

深層実習 第3,4回

中田尚

成績評価

- 共通
 - 出席80%以上、課題認定80%以上
- 中間レポート60%、演習成果報告書40%
 - 必ずしも発表一発勝負ではない。準備段階や提出資料も含める。
 - レポート
 - 2週に1つ程度を予定（8点×8回程度①～⑧）
 - 任意課題
 - 5点×2回程度
 - 演習成果報告20点×2⑨⑩

レポートの書き方

- 卒業論文に向けて体裁を重視します

- 内容6点＋体裁2点

体裁2点のためには、
章立て必須です
昨年の「しりとりレポート」
を参照

- 原則としてWordかPDF

- 文字サイズ等は常識の範囲で
 - TeX（で作成したPDF）でも良い

- **それ以外のファイル（ソースコードなど）は見ないと思ってください**

- 手書きの文章は不可

- スクリーンショットを挿入するのはOK

- 手書きの絵を挿入するのはOK

☆課題1

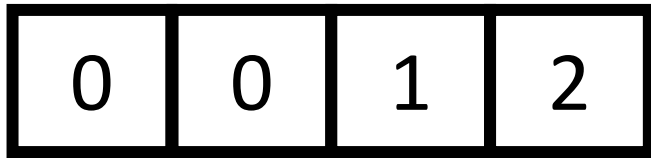
- 2つの正方行列の積を求めるpythonプログラムを作成して、行列サイズと実行時間の関係を調べる
 - 計算ライブラリを使用してはいけません
 - time や matplotlib 以外の import は禁止
 - ライブラリを使った実行は課題2で予定しています
- レポートにはグラフを含めること
 - 単に載せるのではなくグラフから読み取れる内容を説明すること
 - 実行時間の上限は「これ以上増やしても読み取れる内容が増えない」
と思えるところまで
 - とはいえ1分以上の実行は不要です
- 締切：4/17 23:59

行列積の定義

$$\bullet \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{7} & \boxed{8} \\ \boxed{9} & \boxed{10} \\ \boxed{11} & \boxed{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1 \times 7 + 2 \times 9 + 3 \times 11} & \boxed{1 \times 8 + 2 \times 10 + 3 \times 12} \\ \boxed{4 \times 7 + 5 \times 9 + 6 \times 11} & \boxed{4 \times 8 + 5 \times 10 + 6 \times 12} \end{bmatrix}$$

pythonはなぜ遅いのか

- Pythonのリストの構造
- `id()`を使うと、アドレスのようなものを取得できる
 - 見た目も`id`も同じであれば実体も同じ
- 参考：C言語の配列はこんな感じ

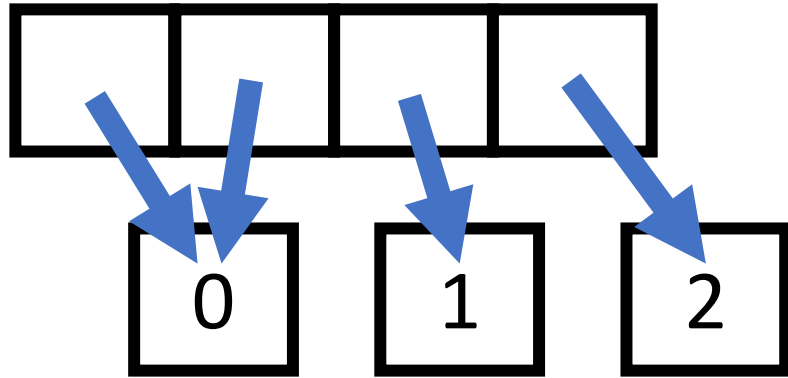


- Python
 - `data=[0,0,1,2]`
 - `print(id(data),id(data[0]),id(data[1]),id(data[2]),id(data[3]))`
⇒631744 343568 343568 358896 343632 （上位桁は同じなので省略）

このIDが同じ（0の部分）

pythonはなぜ遅いのか

- Pythonのデータ構造 (data=[0,0,1,2])



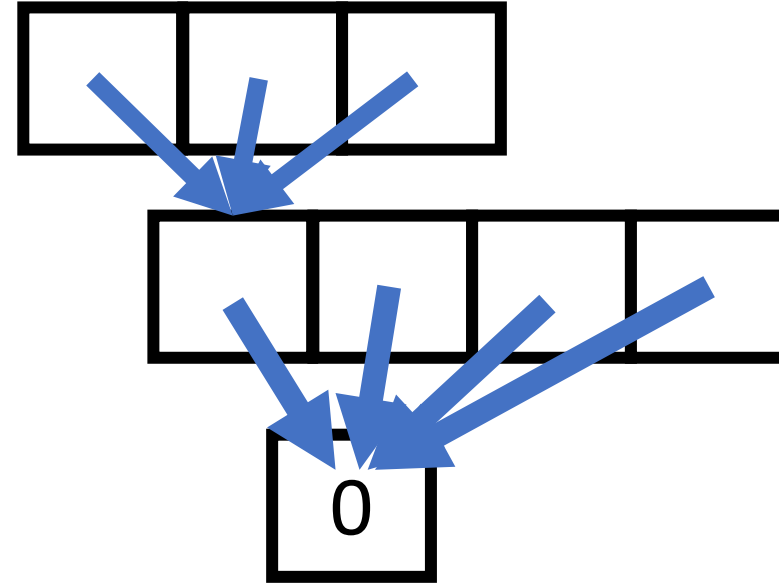
同一になるのは256以下に限るらしい

数字一つ一つが独立したオブジェクト
しかも同じ数字の部分は同一のオブジェクトへの参照
(つまり、数字を書き換える度にすでに出現したかどうかのチェックが必要)

