普遍性定理

大阪国際工科専門職大学
情報工学科 AIコース 准教授 中田尚

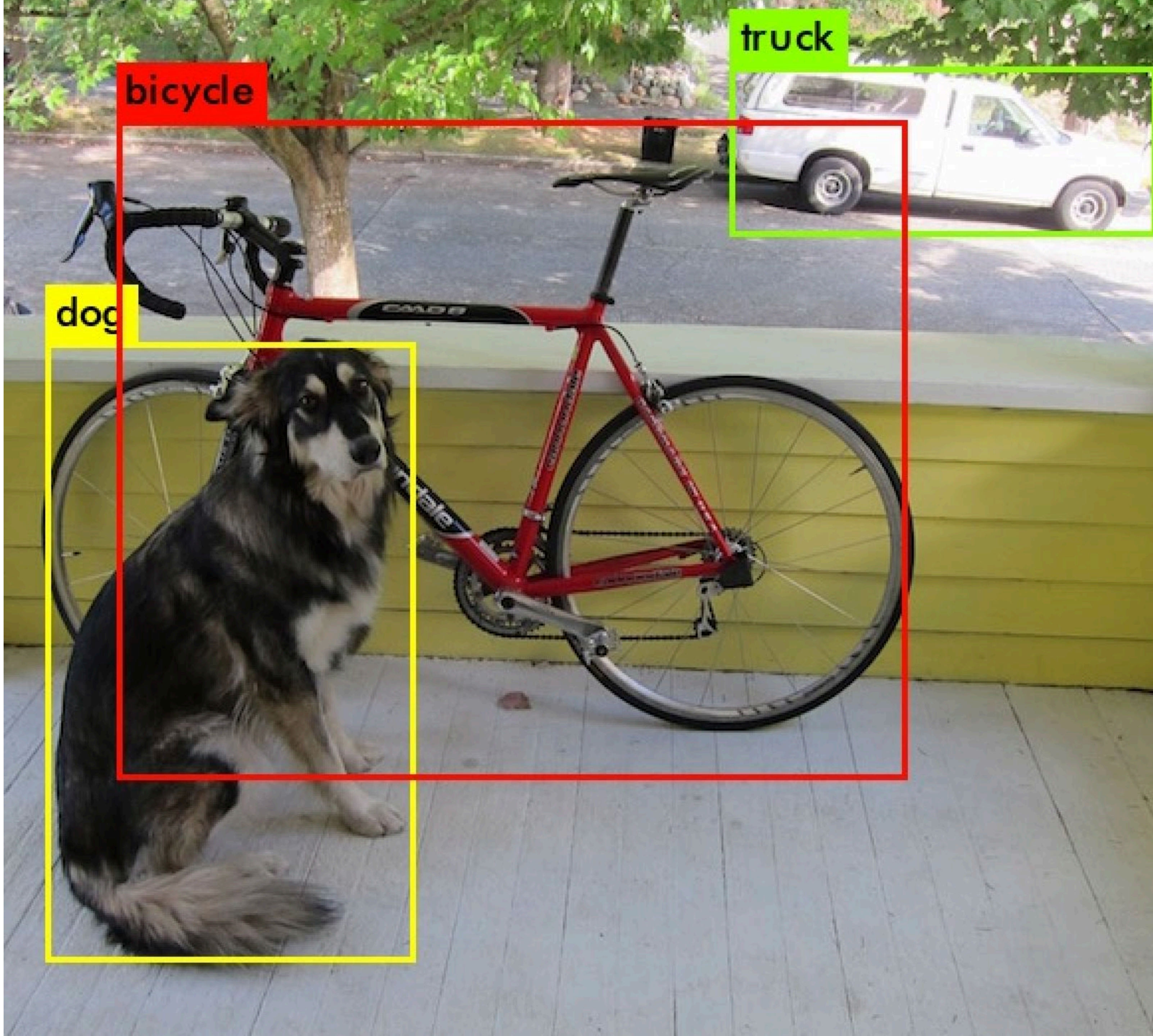
普遍性定理とは

- Universal Approximation Theorem
  - 万能近似定理とも呼ばれる

- ニューラルネットワークはあらゆる連続関数が近似できる

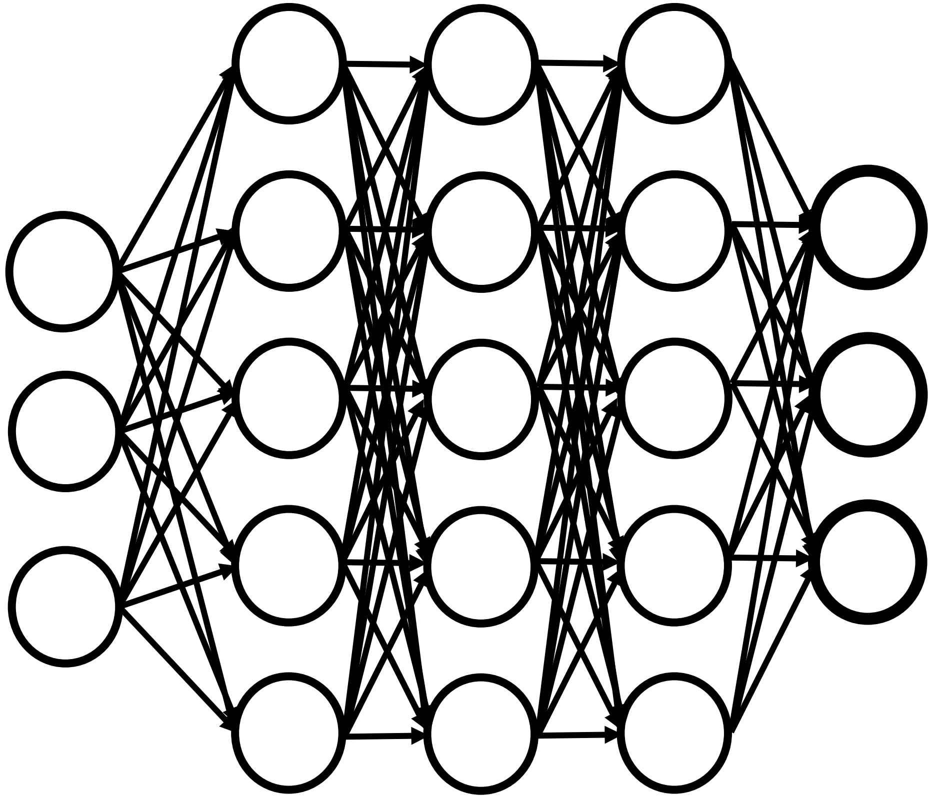
画像認識AI

- 画像に何が写っているかを予測する



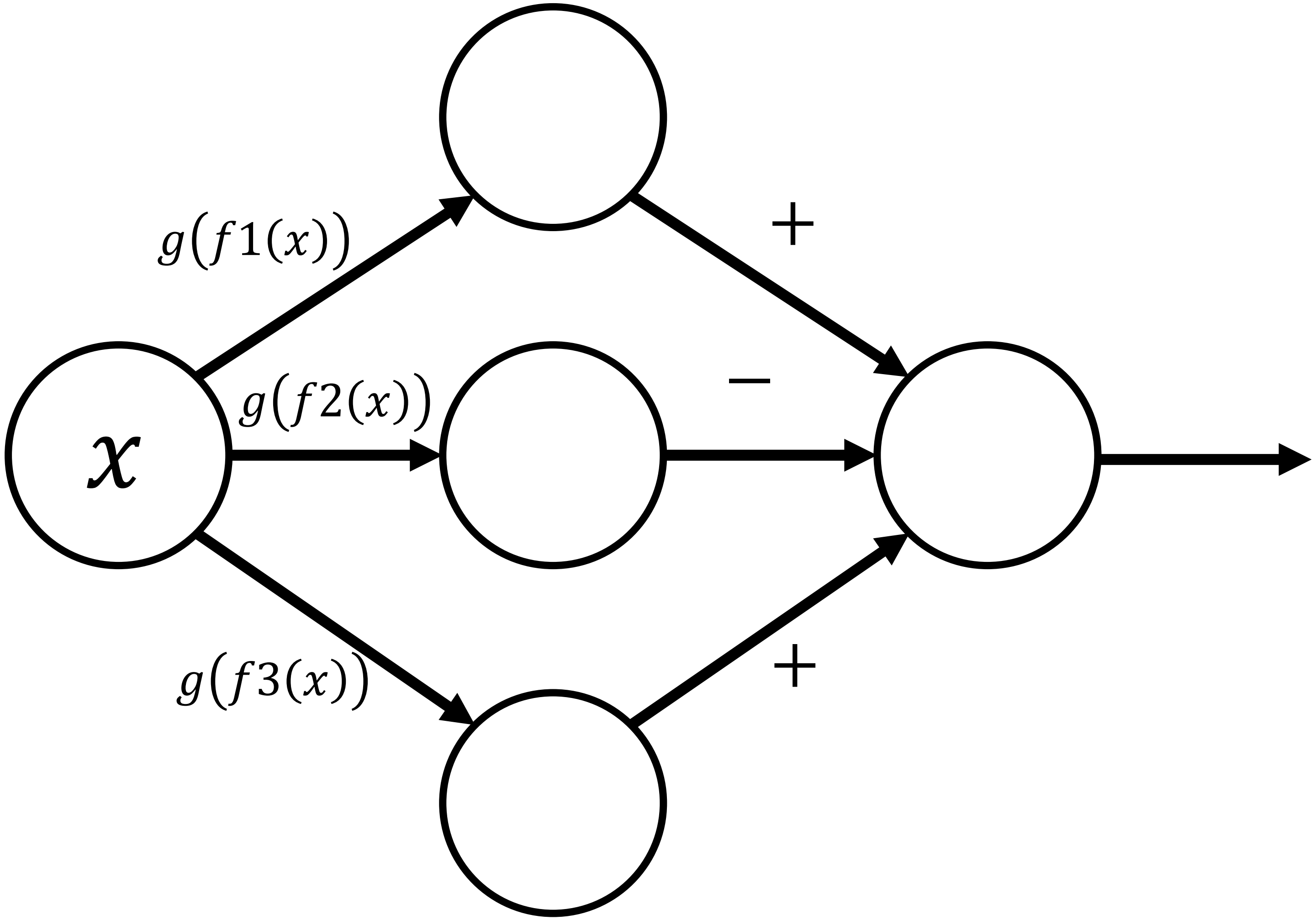
AIの作り方

- 皆さん数学は得意ですよね？
- AIの中身はどうなっているのか？
  - （ほぼ）掛け算と足し算だけ
- 多層パーセプトロン
  - ニューラルネットワークの最も単純な形式



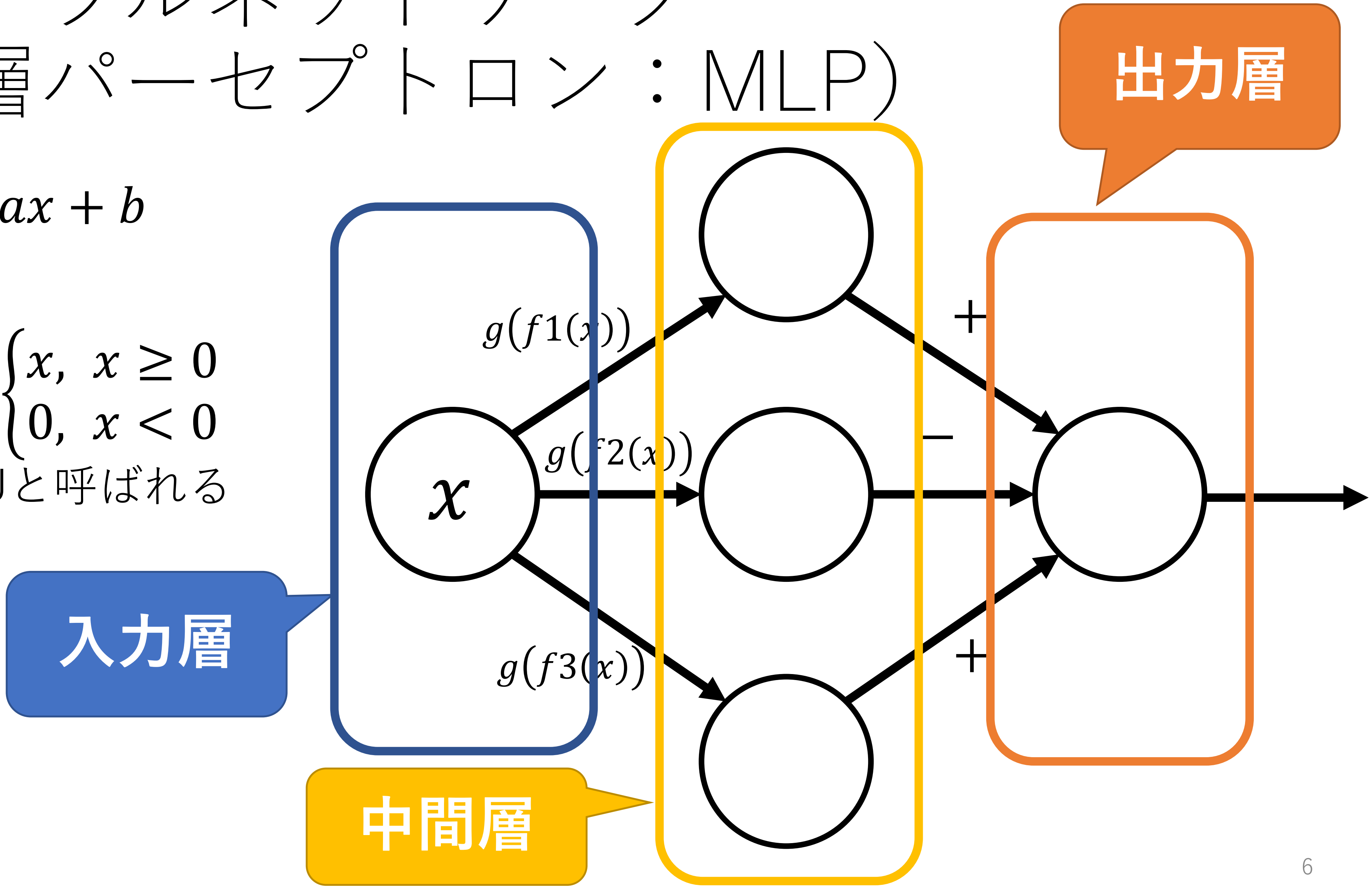
ニューラルネットワーク（多層パーセプトロン：MLP）

- $f(x) = ax + b$
- $g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
  - LeRUと呼ばれる



ニューラルネットワーク（多層パーセプトロン：MLP）

- $f(x) = ax + b$
- $g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
  - LeRUと呼ばれる



