数学实验第十一周作业

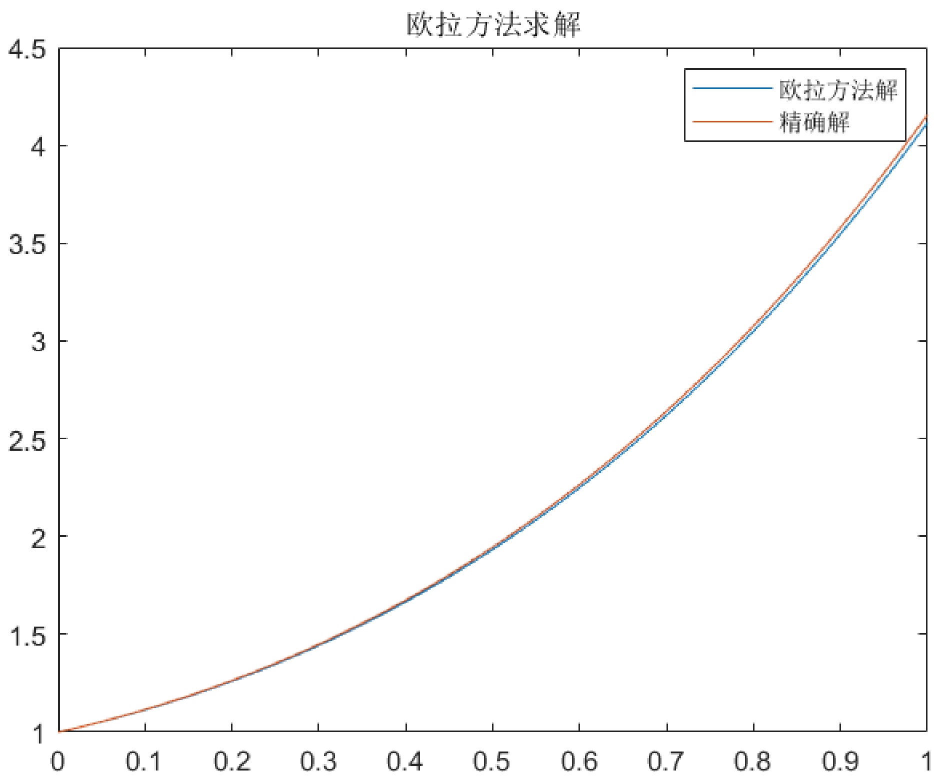
学号：202023092020

姓名：冯健齐

目录

P85 2(1)

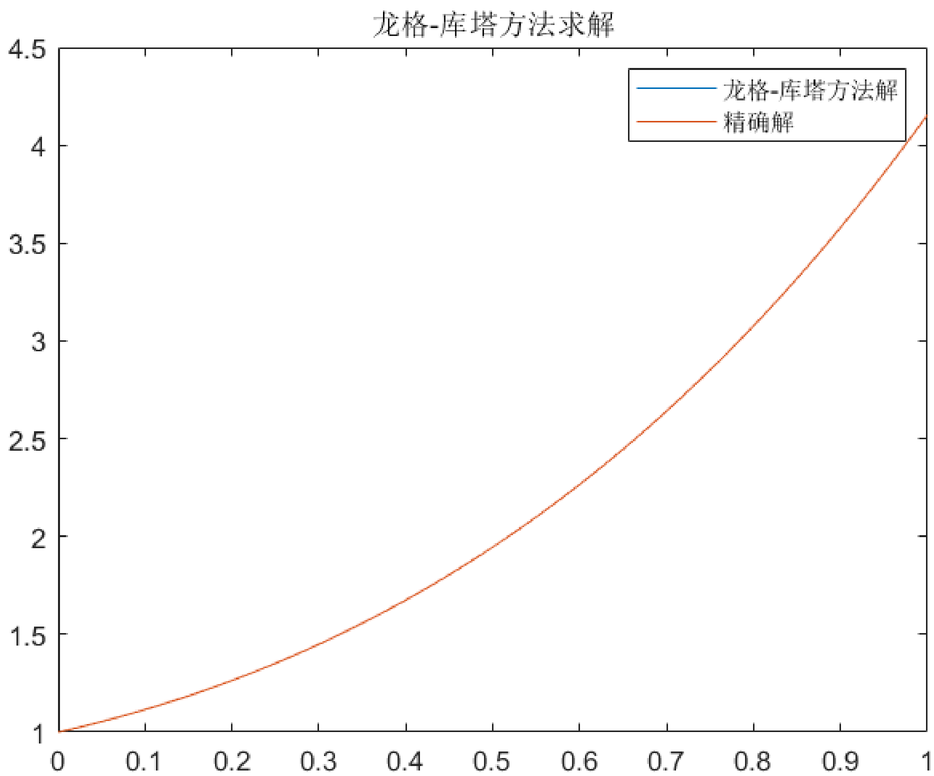
```
%题目条件
f=@(x,y) y+2*x;%给定函数
start=[0 1];%初始条件
tspan=[0:0.01:1];%间距
x=tspan;
y=3*exp(x)-2*x-2;%精确解
%欧拉方法求解
y1=odeuler(f,0,0.01,1,1);
plot(tspan,y1,'-',tspan,y,'-');
legend('欧拉方法解','精确解');
title('欧拉方法求解');
```




```
s1=wucha(tspan,y1,y)
```

```
s1 = 0.0404
```

```
%龙格-库塔方法
[tspan, y2]=ode45(f,tspan,1);
plot(tspan,y2,'-',tspan,y,'-');
legend('龙格-库塔方法解','精确解');
title('龙格-库塔方法求解');
```



