

弹性力学

付佳豪

October 3, 2019



1 平面问题的直角坐标解答

1.1 逆解法

1.1.1 含义

2 平面问题的极坐标解答

2.1 极坐标中的平衡微分方程

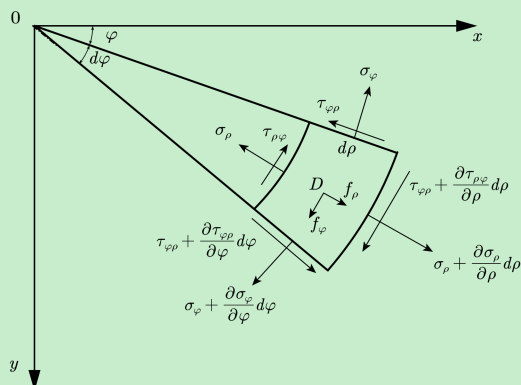


图 1

2.1.1 极坐标中的平衡微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{\rho} + f_\rho = 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{2\tau_{\rho\varphi}}{\rho} + f_\varphi = 0 \end{cases} \quad (1)$$

2.2 极坐标中的几何方程和物理方程

2.2.1 极坐标中的几何方程

$$\begin{cases} \varepsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \\ \varepsilon_\varphi = \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \\ \gamma_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} \end{cases} \quad (2)$$

2.2.2 极坐标中的物理方程

$$\begin{cases} \varepsilon_\rho = \frac{1}{E} (\sigma_\rho - \mu \sigma_\varphi) \\ \varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \mu \sigma_\rho) \\ \gamma_{\rho\varphi} = \frac{1}{G} \tau_{\rho\varphi} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{\rho\varphi} \end{cases} \quad (3)$$

平面应变的情况下，需将上式中的 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$ ， μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 。

2.3 坐标变换

2.3.1 位移分量的坐标变换

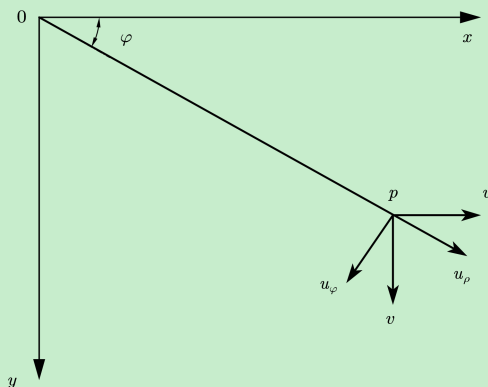


图 2

$$\begin{cases} u_\rho = u \cos \varphi + v \sin \varphi \\ u_\varphi = -u \sin \varphi + v \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \end{pmatrix} \quad (4)$$

2.3.2 应力分量的坐标变换

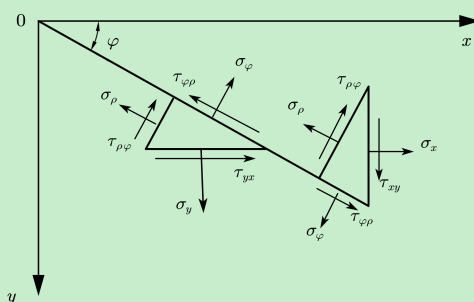


图 3

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_\rho \cos^2 \varphi + \sigma_\varphi \sin^2 \varphi - 2\tau_{\rho\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \\ \sigma_y = \sigma_\rho \sin^2 \varphi + \sigma_\varphi \cos^2 \varphi + 2\tau_{\rho\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \\ \tau_{xy} = \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{2} \sin 2\varphi + \tau_{\rho\varphi} \cos 2\varphi \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\varphi}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{2} \cos 2\varphi - \tau_{\rho\varphi} \sin 2\varphi \\ \sigma_y = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\varphi}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{2} \cos 2\varphi - \tau_{\rho\varphi} \sin 2\varphi \\ \tau_{xy} = \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{2} \sin 2\varphi + \tau_{\rho\varphi} \cos 2\varphi \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_\rho & \tau_{\rho\varphi} \\ \tau_{\rho\varphi} & \sigma_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