普遍性定理（1変数）

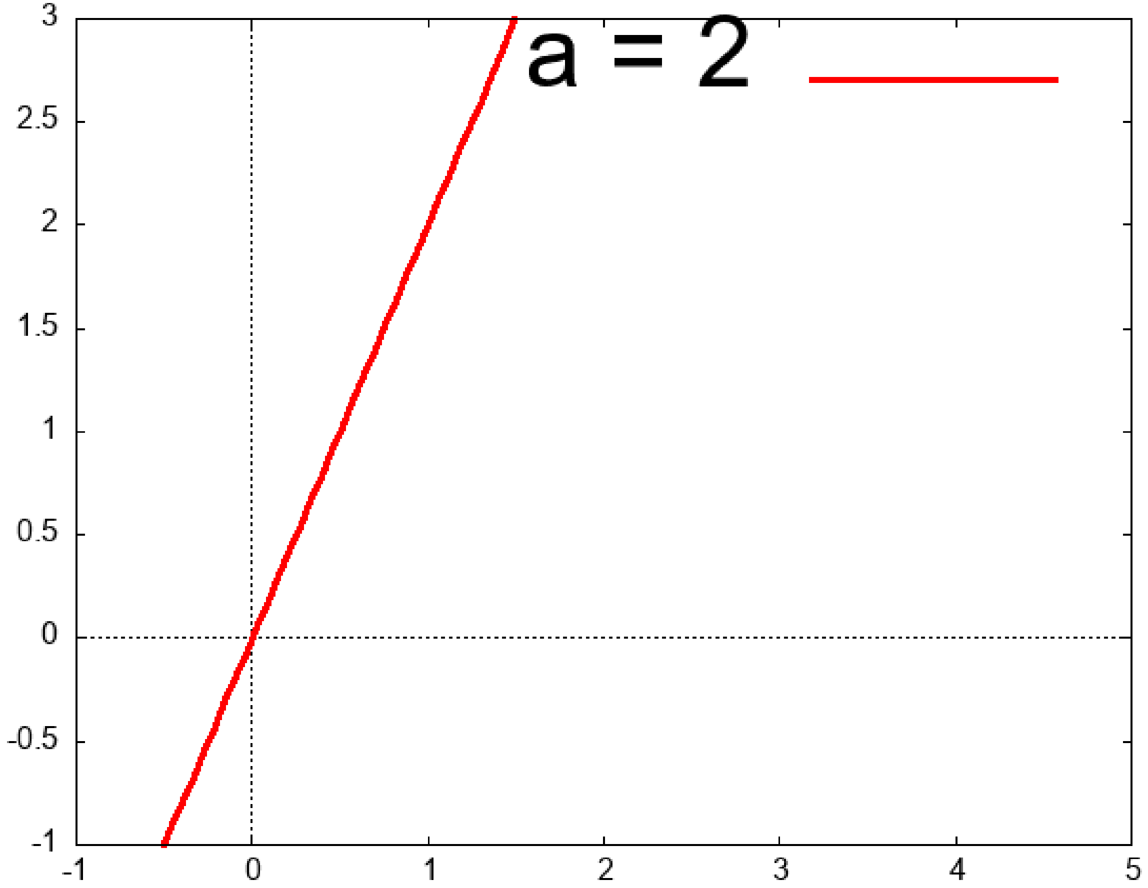
- $f(x) = ax + b$

- $g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
  - LeRUと呼ばれる

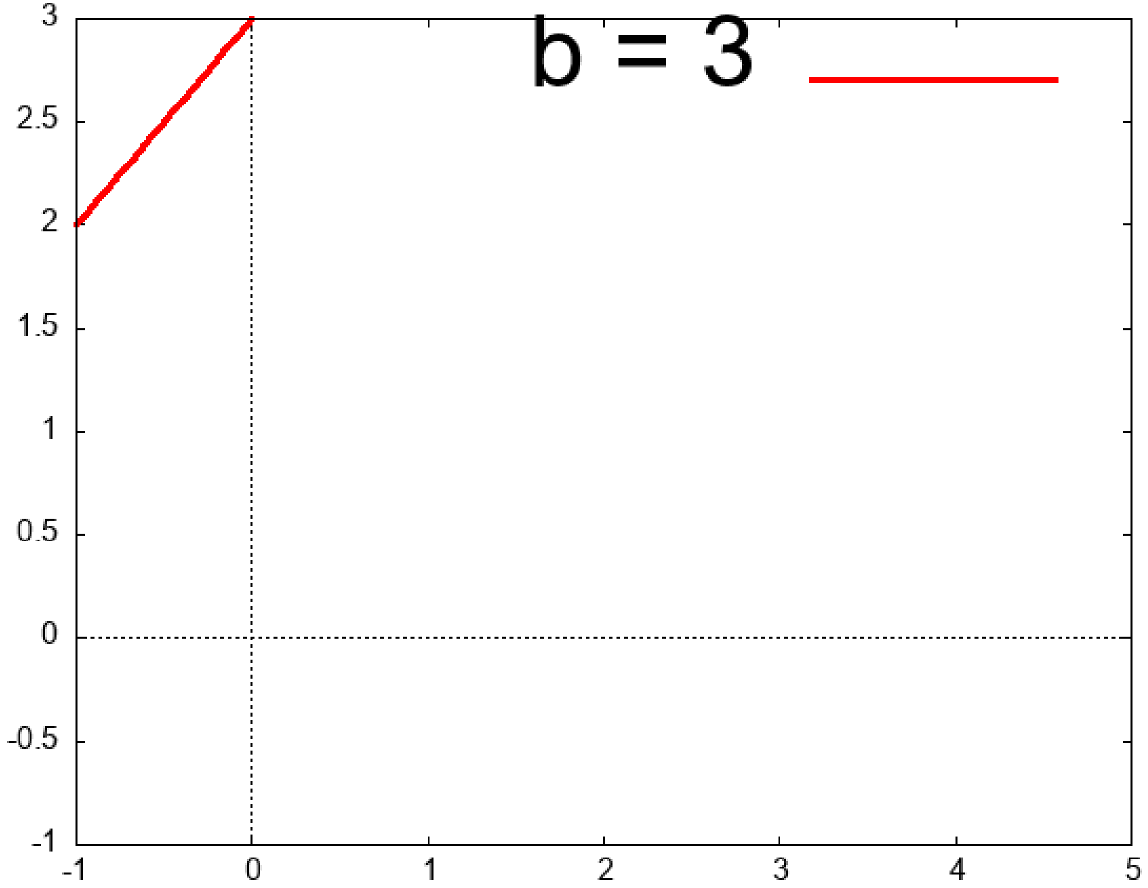
- この2つの式を組み合わせるだけで任意の連続な関数を表現できることを示す

以降 $g(x)$ は省略する

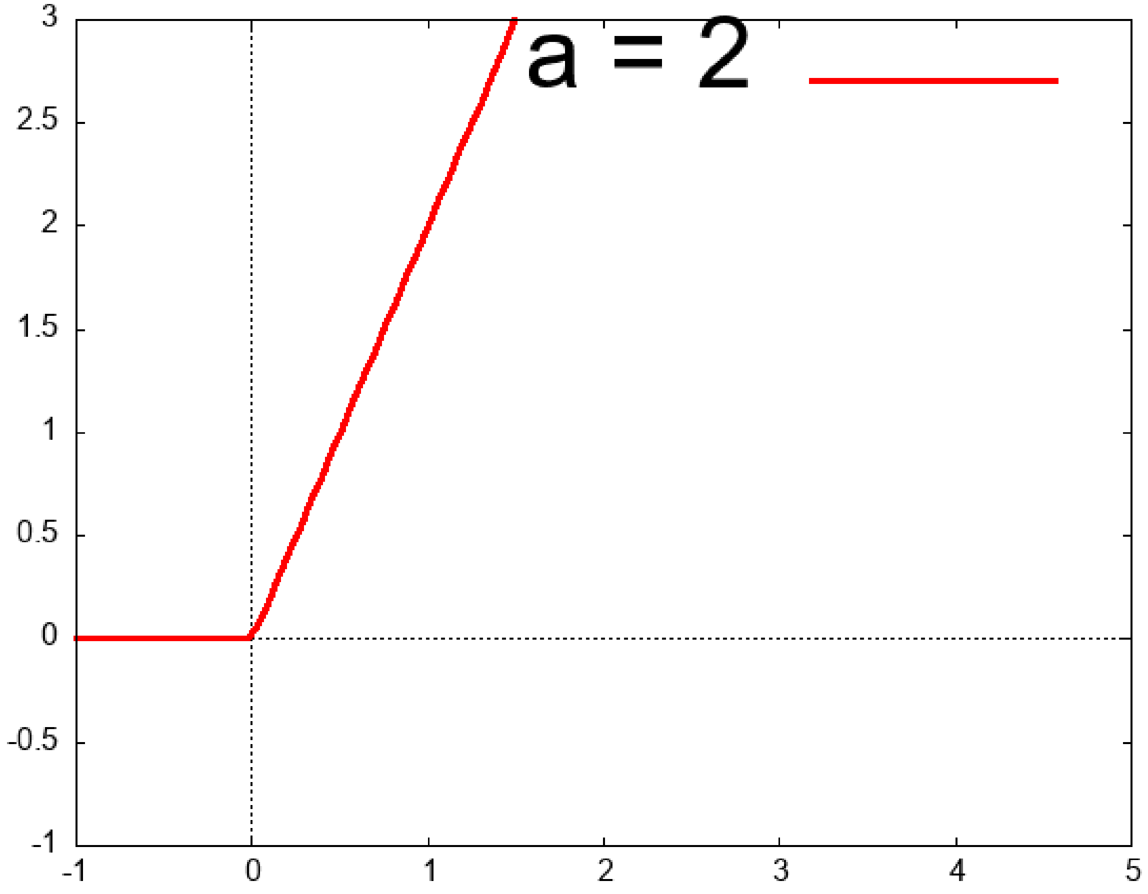
＜1次関数の復習＞
a を変えると傾きが変わる（b=0）



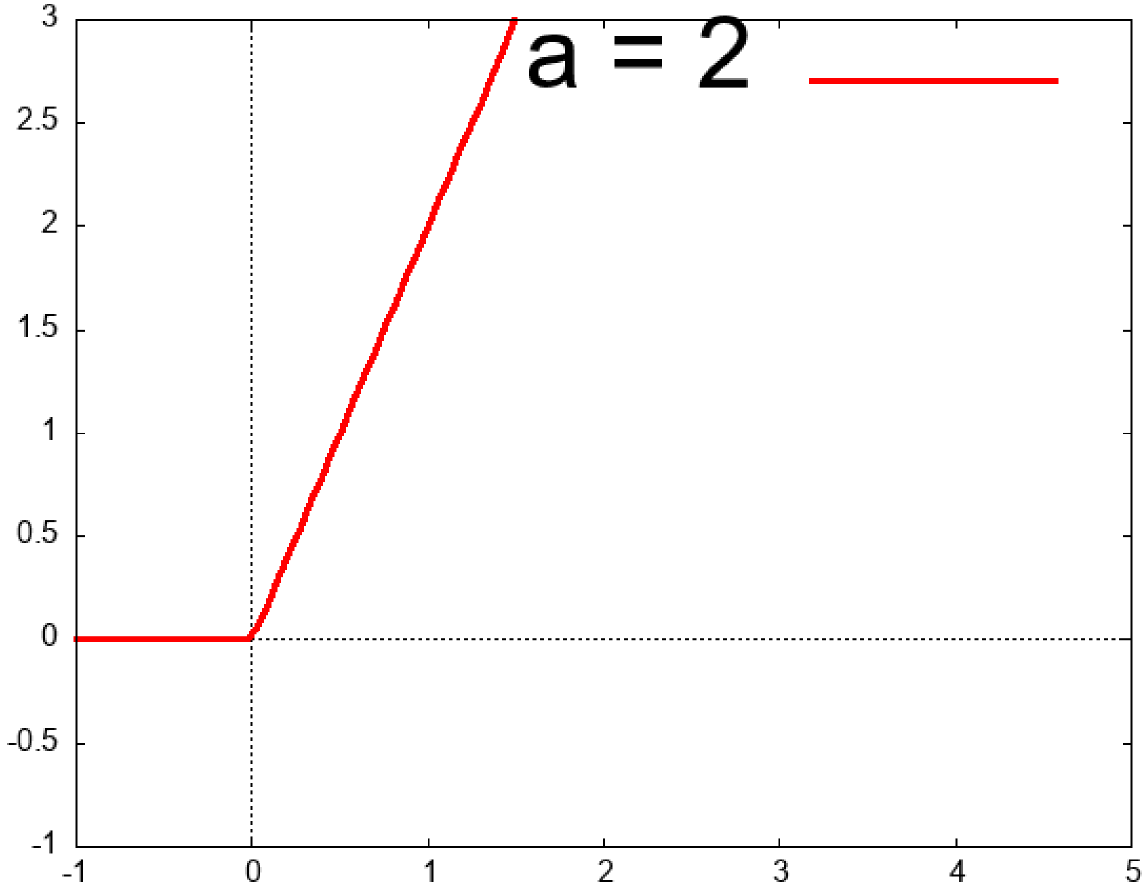
＜1次関数の復習＞
b を変えると位置が変わる（a=1）



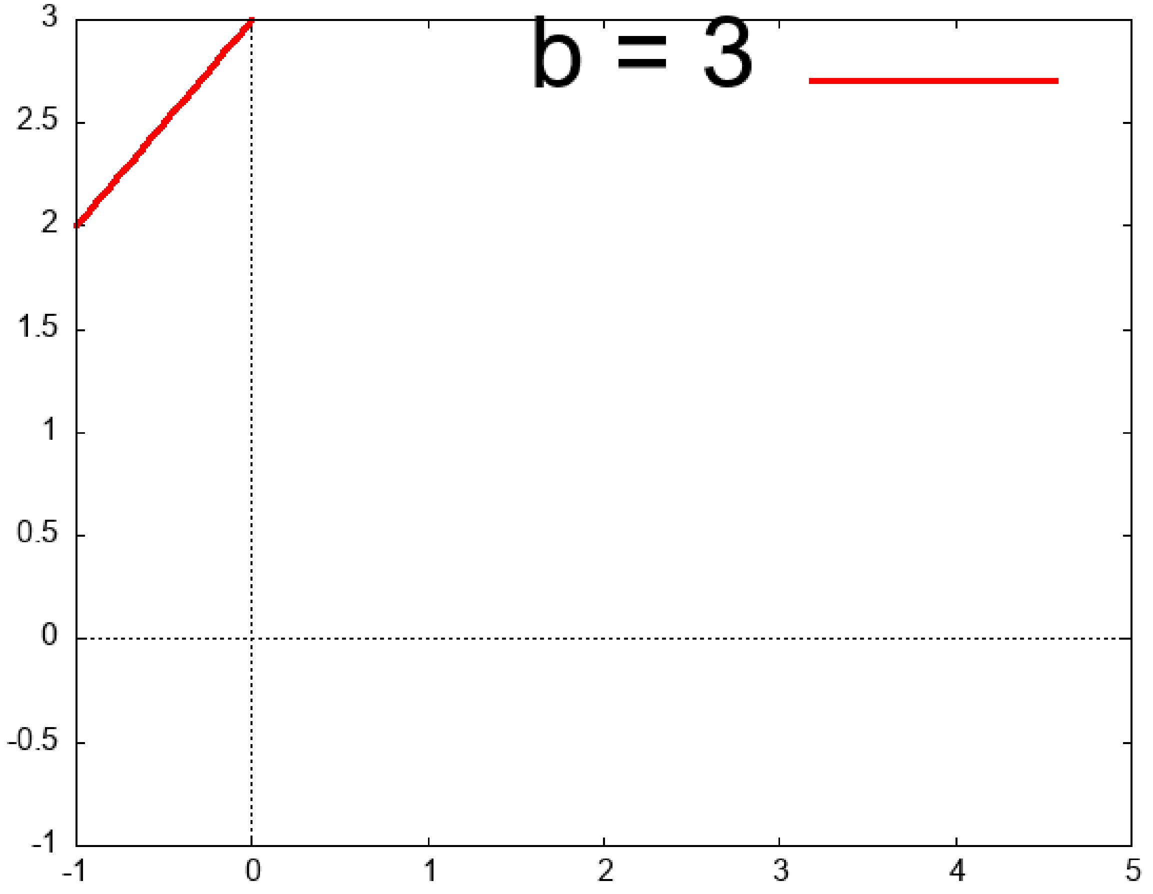
ReLUを適用すると