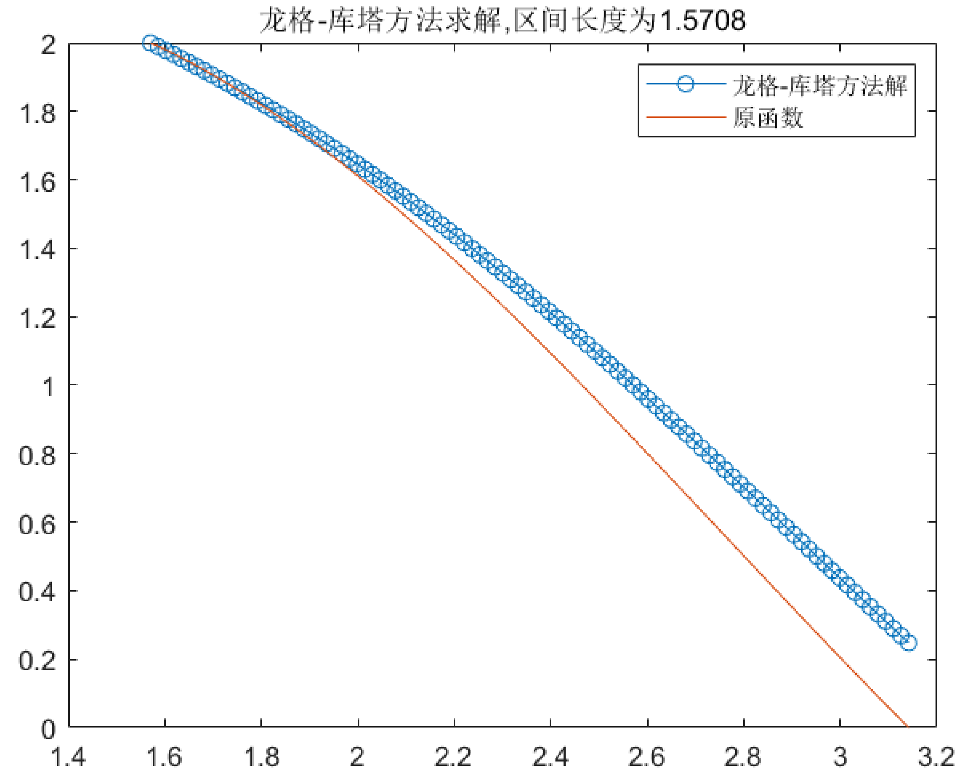

```
s2=wucha(tspan,y2,y)
```

```
s2 = 1.7154e-08
```

