# 弹性力学

付佳豪

October 5, 2019



# 1 绪论

## 1.1 弹性力学内容

弹性力学，通常简称为弹性力学，又称为弹性理论，是固体力学的一个分支。弹性力学研究弹性体由于受外力作用，边界约束或温度改变等原因而发生的应力、应变和位移。

## 1.2 几个基本概念

(1). 外力是指其他物体对研究对象的作用力，可以分为体积力和表面力，两者也分别简称为体力和面力。
(2). 体力是分布在物体体积的力，如重力和惯性力。
(3). 应力就是物体内部单位面积上的内力。
(4). 应变是用来描述物体各部分线段长度和两线段夹角的改变。
(5). 位移就是位置的移动。

## 1.3 基本假定

(1). 连续性假定
(2). 完全弹性假定
(3). 均匀性假定
(4). 各向同性假定
(5). 小变形假设

# 2 平面问题的基本理论

## 2.1 两类问题

(1). 平面应力问题：只在平面内有应力，与该面垂直方向的应力可忽略，例如薄板拉压问题。

$$\underbrace{\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy},\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy},u,v}_{\text{独立}}\ \underbrace{\varepsilon_z,w}_{\text{非独立}}$$

(2). 平面应变问题：只在平面内有应变，与该面垂直方向的应变可忽略，例如水坝侧向水压问题。

$$\underbrace{\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy},\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy},u,v}_{\text{独立}}\ \underbrace{\sigma_z}_{\text{非独立}}$$

## 2.2 平衡方程

$$\begin{cases}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+f_x=0\\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+f_y=0\end{cases}\tag{1}$$

## 2.3 几何方程

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}\\ \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\end{cases}\tag{2}$$

## 2.4 物理方程（本构关系）

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\mu\left(\sigma_x+\sigma_z\right)\right]\\ \varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\mu\left(\sigma_z+\sigma_x\right)\right]\\ \varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\mu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\right]\\ \gamma_{yz}=\frac{1}{G}\tau_{yz}\\ \gamma_{zx}=\frac{1}{G}\tau_{zx}\\ \gamma_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy}\end{cases}\tag{3}$$

平面应力问题：

$$\begin{cases}\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right)\\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_x\right)\\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\end{cases} \tag{4}$$

将$E$换为$\frac{E}{1-\mu^2}$，$\mu$换成$\frac{\mu}{1-\mu}$即可得到平面应变问题的物理方程。

## 2.5 边界条件

$$\begin{cases} l\left(\sigma_x\right)_s + m\left(\tau_{xy}\right)_s = \bar{f}_x\\ m\left(\sigma_y\right)_s + l\left(\tau_{xy}\right)_s = \bar{f}_y\end{cases} \tag{5}$$

## 2.6 按位移求解

位移表示的平衡微分方程：

$$\begin{cases}\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right) + f_x = 0\\ \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right) + f_y = 0\end{cases} \tag{6}$$

位移表示的应力边界条件：

$$\begin{cases}\frac{E}{1-\mu^2}\left[l\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)_s + m\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_s\right] = \bar{f}_x\\ \frac{E}{1-\mu^2}\left[m\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu\frac{\partial v}{\partial x}\right)_s + l\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)_s\right] = \bar{f}_y\end{cases} \tag{7}$$

## 2.7 相容方程

应力表示的相容方程：

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{8}$$

应力表示的相容方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right) = 2\left(1+\mu\right)\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} \tag{9}$$

$$\nabla^2\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = -\left(1+\mu\right)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right) \tag{10}$$

## 2.8 应力函数

相容方程：

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \tag{11}$$

应力分量求解：

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - x f_x \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - y f_y \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{cases} \tag{12}$$

## 2.9 圣维南原理

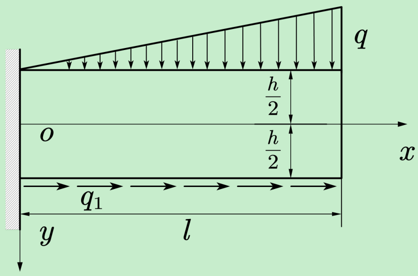
(1). 圣维南原理只能应用于一小部分边界（小边界，次要边界或局部边界）。

(2). 静力等效——指两者主矢量相同，对同一点主矩也相等。

(3). 近处——指面力变换范围的一至二倍的局部区域。

(4). 远处——近处以外。

**例 2.1**




**解**

左：

$$(u)_{x=0} = 0, (v)_{x=0} = 0$$

右：

$$(\sigma_x)_{x=l} = 0, (\tau_{xy})_{x=l} = 0$$

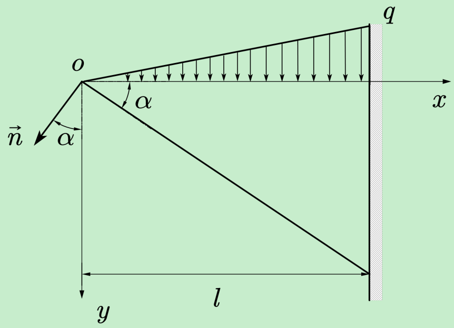
下：

$$(\sigma_y)_{y=\frac{h}{2}} = 0, (\tau_{yx})_{y=\frac{h}{2}} = q_1$$

上：

$$(\sigma_y)_{y=\frac{h}{2}} = -q\frac{x}{l}, (\tau_{xy})_{y=-\frac{h}{2}} = 0$$

**例 2.2**




解

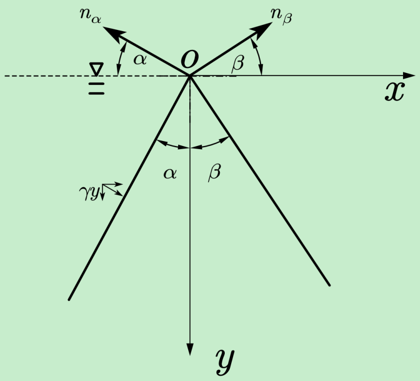
$y=0$的边界上：$(\sigma_y)_{y=0}=-q\frac{x}{l}, (\tau_{xy})_{y=0}=0$

$x=l$边界上：$(u)_{x=l}=0, (v)_{x=l}=0$

$y=x\tan\alpha$上：$l=\cos\langle\vec{n},\vec{x}\rangle=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha, m=\cos\alpha$

$$\begin{cases}-\sin\alpha\sigma_x+\cos\alpha\tau_{yx}=0\\ \cos\alpha\sigma_y-\sin\alpha\tau_{xy}=0\end{cases}$$

**例 2.3** 水坝，左水右空




解

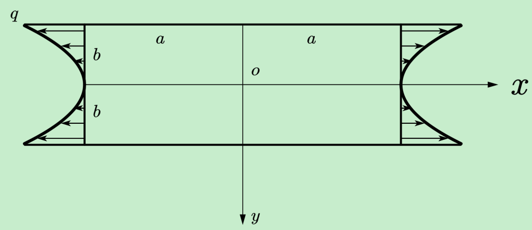
右侧：$l=\cos\beta, m=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)=-\sin\beta$

$$\begin{cases}\cos\beta\sigma_x-\sin\beta\tau_{xy}=0\\ \cos\beta\tau_{xy}-\sin\beta\sigma_y=0\end{cases}$$

左侧：$l=-\cos\alpha, m=-\sin\alpha$

$$\begin{cases}-\cos\alpha\sigma_x-\tau_{xy}\sin\alpha=\gamma y\cos\alpha\\ -\cos\alpha\tau_{xy}-\sigma_y\sin\alpha=\gamma y\sin\alpha\end{cases}$$

**例 2.4**

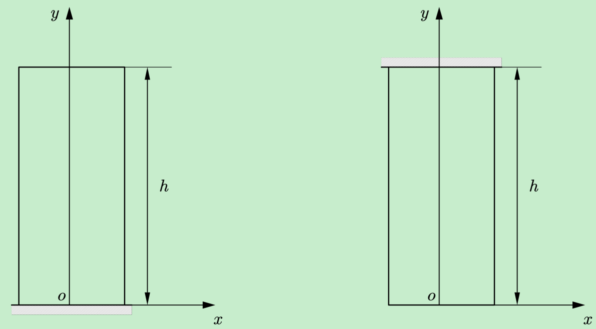



**解**

上下:$\left(\sigma_y\right)_{y=\pm b}=0, \left(\tau_{xy}\right)_{y=\pm b}=0$

左右：$\left(\sigma_x\right)_{x=\pm a}=q\left(\frac{y}{b}\right)^2, \left(\tau_{xy}\right)_{x=\pm a}=0$

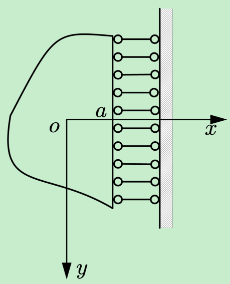
**例 2.5** 设有矩形截面的竖柱，密度为$\rho$,应力分量为$\begin{cases}\sigma_x=0\\ \sigma_y=C_1y+C_2\\ \tau_{xy}=0\end{cases}$ 试着分别利用$a$和$b$确定常数$C_1$和$C_2$。




$a$ $b$

| | |
|---|---|
| 上：$\left(\sigma_y\right)_{y=h}=0$ | 上：$\left(\sigma_y\right)_{y=h}=-\rho gh$ |
| 下：$\left(\sigma_y\right)_{y=0}=-\rho gh$ | 下：$\left(\sigma_y\right)_{y=0}=0$ |
| 则： | 则： |
| $\begin{cases}C_1=\rho g\\ C_2=-\rho gh\end{cases}$ | $\begin{cases}C_1=-\rho g\\ C_2=0\end{cases}$ |

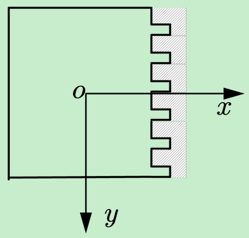
**例 2.6** 列出$x=a$的边界条件



**解**

$$\begin{cases}(u)_{x=a} = \bar{u} = 0 \\ \left(\tau_{xy}\right)_{x=a} = \bar{f}_y = 0\end{cases}$$

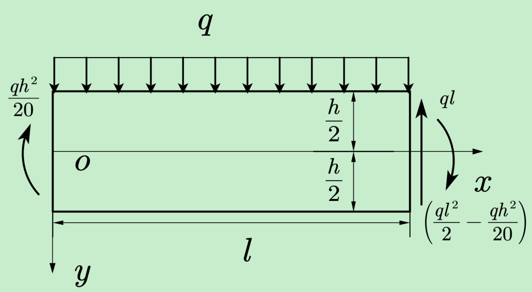
**例 2.7** 列出边界条件




**解**

$$\begin{cases}(\sigma_x)_s = 0 \\ (v)_s = 0\end{cases}$$

**例 2.8** 列出边界条件




**解**

上：

$$\left(\sigma_y\right)_{y=-\frac{h}{2}} = -q, \left(\tau_{xy}\right)_{y=\frac{-h}{2}} = 0$$