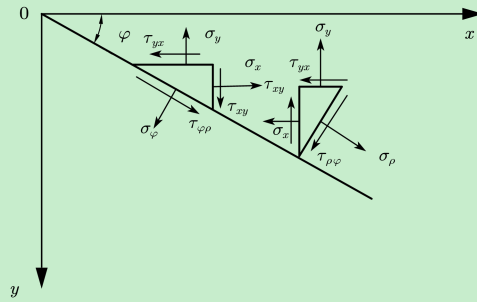


图 4

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ \sigma_\varphi = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ \tau_{\rho\varphi} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau_{\rho\varphi} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_\rho & \tau_{\rho\varphi} \\ \tau_{\rho\varphi} & \sigma_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (10)$$

2.4 极坐标中的应力函数与相容方程

当 $f_\rho = f_\varphi = 0$ 时:

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \\ \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} \\ \tau_{\rho\varphi} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \end{cases} \quad (11)$$

2.4.1 相容方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 \Phi = 0 \quad (12)$$

2.5 轴对称应力和相容的位移

所谓轴对称问题，是指物体几何形状或某物理量是绕某一轴对称的，凡通过此轴的任何面均为对称面。如果该物体所受外部荷载也对称于该轴，那么相应所产生的应力也必对称该轴。

令 $\Phi = \Phi(\rho)$

$$\sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{d\Phi}{d\rho}, \sigma_\varphi = \frac{d^2\Phi}{d\rho^2}, \tau_{\rho\varphi} = 0 \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \Phi = 0 \quad (14)$$

即

$$\Phi = A \ln \rho + B \rho^2 \ln \rho + C \rho^2 + D \quad (15)$$

应力分量

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{A}{\rho^2} + B(1 + 2 \ln \rho) + 2C \\ \sigma_\varphi = -\frac{A}{\rho^2} + B(3 + 2 \ln \rho) + 2C \\ \tau_{\rho\varphi} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

代入物理方程和几何方程可得位移分量

$$\begin{cases} u_\rho = \frac{1}{E} \left[-(1 + \mu) \frac{A}{\rho} + 2(1 - \mu) B \rho (\ln \rho - 1) + (1 - 3\mu) B \rho + 2(1 - \mu) C \rho \right] + I \cos \varphi + K \sin \varphi \\ u_\varphi = \frac{4B\rho\varphi}{E} + H\rho - I \sin \varphi + K \cos \varphi \end{cases} \quad (17)$$

- (1). 在轴对称应力条件下，应力、应变和位移的通解，适用于任何轴对称应力问题。
- (2). 在轴对称应力条件下，应变也是轴对称的，但位移不一定是轴对称的。
- (3). 实现轴对称应力的条件是：物体形状、体力和面力应是轴对称的。
- (4). 轴对称应力及对应的位移的通解已满足相容方程，它们还需满足边界条件及多连体中的位移单值条件，并由此求出系数A、B、C。

注 欧拉方程：

$$x^n y^{(n)} + P_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} x y' + P_n y = 0$$

特征方程为：

$$[k(k-1)\cdots(k-n+1) + P_1[k(k-1)\cdots(k-n+2)] + \cdots + P_{n-1}k + P_n] = 0$$

关于K的n次代数方程，可解得n个特征根 k_1 、 k_2 、 \cdots 、 k_n

(1). 当它们是互不相等的实根时, 通解具有幂函数的形式

$$y = C_1 x^{k_1} + C_2 x^{k_2} + \cdots + C_n x^{k_n}$$

(2). 每当出现重根时, 每多一重根, 就多乘一个 $\ln x$

如: 当 k_1 为 m ($m < n$) 重根时, 通解为

$$y = C_1 x^{k_1} + C_2 x^{k_2} \ln x + \cdots + C_m x^{k_1} \ln^{m-1} x + C_{m+1} x^{k_{m+1}} + \cdots + C_n x^{k_n}$$