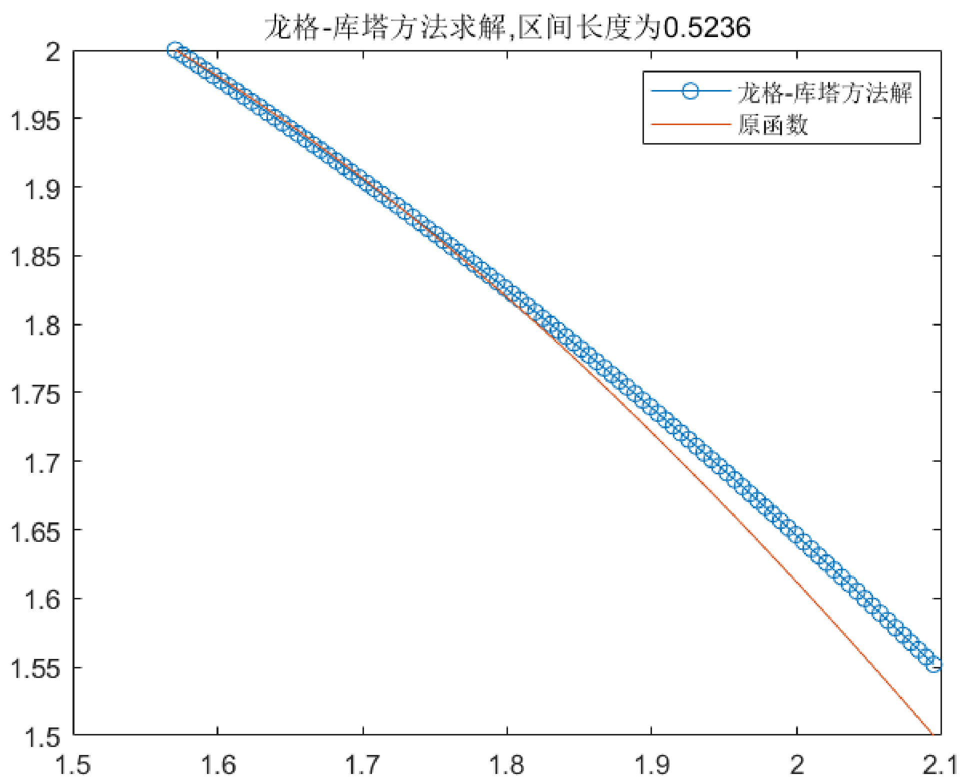
由图像与平均误差可以看出，龙格-库塔方法的结果平均误差极小，且其函数图像与精确解重合。

P85 2(3)