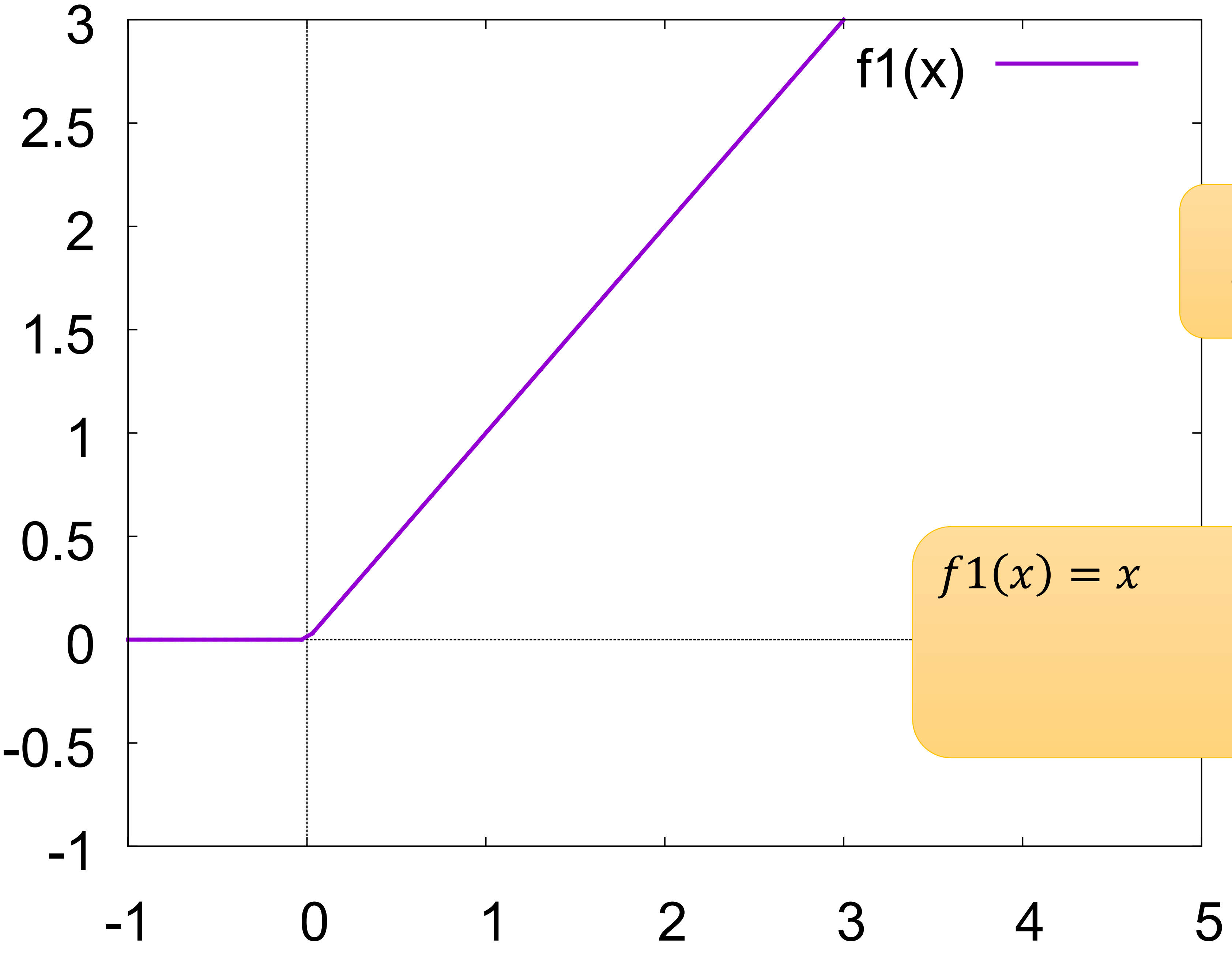


ReLUを適用すると（やりなおし）



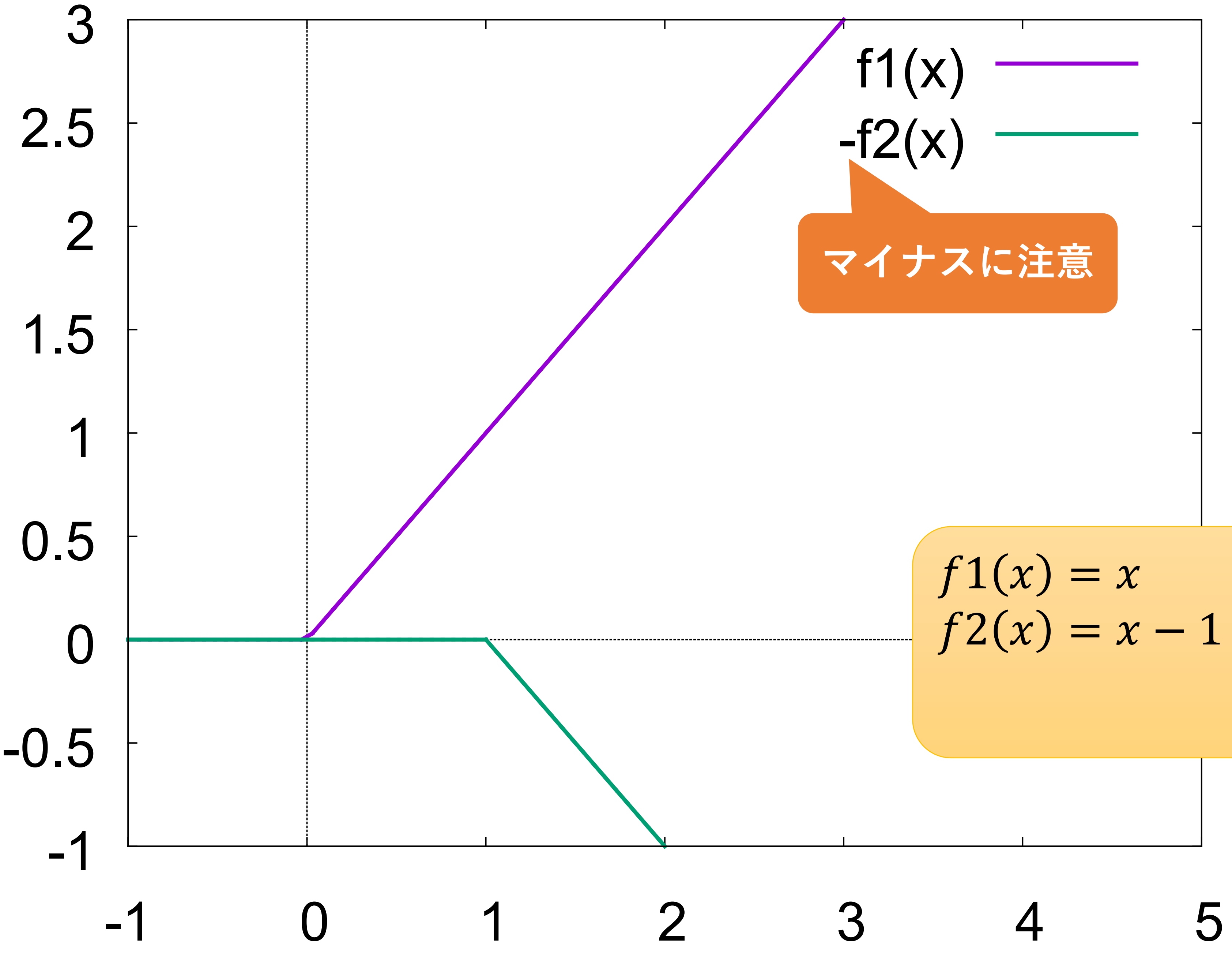
ReLUを適用すると（やりなおし）





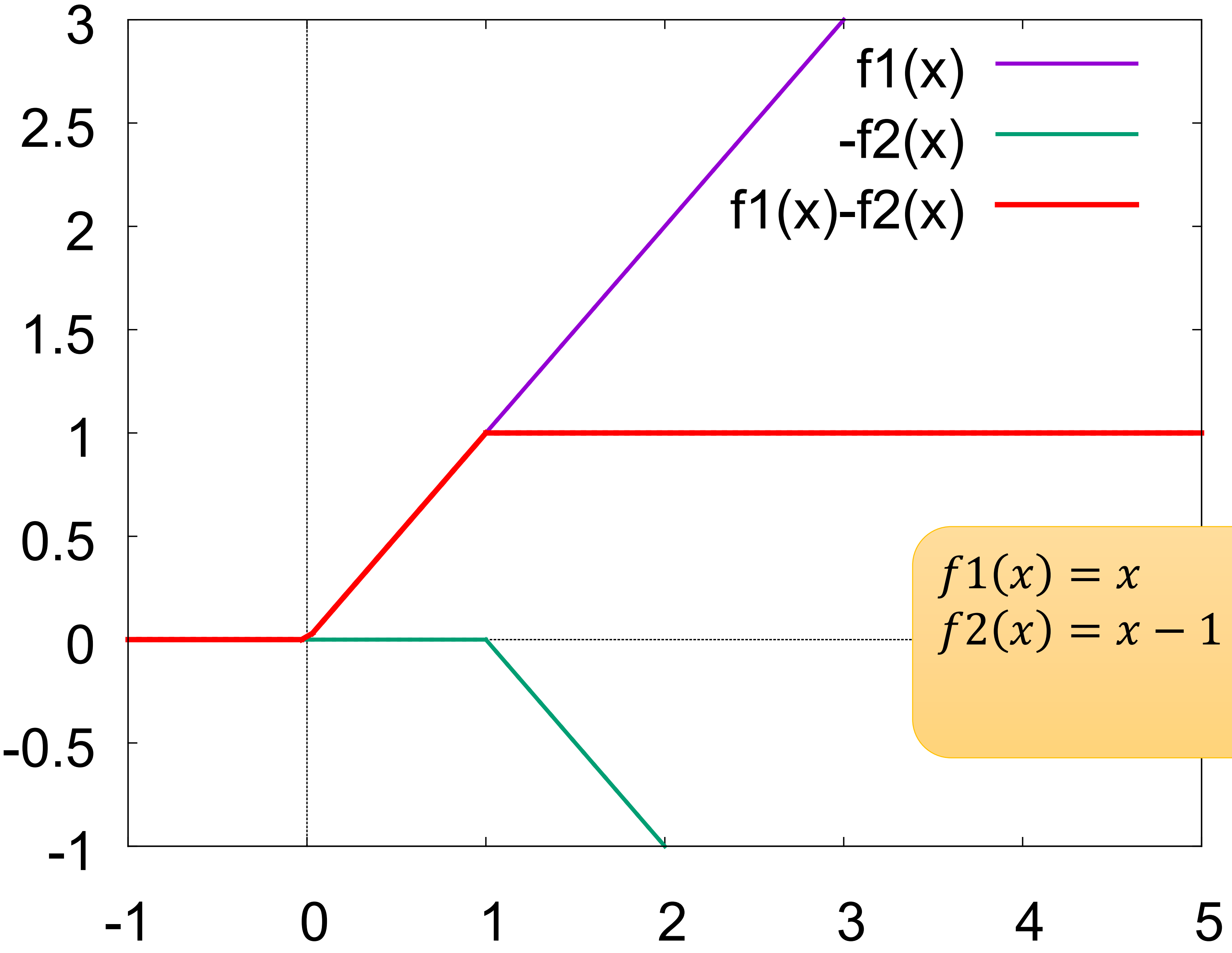
$g(x)$ は省略

$f1(x) = x$

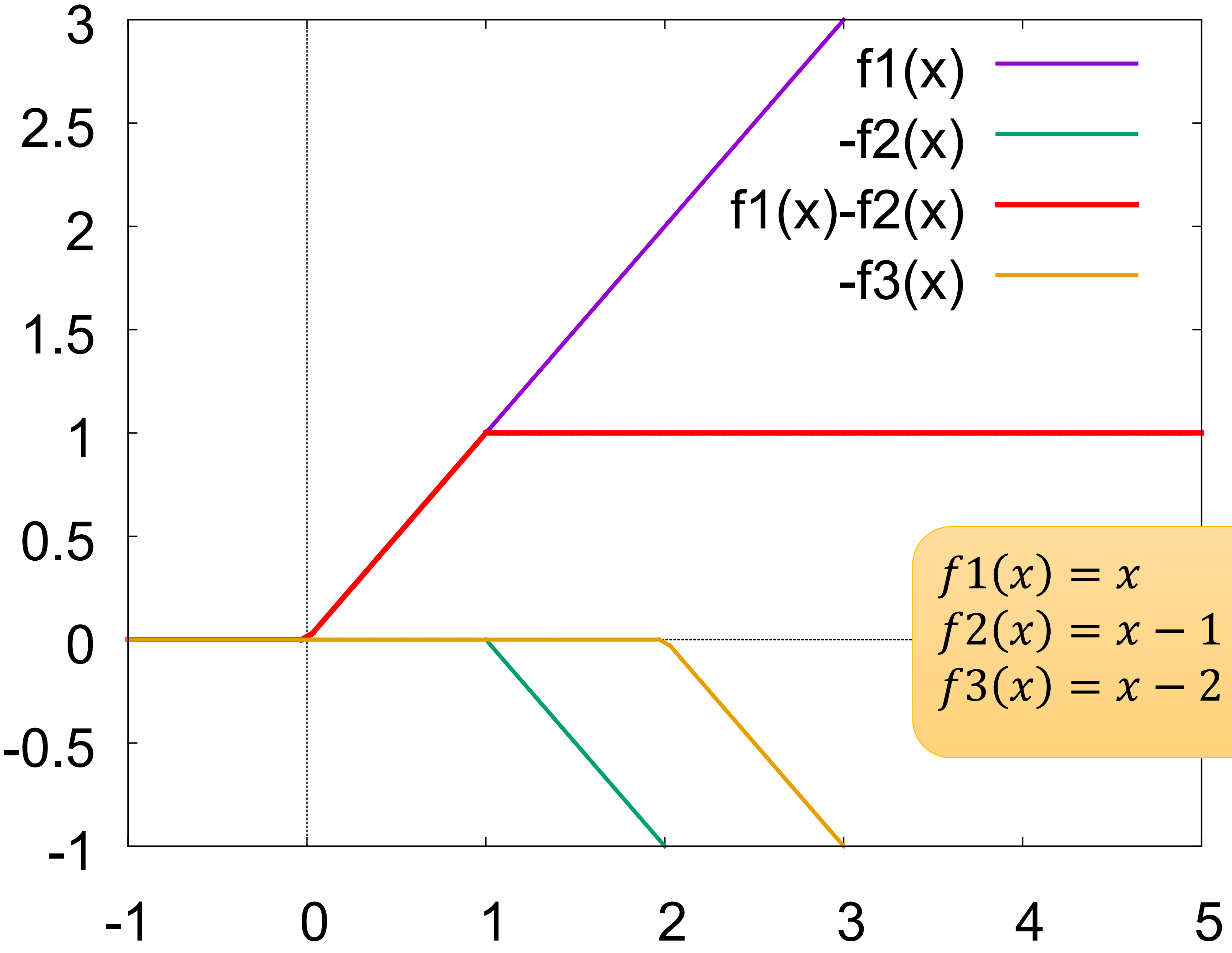


$f1(x) = x$

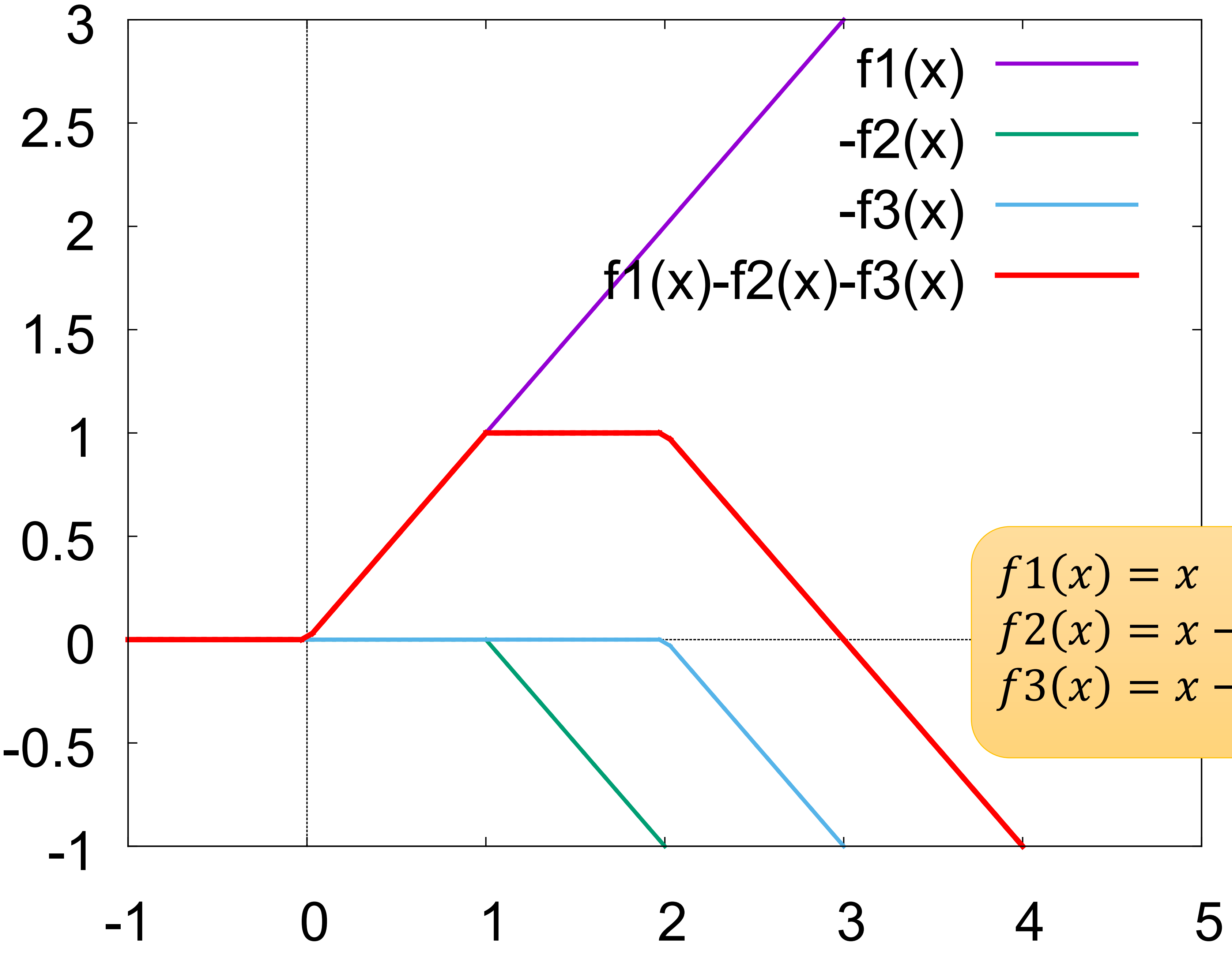
$f2(x) = x - 1$



$$f1(x) = x$$
$$f2(x) = x - 1$$



$f1(x) = x$
$f2(x) = x - 1$
$f3(x) = x - 2$



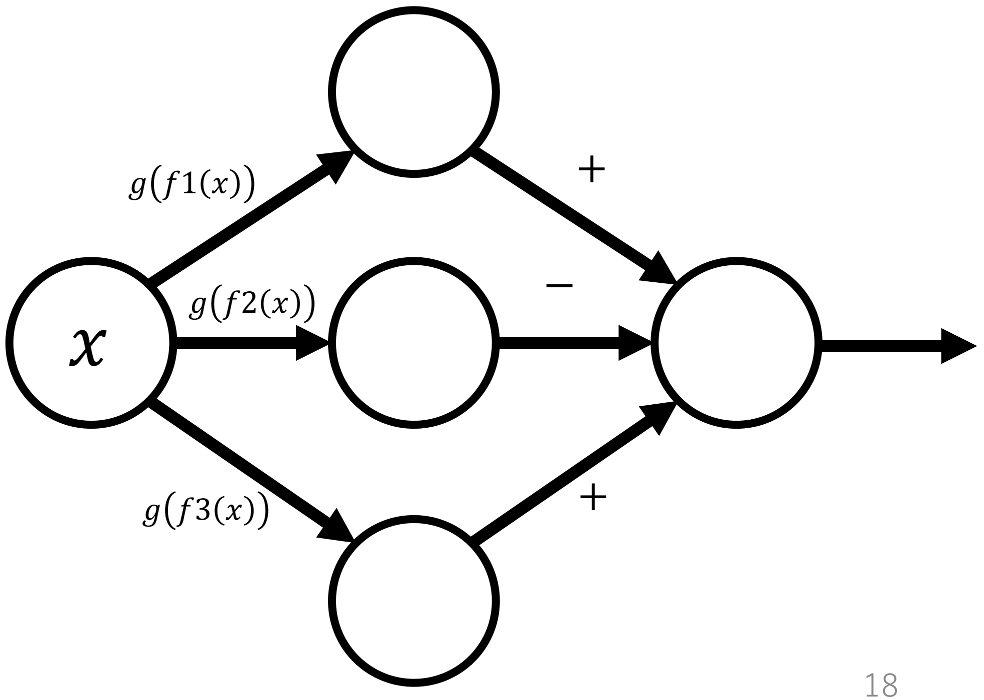
$f1(x) = x$
$f2(x) = x - 1$
$f3(x) = x - 2$