(3). 出现共轭复根时, 则虚部是三角函数因子

如: 当 $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, 通解为

$$y = C_1 x^\alpha \cos(\beta \ln x) + C_2 x^\alpha \sin(\beta \ln x) + C_3 x^{k_3} + \cdots + C_n x^{k_n}$$

(4). 当出现复重根, 则实部要多乘因子 $\ln x$

如: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ 为 m ($m < \frac{n}{2}$) 重共轭复根时, 通解为

$$y = [C_1 x^\alpha + C_2 x^\alpha \ln x + \cdots + C_m x^\alpha \ln^{m-1} x] \cos(\beta \ln x) + \\ [C_{m+1} x^\alpha + C_{m+2} x^\alpha \ln x + \cdots + C_{2m} x^\alpha \ln^{m-1} x] \sin(\beta \ln x) + \\ C_{2m+1} x^{k_{2m+1}} + \cdots + C_n x^{k_n}$$

例 2.1 试求解平面轴对称应力问题的相容方程

$$\rho^4 \Phi^{(4)} + 2\rho^3 \Phi^{(3)} - \rho^2 \Phi'' + \rho \Phi' = 0$$

解 特征方程:

$$k(k-1)(k-2)(k-3) + 2k(k-1)(k-2) - k(k-1) + k = 0$$

解得:

$$k_{1,2} = 0, k_{3,4} = 2$$

得:

$$\Phi = A \ln \rho + B \rho^2 \ln \rho + C \rho^2 + D$$

例 2.2 试求解如下的常微分方程

$$\rho^4 f^{(4)}(\rho) + 2\rho^3 f'''(\rho) - 9\rho^2 f''(\rho) + 9\rho f'(\rho) = 0$$

解 特征方程:

$$k(k-1)(k-2)(k-3) + 2k(k-1)(k-2) - 9k(k-1) + 9k = 0$$

解得:

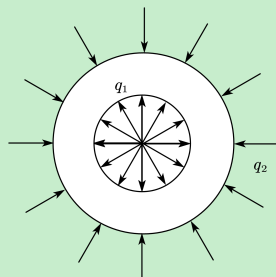
$$k_1 = 4, k_2 = 2, k_3 = 0, k_4 = -2$$

得:

$$f(\rho) = A \rho^4 + B \rho^2 + C + D \rho^{-2}$$

2.6 圆环或圆筒受均布压力

例 2.3 设有圆环（平面应力问题）或圆筒（平面应变问题）受均匀内压力 q_1 ，和外压力 q_2 作用；内半径为 r ；外半径为 R 。试求应力分量；位移分量。



解 轴对称应力问题的应力通解：

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{A}{\rho^2} + B(1 + 2 \ln \rho) + 2C \\ \sigma_\varphi = -\frac{A}{\rho^2} + B(3 + 2 \ln \rho) + 2C \\ \tau_{\rho\varphi} = 0 \end{cases}$$

应力边界条件：

$$\begin{cases} (\sigma_\rho)_{\rho=r} = -q_1 \\ (\sigma_\rho)_{\rho=R} = -q_2 \\ (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=r} = (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=R} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C = -q_1 \\ \frac{A}{R^2} + B(1 + 2 \ln R) + 2C = -q_2 \end{cases}$$

圆环或圆筒具有贯穿孔洞，为多连体，故需进一步考虑位移单值条件：由

$$u_\varphi = \frac{4B\rho\varphi}{E} + H\rho - I \sin \varphi + K \cos \varphi$$

考虑 (ρ, φ) 和 $(\rho, \varphi + 2\pi)$ 同一点只能有一确定的位移，故 $B = 0$ 。则：

$$\begin{cases} A = \frac{r^2 R^2 (q_2 - q_1)}{R^2 - r^2} \\ C = \frac{q_1 r^2 - q_2 R^2}{R^2 - r^2} \end{cases}$$

