

4輪メカナムホイールの逆運動学

fjunkt98

2020年3月21日

1 目的

4輪メカナムホイールロボットの制御を行うために逆運動学を求める。

2 逆運動学及び順運動学の導出

ここでは図1に示すメカナムホイールロボットの運動学を導出する。

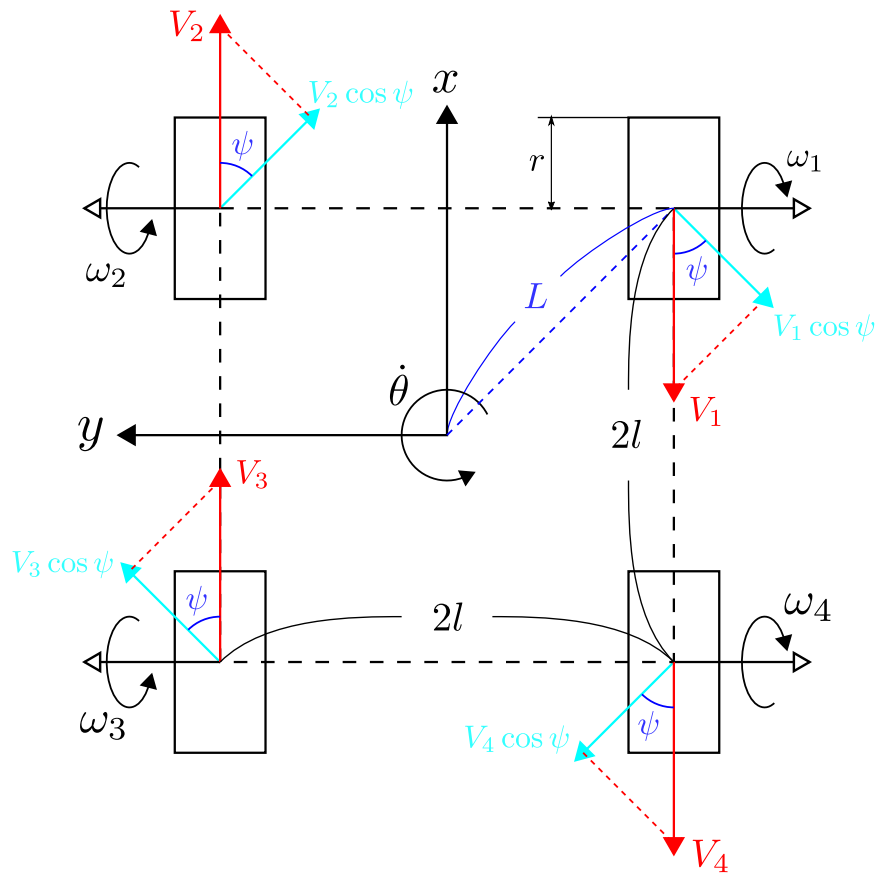


Fig.1 4WD Mecanum Wheel

2.1 ロボットの各種パラメータ

ロボット座標系は右手系座標系であり，原点はロボットの中心に固定されている． x 軸はロボットの前進方向に， z 軸は鉛直上方向に設定されている．

ロボットは次のパラメータを持つ．

- メカナムホイールの半径 r
- ホイールのローラ角度 $\psi = 45^\circ$
- ホイール間距離 $2l$
- ロボット中心からホイールまでの距離 $L = \sqrt{2}l$
- ホイール角速度 ω_i
- ホイールの周速度 $V_i = r\omega_i$
- ロボットの速度の x 軸方向成分 \dot{x}
- ロボットの速度の y 軸方向成分 \dot{y}
- ロボットの角速度 $\dot{\theta}$