普遍性定理（1変数）

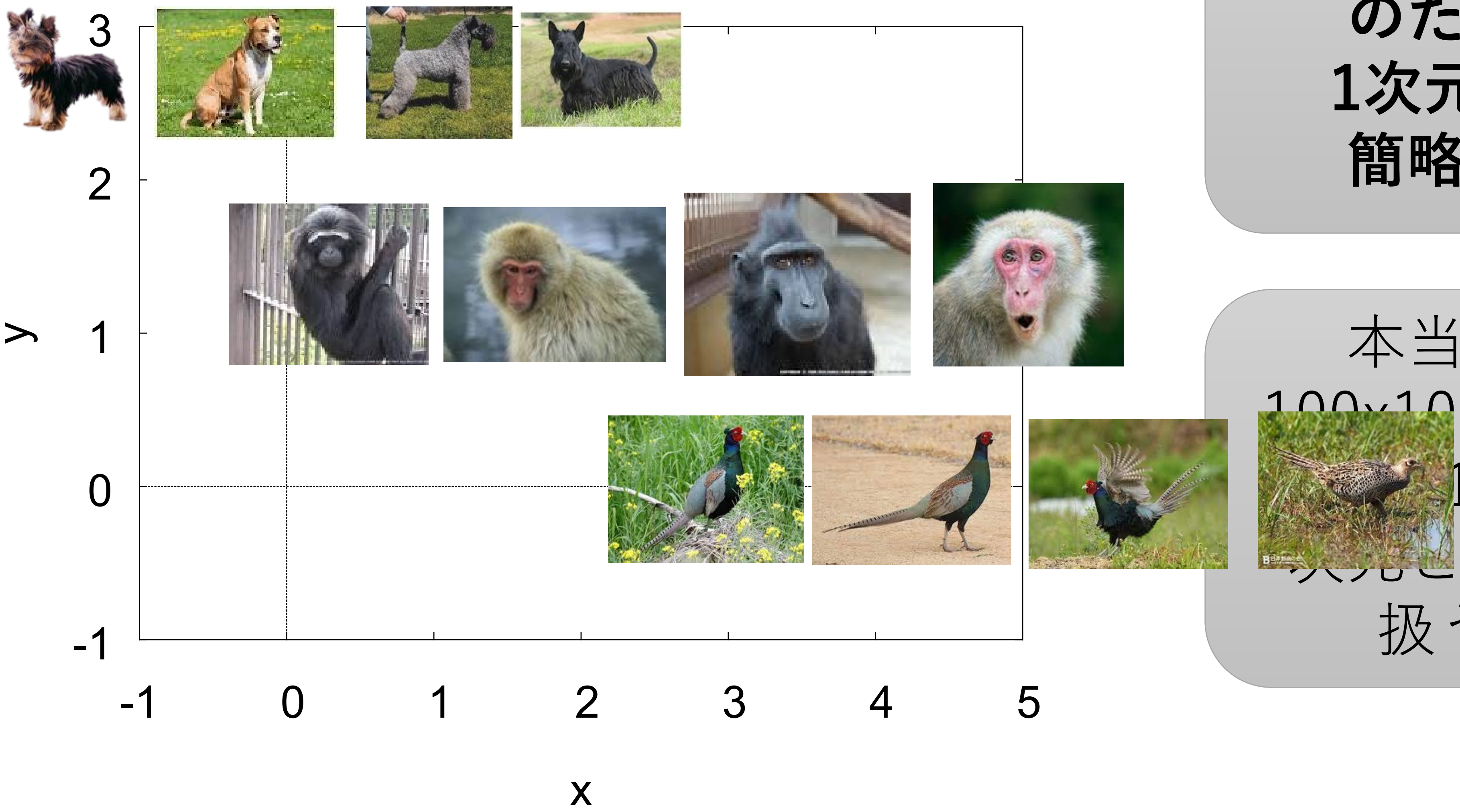
- 任意の連続な関数を再現できることがわかった（かな？）
  - 折れ線なので、曲線を完全に再現することは難しい
  - 許容誤差が与えられると、有限個の式の組み合わせで表現できることが証明されている