- data=[0,0,1,2]
- print(id(data),id(data[0]),id(data[1]),id(data[2]),id(data[3]))
⇒631744 343568 343568 358896 343632 (上位桁は同じなので省略)

pythonはなぜ遅いのか

- `[[0]*4]*3` のデータ構造



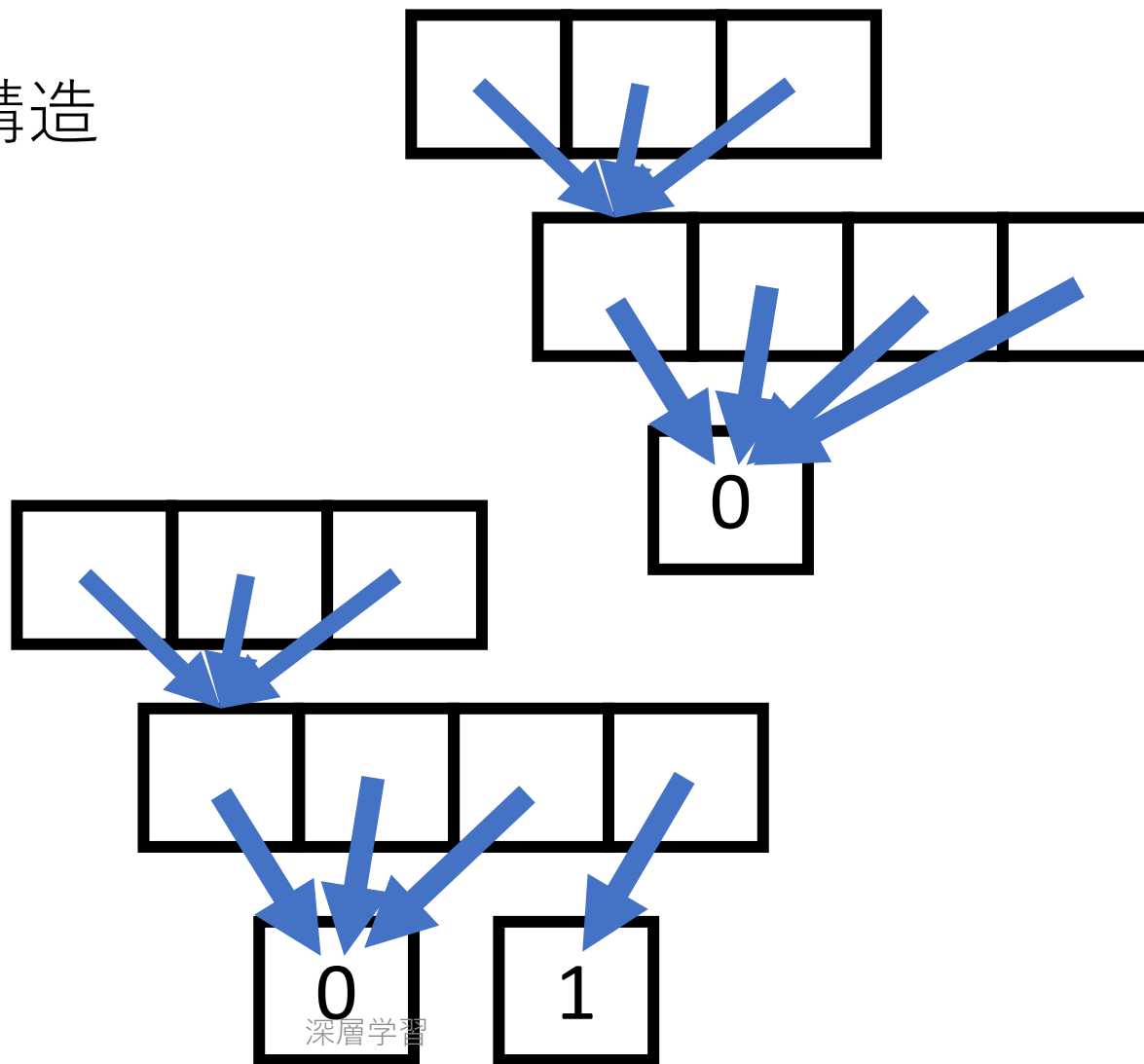
- `data = [[0]*4]*3`
- `print(id(data), id(data[0]), id(data[1]), id(data[2]))`
⇒ 631744 343632 343632 343632

pythonはなぜ遅いのか

- `[[0]*4]*3` のデータ構造

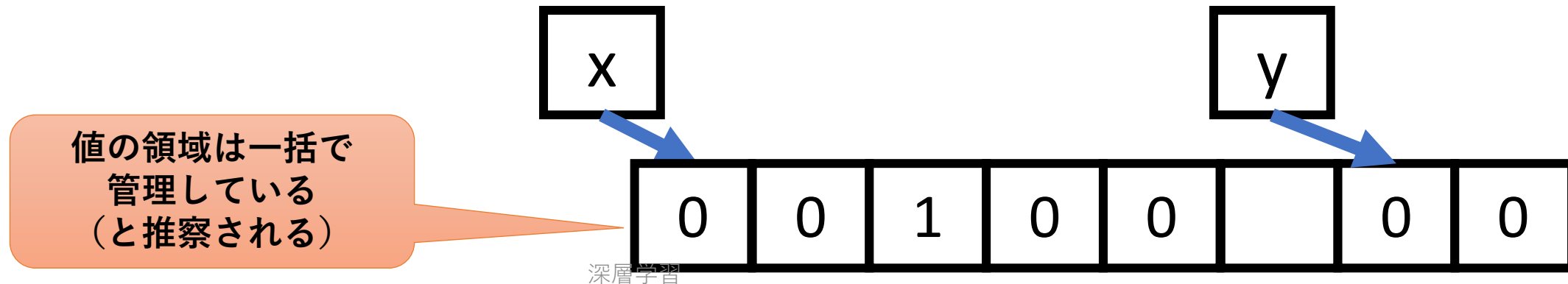
- `data[2][3]=1` を実行

- `[[0,0,0,1],
[0,0,0,1],
[0,0,0,1]]`
になる



numpy

- 数値計算ライブラリ
 - GPUは使わない
 - 配列部分はC言語と同じ
- $x=[0. 0. 1. 0. 0.]$, $y=[0. 0. 1. 0. 0.]$
 - `print(id(x),id(x[0]),id(x[1]),id(x[2]),id(y[2]))`
 $\Rightarrow 611152$ **961072 961072 961072 961072**



cupy

- numpyのGPU版
 - ほほほほ同じ（だけど一部違う）

```
import numpy as np
```

```
import cupy as cp
```

