Universidade
Estadual de Londrina

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA
CCE - Centro de Ciências Exatas
DSTA - Departamento de Estatística
Apostila de Estatística
Prof. M.e Eng.^{o} Felinto Junior Da Costa

Londrina, 24 de outubro de 2023.

Índice

9

1 Introdução histórica da estatística **11**

1.1 Primeiros levantamentos, estudos e publicações & Demografia e aritmética política 11

1.2 Visualização de dados & Estudos e primeiras publicações 18

1.3 Nomes notáveis 23

1.4 Revista Biometrika 24

1.5 Eugenia 25

2 Introdução conceitual essencial **31**

2.1 Estatística descritiva 31

2.2 Estatística inferencial 32

2.3 Produção de conhecimento 32

2.4 População (universo) & amostra 35

2.5 Parâmetros e estatísticas 35

2.6 Tipos de variáveis 36

2.7 Indexação de dados (i) 37

2.8 Noções básicas sobre somatórios (Σ) 37

2.9 Análise combinatória: diagramas de árvore, permutações (arranjos) & combinações 42

2.10 Conectivos lógicos 47

2.11 Leis de De Morgan 47

2.12 Noções básicas para o uso de calculadora (Cassio fx-82MS) 48

2.13 Instalação do software R em conjunto com a interface gráfica RStudio 50

3 Introdução à estatística descritiva **55**

3.1 Análise exploratória 55

3.2 Dados brutos, em rol, diagrama de ramos & folhas e de dispersão unidimensional 57

3.3 Sínteses numéricas descritivas 59

3.4 Medidas de forma (assimetria & curtose) 80

3.5 Apresentação tabular de dados 83

3.6 Apresentação gráfica de dados 96

4 Introdução ao cálculo de probabilidades **111**

4.1 Conceitos essenciais . . . 111

4.2 Probabilidade . . . 122

4.3 Teorema de Bayes . . . 150

4.4 Teoremas da Teoria das probabilidades . . . 163

5 Introdução a variáveis aleatórias **169**

5.1 Função discreta de distribuição de probabilidade . . . 169

5.2 Função de densidade de probabilidade . . . 173

5.3 Esperança e variância de uma variável aleatória discreta . . . 177

5.4 Esperança e variância de uma variável aleatória contínua . . . 180

6 Introdução a modelos teóricos de probabilidade **181**

6.1 Modelos teóricos discretos . . . 181

6.2 Modelos téoricos do tempo de espera . . . 195

6.3 Modelos teóricos contínuos . . . 208

6.4 Tabelas . . . 237

7 Introdução ao planejamento de pesquisas **243**

7.1 Planejamento de pesquisas . . . 245

7.2 Tipos de pesquisas . . . 246

7.3 Principais etapas de uma pesquisa: . . . 248

7.4 População . . . 249

7.5 Censo . . . 249

7.6 Amostra . . . 250

7.7 Planejamento do levantamento amostral . . . 251

7.8 Elaboração dos questionários . . . 251

7.9 Técnicas de amostragem . . . 253

7.10 Amostragem probabilística . . . 253

7.11 Amostragem não probabilística . . . 267

7.12 Dimensionamento de amostras . . . 270

8 Introdução às estatísticas epidemiológicas **279**

8.1 Terminologia . . . 279

8.2 Medidas de risco, morte, associação e correlação . . . 282

8.3 Sobrevida . . . 286

8.4 Medidas de associação . . . 287

8.5 Intervalos de confiança . . . 297

9 Introdução à distribuição das médias e diferenças entre médias amostrais e seus intervalos de confiança 303

9.1 Distribuições amostrais . . . 303

9.2 Intervalos de confiança . . . 308

9.3 Distribuição das médias amostrais e seus intervalos de confiança . . . 313

9.4 Distribuição das diferenças de médias amostrais independentes e seus intervalos de confiança . . . 350

9.5 Distribuição das diferenças de médias amostrais dependentes e seus intervalos de confiança . . . 366

10 Introdução à distribuição das proporções amostrais e seus intervalos de confiança 369

10.1 Conceito elementar de uma proporção . . . 369

10.2 Distribuição das proporções amostrais . . . 370

10.3 Pobabilidades associadas à observação de uma proporção amostral $\hat{p}$ . . . 378

10.4 A aleatoriedade das proporções amostrais e o tamanho amostral . . . 379

10.5 Intervalos de confiança para proporções amostrais . . . 383

11 Introdução a testes de hipóteses 391

11.1 Filosofia da ciência . . . 391

11.2 História . . . 394

11.3 Conceitos . . . 398

11.4 Natureza dos erros . . . 400

11.5 Recomendações gerais . . . 406

11.6 Efeito do limite central . . . 406

11.7 Estruturas das hipóteses . . . 408

11.8 Teste de uma média amostral . . . 416

11.9 Teste de médias amostrais independentes de duas populações Normais . . . 439

11.10 Teste de uma proporção amostral . . . 472

11.11 Testes não paramétricos . . . 482

11.12 Fluxograma auxiliar para escolha da estatística do teste de hipóteses . . . 508

11.13 Tabelas . . . 511

Módulo 1

Introdução histórica da estatística

1.1 Primeiros levantamentos, estudos e publicações & Demografia e aritmética política

1086

O *Domesday Book* (link) foi encomendado em dezembro de 1085 por Guilherme, o Conquistador (*King William I*), que invadiu a Inglaterra em 1066.

O primeiro esboço foi concluído em agosto de 1086 e continha registros de 13.418 assentamentos nos condados ingleses ao sul dos rios Ribble e Tees (a fronteira com a Escócia) com informações sobre terras, proprietários, uso da terra, empregados e animais cujo propósito básico era fundamentar a taxação (Figura 1.1).

1602

O dramaturgo inglês William Shakespeare usou a palavra **statists** (estadistas e, portanto, num sentido não relacionado com números ou matemática) no diálogo da Cena II de Hamlet (link).

> "Hamlet: Cercado assim por tantas vilanias, mesmo antes de eu poder dizer o prólogo, representava o cérebro. Sentei-me e escrevi com capricho nova carta. Já pensei, como os nossos estadistas, que é feio escrever bem, tendo insistido, até, em desaprendê-lo; mas, nessa hora muito bom me foi isso. Quererias saber qual o conteúdo da mensagem?[...]"

1603

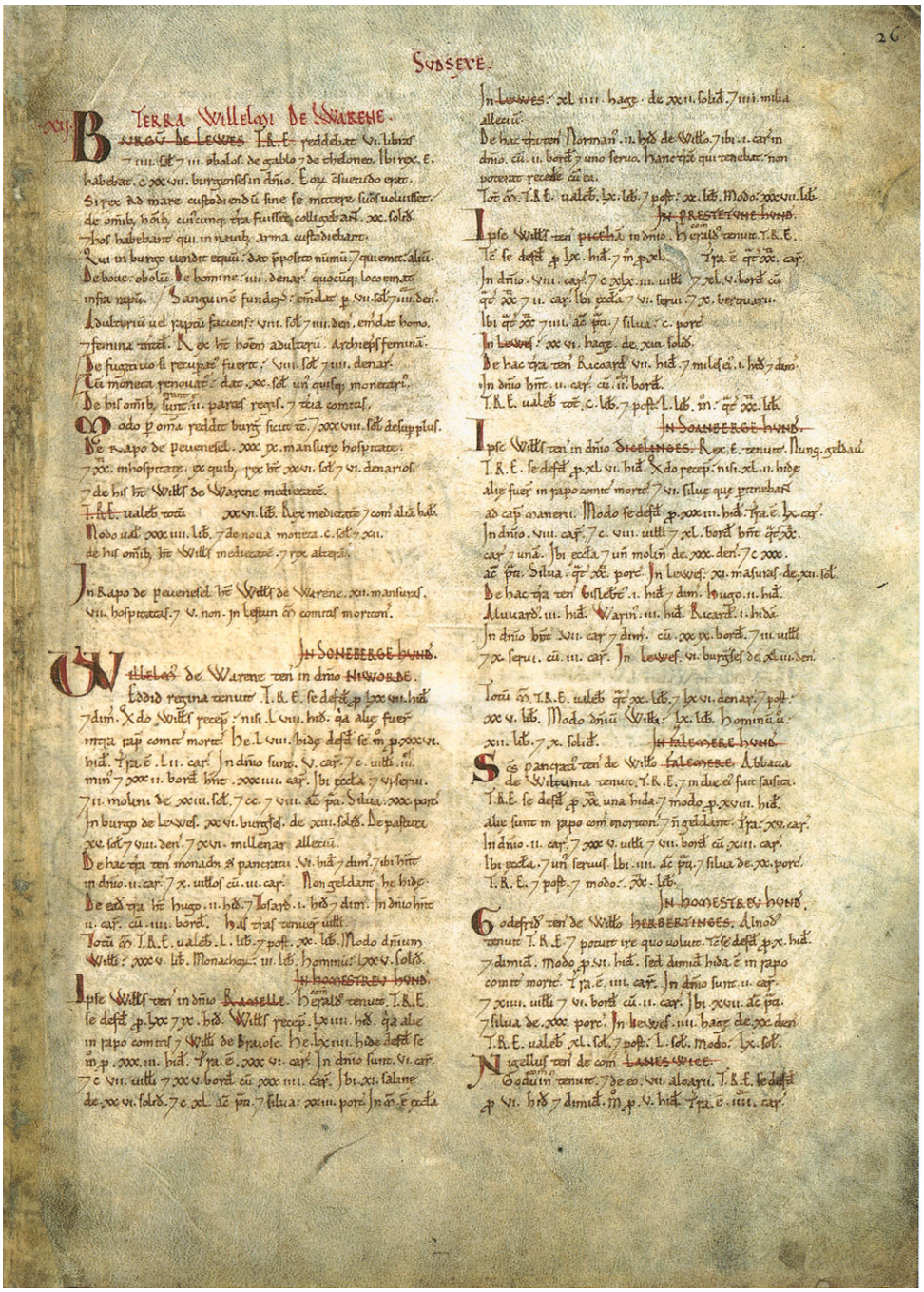


Figure 1.1: Domesday Book

O negociante inglês John Graunt (1620-1674) substituiu a crença pela evidência em *Natural and Political Observations Mentioned in a Following Index and Made upon the Bills of Mortality* (Observações naturais e políticas feitas sobre as notas de mortalidade).

Nesse trabalho, realizado com dados coletados das paróquias de Londres entre 1604 e 1660, Graunt tirou as seguintes conclusões: que havia maior nascimento de crianças do sexo masculino, mas havia distribuição aproximadamente igual de ambos os sexos na população geral; alta mortalidade nos primeiros anos de vida; maior mortalidade nas zonas urbanas em relação às zonas rurais (Figura 1.2).

1660

Herman Conring (1606-1681), professor de filosofia, medicina e política da Universidade de Helmstadt (atual Alemanha), criou um curso de Ciência política em 1660, que descrevia e examinava as questões fundamentais do Estado. Nele a **estatística** passou a ser considerada como uma disciplina autônoma que tinha por objetivo a descrição das coisas do Estado.

1687

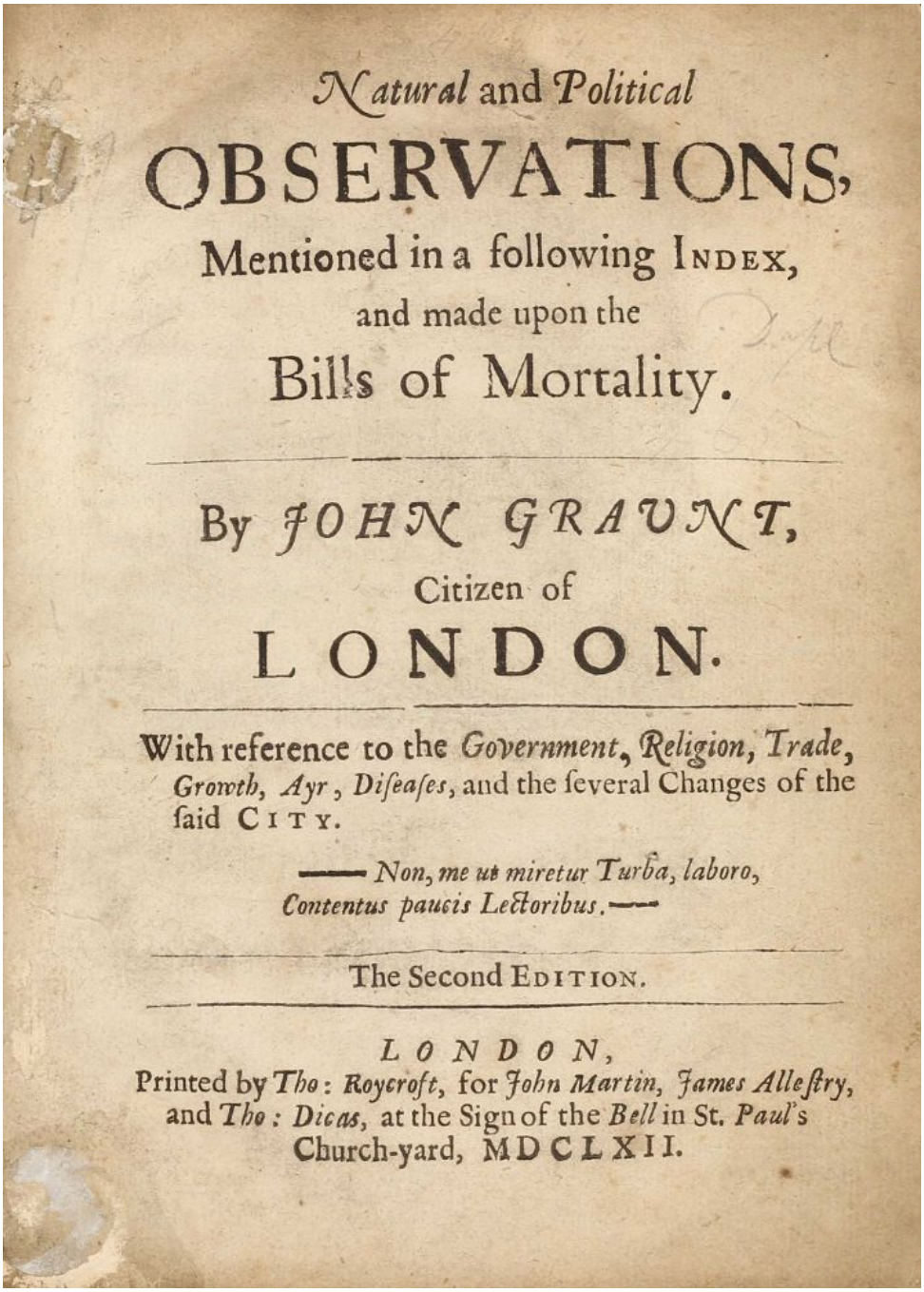
Em 1687 o economista e filósofo inglês William Petty (1623-1687) publicou *Several Essays on Political Arithmetic* (Vários ensaios sobre aritmética política), sugerindo ao governo inglês a criação de um departamento para registro de **estatísticas** vitais (Figura 1.3).