    ＝中間層が有限個

- 画像認識への応用



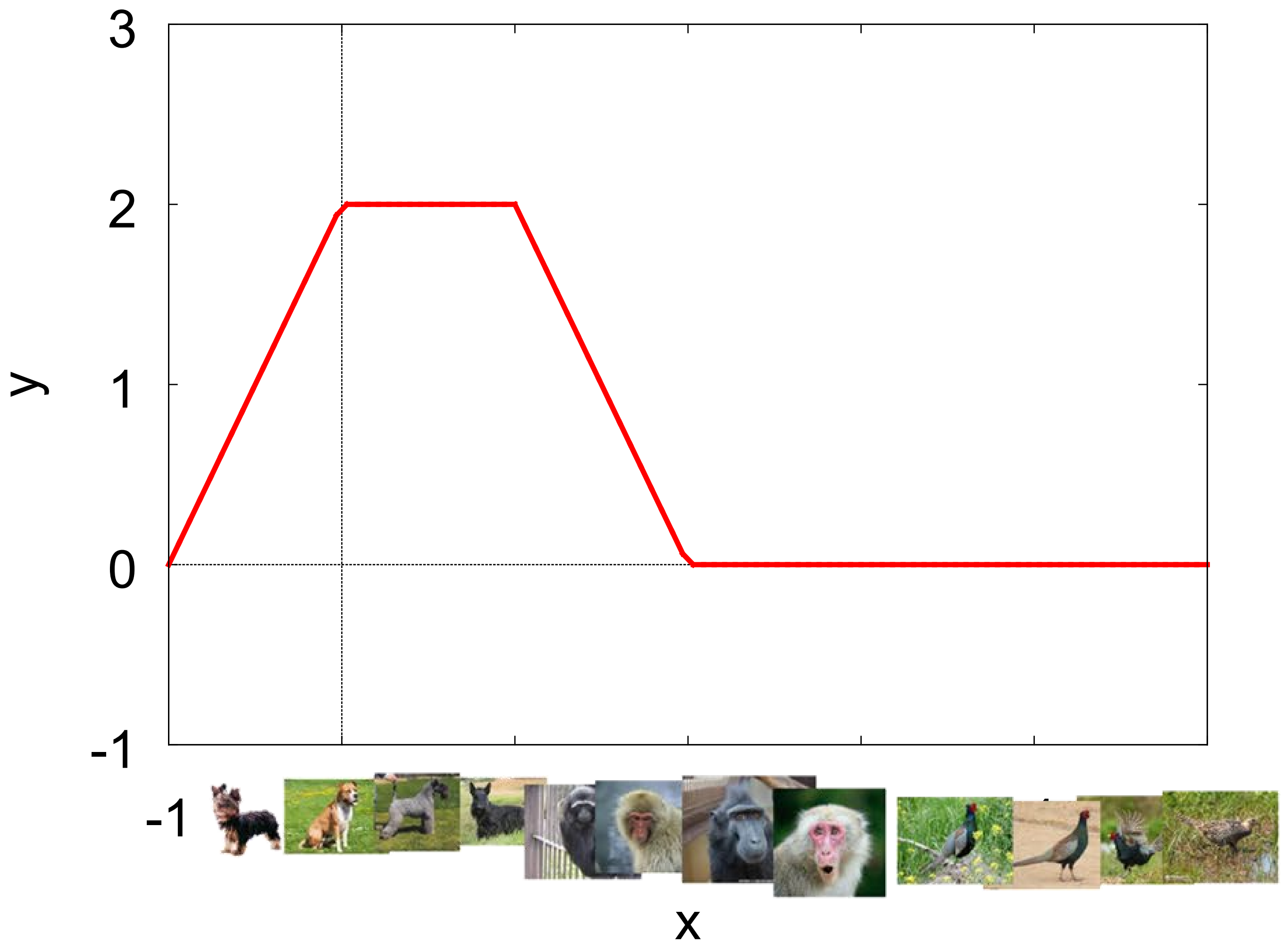
画像をx軸にマッピング



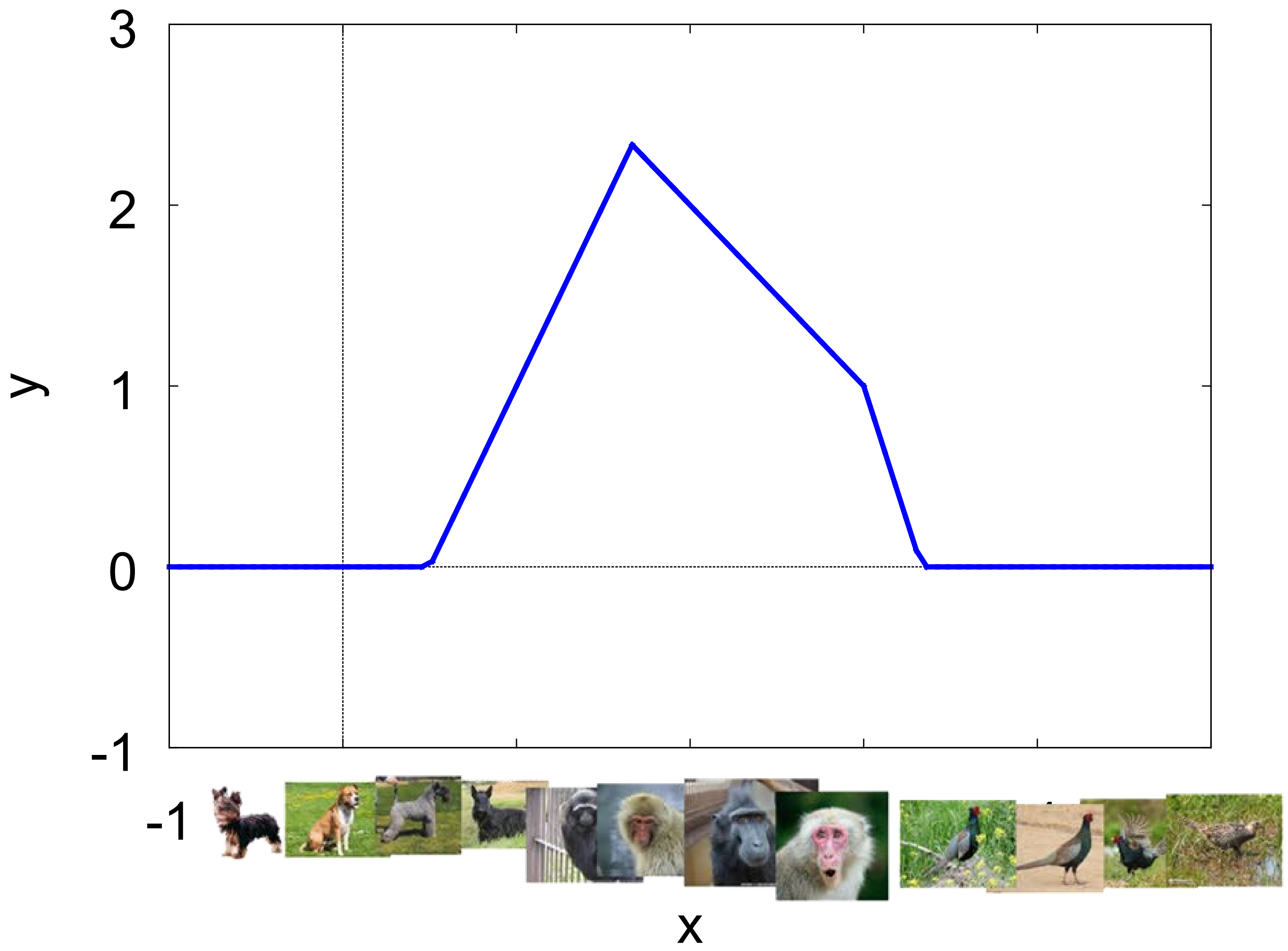
以降の説明のため1次元に簡略化

本当は100x100画素
10000
次元として
扱う

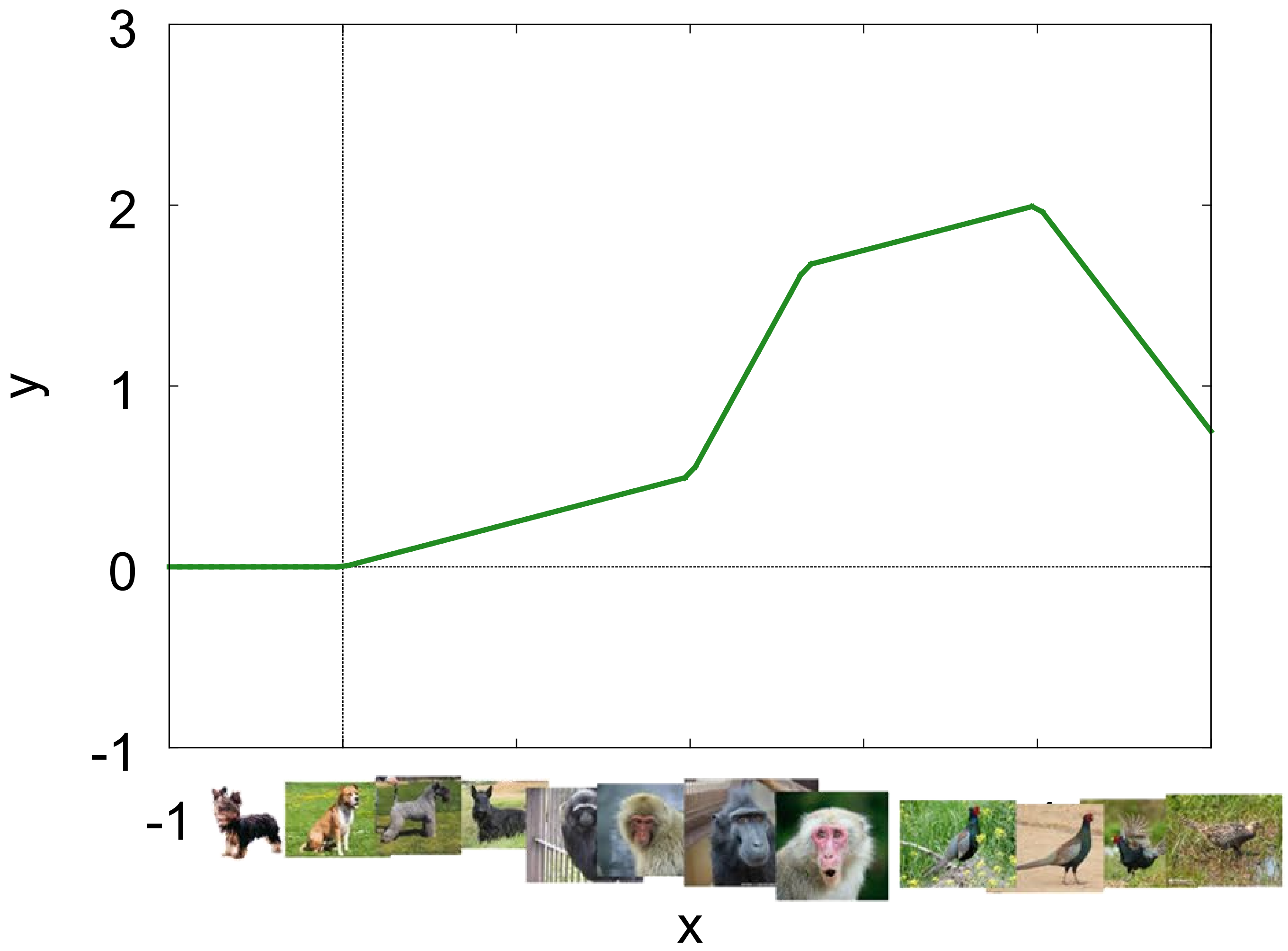
イヌらしさの関数



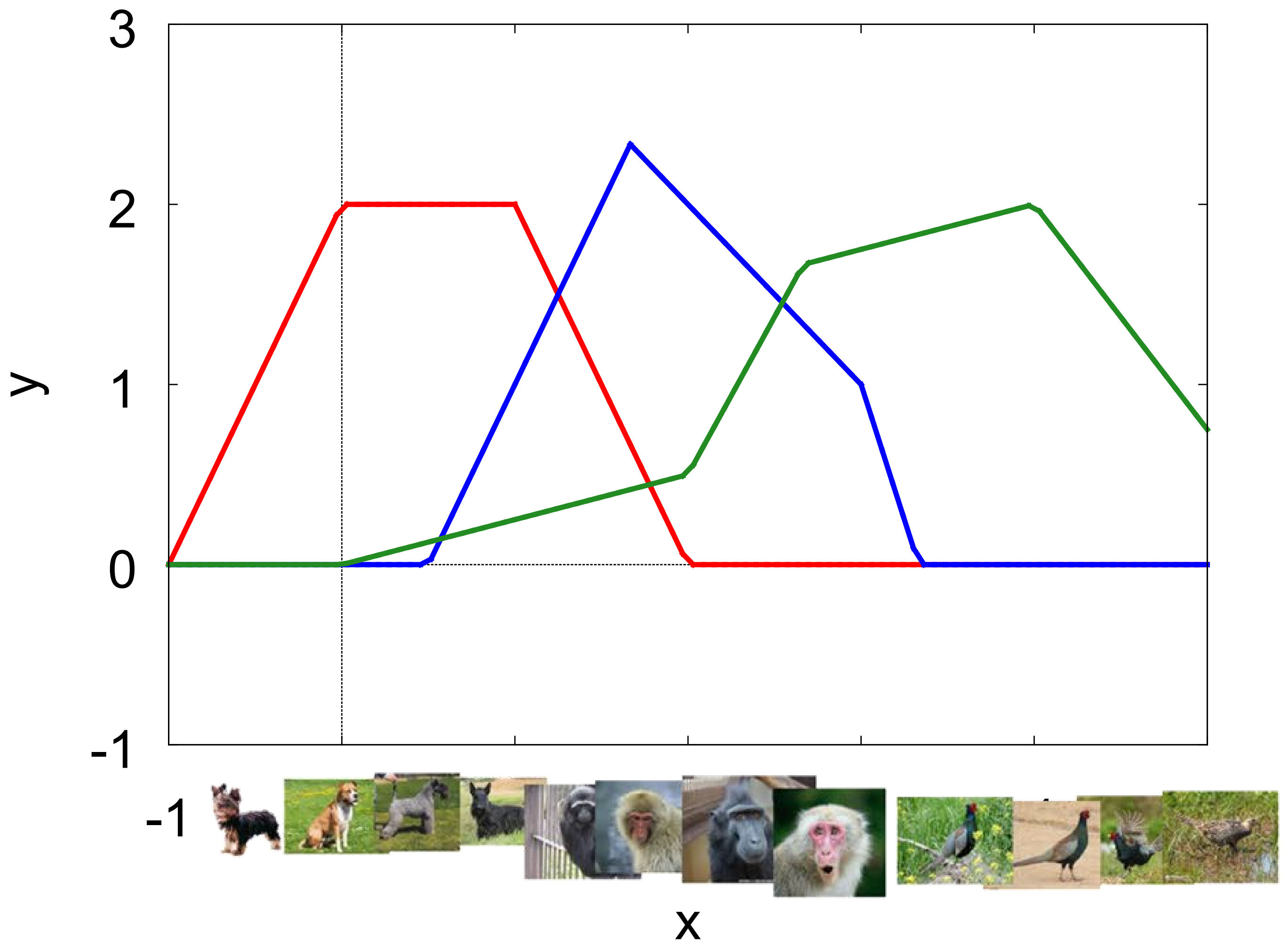
サルらしさの関数



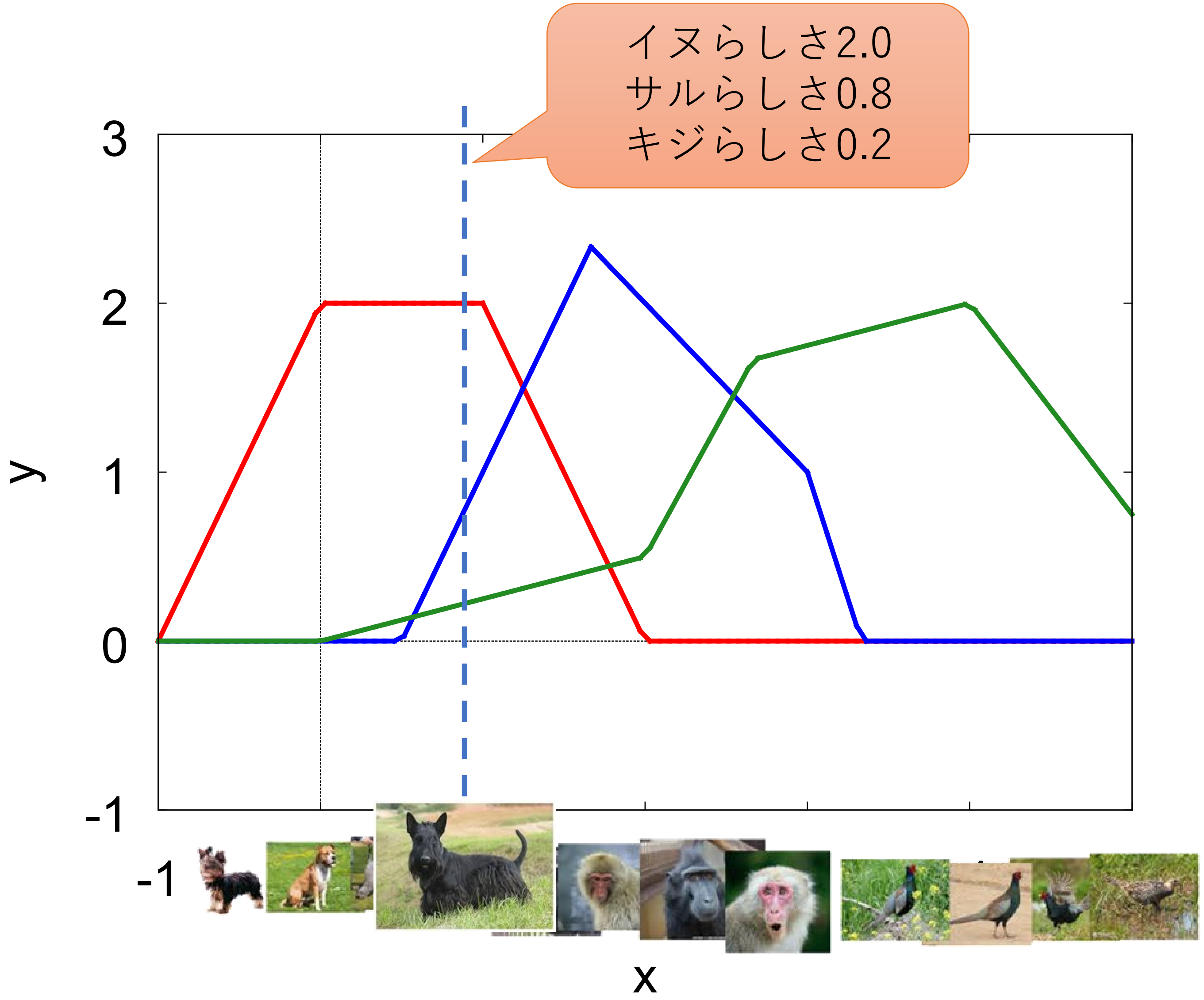
キジらしさの関数



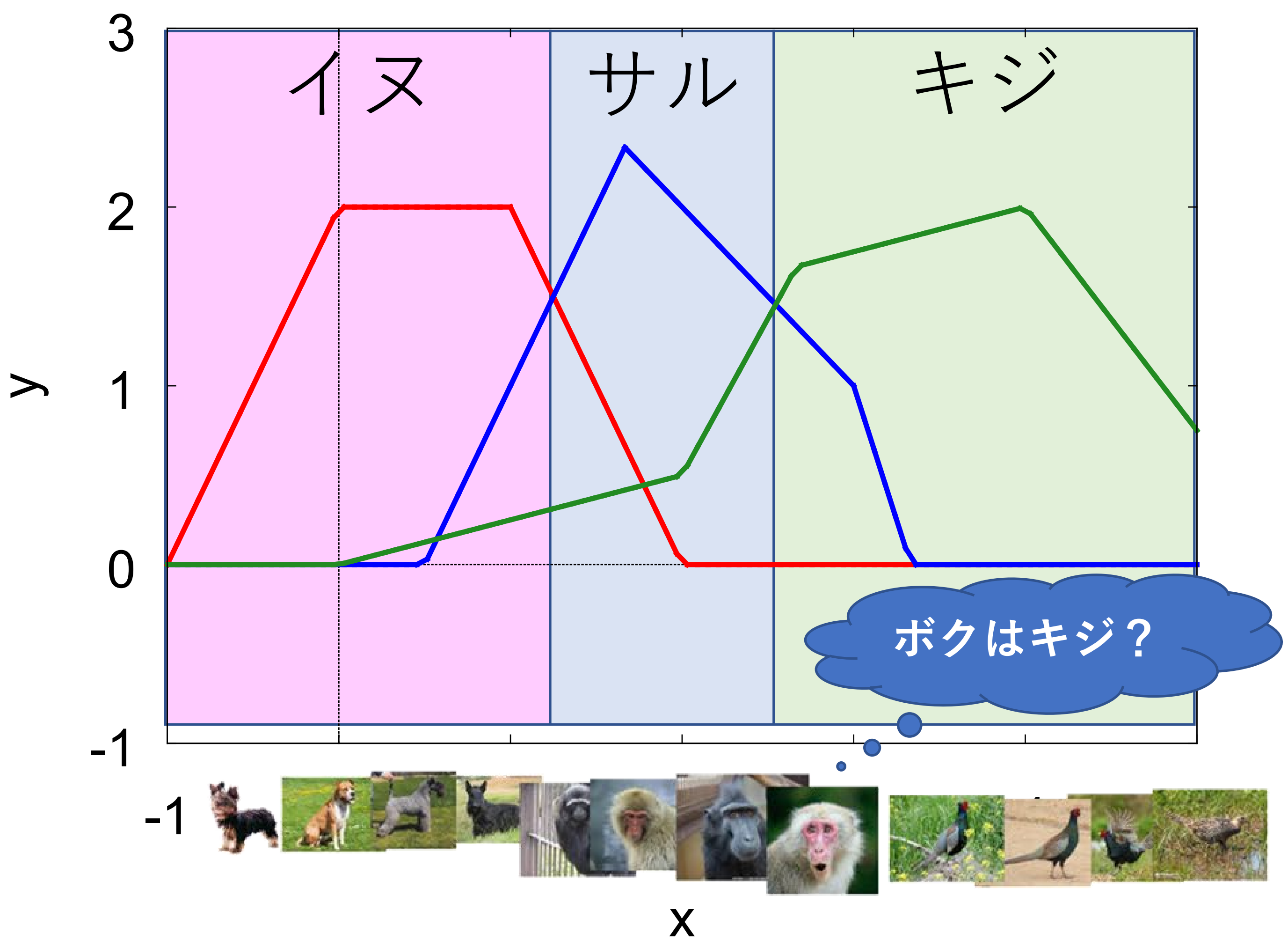
すべて重ねて一番大きい関数を選択



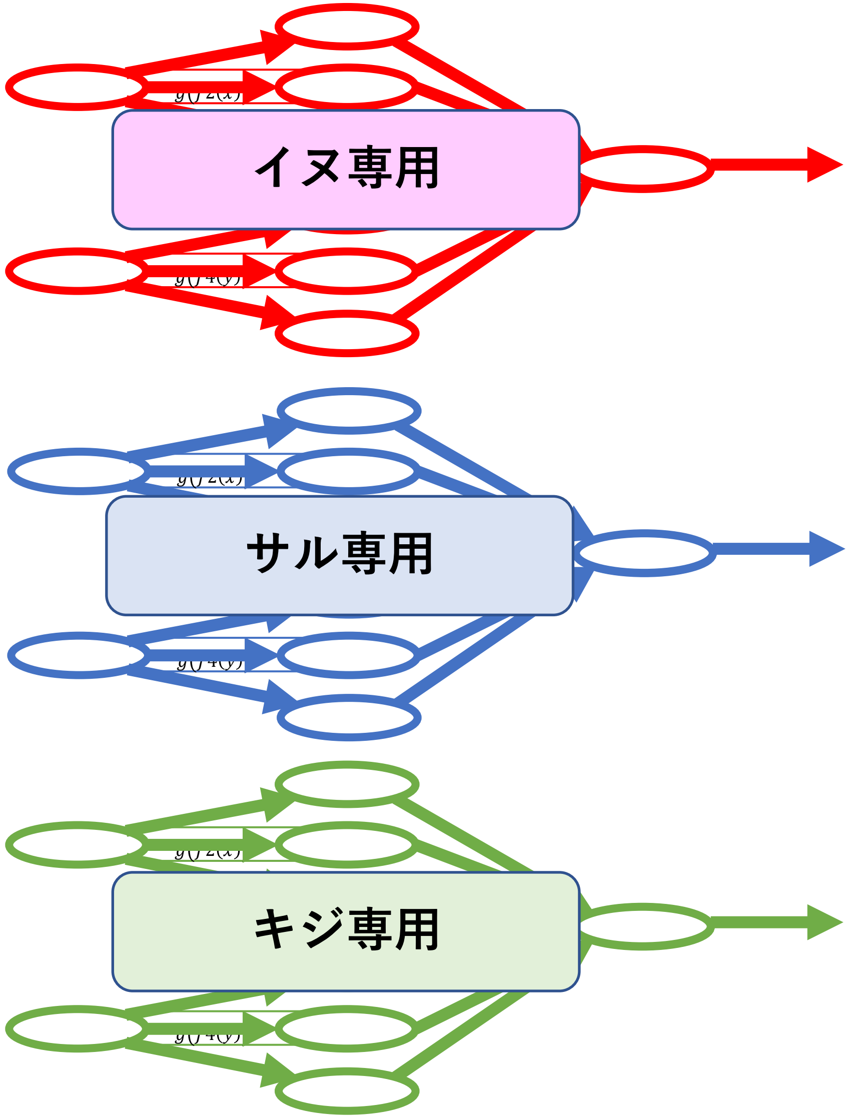
すべて重ねて一番大きい関数を選択



