2} (1 - 2y), \tau_{xy} = 0$$

**例 2.12** 考虑一端固定的一维杆件, 只受重力作用,  $f_x = 0, f_y = \rho g$  使用位移法求解。



解

$$\begin{cases} \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + f_x = 0 \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + f_y = 0 \end{cases}$$

可设  $u = 0, v = v(y)$

代入第一式自然满足。

代入第二式得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{-\rho g}{E} \Rightarrow v = -\frac{\rho g}{E} y^2 + Ay + B$$

由位移边界条件得：

$$v_{y=0} = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow v = -\frac{\rho g}{E} y^2 + Ay$$

代入几何方程得：

$$\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = -\frac{\rho g}{E} y + A, \gamma_{xy} = 0$$

代入物理方程得：

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = -\rho g y + EA, \tau_{xy} = 0$$

代入边界条件得：

$$(\sigma_y)_{y=l} = 0 \Rightarrow A = \frac{\rho g l}{E}$$

可得：

$$v = \frac{-\rho g}{2E} y^2 + \frac{\rho g l}{E} y, \varepsilon_y = -\frac{\rho g}{E} y + \frac{\rho g l}{E}, \sigma_y = \rho g (l - y)$$

**例 2.13** 若  $\varepsilon_x = ay^2, \varepsilon_y = bx^2, \gamma_{xy} = (a+b)xy$  是否可能成为弹性体的应变？

解

代入应变表示的相容方程可得：  $2a + 2b = a + b$

当  $a + b = 0$  时，可能，否则则不可能。

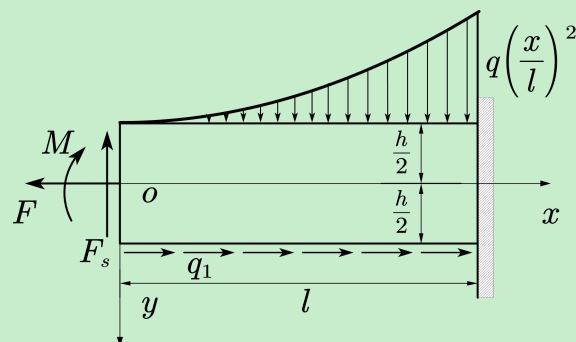
**例 2.14** 若  $f_x = f_y = 0, \sigma_x = ax^2, \sigma_y = by^2, \tau_{xy} = 0$  是否可能成为弹性体的应力？

解 代入平衡微分方程：

$$\begin{cases} 2ax + 0 + 0 \neq 0 \\ 0 + 2by + 0 \neq 0 \end{cases}$$

故不可能存在。

**例 2.15** 试列出图中的应力边界条件



解

上:

$$(\sigma_y)_{y=-\frac{h}{2}} = -q \left( \frac{x}{l} \right)^2, (\tau_{yx})_{y=-\frac{h}{2}} = 0$$

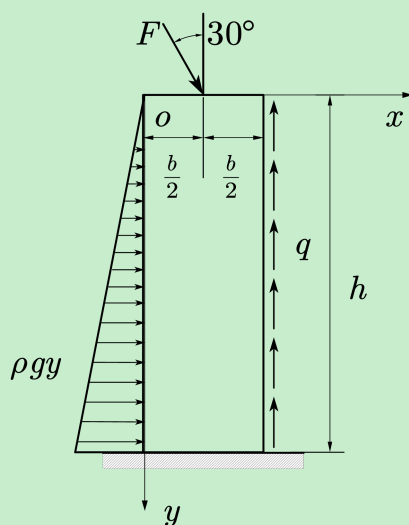
下:

$$(\sigma_y)_{y=\frac{h}{2}} = 0, (\tau_{xy})_{y=\frac{h}{2}} = q_1$$

左:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dy \cdot 1 = F, \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dy \cdot 1 = F_s, \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y \sigma_x dy \cdot 1 = M$$

例 2.16 试列出图中的应力边界条件



解

左:

$$(\sigma_x)_{x=0} = -\rho gy, (\tau_{xy})_{x=0} = 0$$

右:

$$(\sigma_x)_{x=b} = 0, (\tau_{xy})_{x=b} = -q$$

上:

$$\int_0^b \sigma_y dx \cdot 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} F, \int_0^b \tau_{xy} dx \cdot 1 = -\frac{1}{2} F, \int_0^b x \sigma_y dy \cdot 1 = -\frac{\sqrt{3}}{4} Fb$$

例 2.17 在无体力情况下, 试考虑下列应力分量是否可能在弹性体中存在。

- (1).  $\sigma_x = Ax + By, \sigma_y = Cx + Dy, \tau_{xy} = Ex + Fy$
- (2).  $\sigma_x = A(x^2 + y^2), \sigma_y = B(x^2 + y^2), \tau_{xy} = Cxy$

解

(1). 代入平衡方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = A + F = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = D + E = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -F \\ D = -E \end{cases} \quad \text{即可}$$

满足相容方程  $\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0$

故可能存在。

(2). 代入平衡方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\tau_{xy}}{\partial y} = 2Ax + Cx \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 2By + Cy \end{cases} \Rightarrow A = B = -\frac{C}{2}$$

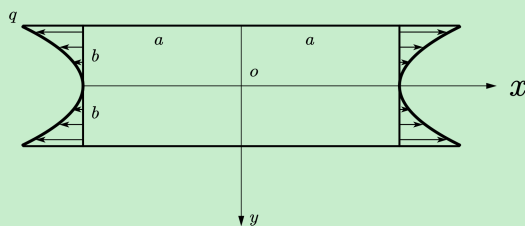
代入相容方程:

$$2A + 2B = 0$$

故只有  $A = B = C = 0$  时可能存在。

**例 2.18** 试验证下列应力分量是否是图示问题的解答

$$\sigma_x = \frac{y^2}{b^2}q, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$$



**解**

代入平衡方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \end{cases}$$

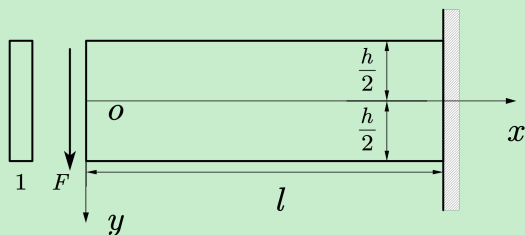
满足

代入应力形式的相容方程

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{2q}{b^2} \neq 0$$

不满足, 故不存在。

**例 2.19** 设有矩形截面悬臂梁, 在自由端受集中力  $F$  作用, 体力不计。试根据材料力学公式写出弯曲应力  $\sigma_x$  和切应力  $\tau_{xy}$  的表达式, 然后证明这些表达式满足平衡方程和相容方程。再说明这些表达式是否是正确的解答。



解 材料力学中:

$$\sigma_x = \frac{My}{I_z}, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \frac{F_Q S_z^*}{I_z b}$$

其中:

$$F_Q = -F, M = -Fx, S_z^* = \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right), I_z = \frac{bh^3}{12}$$

则:

$$\sigma_x = -\frac{12}{h^3} xy, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \frac{6F}{h^3} \left( y^2 - \frac{h^2}{4} \right)$$

验证应力是否满足三个条件:

(1). 应力边界条件:

• 主要边界上 (上下边界):

$$(\sigma_y)_{y=\pm \frac{h}{2}} = 0, (\tau_{yx})_{y=\pm \frac{h}{2}} = 0, \text{ 满足}$$

• 次要边界 (左边界):

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy})_{x=0} dy \cdot 1 = -F, \text{ 满足}$$

(2). 平衡方程:

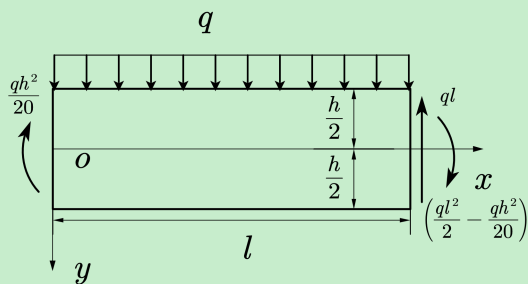
$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{12F}{h^3} y + \frac{12F}{h^3} y = 0 \\ 0 + 0 = 0 \end{cases} \quad \text{满足}$$

(3). 应力形式的相容方程:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \text{ 满足}$$

例 2.20 试用下列应力表达式求解其应力

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{q}{h^3} (6x^2y - 4y^3) \\ \sigma_y = -\frac{2q}{h^3} y^3 - C_1y + C_2 \\ \tau_{xy} = \frac{6qxy^2}{h^3} + C_1x \end{cases}$$



解

(1). 平衡微分方程:

$$\begin{cases} -\frac{12q}{h^3}x + \frac{12qx}{h^3} = 0 \\ \frac{12qy}{h^3} + C_1 - \frac{12qy}{h^3} - C_1 = 0 \end{cases}, \text{满足}$$