O Capitão John Graunt e William Petty instituiram na Inglaterra um novo ramo de estudos denominado de *Political arithmetic* (Aritmética política)

1693

O matemático e astrônomo inglês Edmond Halley (1656-1742) construiu em 1693, baseado em dados coletados na cidade (à época) alemã de Bresláu, uma *Life Table* (Tábua de sobrevivência), um estudo que analisa as probabilidades de sobrevivência e morte em relação à idade (Figura 1.4).

1749



Natural and *Political*

OBSERVATIONS,

Mentioned in a following INDEX,

and made upon the

Bills of Mortality.

By *JOHN GRAUNT*,

Citizen of

LONDON.

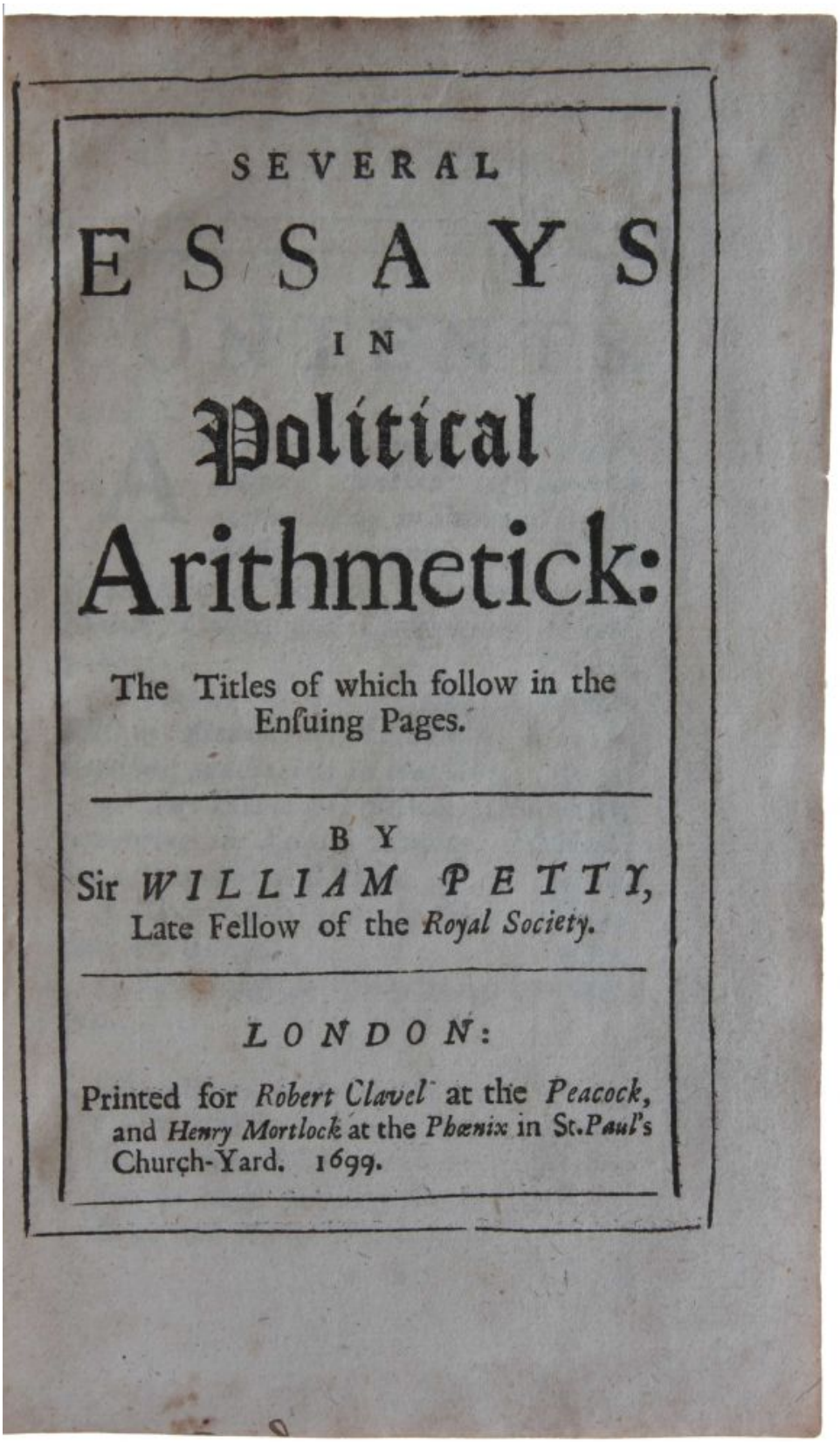
With reference to the *Government*, *Religion*, *Trade*, *Growth*, *Ayr*, *Diseases*, and the several Changes of the said CITY.

—— *Non, me ut miretur Turba, laboro,*
Contentus paucis Lectoribus. ——

The Second EDITION.

LONDON,
Printed by *Tho: Roycroft*, for *John Martin*, *James Allestry*, and *Tho: Dicas*, at the Sign of the *Bell* in St. *Paul's* Church-yard, MDCLXII.

Figure 1.2: Natural and Political Observations Mentioned in a Following Index and Made upon the Bills of Mortality (ed. de 1662)



SEVERAL

ESSAYS

IN

Political

Arithmetick:

The Titles of which follow in the Enſuing Pages.

BY

Sir *WILLIAM PETTY*,

Late Fellow of the *Royal Society*.

LONDON:

Printed for *Robert Clavel* at the *Peacock*, and *Henry Mortlock* at the *Phœnix* in St. *Paul*'s Church-Yard. 1699.

Figure 1.3: Several Essays in Political Arithmetick (ed. de 1699)

Age. Curt.	Per-ſons.	Age. Curt.	Per-ſons	Age. Curt.	Per-ſons	Age. Curt.	Per-ſons	Age. Curt.	Per-ſons	Age. Curt.	Per-ſons
1	1000	8	680	15	628	22	586	29	539	36	481
2	855	9	670	16	622	23	579	30	531	37	472
3	798	10	661	17	616	24	573	31	523	38	463
4	760	11	653	18	610	25	567	32	515	39	454
5	732	12	646	19	604	26	560	33	507	40	445
6	710	13	640	20	598	27	553	34	499	41	436
7	692	14	634	21	592	28	546	35	490	42	427
Age. Curt	Per-ſons.	Age. Curt.	Per-ſons	Age. Curt.	Per-ſons	Age Curt	Per-ſons	Age. Curt.	Per-ſons	Age. Curt.	Per-ſons
43	417	50	346	57	272	64	202	71	131	78	58
44	407	51	335	58	262	65	192	72	120	79	49
45	397	52	324	59	252	66	182	73	109	80	41
46	387	53	313	60	242	67	172	74	98	81	34
47	377	54	302	61	232	68	162	75	88	82	28
48	367	55	292	62	222	69	152	76	78	83	23
49	357	56	282	63	212	70	142	77	68	84	20

Age.	Perſons.
7	5547
14	4584
21	4270
28	3964
35	3604
42	3178
49	2709
56	2194
63	1694
70	1204
77	692
84	253
100	107
	34000
	Sum Total.

Figure 1.4: Halley's life table (1693)

Com um sentido não relacionado com números ou matemática, a palavra **estatística** parece ter sido proposta pela primeira vez no século XVII, pelo historiador e professor alemão (à época Transilvânia) Martin Schmeitzel (1679-1747) da Universidade de Jena e, posteriormente adotada por seu aluno, (igualmente) historiador e jurista Gottfried Achenwall (1719-1772) em 1749, em *Abriß der neuen Staatswissenschaft der vornehmen Europäischen Reiche und Republiken* (Esboço da nova ciência política dos nobres impérios europeus e repúblicas, Figura 1.5).

1771

William Hooper usou a palavra **estatística** em sua tradução de *The Elements of Universal Erudition*(Elementos da Erudição Universal) escrita por Jacob Friedrich Freiherr von Bielfeld (1717-1770).

Nesse livro, a **estatística** foi definida como a ciência que nos ensina o arranjo político de todos os estados modernos do mundo conhecido (mais uma veznum sentido não associado a números ou matemática, Figura 1.6).

1790

O jurista e político escocês John Sinclair propôs que se realizasse uma detalhada pesquisa em 938 paróquias para elucidar a história natural e política de seu país (*Statistics Accounts*). Essa pesquisa fazia parte de um

Gottfried Achenwalls
ausserord. Lehrers der Weltw. zu Göttingen

Abriß
der neuesten
Staatswissenschaft
der vornehmsten Europäischen
Reiche und Republicken
zum Gebrauch
in seinen
Academischen Vorlesungen.

Göttingen,
bey Joh. Wilhelm Schmidt, Univ. Buchhändl.
1749.

HAB Wolfenbüttel, M: Sf 3

Figure 1.5: Abriß der neuen Staatswissenschaft der vornehmen Europäischen Reiche und Republiken (1749)

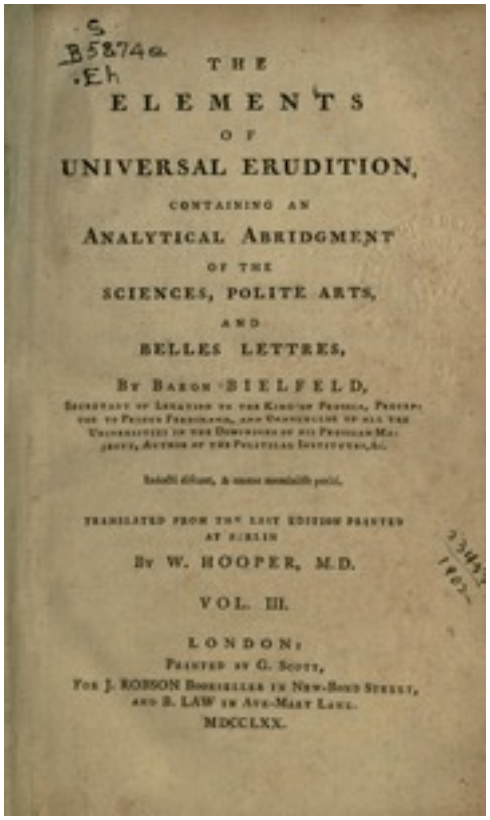

THE
ELEMENTS
OF
UNIVERSAL ERUDITION,
CONTAINING AN
ANALYTICAL ABRIDGMENT
OF THE
SCIENCES, POLITE ARTS,
AND
BELLES LETTRES,
BY BARON BIELFELD,
TRANSLATED FROM THE LAST EDITION PRINTED
AT BERLIN
BY W. HOOPER, M.D.
VOL. III.
LONDON:
PRINTED BY G. SCOTT,
FOR J. ROBSON BOOKSELLER IN NEW-BOND STREET,
AND B. LAW IN AVE-MARY LANE.
MDCCLXX.

Figure 1.6: The Elements of Universal Erudition (1771)

projeto muito mais ousado: *The Pyramid of Statistical Enquiry* (A Pirâmide da Pesquisa Estatística, Figura 1.7).

1854

O médico inglês (considerado por alguns como o "pai" da epidemiologia moderna) John Snow (1813-1858) estudou a dispersão espacial dos casos de cólera em Londres e concluiu que sua causa residia na contaminação da água consumida (poço localizado na *Broad Street*, no distrito do *Soho*): *Report to the Cholera Outbreak in the Parish of St. James, Westminster during the Autumn of 1854* (Relatório sobre o surto de cólera na paróquia de St. James, Westminster durante o outono de 1854, Figura 1.8).