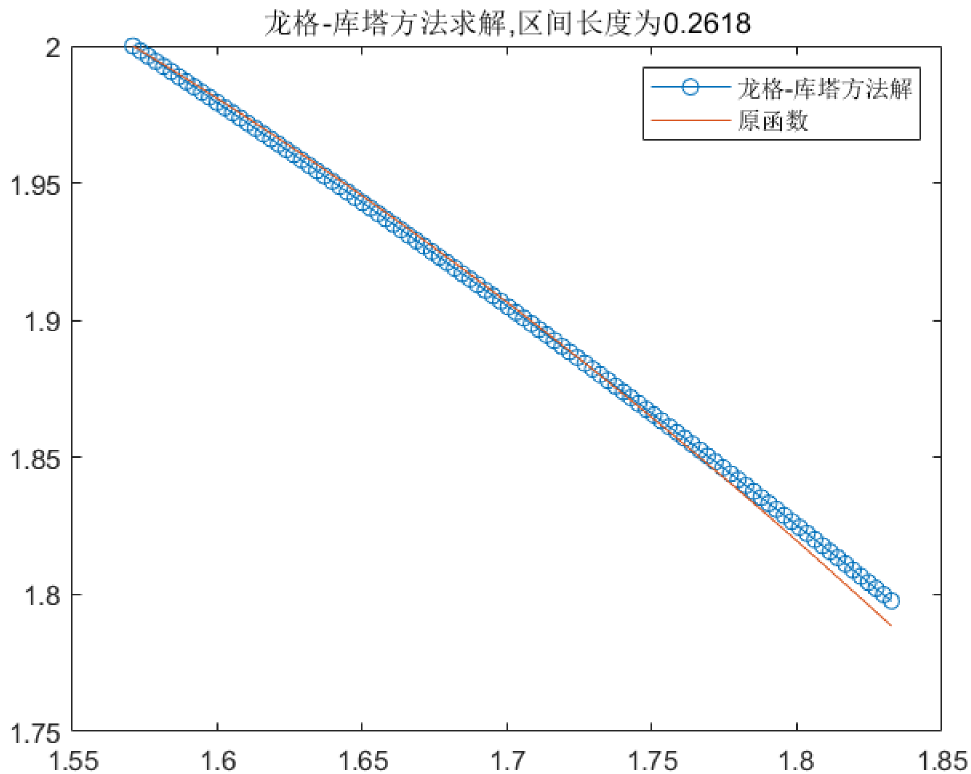
```
%题目条件,涉及到两个方程的解
y0=[-2/pi 2];%初始条件
i=0;
for k=[pi 2*pi/3 7*pi/12 13*pi/24]
    i=i+1;
    figure(i);
    num=k-pi/2;
    tspan=linspace(pi/2,k,100);%间距
    x=tspan;
    y=sin(x).*(2.*pi./x).^(1/2);%精确解
    %龙格-库塔方法
    [tspan, y2]=ode45('bessel',tspan,y0);
    plot(tspan,y2(:,2),'-o',tspan,y,'-');
    legend('龙格-库塔方法解','原函数');
    title(['龙格-库塔方法求解,区间长度为',num2str(num)]);
    yy2=(y2(:,2))';
    s=wucha(tspan,yy2,y)
end
```



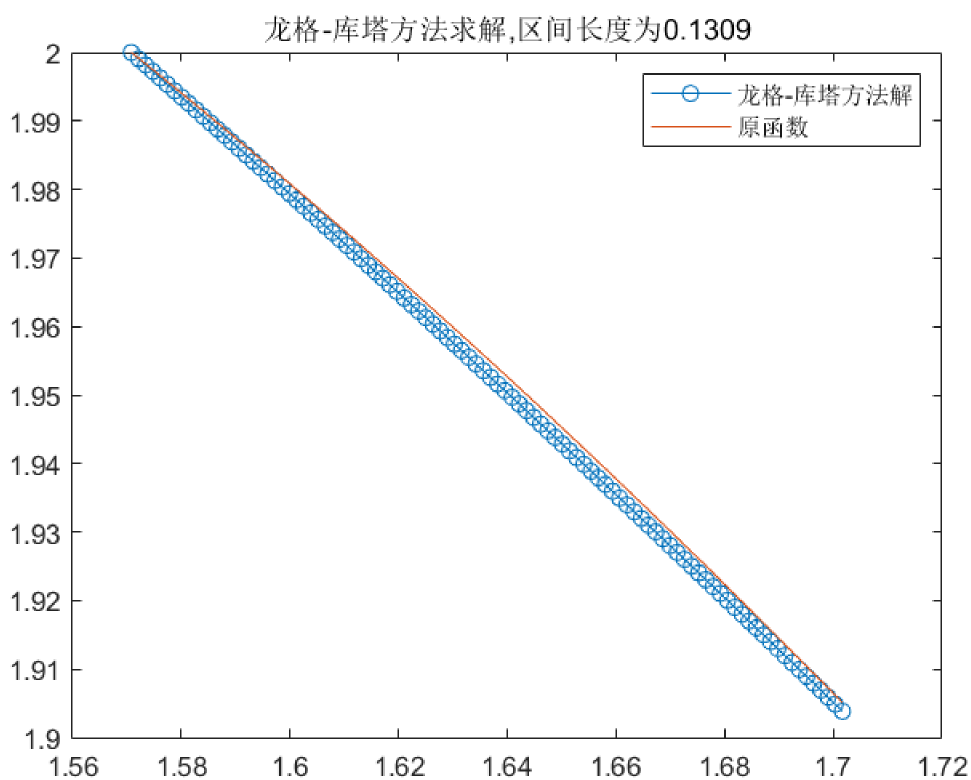

```
s = 0.2479
```




```
s = 0.0519
```




```
s = 0.0092
```




```
s = 0.0012
```