得(拉梅的解答)：

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{\frac{R^2}{\rho^2} - 1}{\frac{R^2}{r^2} - 1} q_1 - \frac{1 - \frac{r^2}{\rho^2}}{1 - \frac{r^2}{R^2}} q_2 \\ \sigma_\varphi = \frac{\frac{R^2}{\rho^2} + 1}{\frac{R^2}{r^2} - 1} q_1 - \frac{1 + \frac{r^2}{\rho^2}}{1 - \frac{r^2}{R^2}} q_2 \end{cases}$$

例 2.4 轴对称应力条件下的应力和位移的通解，可以应用于各种应力边界条件和位移边界条件的情形，试考虑下列圆环或圆筒的问题应如何求解

(1). 内边界受均布压力 q_1 作用，而外边界为固定边。

- (2). 外边界受均布压力 q_2 作用, 而内边界为固定边.
 (3). 外边界受到强迫的均匀位移 $u_\rho = -\Delta$, 而内边界为自由边 (如车辆的轮毂的作用).
 (4). 内边界受到强迫的均匀位移 $u_\rho = \Delta$, 而外边界为自由边.

解

(1). 应力边界条件:

$$\begin{cases} (\sigma_\rho)_{\rho=r} = -q_1 \\ (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=r} = 0 \end{cases} \implies \frac{A}{r^2} + 2C = -q_1$$

位移边界条件:

$$\begin{cases} (u_\rho)_{\rho=R} = 0 \\ (u_\varphi)_{\rho=R} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} H = I = K = 0 \\ -(1+\mu)\frac{A}{R} + 2(1-\mu)CR = 0 \end{cases}$$

(2). 应力边界条件:

$$\begin{cases} (\sigma_\rho)_{\rho=R} = -q_2 \\ (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=R} = 0 \end{cases} \implies \frac{A}{R^2} + 2C = -q_2$$

位移边界条件:

$$\begin{cases} (u_\rho)_{\rho=r} = 0 \\ (u_\varphi)_{\rho=r} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} H = I = K = 0 \\ -(1+\mu)\frac{A}{r} + 2(1-\mu)Cr = 0 \end{cases}$$

(3). 应力边界条件:

$$\begin{cases} (\sigma_\rho)_{\rho=r} = 0 \\ (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=r} = 0 \end{cases} \implies \frac{A}{r^2} + 2C = 0$$

位移边界条件:

$$\begin{cases} (u_\rho)_{\rho=R} = -\Delta \\ (u_\varphi)_{\rho=R} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} H = I = K = 0 \\ -(1+\mu)\frac{A}{R} + 2(1-\mu)CR = -E\Delta \end{cases}$$

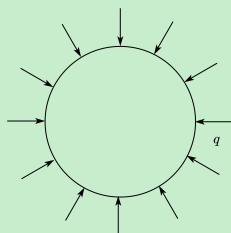
(4). 应力边界条件:

$$\begin{cases} (\sigma_\rho)_{\rho=R} = 0 \\ (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=R} = 0 \end{cases} \implies \frac{A}{R^2} + 2C = 0$$

位移边界条件:

$$\begin{cases} (u_\rho)_{\rho=r} = -\Delta \\ (u_\varphi)_{\rho=r} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} H = I = K = 0 \\ -(1+\mu)\frac{A}{r} + 2(1-\mu)Cr = -E\Delta \end{cases}$$

例 2.5 实心圆盘在 $\rho = r$ 的圆周上受有均布压力 q 的作用, 试求其应力分量。



解 平面轴对称应用问题，应力通解为：

$$\begin{cases} \sigma_{\rho} = \frac{A}{\rho^2} + B(1 + 2 \ln \rho) + 2C \\ \sigma_{\varphi} = -\frac{A}{\rho^2} + B(3 + 2 + \ln \rho) + 2C \\ \tau_{\rho\varphi} = 0 \end{cases}$$

应力的有界性，圆盘中心处（即 $\rho = 0$ ）处的应力值应当有界，不能是无限大的故 $A = B = 0$

应力边界条件：

$$\begin{cases} (\sigma_{\rho})_{\rho=r} = -q \\ (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=r} = 0 \end{cases} \Rightarrow C = -\frac{q}{2}$$