1.2 Visualização de dados & Estudos e primeiras publicações

1765

Figure 1.7: The Pyramid of Statistical Enquiry (1814)

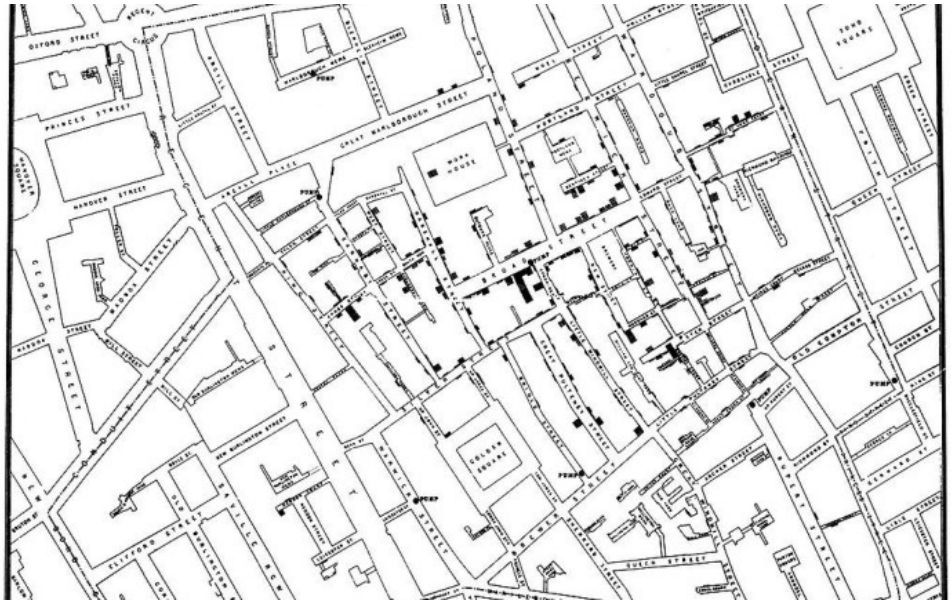


Figure 1.8: Mapa dos casos de cólera (1854)

O teólogo e filósofo inglês Joseph Priestley (1733-1804) introduziu como inovação os primeiros gráficos com linha temporal, em que barras individuais eram usadas para visualizar o tempo de vida de uma pessoa e o todo pode ser usado para comparar a expectativa de vida de várias pessoas (Figura 1.9).

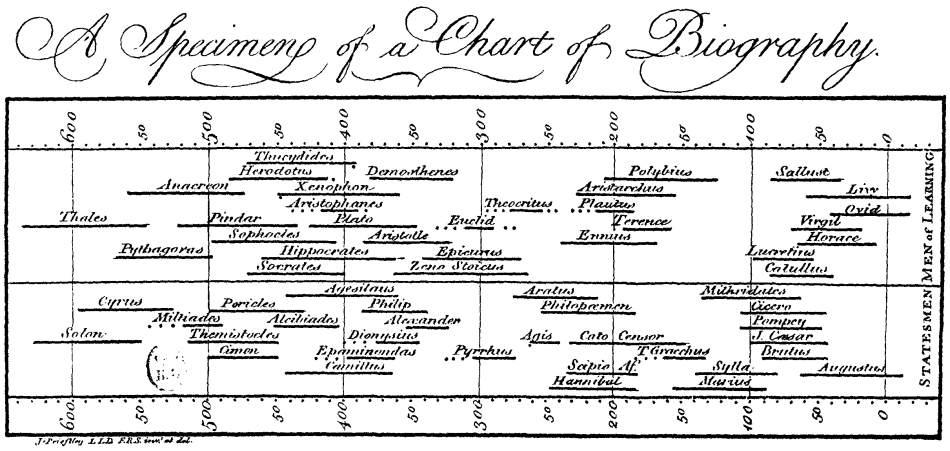


Figure 1.9: Expectativa de vida de diversas pessoas (1765)

1786

O engenheiro e economista escocês William Playfair (1759-1823) é considerado comumente como fundador dos métodos gráficos para apresentação de estatísticas. Playfair concebeu vários tipos de diagramas para visualização de dados:

- em 1786, o gráfico de barras (Figura 1.10); e,
- em 1801, o gráfico de setores (Figura 1.11).

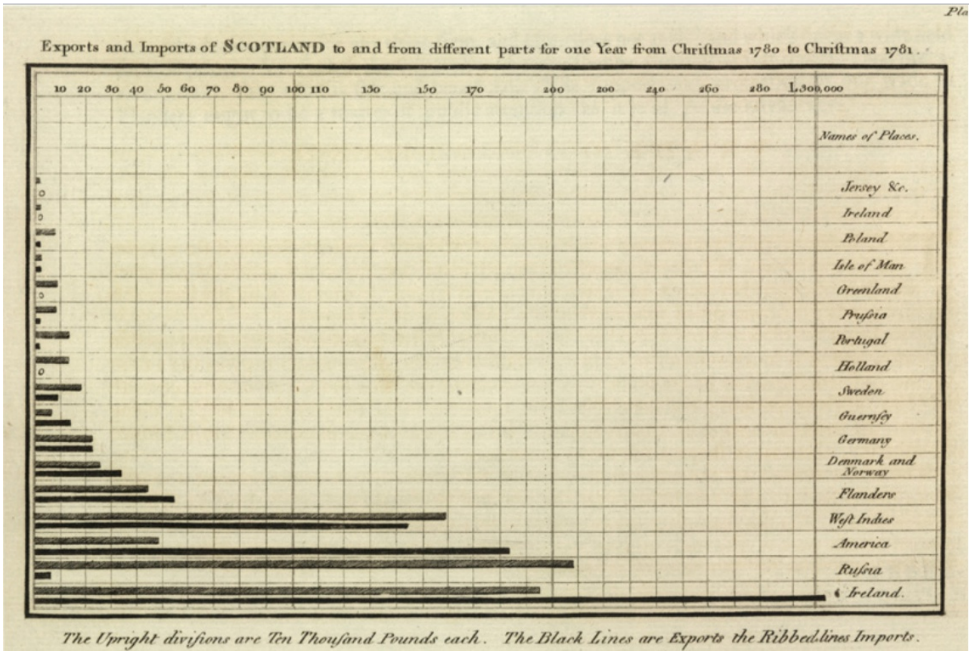


Figure 1.10: Commercial and Political Atlas (Atlas Comercial e Político de 1786): cada barra representa as exportações e importações da Escócia para 17 países em 1781

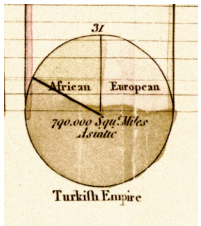


Figure 1.11: Statistical Breviary (Breviário Estatístico de 1801): proporção da extensão do Império Turco em diferentes regiões do mundo: Asia, Europa e África, antes de 1789

1856

A enfermeira inglesa Florence Nightingale (1820-1910) conduziu um trabalho pioneiro ao chegar no hospital militar britânico na Turquia em 1856, estabelecendo uma ordem e um método muito necessários aos registros médicos estatísticos e que indicaram serem as precárias práticas sanitárias o culpado da alta mortalidade (link) , Figuras 1.12 e 1.13.

Figure 1.12: Esse diagrama (coxcomb) feito durante a Guerra da Crimeia foi dividido igualmente em 12 setores, representando os meses do ano, com a área sombreada do setor de cada mês proporcional à taxa de mortalidade naquele mês. Seu sombreamento com código de cores indicava a causa da morte em cada área do diagrama

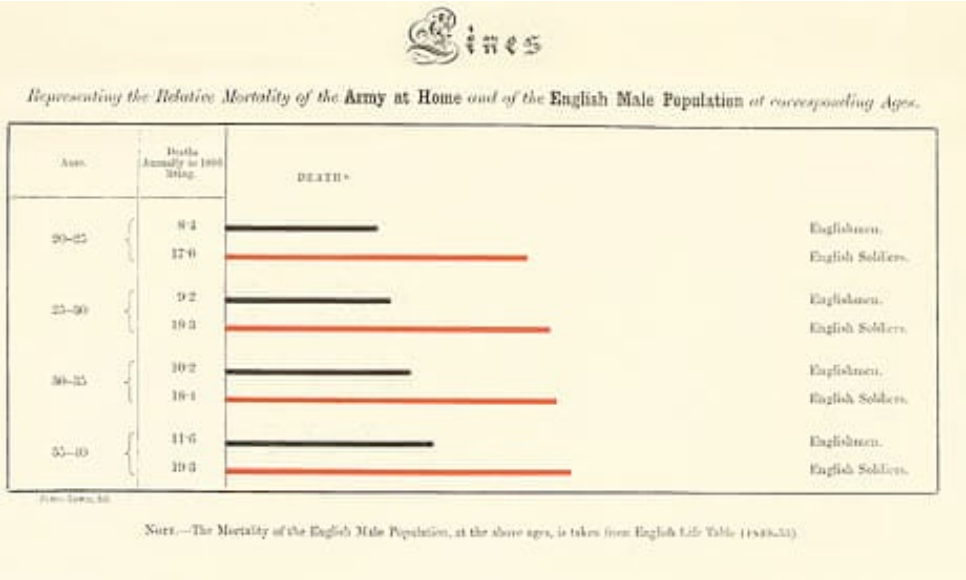


Figure 1.13: Gráfico de barras de Florence Nightingale mostrando as diferenças de mortalidade entre soldados britânicos e a população masculina inglesa geral (civis)

1.3 Nomes notáveis

Karl Pearson (1857-1936) é amplamente considerado o fundador da disciplina moderna de **estatística**, e também é famoso como um filósofo da ciência, como escritor sobre o darwinismo social e como um dos principais impulsionadores para instalar a eugenia como a ciência social chave. Uma breve biografia de cada um dos pesquisadores a seguir relacionados pode ser obtida em: (link).

- Niccolò Fontana Tartaglia (Veneza à época, hoje Itália: 1499-1557)
- Girolamo Cardano (Pávia à época, hoje Itália: 1501-1576)
- Galileu Galilei (Florença à época, hoje Itália: 1564-1642)
- Pierre de Fermat (França: 1607-1665)
- Blaise Pascal (França: 1623-1662)
- Jakob Bernoulli (Suíça: 1655-1705)
- Abrahan de Moivre (França: 1667-1754)
- Thomas Bayes (Inglaterra: 1702-1761)
- Pierre-Simon Laplace (França: 1749-1827)
- Johann Carl Friedrich Gauss (Alemanha: 1777-1856)
- Lambert Adolphe Jacques Quételet (França à época, hoje Bélgica: 1796-1874)
- Pafnuti Lvovitch Chebyshev (Rússia: 1821-1894)
- Francis Galton (Inglaterra: 1822-1911)
- Wilhelm Lexis (Alemanha: 1837-1914)

- Thorvald Nicolai Thiele (Dinamarca: 1838-1910)
- Friedrich Robert Helmert (Saxônia: 1843-1917)
- Francis Ysidro Edgeworth (Inglaterra: 1845-1926)
- James Douglas Hamilton Dickson (Escócia: 1849-1931)
- Andrei Andreyevich Markov (Rússia: 1856-1922)
- Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (Rússia: 1857-1918)
- Walter Frank Raphael Weldon (Inglaterra: 1860-1906)
- Karl Pearson (Inglaterra: 1857-1936)
- William Seally Gosset (Inglaterra: 1876-1937)
- Ronald Aylmer Fisher (Inglaterra: 1890-1962)
- Andrei Nikolaevich Kolmogorov (Rússia: 1903-1987)

1.4 Revista Biometrika

> "Pretende-se que a *Biometrika* sirva como um meio não apenas de coletar ou publicar, sob um título, dados biológicos de um tipo não coletados sistematicamente ou publicados em outro lugar em qualquer outro periódico, mas também de disseminar um conhecimento de tal teoria estatística para o seu tratamento científico[...]"

Em outubro de 1901 foi fundada a *Biometrika, the Journal for the Statistical Study of Biological Problems* (Biometrika, o Jornal para o Estudo Estatístico de Problemas Biológicos) com o propósito de promover a análise estatística de fenômenos biológicos, isto é, a matematização da biologia.

Os fundadores da *Biometrika* foram *Sir* Francis Galton (primo de Charles Darwin), Walter Frank Raphael Weldon e Karl Pearson. A maior parte do trabalho foi feita por Pearson e Weldon, este último focando na edição do conteúdo (ou seja, o aspecto biológico) e o primeiro nos detalhes, incluindo correções de prova. Galton e o eugenista americano Charles Davenport atuaram, respectivamente, como consultor e editor.

Alguns dos tópicos abordados na revista incluem criminologia, botânica, zoologia, epidemiologia e outros aspectos da saúde humana. Na década de 1930, o caráter da *Biometrika* mudou, e "representou a vanguarda internacional da pesquisa em métodos estatísticos e sua aplicação na ciência e tecnologia'', ao invés de focar a hereditariedade.

Sir Francis Galton, que serviu como editor da primeira edição (1901), escreveu a Introdução, que incluiu uma declaração de propósito para a revista
(link).

1.5 Eugenia

Em 16 de maio de 1883 *Sir* Francis Galton cunhou o termo "eugenia", posteriormente descrevendo-o como "o estudo das agências sob controle social que podem melhorar ou reparar as qualidades raciais das gerações futuras, seja fisicamente ou mentalmente".