下：

$$\left(\sigma_y\right)_{y=\frac{h}{2}} = 0, \left(\tau_{xy}\right)_{y=\frac{h}{2}} = 0$$

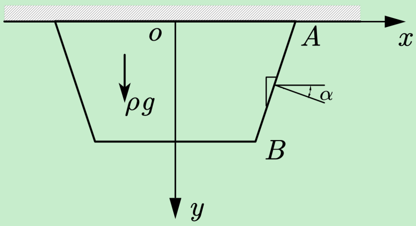
左：

$$\begin{cases}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=0}\, dy \cdot 1 = F_N = 0 \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y \cdot (\sigma_x)_{x=0}\, dy \cdot 1 = M = -\frac{1}{2}ql^2 \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\tau_{xy}\right)_{x=0} dy \cdot 1 = F_s = ql\end{cases}$$

右:

$$\begin{cases} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=l} \, dy \cdot 1 = 0 \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y \, (\sigma_x)_{x=l} \, dy \cdot 1 = 0 \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy})_{x=l} \, dy \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

**例 2.9** 试推导无面力作用时$AB$边界上的$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$之间的关系。




**解**

应力边界条件:

$$\begin{cases} \left(l\sigma_x + m\tau_{xy}\right)_{s_\sigma} = \bar{f}_x \left(s_\sigma\right) \\ \left(l\tau_{xy} + m\sigma_y\right)_{s_\sigma} = \bar{f}_y \left(s_\sigma\right) \end{cases}$$

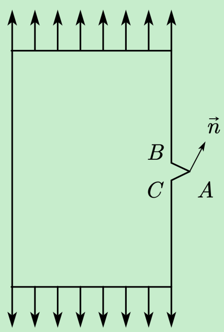
其中:

$$l = \cos\alpha, m = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \bar{f}_x = 0, \bar{f}_y = 0$$

则:

$$\begin{cases} \sigma_x \cos\alpha + \tau_{xy} \sin\alpha = 0 \\ \tau_{xy} \cos\alpha + \sigma_y \sin\alpha = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sigma_x = -\tau_{xy} \tan\alpha \\ \tau_{xy} = -\sigma_y \tan\alpha \\ \sigma_x = \sigma_y \tan^2\alpha \end{cases}$$

**例 2.10** 证明$A$处无应力存在。

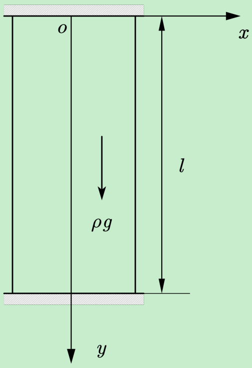



**证明.** 边界条件:

$$\begin{cases} l\sigma_x + m\tau_{xy} = 0 \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y = 0 \end{cases}$$

$l, m$是任意系数，则矩阵$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$为零矩阵，即$A$处无应力。 □

**例 2.11** 考虑两端固定的一维杆件,只受重力作用，$f_x = 0, f_y = \rho g$使用位移法求解。




**解**

$$\begin{cases} \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + f_x = 0 \\ \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) + f_y = 0 \end{cases}$$

可设$u = 0, v = v(y)$

代入第一式自然满足。

代入第二式得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{-\rho g}{E} \Longrightarrow v = -\frac{\rho g}{E}y^2 + Ay + B$$

由位移边界条件得:

$$\begin{cases} v_{y=0} = 0 \\ v_{y=l} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \frac{\rho g l}{2E} \\ B = 0 \end{cases} \Longrightarrow v = \frac{\rho g}{2E}\left(ly - y^2\right)$$

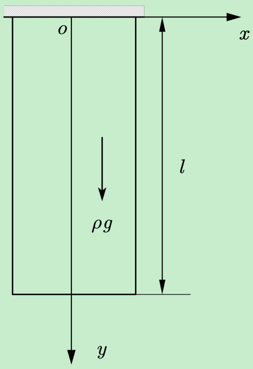
代入几何方程得:

$$\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = \frac{\rho g}{2E}(1 - 2y), \gamma_{xy} = 0$$

代入物理方程得:

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = \frac{\rho g}{2}(1 - 2y), \tau_{xy} = 0$$

**例 2.12** 考虑一端固定的一维杆件,只受重力作用，$f_x = 0, f_y = \rho g$使用位移法求解。



**解**

$$\begin{cases}\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)+f_x=0\\ \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+f_y=0\end{cases}$$

可设$u=0,v=v(y)$

代入第一式自然满足。

代入第二式得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{d^2 v}{dy^2}=\frac{-\rho g}{E}\Longrightarrow v=-\frac{\rho g}{E}y^2+Ay+B$$

由位移边界条件得:

$$v_{y=0}=0\Longrightarrow B=0\Longrightarrow v=-\frac{\rho g}{E}y^2+Ay$$

代入几何方程得:

$$\varepsilon_x=0,\varepsilon_y=-\frac{\rho g}{E}y+A,\gamma_{xy}=0$$

代入物理方程得:

$$\sigma_x=0,\sigma_y=-\rho gy+EA,\tau_{xy}=0$$

代入边界条件得:

$$\left(\sigma_y\right)_{y=l}=0\Longrightarrow A=\frac{\rho gl}{E}$$

可得:

$$v=\frac{-\rho g}{2E}y^2+\frac{\rho gl}{E}y,\varepsilon_y=-\frac{\rho g}{E}y+\frac{\rho gl}{E},\sigma_y=\rho g\left(l-y\right)$$

**例 2.13** 若$\varepsilon_x=ay^2,\varepsilon_y=bx^2,\gamma_{xy}=(a+b)xy$是否可能成为弹性体的应变?

**解**

代入应变表示的相容方程可得: $2a+2b=a+b$

当$a+b=0$时, 可能,否则则不可能。

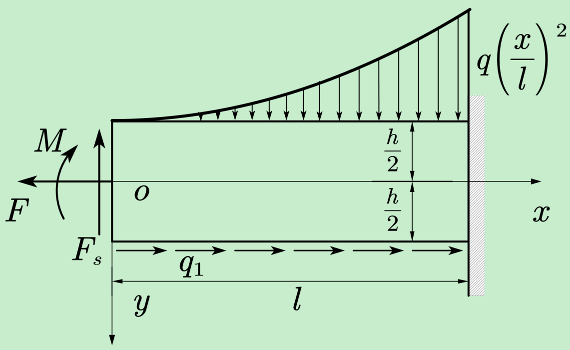
**例 2.14** 若$f_x=f_y=0,\sigma_x=ax^2,\sigma_y=by^2,\tau_{xy}=0$是否可能成为弹性体的应力?

**解** 代入平衡微分方程:

$$\begin{cases}2ax+0+0\neq 0\\ 0+2by+0\neq 0\end{cases}$$

故不可能存在。

**例 2.15** 试列出图中的应力边界条件



解

上：

$$(\sigma_y)_{y=-\frac{h}{2}} = -q\left(\frac{x}{l}\right)^2, (\tau_{yx})_{y=-\frac{h}{2}} = 0$$

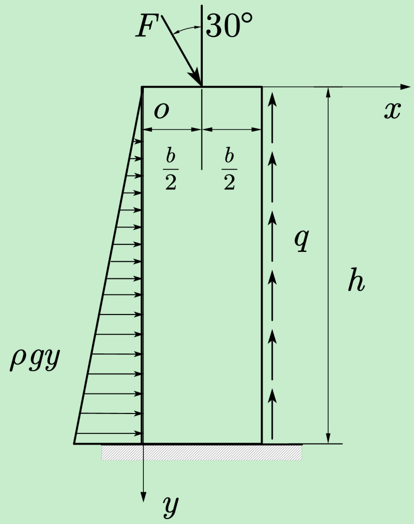
下：

$$(\sigma_y)_{y=\frac{h}{2}} = 0, (\tau_{xy})_{y=\frac{h}{2}} = q_1$$

左：

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dy \cdot 1 = F, \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dy \cdot 1 = F_s, \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y\sigma_x dy \cdot 1 = M$$

**例 2.16** 试列出图中的应力边界条件




解

左：

$$(\sigma_x)_{x=0} = -\rho g y, (\tau_{xy})_{x=0} = 0$$

右：

$$(\sigma_x)_{x=b} = 0, (\tau_{xy})_{x=b} = -q$$

上：

$$\int_0^b \sigma_y dx \cdot 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}F, \int_0^b \tau_{xy} dx \cdot 1 = -\frac{1}{2}F, \int_0^b x\sigma_y dy \cdot 1 = -\frac{\sqrt{3}}{4}Fb$$

**例 2.17** 在无体力情况下，试考虑下列应力分量是否可能在弹性体中存在。

*(1).* $\sigma_x = Ax + By, \sigma_y = Cx + Dy, \tau_{xy} = Ex + Fy$

*(2).* $\sigma_x = A\left(x^2 + y^2\right), \sigma_y = B\left(x^2 + y^2\right), \tau_{xy} = Cxy$

解

(1). 代入平衡方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = A + F = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = D + E = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = -F \\ D = -E \end{cases} \quad \text{即可}$$

满足相容方程$\nabla^2 \left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0$

故可能存在。

(2). 代入平衡方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\tau_{xy}}{\partial y} = 2Ax + Cx \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 2By + Cy \end{cases} \Longrightarrow A = B = -\frac{C}{2}$$

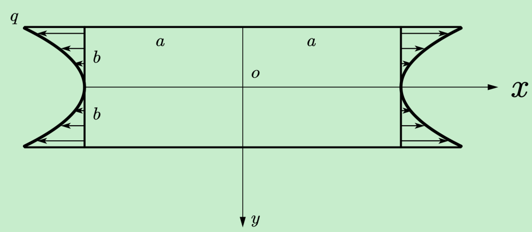
代入相容方程:

$$2A + 2B = 0$$

故只有$A = B = C = 0$时可能存在。

**例 2.18** 试验证下列应力分量是否是图示问题的解答

$$\sigma_x = \frac{y^2}{b^2} q, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$$