とすれば、npをcpにするだけで動くはず

numpy と cupy と pytorch の準備

```
import numpy as np
```

```
import cupy as cp
```

```
import torch
```

```
import time
```

numpy の行列積

N=10000

print("N=",N)

print("initializing")

npx=np.random.rand(N, N)

npz=np.random.rand(N, N)

**N×N行列を
乱数で初期化**

print("begin")

t1=time.time()

npz=np.matmul(npx, npz)

t2=time.time()

print("numpy",t2-t1,"sec",npz[0][0])

numpyの行列積

[0][0]のみ表示

cupy の行列積

npx, npy を使うので numpy の後ろに貼り付けること

```
print("N=", N)
```

```
print("initializing")
```

```
cpx = cp.array(npx)
```

```
cpy = cp.array(npy)
```

```
device = cp.cuda.Device()
```

```
props = cp.cuda.runtime.getDeviceProperties(device.id)
```

```
print("cupy", props["name"].decode())
```

```
t1 = time.time()
```

```
cpz = cp.matmul(cpx, cpy)
```

```
cp.cuda.Stream.null.synchronize()
```

```
t2 = time.time()
```

```
print("cupy", t2 - t1, "sec", cpz[0][0])
```

**N × N 行列を
numpy からコピー**

**GPU が使われているか
確認のため表示**

**GPU の計算が終わるのを待つ
待たないと一瞬で終わるように見える**

**[0][0] のみ表示
(numpy と同じか確認すること)**

```
# npz, npyを使うのでnumpyの後ろに貼り付けること
print("N=", N)
print("initializing")
tox = torch.from_numpy(npz).to("cuda")
toy = torch.from_numpy(npy).to("cuda")
```

**$N \times N$ 行列を
numpyからコピー**

```
print("torch", torch.cuda.get_device_name())
t1=time.time()
toz=torch.matmul(tox, toy)
torch.cuda.synchronize()
t2=time.time()
print("torch", t2-t1, "sec", toz[0][0])
```

**GPUが使われているか
確認のため表示**

**GPUの計算が終わるのを待つ
待たないと一瞬で終わるように見える**

**[0][0]のみ表示
(numpyと同じか確認すること)**

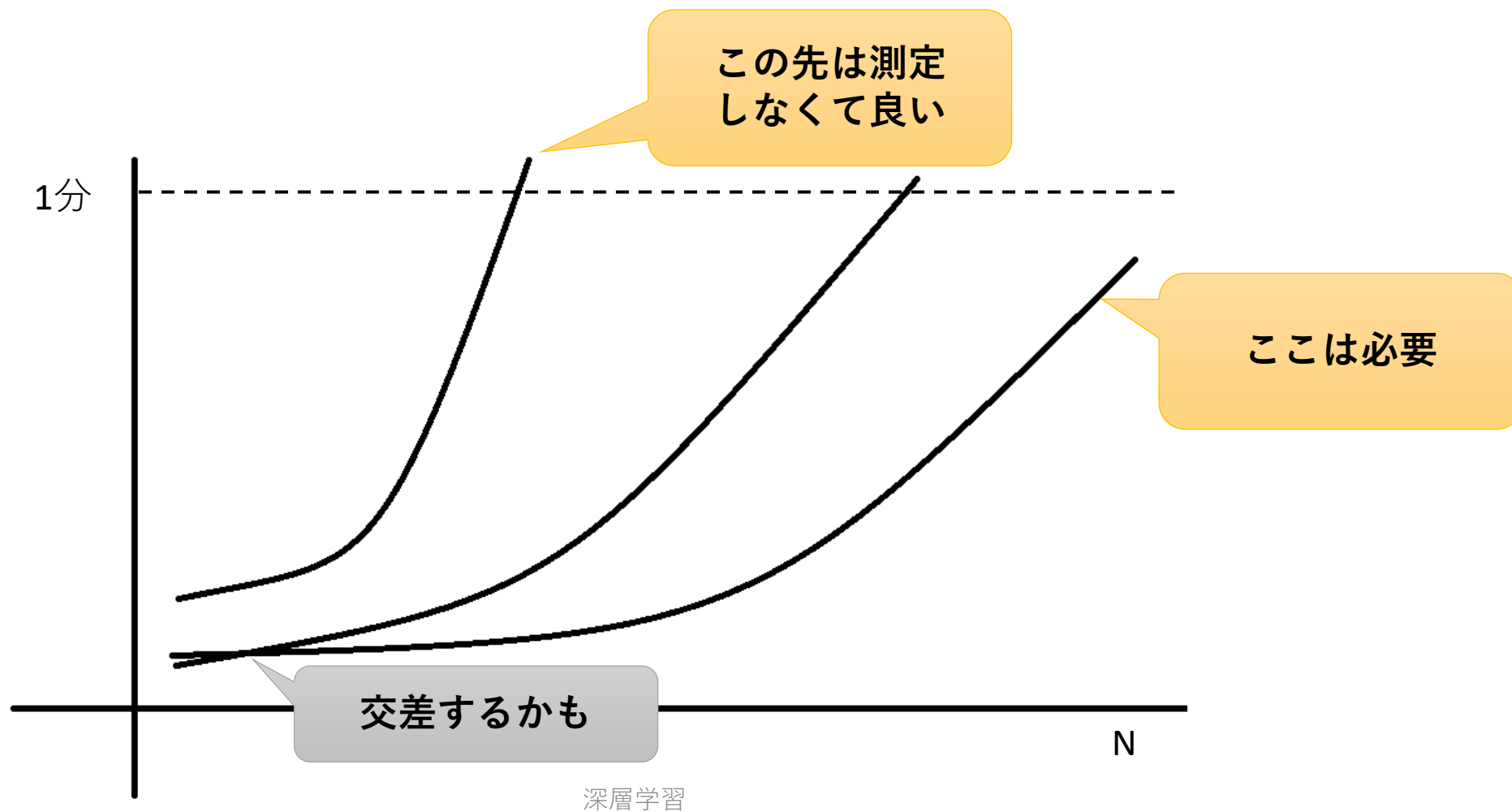
**全く同じとは
限らない
計算誤差がある**

実行例

```
N= 10000  
initializing  
begin  
numpy 2.1272497177124023 sec 2460.450931332193  
N= 10000  
initializing  
cupy A100-SXM4-40GB  
cupy 0.7341670989990234 sec 2460.4509313322037
```