Galton detalha o conceito em seu livro *Inquiries into Human Faculty and its Development*, e recomenda que indivíduos de famílias altamente classificadas em seu sistema de mérito sejam encorajados a se casar cedo e receber incentivos para ter filhos. Ele também condenou os casamentos tardios dentro desse mesmo grupo como "disgênicos" ou desvantajosos para a espécie humana.

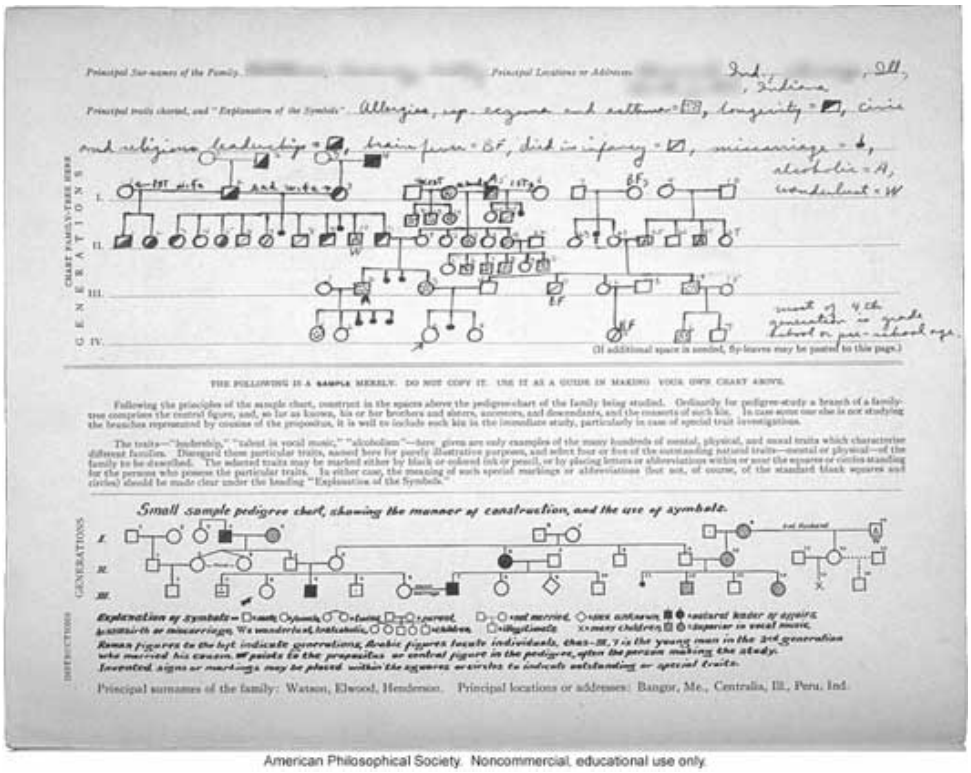
A palavra "eugenia" foi extraída da palavra grega *eu*, que significa bem, e *genos*, que significa prole. Juntos, significa bem-nascido.

Este livro caiu em domínio público e pode ser lido na íntegra online. A caracterização original de eugenia de Galton pode ser encontrada na página 17 desta edição de domínio público (Parte 1 do pdf):

> "uma breve palavra para expressar a ciência de melhorar o rebanho, que não está de modo algum confinado a questões de acasalamento criterioso, mas que, especialmente no caso do homem, toma conhecimento de todas as influências que tendem, mesmo que em grau remoto, a dar ao raças ou linhagens de sangue mais adequadas uma melhor chance de prevalecer rapidamente sobre os menos adequados do que teriam de outra forma [...]"(Galton, 1883, p.17)

Há poucos anos alguns grupos sociais viram no trabalho e opiniões de Fisher endossos ao colonialismo, à supremacia branca e à eugenia.

Outros grupos, todavia, afirmam que Fisher não era racista e eugenista, embora ele achasse que havia diferenças comportamentais e de inteligência entre os grupos humanos.



American Philosophical Society. Noncommercial, educational use only.

Figure 1.14: Gráfico de linhagens para alergias

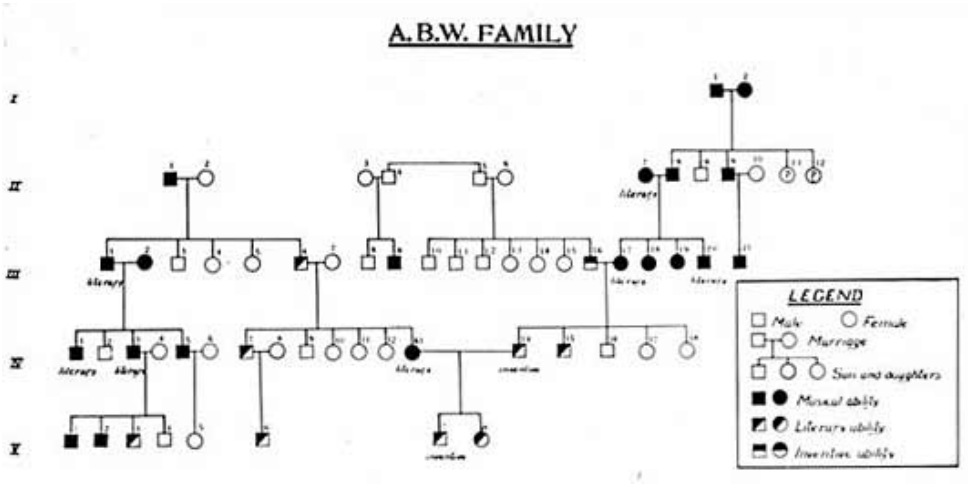


Figure 1.15: Gráfico de linhagens para aptidão musical

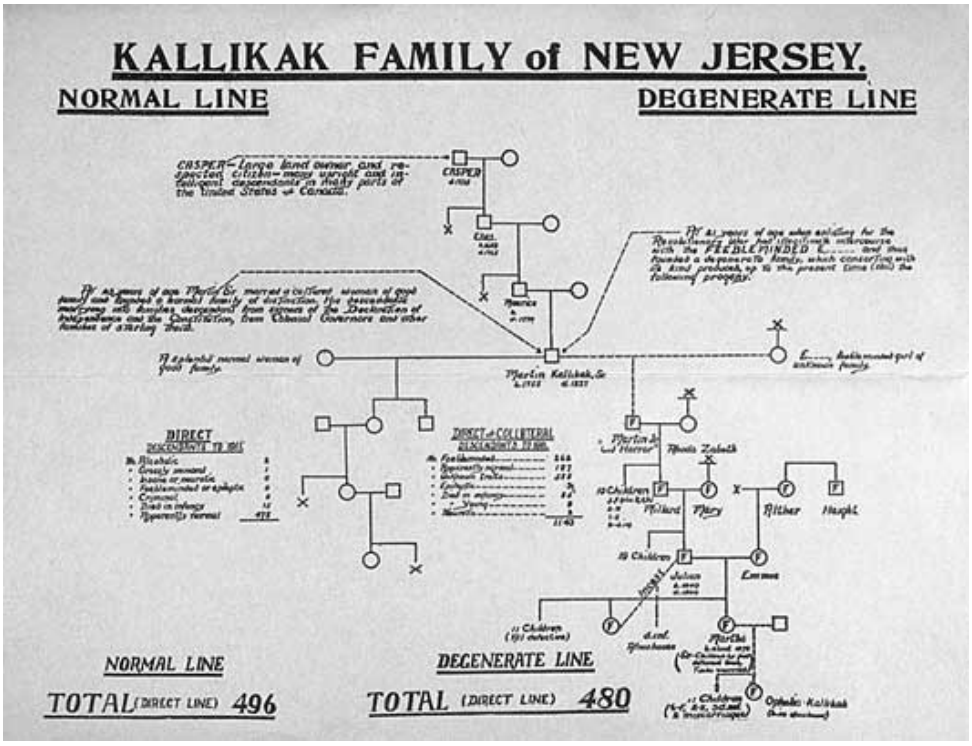


Figure 1.16: Linhas "normais" e "degeneradas" da família Kallikak (New Jersey)

534 ACTS OF ASSEMBLY. [VA.

1. Every employee of the State government or of any department thereof, who is required to be on duty seven days in each calendar week, shall on and after the passage of this act be relieved from duty, without any reduction in pay, and without any requirements that the time so allowed shall subsequently be made up, at least two Sundays in each calendar month. The heads of the various departments are hereby authorized to take such steps as may be necessary to put this act into effect.

CHAP. 371.—An ACT to preserve racial integrity. [S B 219]

Approved March 20, 1924.

1. Be it enacted by the general assembly of Virginia, That the State registrar of vital statistics may, as soon as practicable after the taking effect of this act, prepare a form whereon the racial composition of any individual, as Caucasian, Negro, Mongolian, American Indian, Asiatic Indian, Malay, or any mixture thereof, or any other non-Caucasic strains, and if there be any mixture, then, the racial composition of the parents and other ancestors, in so far as ascertainable, so as to show in what generation such mixture occurred, may be certified by such individual, which form shall be known as a registration certificate. The State registrar may supply to each local registrar a sufficient number of such forms for the purpose of this act; each local registrar may, personally or by deputy, as soon as possible after receiving said forms, have made thereon in duplicate a certificate of the racial composition, as aforesaid, of each person resident in his district, who so desires, born before June 14, 1912, which certificate shall be made over the signature of said person, or in the case of children under fourteen years of age, over the signature of a parent, guardian, or other person standing in loco parentis. One of said certificates for each person thus registering in every district shall be forwarded to the State registrar for his files; the other shall be kept on file by the local registrar.

Every local registrar may, as soon as practicable, have such registration certificate made by or for each person in his district who so desires, born before June 14, 1912, for whom he has not on file a registration certificate, or a birth certificate.

2. It shall be a felony for any person wilfully or knowingly to make a registration certificate false as to color or race. The wilful making of a false registration or birth certificate shall be punished by confinement in the penitentiary for one year.

3. For each registration certificate properly made and returned to the State registrar, the local registrar returning the same shall be entitled to a fee of twenty-five cents, to be paid by the registrant. Application for registration and for transcript may be made direct to the State registrar, who may retain the fee for expenses of his office.

4. No marriage license shall be granted until the clerk or deputy clerk has reasonable assurance that the statements as to color of both man and woman are correct.

If there is reasonable cause to disbelieve that applicants are of pure white race, when that fact is stated, the clerk or deputy clerk shall with-

Figure 1.17: Lei da Inegridade Racia (Virginia, EUA, 1924)

Figure 1.18: Licença para casamento

Módulo 2

Introdução conceitual essencial

> "Estatística é a ciência de coletar, organizar, apresentar, analisar e interpretar dados[...]" (Ronald A. Fisher)

De modo geral, a estatística pode ser dividida em três grandes áreas:

- descritiva;
- probabilidade; e,
- inferencial.

2.1 Estatística descritiva

Nos primeiros trabalhos estatísticos, os dados coletados eram inicialmente apresentados na forma de tabelas e gráficos.

A **estatística descritiva** se ocupa de tudo o que seja relacionado a dados: coleta, processamento, descrição (seja na forma tabular ou gráfica) e sínteses numéricas (de locação, de dispersão, de repartição) sem inferir coisa alguma além da informação trazida pelos dados. Vem experimentando crescente uso em todas as áreas científicas e desenvolvimento:

- crescente uso de uma abordagem quantitativa em todas as ciências;
- disponibilidade de recursos computacionais;
- quantidade de dados coletados.

A palavra **estatística** pode assumir diferentes significados:

- no singular: **estatística**

  - refere-se à ciência que compreende métodos que são usados na coleta, análise, interpretação e apresentação de dados quantitativos ou qualitativos (numéricos ou não); e,
  - denota uma medida ou fórmula específica (tais como uma média, um intervalo de valores, uma taxa de crescimento, um índice).

- no plural: **estatísticas**
  - refere-se a dados coletados de maneira sistemática com um propósito específico definido em qualquer campo de estudo (nesse sentido, as *estatísticas* também podem ser consideradas como agregados de fatos expressos em forma numérica).

2.2 Estatística inferencial

A **estatística inferencial** tem o objetivo de estabelecer níveis de confiança da tomada de decisão de associar uma estimativa amostral a um parâmetro populacional. Divide-se em estimação e testes de significância.

> "Dedução e indução são procedimentos racionais que nos levam do já conhecido ao ainda não conhecido; isto é, permitem que adquiramos conhecimentos novos graças a conhecimentos já adquiridos.[...]"

Dedução.

Na dedução parte-se de uma verdade já conhecida para demonstrar que ela se aplica a todos os casos particulares iguais. Vai do geral ao particular.

Indução.

Na indução parte-se de alguns casos particulares iguais ou semelhantes para se estipular uma **lei geral**. Vai do particular ao geral.

Na dedução, dado **X**, infiro (concluo) **a**, **b**, **c**, **d**.

Na indução, dados **a**, **b**, **c**, **d**, infiro (concluo) **X**.

> Exemplo: testes de aceleração (0-60 mph) feitos com 6 carros importados em 1999 resultaram nas seguintes medidas: 12,9 s; 16,50 s; 11,30 s; 15,20 s; 18,20 s e 17,70 s. Um estudo descritivo poderia afirmar que:

- metade dos dados coletados acelera de 0-60 mph em menos de 16,00 s; e
- a aceleração média de 0-60 mph é de 15,30 s.

> Mas, a partir dessa amostra concluir que a aceleração média de **todos** os carros importados em 1999 seja de 15,30 s; ou, que **metade** dos carros importados em 1999 acelerem de 0-60 mph em menos de 16,00 s são afirmações que pertencem à **inferência estatística**.