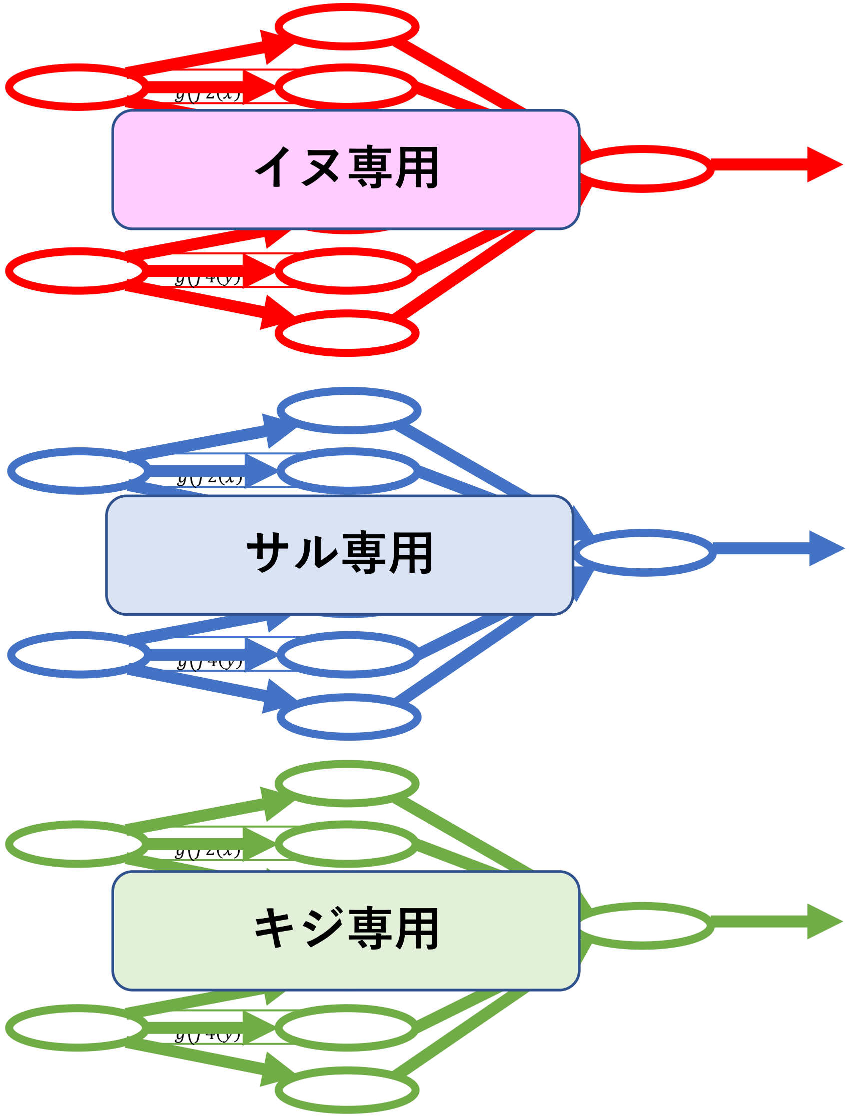
すべて重ねて一番大きい関数を選択

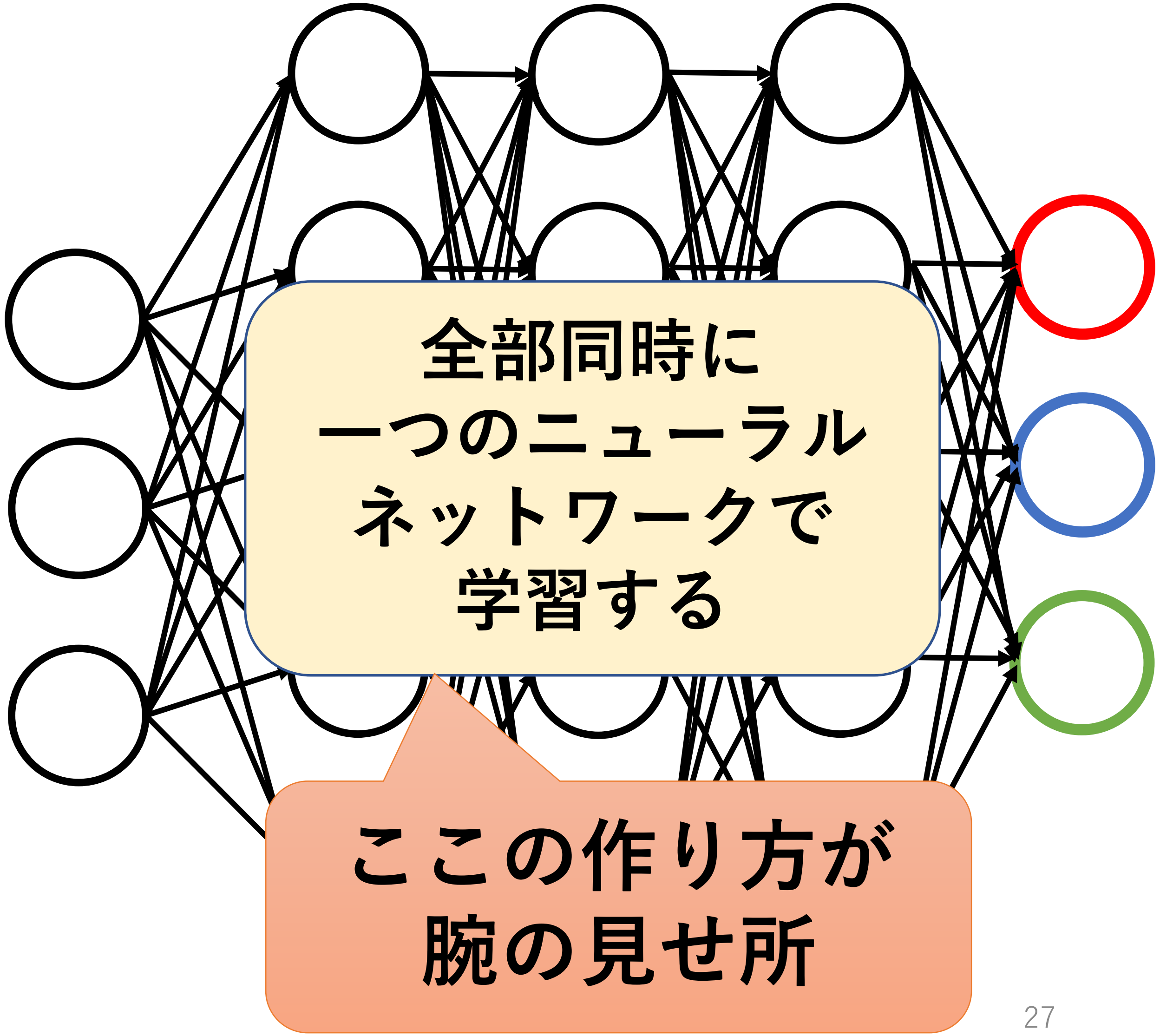


一般化



一般化





まとめ

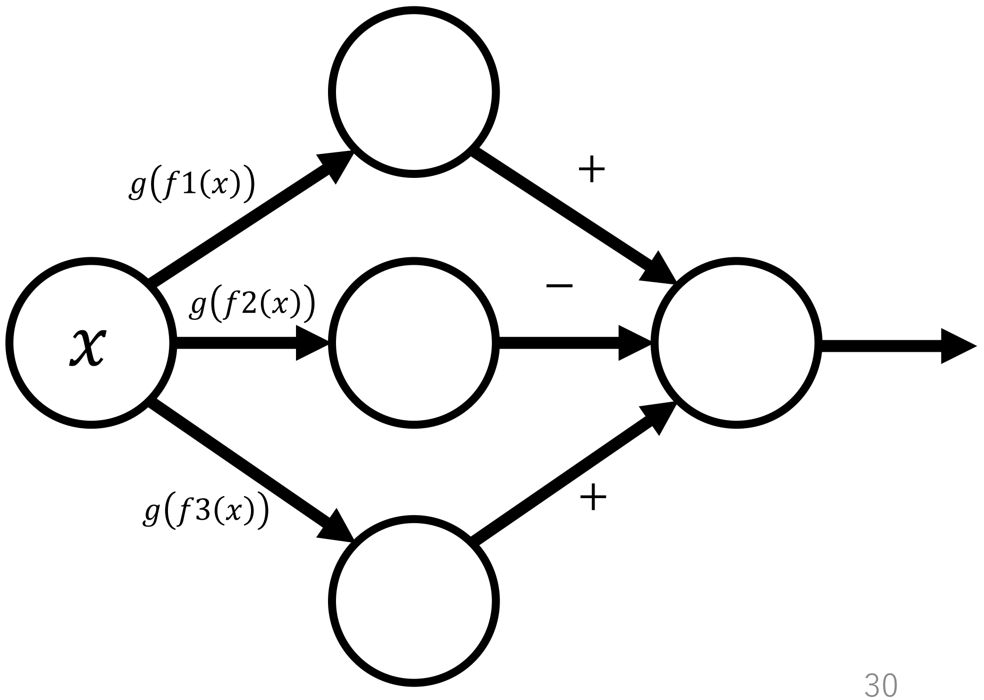
- AIの中身は掛け算と足し算でできている
- 掛け算と足し算で任意の連続な関数を表現できる（普遍性定理）
  - 複数の関数の中から最大値を答えとする

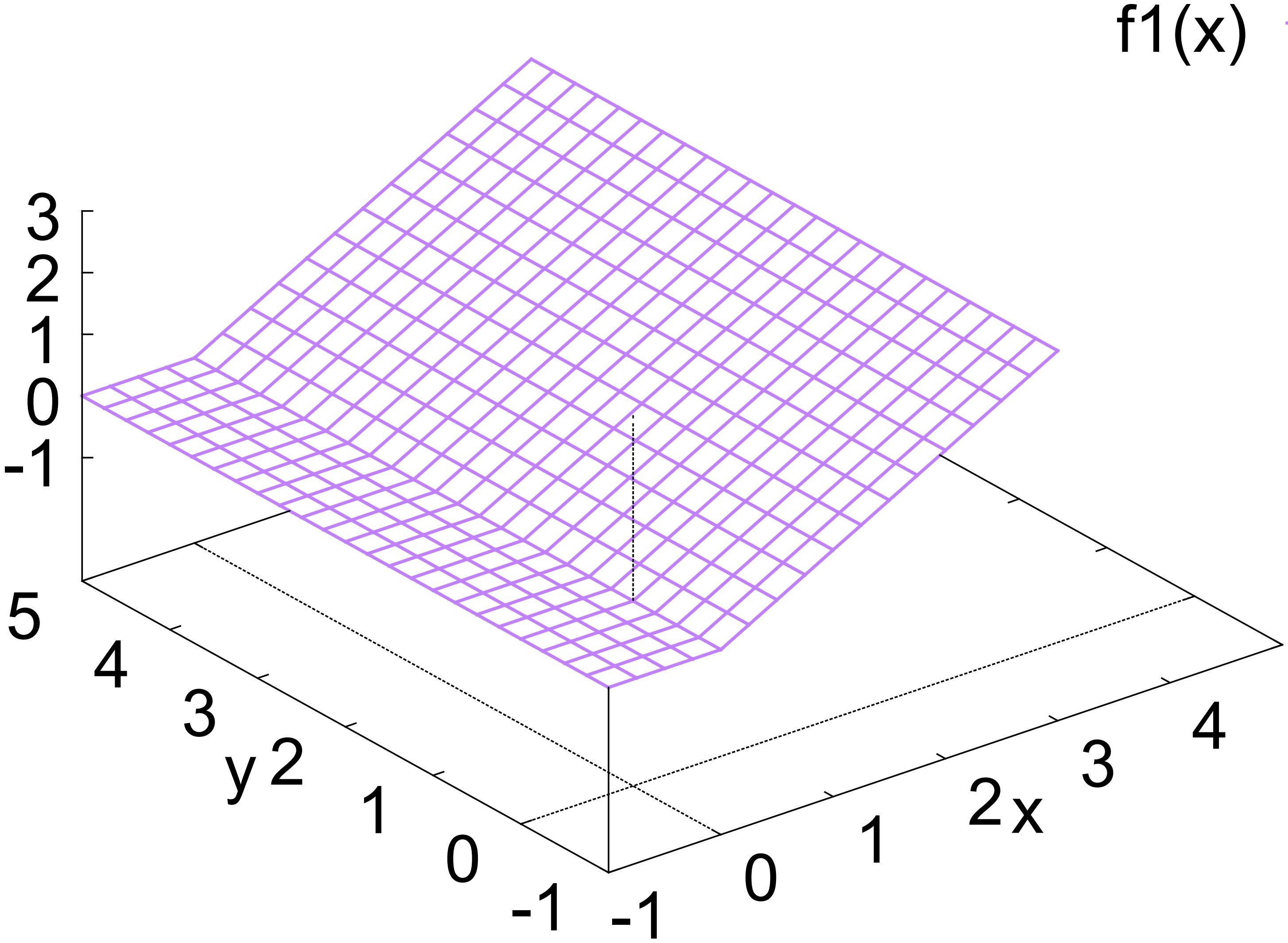
- 以降は2次元の定義域での説明なので省略

普遍性定理（1変数）

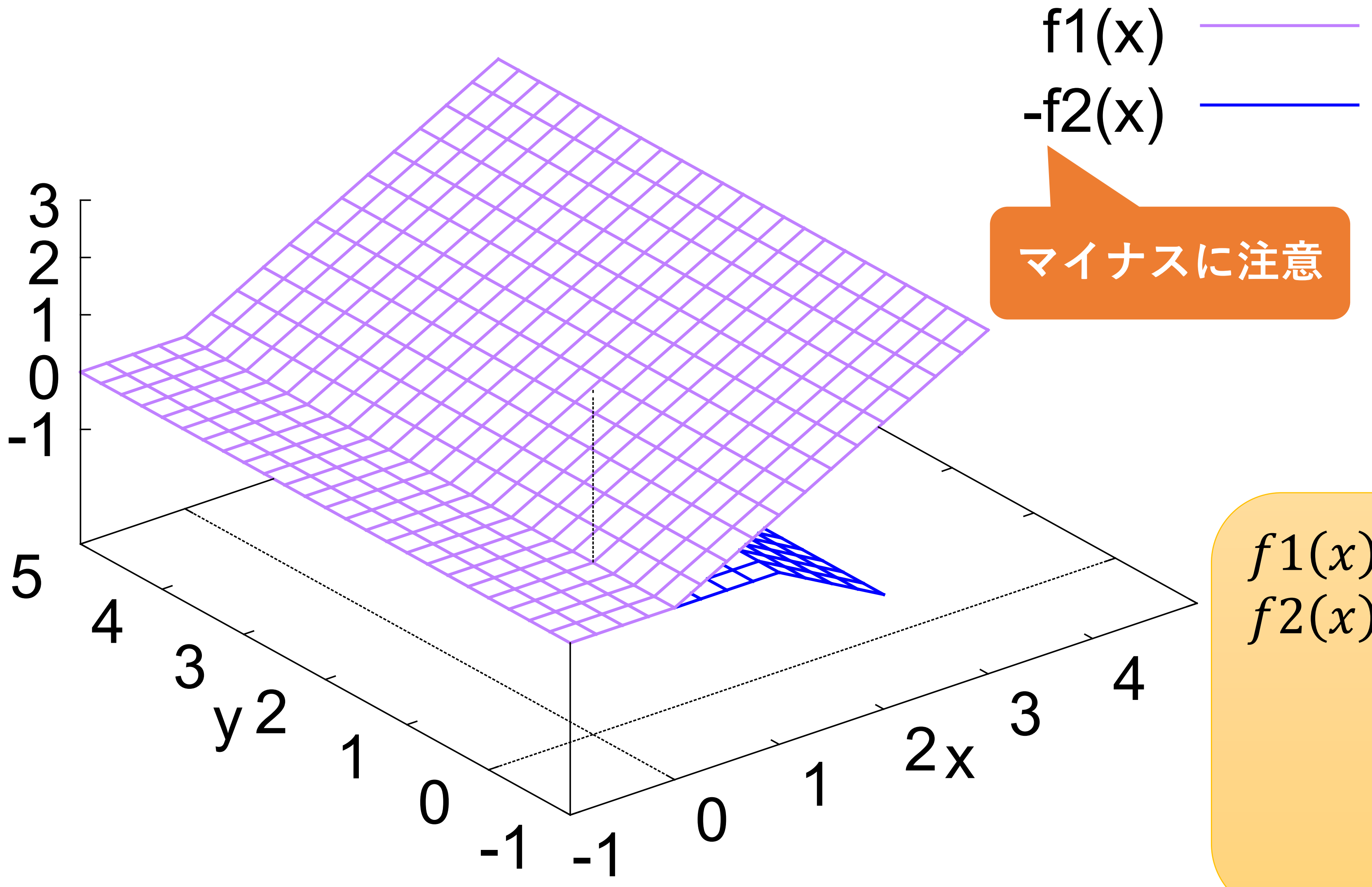
- 任意の連続な関数を再現できることがわかった（かな？）
  - 折れ線なので、曲線を完全に再現することは難しい
  - 許容誤差が与えられると、有限個の式の組み合わせで表現できることが証明されている