(2). 相容方程:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \text{满足}$$

(3). 校核边界条件:

• 上下边界:

$$\begin{cases} (\tau_{xy})_{y=\pm \frac{h}{2}} = 0 \\ (\sigma_x)_{y=-\frac{h}{2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \left( \frac{6q}{h^3} \frac{h^2}{4} + C_1 \right) = 0 \\ -\frac{2q}{h^3} \left( -\frac{h^3}{8} \right) + C_1 \frac{h}{2} + C_2 = -q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{3q}{2h} \\ C_2 = -\frac{q}{2} \end{cases}$$

将 $C_1, C_2$ 代入后满足。

• 左边界:

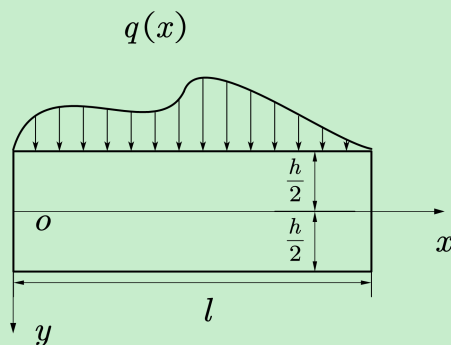
$$\begin{cases} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=0} dy = 0, \text{满足} \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y (\sigma_x)_{x=0} dy = \frac{qh^2}{20}, \text{满足} \end{cases}$$

右边界:

$$\begin{cases} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=l} dy = 0, \text{满足} \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y (\sigma_x)_{x=l} dy = \left( \frac{ql^2}{2} - \frac{qh^2}{20} \right), \text{满足} \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy})_{x=l} dy = -ql, \text{满足} \end{cases}$$

**例 2.21** 在材料力学中, 当矩形截面梁 (厚度 $\delta = 1$ ), 受任意的横向荷载 $q(x)$ 作用而弯曲, 弯曲应力公式为 $\sigma_x = \frac{M(x)}{I}y$ 。

试由平衡微分方程导出切应力和挤压应力 $\sigma_y$ 的公式。



**解** 不计体力将  $\sigma_x = \frac{M(x)}{I}y$  代入平衡微分方程第一式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{dM(x)}{dx} \cdot \frac{y}{I} = -\frac{F_Q(x)y}{I} \implies \tau_{xy} = -\frac{F_Q(x)y^2}{2I} + f_1(x)$$

由上下边界条件  $(\tau_{xy})_{y=\pm \frac{h}{2}} = 0$  可得:

$$f_1(x) = -\frac{F_Q(x)}{8I}h^2 \implies \tau_{xy} = \frac{F_Q(x)}{I} \left( \frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right)$$

将  $\tau_{xy}$  代入平衡微分方程第二式得:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{dF_Q(x)}{dyI} \left( \frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right) = \frac{q(x)}{I} \left( \frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right) \implies \sigma_y = \frac{q(x)}{I} \left( \frac{h^2}{8} - \frac{y^3}{6} \right) + f_2(x)$$

由下边界条件  $(\sigma_y)_{y=\frac{h}{2}} = 0$  得:

$$f_2(x) = -\frac{q(x)}{2} \implies \sigma_y = -q(x) \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{y}{h} + 2 \frac{y^3}{h^3} \right)$$

若  $q(x)$  为常数则:

$$M = \frac{ql^2}{2} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right), \sigma_x = \frac{6ql^2}{h^3} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) y, \sigma_y = -q \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{y}{h} + 2 \frac{y^3}{h^3} \right)$$

代入相容方程

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{24q}{h^3}y \neq 0$$

为了满足相容方程, 可令

$$\sigma_x = \frac{6ql^2}{h^3} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) y + \frac{4q}{h^3}y^3 + Ay + B$$

由次要边界条件:

$$\begin{cases} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=l} dy = 0 \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y (\sigma_x)_{x=0} dy = 0 \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy})_{x=0} dy = \frac{1}{2}ql \end{cases} \implies \begin{cases} A = -\frac{3q}{5h} \\ B = 0 \end{cases}$$

得

$$\sigma_x = \frac{6ql^2}{h^3} \left( \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) y + \frac{4q}{h^3}y^3 - \frac{3q}{5h}y$$



## 3 平面问题的直角坐标解答

### 3.1 逆解法

#### 3.1.1 含义

所谓逆解法，就是先设定各种形式的满足双调和方程的应力函数，然后利用应力函数计算各个应力分量，再根据应力边界条件反算边界上对应的面力，从而得知所设定的应力函数可以解决什么样的应力问题。

#### 3.1.2 步骤

设定 $\Phi$   
满足 $\nabla^4\Phi = 0$   $\rightarrow$  求出应力分量  $\xrightarrow{\text{代入边界条件}}$  反推面力  $\rightarrow$  得出可解决的应力问题

#### 3.1.3 唯一性定理

在给定载荷作用下，处于平衡状态的弹性体，其内部各点的应力，应力解是唯一的，如果物体的整体刚体位移受到约束，则位移解也是位移的。

#### 3.1.4 多项式解答

(1). 多项式应力函数 $\Phi(x, y)$ 都性质

- 多项式次数 $n < 4$ 时，则系数可以任意选取，总满足相容方程。
- 多项式次数 $n \geq 4$ 时，则系数需满足一定的条件，才能满足相容方程。
- 多项式次数越高，则系数间需满足的条件越多。

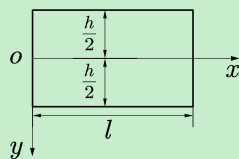
(2). 一次多项式:对应于无体力和无应力状态的自然状态；任意应力函数 $\Phi(x, y)$ 加上或减去一个一次多项式，对应力无影响。

(3). 二次多项式：对应均匀应力状态，即全部应力分量为常量。

(4). 三次多项式：对应线性分布的应力。

(5). 用多项式构造应力函数 $\Phi(x, y)$ ，一般只能解决简单直线应力边界问题。

**例 3.1** 设图中所示的矩形长梁 ( $l \geq h$ )，试考察应力函数  $\Phi = \frac{F}{2h^3}xy(3h^2 - 4y^2)$  能解决什么样的受力问题？



**解** 按照逆解法：

(1). 将  $\Phi$  代入相容方程， $\nabla^4 \Phi = 0$  满足。

(2). 由  $\Phi$  求出应力分量：

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{12Fxy}{h^3} \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{3F}{2h} \end{cases}$$

(3). 由边界形状和应力分量反推边界上的应力。

主要边界（大边界）： $y = \pm \frac{h}{2}, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$ 。

因此：在  $y = \pm \frac{h}{2}$  的边界面上，无任何面力作用。即： $\bar{f}_x = \bar{f}_y = 0$

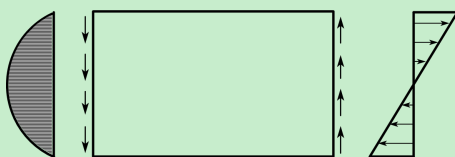
次要边界（小边界） $x = 0$  or  $l$  上：

左端：

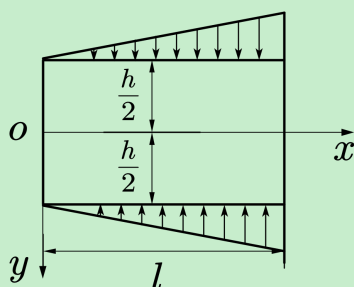
$$\begin{cases} \bar{f}_x = -(\sigma_x)_{x=0} = 0 \\ \bar{f}_y = -(\tau_{xy})_{x=0} = \frac{3F}{2h} \left(1 - \frac{4}{h^2}y^2\right) \end{cases}$$

右端：

$$\begin{cases} \bar{f}_x = -(\sigma_x)_{x=l} = -\frac{12Fl}{h^3}y \\ \bar{f}_y = -(\tau_{xy})_{x=l} = -\frac{3F}{2h} \left(1 - \frac{4}{h^2}y^2\right) \end{cases}$$



**例 3.2** 不计体力，应力函数  $\Phi = \frac{q}{6}x^3$  能解决什么样的受力问题？



解 按照逆解法:

(1). 代入相容方程, 最高次为3次, 故满足。

(2). 由 $\Phi$ 求出应力分量:

$$\begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = \frac{q}{l}x \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

(3). 边界条件:

上边界:

$$\bar{f}_y = -\sigma_y = -\frac{q}{l}x$$

下边界:

$$\bar{f}_y = -\sigma_y = \frac{q}{l}x$$

左边界:

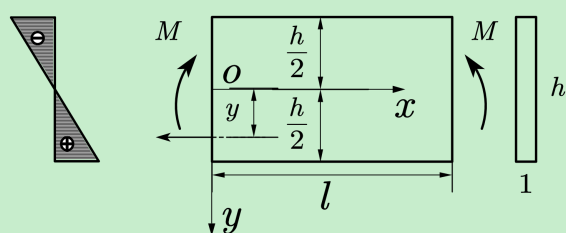
$$\begin{cases} \bar{f}_x = -(\sigma_x)_{x=0} = 0 \\ \bar{f}_y = -(\tau_{xy})_{x=0} = 0 \end{cases}$$

右边界:

$$\begin{cases} \bar{f}_x = -(\sigma_x)_{x=l} = 0 \\ \bar{f}_y = -(\tau_{xy})_{x=l} = 0 \end{cases}$$

因此在左右边界上无任何面力作用。

### 3.2 矩形梁的纯弯曲



应力函数:

$$\Phi = ay^3$$

相应的应力分量:

$$\sigma_x = 6ay, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$$

由圣维南原理可得:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x y dy = M \implies a = \frac{2M}{h^3}$$

于是应力函数又可以写为:

$$\sigma_x = \frac{M}{I}y, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$$

- (1). 弹性力学的解答和材料力学的解答完全一致。
- (2). 只有组成两端力偶的法面面力是线性分布, 在截面中处为零时, 本节所求的解才是完全精确的。如果梁端的面力是按照其他方式分布的, 解答是有误差的, 根据圣维南原理, 只有梁两端附近小区域有显著误差, 在远端误差可以忽略不计。

### 3.3 位移分量的求出

将应力分量代入物理方程, 得到应变分量, 再代入几何方程, 得到位移分量的微分方程组, 求解即可得到位移分量。其中结合位移限制条件可以完全确定出位移分量的表达式。

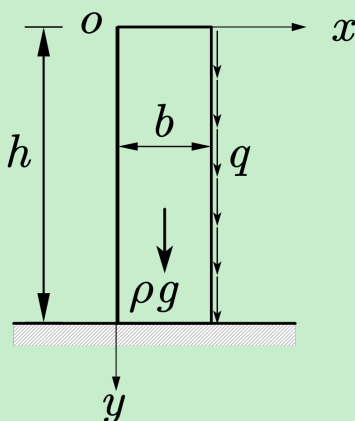
应力分量  $\xrightarrow{\text{物理方程}}$  应变分量  $\xrightarrow{\text{几何方程}}$  位移方程组  $\xrightarrow{\text{位移边界条件}}$  积分常数  $\rightarrow$  位移分量

### 3.4 半逆解法

求解步骤:

- (1). 根据弹性体的边界形状和受力情况, 假定部分或全部应力分量的函数形式。
- (2). 根据应力分量和压力函数之间的关系, 反推应力函数的函数形式。
- (3). 由相容方程的满足来确定应力函数中的待定项。
- (4). 根据应力分量和应力函数之间的关系, 求出全部应力分量的具体表达式。
- (5). 根据边界条件, 确定待定常数。

**例 3.3** 设有矩形截面的长竖柱, 密度为  $\rho$ , 在一边侧面上受有均布面力  $q$ , 如图所示, 试求应力分量。



解

(1). 假设某个应力分量的函数形式。

分析: 只有y向体力  $f_y = \rho g$  面力  $(\bar{f}_y)_{x=b} = q$

突破点: 假设在整个长柱内:  $\sigma_x = 0$

(2). 根据应力分量导出应力函数的表达式

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial y} = f(x) \rightarrow \Phi = yf(x) + f_1(x)$$

(3). 由相容方程求解出应力函数:

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \\ \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \\ \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = y \frac{d^4 f(x)}{dx^4} + \frac{d^4 f_1(x)}{dx^4} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} = 0 \Rightarrow f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx \\ \frac{d^4 f_1(x)}{dx^4} = 0 \Rightarrow f_1(x) = Dx^3 + Ex^2 \quad (\text{省略一!项}) \end{cases}$$

(4). 由应力函数求解应力分量

$$\Phi = y(Ax^3 + Bx^2 + Cx) + Dx^3 + Ex^2, f_x = 0; f_y = \rho g$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x x = 0 \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y y = y(6Ax + 2B) + 6Dx + 2E - \rho g y \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -(3Ax^2 + 2Bx + C) \end{cases}$$

(5). 由应力边界条件确定积分常数

(I). 左右边界 (主要边界):

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x x = 0 \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y y = y(6Ax + 2B) + 6Dx + 2E - \rho g y \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -(3Ax^2 + 2Bx + C) \end{cases}$$

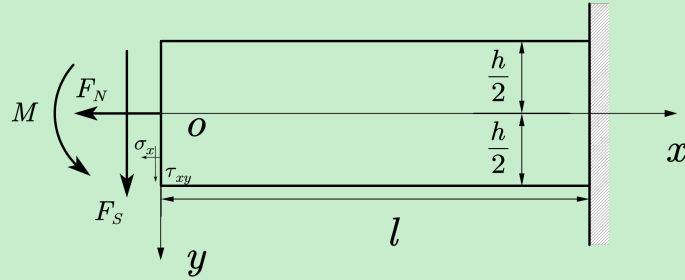
(II). 上边界 (次要边界), 应用圣维南原理:

$$\begin{cases} \int_0^b (\sigma_y)_{y=0} dx = 0 \\ \int_0^b (\sigma_y)_{y=0} dx = 0 \\ \int_0^b (\tau_{xy})_{y=0} dx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3Db + 2E = 0 \\ 2Db + E = 0 \\ Ab^2 + 6Bb + C = 0 \\ C = 0 \\ 3Ab^2 + 2Bb + C = -q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{q}{b^2} \\ B = \frac{q}{b} \\ C = D = E = 0 \end{cases}$$

最终得到应力分量表达式

$$\begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = \frac{2q}{b}y \left(1 - \frac{3}{b}\right) - \rho g y \\ \tau_{yx} = \frac{3q}{b^2}x^2 - \frac{2q}{b}x \end{cases}$$

**例 3.4** 设单位厚度的悬臂梁在左端受到集中力和力矩的作用，体力可以不计。如图示，设应力函数  $\Phi = Ax y + B y^2 + C y^3 + D x y^3$ ，求解应力分量。



**解**

(1). 校核相容方程  $\nabla^4 \Phi = 0$ ，满足。

(2). 求应力分量，无体力时

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 2B + 6Cy + 6Dxy \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -(A + 3Dy^2) \end{cases}$$

(3). 校核主要边界条件：

$$\begin{cases} (\sigma_y)_{y=\pm \frac{h}{2}} = 0 \text{ 满足} \\ (\tau_{xy})_{y=\pm \frac{h}{2}} \rightarrow A + \frac{3}{4}Dh^2 = 0 \end{cases}$$

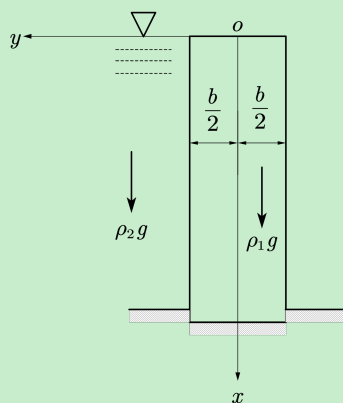
(4). 校核次要边界，应用圣维南原理

$$\begin{cases} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=0} dy = -F_N \rightarrow B = -\frac{F_N}{2h} \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y (\sigma_x)_{x=0} dy = -M \rightarrow C = -\frac{2M}{h^3} \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy})_{x=0} dy = -F_S \rightarrow \begin{cases} A + \frac{Dh^3}{4} = F_S \\ A + \frac{3Dh^2}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{3F_S}{2} \\ D = -\frac{2F_S}{h^3} \end{cases} \end{cases}$$

故得：

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{F_N}{h} - \frac{12M}{h^3}y - \frac{12F_S}{h^3}xy \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -\frac{3F_S}{2h} \left(1 - 4\frac{y^4}{h^2}\right) \end{cases}$$

**例 3.5** 挡承强的密度为  $\rho$ ，厚度为  $b$ ，如图示，水的密度为  $\rho_2$ ，试求应力分量。



解 用半逆解法解

- (1). 假设应力分量的应力函数形式, 因为在  $y = -\frac{b}{2}$  边界上  $\sigma_y = 0$ , 而在  $y = \frac{b}{2}$  边界上  $\sigma_y = -\rho_2 g x$ ; 所以可假设在区域内  $\sigma_y$  是按照一次式变化, 即

$$\sigma_y = x f(y)$$

- (2). 根据应力分量导出应力函数的表达式

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = x f(y) \implies \Phi = \frac{x^3}{6} f(y) + x f_1(y) + f_2(y)$$