可见，在所给点的附近求解较为准确，当区间长度变短时，平均误差会变小。

P86 5

(1)建立模型

假设下面变量

m 桶的质量（kg）

g 重力加速度（m/s^2）

F_{up} 圆筒所受的浮力（N)

f 圆桶所受的阻力（N）

s 圆桶从0时刻开始下降的距离（m）

t 圆桶从0时刻开始下降的时间（s）

v 圆桶的速度（m/s^2)

k 阻力与下沉速度的比例系数（$N\frac{s}{m}$）

由物理学知识，可以知道，在下降过程中，对桶进行受力分析，有

$\mathrm{mg}-F_{\mathrm{up}}-f=m\frac{d^2s}{\mathrm{dt}^2}$,由题目所给条件，可知$f=\mathrm{kv}=k\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}}$,

综合上两式，可以得到二阶常微分方程组$\mathrm{mg}-F_{\mathrm{up}}-k\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}}=m\frac{d^2s}{\mathrm{dt}^2}$

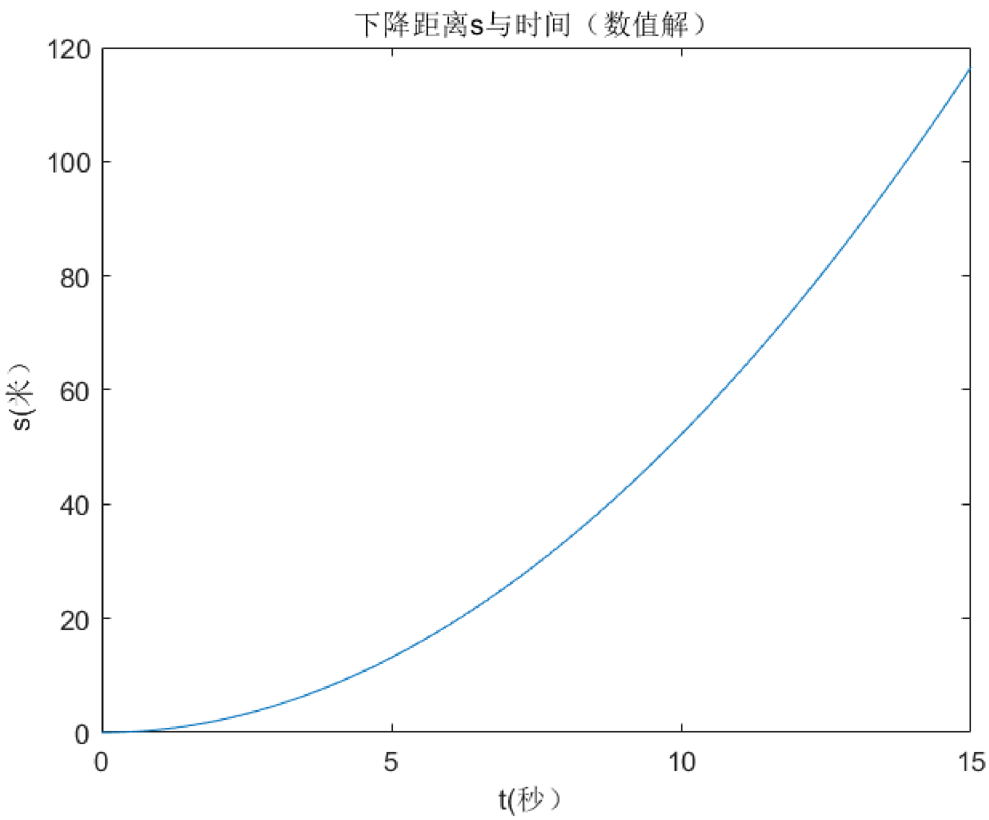
且方程初始位置为$t=0$时$\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}}=0,\frac{d^2s}{\mathrm{dt}^2}=0$.

