学籍番号 E1832　　名前 藤村勇仁

第 7 回課題

ヤコビ法による固有値導出に関して以下を確認せよ

1. 行列 M_i が直行行列であること（$M_i^T M_i = M_i M_i^T = I$ となること）.
2. $A_{i+1} = M_i^T A_i M_i$ の (p, q) 成分が $(a_{pp} - a_{qq})\cos\theta\sin\theta + a_{pq}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$ となること.
3. 2. の式の値が 0 となる θ が講義で示した式で与えられること.

＜解答＞

1.

$$M_i^T M_i = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & & \cos\theta & \cdots & -\sin\theta & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \sin\theta & \cdots & \cos\theta & & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & & \cos\theta & \cdots & \sin\theta & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & -\sin\theta & \cdots & \cos\theta & & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & & \cos^2\theta + \sin\theta & \cdots & \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta & \cdots & \cos^2\theta + \sin^2\theta & & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$$

$M_i^T M_i = M_i M_i^T = I$ だから、M_i は直行行列

2.

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cos\theta & \cdots & -\sin\theta & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ a_{p1} & & a_{pp} & \cdots & a_{pq} & & a_{pn} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & & a_{qp} & \cdots & a_{qq} & & a_{qn} \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \cos\theta \\ \vdots \\ \sin\theta \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(a_{pp}-a_{qq})\cos\theta\sin\theta + a_{qp}\cos^2\theta - a_{pq}\sin^2\theta$$

A_i の対称性より、$a_{pq}=a_{qp}$ よって、

$$(a_{pp}-a_{qq})\cos\theta\sin\theta + a_{pq}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

3.

$(a_{pp}-a_{qq})\cos\theta\sin\theta + a_{pq}(\cos^2\theta-\sin^2\theta) = 0$ とする。

$$\frac{1}{2}(a_{pp}-a_{qq})\sin 2\theta + a_{pq}\cos 2\theta = 0$$

i) $a_{pp} \neq a_{qq}$

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2a_{pq}}{a_{qq}-a_{pp}}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2a_{pq}}{a_{qq}-a_{pp}}\right)$$

ii) $a_{pp} = a_{qq}$

$$a_{pq}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$\theta=\frac{\pi}{4}$ とすると、この式は0となる。

$\cos\theta=\sin\theta$ より、$\theta=\frac{\pi}{4}$ で、$A_{i+1}=M_i^T A_i M_i$ の

(p,q) 成分は0となる。