これと違う結果になったら理由を考察すると良い
(必須では無い)

実行時間の測定



畳み込みの計算 (conv : Convolution)

- python (の基本機能)
- numpy (+ scipyを使う)
- cupy
- pytorch

畳み込みとは

- 畳み込みとは、関数 g を平行移動しながら関数 f に重ね足し合わせる二項演算である。 *Wikipedia*
 - 「重ね足し合わせる」がよくわからない
 - 「重ねた部分を要素毎に乗算し結果を足し合わせる」(離散値の場合)
 - 連続値の場合は積分として定義されるが省略

1次元の畳み込み

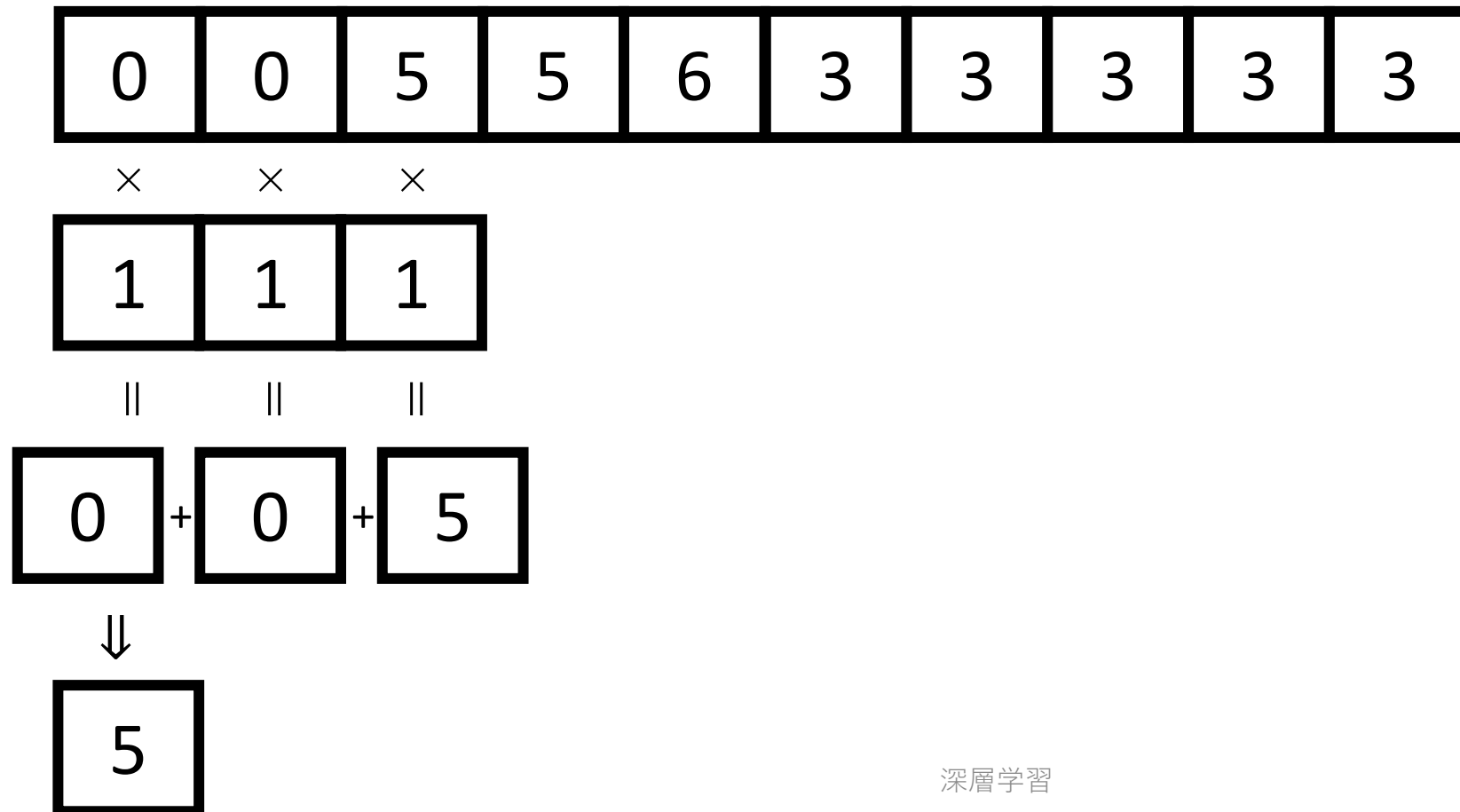
- 下記のようなデータと[1,1,1]の畳み込み

0	0	5	5	6	3	3	3	3	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

1	1	1
---	---	---

1次元の畳み込み

- 下記のようなデータと[1,1,1]の畳み込み



1次元の畳み込み

- 下記のようなデータと[1,1,1]の畳み込み

0	0	5	5	6	3	3	3	3	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

× × ×

1	1	1
---	---	---

|| || ||

0	+	5	+	5
---	---	---	---	---

⇓

5	10
---	----

1次元の畳み込み

- 下記のようなデータと[1,1,1]の畳み込み

0	0	5	5	6	3	3	3	3	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

× × ×

1	1	1
---	---	---

|| || ||

5	+	5	+	6
---	---	---	---	---

⇓

5	10	16
---	----	----

1次元の畳み込み

- 下記のようなデータと[1,1,1]の畳み込み