2.3 Produção de conhecimento

> "A ciência não consegue provar coisa alguma. Ela pode apenas refutar as coisas [...]" (Karl Popper)

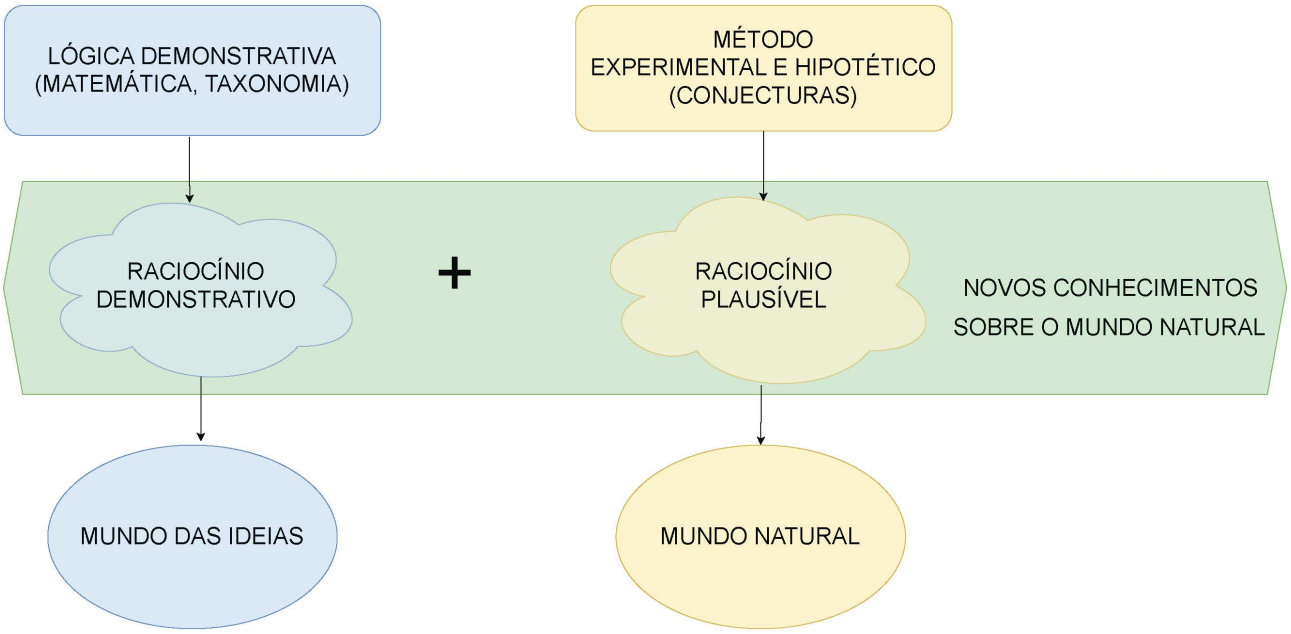


Figure 2.1: Método demonstrativo e Método experimental hipotético (George Polya, 1954)

Na expansão de qualquer área do conhecimento propomos hipóteses que serão avaliadas mediante a coleta de dados que, depois de analisados, revelarão informações que, eventualmente, nos conduzirão ao afastamento da hipótese original e à proposição de outras, num processo contínuo.

Uma investigação científica deve envolver, em linhas gerais:

- observação dos fatos;
- descrição das características essenciais, segundo o que se obteve através da observação;
- explicação dessas características descritivas;
- previsão; e,
- decisão pertinente à investigação.

O planejamento de uma pesquisa deve envolver, em linhas gerais:

- definição do *universo*: é necessário delimitar claramente, no tempo e espaço, o âmbito do inquérito, definindo, em termos precisos, o *universo* a ser trabalhado;
- exame das informações disponíveis: deve-se reunir todo o material existente: mapas, artigos, livros, relatórios relativos a levantamentos semelhantes;
- tipos de levantamentos: completo ou amostral;
- prazo;

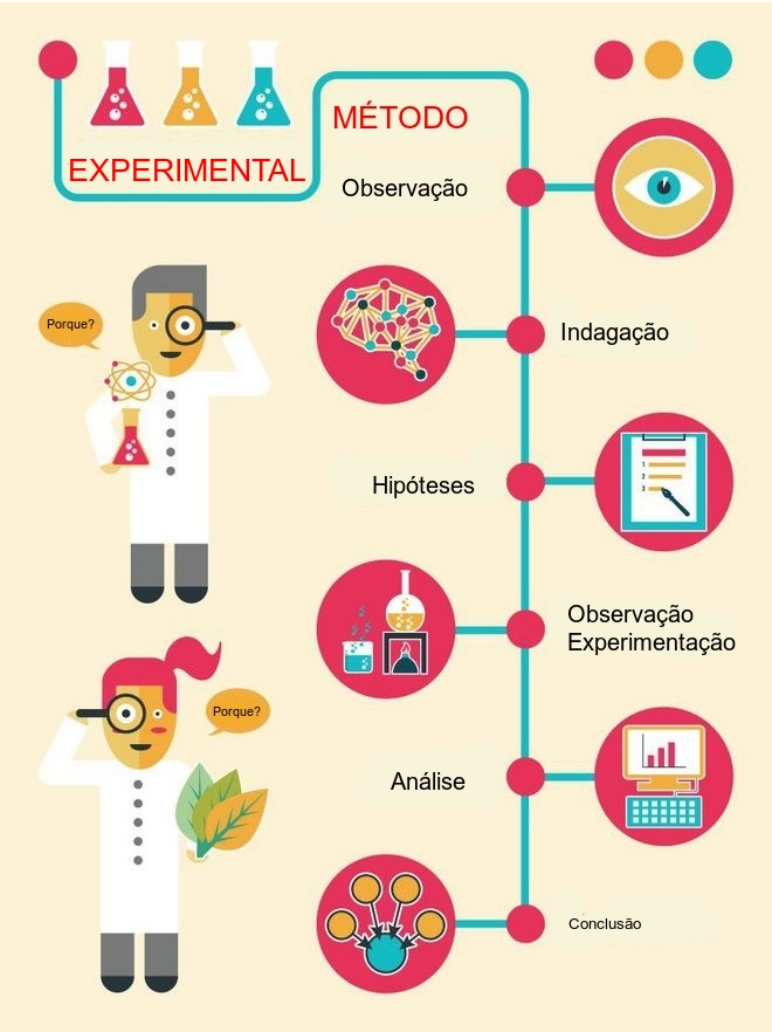


Figure 2.2: Método experimental hipotético

- custo;
- precisão.

2.4 População (universo) & amostra

Figure 2.3: Universo e amostra

Quase que, invariavelmente, em todo ramo de conhecimento, o pesquisador esbarra em uma série de limitações das mais variadas ordens (econômica, técnica, ética, geográfica, temporal,...) que impossibilitam o estudo dos dados e informações associados a todos os casos existentes (**população ou universo**).

Por essa razão, através de um procedimento estatístico denominado de amostragem, estuda-se uma população (universo) a partir de uma amostra. Amostra é, portanto, um subconjunto finito e representativo da população (universo), extraído de modo sistemático (planejado).

2.5 Parâmetros e estatísticas

É comum a adoção de letras gregas para as características descritivas que se referirem à poúlação (universo) e letras do alfabeto latino para aquelas relativas à amostra extraída:

Característica estudada	Notação populacional	Notação amostral
Número de elementos	N	n
Média	μ (“mi”)	$\bar{x}$
Variância	σ^2 (“sigma”)	s^2
Desvio padrão	σ (“sigma”)	s

Característica estudada	Notação populacional	Notação amostral
Proporção	Π ("pi")	p ou $\hat{p}$

Figure 2.4: Alfabeto grego

2.6 Tipos de variáveis

Variáveis quantitativas

- contínuas: são os dados com maior potencial de produzir informação significativa dentre todos: comprimentos, áreas, pesos, densidades; e,
- discretas: são dados com um pouco menos de informação que os de natureza contínua mas possuem mais informação que dados qualitativos: número de andares de um prédio, de degraus de uma escada, número de filhos de um casal.

Variáveis qualitativas

- ordinais: apresentam um pouco mais de informação que os dados qualitativos puramente nominais na medida que suas classes podem ser interpretadas como possuindo um ordenamento inerente: padrão construtivo (baixo, médio, alto), classe econômica de rendimento (baixa, média, alta), nível de escolaridade (fundamental, médio e superior); e,
- nominais: são dados a menor quantidade de informação: sexo, cor, códigos postais de cidades;

Codificação de variáveis qualitativas

- binárias: pela associação de valores numéricos: 0 ou 1 a uma variável qualitativa nominal que se apresente com apenas dois aspectos: sim ou não, ausência ou presença. Pela composição de mais variáveis binárias pode-se codificar variáveis que possuam um número maior de classes; e,
- *proxy*: pela associação de valores numéricos contínuos que guardam "correlação' ' com as classes da variável qualitativa nominal.

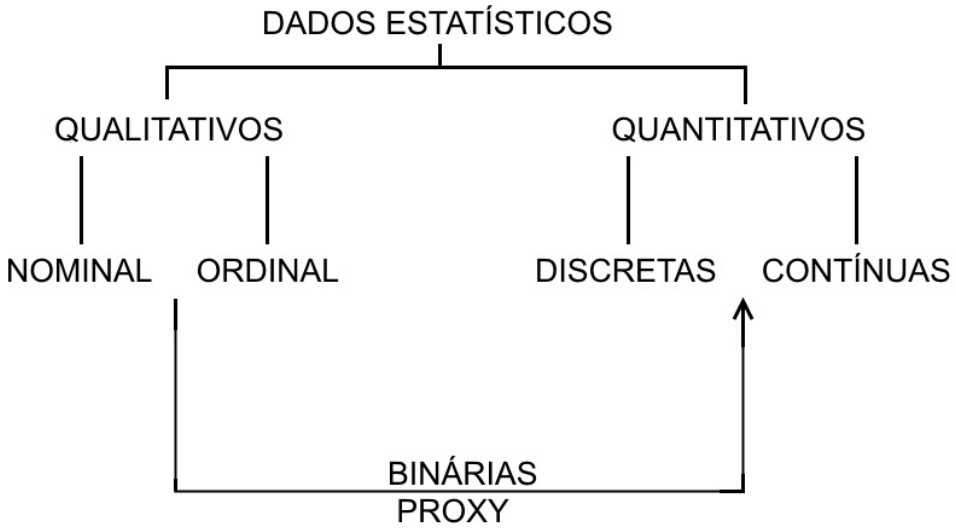


Figure 2.5: Tipos e codificações de variáveis

2.7 Indexação de dados (i)

Muitas operações matemáticas são representadas trazendo os valores dos dados indicados de modo genérico por letras (gregas ou romanas) e índices como, por exemplo, x_i. Tal notação está a indicar que, se dispuséssemos os dados em uma linha virtual (às vezes necessitando que estejam ordenados, como para a determinação de uma separatiz), cada um de seus valores estaria a ocupar uma *posição* indicada pelo índice i:

2.8 Noções básicas sobre somatórios (Σ)

Somatório é um operador matemático utilizado para simplificar expressões que envolvam soma de mais de um elemento.

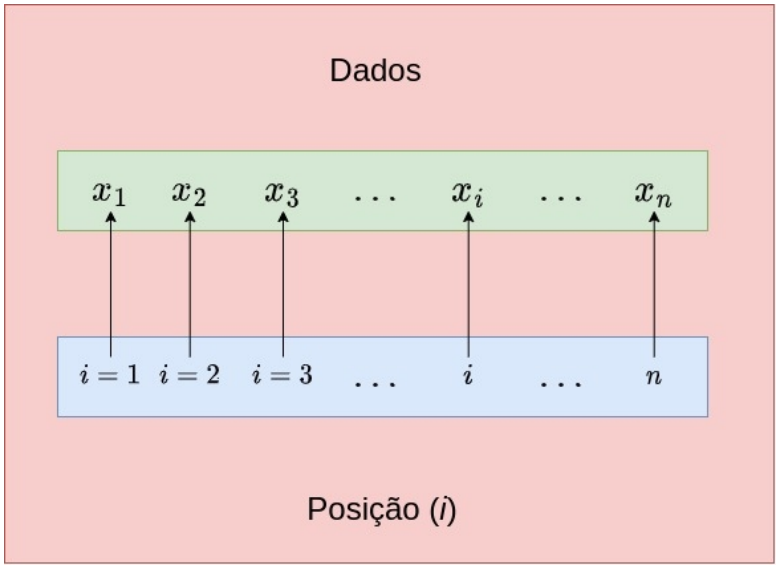


Figure 2.6: Entendendo a indexação de dados

Digamos, por exemplo, que estamos interessados saber o total de comissões a pagar em um determinado setor de uma empresa.

Admita que esse setor tenha 6 funcionários: Pedro, Guilherme, Lucas, Maria, Fernanda e Roberto e que suas comissões sejam R$ 3000; R$ 3300; R$ 3900; R$ 2950; R$ 3150 e R$ 3450.

A representação da soma das comissões pode ser expressa de vários modos como, por exemplo, nesse extensa frase:

> O total de comissões a pagar em um determinado setor de uma empresa é a Renda do Pedro mais a Renda do Guilherme mais a Renda do Lucas mais a Renda da Maria mais a Renda da Fernanda mais Renda do Roberto.