- (3). 根据相容方程求解应力函数

$$\frac{x^3}{6} \frac{d^4 f(y)}{dy^4} + x \frac{d^4 f_1(y)}{dy^4} + \frac{d^4 f_2(y)}{dy^4} + 2x \frac{d^2 f(y)}{dy^2} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d^4 f}{dy^4} = 0 \implies f = Ay^3 + By^2 + Cy + D \\ \frac{d^4 f_1}{dy^4} + 2 \frac{d^2 f}{dy^2} = 0 \implies f_1 = -\frac{A}{10}y^5 - \frac{B}{6}y^4 + Gy^3 + Hy^2 + Iy \\ \frac{d^4 f_2}{dy^4} = 0 \implies f_2 = Ey^3 + Fy^2 \end{cases}$$

$$\Phi = \frac{1}{6}x^3 \left( Ay^3 + By^2 + Cy + D \right) + x \left( -\frac{A}{10}y^5 - \frac{B}{6}y^4 + Gy^3 + Hy^2 + Iy \right) + Ey^3 + Fy^2$$

- (4). 求出应力分力量

$$\begin{cases} \sigma_x = x^3 \left( Ay + \frac{B}{3} \right) + x \left( -2Ay^3 - 2By^2 + 6Gy^3 + 2H \right) + 6Ey + 2F - \rho_1 g x \\ \sigma_y = x \left( Ay^3 + By^2 + Cy + D \right) \\ \tau_{xy} = -\frac{x^2}{2} \left( 3Ay^2 + 2By + C \right) + \left( \frac{A}{2}y^4 + \frac{3B}{3}y^3 - 3Gy^2 - 2Hy - I \right) \end{cases}$$

- (5). 由应力边界条件确定积分常数主要边界 (左、右) 必须精确满足边界条件:

$$(\sigma_y)_{y=\frac{b}{2}} = -\rho_2 g x; (\sigma_y)_{y=-\frac{b}{2}} = 0; (\tau_{xy})_{y=\frac{b}{2}} = 0; (\tau_{xy})_{y=-\frac{b}{2}} = 0$$

得:

$$\begin{cases} A\frac{b^3}{8} + B\frac{b^2}{4} + C\frac{b}{2} + D = -\rho_2 x \\ -A\frac{b^4}{8} + B\frac{b^2}{4} - C\frac{b}{2} + D = 0 \\ A\frac{3}{4}b^2 \pm Bb + C = 0 \\ A\frac{b^4}{32} \pm B\frac{b^3}{12} - G\frac{3}{4}b^2 \pm Hb - I = 0 \end{cases}$$

解得:

$$\begin{cases} A = \frac{2}{b^3}\rho_2 g \\ B = 0 \\ C = -\frac{3}{2b}\rho_2 g \\ D = -\frac{1}{2}\rho_2 g \\ H = 0 \\ I = \frac{b}{16}\rho_2 g - \frac{3b^2}{4}G \end{cases}$$

次要边界 (柱的上端), 应用圣维南原理:

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (\sigma_x)_{x=0} dy = 0, \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (\sigma_x) y dy = 0, \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (\tau_{xy})_{x=0} dy = 0$$

解得:

$$\begin{cases} F = E = 0 \\ I = \frac{b}{80}\rho_2 g - \frac{b^4}{4}G \end{cases}$$

(6). 最终应力分量表达

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{2\rho_2 g}{b^3}x^3 y + \frac{3\rho_2 g}{5b}xy - \frac{4\rho_2 g}{b^3}xy^3 - \rho_1 gx \\ \sigma_y = \rho_2 gx \left( 2\frac{y^3}{b^3} - \frac{2y}{3b} - \frac{1}{2} \right) \\ \tau_{xy} = -\rho_2 gx^2 \left( 3\frac{y^2}{b^3} - \frac{3}{4b} \right) - \rho_2 gy \left( -\frac{y^3}{b^3} + \frac{3y}{10b} - \frac{b}{80y} \right) \end{cases}$$

例 3.6 已知:

(1).  $\Phi = Ay^2(a^2 - x^2) + Bxy + C(x^2 + y^2)$

(2).  $\Phi = Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^2 + Ey^4$

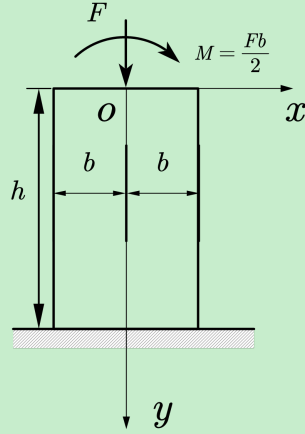
解

(1). 代入相容方程,  $A = 0$ 时才可能是应力函数。

(2). 代入相容方程, 必须满足  $3(A + E) + C = 0$ 时才可能是应力函数。

例 3.7 图中所示的矩形截面柱体, 在顶部受有集中  $F$  和力矩  $M = \frac{Fb}{2}$  的作用; 试用应力函数  $\Phi = Ax^3 + Bx^2$  求解图示问题的应力及位移。





解

(1). 校核相容方程  $\nabla^4 \Phi = 0$ , 满足。

(2). 求应力分量, 在无体力时得:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 6Ax + 2B \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases}$$

(3). 校核边界条件

左右边界 (主要边界): 应力条件应该准确满足

$$(\sigma_x)_{x=\pm b} = 0, (\tau_{xy})_{x=\pm b} = 0, \text{ 满足}$$

上边界 (次要边界): 圣维南原理

$$\begin{cases} \int_{-b}^b (\sigma_y)_{y=0} dx = -F \rightarrow B = -\frac{F}{4b} \\ \int_{-b}^b x (\sigma_y)_{y=0} dx = -\frac{Fb}{2} \rightarrow A = -\frac{F}{8b^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = -\frac{2F}{2b} \left(1 + \frac{3x}{2b}\right) \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

(4). 求应变分量

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y) = \frac{\mu F}{2Eb} \left(1 + \frac{3x}{2b}\right) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) = -\frac{F}{2Eb} \left(1 + \frac{3x}{2b}\right) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

(5). 求位移分量

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mu F}{2Eb} \left(1 + \frac{3x}{2b}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{F}{2Eb} \left(1 + \frac{3x}{2b}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{\mu F}{2Eb} \left(x + \frac{3x^2}{4b}\right) + f_1(y) \\ v = -\frac{F}{2Eb} \left(y + \frac{3xy}{2b}\right) + f_2(x) \end{cases}$$

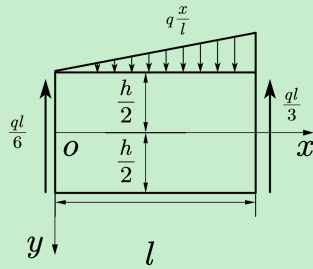
$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} = 0 \Rightarrow -\frac{df_1(y)}{dy} + \frac{3E}{4Eb^2} y = \frac{df_2(x)}{dx} = w$$

$$\begin{cases} f_1(y) = \frac{3F}{8Eb^2}y^2 - wy + u_0 \\ f_2(x) = wx + v_0 \end{cases}$$

(6). 由刚体约束条件确定待定常数

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=0; y=h} = 0 \\ (u)_{x=0; y=h} = 0 \\ (v)_{x=0; y=h} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = \frac{3F}{4Eb^2}h \\ u_0 = \frac{3F}{8Eb^2} \\ v_0 = \frac{F}{2Eb}h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{\mu F}{2Eb} \left(x + \frac{3x^2}{4b}\right) + \frac{3F}{8Eb^2}(h-y)^2 \\ v = \frac{F}{2Eb}(h-y) \left(1 + \frac{3x}{2b}\right) \end{cases}$$

**例 3.8** 图中矩形截面的简支梁上，作用有三角形分布荷载，试用应力函数  $\Phi = Ax^3y^3 + Bxy^5 + Cx^3y + Dxy^3 + Ex^3 + Fxy$  求解应力分量。



**解**

(1). 代入相容方程得：

$$72A + 120B = 0 \Rightarrow A = -\frac{5}{3}B$$

(2). 在无体力情况下求应力分量

$$\begin{cases} \sigma_x = -10Bx^3y + 20Bxy^3 + 6Dxy \\ \sigma_y = -10Bxy^3 + 6Cxy + 6Ex \\ \tau_{xy} = 15Bx^2y^2 - 5By^4 - 3Cx^2 - 3Dy^2 - F \end{cases}$$

(3). 考察边界条件

上下边界（主要边界）：

$$\begin{cases} (\sigma_y)_{y=\frac{h}{2}} = q\frac{x}{l} \\ (\sigma_y)_{y=-\frac{h}{2}} = 0 \\ (\tau_{xy})_{y=\pm\frac{h}{2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{5}{4}Bh^3 + 3Ch + 6E = \frac{q}{l} \\ \frac{5}{4}Bh^3 - 3Ch + 6E = 0 \\ 3C - \frac{15}{4}Bh^2 = 0 \\ \frac{5}{16}Bh^4 + \frac{3}{4}Dh^2 + F = 0 \end{cases}$$