(2)求解方程

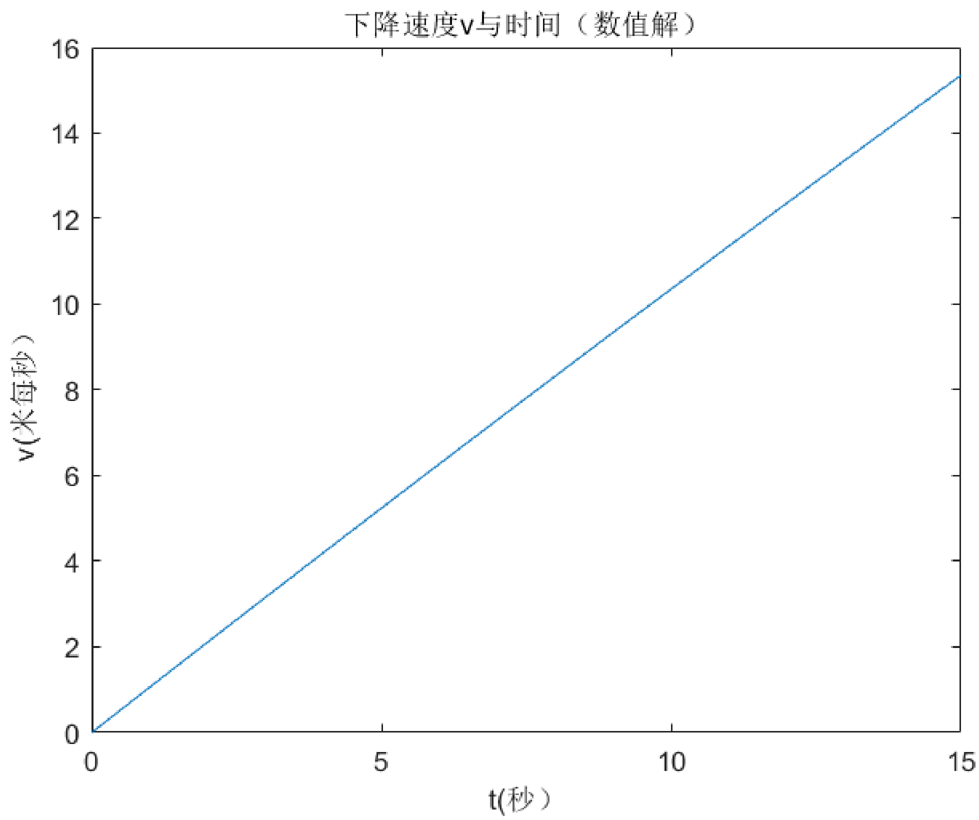
数值求解

```
%输入数据,化为单位制
m=527.436*0.4536;
g=9.8;
fup=470.327*0.4536*9.8;
k=0.08*0.4536*9.8/0.3048;
vmax=40*0.3048;
smax=300*0.3048;
t=linspace(0,15,100);
y0=[0 0];
[t, y1]=ode45('df3',t,y0);
%第一列解为s，第二列解为v
plot(t,y1(:,1));
```

```
title('下降距离s与时间（数值解）');
xlabel('t(秒）');
ylabel('s(米）');
```




```
plot(t,y1(:,2));
title('下降速度v与时间（数值解）');
xlabel('t(秒）');
ylabel('v(米每秒）');
```



可见，当s达到smax=91.44米时，速度已经超过13米每秒，超过了vmax=12.1920米每秒，可知，工程师说得对，不应该投放。

解析求解

```
y01=dsolve('m*D2y-m*g+fup+k*Dy=0','y(0)=0,Dy(0)=0','t');
%方程解为
disp(y01);
```