Atribuindo os valores para cada uma das rendas:

> O total de comissões a pagar em um determinado setor de uma empresa é: : R$ 3000 + R$ 3300 + R$ 3900 + R$ 2950 + R$ 3150 + R$ 3450.

Chamando-se "O total de comissões a pagar em um determinado setor de uma empresa é" de X, teremos:

$$X = \text{R\$ } 3000 + \text{R\$ } 3300 + \text{R\$ } 3900 + \text{R\$ } 2950 + \text{R\$ } 3150 + \text{R\$ } 3450.$$

Para simplificar a representação dessa operação, vamos enumerar os funcionários: Pedro (1), Guilherme (2), Lucas (3), Maria (4), Fernanda (5) e Roberto (6). Além disso, vamos chamar a comissão a ser paga pela letra X.

Para diferenciar a fração da comissão X a ser paga a cada um dos funcionários podemos por um índice na letra X para indicar a quem estamos nos referindo. Assim X_1 seria a comissão do Pedro, X_2 a do Guilherme, X_3 a do Lucas, X_4 a da Maria, X_5 a da Fernanda e X_3 a do Roberto.

Com essa notação podemos representar matematicamente o total das comissões a pagar em um determinado setor de uma empresa por:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$$

Cada um desses fatores pode ser generalizado como um X_i, a comissão de um *i-ésimo* funcionário qualquer. Sabendo que o setor tem apenas 6 funcionários (Pedro, Guilherme, Lucas, Maria, Fernanda e Roberto) então esse i irá variar de 1 a 6 (Pedro:1, Guilherme: 2, Lucas: 3, Maria: 4, Fernanda: 5 e Roberto: 6).

Com todas essas considerações podemos representar a soma das comissões utilizando a notação matemática do somatório.

A letra grega maiúscula Σ **("sigma")** é habitualmente adotada na matemática para representar o somatório de uma quantidade de fatores. Assim, nosso exemplo da soma de 6 fatores (comissões) pode ser representada matematicamente por:

$$\sum_{i=1}^{6} X_i = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$$

Observe que abaixo da letra Σ ("sigma") vemos $i = 1$ indicando que o índice dos fatores (X) a serem somados (a *i-ésima* comissão) irá se iniciar pela comissão do primeiro funcionário, quando então i = 1.

Acima da letra Σ ("sigma") vemos o número 6 indicando que o índice dos fatores (X) a serem somados irá se dar até o valor da comissão do sexto funcionário, quando então i=6.

Generalizando-se para uma soma de n fatores X:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

A representação matemática do somatório pode ser inserida junto a qualquer outra operação como, por exemplo, podemos, depois de realizar a soma, dividi-la por um valor n qualquer

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

ou elevá-la ao quadrado:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$$

Atenção para a diferença entre essas duas operações:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

A primeira indica que devemos realizar a soma dos fatores **e só então elevar esse resultado ao quadrado**. A segunda indica que devemos realizar a **soma dos quadrados de cada um dos fatores**.

```
library(formattable)
comissoes=c(3000, 3300, 3900, 2950, 3150, 3450)

#Somatório das comissões
currency(sum(comissoes),
  symbol = "R$",
  digits = 2L,
  format = "f",
  big.mark= ".",
  decimal.mark= ",",
  sep= " ")
```

```
## [1] R$ 19.750,00
```

```
#Somatório das comissões dividido pelo número de comissões
currency(sum(comissoes)/length(comissoes),
  symbol = "R$",
  digits = 2L,
  format = "f",
  big.mark= ".",
  decimal.mark= ",",
  sep= " ")
```

```
## [1] R$ 3.291,67
```

```
#Quadrado do somatório das comissões
currency(sum(comissoes)^2,
  symbol = "R$",
  digits = 2L,
  format = "f",
  big.mark= ".",
  decimal.mark= ",",
  sep= " ")
```

```
## [1] R$ 390.062.500,00
```

```
#Somatório dos quadrados das comissões
currency(sum(comissoes^2),
  symbol = "R$",
  digits = 2L,
  format = "f",
  big.mark= ".",
  decimal.mark= ",",
  sep= " ")
```

```
## [1] R$ 65.627.500,00
```

2.9 Análise combinatória: diagramas de árvore, permutações (arranjos) & combinações

A análise combinatória é um conjunto de técnicas para agrupamento de objetos conforme regras definidas e obtenção, através de cálculos, do número de agrupamentos possíveis.

Se um evento E pode ser decomposto em eventos sequenciais E_1, E_2, E_2, ..., E_n e existem P_1 possibilidades distintas de ocorrer E_1, P_2 possibilidades distintas de ocorrer E_2 e assim sucessivamente, então o número total de possibilidades do evento E ocorrer é dado por:

$$P_1.P_2. \quad ... \quad .P_n$$

Esse princípio recebe o nome de *Princípio multiplicativo*, e é aplicado nos casos em que os eventos são interligados pelo conectivo **e**, característico de decisões sucessivas.

Se um homem tem 2 camisas e 4 gravatas, então ele tem $2 \times 4 = 8$ formas de combinar uma camisa com uma gravata.

Um diagrama como ilustrado na Figura 2.7 (denominado **diagrama de árvore** em virtude de sua aparência) geralmente é usado para explicar o princípio acima

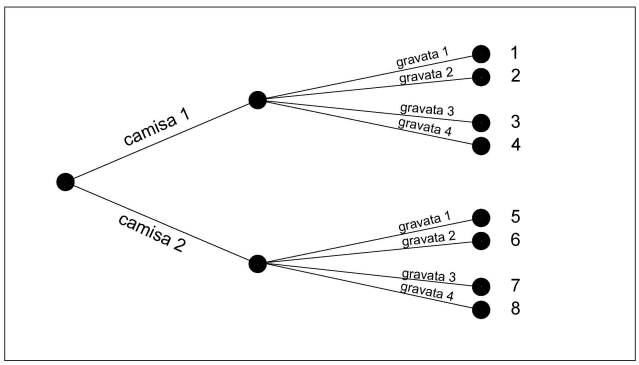


Figure 2.7: Diagrama de árvore

Ao lançarmos uma moeda três vezes (assumindo-se que K: cara e C: coroa) haverá $2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades distintas.

O **diagrama de árvore** associado será (cf. Figura 2.8:

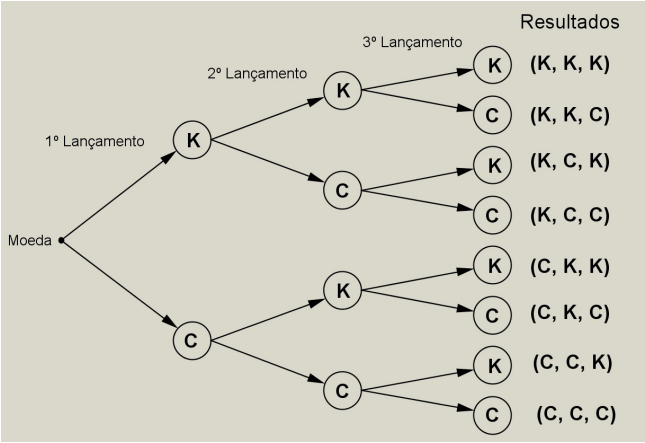


Figure 2.8: Diagrama de árvore

Sejam os eventos mutuamente exclusivos E_1 com $n1$ possibilidades distintas de ocorrer, E_2 com n_2, ..., E_n com n_k; então o número total de possibilidades de ocorrer **pelo menos um desses eventos** será dado por:

$$n_2 + n_2 + ... + n_k$$

Esse princípio recebe o nome de *Princípio aditivo*, e é aplicado nos casos em que os eventos são interligados pelo conectivo **ou**, característico de eventos mutuamente exclusivos.

Uma cantina de um colégio possui três tipos de sucos e dois tipos de refrigerantes. Um aluno pode adquirir apenas 1 suco ou 1 refrigerante. Quantas possibilidades de escolha ele tem?

Seja E_1 definido como escolher um tipo de suco ($n_1 = 3$) e E_2 definido como escolher 1 tipo de refrigerante ($n_2 = 2$. Então o número total de possíveis escolhas será dado aplicando-se o princípio aditivo:

$$n_1 + n_2 = 5$$

2.9.1 Permutações ou arranjos

O conceito de uma permutação (arranjo) refere-se a uma relação de n objetos distintos que serão agrupados p p $(p < n)$. Nos agrupamentos possíveis considera-se a ordem dos elementos; sendo assim, qualquer mudança na ordem dos elementos em um agrupamento constitui um novo agrupamento: **agrupamentos que possuem os mesmos objetos em ordem distinta são considerados agrupamentos distintos**.

- Simples: não ocorre a repetição de um elemento no agrupamento; e,
- Com repetição: os elementos que compõem o conjunto podem aparecer repetidos; ou seja, um agrupamento pode apresentar elementos iguais.

O número de permutações (arranjos) **sem a repetição** de um mesmo elemento no agrupamento, formados por p elementos selecionados de um conjunto de n objetos distintos será:

$$P_{(n,p)} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo: Quantos agrupamentos diferentes (onde a ordem dos elementos é razão para distinção: *permutações*) formados por **3 letras cada** podem ser formados com as **7 letras**: A, B, C, D, E, F, G **sem repetição**?

$$\begin{aligned} n &= 7 \\ p &= 3 \\ P_{(n,p)} &= \frac{7!}{(7-3)!} \\ &= \frac{7!}{4!} = \\ &= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} \\ &= 7 \times 6 \times 5 = 210 \end{aligned}$$

O número de permutações (arranjos) **com repetição** de um mesmo elemento no agrupamento, formados por p elementos selecionados de um conjunto de n objetos distintos será:

$$P_{(n,p)} = n^p$$

Exemplo: Quantos agrupamentos diferentes (onde a ordem dos elementos é razão para distinção: **permutações**) formados por **3 letras cada** podem ser formados com as **7 letras**: A, B, C, D, E, F, G **com repetição**?

$$\begin{aligned} n &= 7 \\ p &= 3 \\ P_{(n,p)} &= n^p \\ &= 7^3 = 343 \end{aligned}$$

2.9.2 Combinações

Em uma *permutação* consideramos que a **ordem* que os objetos assumem nos agrupamentos os tornam diferentes uns dos outros. Por exemplo,** abc** é uma agrupamento distinto de **bca** numa permutação.

Em muitos problemas, entretanto, estamos interessados somente na seleção ou escolha dos objetos **sem que a ordem assumida pelos objetos nos agrupamentos os tornem diferentes uns dos outros*.

Tais seleções são chamadas de *combinações*. Por exemplo, **abc** e **bca** são consideradas uma mesma combinação.

O conceito de uma combinação refere-se a uma relação de n objetos distintos que serão agrupados p a p ($p < n$) sem repetição de qualquer objeto em um mesmo agrupamento. Os agrupamentos que possuem os mesmos objetos em ordem diferente **não são considerados agrupamentos distintos**.

- Simples: não ocorre a repetição de elementos no agrupamento; e,
- Com repetição: os elementos que compõem o agrupamento podem aparecer repetidos; ou seja, ocorre a repetição de um mesmo elemento em um agrupamento.

O número total de combinações sem repetição, de p objetos selecionados de n (também chamado de combinações de n elementos tomados p a cada vez) é representado por:

$$C_{(n,p)} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

Exemplo: Qual é número de formas nas quais 3 cartas podem ser escolhidas ou selecionadas de um total de 8 cartas diferentes?

$$\begin{aligned} n &= 8 \\ p &= 3 \\ C_{(n,p)} &= \frac{8!}{3!(8-3)!} \\ &= \frac{8!}{3! \times 5!} \\ &= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} \\ &= \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 56 \end{aligned}$$

O número total de combinações com repetição, de p objetos selecionados de n (também chamado de combinações de n elementos tomados p a cada vez com repetição) é representado por:

$$C_{(n+p-1,p)} = \frac{(n+p-1)!}{p! \times (n-1)!}$$

Exemplo: Supondo que você queira comprar um sorvete com 4 bolas em uma sorveteria que possui 3 sabores disponíveis: chocolate, baunilha e morango. De quantos modos diferentes você pode fazer esta compra? (Note que nesta combinação é possível repetir a ordem de dois ou mais sabores, assim tratando de uma combinação com repetição).

$$\begin{aligned} n &= 3 \\ p &= 4 \\ C_{(n+p-1,p)} &= \frac{(3+4-1)!}{4!(+3-1)!} = 15 \end{aligned}$$

2.9.3 Observações acerca de alguns fatoriais

$$
\begin{aligned}
P_{(n,n)} &= \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! \\
C_{(n,0)} &= \frac{n!}{0! \times (n-0)!} = \frac{n!}{1 \times (n)!} = 1 \\
C_{(n,1)} &= \frac{n!}{1!(n-1)!} \\
&= \frac{n!}{(n-1)!} \\
&= \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n
\end{aligned}
$$

2.10 Conectivos lógicos

Muitos dos problemas ligados à probabilidade de ocorrência de eventos são propostos com o auxílio de conectivos lógicos:

- **Proposição**: a afirmação de que algo é verdadeiro. Após analisarmos qualquer proposição, podemos defini-la como verdadeira ou falsa como, por exemplo: "o céu é azul";
- **Negação**: negação do valor lógico de uma proposição. A negação de uma proposição verdadeira é falsa. A negação de uma proposição falsa é verdadeira. Os símbolos da negação são o til $^{-}$ ou ^{c};
- **Conjunção**: proposição composta com a utilização do conectivo "e" como, por exemplo: "o céu é azul e as nuvens são brancas". Os símbolos usuais para uma conjunção são: $\cap$ ou a letra "V" invertida; e,
- **Disjunção**: proposição composta com a utilização do conectivo "ou" como, por exemplo, "o céu é azul ou os pássaros são pretos". Os símbolos usuais para uma disjunção são: $\cup$ ou a letra V.