- 2次元に拡張してみよう

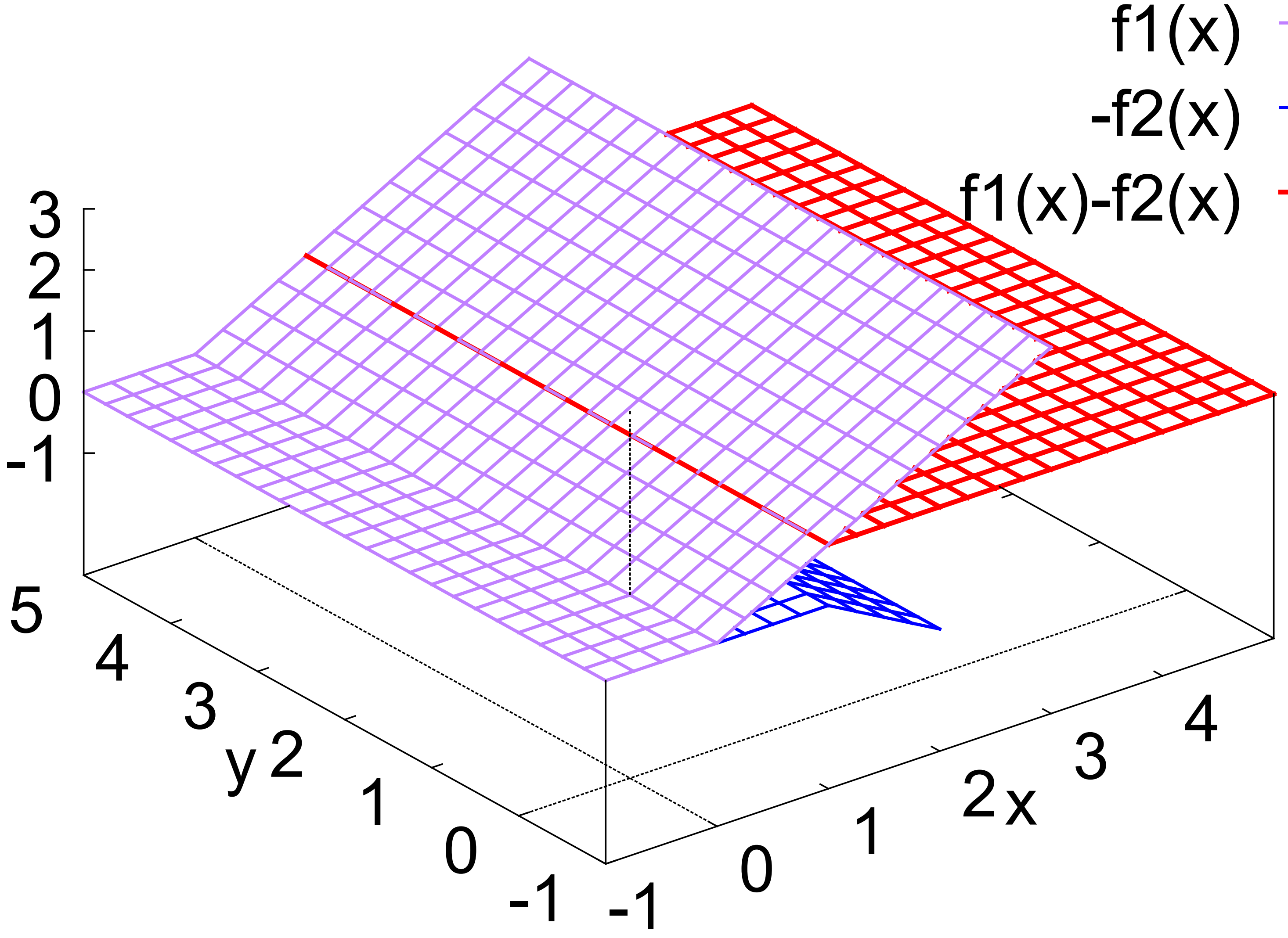




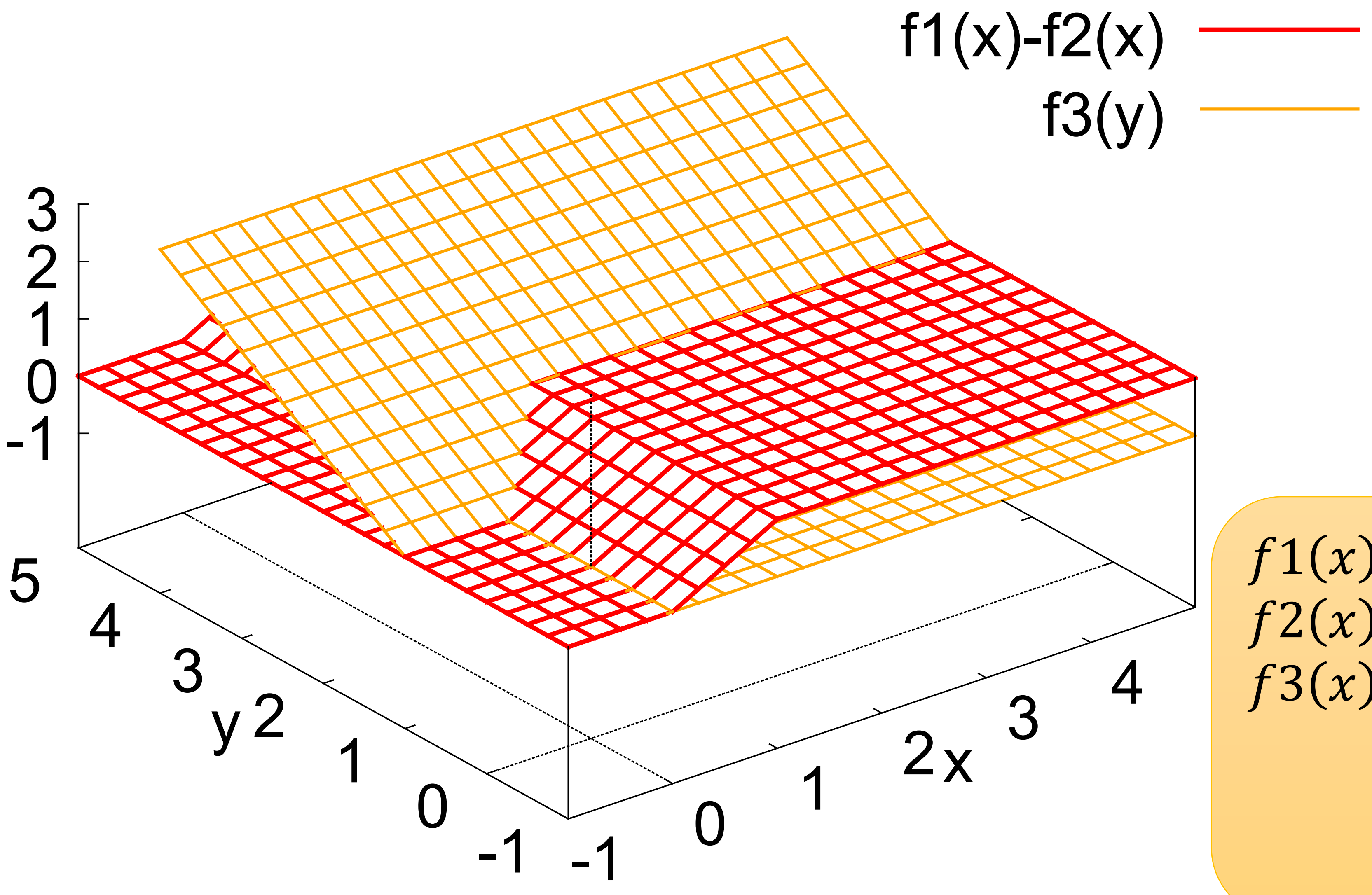
$$f1(x) = x$$



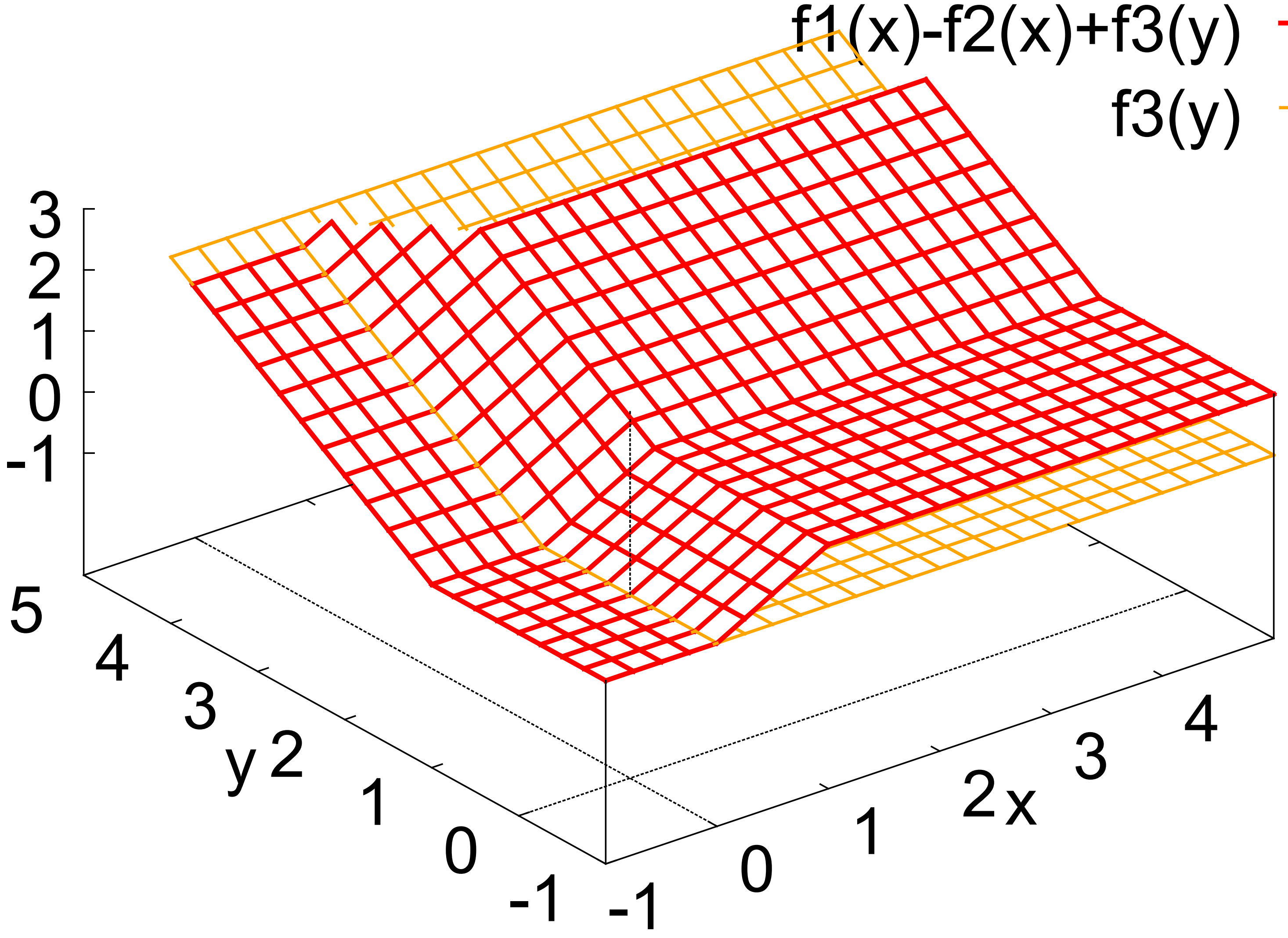
$$f1(x) = x$$
$$f2(x) = x - 1$$



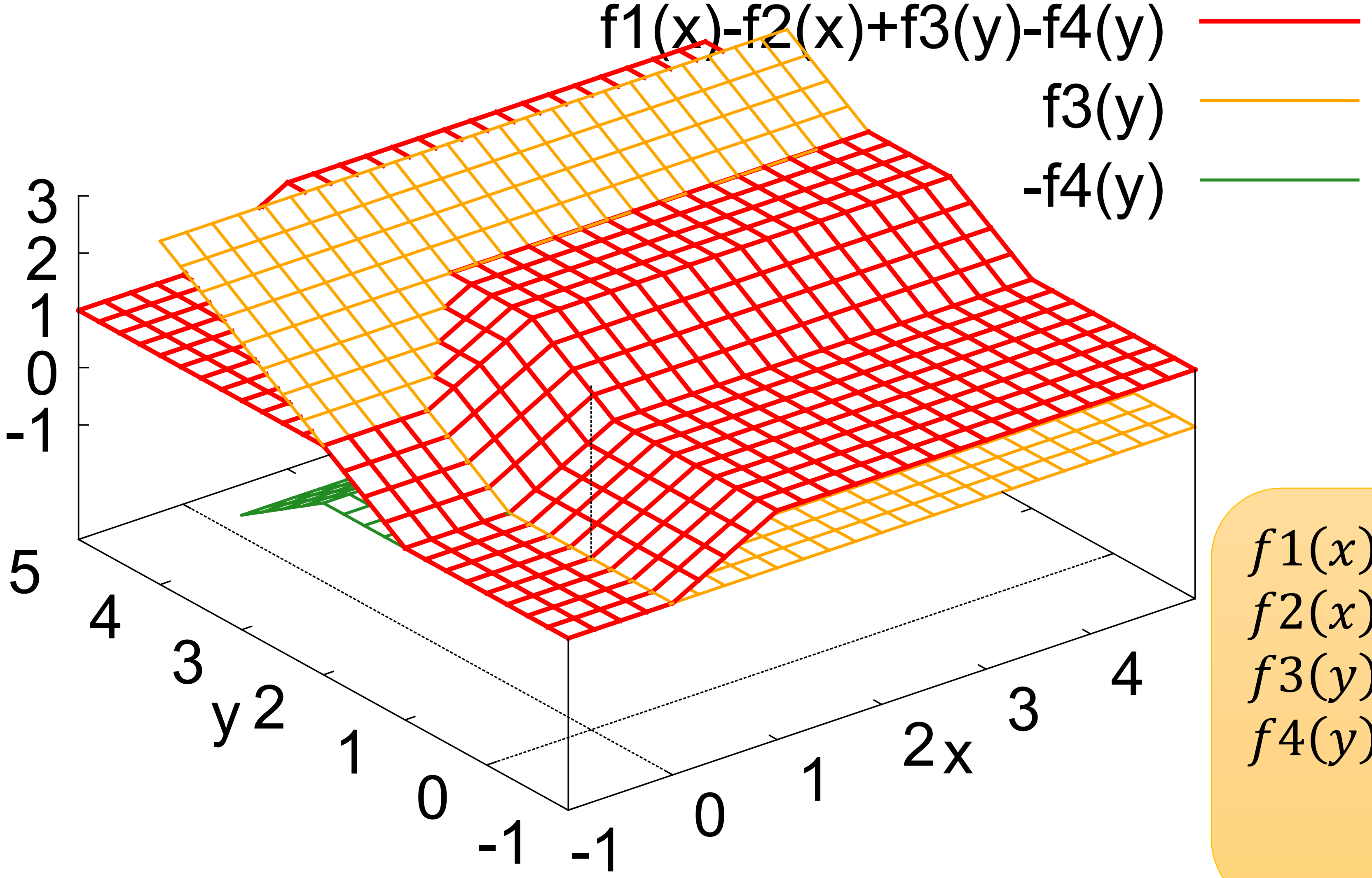
$$f1(x) = x$$
$$f2(x) = x - 1$$



$$f1(x) = x$$
$$f2(x) = x - 1$$
$$f3(x) = y - 1$$



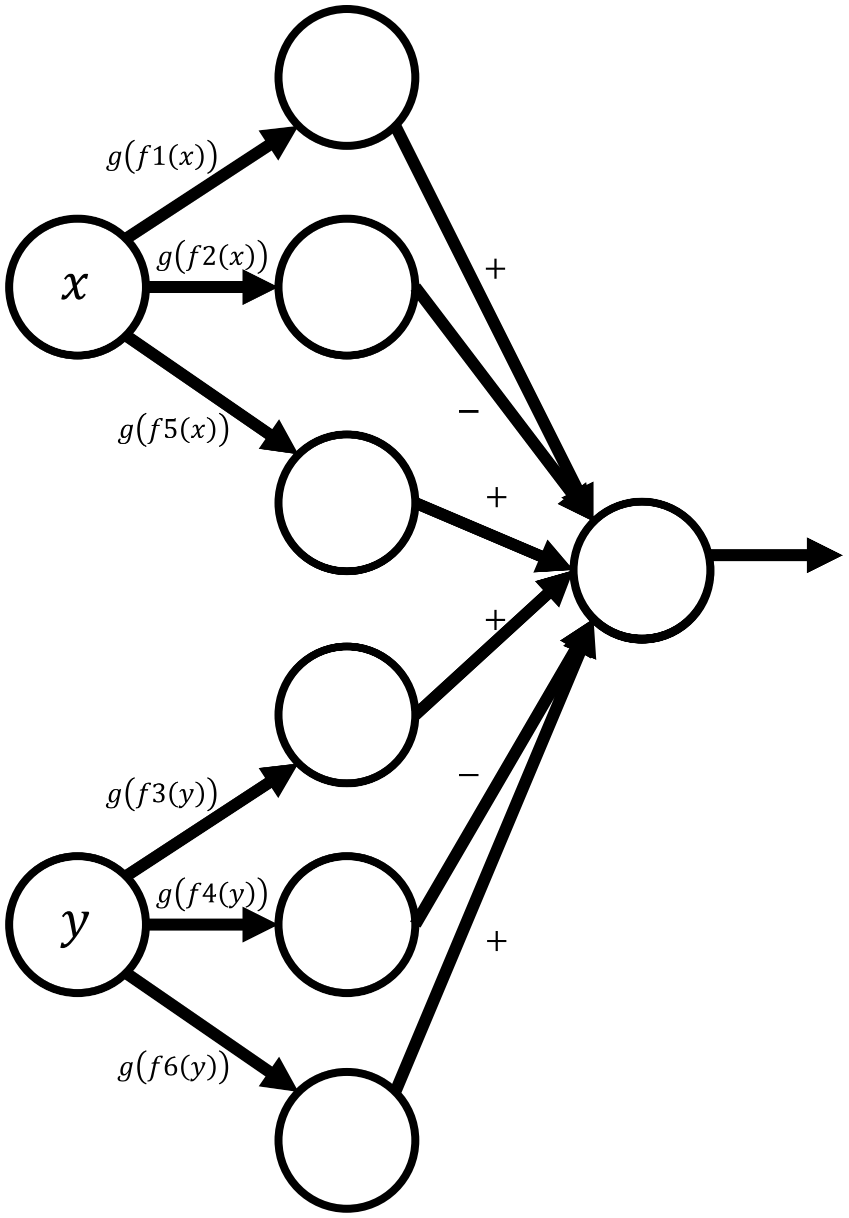
$$f1(x) = x$$
$$f2(x) = x - 1$$
$$f3(x) = y - 1$$