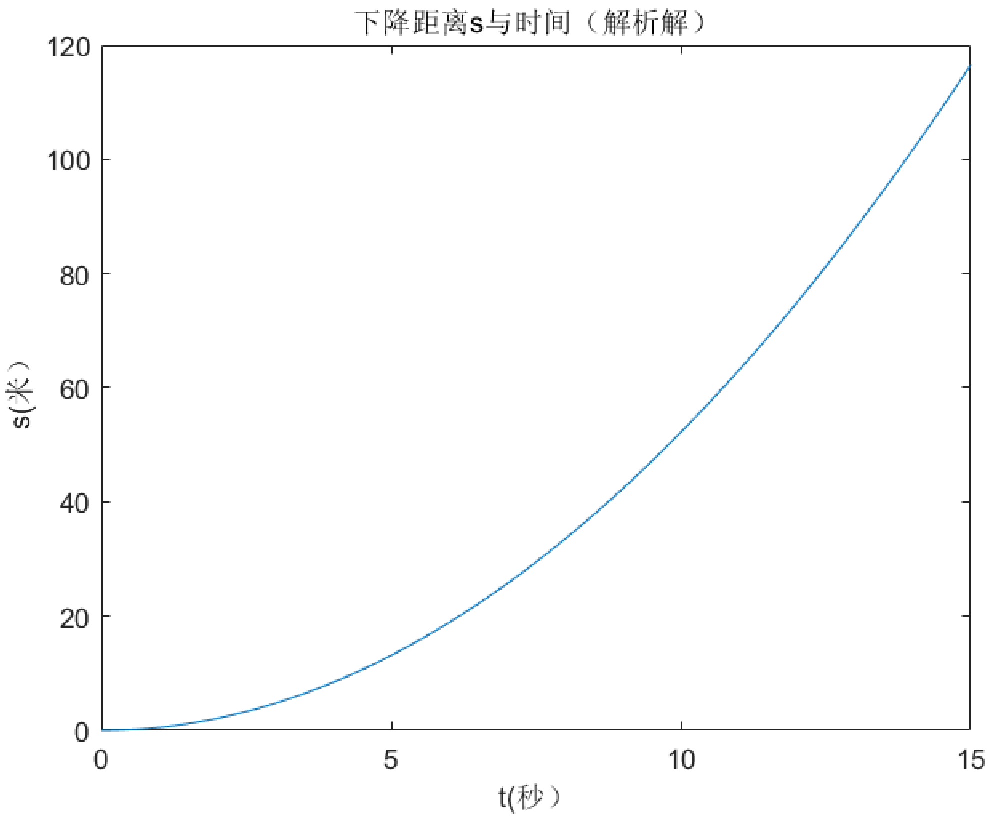
$$\frac{m\,(\mathrm{fup}-g\,m)}{k^2}-\frac{t\,(\mathrm{fup}-g\,m)}{k}-\frac{m\,e^{-\frac{k\,t}{m}}\,(\mathrm{fup}-g\,m)}{k^2}$$

```
%代入数据后
y02=dsolve('527.436*0.4536*D2y-527.436*0.4536*9.8+470.327*0.4536*9.8+0.08*0.4536*9.8/0.3048*Dy=
disp(y02);
```

$$\frac{6346637388000000000000000000000000\,t}{29168503937007874015748031496063}+\frac{3796002672385708512000000000000000000000000000000}{850801621923243846487692975385951}$$

```
f=@(t) (6346637388000000000000000000000000*t)/29168503937007874015748031496063 + (3796002672385
t01=linspace(0,15,100);
plot(t01,f(t01));
title('下降距离s与时间（解析解）');
xlabel('t(秒）');
```

```
ylabel('s(米）');
```