2.11 Leis de De Morgan

Augustus de Morgan foi um matemático e lógico indiano.

Primeira Lei de De Morgan:

Negar duas proposições ligadas com "e" ($\cap$); ou seja, uma **conjunção**, é o mesmo que negar duas proposições e ligá-las com "ou"' (ou seja, transformá-las em uma disjunção). Considerando as proposições "p" e "q" teremos:

- $\sim (p \cap q) = (\ p) \cup (\ q)$; ou,
- $(p \cap q)^c = (p^c) \cup (q^c)$.

Figure 2.9: Augustus De Morgan (1806 - 1871)

Segunda Lei de De Morgan:

Negar duas proposições ligadas por "ou"' ($\cup$); ou seja, uma **disjunção**, é o mesmo que negar as duas proposições e ligá-las com "e" (ou seja, transformá-las em uma conjunção). Considerando as proposições "p" e "q" teremos:

- $\sim (p \cup q) = (\ p) \cap (\ q)$; ou,
- $(p \cup q)^c = (p^c) \cap (q^c)$.

2.12 Noções básicas para o uso de calculadora (Cassio fx-82MS)

Em estatística trabalha-se muito com a análise de um ou mais conjuntos de dados, sendo comum a realização de diversas operações matemáticas com esses dados. Muitas dessas operações envolvem somatórios, por exemplo, e para simplificar essas operações o uso da calculadora se torna essencial.

Neste curso recomenda-se o uso de uma calculadora científica. Existem diversas calculadoras que cumprem as funções necessárias nesse curso. Para padronizar as aulas, alguns professores sugerem a calculadora científica de código: FX82MS, que é a calculadora que cujo funcionamento será exibido a seguir, passo a passo. A seguir serão descritas algumas das funções básicas mais importantes no uso desta calculadora.

Primeiro vamos deixar a calculadora no modo de regressão linear. Esse modo permite que a calculadora funcione normalmente para as operações comuns (soma, subtração, multiplicação e divisão), e ainda libera todas as funções importantes nesse curso. Sempre que o aluno for utilizar a calculadora, ele deve se certificar que ela esteja no modo de regressão linear, da seguinte forma:

PASSO 1:

- 1. ON
- 2. MODE
- 3. Aperte 3 para escolher REG
- 4. Aperte 1 para escolher LIN

Repare que no topo do visor da calculadora apareceu o símbolo REG, que indica que a calculadora está em modo de regressão. Desde que esteja no modo de regressão, podemos passar para o passo seguinte.

O nosso objetivo aqui é inserir o conjunto de dados na calculadora para então realizarmos as operações necessárias. Mas antes de inserir os dados, temos que garantir que a calculadora esteja vazia para o novo conjunto de dados. Ou seja, devemos limpar a calculadora:

PASSO 2:

- 1. SHIFT
- 2. MODE
- 3. Aperte 1 para escolher Scl (*Stat Clear*)
- 4. Aperte = para limpar a calculadora

Entrada de dados.

Agora que a calculadora está em modo de regressão e está limpa, podemos inserir o conjunto de dados. Para ilustrar esta função, vamos inserir o seguinte conjunto de dados: $X = 5, 3, 6, 2$.

Para inserir cada um desses elementos você deve digitar o número e em seguida o botão M+.

A sequência fica assim: 5 M+ 3 M+ 6 M+ 2 M+.

A cada vez que você insere uma observação, a calculadora atualiza o número de observações inseridas. No final, nesse caso, aparece n=4 porque inserimos 4 observações.

Funções envolvendo somatórios.

Observe na calculadora os botões shift e alpha. Geralmente estes botões aparecem nas cores amarela e vermelha, respectivamente. Observe ainda que alguns botões da calculadora possuem termos nessas cores. Para selecionar as funções em amarelo, antes devemos ligar o modo shift. Enquanto que para selecionar as funções em vermelho deve-se ligar o modo alpha.

Por exemplo, para abrir a função S-SUM que está em amarelo no botão 1, faz-se: SHIFT 1. A função S-SUM é a que contém todos os somatórios importantes. Ao abrir esta função aparecem três opções da seguinte forma:

$$\Sigma(x)\Sigma(x^2)n$$

Aperta-se 1 = para ter o somatório de x; 2 = para ter o somatório de x^2 ou 3 = para saber o número n de obervações inseridas.

Funções para obter a média e o desvio padrão.

A função S-VAR fornece a média e o desvio padrão dos dados. Essas são medidas importantes, que serão utilizadas durante todo o curso. Para abrir esta função faz-se: SHIFT 2.

$$\bar{x}\ \sigma_x S_x$$

A opção 1 retorna a média dos dados, a opção 2 retorna o desvio padrão populacional e a opção 3 o desvio padrão amostral.

Como inserir dois conjuntos de dados.

Quando se deseja estudar dois conjuntos de dados, de mesmo tamanho, pode-se inseri-los de forma simultânea na calculadora. Para ilustrar vamos inserir os seguintes conjuntos de dados: $X = 2, 7, 4, 3, 2$ e $Y = 1, 2, 3, 6, 5$. Antes de inserir os dados, lembre-se de limpar a calculadora.

Em seguida vamos inserir os dados de 2 em 2: o primeiro de X com o primeiro de Y e assim por diante. Repare que ao lado do botão M+ tem um botão com uma vírgula. Esta vírgula é utilizada para separar as observações de X das de Y . A sequência fica assim:

- 2,1 M+
- 7,2 M+
- 4,3 M+
- 3,6 M+
- 2,5 M+

Se você usar a função S-SUM, na tela vai aparecer os somatórios apenas de X, que foi pela ordem, o primeiro a ser inserido. Na calculadora tem um botão grande e style="color:gray;">S-SUM, com 4 setas. Depois de selecionar a função amarelo aperte a seta para frente que aparecerão os somatórios para Y . O mesmo acontece para a função S-VAR.

2.13 Instalação do software R em conjunto com a interface gráfica RStudio

> "A pergunta não é se o R faz; mas sim, como ele faz [...] (anônimo)"

R é uma linguagem e ambiente para computação estatística e gráficos. É um projeto GNU que é semelhante à linguagem e ambiente S que foi desenvolvido nos Laboratórios Bell (anteriormente AT&T, agora *Lucent Technologies*) por John Chambers e colegas. R pode ser considerado como uma implementação diferente de S. Existem algumas diferenças importantes, mas muito código escrito para S roda inalterado sob R.

R fornece uma ampla variedade de técnicas estatísticas (modelagem linear e não linear, testes estatísticos clássicos, análise de séries temporais, classificação, *clustering*, ...) e gráficas, e é altamente extensível. A linguagem S costuma ser o veículo escolhido para pesquisa em metodologia estatística, e R fornece uma rota de código aberto para participação nessa atividade.

Um dos pontos fortes do R é a facilidade com que gráficos de qualidade de publicação bem projetados podem ser produzidos, incluindo símbolos matemáticos e fórmulas quando necessário. Grande cuidado foi tomado sobre os padrões para as escolhas de design menores em gráficos, mas o usuário mantém o controle total.

R está disponível como Software Livre sob os termos da Licença Pública Geral GNU da *Free Software Foundation em* forma de código-fonte. Ele compila e roda em uma ampla variedade de plataformas UNIX e sistemas similares (incluindo FreeBSD e Linux), Windows e MacOS.

R é um conjunto integrado de recursos de software para manipulação de dados, cálculo e exibição gráfica. Inclui:

- uma instalação eficaz de manipulação e armazenamento de dados,

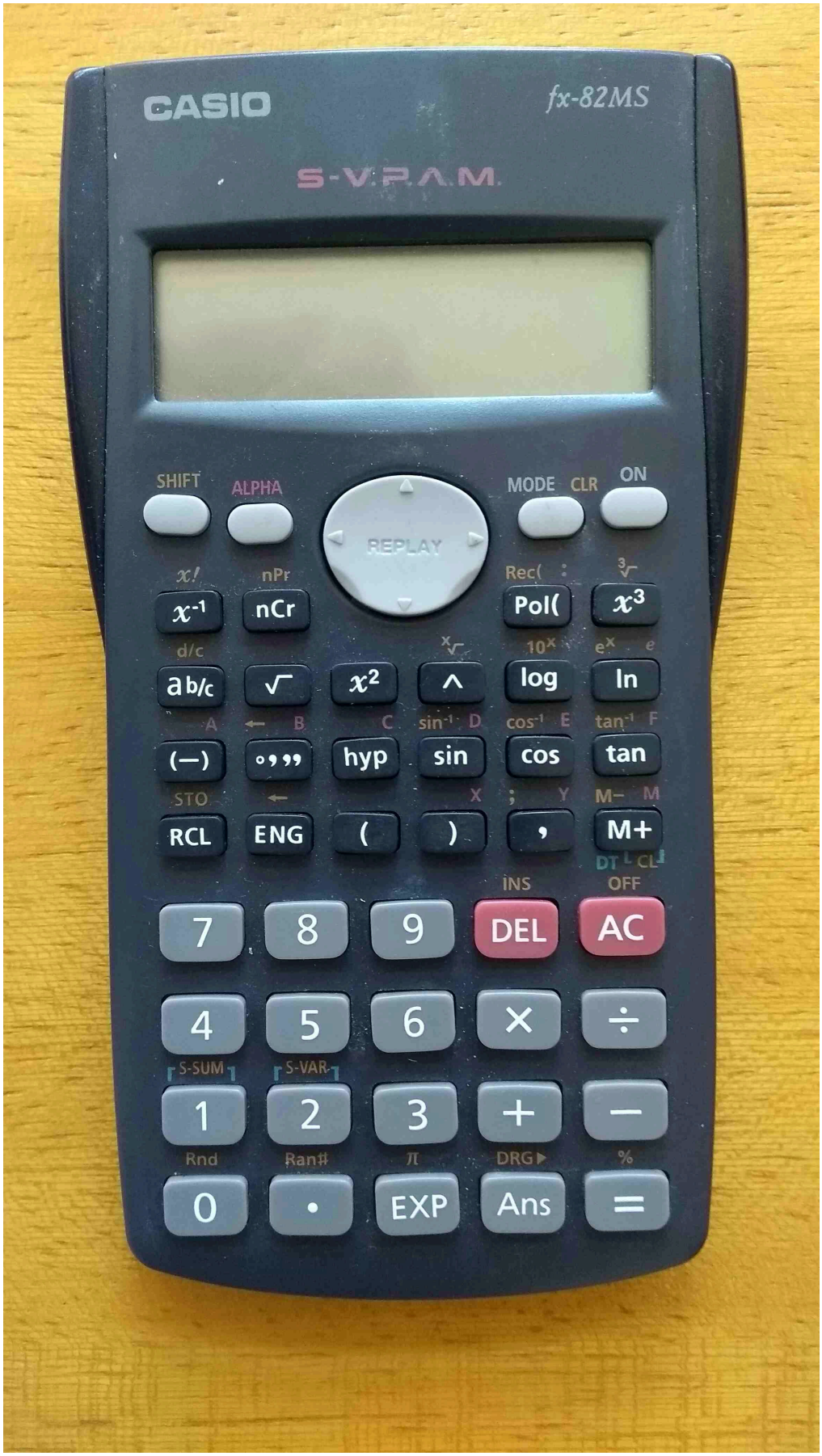


Figure 2.10: Calculadora Cassio

- um conjunto de operadores para cálculos em arrays, em particular matrizes, uma coleção grande, coerente e integrada de ferramentas intermediárias para análise de dados,
- facilidades gráficas para análise de dados e exibição na tela ou em cópia impressa, e uma linguagem de programação bem desenvolvida, simples e eficaz que inclui condicionais, loops, funções recursivas definidas pelo usuário e recursos de entrada e saída.

O termo "ambiente" destina-se a caracterizá-lo como um sistema totalmente planejado e coerente, em vez de um acréscimo incremental de ferramentas muito específicas e inflexíveis, como é frequentemente o caso de outros softwares de análise de dados.

R, como S, é projetado em torno de uma verdadeira linguagem de computador e permite aos usuários adicionar funcionalidades adicionais definindo novas funções. Grande parte do sistema é escrito no dialeto R de S, o que torna mais fácil para os usuários seguirem as escolhas algorítmicas feitas. Para tarefas de computação intensiva, os códigos C, C++ e Fortran podem ser vinculados e chamados em tempo de execução. Usuários avançados podem escrever código C para manipular objetos R diretamente.

Muitos usuários pensam no R como um sistema estatístico. Preferimos pensar nisso como um ambiente no qual as técnicas estatísticas são implementadas. R pode ser estendido (facilmente) via packages . Existem cerca de oito pacotes fornecidos com a distribuição R e muitos mais estão disponíveis através da família CRAN de sites da Internet, cobrindo uma ampla gama de estatísticas modernas.