0	0	5	5	6	3	3	3	3	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

× × ×

1	1	1
---	---	---

|| || ||

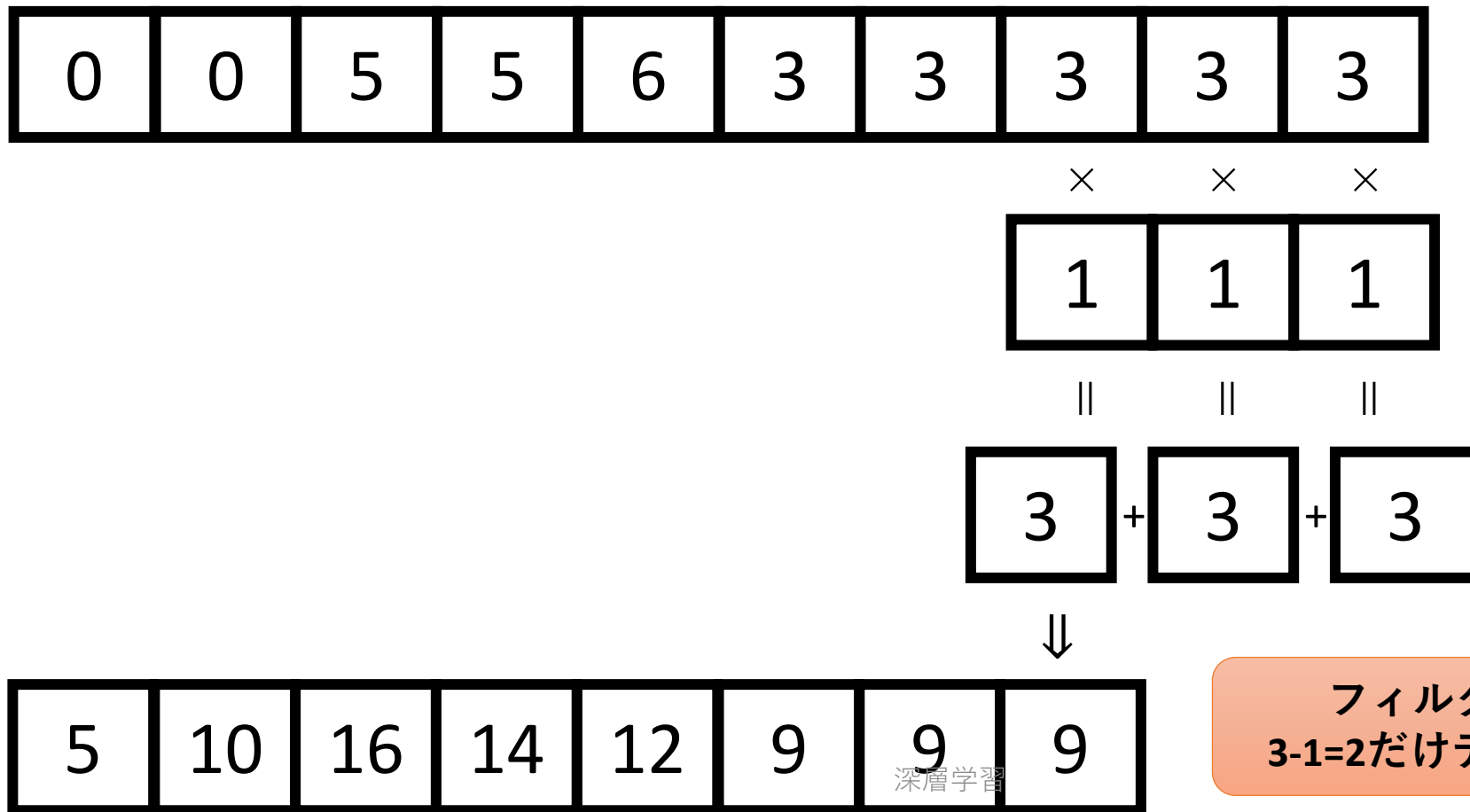
5	+	6	+	3
---	---	---	---	---

⇓

5	10	16	14
---	----	----	----

1次元の畳み込み

- 下記のようなデータと[1,1,1]の畳み込み



フィルタサイズが3の場合
3-1=2だけデータ数が少なくなる

1次元の畳み込み

- 下記のようなデータと[1,-2,1]の畳み込み

(1次元)ラプラシアンフィルタ

0	0	5	5	6	3	3	3	3	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

× × ×

1	-2	1
---	----	---

|| || ||

0	+	0	+	5
---	---	---	---	---

⇓

5

1次元の畳み込み

- 下記のようなデータと[1,-2,1]の畳み込み

0	0	5	5	6	3	3	3	3	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

× × ×

1	-2	1
---	----	---

|| || ||

0	+	-10	+	5
---	---	-----	---	---

⇓

5	-5
---	----

1次元の畳み込み

- 下記のようなデータと[1,-2,1]の畳み込み

0	0	5	5	6	3	3	3	3	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

× × ×

1	-2	1
---	----	---

|| || ||

5	+	-10	+	6
---	---	-----	---	---

⇓

5	-5	1
---	----	---

1次元の畳み込み

- 下記のようなデータと[1,-2,1]の畳み込み