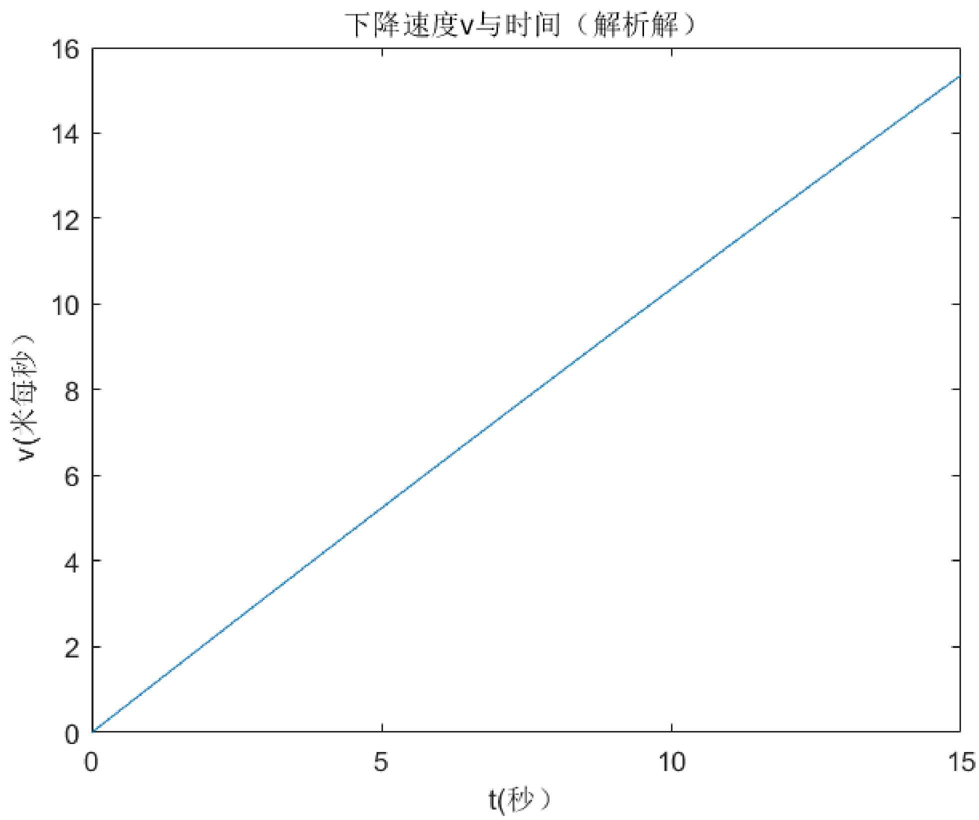

```
ss=wucha(t01,f(t01),y1(:,1))
```

```
ss = 1.8844e-11
```

```
%速度解（求导）
syms t;
f=@(t) (634663738800000000000000000000000*t)/29168503937007874015748031496063 + (3796002672385
v=diff(f,t);
disp(v);
```

$$\frac{5548175556775168}{25498854066721} - \frac{584102541013334276306499972719104\, e^{-\frac{323835446647356}{664038184439164}}}{2684476239240870730335775089409}$$

```
fv=@(t) 5548175556775168/25498854066721 - (584102541013334276306499972719104*exp(-(323835446647
plot(t01,fv(t01));
title('下降速度v与时间（解析解）');
xlabel('t(秒）');
ylabel('v(米每秒）');
```




```
sv=wucha(t01,fv(t01),y1(:,2))
```

```
sv = 4.2633e-14
```

以上为公式解与带入后的数值解析解。由误差函数也可见，下降距离解析解与数值解平均差距为1.884359335235786e-11，下降速度的平均差值为4.263256414560601e-14，均可以忽略。进一步验证了前面的公式。

综上所述，工程师说法正确，不应该投放。

附录

欧拉方法求解公式

```
function y = odeuler(odefun, t0, h, tfinal, y0)
t = t0 : h : tfinal;
y = zeros(size(t));
y(1) = y0;
for k = 1 : (length(t)-1)
    s = odefun(t(k), y(k));
    y(k+1) = y(k) + h * s;
end
end
```

平均误差函数

```
function s=wucha(x,y1,y2)
%x为自变量，y1为一个函数值，y2为另一函数值
t=length(x);
s=0;
for i=1:t
    s=s+abs(y1(t)-y2(t));
end
s=s/t;
end
```

贝塞尔方程函数**bessel**

```
function dy=bessel(x,y)
dy=zeros(2,1);%定义列向量
%y1=y,y2=y'
dy(1)=y(2);
dy(2)=((x^2-0.5^2)*y(1)+x*y(2))/(-x^2);
end
```

第五题建模函数**df3**

```
function dy=df3(x,y)
%要用到的常数
m=527.436*0.4536;
g=9.8;
fup=470.327*0.4536*9.8;
k=0.08*0.4536*9.8/0.3048;
%解方程y1=y,y2=y'
dy=zeros(2,1);
dy(1)=y(2);
dy(2)=(m*g-fup-k*y(2))/m;
end
```