左右边界（次要边界）：

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy})_{x=0} dy = \frac{ql}{6} \Rightarrow B\frac{h^5}{16} + D\frac{h^4}{4} + Fh = -\frac{ql}{6}$$

联立方程求解得：

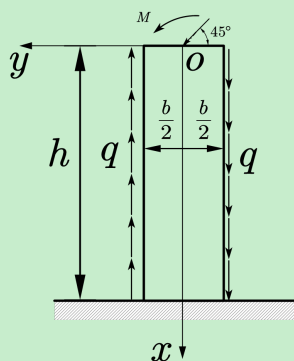
$$\begin{cases} A = -\frac{q}{3lh^3} \\ B = \frac{q}{5lh^3} \\ C = \frac{q}{4lh} \\ D = q\left(\frac{l}{3h^3} - \frac{1}{10lh}\right) \\ E = \frac{q}{12l} \\ F = q\left(\frac{h}{80l} - \frac{l}{4h}\right) \end{cases}$$

解得应力分量为

$$\begin{cases} \sigma_x = 2q\frac{xy}{lh}\left(\frac{l^2-x^2}{h^2} + 2\frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{10}\right) \\ \sigma_y = -q\frac{x}{2l}\left(1 - 3\frac{y^2}{h^2} + 4\frac{y^3}{h^3}\right) \\ \tau_{xy} = \frac{q}{4}\left(1 - 4\frac{y^2}{h^2}\right)\left(\frac{l}{h} - 3\frac{x^2}{lh} - \frac{h}{20l} + \frac{y^2}{lh}\right) \end{cases}$$

代入右边界也满足。

**例 3.9** 矩形截面的柱体受到顶部的集中力为 $\sqrt{2}F$ 和力矩 $M$ 的作用，不计体力，试用应力函数 $\Phi = Ay^2 + Bxy + Cxy^3 + Dy^3$ ，求解其应力分量。



**解**

- (1). 将 $\Phi$ 代入相容方程，满足。
- (2). 在无体力情况下，求解应力分量

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 2A + 6Cxy + 6Dy \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -(B + 3Cy^2) \end{cases}$$

- (3). 考察边界条件

左右边界（主要边界）：

$$(\tau_{xy})_{y=\frac{b}{2}} = -q \implies B + \frac{3}{4}Cb^2 = q$$

上边界（次要边界）：

$$\begin{cases} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (\sigma_x)_{x=0} dy = -F \\ \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y (\sigma_x)_{x=0} dy = -M \\ \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (\tau_{xy})_{x=0} dy = -F \end{cases} \implies \begin{cases} Ab = -F \\ \frac{Db^3}{2} = -F \\ B + \frac{1}{4}Cb^2 = \frac{F}{b} \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} A = -\frac{F}{b} \\ B = \frac{3F-qb}{2b} \\ C = \frac{2qb-2F}{b^3} \\ D = -\frac{2M}{b^3} \end{cases}$$

最后得到应力分量

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{12(qb-F)}{b^3}xy - \frac{2My}{b^3} \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -\left(\frac{6(qb-F)}{b^3}y^2 + \frac{3F-qb}{2b}\right) \end{cases}$$

## 4 平面问题的极坐标解答

### 4.1 极坐标中的平衡微分方程

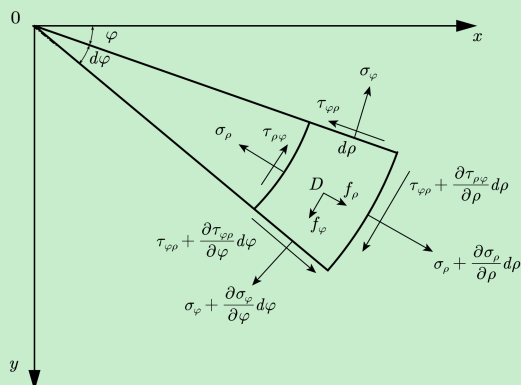


图 1

#### 4.1.1 极坐标中的平衡微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{\rho} + f_\rho = 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{2\tau_{\rho\varphi}}{\rho} + f_\varphi = 0 \end{cases} \quad (13)$$

### 4.2 极坐标中的几何方程和物理方程

#### 4.2.1 极坐标中的几何方程

$$\begin{cases} \varepsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \\ \varepsilon_\varphi = \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \\ \gamma_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} \end{cases} \quad (14)$$

#### 4.2.2 极坐标中的物理方程

$$\begin{cases} \varepsilon_\rho = \frac{1}{E} (\sigma_\rho - \mu \sigma_\varphi) \\ \varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \mu \sigma_\rho) \\ \gamma_{\rho\varphi} = \frac{1}{G} \tau_{\rho\varphi} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{\rho\varphi} \end{cases} \quad (15)$$

平面应变的情况下，需将上式中的 $E$ 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$ ， $\mu$ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 。

## 4.3 坐标变换

### 4.3.1 位移分量的坐标变换

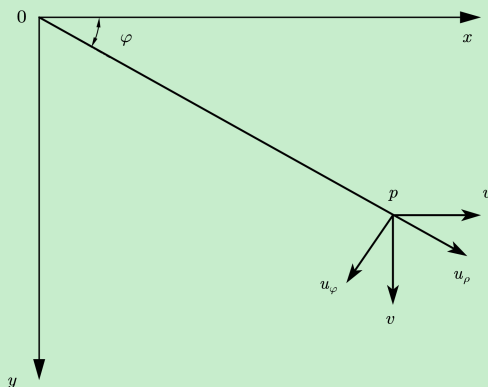


图 2

$$\begin{cases} u_\rho = u \cos \varphi + v \sin \varphi \\ u_\varphi = -u \sin \varphi + v \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \end{pmatrix} \quad (16)$$

### 4.3.2 应力分量的坐标变换

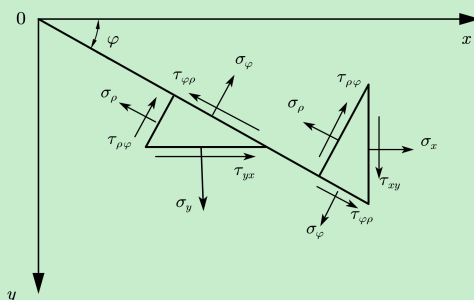


图 3

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_\rho \cos^2 \varphi + \sigma_\varphi \sin^2 \varphi - 2\tau_{\rho\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \\ \sigma_y = \sigma_\rho \sin^2 \varphi + \sigma_\varphi \cos^2 \varphi + 2\tau_{\rho\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \\ \tau_{xy} = \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{2} \sin 2\varphi + \tau_{\rho\varphi} \cos 2\varphi \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\varphi}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{2} \cos 2\varphi - \tau_{\rho\varphi} \sin 2\varphi \\ \sigma_y = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\varphi}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{2} \cos 2\varphi - \tau_{\rho\varphi} \sin 2\varphi \\ \tau_{xy} = \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{2} \sin 2\varphi + \tau_{\rho\varphi} \cos 2\varphi \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_\rho & \tau_{\rho\varphi} \\ \tau_{\rho\varphi} & \sigma_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

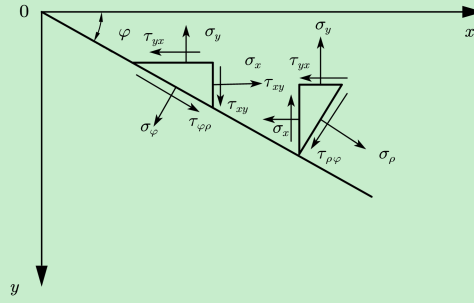


图 4

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ \sigma_\varphi = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ \tau_{\rho\varphi} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau_{\rho\varphi} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_\rho & \tau_{\rho\varphi} \\ \tau_{\rho\varphi} & \sigma_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (22)$$

#### 4.4 极坐标中的应力函数与相容方程

当  $f_\rho = f_\varphi = 0$  时:

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \\ \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} \\ \tau_{\rho\varphi} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \end{cases} \quad (23)$$

#### 4.4.1 相容方程

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 \Phi = 0 \quad (24)$$

#### 4.5 轴对称应力和相容的位移

所谓轴对称问题，是指物体几何形状或某物理量是绕某一轴对称的，凡通过此轴的任何面均为对称面。如果该物体所受外部荷载也对称于该轴，那么相应所产生的应力也必对称该轴。

令  $\Phi = \Phi(\rho)$

$$\sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{d\Phi}{d\rho}, \sigma_\varphi = \frac{d^2\Phi}{d\rho^2}, \tau_{\rho\varphi} = 0 \quad (25)$$

$$\left( \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^2 \Phi = 0 \quad (26)$$