**解**

代入平衡方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \end{cases}$$

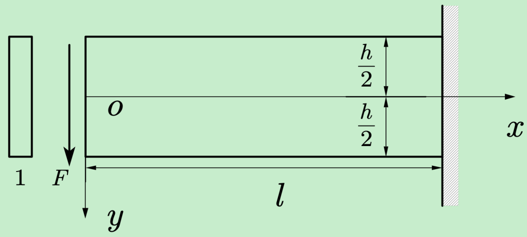
满足

代入应力形式的相容方程

$$\nabla^2 \left(\sigma_x + \sigma_y\right) = \frac{2q}{b^2} \neq 0$$

不满足，故不存在。

**例 2.19** 设有矩形截面悬臂梁，在自由端受集中力$F$作用，体力不计。试根据材料力学公式写出弯曲应力$\sigma_x$和切应力$\tau_{xy}$的表达式，然后证明这些表达试满足平衡方程和相容方程。再说明这些表达式是否是正确的解答。




**解** 材料力学中:

$$\sigma_x = \frac{My}{I_z}, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \frac{F_Q S_z^*}{I_z b}$$

其中:

$$F_Q = -F, M = -Fx, S_z^* = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right), I_z = \frac{bh^3}{12}$$

则:

$$\sigma_x = -\frac{12}{h^3}xy, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \frac{6F}{h^3}\left(y^2 - \frac{h^2}{4}\right)$$

验证应力是否满足三个条件:

*(1).* 应力边界条件:

- 主要边界上(上下边界):

$$(\sigma_y)_{y=\pm\frac{h}{2}} = 0, (\tau_{yx})_{y=\pm\frac{h}{2}} = 0, \text{满足}$$

- 次要边界(左边界):

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy})_{x=0}\, dy \cdot 1 = -F, \text{满足}$$

*(2).* 平衡方程:

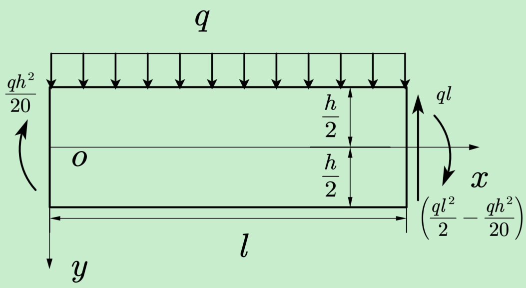
$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\frac{12F}{h^3}y + \frac{12F}{h^3}y = 0 \\ 0 + 0 = 0 \end{cases} \quad \text{满足}$$

*(3).* 应力形式的相容方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0, \text{满足}$$

**例 2.20** 试用下列应力表达式求解其应力

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{q}{h^3}\left(6x^2y - 4y^3\right) \\ \sigma_y = -\frac{2q}{h^3}y^3 - C_1 y + C_2 \\ \tau_{xy} = \frac{6qxy^2}{h^3} + C_1 x \end{cases}$$




解

(1). 平衡微分方程：

$$\begin{cases} -\frac{12q}{h^3}x + \frac{12qx}{h^3} = 0 \\ \frac{12qy}{h^3} + C_1 - \frac{12qy}{h^3} - C_1 = 0 \end{cases} \text{，满足}$$

(2). 相容方程：

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0, \text{满足}$$

(3). 校核边界条件：

- 上下边界：

$$\begin{cases} (\tau_{xy})_{y=\pm\frac{h}{2}} = 0 \\ (\sigma_x)_{y=-\frac{h}{2}} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x\left(\frac{6q}{h^3}\frac{h^2}{4} + C_1\right) = 0 \\ -\frac{2q}{h^3}\left(-\frac{h^3}{8}\right) + C_1\frac{h}{2} + C_2 = -q \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{3q}{2h} \\ C_2 = -\frac{q}{2} \end{cases}$$

将$C_1, C_2$代入后满足。

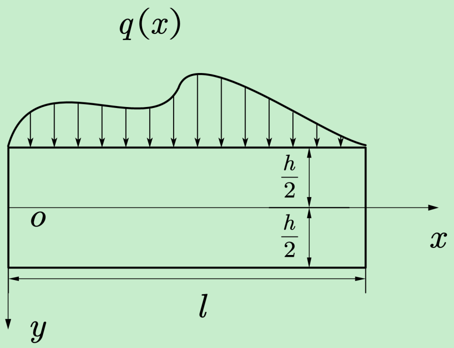
- 左边界：

$$\begin{cases} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=0}\, dy = 0, \text{满足} \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y\,(\sigma_x)_{x=0}\, dy = \frac{qh^2}{20}, \text{满足} \end{cases}$$

右边界：

$$\begin{cases} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=l}\, dy = 0, \text{满足} \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y\,(\sigma_x)_{x=l}\, dy = \left(\frac{ql^2}{2} - \frac{qh^2}{20}\right), \text{满足} \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy})_{x=l}\, dy = -ql, \text{满足} \end{cases}$$

**例 2.21** 在材料力学中，当矩形截面梁（厚度$\delta = 1$），受任意的横向荷载$q(x)$作用而弯曲，弯曲应力公式为$\sigma_x = \frac{M(x)}{I}y$。
试由平衡微分方程导出切应力和挤压应力$\sigma_y$的公式。




**解** 不计体力将$\sigma_x = \frac{M(x)}{I}y$代入平衡微分方程第一式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \tau_{ux}}{\partial y} = -\frac{dM(x)}{dx} \cdot \frac{y}{I} = -\frac{F_Q(x)\,y}{I} \Longrightarrow \tau_{xy} = -\frac{F_Q(x)\,y^2}{2I} + f_1(x)$$

由上下边界条件$\left(\tau_{xy}\right)_{y=\pm\frac{h}{2}} = 0$可得:

$$f_1(x) = -\frac{F_Q(x)}{8I}h^2 \Longrightarrow \tau_{xy} = \frac{F_Q(x)}{I}\left(\frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2}\right)$$

将$\tau_{xy}$代入平衡微分方程第二式得:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{dF_Q(x)}{dyI}\left(\frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2}\right) = \frac{q(x)}{I}\left(\frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2}\right) \Longrightarrow \sigma_y = \frac{q(x)}{I}\left(\frac{h^2}{8} - \frac{y^3}{6}\right)+f_z(x)$$

由下边界条件$\left(\sigma_y\right)_{y=\frac{h}{2}} = 0$得:

$$f_2(x) = -\frac{q(x)}{2} \Longrightarrow \sigma_y = -q(x)\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{y}{h} + 2\frac{y^3}{h^3}\right)$$

若$q(x)$为常数则:

$$M = \frac{ql^2}{2}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{q}\right), \sigma_x = \frac{6ql^2}{h^3}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right)y, \sigma_y = -q\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{y}{h} + 2\frac{y^3}{h^3}\right)$$

代入相容方程

$$\nabla^2\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = -\frac{24q}{h^3}y \neq 0$$

为了满足相容方程，可令

$$\sigma_x = \frac{6ql^2}{h^3}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right)y + \frac{4q}{h^3}y^3 + Ay + B$$

由次要边界条件:

$$\begin{cases} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=l}\,dy = 0 \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y\,(\sigma_x)_{x=0}\,dy = 0 \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\tau_{xy}\right)_{x=0} dy = \frac{1}{2}ql \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = -\frac{3q}{5h} \\ B = 0 \end{cases}$$

得

$$\sigma_x = \frac{6ql^2}{h^3}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right)y + \frac{4q}{h^3}y^3 + -\frac{3q}{5h}y$$

# 3 平面问题的直角坐标解答

## 3.1 逆解法

### 3.1.1 含义

所谓逆解法，就是先设定各种形式的满足双调和方程的应力函数，然后利用应力函数计算各个应力分量，再根据应力边界条件反算边界上对应的面力，从而得知所设定的应力函数可以解决什么样的应力问题。

### 3.1.2 步骤

$$\begin{matrix}\text{设定}\Phi \\ \text{满足}\nabla^4\Phi = 0\end{matrix} \rightarrow \text{求出应力分量} \xrightarrow{\text{代入边界条件}} \text{反推面力} \rightarrow \text{得出可解决的应力问题}$$

### 3.1.3 唯一性定理

在洽定载荷作用下，处于平衡状态的弹性体，其内部各点的应力，应力解是唯一的，如果物体的整体刚体位移收到约束，则位移解也是位移的。

### 3.1.4 多项式解答

(1). 多项式应力函数$\varPhi(x, y)$都性质
- 多项式次数$n < 4$时，则系数可以任意选取，总满足相容方程。
- 多项式次数$n \geqslant 4$时，则系数需满足一定的条件，才能满足相容方程。
- 多项式次数越高，则系数间需满足的条件越多。

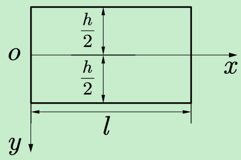
(2). 一次多项式:对应于无体力和无应力状态的自然状态；任意应力函数$\varPhi(x, y)$加上或减去一个一次多项式，对应力无影响。

(3). 二次多项式：对应均匀应力状态，即全部应力分量为常量。

(4). 三次多项式：对应线性分布的应力。

(5). 用多项式构造应力函数$\varPhi(x, y)$，一般只能解决简单直线应力边界问题。

**例 3.1** 设图中所示的矩形长梁（$l \geqslant h$），试考察应力函数$\Phi = \frac{F}{2h^3}xy\left(3h^2-4y^2\right)$能解决什么样的受力问题？




**解** 按照逆解法：

(1). 将$\Phi$代入相容方程，$\nabla^4\Phi=0$满足。

(2). 由$\Phi$求出应力分量：

$$
\begin{cases}
\sigma_x = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = -\dfrac{12Fxy}{h^3} \\
\sigma_y = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0 \\
\tau_{xy} = -\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = \dfrac{3F}{2h}
\end{cases}
$$

(3). 由边界形状和应力分量反推边界上的应力。

主要边界（大边界）：$y=\pm\frac{h}{2}, \sigma_y=0, \tau_{xy}=0$。

因此:在$y=\pm\frac{h}{2}$的边界面上，无任何面力作用。即：$\bar{f}_x=\bar{f}_y=0$

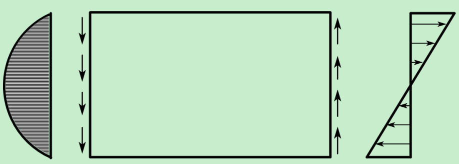
次要边界（小边界）$x=0 or\ l$上：

左端:

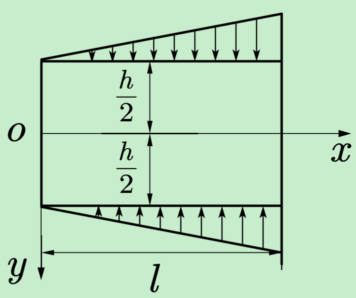
$$
\begin{cases}
\bar{f}_x = -(\sigma_x)_{x=0} = 0 \\
\bar{f}_y = -\left(\tau_{xy}\right)_{x=0} = \frac{3F}{2h}\left(1-\frac{4}{h^2}y^2\right)
\end{cases}
$$