メカナムホイールロボットはホイールが正方形の頂点上に配置されているタイプのものを考える．また，ホイールのローラ角度は 45° とする．

2.2 逆運動学の導出

メカナムホイールが回転すると，接地しているローラの軸方向に速度を発生させる．その大きさはメカナムホイールの周速度 V_i に $\cos \psi$ を乗じたものになる．ロボットの速度はホイールによってのみ発生することを考えると，式 1 が成り立つ．

$$\begin{cases} V_1 \cos \psi = -\dot{x} \cos \psi - \dot{y} \sin \psi - L\dot{\theta} \end{cases} \quad (1a)$$

$$\begin{cases} V_2 \cos \psi = \dot{x} \cos \psi - \dot{y} \sin \psi - L\dot{\theta} \end{cases} \quad (1b)$$

$$\begin{cases} V_3 \cos \psi = \dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi - L\dot{\theta} \end{cases} \quad (1c)$$

$$\begin{cases} V_4 \cos \psi = -\dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi - L\dot{\theta} \end{cases} \quad (1d)$$

式 1 に $\psi = 45^\circ$ を代入すると，式 2 が得られる．

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} V_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \dot{x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{y} - L\dot{\theta} \end{cases} \quad (2a)$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} V_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{y} - L\dot{\theta} \end{cases} \quad (2b)$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} V_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{x} + \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{y} - L\dot{\theta} \end{cases} \quad (2c)$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} V_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \dot{x} + \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{y} - L\dot{\theta} \end{cases} \quad (2d)$$

$\sqrt{2}L = \sqrt{2} \times \sqrt{l^2 + l^2} = 2l$ であることを考慮して式 2 を変形すると，式 3 が得られる．

$$\begin{cases} V_1 = -\dot{x} - \dot{y} - 2l\dot{\theta} \end{cases} \quad (3a)$$

$$\begin{cases} V_2 = \dot{x} - \dot{y} - 2l\dot{\theta} \end{cases} \quad (3b)$$

$$\begin{cases} V_3 = \dot{x} + \dot{y} - 2l\dot{\theta} \end{cases} \quad (3c)$$

$$\begin{cases} V_4 = -\dot{x} + \dot{y} - 2l\dot{\theta} \end{cases} \quad (3d)$$

式 3 を行列表示すると式 2.3 が得られる.

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2l \\ 1 & -1 & -2l \\ 1 & 1 & -2l \\ -1 & 1 & -2l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (4)$$

2.3 順運動学の導出

順運動学は, 逆運動学の式を変形することで得られる. 今, 式 2.3 の係数行列を A と置く.

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

順運動学を求めるには, A の逆行列 A^{-1} を求めればよい. しかし, A は正方行列ではないため, 逆行列を持たない. 従って, 疑似逆行列を用いる. A の疑似逆行列 A^+ は $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ で求められる. これにより A^+ が次のように求まる.

$$A^+ = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2l} & -\frac{1}{2l} & -\frac{1}{2l} & -\frac{1}{2l} \end{pmatrix} \quad (5)$$

従って, 式 6 に示す順運動学が求まる.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2l} & -\frac{1}{2l} & -\frac{1}{2l} & -\frac{1}{2l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} \quad (6)$$

3 速度制御のための入力信号

前章では 4 輪メカナムホイールロボットの逆運動学及び順運動学を導いた. ロボットを操縦する際は, 速度ベクトル $\vec{x} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})^T$ を入力として, 逆運動学により各ホイールの速度を計算するのが一般的だが, 入力できる速度には制限がある. メカナムホイールのような全方位移動ロボットのコントローラとしては 3 軸のジョイスティックが用いられるのが一般的であるが, それぞれのジョイスティックをそのまま各速度に対応させるのは適切ではない. そこで, コントローラからの 3 軸入力を, ロボットへの入力速度ベクトルへとマッピングする処理が必要となる.