$f1(x) = x$
$f2(x) = x - 1$
$f3(y) = y - 1$
$f4(y) = y - 2$

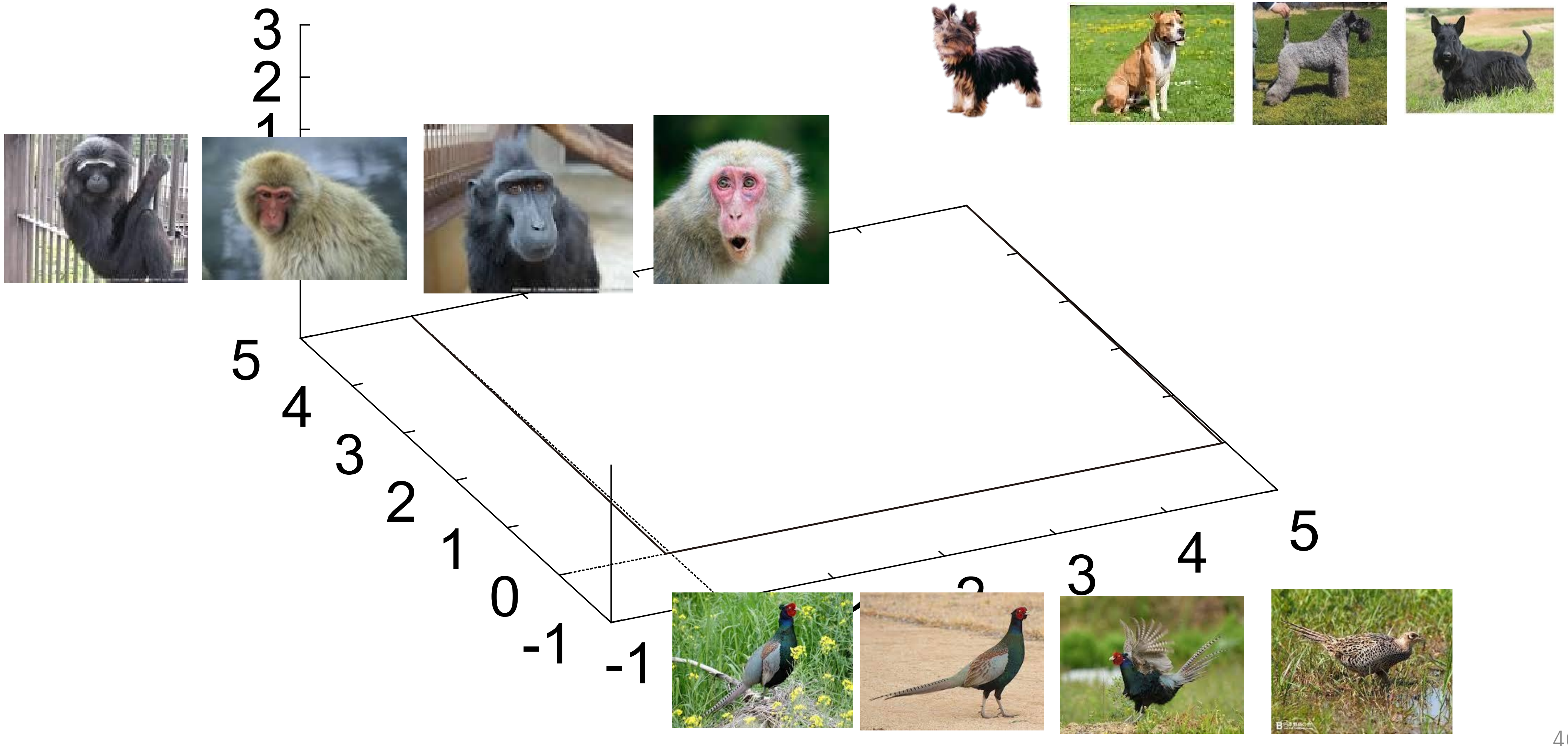
普遍性定理（2変数）

- どんな2変数関数でも作れることがわかった（かな？）
  - 曲面はやはり難しい
  - 許容誤差が与えられると（以下同文）

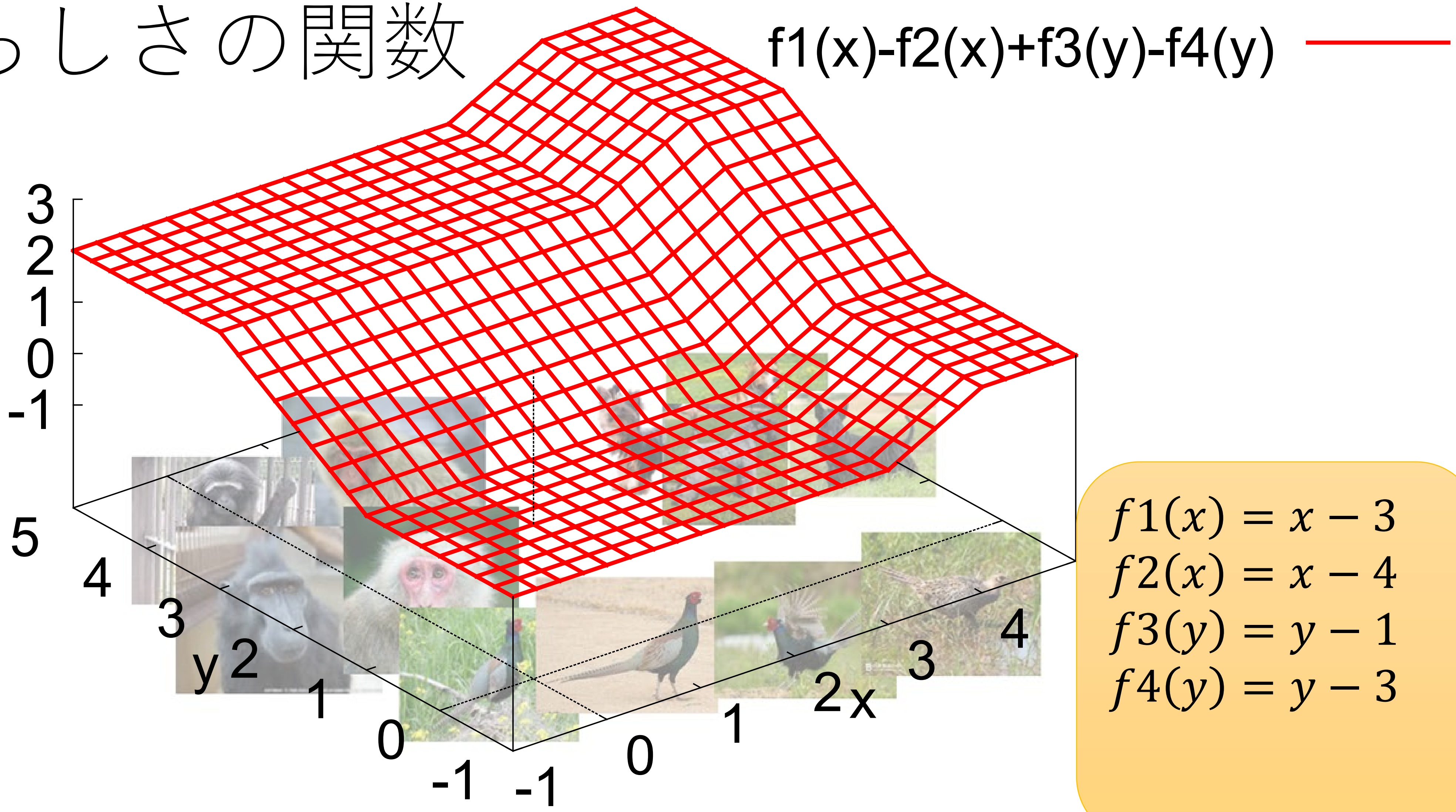


2次元画像の定義域

- NxM画素の画像はNxM次元空間で定義される
- 人間には3次元以上をイメージすることが難しいので、2次元空間に写像する必要がある

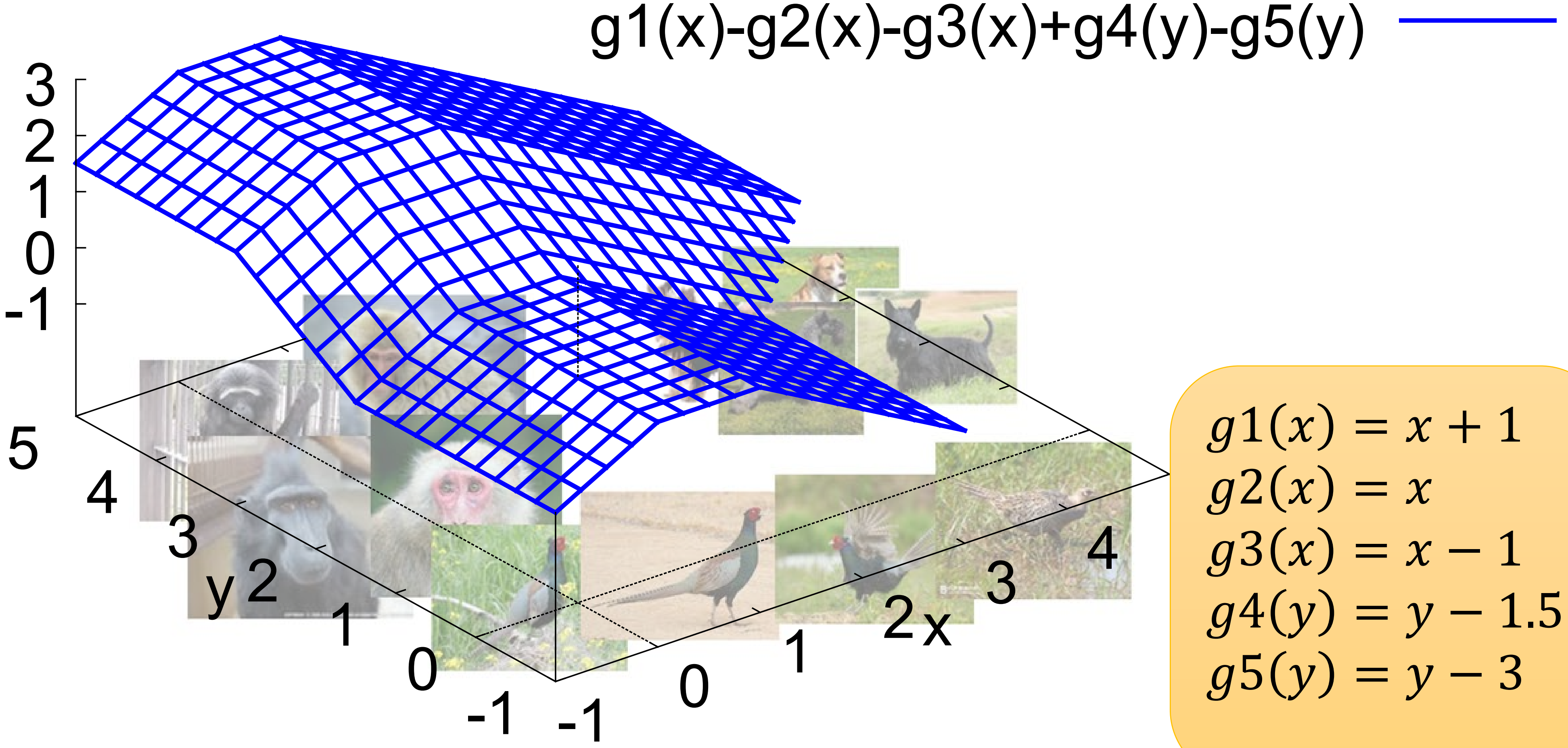

3
2
5
4
3
2
1
0
-1
-1
3
4
5

イヌらしさの関数



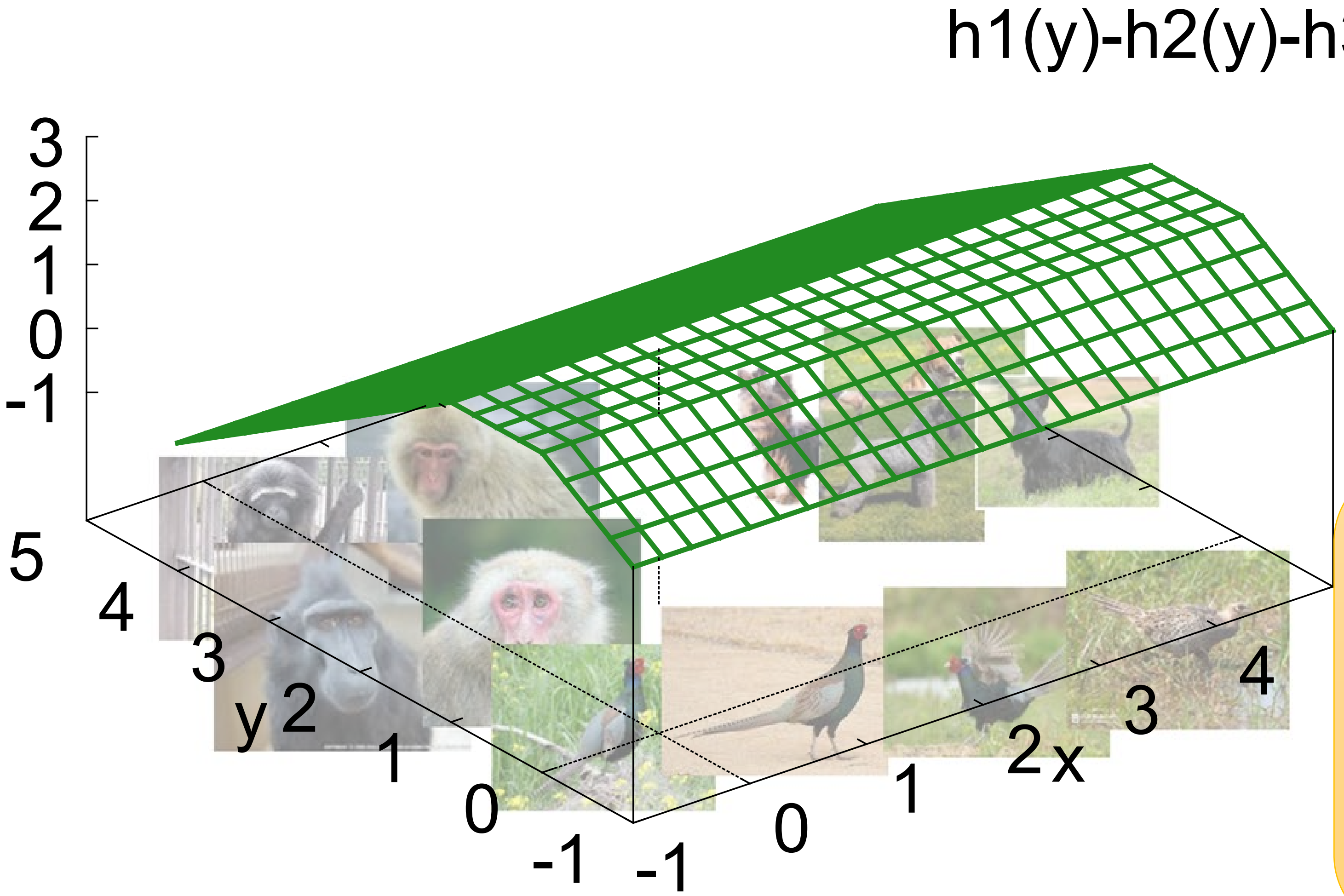
$f1(x) = x - 3$
$f2(x) = x - 4$
$f3(y) = y - 1$
$f4(y) = y - 3$

サルらしさの関数



$$g1(x) = x + 1$$
$$g2(x) = x$$
$$g3(x) = x - 1$$
$$g4(y) = y - 1.5$$
$$g5(y) = y - 3$$

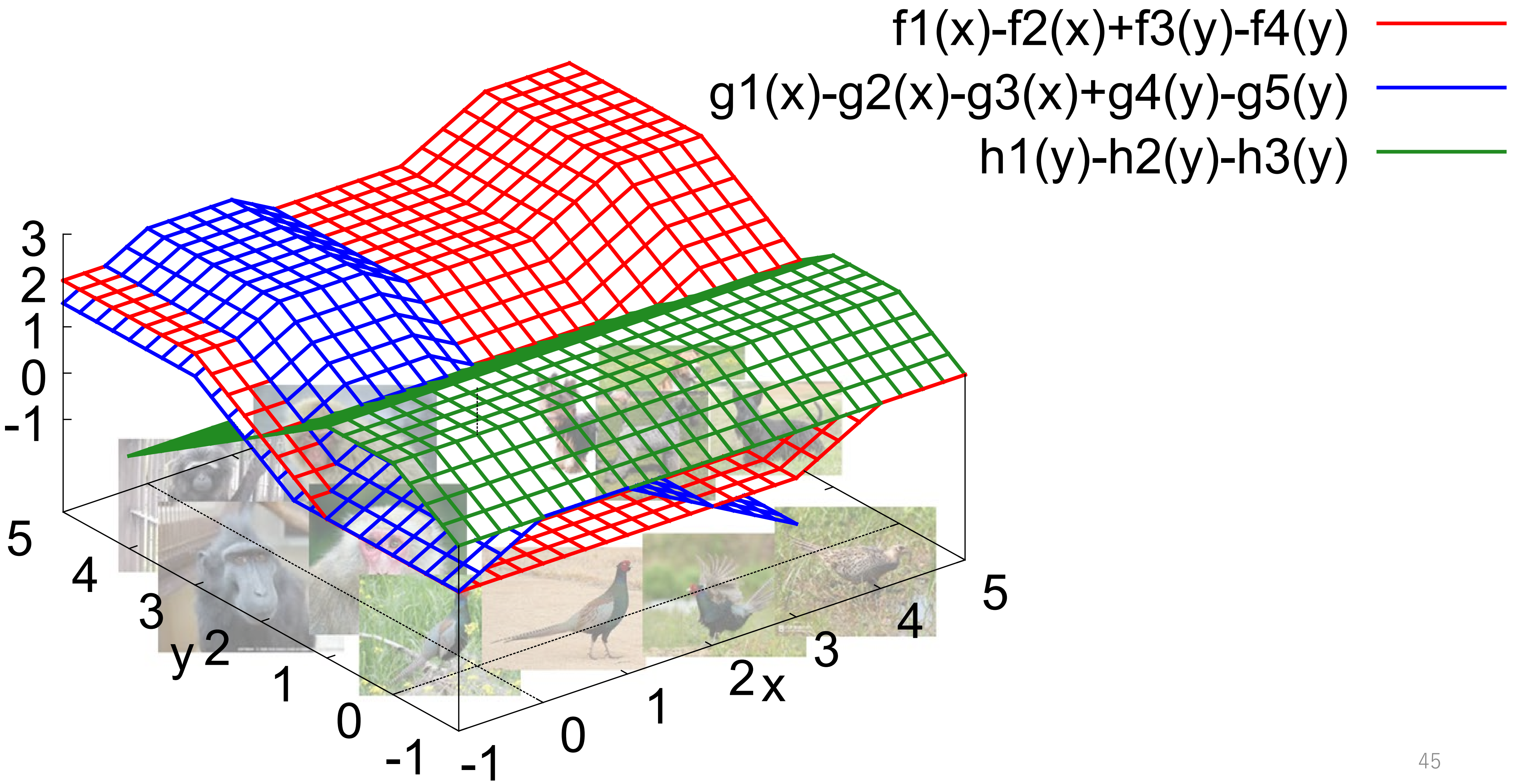
キジらしさの関数

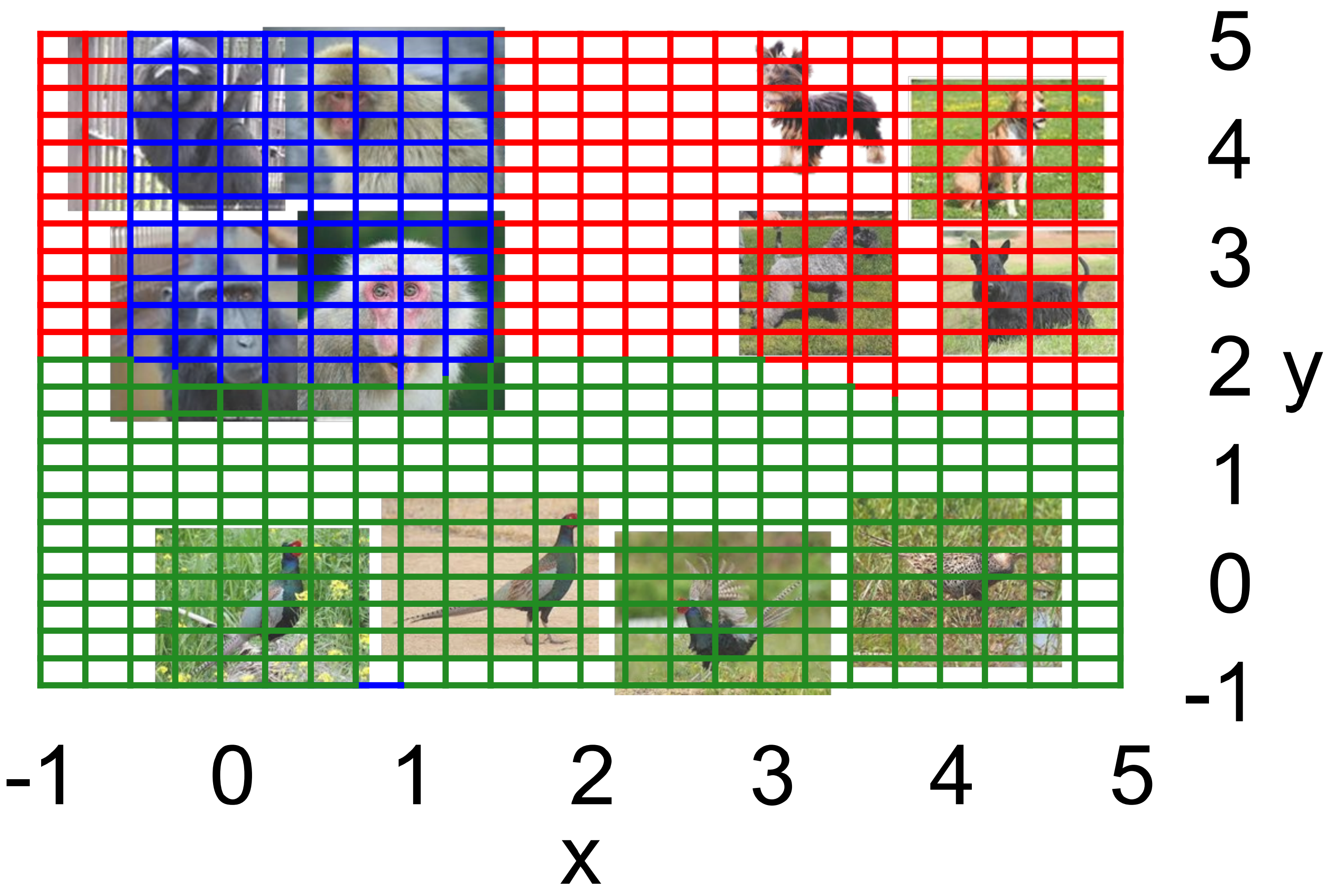


$$h1(y) = y + 2$$
$$h2(y) = y$$
$$h3(y) = y - 1$$

- 複数の関数を重ねる

- 一番スコアの高い部分を選ぶ


f1(x)-f2(x)+f3(y)-f4(y)
g1(x)-g2(x)-g3(x)+g4(y)-g5(y)
h1(y)-h2(y)-h3(y)
3
2
1
0
-1
5
4
3
y 2
1
0
-1
-1
0
1
2 x
3
4
5


5
4
3
2
y
1
0
-1
-1
0
1
2
3
4
5
x