故实心圆盘的应力解答：

$$\begin{cases} \sigma_{\rho} = \sigma_{\varphi} = -q \\ \tau_{\rho\varphi} = 0 \end{cases}$$

2.7 压力隧洞

问题描述：圆筒埋在无限大弹性体中，受有均布内压力 q ，设圆筒和无限大弹性体的弹性常数分别为 E, μ 和 E', μ'

问题本质：本题是两个圆筒的接触问题，两个圆筒均为轴对称问题（平面应变问题），因为不符合均匀性假定，必须分别采用两个轴对称解答。

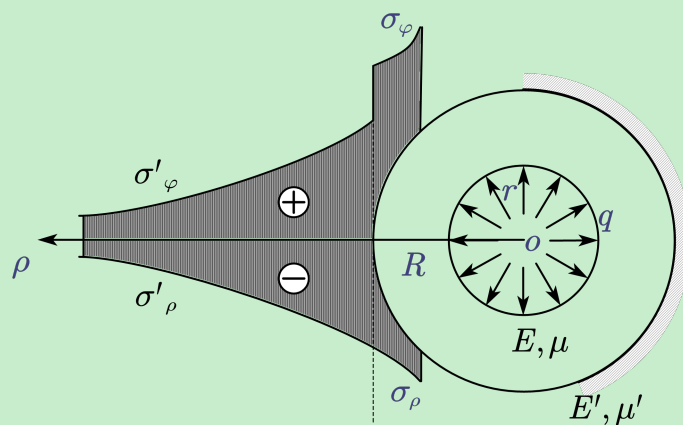


图 5: $n < 1$

不管是内圆筒还是外弹性体，都有贯穿孔道，属于多连体，故需要考虑位移单值条件有 $B = 0, B' = 0$ 。

内圆筒应力表达式：

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{A}{\rho^2} + 2C \\ \sigma_\varphi = -\frac{A}{\rho^2} + 2C \end{cases}$$

无限大弹性体应力表达式：

$$\begin{cases} \sigma'_\rho = \frac{A'}{\rho^2} + 2C' \\ \sigma'_\varphi = -\frac{A'}{\rho^2} + 2C' \end{cases}$$

根据圣维南原理，离内圆筒的无穷远处的应力应为零。并且圆筒和无限大弹性体的接触面上的应力应当相等则边界条件为：

$$\begin{cases} (\sigma_\rho)_{\rho=r} = -q \\ (\sigma'_\rho)_{\rho \rightarrow \infty} = 0 \\ (\sigma_\rho)_{\rho=R} = (\sigma'_\rho)_{\rho=R} \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} \frac{A}{r^2} + 2C = -q \\ C' = 0 \\ \frac{A}{R^2} + 2C = \frac{A'}{R^2} + 2C' \end{cases}$$

在接触面上圆筒和无限大弹性体应当具有相同的位移，得：

$$(u_\rho)_{\rho=R} = (u'_\rho)_{\rho=R}$$

即：

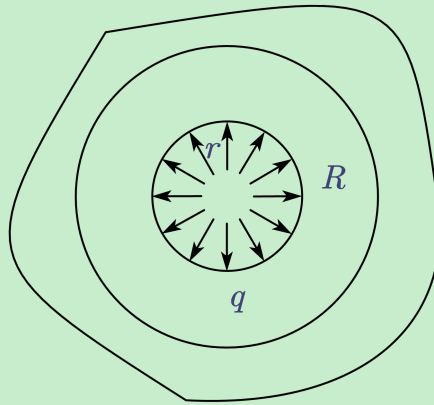
$$\frac{1+\mu}{E} \left[2(1-2\mu)CR - \frac{A}{R} \right] + I \cos \varphi + K \sin \varphi = \frac{1+\mu'}{E'} \left[2(1-2\mu')C'R - \frac{A'}{R} \right] + I' \cos \varphi + K' \sin \varphi$$