3.1 入力速度の制約式

ロボットの移動速度はホイールの最大回転速度により制限される. 式 3 を見ると分かるように, ロボットへの入力速度 \dot{x} , \dot{y} , $\dot{\theta}$ は, その絶対値の和がホイールの出せる最大回転速度を超えるよう

な組み合わせになってはならない．ここで，各ホイールの性能は全て同等とし，ホイールが出せる最大角速度を ω_{\max} ，ホイールの最大周速度を $V_{\max} = r\omega_{\max}$ とすると，式 7 に示す入力速度の制約式が得られる．

$$V_{\max} = |\dot{x}| + |\dot{y}| + 2l|\dot{\theta}| \quad (7)$$

ここで， $\hat{\theta} = 2l\dot{\theta}$ として式 7 に代入すると，式 7 は図に示すような $\dot{x}\dot{y}\hat{\theta}$ 座標系における正八面体の内部領域を表す．ロボットへの入力速度ベクトル $\vec{x} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})^T$ をこの座標系の位置ベクトルであるとしたとき，位置ベクトルは正八面体の内部に存在していなければならない．

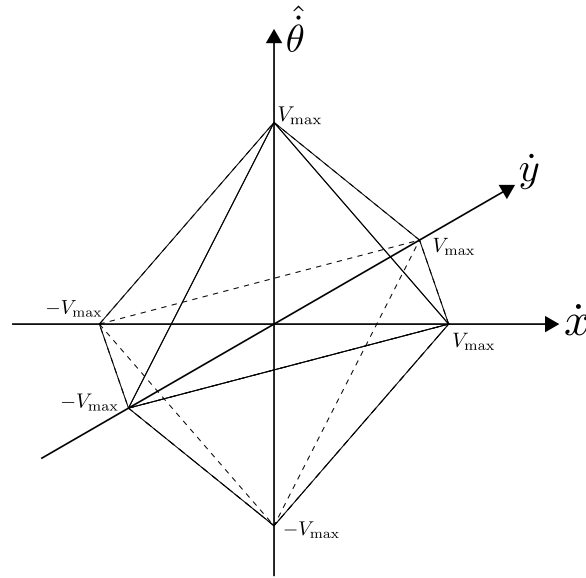


Fig.2 Constraint Area of Input Velocity Vector

3.2 入力信号から速度ベクトルへのマッピング

ここでは 3 軸のアナログジョイスティックを用いてロボットを速度制御することを考える．それぞれのアナログジョイスティックの入力は \dot{x} , \dot{y} , $\hat{\theta}$ に対応するものとし， \dot{x} に対応するアナログジョイスティックの信号値を α ， \dot{y} に対応するものを β ， $\hat{\theta}$ に対応するものを γ と表す．また，各ジョイスティックの信号値の範囲は -1.0～1.0 であるとする．

3 つのジョイスティックによる入力の組み合わせをベクトル $\vec{\epsilon} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ で表す． $\alpha\beta\gamma$ 座標系において， $\vec{\epsilon}$ が取る領域は，原点を中心とする幅 2 の正方形となる．この正方形の領域を，

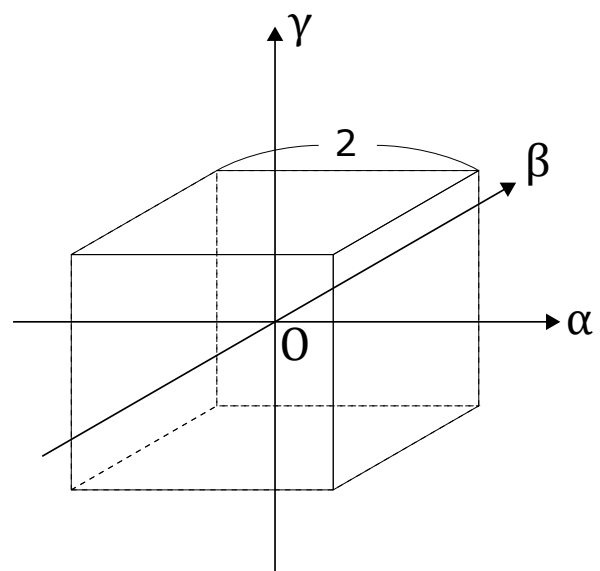


Fig.3 Input Area