即

$$\Phi = A \ln \rho + B \rho^2 \ln \rho + C \rho^2 + D \quad (27)$$

应力分量

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{A}{\rho^2} + B(1 + 2 \ln \rho) + 2C \\ \sigma_\varphi = -\frac{A}{\rho^2} + B(3 + 2 \ln \rho) + 2C \\ \tau_{\rho\varphi} = 0 \end{cases} \quad (28)$$

代入物理方程和几何方程可得位移分量

$$\begin{cases} u_\rho = \frac{1}{E} \left[ -(1 + \mu) \frac{A}{\rho} + 2(1 - \mu) B \rho (\ln \rho - 1) + (1 - 3\mu) B \rho + 2(1 - \mu) C \rho \right] + I \cos \varphi + K \sin \varphi \\ u_\varphi = \frac{4B\rho\varphi}{E} + H\rho - I \sin \varphi + K \cos \varphi \end{cases} \quad (29)$$

- (1). 在轴对称应力条件下，应力、应变和位移的通解，适用于任何轴对称应力问题。
- (2). 在轴对称应力条件下，应变也是轴对称的，但位移不一定是轴对称的。
- (3). 实现轴对称应力的条件是：物体形状、体力和面力应是轴对称的。
- (4). 轴对称应力及对应的位移的通解已满足相容方程，它们还需满足边界条件及多连体中的位移单值条件，并由此求出系数A、B、C。

注 欧拉方程：

$$x^n y^{(n)} + P_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} x y' + P_n y = 0$$

特征方程为：

$$[k(k-1)\cdots(k-n+1) + P_1[k(k-1)\cdots(k-n+2)] + \cdots + P_{n-1}k + P_n] = 0$$



关于 $K$ 的 $n$ 次代数方程, 可解得 $n$ 个特征根 $k_1, k_2, \dots, k_n$

(1). 当它们是互不相等的实根时, 通解具有幂函数的形式

$$y = C_1 x^{k_1} + C_2 x^{k_2} + \dots + C_n x^{k_n}$$

(2). 每当出现重根时, 每多一重根, 就多乘一个 $\ln x$

如: 当 $k_1$ 为 $m$  ( $m < n$ )重根时, 通解为

$$y = C_1 x^{k_1} + C_2 x^{k_2} \ln x + \dots + C_m x^{k_1} \ln^{m-1} x + C_{m+1} x^{k_{m+1}} + \dots + C_n x^{k_n}$$

(3). 出现共轭复根时, 则虚部是三角函数因子

如: 当 $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , 通解为

$$y = C_1 x^\alpha \cos(\beta \ln x) + C_2 x^\alpha \sin(\beta \ln x) + C_3 x^{k_3} + \dots + C_n x^{k_n}$$

(4). 当出现复重根, 则实部要多乘因子 $\ln x$

如:  $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ 为 $m$  ( $m < \frac{n}{2}$ )重共轭复根时, 通解为

$$\begin{aligned} y = & [C_1 x^\alpha + C_2 x^\alpha \ln x + \dots + C_m x^\alpha \ln^{m-1} x] \cos(\beta \ln x) + \\ & [C_{m+1} x^\alpha + C_{m+2} x^\alpha \ln x + \dots + C_{2m} x^\alpha \ln^{m-1} x] \sin(\beta \ln x) + \\ & C_{2m+1} x^{k_{2m+1}} + \dots + C_n x^{k_n} \end{aligned}$$

**例 4.1** 试求解平面轴对称应力问题的相容方程

$$\rho^4 \Phi^{(4)} + 2\rho^3 \Phi^{(3)} - \rho^2 \Phi'' + \rho \Phi' = 0$$

**解** 特征方程:

$$k(k-1)(k-2)(k-3) + 2k(k-1)(k-2) - k(k-1) + k = 0$$

解得:

$$k_{1,2} = 0, k_{3,4} = 2$$

得:

$$\Phi = A \ln \rho + B \rho^2 \ln \rho + C \rho^2 + D$$

**例 4.2** 试求解如下的常微分方程

$$\rho^4 f^{(4)}(\rho) + 2\rho^3 f'''(\rho) - 9\rho^2 f''(\rho) + 9\rho f'(\rho) = 0$$

**解** 特征方程:

$$k(k-1)(k-2)(k-3) + 2k(k-1)(k-2) - 9k(k-1) + 9k = 0$$

解得:

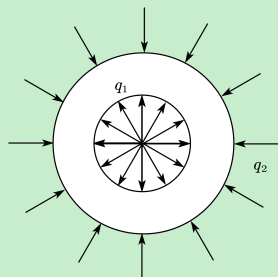
$$k_1 = 4, k_2 = 2, k_3 = 0, k_4 = -2$$

得:

$$f(\rho) = A \rho^4 + B \rho^2 + C + D \rho^{-2}$$

## 4.6 圆环或圆筒受均布压力

**例 4.3** 设有圆环（平面应力问题）或圆筒（平面应变问题）受均匀内压力 $q_1$ ，和外压力 $q_2$ 作用；内半径为 $r$ ；外半径为 $R$ 。试求应力分量；位移分量。



**解** 轴对称应力问题的应力通解：

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{A}{\rho^2} + B(1 + 2 \ln \rho) + 2C \\ \sigma_\varphi = -\frac{A}{\rho^2} + B(3 + 2 + \ln \rho) + 2C \\ \tau_{\rho\varphi} = 0 \end{cases}$$

应力边界条件：

$$\begin{cases} (\sigma_\rho)_{\rho=r} = -q_1 \\ (\sigma_\rho)_{\rho=R} = -q_2 \\ (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=r} = (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=R} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C = -q_1 \\ \frac{A}{R^2} + B(1 + 2 \ln R) + 2C = -q_2 \end{cases}$$

圆环或圆筒具有贯穿孔洞，为多连体，故需进一步考虑位移单值条件：由

$$u_\varphi = \frac{4B\rho\varphi}{E} + H\rho - I \sin \varphi + K \cos \varphi$$

考虑 $(\rho, \varphi)$ 和 $(\rho, \varphi + 2\pi)$ 同一点只能有一确定的位移，故 $B = 0$ 。则：

$$\begin{cases} A = \frac{r^2 R^2 (q_2 - q_1)}{R^2 - r^2} \\ C = \frac{q_1 r^2 - q_2 R^2}{R^2 - r^2} \end{cases}$$

得(拉梅的解答)：

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{\frac{R^2}{\rho^2} - 1}{\frac{R^2}{r^2} - 1} q_1 - \frac{1 - \frac{r^2}{\rho^2}}{1 - \frac{r^2}{R^2}} q_2 \\ \sigma_\varphi = \frac{\frac{R^2}{\rho^2} + 1}{\frac{R^2}{r^2} - 1} q_1 - \frac{1 + \frac{r^2}{\rho^2}}{1 - \frac{r^2}{R^2}} q_2 \end{cases}$$

**例 4.4** 轴对称应力条件下的应力和位移的通解，可以应用于各种应力边界条件和位移边界条件的情形，试考虑下列圆环或圆筒的问题应如何求解

(1). 内边界受均布压力 $q_1$ 作用，而外边界为固定边。

- (2). 外边界受均布压力 $q_2$ 作用, 而内边界为固定边.  
 (3). 外边界受到强迫的均匀位移 $u_\rho = -\Delta$ , 而内边界为自由边 (如车辆的轮毂的作用).  
 (4). 内边界受到强迫的均匀位移 $u_\rho = \Delta$ , 而外边界为自由边.

解

(1). 应力边界条件:

$$\begin{cases} (\sigma_\rho)_{\rho=r} = -q_1 \\ (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=r} = 0 \end{cases} \implies \frac{A}{r^2} + 2C = -q_1$$

位移边界条件:

$$\begin{cases} (u_\rho)_{\rho=R} = 0 \\ (u_\varphi)_{\rho=R} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} H = I = K = 0 \\ -(1+\mu)\frac{A}{R} + 2(1-\mu)CR = 0 \end{cases}$$

(2). 应力边界条件:

$$\begin{cases} (\sigma_\rho)_{\rho=R} = -q_2 \\ (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=R} = 0 \end{cases} \implies \frac{A}{R^2} + 2C = -q_2$$

位移边界条件:

$$\begin{cases} (u_\rho)_{\rho=r} = 0 \\ (u_\varphi)_{\rho=r} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} H = I = K = 0 \\ -(1+\mu)\frac{A}{r} + 2(1-\mu)Cr = 0 \end{cases}$$

(3). 应力边界条件:

$$\begin{cases} (\sigma_\rho)_{\rho=r} = 0 \\ (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=r} = 0 \end{cases} \implies \frac{A}{r^2} + 2C = 0$$