0	0	5	5	6	3	3	3	3	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

× × ×

1	-2	1
---	----	---

|| || ||

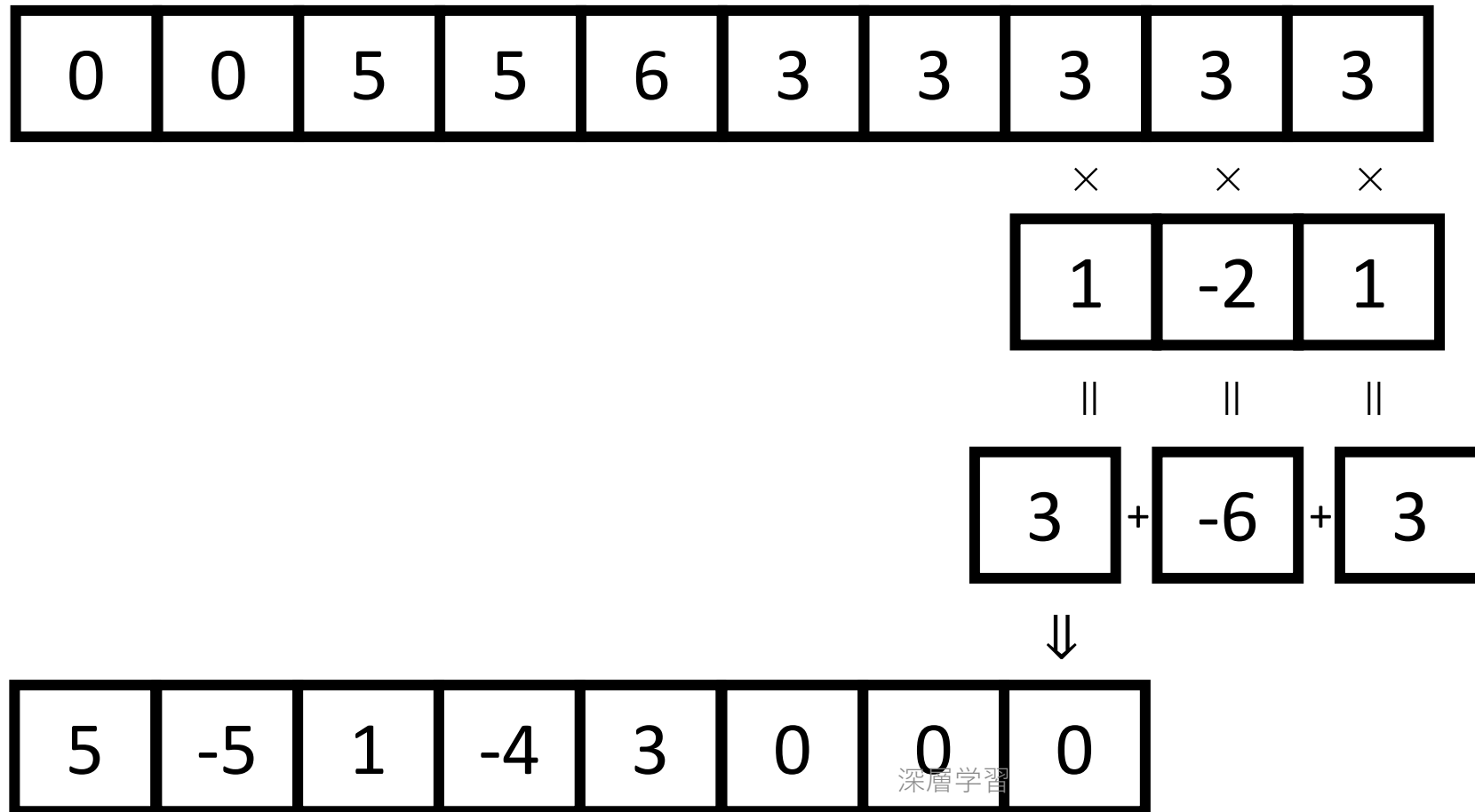
5	+	-12	+	3
---	---	-----	---	---

⇓

5	-5	1	-4
---	----	---	----

1次元の畳み込み

- 下記のようなデータと[1,-2,1]の畳み込み



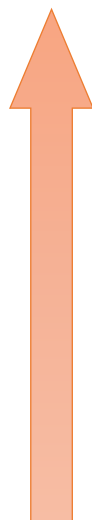
1次元の畳み込み

- 下記のようなデータと $[1, -2, 1]$ の畳み込み

0	0	5	5	6	3	3	3	3	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



ここにエッジ
があることを
示している



5	-5	1	-4	3	0	0	0
---	----	---	----	---	---	---	---

深層学習

画像処理の場合は
元画像より
小さくなると
困ることもある

1次元の畳み込み

- 下記のようなデータと $[1, -2, 1]$ の畳み込み

0	0	0	5	5	6	3	3	3	3	3	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

元データを
増やしておく
(Padding)

pytorch の場合

padding='valid' で小さくなる

padding='same' で同じ大きさ

画像処理の場合は
元画像より
小さくなると
困ることもある

0	5	-5	1	-4	3	0	0	0	0
---	---	----	---	----	---	---	---	---	---

1次元の畳み込み

- 下記のようなデータと[1,-2,1]の畳み込み

0	0	0	5	5	6	3	3	3	3	3	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

元データを
増やしておく
(Padding)