右端：

$$
\begin{cases}
\bar{f}_x = -(\sigma_x)_{x=l} = -\frac{12Fl}{h^3}y \\
\bar{f}_y = -\left(\tau_{xy}\right)_{x=l} = -\frac{3F}{2h}\left(1-\frac{4}{h^2}y^2\right)
\end{cases}
$$



**例 3.2** 不计体力，应力函数$\Phi=\frac{q}{6l}x^3$能解决什么样的受力问题？



**解** 按照逆解法:

(1). 代入相容方程，最高次为3次，故满足。

(2). 由$\Phi$求出应力分量:

$$\begin{cases}\sigma_x = 0 \\ \sigma_y = \frac{q}{l}x \\ \tau_{xy} = 0\end{cases}$$

(3). 边界条件:

上边界:

$$\bar{f_y} = -\sigma_y = -\frac{q}{l}x$$

下边界:

$$\bar{f_y} = -\sigma_y = \frac{q}{l}x$$

左边界:

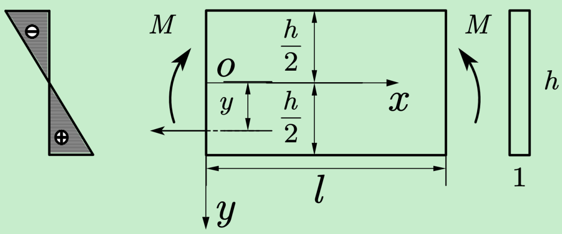
$$\begin{cases}\bar{f_x} = -(\sigma_x)_{x=0} = 0 \\ \bar{f_y} = -\left(\tau_{xy}\right)_{x=0} = 0\end{cases}$$

右边界:

$$\begin{cases}\bar{f_x} = -(\sigma_x)_{x=l} = 0 \\ \bar{f_y} = -\left(\tau_{xy}\right)_{x=l} = 0\end{cases}$$

因此在左右边界上无任何面力作用。

## 3.2 矩形梁的纯弯曲




应力函数:

$$\Phi = ay^3$$

相应的应力分量:

$$\sigma_x = 6ay, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$$

由圣维南原理可得:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x y dy = M \Longrightarrow a = \frac{2M}{h^3}$$

于是应力函数又可以写为:

$$\sigma_x = \frac{M}{I}y, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$$

(1). 弹性力学的解答和材料力学的解答完全一致。

(2). 只有组成两端力偶的法面面力是线性分布，在截面中处为零时，本节所求的解才是完全精确的。如果梁端的面力是按照其他方式分布的，解答是有误差的，根据圣维南原理，只有梁两端附近小区域有显著误差，在远端误差可以忽略不计。

## 3.3 位移分量的求出

将应力分量代入物理方程,得到应变分量，再代入几何方程，得到位移分量的微分方程组，求解即可得到位移分量。其中结合位移限制条件可以完全确定出位移分量的表达式。

$$\text{应力分量} \xrightarrow{\text{物理方程}} \text{应变分量} \xrightarrow{\text{几何方程}} \text{位移方程组} \xrightarrow{\text{位移边界条件}} \text{积分常数} \longrightarrow \text{位移分量}$$

## 3.4 半逆解法

求解步骤：

(1). 根据弹性体的边界形状和受力情况，假定部分或全部应力分量的函数形式。

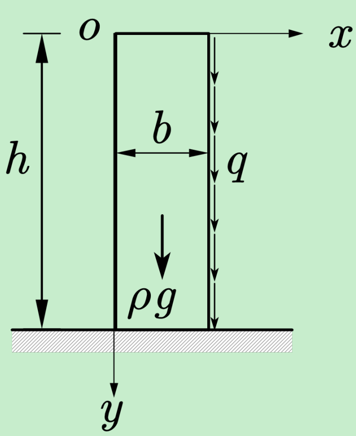
(2). 根据应力分量和压力函数之间的关系，反推应力函数的函数形式。

(3). 由相容方程的满足来确定应力函数中的待定项。

(4). 根据应力分量和应力函数之间的关系，求出全部应力分量的具体表达式。

(5). 根据边界条件，确定待定常数。

**例 3.3** 设有矩形截面的长竖柱，密度为$\rho$，在一边侧面上受有均布面力$q$，如图所示，试求应力分量。



**解**

(1). 假设某个应力分量的函数形式。

分析：只有y向体力 $f_y=\rho g$ 面力 $(\bar{f}_y)_{x=b}=q$

突破点：假设在整个长柱内：$\sigma_x=0$

(2). 根据应力分量导出应力函数的表达式

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\rightarrow\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0\rightarrow\frac{\partial\Phi}{\partial y}=f(x)\rightarrow\Phi=yf(x)+f_1(x)$$

(3). 由相容方程求解出应力函数：

$$\begin{cases}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=0\\ \frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=0\\ \frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}=0\end{cases}\Longrightarrow\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}=y\frac{d^4f(x)}{dx^4}+\frac{d^4f_1(x)}{dx^4}=0$$

$$\begin{cases}\frac{d^4f(x)}{dx^4}=0\Longrightarrow f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx\\ \frac{d^4f_1(x)}{dx^4}=0\Longrightarrow f_1(x)=Dx^3+Ex^2\ (\text{省略一!项})\end{cases}$$

(4). 由应力函数求解应力分量

$$\Phi=y\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)+Dx^3+Ex^2, f_x=0; f_y=\rho g$$

$$\begin{cases}\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-f_xx=0\\ \sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-f_yy=y(6Ax+2B)+6Dx+2E-\rho gy\\ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=-\left(3Ax^2+2Bx+C\right)\end{cases}$$

(5). 由应力边界条件确定积分常数

(I). 左右边界（主要边界）：

$$\begin{cases}\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-f_xx=0\\ \sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-f_yy=y(6Ax+2B)+6Dx+2E-\rho gy\\ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=-\left(3Ax^2+2Bx+C\right)\end{cases}$$

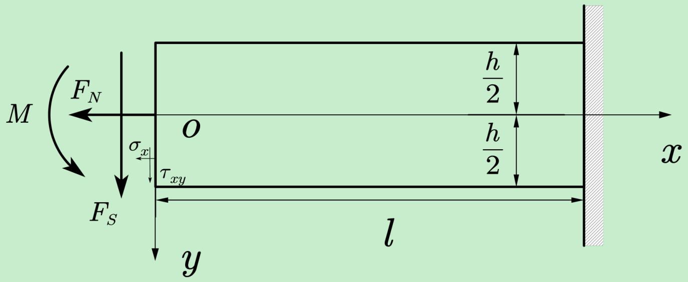
(II). 上边界（次要边界）,应用圣维南原理:

$$\begin{cases}\int_0^b(\sigma_y)_{y=0}\,dx=0\\ \int_0^b(\sigma_y)_{y=0}\,dx=0\\ \int_0^b(\tau_{xy})_{y=0}\,dx=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}3Db+2E=0\\ 2Db+E=0\\ Ab^2+6Bb+C=0\\ C=0\\ 3Ab^2+2Bb+C=-q\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}A=-\frac{q}{b^2}\\ B=\frac{q}{b}\\ C=D=E=0\end{cases}$$

最终得到应力分量表达式

$$\begin{cases}\sigma_x = 0 \\ \sigma_y = \frac{2q}{b}y\left(1-\frac{3}{b}\right)-\rho g y \\ \tau_{yx} = \frac{3q}{b^2}x^2-\frac{2q}{b}x\end{cases}$$

**例 3.4** 设单位厚度的悬臂梁在左端受到集中力和力矩的作用，体力可以不计。如图示，设应力函数$\Phi = Axy + By^2 + Cy^3 + Dxy^3$，求解应力分量。




**解**

(1). 校核相容方程$\nabla^4\Phi = 0$，满足。

(2). 求应力分量，无体力时

$$\begin{cases}\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 2B+6Cy+6Dxy \\ \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0 \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = -\left(A+3Dy^2\right)\end{cases}$$

(3). 校核主要边界条件：

$$\begin{cases}\left(\sigma_y\right)_{y=\pm\frac{h}{2}} = 0\text{满足} \\ \left(\tau_{xy}\right)_{y=\pm\frac{h}{2}} \rightarrow A+\frac{3}{4}Dh^2 = 0\end{cases}$$

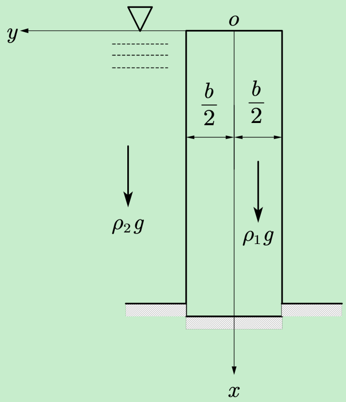
(4). 校核次要边界，应用圣维南原理

$$\begin{cases}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(\sigma_x)_{x=0}\,dy = -F_N \rightarrow B = -\frac{F_N}{2h} \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}y\,(\sigma_x)_{x=0}\,dy = -M \rightarrow C = -\frac{2M}{h^3} \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\tau_{xy}\right)_{x=0}dy = -F_S \rightarrow \begin{cases}A+\frac{Dh^3}{4} = F_S \\ A+\frac{3Dh^2}{4} = 0\end{cases} \implies \begin{cases}A = \frac{3F_S}{2} \\ D = -\frac{2F_S}{h^3}\end{cases}\end{cases}$$

故得：

$$\begin{cases}\sigma_x = -\frac{F_N}{h}-\frac{12M}{h^3}y-\frac{12F_S}{h^3}xy \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -\frac{3F_S}{2h}\left(1-4\frac{y^4}{h^2}\right)\end{cases}$$

**例 3.5** 挡承强的密度为$\rho$,厚度为$b$,如图示，水的密度为$\rho_2$,试求应力分量。




**解** 用半逆解法解

(1). 假设应力分量的应力函数形式，因为在$y=-\frac{b}{2}$边界上$\sigma_y=0$，而在$y=\frac{b}{2}$边界上$\sigma_y=-\rho_2 gx$；所以可假设在区域内$\sigma_y$是按照一次式变化，即

$$\sigma_y = xf(y)$$

(2). 根据应力分量导出应力函数的表达式

$$\sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=xf(y)\Longrightarrow\Phi=\frac{x^3}{6}f(y)+xf_1(y)+f_2(y)$$