位移边界条件:

$$\begin{cases} (u_\rho)_{\rho=R} = -\Delta \\ (u_\varphi)_{\rho=R} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} H = I = K = 0 \\ -(1+\mu)\frac{A}{R} + 2(1-\mu)CR = -E\Delta \end{cases}$$

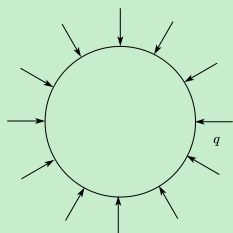
(4). 应力边界条件:

$$\begin{cases} (\sigma_\rho)_{\rho=R} = 0 \\ (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=R} = 0 \end{cases} \implies \frac{A}{R^2} + 2C = 0$$

位移边界条件:

$$\begin{cases} (u_\rho)_{\rho=r} = -\Delta \\ (u_\varphi)_{\rho=r} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} H = I = K = 0 \\ -(1+\mu)\frac{A}{r} + 2(1-\mu)Cr = -E\Delta \end{cases}$$

**例 4.5** 实心圆盘在 $\rho = r$ 的圆周上受有均布压力 $q$ 的作用, 试求其应力分量。



**解** 平面轴对称应用问题，应力通解为：

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{A}{\rho^2} + B(1 + 2 \ln \rho) + 2C \\ \sigma_\varphi = -\frac{A}{\rho^2} + B(3 + 2 \ln \rho) + 2C \\ \tau_{\rho\varphi} = 0 \end{cases}$$

应力的有界性，圆盘中心处（即  $\rho = 0$ ）处的应力值应当有界，不能是无限大的故  $A = B = 0$

应力边界条件：

$$\begin{cases} (\sigma_\rho)_{\rho=r} = -q \\ (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=r} = 0 \end{cases} \Rightarrow C = -\frac{q}{2}$$

故实心圆盘的应力解答：

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \sigma_\varphi = -q \\ \tau_{\rho\varphi} = 0 \end{cases}$$

## 4.7 压力隧洞

问题描述：圆筒埋在无限大弹性体中，受有均布内压力  $q$ ，设圆筒和无限大弹性体的弹性常数分别为  $E, \mu$  和  $E', \mu'$

问题本质：本题是两个圆筒的接触问题，两个圆筒均为轴对称问题（平面应变问题），因为不符合均匀性假定，必须分别采用两个轴对称解答。

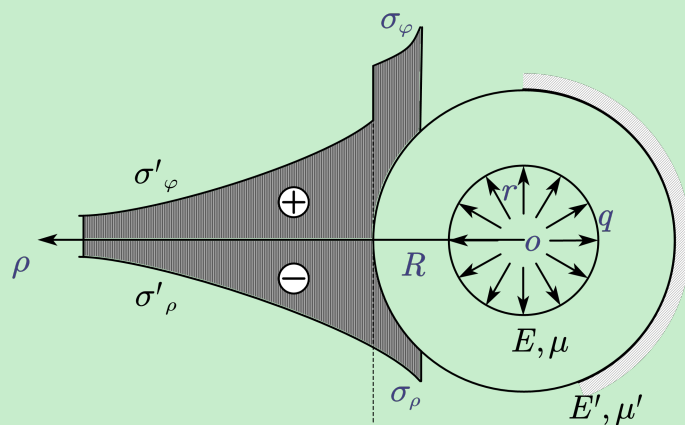


图 5:  $n < 1$

不管是内圆筒还是外弹性体，都有贯穿孔道，属于多连体，故需要考虑位移单值条件有  $B = 0, B' = 0$ 。

内圆筒应力表达式：

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{A}{\rho^2} + 2C \\ \sigma_\varphi = -\frac{A}{\rho^2} + 2C \end{cases}$$

无限大弹性体应力表达式：

$$\begin{cases} \sigma'_\rho = \frac{A'}{\rho^2} + 2C' \\ \sigma'_\varphi = -\frac{A'}{\rho^2} + 2C' \end{cases}$$

根据圣维南原理，离内圆筒的无穷远处的应力应为零。并且圆筒和无限大弹性体的接触面上的应力应当相等则边界条件为：

$$\begin{cases} (\sigma_\rho)_{\rho=r} = -q \\ (\sigma'_\rho)_{\rho \rightarrow \infty} = 0 \\ (\sigma_\rho)_{\rho=R} = (\sigma'_\rho)_{\rho=R} \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} \frac{A}{r^2} + 2C = -q \\ C' = 0 \\ \frac{A}{R^2} + 2C = \frac{A'}{R^2} + 2C' \end{cases}$$

在接触面上圆筒和无限大弹性体应当具有相同的位移，得：

$$(u_\rho)_{\rho=R} = (u'_\rho)_{\rho=R}$$

即：

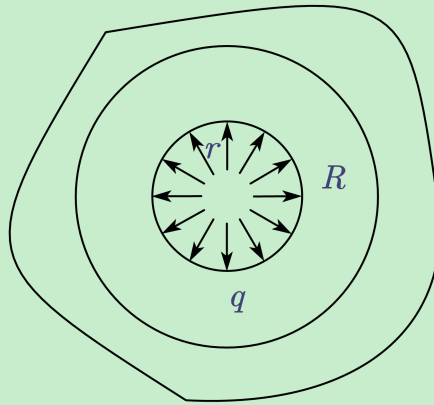
$$\frac{1+\mu}{E} \left[ 2(1-2\mu)CR - \frac{A}{R} \right] + I \cos \varphi + K \sin \varphi = \frac{1+\mu'}{E'} \left[ 2(1-2\mu')C'R - \frac{A'}{R} \right] + I' \cos \varphi + K' \sin \varphi$$

因为在接触面的任意一点都要满足上式，则有：

$$\frac{1+\mu}{E} \left[ 2(1-2\mu)CR - \frac{A}{R} \right] = \frac{1+\mu'}{E'} \left[ 2(1-2\mu')C'R - \frac{A'}{R} \right]$$

令  $n = \frac{E'(1+\mu)}{E(1+\mu')}$ ：综合方程，联立可得：

$$\begin{cases} \sigma_\rho = -q \frac{[1+(1-2\mu)n]\frac{R^2}{\rho^2} - (1-n)}{[1+(1-2\mu)n]\frac{R^2}{r^2} - (1-n)} \\ \sigma_\rho = q \frac{[1+(1-2\mu)n]\frac{R^2}{\rho^2} + (1-n)}{[1+(1-2\mu)n]\frac{R^2}{r^2} - (1-n)} \\ \sigma'_\rho = -\sigma'_\varphi = -q \frac{2(1-\mu)n\frac{R^2}{\rho^2}}{[1+(1-2\mu)n]\frac{R^2}{r^2} - (1-n)} \end{cases} \quad (30)$$



**例 4.6** 设有一刚体，具有半径 $R$ 圆柱形孔道，孔道内放置外半径为 $R$ ，内半径为 $r$ 的圆筒，圆筒受均布压力 $q$ ，试求出圆筒的应力。

**解** 圆筒轴对称应变问题的通解为：

$$\begin{cases} \sigma_{\rho} = \frac{A}{\rho^2} + 2C \\ \sigma_{\varphi} = -\frac{A}{\rho^2} + 2C \\ \tau_{\rho\varphi} = 0 \end{cases}$$

位移通解：

$$\begin{cases} u_{\rho} = \frac{1+\mu}{E} \left[ -\frac{A}{\rho} + 2(1-2\mu)C\rho \right] + I \cos \varphi + K \sin \varphi \\ u_{\varphi} = H\rho - I \sin \varphi + K \cos \varphi \end{cases}$$

应力边界条件：

$$(\sigma_{\rho})_{\rho=r} = -q$$

刚体是不可形变的，它能起到限制圆筒外边界径向位移的作用，因此位移边界条件：

$$(u_{\rho})_{\rho=R} = 0$$

解得：

$$\begin{cases} A = \frac{-q}{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{1-2\mu} \frac{1}{R^2}} \\ C = \frac{-q}{2R^2 \left( \frac{1-2\mu}{r^2} + \frac{1}{R^2} \right)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{\rho} = \frac{\frac{1-2\mu}{\rho^2} + \frac{1}{R^2}}{\frac{1-2\mu}{r^2} + \frac{1}{R^2}} q \\ \sigma_{\varphi} = \frac{\frac{1-2\mu}{\rho^2} - \frac{1}{R^2}}{\frac{1-2\mu}{r^2} + \frac{1}{R^2}} q \end{cases}$$

**注** 本题不能按照压力隧洞的方式求解，因为在外部与圆筒相接触的是一个刚体，而刚体是不能引用弹性力学的解答

## 4.8 曲梁的纯弯曲

### 4.8.1 问题及其描述

矩形截面曲梁：内半径为 $a$ ,外半径为 $b$ ，在两端受有大小相等而转向相反的力偶 $M$ 作用（梁的厚度为一个单位）： $o$ 为曲梁的曲率转中心，两端面间极角为 $\beta$ ，