pytorch の場合

padding='valid' で小さくなる

padding='same' で同じ大きさ

追加部分（黄色）の値は

padding_mode='zeros' は0で埋める

'reflect' 鏡のように反転

'replicate' 端の値をコピー

'circular' 反対の端の値をコピー

画像処理の場合は
元画像より
小さくなると
困ることもある

0	5	-5	1	-4	3	0	0	0	0
---	---	----	---	----	---	---	---	---	---

2次元の畳み込み

(2次元)ラプラシアンフィルタ

- 下記のようなデータと $[[0,1,0],[1,-4,1],[0,1,0]]$ の畳み込み

0	0	0	0	0	3	3	3	0	0
0	0	5	5	6	3	3	3	3	0
0	0	5	5	6	3	3	3	3	3
0	0	5	5	6	3	3	3	3	3

× × ×
× × ×
× × ×

0	1	0	=	=	=	0	0	0
1	-4	1	=	=	=	0	0	5
0	1	0	=	=	=	0	0	0

⇒

5

一般的に総和が0になるようにする
そうでないと「**平均値 (= 明るさ)**」が変わる

ラプラシアンフィルタには

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

という
パターン
もある

2次元の畳み込み

(2次元)ラプラシアンフィルタ

- 下記のようなデータと $[[0,1,0],[1,-4,1],[0,1,0]]$ の畳み込み

0	0	0	0	0	3	3	3	0	0
0	0	5	5	6	3	3	3	3	0
0	0	5	5	6	3	3	3	3	3
0	0	5	5	6	3	3	3	3	3

× × ×
× × ×
× × ×

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

= = =
= = =
= = =

0	0	0
0	-20	5
0	5	0

⇒

5	-10
---	-----

2次元の畳み込み

(2次元)ラプラシアンフィルタ

- 下記のようなデータと $[[0,1,0],[1,-4,1],[0,1,0]]$ の畳み込み

0	0	0	0	0	3	3	3	0	0
0	0	5	5	6	3	3	3	3	0
0	0	5	5	6	3	3	3	3	3
0	0	5	5	6	3	3	3	3	3

× × ×
× × ×
× × ×

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

= = =
= = =
= = =

0	0	0
5	-20	6
0	5	0

⇒

5	-10	-4
---	-----	----

2次元の畳み込み

(2次元)ラプラシアンフィルタ

- 下記のようなデータと $[[0,1,0],[1,-4,1],[0,1,0]]$ の畳み込み

0	0	0	0	0	3	3	3	0	0
0	0	5	5	6	3	3	3	3	0
0	0	5	5	6	3	3	3	3	3
0	0	5	5	6	3	3	3	3	3

× × ×
× × ×
× × ×

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

= = =
= = =
= = =

0	0	0
5	-24	3
0	6	0

⇒

5	-10	-4	-10
---	-----	----	-----

2次元の畳み込み

(2次元)ラプラシアンフィルタ

- 下記のようなデータと $[[0,1,0],[1,-4,1],[0,1,0]]$ の畳み込み

0	0	0	0	0	3	3	3	0	0
0	0	5	5	6	3	3	3	3	0
0	0	5	5	6	3	3	3	3	3
0	0	5	5	6	3	3	3	3	3

× × ×
× × ×
× × ×

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

= = =
= = =
= = =

0	3	0
6	-12	3
0	3	0

⇒

5	-10	-4	-10	3
---	-----	----	-----	---

2次元の畳み込み

(2次元)ラプラシアンフィルタ

- 下記のようなデータと $[[0,1,0],[1,-4,1],[0,1,0]]$ の畳み込み

0	0	0	0	0	3	3	3	0	0
0	0	5	5	6	3	3	3	3	0
0	0	5	5	6	3	3	3	3	3
0	0	5	5	6	3	3	3	3	3

× × ×
× × ×
× × ×

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

= = =
= = =
= = =

0	3	0
6	-12	3
0	3	0

⇒

5	-10	-4	-10	3	0	0	-6
---	-----	----	-----	---	---	---	----

2次元の畳み込み

(2次元)ラプラシアンフィルタ

- 下記のようなデータと $[[0,1,0],[1,-4,1],[0,1,0]]$ の畳み込み

0	0	0	0	0	3	3	3	0	0
0	0	5	5	6	3	3	3	3	0
0	0	5	5	6	3	3	3	3	3
0	0	5	5	6	3	3	3	3	3

× × ×
× × ×
× × ×

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

= = =
= = =
= = =

0	0	0
0	0	5
0	0	0

⇒

5	-10	-4	-10	3	0	0	-6
5							

2次元の畳み込み

(2次元)ラプラシアンフィルタ

- 下記のようなデータと $[[0,1,0],[1,-4,1],[0,1,0]]$ の畳み込み

0	0	0	0	0	3	3	3	0	0
0	0	5	5	6	3	3	3	3	0
0	0	5	5	6	3	3	3	3	3
0	0	5	5	6	3	3	3	3	3

× × ×
× × ×
× × ×

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

= = =
= = =
= = =

0	0	0
0	0	0
0	0	0

⇒

5	-10	-4	-10	3	0	0	-6
5	-5	1	-4	3	0	0	0

2次元の畳み込み

(2次元)ラプラシアンフィルタ

- 下記のようなデータと $[[0,1,0],[1,-4,1],[0,1,0]]$ の畳み込み

0	0	0	0	0	3	3	3	0	0
0	0	5	5	6	3	3	3	3	0
0	0	5	5	6	3	3	3	3	3
0	0	5	5	6	3	3	3	3	3

× × ×
× × ×
× × ×

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

= = =
= = =
= = =

0	0	0
0	0	0
0	0	0

⇒

5	-10	-4	-10	3	0	0	-6
5	-5	1	-4	3	0	0	0

2次元の畳み込み

(2次元)ラプラシアンフィルタ

0	0	0	0	0	0	3	3	3	0	0	0
0	0	0	0	0	0	3	3	3	0	0	0
0	0	0	5	5	6	3	3	3	3	0	0
0	0	0	5	5	6	3	3	3	3	3	3
0	0	0	5	5	6	3	3	3	3	3	3
0	0	0	5	5	6	3	3	3	3	3	3

,1],[0,1,0]]の畳み込み

元データを
増やしておく
(Padding)

画像処理の場合は
元画像より
小さくなると
困ることもある

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

= = =
= = =
= = =

0	0	0
0	0	0
0	0	0

⇒

0	0	0	5	9	-3	0	-3	6	0
0	5	-10	-4	-10	3	0	0	-6	0
0	5	-5	1	-4	3	0	0	0	-3
0	5	-5	1	-4	3	0	0	0	0

畳み込みのバリエーション

- padding
- stride
- dilation(省略)
- in_channels, out_channels (次回以降に説明予定)

- 昨年のスライド参照
 - 必要になってから調べれば十分

☆課題2

畳み込みは padding='valid' (小さくなる) で良い
理由を説明すれば 'same' (同じサイズ) でも良い

- **2つの正方行列の積と正方行列と 3×3 行列の畳み込み**それぞれを求めるpythonプログラムを作成して、それぞれの行列サイズと実行時間の関係を調べる
 - それぞれのpython, numpy, cupy, pytorchの実行時間について考察する
 - cupyの畳み込みは省略しても良い
- レポートにはグラフを含めること
 - 単に載せるのではなくグラフから読み取れる内容を説明すること
 - 実行時間の上限は「これ以上増やしても読み取れる内容が増えない」
と思えるところまで
 - とはいえ1分以上の実行は不要です
- 締切： 4/24(木) 23:59