(3). 根据相容方程求解应力函数

$$\frac{x^3}{6}\frac{d^4f(y)}{dy^4}+x\frac{d^4f_1(y)}{dy^4}+\frac{d^4f_2(y)}{dy^4}+2x\frac{d^2f(y)}{dy^2}=0$$

$$\begin{cases}\frac{d^4f}{dy^4}=0\Longrightarrow f=Ay^3+By^2+Cy+D\\ \frac{d^4f_1}{dy^4}+2\frac{d^2f}{dy^2}=0\Longrightarrow f_1=-\frac{A}{10}y^5-\frac{B}{6}y^4+Gy^3+Hy^2+Iy\\ \frac{d^4f_2}{dy^4}=0\Longrightarrow f_2=Ey^3+Fy^2\end{cases}$$

$$\Phi=\frac{1}{6}x^3\left(Ay^3+By^2+Cy+D\right)+x\left(-\frac{A}{10}y^5-\frac{B}{6}y^4+Gy^3+Hy^2+Iy\right)+Ey^3+Fy^2$$

(4). 求出应力分力量

$$\begin{cases}\sigma_x=x^3\left(Ay+\frac{B}{3}\right)+x\left(-2Ay^3-2By^2+6Gy^3+2H\right)+6Ey+2F-\rho_1gx\\ \sigma_y=x\left(Ay^3+By^2+Cy+D\right)\\ \tau_{xy}=-\frac{x^2}{2}\left(3Ay^2+2By+C\right)+\left(\frac{A}{2}y^4+\frac{3B}{3}y^3-3Gy^2-2Hy-I\right)\end{cases}$$

(5). 由应力边界条件确定积分常数主要边界（左、右）必须精确满足边界条件：

$$\left(\sigma_y\right)_{y=\frac{b}{2}}=-\rho_2gx;\left(\sigma_y\right)_{y=-\frac{b}{2}}=0;\left(\tau_{xy}\right)_{y=\frac{b}{2}}=0;\left(\tau_{xy}\right)_{y=-\frac{b}{2}}=0$$

得：

$$\begin{cases} A\frac{b^3}{8}+B\frac{b^2}{4}+C\frac{b}{2}+D=-\rho_2 x \\ -A\frac{b^4}{8}+B\frac{b^2}{4}-C\frac{b}{2}+D=0 \\ A\frac{3}{4}b^2 \pm Bb+C=0 \\ A\frac{b^4}{32} \pm B\frac{b^3}{12}-G\frac{3}{4}b^2 \pm Hb-I=0 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} A=\frac{2}{b^3}\rho_2 g \\ B=0 \\ C=-\frac{3}{2b}\rho_2 g \\ D=-\frac{1}{2}\rho_2 g \\ H=0 \\ I=\frac{b}{16}\rho_2 g-\frac{3b^2}{4}G \end{cases}$$

次要边界（柱的上端），应用圣维南原理：

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}(\sigma_x)_{x=0}\,dy=0, \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}(\sigma_x)\,ydy=0, \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left(\tau_{xy}\right)_{x=0}dy=0$$

解得：

$$\begin{cases} F=E=0 \\ I=\frac{b}{80}\rho_2 g-\frac{b^4}{4}G \end{cases}$$

*(6).* 最终应力分量表达

$$\begin{cases} \sigma_x=\frac{2\rho_2 g}{b^3}x^3y+\frac{3\rho_2 g}{5b}xy-\frac{4\rho_2 g}{b^3}xy^3-\rho_1 gx \\ \sigma_y=\rho_2 gx\left(2\frac{y^3}{b^3}-\frac{2y}{3b}-\frac{1}{2}\right) \\ \tau_{xy}=-\rho_2 gx^2\left(3\frac{y^2}{b^3}-\frac{3}{4b}\right)-\rho_2 gy\left(-\frac{y^3}{b^3}+\frac{3y}{10b}-\frac{b}{80y}\right) \end{cases}$$

**例 3.6** 已知：

*(1).* $\Phi=Ay^2\left(a^2-x^2\right)+Bxy+C\left(x^2+y^2\right)$

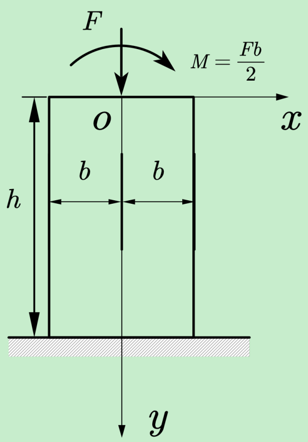
*(2).* $\Phi=Ax^4+Bx^3y+Cx^2y^2+Dxy^2+Ey^4$

**解**

*(1).* 代入相容方程，$A=0$时才可能是应力函数。

*(2).* 代入相容方程，必须满足$3(A+E)+C=0$时才可能是应力函数。

**例 3.7** 图中所示的矩形截面柱体，在顶部受有集中$F$和力矩$M=\frac{Fb}{2}$的作用；试用应力函数$\Phi=Ax^3+Bx^2$求解图示问题的应力及位移。




解

(1). 校核相容方程 $\nabla^4\Phi=0$，满足。

(2). 求应力分量，在无体力时得：

$$\begin{cases}\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0\\ \sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=6Ax+2B\\ \tau_{xy}=-\frac{\partial\Phi}{\partial x\partial y}=0\end{cases}$$

(3). 校核边界条件

左右边界（主要边界）:应力条件应该准确满足

$$(\sigma_x)_{x=\pm b}=0,\left(\tau_{xy}\right)_{x=\pm b}=0,\text{满足}$$

上边界（次要边界）：圣维南原理

$$\begin{cases}\int_{-b}^{b}\left(\sigma_y\right)_{y=0}dx=-F\rightarrow B=-\frac{F}{4b}\\ \int_{-b}^{b}x\left(\sigma_y\right)_{y=0}dx=-\frac{Fb}{2}\rightarrow A=-\frac{F}{8b^2}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\sigma_x=0\\ \sigma_y=-\frac{2F}{2b}\left(1+\frac{3x}{2b}\right)\\ \tau_{xy}=0\end{cases}$$

(4). 求应变分量

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left(\sigma_x-\mu\sigma_y\right)=\frac{\mu F}{2Eb}\left(1+\frac{3x}{2b}\right)\\ \varepsilon_y=\frac{1}{E}\left(\sigma_y-\mu\sigma_x\right)=-\frac{F}{2Eb}\left(1+\frac{3x}{2b}\right)\\ \gamma_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy}=0\end{cases}$$

(5). 求位移分量

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\mu F}{2Eb}\left(1+\frac{3x}{2b}\right)\\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{F}{2Eb}\left(1+\frac{3x}{2b}\right)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}u=\frac{\mu F}{2Eb}\left(x+\frac{3x^2}{4b}\right)+f_1(y)\\ v=-\frac{F}{2Eb}\left(y+\frac{3xy}{2b}\right)+f_2(x)\end{cases}$$

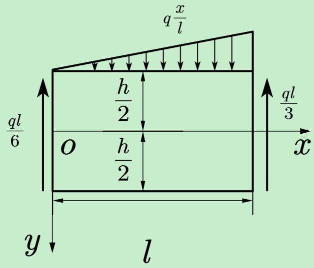
$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\gamma_{xy}=0\Longrightarrow-\frac{df_1(y)}{dy}+\frac{3E}{4Eb^2}y=\frac{df_2(x)}{dx}=w$$

$$\begin{cases} f_1(y) = \frac{3F}{8Eb^2}y^2 - wy + u_0 \\ f_2(x) = wx + v_0 \end{cases}$$

*(6).* 由刚体约束条件确定待定常数

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=0;y=h} = 0 \\ (u)_{x=0;y=h} = 0 \\ (v)_{x=0;y=h} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} w = \frac{3F}{4Eb^2}h \\ u_0 = \frac{3F}{8Eb^2} \\ v_0 = \frac{F}{2Eb}h \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = \frac{\mu F}{2Eb}\left(x + \frac{3x^2}{4b}\right) + \frac{3F}{8Eb^2}(h-y)^2 \\ v = \frac{F}{2Eb}(h-y)\left(1 + \frac{3x}{2b}\right) \end{cases}$$

**例 3.8** 图中矩形截面的简支梁上，作用有三角形分布荷载，试用应力函数$\Phi = Ax^3y^3 + Bxy^5 + Cx^3y + Dxy^3 + Ex^3 + Fxy$求解应力分量。




**解**

*(1).* 代入相容方程得：

$$72A + 120B = 0 \Longrightarrow A = -\frac{5}{3}B$$

*(2).* 在无体力情况下求应力分量

$$\begin{cases} \sigma_x = -10Bx^3y + 20Bxy^3 + 6Dxy \\ \sigma_y = -10Bxy^3 + 6Cxy + 6Ex \\ \tau_{xy} = 15Bx^2y^2 - 5By^4 - 3Cx^2 - 3Dy^2 - F \end{cases}$$

*(3).* 考察边界条件

上下边界（主要边界）：

$$\begin{cases} (\sigma_y)_{y=\frac{h}{2}} = q\frac{x}{l} \\ (\sigma)_{y=-\frac{h}{2}} = 0 \\ (\tau_{xy})_{y=\pm\frac{h}{2}} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{4}Bh^3 + 3Ch + 6E = \frac{q}{l} \\ \frac{5}{4}Bh^3 - 3Ch + 6E = 0 \\ 3C - \frac{15}{4}Bh^2 = 0 \\ \frac{5}{16}Bh^4 + \frac{3}{4}Dh^2 + F = 0 \end{cases}$$

左右边界（次要边界）：

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy})_{x=0} = \frac{ql}{6} \Longrightarrow B\frac{h^5}{16} + D\frac{h^4}{4} + Fh = -\frac{ql}{6}$$

联立方程求解得：

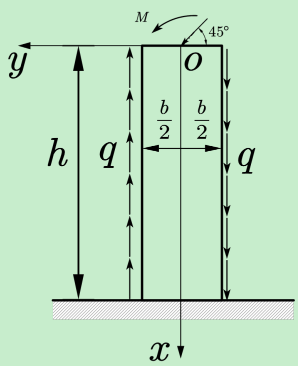
$$\begin{cases} A = -\frac{q}{3lh^3} \\ B = \frac{q}{5lh^3} \\ C = \frac{q}{4lh} \\ D = q\left(\frac{l}{3h^3} - \frac{1}{10lh}\right) \\ E = \frac{q}{12l} \\ F = q\left(\frac{h}{80l} - \frac{l}{4h}\right) \end{cases}$$