因为在接触面的任意一点都要满足上式，则有：

$$\frac{1+\mu}{E} \left[2(1-2\mu)CR - \frac{A}{R} \right] = \frac{1+\mu'}{E'} \left[2(1-2\mu')C'R - \frac{A'}{R} \right]$$

令 $n = \frac{E'(1+\mu)}{E(1+\mu')}$ ：综合方程，联立可得：

$$\begin{cases} \sigma_\rho = -q \frac{[1+(1-2\mu)n]\frac{R^2}{\rho^2} - (1-n)}{[1+(1-2\mu)n]\frac{R^2}{r^2} - (1-n)} \\ \sigma_\varphi = q \frac{[1+(1-2\mu)n]\frac{R^2}{\rho^2} + (1-n)}{[1+(1-2\mu)n]\frac{R^2}{r^2} - (1-n)} \\ \sigma'_\rho = -\sigma'_\varphi = -q \frac{2(1-\mu)n\frac{R^2}{\rho^2}}{[1+(1-2\mu)n]\frac{R^2}{r^2} - (1-n)} \end{cases} \quad (18)$$



例 2.6 设有一刚体，具有半径 R 圆柱形孔道，孔道内放置外半径为 R ，内半径为 r 的圆筒，圆筒受均布压力 q ，试求出圆筒的应力。

解 圆筒轴对称应力问题的通解为：

$$\begin{cases} \sigma_{\rho} = \frac{A}{\rho^2} + 2C \\ \sigma_{\varphi} = -\frac{A}{\rho^2} + 2C \\ \tau_{\rho\varphi} = 0 \end{cases}$$

位移通解：

$$\begin{cases} u_{\rho} = \frac{1+\mu}{E} \left[-\frac{A}{\rho} + 2(1-2\mu)C\rho \right] + I \cos \varphi + K \sin \varphi \\ u_{\varphi} = H\rho - I \sin \varphi + K \cos \varphi \end{cases}$$

应力边界条件：

$$(\sigma_{\rho})_{\rho=r} = -q$$

刚体是不可形变的，它能起到限制圆筒外边界径向位移的作用，因此位移边界条件：

$$(u_{\rho})_{\rho=R} = 0$$

解得：

$$\begin{cases} A = \frac{-q}{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{1-2\mu} \frac{1}{R^2}} \\ C = \frac{-q}{2R^2 \left(\frac{1-2\mu}{r^2} + \frac{1}{R^2} \right)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{\rho} = \frac{\frac{1-2\mu}{\rho^2} + \frac{1}{R^2}}{\frac{1-2\mu}{r^2} + \frac{1}{R^2}} q \\ \sigma_{\varphi} = \frac{\frac{1-2\mu}{\rho^2} - \frac{1}{R^2}}{\frac{1-2\mu}{r^2} + \frac{1}{R^2}} q \end{cases}$$

注 本题不能按照压力隧洞的方式求解，因为在外部与圆筒相接触的是一个刚体，而刚体是不能引用弹性力学的解答

2.8 曲梁的纯弯曲

2.8.1 问题及其描述

矩形截面曲梁：内半径为 a ,外半径为 b ，在两端受有大小相等而转向相反的力偶 M 作用（梁的厚度为一个单位）： o 为曲梁的曲率转中心，两端面间极角为 β ，

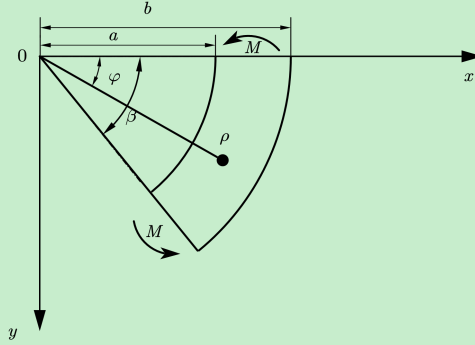


图 6

梁的全部边界都没有剪力。

在梁的内外两面，边界要求： $(\sigma_\rho)_{\rho=a} = 0, (\sigma_\rho)_{\rho=b} = 0$

代入应力通解得：

$$\begin{cases} \frac{A}{a^2} + B(1 + \ln 2a) + 2C = 0 \\ \frac{A}{b^2} + B(1 + \ln 2b) + 2C = 0 \end{cases}$$