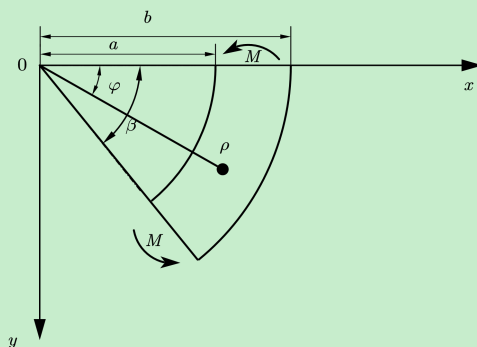


图 6

梁的全部边界都没有剪力。

在梁的内外两面，边界要求： $(\sigma_\rho)_{\rho=a} = 0, (\sigma_\rho)_{\rho=b} = 0$

代入应力通解得：

$$\begin{cases} \frac{A}{a^2} + B(1 + \ln 2a) + 2C = 0 \\ \frac{A}{b^2} + B(1 + \ln 2b) + 2C = 0 \end{cases}$$

根据圣维南原理，环向正应力 $\sigma_\varphi$ 的主矢量应当为零，并合成弯矩 $M$ ，因此要求：

$$\int_a^b \sigma_\varphi d\rho = 0, \int_a^b \rho \sigma_\varphi d\rho = M$$

可求得：

$$-(\Phi)_a^b = M$$

即

$$-\left(A \ln \frac{b}{a} + Bb^2 \ln b + Cb^2 + D\right) + \left(A \ln a + Ba^2 \ln a + Ca^2 + D\right) = -M$$

令 $N = \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)^2 - 4\frac{b^2}{a^2} \left(\ln \frac{b}{a}\right)^2$ ：可得：

$$\begin{cases} A = \frac{4M}{N} \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{b}{a} \\ B = \frac{2M}{a^2 N} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) \\ C = -\frac{M}{a^2 N} \left[\frac{b^2}{a^2} - 1 + 2\left(\frac{b^2}{a^2} \ln b - \ln a\right)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_\rho = -\frac{4M}{Na^2} \left(\frac{b^2}{a^2} \ln \frac{b}{\rho} + \ln \frac{\rho}{a} - \frac{b^2}{\rho^2} \ln \frac{b}{a}\right) \\ \sigma_\varphi = \frac{4M}{Na^2} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 - \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{b}{\rho} - \ln \frac{\rho}{a} - \frac{b^2}{\rho^2} \ln \frac{b}{a}\right) \\ \tau_{\rho\varphi} = 0 \end{cases} \quad (31)$$

注

- (1).  $\rho = a, \sigma_\varphi$  取得最大值。
- (2). 中性轴 ( $\sigma_\varphi = 0$ ) 距内侧纤维较近, 离外侧较远, 中心轴不在过截面形心。
- (3). 与材料力学比较,  $\sigma_\varphi$  关于截面不再成双曲线分布, 但曲率不大时这种情况影响较小, 挤压应力  $\sigma_\rho$  实际不为零。

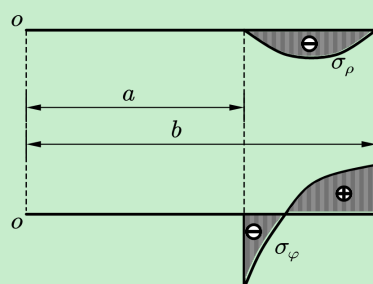
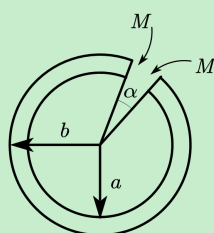


图 7

**例 4.7** 图示为带有一微小张角  $\alpha$  缺口的圆环, 若将此圆环焊成一整环, 试求此时圆环的内力矩  $M$ 。



**解** 要使该圆环焊成一整环, 需在两端加上一对平衡力矩  $M$ , 使其产生环向位移  $\delta = \rho\alpha$  由两端受力偶作用时环向位移计算式

$$u_\varphi = \frac{4B}{E} \rho \varphi + H \rho - I \sin \varphi + K \cos \varphi$$

可得:

$$u_\varphi|_{\varphi=2\pi} - u_\varphi|_{\varphi=0} = \frac{8B\rho\pi}{E} = \delta = \rho\alpha \Rightarrow B = \frac{E\alpha}{8\pi}$$

代入  $B$  的计算式

$$B = \frac{2M}{a^2 N} \left( \frac{b^2}{a^2} - 1 \right)$$

得:

$$M = \frac{E\alpha a^4 N}{16\pi (b^2 - a^2)}$$

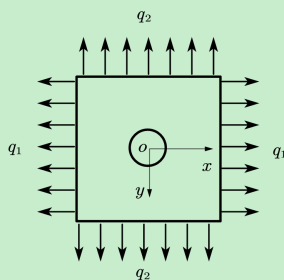


## 4.9 圆孔的孔口应力集中

背景：工程结构中常开设孔口，最简单的为圆孔，本节研究“小圆孔孔口应力集中问题”

小孔的条件：

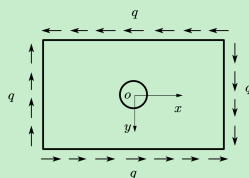
- (1). 孔口尺寸 $\ll$ 弹性体尺寸,孔口引起的应力扰动局限于小范围内。
- (2). 孔边距边界较远 ( $>1.5$ 倍孔口尺寸)，孔口与边界互不干扰。



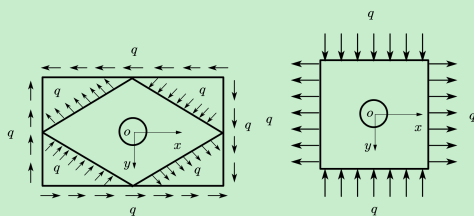
应力分量：

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{q_1+q_2}{2} \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right) + \frac{q_1-q_2}{2} \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right) \left(1 - 3\frac{a^2}{\rho^2}\right) \cos 2\varphi \\ \sigma_\varphi = \frac{q_1+q_2}{2} \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2}\right) - \frac{q_1-q_2}{2} \left(1 + 3\frac{a^2}{\rho^2}\right) \cos 2\varphi \\ \tau_{\varphi\rho} = -\frac{q_1-q_2}{2} \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right) \left(1 + 3\frac{a^2}{\rho^2}\right) \sin 2\varphi \end{cases}$$

**例 4.8** 在薄板距边界较远的某一点处，应力分量为 $\sigma_x = \sigma_y = 0, \tau_{xy} = q$ 如该处有一小圆孔，试求孔边的最大正应力。



**解** 经过等效转换可将问题转化为下问题



则

$$\begin{cases} \sigma_\rho = -q \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right) \left(1 - 3\frac{a^2}{\rho^2}\right) \cos 2\varphi \\ \sigma_\varphi = -q \left(1 + 3\frac{a^2}{\rho^2}\right) \cos 2\varphi \\ \tau_{\rho\varphi} = -a \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right) \left(1 + 3\frac{a^2}{\rho^2}\right) \sin 2\varphi \end{cases}$$

将 $\rho = a$ 代入得

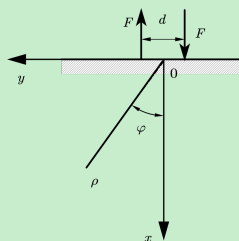
$$\begin{cases} \sigma_\rho = 0 \\ \sigma_\varphi = -4q \cos 2\varphi \\ \tau_{\rho\varphi} = 0 \end{cases}$$

则孔边最大应力为

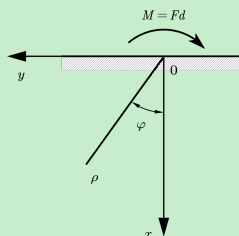
$$\begin{cases} \sigma_\rho = 0 \\ \sigma_\varphi = \pm 4q \\ \tau_{\rho\varphi} = 0 \end{cases}$$

## 4.10 楔形体问题-受集中力 $F$ 作用

**例 4.9** 如图所示，半无限平面体在边界上受有两条等值反向间距为 $d$ 的等中力作用，单位宽度上集中力的值为 $F$ ,设间距 $d$ 很小，试求其应力分量。



**解** 原问题可以转化为



$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{2M \sin 2\varphi}{(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \rho^2} \\ \sigma_\varphi = 0 \\ \tau_{\rho\varphi} = -\frac{M(\cos 2\varphi - \cos \alpha)}{(\sin 2\alpha - \alpha \cos \alpha) \rho^2} \end{cases}$$

$\alpha = \pi$ 代入:

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{2M \sin 2\varphi}{\pi \rho^2} \\ \sigma_\varphi = 0 \\ \tau_{\rho\varphi} = -\frac{M(\cos 2\varphi + 1)}{\pi \rho^2} \end{cases}$$