解得应力分量为

$$\begin{cases} \sigma_x = 2q\frac{xy}{lh}\left(\frac{l^2-x^2}{h^2} + 2\frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{10}\right) \\ \sigma_y = -q\frac{x}{2l}\left(1 - 3\frac{y^2}{h^2} + 4\frac{y^3}{h^3}\right) \\ \tau_{xy} = \frac{q}{4}\left(1 - 4\frac{y^2}{h^2}\right)\left(\frac{l}{h} - 3\frac{x^2}{lh} - \frac{h}{20l} + \frac{y^2}{lh}\right) \end{cases}$$

代入右边界也满足。

**例 3.9** 矩形截面的柱体受到顶部的集中力为$\sqrt{2}F$和力矩$M$的作用，不计体力，试用应力函数$\Phi = Ay^2 + Bxy + Cxy^3 + Dy^3$，求解其应力分量。




**解**

*(1).* 将$\Phi$代入相容方程，满足。

*(2).* 在无体力情况下，求解应力分量

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 2A + 6Cxy + 6Dy \\ \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0 \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = -\left(B + 3Cy^2\right) \end{cases}$$

*(3).* 考察边界条件

左右边界（主要边界）：

$$\left(\tau_{xy}\right)_{y=\frac{b}{2}} = -q \Longrightarrow B + \frac{3}{4}Cb^2 = q$$

上边界（次要边界）：

$$\begin{cases} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (\sigma_x)_{x=0}\, dy = -F \\ \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y\,(\sigma_x)_{x=0}\, dy = -M \\ \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (\tau_{xy})_{x=0}\, dy = -F \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Ab = -F \\ \frac{Db^3}{2} = -F \\ B + \frac{1}{4}Cb^2 = \frac{F}{b} \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} A = -\frac{F}{b} \\ B = \frac{3F-qb}{2b} \\ C = \frac{2qb-2F}{b^3} \\ D = -\frac{2M}{b^3} \end{cases}$$

最后得到应力分量

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{12(qb-F)}{b^3}xy - \frac{2My}{b^3} \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -\left(\frac{6(qb-F)}{b^3}y^2 + \frac{3F-qb}{2b}\right) \end{cases}$$

# 4　平面问题的极坐标解答

## 4.1　极坐标中的平衡微分方程

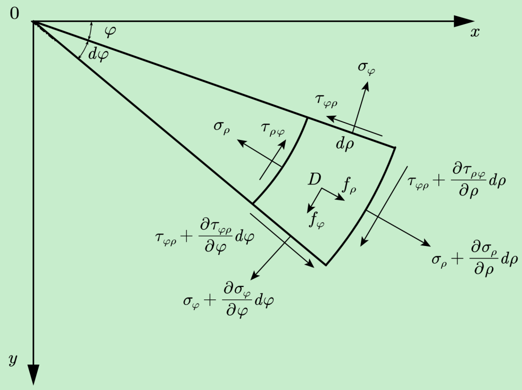



图 1

### 4.1.1　极坐标中的平衡微分方程

$$
\begin{cases}
\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\rho\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\varphi}{\rho}+f_\rho=0\\
\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial\tau_{\rho\varphi}}{\partial\rho}+\frac{2\tau_{\rho\varphi}}{\rho}+f_\varphi=0
\end{cases}
\tag{13}
$$

## 4.2　极坐标中的几何方程和物理方程

### 4.2.1　极坐标中的几何方程

$$
\begin{cases}
\varepsilon_\rho=\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}\\
\varepsilon_\varphi=\frac{u_\rho}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}\\
\gamma_{\rho\varphi}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}-\frac{u_\varphi}{\rho}
\end{cases}
\tag{14}
$$

### 4.2.2　极坐标中的物理方程

$$
\begin{cases}
\varepsilon_\rho=\frac{1}{E}\left(\sigma_\rho-\mu\sigma_\varphi\right)\\
\varepsilon_\varphi=\frac{1}{E}\left(\sigma_\varphi-\mu\sigma_\rho\right)\\
\gamma_{\rho\varphi}=\frac{1}{G}\tau_{\rho\varphi}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{\rho\varphi}
\end{cases}
\tag{15}
$$

平面应变的情况下，需将上式中的$E$换为$\frac{E}{1-\mu^2}$，$\mu$换为$\frac{\mu}{1-\mu}$。

## 4.3 坐标变换

### 4.3.1 位移分量的坐标变换

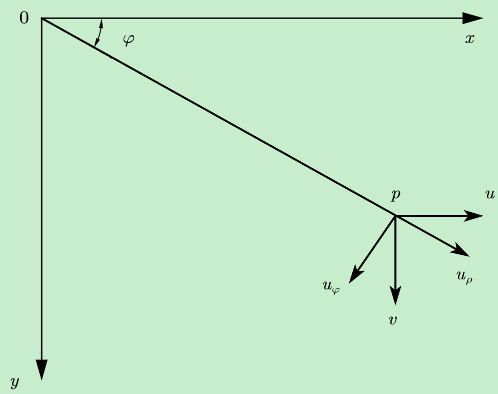



图 2

$$\begin{cases} u_\rho = u\cos\varphi + v\sin\varphi \\ u_\varphi = -u\sin\varphi + v\cos\varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \end{pmatrix} \tag{16}$$

### 4.3.2 应力分量的坐标变换

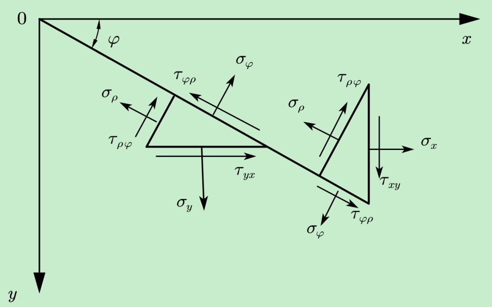



图 3

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_\rho\cos^2\varphi + \sigma_\varphi\sin^2\varphi - 2\tau_{\rho\varphi}\sin\varphi\cos\varphi \\ \sigma_y = \sigma_\rho\sin^2\varphi + \sigma_\varphi\cos^2\varphi + 2\tau_{\varphi\rho}\sin\varphi\cos\varphi \\ \tau_{xy} = \frac{\sigma_\rho-\sigma_\varphi}{2}\sin 2\varphi + \tau_{\rho\varphi}\cos 2\varphi \end{cases} \tag{17}$$

$$
\begin{cases}
\sigma_x = \frac{\sigma_\rho+\sigma_\varphi}{2} + \frac{\sigma_\rho-\sigma_\varphi}{2}\cos 2\varphi - \tau_{\rho\varphi}\sin 2\varphi \\
\sigma_y = \frac{\sigma_\rho+\sigma_\varphi}{2} - \frac{\sigma_\rho-\sigma_\varphi}{2}\cos 2\varphi - \tau_{\rho\varphi}\sin 2\varphi \\
\tau_{xy} = \frac{\sigma_\rho-\sigma_\varphi}{2}\sin 2\varphi + \tau_{\rho\varphi}\cos 2\varphi
\end{cases}
\tag{18}
$$

$$
\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_\rho & \tau_{\varphi\rho} \\ \tau_{\rho\varphi} & \sigma_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^T
\tag{19}
$$

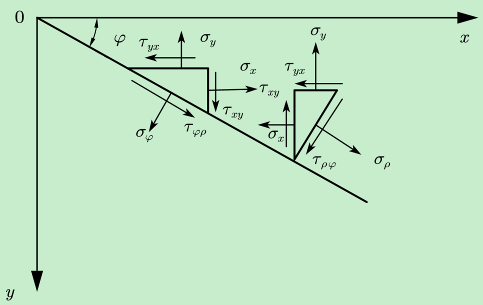



图 4

$$
\begin{cases}
\sigma_\rho = \sigma_x\cos^2\varphi + \sigma_y\sin^2\varphi + 2\tau_{xy}\sin\varphi\cos\varphi \\
\sigma_\varphi = \sigma_x\sin^2\varphi + \sigma_y\cos^2\varphi - 2\tau_{xy}\sin\varphi\cos\varphi \\
\tau_{\rho\varphi} = \left(\sigma_y - \sigma_x\right)\sin\varphi\cos\varphi + \tau_{xy}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)
\end{cases}
\tag{20}
$$

$$
\begin{cases}
\sigma_\rho = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi \\
\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\varphi - \tau_{xy}\sin 2\varphi \\
\tau_{\varphi\rho} = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi
\end{cases}
\tag{21}
$$

$$
\begin{bmatrix} \sigma_\rho & \tau_{\varphi\rho} \\ \tau_{\rho\varphi} & \sigma_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}
\tag{22}
$$

## 4.4 极坐标中的应力函数与相容方程

当$f_\rho = f_\varphi = 0$时：

$$
\begin{cases}
\sigma_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} \\
\sigma_\varphi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} \\
\tau_{\rho\varphi} = -\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)
\end{cases}
\tag{23}
$$

### 4.4.1 相容方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)^2\Phi=0 \tag{24}$$

## 4.5 轴对称应力和相容的位移

所谓轴对称问题，是指物体几何形状或某物理量是绕某一轴对称的，凡通过此轴的任何面均为对称面。如果该物体所受外部荷载也对称于该轴，那么相应所产生的应力也必对称该轴。

令$\Phi=\Phi(\rho)$

$$\sigma_\rho=\frac{1}{\rho}\frac{d\Phi}{d\rho},\sigma_\varphi=\frac{d^2\Phi}{d\rho^2},\tau_{\rho\varphi}=0 \tag{25}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\Phi=0 \tag{26}$$

即

$$\Phi=A\ln\rho+B\rho^2\ln\rho+C\rho^2+D \tag{27}$$

应力分量

$$\begin{cases}\sigma_\rho=\frac{A}{\rho^2}+B(1+2\ln\rho)+2C\\ \sigma_\varphi=-\frac{A}{\rho^2}+B(3+2+\ln\rho)+2C\\ \tau_{\rho\varphi}=0\end{cases} \tag{28}$$

代入物理方程和几何方程可得位移分量

$$\begin{cases}u_\rho=\frac{1}{E}\left[-(1+\mu)\frac{A}{\rho}+2(1-\mu)B\rho(\ln\rho-1)+(1-3\mu)B\rho+2(1-\mu)C\rho\right]+I\cos\varphi+K\sin\varphi\\ u_\varphi=\frac{4B\rho\varphi}{E}+H\rho-I\sin\varphi+K\cos\varphi\end{cases} \tag{29}$$

(1). 在轴对称应力条件下，应力、应变和位移的通解，适用于任何轴对称应力问题。
(2). 在轴对称应力条件下，应变也是轴对称的，但位移不一定是轴对称的。
(3). 实现轴对称应力的条件是：物体形状、体力和面力应是轴对称的。
(4). 轴对称应力及对应的位移的通解已满足相容方程，它们还需满足边界条件及多连体中的位移单值条件，并由此求出系数A、B、C。