根据圣维南原理，环向正应力 σ_φ 的主矢量应当为零，并合成弯矩 M ，因此要求：

$$\int_a^b \sigma_\varphi d\rho = 0, \int_a^b \rho \sigma_\varphi d\rho = M$$

可求得：

$$-(\Phi)_a^b = M$$

即

$$-\left(A \ln \frac{b}{a} + Bb^2 \ln b + Cb^2 + D\right) + \left(A \ln a + Ba^2 \ln a + Ca^2 + D\right) = -M$$

令 $N = \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)^2 - 4\frac{b^2}{a^2} \left(\ln \frac{b}{a}\right)^2$ ：可得：

$$\begin{cases} A = \frac{4M}{N} \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{b}{a} \\ B = \frac{2M}{a^2 N} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) \\ C = -\frac{M}{a^2 N} \left[\frac{b^2}{a^2} - 1 + 2\left(\frac{b^2}{a^2} \ln b - \ln a\right)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_\rho = -\frac{4M}{Na^2} \left(\frac{b^2}{a^2} \ln \frac{b}{\rho} + \ln \frac{\rho}{a} - \frac{b^2}{\rho^2} \ln \frac{b}{a}\right) \\ \sigma_\varphi = \frac{4M}{Na^2} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 - \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{b}{\rho} - \ln \frac{\rho}{a} - \frac{b^2}{\rho^2} \ln \frac{b}{a}\right) \\ \tau_{\rho\varphi} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

注

- (1). $\rho = a, \sigma_\varphi$ 取得最大值。
- (2). 中性轴 ($\sigma_\varphi = 0$) 距内侧纤维较近, 离外侧较远, 中心轴不在过截面形心。
- (3). 与材料力学比较, σ_φ 关于截面不再成双曲线分布, 但曲率不大时这种情况影响较小, 挤压应力 σ_ρ 实际不为零。

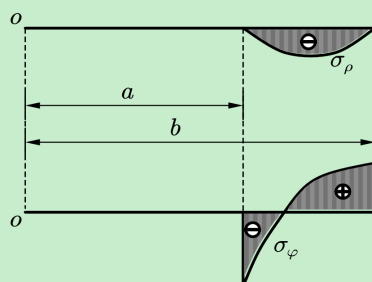
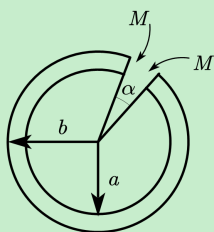


图 7

例 2.7 图示为带有一微小张角 α 缺口的圆环, 若将此圆环焊成一整环, 试求此时圆环的内力矩 M 。



解 要使该圆环焊成一整环, 需在两端加上一对平衡力矩 M , 使其产生环向位移 $\delta = \rho\alpha$ 由两端受力偶作用时环向位移计算式

$$u_\varphi = \frac{4B}{E} \rho \varphi + H \rho - I \sin \varphi + K \cos \varphi$$

可得:

$$u_\varphi|_{\varphi=2\pi} - u_\varphi|_{\varphi=0} = \frac{8B\rho\pi}{E} = \delta = \rho\alpha \Rightarrow B = \frac{E\alpha}{8\pi}$$

代入 B 的计算式

$$B = \frac{2M}{a^2 N} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right)$$

得:

$$M = \frac{E\alpha a^4 N}{16\pi (b^2 - a^2)}$$

2.9 圆孔的孔口应力集中

背景：工程结构中常开设孔口，最简单的为圆孔，本节研究“小圆孔孔口应力集中问题”

小孔的条件：

- (1). 孔口尺寸 \ll 弹性体尺寸,孔口引起的应力扰动局限于小范围内。
- (2). 孔边距边界较远 (>1.5 倍孔口尺寸)，孔口与边界互不干扰。