GPUのメモリサイズによっては
10秒程度でメモリ不足になるかも
共有メモリが使われると
一気に遅くなるので注意

それぞれについて「行列サイズと実行時間の間にはXXという関係がある」
という考察が必要

よくある計算間違い

行列積

•
$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{7} & 8 & 13 \\ 9 & 10 & 14 \\ 11 & 12 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 7 + 2 \times 9 + 3 \times 11 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

畳み込み

•
$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \boxed{7} & 8 & 13 \\ 9 & 10 & 14 \\ 11 & 12 & 15 \end{bmatrix} = [1 \times 7 + 2 \times 8 + 3 \times 13 + \dots]$$

課題2のヒント

- numpyはscipy.signal.correlate2dを使う
- scipy.signal.convolve2dはフィルタを反転させてから畳み込みを行うので、torchのconv2dと異なる結果になる
- **cupyx.scipy.signal.correlate2d が正しく動かない場合は省略して良い**
- pytorch はtorch.nn.functional.conv2d を使うが、入力は4次元である必要がある(次ページ参照)

課題2の追加考察（必須では無い）

```
tox = torch.from_numpy(npx).to("cuda")    # numpyからコピー
```

```
toy = torch.from_numpy(npy).to("cuda")
```

の部分を以下のように変更する

```
tox = torch.rand(n,n).to("cuda")          # pytorchで新規作成
```

```
toy = torch.rand(n,n).to("cuda")
```

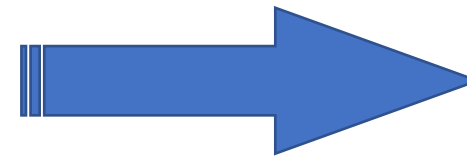
乱数の中身は変化するのは当然として、実行時間も大きく変わる可能性がある

（デスクトップPCと大学推奨ノートPCでは変わるはず）

実行時間が変わった原因を考察する

pytorchのconv2d

- 入力データは[バッチサイズ][入力チャンネル][x][y]
フィルタは[出力チャンネル][入力チャンネル][x][y]
のデータを要求する
- 今回はバッチサイズ数も入出力チャンネル数も1とする
つまり、data[N][N]をdata[1][1][N][N]に変換する
 - data=torch.reshape(data,(1,1,N,N)) または
data=data.unsqueeze(0).unsqueeze(0)
で変換できる
- バッチサイズとチャンネルについては次回以降に説明



[1,1,1],
[1,-8,1],
[1,1,1]
が
[[[1,1,1],
[1,-8,1],
[1,1,1]]]
となる

サイズ変換（要素数は同じ）

```
>>> x=torch.zeros(3,3)           # 3x3の配列を0で初期化
>>> x.shape                       # サイズを表示する
torch.Size([3, 3])               # 3x3になっている
>>> x=torch.reshape(x,(1,1,3,3)) # reshape
>>> x.shape                       # サイズを表示
torch.Size([1, 1, 3, 3])         # 1x1x3x3になっている
>>> x=x.unsqueeze(0)             # さらに
>>> x.shape
torch.Size([1, 1, 1, 3, 3])      # 1x1x1x3x3
>>>
```

Pythonのタブルの話

- `x=torch.reshape(x, (1,1,3,3))`
 - `(1,1,3,3)`はタプル
 - `[1,1,3,3]`だとリスト
- タプルは変更（書き込み）できない
 - なので高速
 - 辞書型のキーに出来る
- `dict={}`
- `dict[[1,2]]=3` はエラーになる
- `dict[(1,2)]=5` はOK

任意課題1 満点5点

- 課題1の実装は非常に遅く、numpyを使えば100倍以上の高速化が実現できるはずである
- numpyはC言語とFortranで実装されているので、C言語で課題1相当のコードを実装したところ、それでもnumpyの方が10倍程度早い（実行環境によってこの比率は大きく変わる）
- **C言語で実装しただけでは不十分な理由を考えよ**
 - 仮説であれば検証も行うこと（検証方法も自分で考える）
- **解消可能な理由であれば、自ら実装を行い実行速度がnumpyに近付くことを確かめよ**
 - numpyはGPUを使わないので、GPUは使用禁止
 - cupyとGPU実装で比較しても良い（さらに高難易度）
- 締切：4/24(木) 23:59

今日の実習

- （もし課題1がまだなら質問する）
- 課題2に取り組む
 - GPUを搭載したPCで実行する
- 任意課題1に取り組む

i, j, kループ

```
for i in range(n):  
    for j in range(n):  
        for k in range(n):  
            z[i][j]+=x[i][k]*y[k][j]
```

- このプログラムのi,j,kの順序を変えると実行速度が大きく変わる

キャッシュの存在

- メモリは遅い（CPU,GPUと比較して）
- データはメモリに入っている
- 毎回メモリから読み込むのでは性能が出ない
- 同時にたくさん読み込もう
 - 1を聞いて10を知る（実際には16個くらい同時に読む）
- その16個に何が含まれるのかが問題
 - `z[0][0]`にアクセスすると`z[0][1]`, `z[0][2]`, ..., `z[0][15]`が読み込まれる
 - つまり`z[0][1]`にアクセスすると高速

i, j, kループ

```
for i in range(n):  
    for j in range(n):  
        for k in range(n):  
            z[i][j] += x[i][k] * y[k][j]  
            z[0][0] += x[0][0] * y[0][0]  
            z[0][0] += x[0][1] * y[1][0]
```

最高速 高速 低速

- 低速にならない方法は？
 - iが低速x2、kが低速x1なので、jを変えるのが一番高速

i, k, jループ

```
for i in range(n):    # 低速x2
    for k in range(n): # 低速x1
        for j in range(n):
            z[i][j] += x[i][k] * y[k][j]
            z[0][0] += x[0][0] * y[0][0]
            z[0][1] += x[0][0] * y[0][1]
```

高速 最高速 高速

- 一般にはこれが一番早い