注 欧拉方程：

$$x^ny^{(n)}+P_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}xy'+P_ny=0$$

特征方程为：

$$[k(k-1)\cdots(k-n+1)+P_1[k(k-1)\cdots(k-n+2)]+\cdots+P_{n-1}k+P_n]=0$$

关于$K$的$n$次代数方程，可解得$n$个特征根$k_1$、$k_2$、$\cdots k_n$

*(1).* 当它们是互不相等的实根时，通解具有幂函数的形式

$$y = C_1 x^{k_1} + C_2 x^{k_2} + \cdots + C_n x^{k_n}$$

*(2).* 每当出现重根时，每多一重根，就多乘一个$\ln x$

如：当$k_1$为$m\,(m < n)$重根时，通解为

$$y = C_1 x^{k_1} + C_2 x^{k_2} \ln x + \cdots + C_m x^{k_1} \ln^{m-1} x + C_{m+1} x^{k_{m+1}} + \cdots + C_n x^{k_n}$$

*(3).* 出现共轭复根时，则虚部是三角函数因子

如：当$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$，通解为

$$y = C_1 x^{\alpha} \cos\left(\beta \ln x\right) + C_2 x^{\alpha} \sin\left(\beta \ln x\right) + C_3 x^{k_3} + \cdots + C_n x^{k_n}$$

*(4).* 当出现复重根，则实部要多乘因子$\ln x$

如：$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$为$m\left(m < \frac{n}{2}\right)$重共轭复根时，通解为

$$\begin{aligned} y = &\left[C_1 x^{\alpha} + C_2 x^{\alpha} \ln x + \cdots + C_m x^{\alpha} \ln^{m-1} x\right] \cos\left(\beta \ln x\right) + \\ &\left[C_{m+1} x^{\alpha} + C_{m+2} x^{\alpha} \ln x + \cdots + C_{2m} x^{\alpha} \ln^{m-1} x\right] \sin\left(\beta \ln x\right) + \\ &C_{2m+1} x^{k_{2m+1}} + \cdots + C_n x^{k_n} \end{aligned}$$

**例 4.1** 试求解平面轴对称应力问题的相容方程

$$\rho^4 \Phi^{(4)} + 2\rho^3 \Phi^{(3)} - \rho^2 \Phi'' + \rho \Phi' = 0$$

**解** 特征方程:

$$k\left(k-1\right)\left(k-2\right)\left(k-3\right) + 2k\left(k-1\right)\left(k-2\right) - k\left(k-1\right) + k = 0$$

解得:

$$k_{1,2} = 0, k_{3,4} = 2$$

得:

$$\Phi = A \ln \rho + B\rho^2 \ln \rho + C\rho^2 + D$$

**例 4.2** 试求解如下的常微分方程

$$\rho^4 f^{(4)}\left(\rho\right) + 2\rho^3 f'''\left(\rho\right) - 9\rho^2 f''\left(\rho\right) + 9\rho f'\left(\rho\right) = 0$$

**解** 特征方程:

$$k\left(k-1\right)\left(k-2\right)\left(k-3\right) + 2k\left(k-1\right)\left(k-2\right) - 9k\left(k-1\right) + 9k = 0$$

解得:

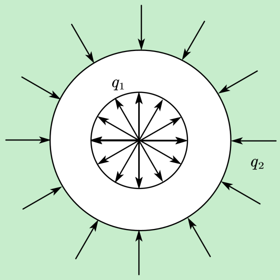
$$k_1 = 4, k_2 = 2, k_3 = 0, k_4 = -2$$

得:

$$f\left(\rho\right) = A\rho^4 + B\rho^2 + C + D\rho^{-2}$$

## 4.6 圆环或圆筒受均布压力

**例 4.3** 设有圆环（平面应力问题）或圆筒（平面应变问题）受均匀内压力$q_1$，和外压力$q_2$作用；内半径为$r$;外半径为$R$。试求应力分量；位移分量。




**解** 轴对称应力问题的应力通解：

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{A}{\rho^2} + B\left(1+2\ln\rho\right) + 2C \\ \sigma_\varphi = -\frac{A}{\rho^2} + B\left(3+2+\ln\rho\right) + 2C \\ \tau_{\rho\varphi} = 0 \end{cases}$$

应力边界条件：

$$\begin{cases} \left(\sigma_\rho\right)_{\rho=r} = -q_1 \\ \left(\sigma_\rho\right)_{\rho=R} = -q_2 \\ \left(\tau_{\rho\varphi}\right)_{\rho=r} = \left(\tau_{\rho\varphi}\right)_{\rho=R} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{A}{r^2} + B\left(1+2\ln r\right) + 2C = -q_1 \\ \frac{A}{R^2} + B\left(1+2\ln r\right) + 2C = -q_2 \end{cases}$$

圆环或圆筒具有贯穿孔洞，为多连体，故需进一步考虑位移单值条件：由

$$u_\varphi = \frac{4B\rho\varphi}{E} + H\rho - I\sin\varphi + K\cos\varphi$$

考虑$(\rho,\varphi)$和$(\rho,\varphi+2\pi)$同一点只能有一确定的位移，故$B=0$。则*:*

$$\begin{cases} A = \frac{r^2R^2(q_2-q_1)}{R^2-r^2} \\ C = \frac{q_1r^2-q_2R^2}{R^2-r^2} \end{cases}$$

得*(*拉梅的解答*)*:

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{\frac{R^2}{\rho^2}-1}{\frac{R^2}{r^2}-1}q_1 - \frac{1-\frac{r^2}{\rho^2}}{1-\frac{r^2}{R^2}}q_2 \\ \sigma_\varphi = \frac{\frac{R^2}{\rho^2}+1}{\frac{R^2}{r^2}-1}q_1 - \frac{1+\frac{r^2}{\rho^2}}{1-\frac{r^2}{R^2}}q_2 \end{cases}$$

**例 4.4** 轴对称应力条件下的应力和位移的通解，可以应用于各种应力边界条件和位移边界条件的情形，试考虑下列圆环或圆筒的问题应如何求解

*(1).* 内边界受均布压力$q_1$作用，而外边界为固定边.

(2). 外边界受均布压力$q_2$作用，而内边界为固定边.

(3). 外边界受到强迫的均匀位移$u_\rho = -\varDelta$，而内边界为自由边（如车辆的轮毂的作用.

(4). 内边界受到强迫的均匀位移$u_\rho = \varDelta$，而外边界为自由边.

解

(1). 应力边界条件:

$$\begin{cases}(\sigma_\rho)_{\rho=r} = -q_1 \\ (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=r} = 0\end{cases} \Longrightarrow \frac{A}{r^2} + 2C = -q_1$$

位移边界条件:

$$\begin{cases}(u_\rho)_{\rho=R} = 0 \\ (u_\varphi)_{\rho=R} = 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}H = I = K = 0 \\ -(1+\mu)\frac{A}{R} + 2(1-\mu)CR = 0\end{cases}$$

(2). 应力边界条件:

$$\begin{cases}(\sigma_\rho)_{\rho=R} = -q_2 \\ (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=R} = 0\end{cases} \Longrightarrow \frac{A}{R^2} + 2C = -q_2$$

位移边界条件:

$$\begin{cases}(u_\rho)_{\rho=r} = 0 \\ (u_\varphi)_{\rho=r} = 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}H = I = K = 0 \\ -(1+\mu)\frac{A}{r} + 2(1-\mu)Cr = 0\end{cases}$$

(3). 应力边界条件:

$$\begin{cases}(\sigma_\rho)_{\rho=r} = 0 \\ (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=r} = 0\end{cases} \Longrightarrow \frac{A}{r^2} + 2C = 0$$

位移边界条件:

$$\begin{cases}(u_\rho)_{\rho=R} = -\varDelta \\ (u_\varphi)_{\rho=R} = 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}H = I = K = 0 \\ -(1+\mu)\frac{A}{R} + 2(1-\mu)CR = -E\varDelta\end{cases}$$

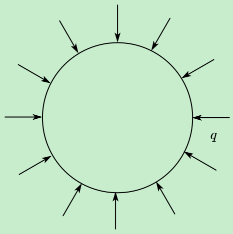
(4). 应力边界条件:

$$\begin{cases}(\sigma_\rho)_{\rho=R} = 0 \\ (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=R} = 0\end{cases} \Longrightarrow \frac{A}{R^2} + 2C = 0$$

位移边界条件:

$$\begin{cases}(u_\rho)_{\rho=r} = -\varDelta \\ (u_\varphi)_{\rho=r} = 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}H = I = K = 0 \\ -(1+\mu)\frac{A}{r} + 2(1-\mu)Cr = -E\varDelta\end{cases}$$

**例 4.5** 实心圆盘在$\rho = r$的圆周上受有均布压力$q$的作用，试求其应力分量。




**解** 平面轴对称应用问题，应力通解为：

$$\begin{cases}\sigma_\rho = \frac{A}{\rho^2} + B(1+2\ln\rho) + 2C \\ \sigma_\varphi = -\frac{A}{\rho^2} + B(3+2+\ln\rho) + 2C \\ \tau_{\rho\varphi} = 0\end{cases}$$

应力的有界性，圆盘中心处（即$\rho = 0$）处的应力值应当有界，不能是无限大的故$A = B = 0$

应力边界条件:

$$\begin{cases}\left(\sigma_\rho\right)_{\rho=r} = -q \\ \left(\tau_{\rho\varphi}\right)_{\rho=r} = 0\end{cases} \Longrightarrow C = -\frac{q}{2}$$

故实心圆盘的应力解答:

$$\begin{cases}\sigma_\rho = \sigma_\varphi = -q \\ \tau_{\rho\varphi} = 0\end{cases}$$

## 4.7 压力隧洞

问题描述：圆筒埋在无限大弹性体中，受有均布内压力$q$，设圆筒和无限大弹性体的弹性常数分别为$E, \mu$, 和$E', \mu'$

问题本质:本题是两个圆筒的接触问题，两个圆筒均为轴对称问题（平面应变问题），因为不符合均匀性假定，必须分别采用两个轴对称解答。

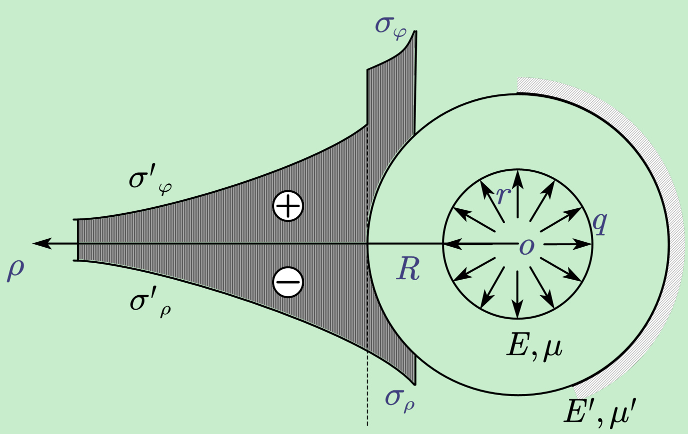



图 5: $n < 1$

不管是内圆筒还是外弹性体，都有贯穿孔道，属于多连体，故需要考虑位移单值条件有$B = 0, B' = 0$。

内圆筒应力表达式：

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{A}{\rho^2} + 2C \\ \sigma_\varphi = -\frac{A}{\rho^2} + 2C \end{cases}$$

无限大弹性体应力表达式：

$$\begin{cases} \sigma'_\rho = \frac{A'}{\rho^2} + 2C' \\ \sigma'_\varphi = -\frac{A'}{\rho^2} + 2C' \end{cases}$$

根据圣维南原理，离内圆筒的无穷远处的应力应为零。并且圆筒和无限大弹性体的接触面上的应力应当相等则边界条件为：

$$\begin{cases} \left(\sigma_\rho\right)_{\rho=r} = -q \\ \left(\sigma'_\rho\right)_{\rho\to\infty} = 0 \\ \left(\sigma_\rho\right)_{\rho=R} = \left(\sigma'_\rho\right)_{\rho=R} \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} \frac{A}{r^2} + 2C = -q \\ C' = 0 \\ \frac{A}{R^2} + 2C = \frac{A'}{R^2} + 2C' \end{cases}$$

在接触面上圆筒和无限大弹性体应当具有相同的位移，得：

$$\left(u_\rho\right)_{\rho=R} = \left(u'_\rho\right)_{\rho=R}$$

即：

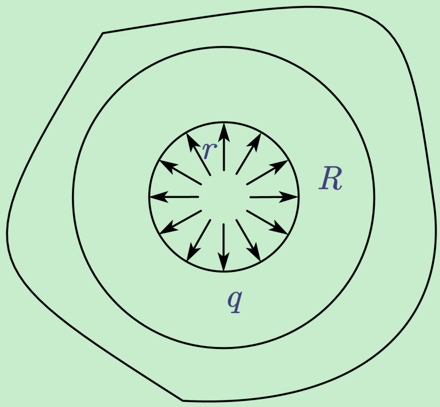
$$\frac{1+\mu}{E}\left[2(1-2\mu)CR - \frac{A}{R}\right] + I\cos\varphi + K\sin\varphi = \frac{1+\mu'}{E'}\left[2(1-2\mu')C'R - \frac{A'}{R}\right] + I'\cos\varphi + K'\sin\varphi$$

因为在接触面的任意一点都要满足上式，则有：

$$\frac{1+\mu}{E}\left[2(1-2\mu)CR - \frac{A}{R}\right] = \frac{1+\mu'}{E'}\left[2(1-2\mu')C'R - \frac{A'}{R}\right]$$

令$n = \frac{E'(1+\mu)}{E(1+\mu')}$：综合方程，联立可得：

$$\begin{cases} \sigma_\rho = -q\frac{[1+(1-2\mu)n]\frac{R^2}{\rho^2}-(1-n)}{[1+(1-2\mu)n]\frac{R^2}{r^2}-(1-n)} \\ \sigma_\rho = q\frac{[1+(1-2\mu)n]\frac{R^2}{\rho^2}+(1-n)}{[1+(1-2\mu)n]\frac{R^2}{r^2}-(1-n)} \\ \sigma'_\rho = -\sigma'_\varphi = -q\frac{2(1-\mu)n\frac{R^2}{\rho^2}}{[1+(1-2\mu)n]\frac{R^2}{r^2}-(1-n)} \end{cases} \tag{30}$$




**例 4.6** 设有一刚体，具有半径$R$圆柱形孔道，孔道内放置外半径为$R$，内半径为$r$的圆筒，圆筒受均布压力$q$,试求出圆筒的应力。

**解** 圆筒轴对称应力问题的通解为：

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \frac{A}{\rho^2} + 2C \\ \sigma_\varphi = -\frac{A}{\rho^2} + 2C \\ \tau_{\rho\varphi} = 0 \end{cases}$$

位移通解：

$$\begin{cases} u_\rho = \frac{1+\mu}{E}\left[-\frac{A}{\rho} + 2(1-2\mu)C\rho\right] + I\cos\varphi + K\sin\varphi \\ u_\varphi = H\rho - I\sin\varphi + K\cos\varphi \end{cases}$$

应力边界条件：

$$(\sigma_\rho)_{\rho=r} = -q$$

刚体是不可形变的，它能起到限制圆筒外边界径向位移的作用，因此位移边界条件：

$$(u_\rho)_{\rho=R} = 0$$

解得：

$$\begin{cases} A = \frac{-q}{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{1-2\mu}\frac{1}{R^2}} \\ C = \frac{-q}{2R^2\left(\frac{1-2\mu}{r^2}+\frac{1}{R^2}\right)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sigma_\rho = \frac{\frac{1-2\mu}{\rho^2}+\frac{1}{R^2}}{\frac{1-2\mu}{r^2}+\frac{1}{R^2}}q \\ \sigma_\varphi = \frac{\frac{1-2\mu}{\rho^2}-\frac{1}{R^2}}{\frac{1-2\mu}{r^2}+\frac{1}{R^2}}q \end{cases}$$

**注** 本题不能按照压力隧洞的方式求解，因为在外部与圆筒相接触的是一个刚体，而刚体是不能引用弹性力学的解答

## 4.8 曲梁的纯弯曲

### 4.8.1 问题及其描述

矩形截面曲梁：内半径为$a$,外半径为$b$，在两端受有大小相等而转向相反的力偶$M$作用（梁的厚度为一个单位）：$o$为曲梁的曲率转中心，两端面间极角为$\beta$，

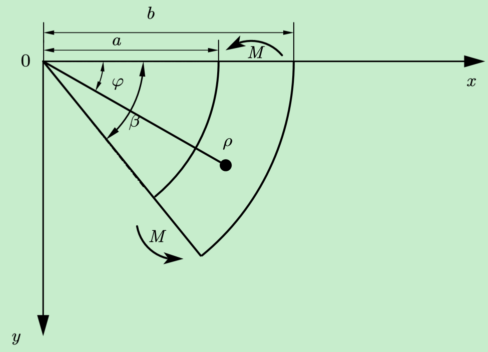



图 6

梁的全部边界都没有剪力。

在梁的内外两面，边界要求：$(\sigma_\rho)_{\rho=a}=0,(\sigma_\rho)_{\rho=b}=0$

代入应力通解得：

$$\begin{cases}\frac{A}{a^2}+B(1+\ln 2a)+2C=0\\ \frac{A}{b^2}+B(1+\ln 2b)+2C=0\end{cases}$$

根据圣维南原理，环向正应力$\sigma_\varphi$的主矢量应当为零，并合成弯矩$M$，因此要求：

$$\int_a^b \sigma_\varphi d\rho=0,\int_a^b \rho\sigma_\varphi d\rho=M$$

可求得：

$$-(\Phi)_a^b=M$$

即

$$-\left(A\ln\frac{b}{a}+Bb^2\ln b+Cb^2+D\right)+\left(A\ln a+Ba^2\ln a+Ca^2+D\right)=-M$$

令$N=\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)^2-4\frac{b^2}{a^2}\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2$：可得：

$$\begin{cases}A=\frac{4M}{N}\frac{b^2}{a^2}\ln\frac{b}{a}\\ B=\frac{2M}{a^2N}\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)\\ C=-\frac{M}{a^2N}\left[\frac{b^2}{a^2}-1+2\left(\frac{b^2}{a^2}\ln b-\ln a\right)\right]\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sigma_\rho=-\frac{4M}{Na^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\ln\frac{b}{\rho}+\ln\frac{\rho}{a}-\frac{b^2}{\rho^2}\ln\frac{b}{a}\right)\\ \sigma_\varphi=\frac{4M}{Na^2}\left(\frac{b^2}{a^2}-1-\frac{b^2}{a^2}\ln\frac{b}{\rho}-\ln\frac{\rho}{a}-\frac{b^2}{\rho^2}\ln\frac{b}{a}\right)\\ \tau_{\rho\varphi}=0\end{cases}\tag{31}$$

注

(1). $\rho = a, \sigma_\varphi$取得最大值。

(2). 中性轴（$\sigma_\varphi = 0$距内侧纤维较近，离外侧较远，中心轴不在过截面形心。

(3). 与材料力学比较，$\sigma_\varphi$关于截面不再成双曲线分布，但曲率不大时这种情况影响较小，挤压应力$\sigma_\rho$实际不为零。

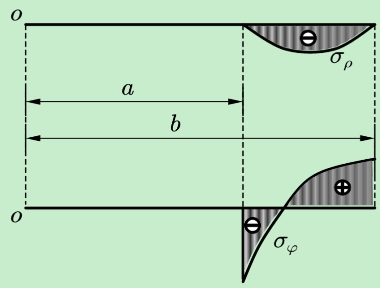
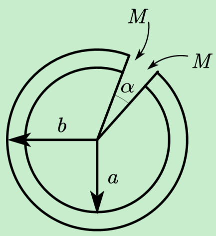



图 7

**例 4.7** 图示为带有一微小张角$\alpha$缺口的圆环，若将此圆环焊成一整环，试求此时圆环的内力矩$M$。




**解** 要使该圆环焊成一整环，需在两端加上一对平衡力矩$M$，使其产生环向位移$\delta = \rho\alpha$由两端受力偶作用时环向位移计算式

$$u_\varphi = \frac{4B}{E}\rho\varphi + H\rho - I\sin\varphi + K\cos\varphi$$

可得:

$$u_\varphi\big|_{\varphi=2\pi} - u_\varphi\big|_{\varphi=0} = \frac{8B\rho\pi}{E} = \delta = \rho\alpha \Rightarrow B = \frac{E\alpha}{8\pi}$$

代入$B$的计算式

$$B = \frac{2M}{a^2N}\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)$$

得：

$$M = \frac{E\alpha a^4 N}{16\pi\left(b^2 - a^2\right)}$$

## 4.9 圆孔的孔口应力集中

背景：工程结构中常开设孔口，最简单的为圆孔，本节研究“小圆孔孔口应力集中问题”

小孔的条件：

(1). 孔口尺寸≪弹性体尺寸,孔口引起的应力扰动局限于小范围内。

(2). 孔边距边界较远（>1.5倍孔口尺寸），孔口与边界互不干扰。