R tem seu próprio formato de documentação semelhante ao LaTeX, que é usado para fornecer documentação abrangente, tanto on-line em vários formatos quanto em cópia impressa.

A página principal pode ser acessa em: The R Project for Statistical Computing e as informações acima foram traduzidas de Fonte das informações.

2.13.1 RStudio

RStudio é um ambiente de desenvolvimento integrado (IDE) para R e Python. Ele inclui um console, editor de realce de sintaxe que oferece suporte à execução direta de código e ferramentas para plotagem, histórico, depuração e gerenciamento de espaço de trabalho. O RStudio está disponível em código aberto e edições comerciais e é executado na área de trabalho (Windows, Mac e Linux). A página principal pode ser acessada em: RStudio.

Há inúmeros tutoiais para a instalação do *R* e o *RStudio* (uma IDE: *Integrated development environment* para poder utilizar o software de um mod mais amigável), dentre os quais: Tutorial de instalação (UFPr).

2.13.2 Pacotes

Os pacotes na linguagem de programação R são um conjunto de funções R , código compilado e dados de amostra. Estes são armazenados em um diretório chamado "biblioteca" dentro do ambiente R. Por padrão, o R instala um grupo de pacotes durante a instalação. Assim que iniciarmos o console R, apenas os pacotes padrão estarão disponíveis por padrão. Outros pacotes que já estão instalados precisam ser carregados explicitamente para serem utilizados pelo programa R que os usará.

Uma lista de todos os pacotes disponibilizados para os mais variados problemas de anáise estatística pode ser vista em Lista de pacotes.

Módulo 3

Introdução à estatística descritiva

Sobre o estudo da estatística por áreas nas quais, aparentemente, não se vislumbra sua utilidade trazemos o prefácio da tradução do livro de Jack Levin (Estatística aplicada às ciências humanas) por Sérgio Francisco Costa, ao dizer que o livro:

> "[...] destina-se a um público muito específico: estudantes de Ciências Humanas, refúgio errôneo dos que fogem das equações e dos cálculos, pois que, embora humanas - e talvez por isso mesmo - não podemos prescindir das tão odiadas quantificações [...]"

3.1 Análise exploratória

A análise exploratória de dados (*EDA: Exploratory Data Analisys* , originalmente desenvolvida pelo matemático e estatístico norte-americano John Tukey na década de 1970) é usada para se investigar conjuntos de dados e resumir suas principais características, muitas vezes usando métodos de visualização de dados por gráficos e apresentação de tabelas.

Habitualmente uma *EDA* envolve:

- verificar quais são os tipos de variáveis presentes nos dados;
- sintetizar os valores assumidos por cada uma das variáveis;
- verificar os padrões de cada variável e eventuais associações entre duas ou mais delas; e,
- apresentação de tabelas e gráficos expositivos variados.

Figure 3.1: John Tukey (1915-2000)

3.2 Dados brutos, em rol, diagrama de ramos & folhas e de dispersão unidimensional

Consideremos os dados obtidos da medição das alturas em metros de 60 estudantes de uma determinada classe de um certo curso aqui na UEL:

```
alturas=c(1.63,1.67,1.47,1.64,1.66,1.73,2.00,1.62,1.65,1.56,1.65,1.85,1.73,
          1.78,1.82,1.68,1.67,1.83,1.72,1.71,1.73,1.67,1.66,1.95,1.76,1.73,
          1.77,1.68,1.65,1.64,1.66,1.68,1.61,1.73,1.72,1.83,1.69,1.84,1.66,
          1.78,1.54,1.74,1.56,1.66,1.56,1.62,1.55,1.86,1.44,1.67,1.76,1.79,
          1.75,1.41,1.65,1.58,1.93,1.57,1.71,1.58,0.1,3.68,0,NA)
alturas
```

```
##  [1] 1.63 1.67 1.47 1.64 1.66 1.73 2.00 1.62 1.65 1.56 1.65 1.85 1.73 1.78 1.82
## [16] 1.68 1.67 1.83 1.72 1.71 1.73 1.67 1.66 1.95 1.76 1.73 1.77 1.68 1.65 1.64
## [31] 1.66 1.68 1.61 1.73 1.72 1.83 1.69 1.84 1.66 1.78 1.54 1.74 1.56 1.66 1.56
## [46] 1.62 1.55 1.86 1.44 1.67 1.76 1.79 1.75 1.41 1.65 1.58 1.93 1.57 1.71 1.58
## [61] 0.10 3.68 0.00   NA
```

Garbage in, *garbage out*. Não são raras as vezes nas quais o relatório com os dados coletados em uma pesquisa apresentam uma série de erros. Não estamos a nos refeir aqui aos **erros amostrais** mas sim aos erros experimentais (não amostrais), aqueles decorrentes de dados coletados incorretamente, tais como aqueles resultantes de omissões na transcrição das informações, da leitura de instrumentos descalibrados ou de informações simplesmente não coletadas.

Denomina-se pré-processamento essa etapa de *limpeza* do conjunto de dados na qual busca-se corrigir de mdo extremamente criterioso esses problemas e, para tanto, um profundo conhecimento do objeto que está sendo pesquisado é necessário de modo a não serem liminarmente eliminados dados simplesmente por destoarem da alguma tendência (para essas tituações há ferramentas estatísticas apropriadas).

O conjunto original de dados (*dataset*) refere-se a alturas de pessoas (estudantes) e assim, tata-se de uma variável quantitativa e contínua e como tal será analisada. As omissões de informação "NA" (*not available*) e as medidas transcritas com erros grosseiros (0 m; 0,10 m; 3,68 m) serão removidas.

Assim, o *dataset* será composto pelos dados abaixo:

```
alturas=c(1.63,1.67,1.47,1.64,1.66,1.73,2.00,1.62,1.65,1.56,1.65,1.85,1.73,
          1.78,1.82,1.68,1.67,1.83,1.72,1.71,1.73,1.67,1.66,1.95,1.76,1.73,
          1.77,1.68,1.65,1.64,1.66,1.68,1.61,1.73,1.72,1.83,1.69,1.84,1.66,
          1.78,1.54,1.74,1.56,1.66,1.56,1.62,1.55,1.86,1.44,1.67,1.76,1.79,
          1.75,1.41,1.65,1.58,1.93,1.57,1.71,1.58)
alturas
```

```
##  [1] 1.63 1.67 1.47 1.64 1.66 1.73 2.00 1.62 1.65 1.56 1.65 1.85 1.73 1.78 1.82
## [16] 1.68 1.67 1.83 1.72 1.71 1.73 1.67 1.66 1.95 1.76 1.73 1.77 1.68 1.65 1.64
## [31] 1.66 1.68 1.61 1.73 1.72 1.83 1.69 1.84 1.66 1.78 1.54 1.74 1.56 1.66 1.56
## [46] 1.62 1.55 1.86 1.44 1.67 1.76 1.79 1.75 1.41 1.65 1.58 1.93 1.57 1.71 1.58
```

Esse conjunto de dados certamente contém diversas informações acerca da altura dessas pessoas; todavia, da maneira como estão expostos, a visualização dessas informações fica bastante difícil. Esse modo de apresentação é chamado de dados *brutos*.

Com um pequeno refinamento, como pela simples ordenação desses dados (são medidas numéricas contínuas), algumas informações começam a se destacar:

```r
sort(alturas)
```

```
##  [1] 1.41 1.44 1.47 1.54 1.55 1.56 1.56 1.56 1.57 1.58 1.58 1.61 1.62 1.62 1.63
## [16] 1.64 1.64 1.65 1.65 1.65 1.65 1.66 1.66 1.66 1.66 1.66 1.67 1.67 1.67 1.67
## [31] 1.68 1.68 1.68 1.69 1.71 1.71 1.72 1.72 1.73 1.73 1.73 1.73 1.73 1.74 1.75
## [46] 1.76 1.76 1.77 1.78 1.78 1.79 1.82 1.83 1.83 1.84 1.85 1.86 1.93 1.95 2.00
```

A interpretabilidade das informações trazidas por esses dados começa a ficar mais fácil como, por exemplo, as alturas:

- mínima; e,
- máxima dos estudantes.

A uma listagem de valores ordenada (de modo crescente ou decrescente) dá-se o nome de *rol*.

Outra forma de apresentação desses dados é por um *Diagrama de Ramos e Folhas*, uma apresentação híbrida pois ao mesmo tempo que espelha a quantidade de medidas observadas para cada altura, mantém as informações da listagem.

```r
stem(alturas)
```

```
##
##   The decimal point is 1 digit(s) to the left of the |
##
##   14 | 147
##   15 | 45666788
##   16 | 12234455556666677778889
##   17 | 11223333345667889
##   18 | 233456
##   19 | 35
##   20 | 0
```

À esquerda do traço vertical (os ramos) são apresentadas frações das medidas das alturas (no caso, decímetros) e à direita (as folhas) são apresentadas os complementos dessas medidas (os centímetros) de tal modo que cada um dos dados da amostral original possa ter sua medida resgatada fazendo-se a leitura dos valores à esquerda com cada um deles à direita.

Essa apresentação também oferece uma apreciação visual a respeito de como os valores se distribuem.

Um *Gráfico de dispersão unidimensional (stripchart)* expressa visualmente duas informações: a localização de cada uma das medidas e a dispersão dos dados.

```r
stripchart(alturas, method = "stack", offset=1,
           pch=20, at=0.5,
           main="Gráfico de dispersão unidimensional",
           col="blue",cex=1,
           xlab="Alturas dos estudantes (m)",
           ylab="Quantidades observadas (un)")
```

3.3 Sínteses numéricas descritivas

Além da apresentação elementar de algumas informações relacionadas aos dados brutos da amostra, tais como os valores *mínimo* e *máximo* observados, a estatística descritiva possui muitas outras ferramentas para *condensar* a informação contida nos dados.

São chamadas de *sínteses numéricas*, medidas que condensam variados aspectos relacionados aos valores dos dados. As principais *sínteses numéricas* são:

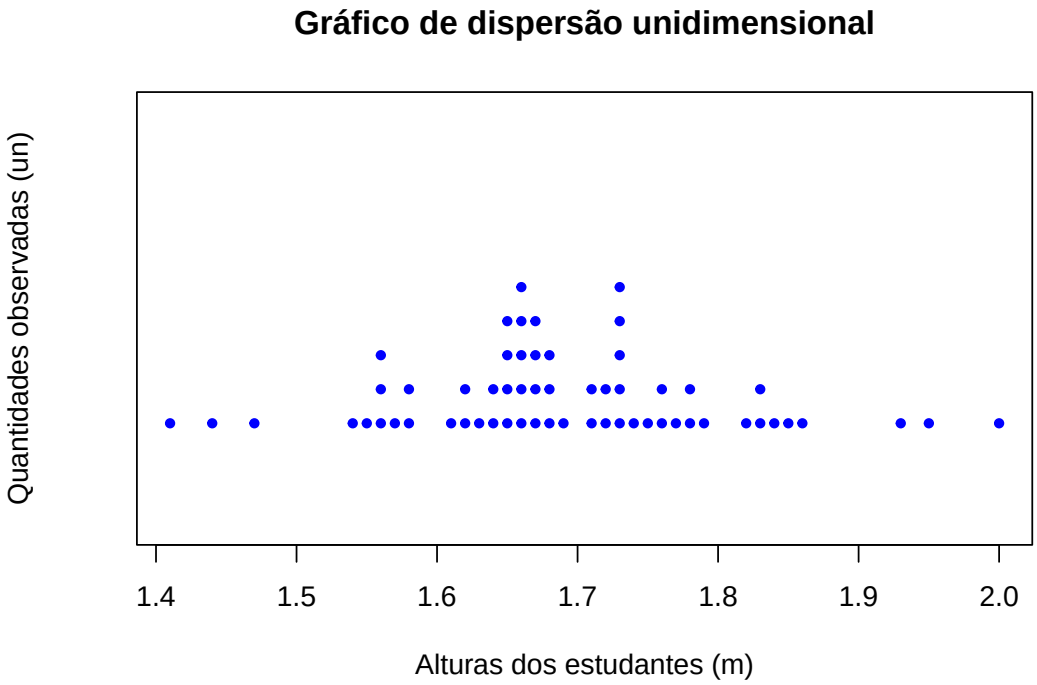


Figure 3.2: Gráfico de dispersão unidimensional (stripchart)

- de tendência central (posição): média (simples ou aritmética, geométrica, harmônica, anarmônica, quadrática, biquadrática), moda e mediana;
- de dispersão (variabilidade): absolutas (amplitude total, variância e desvio padrão) ou relativas (coeficiente de variação, unidades padronizadas); e,
- de subdivisão (separatrizes, quantis): mediana (50%), quartis (25%, 50%, 75%), decis (10%, ...90%) e percentis (1%....99%).

Uma medida de posição ou dispersão é dita **resistente** quando forem pouco afetadas pela alteração de uma pequena porção dos dados. A mediana é uma medida resistente, já a média e a variância não são.

3.3.1 Medidas de tendência central (posição)

3.3.1.1 Média

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ os n valores assumidos pela variável X (dados brutos). A *média aritmética simples* será dada por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Algumas propriedades da média aritmética:

- somando-se (ou subtraindo-se) cada um dos elementos do conjunto de dados por uma constante arbitrária qualquer k, a média aritmética ficará adicionada (ou subtraída) dessa essa constante k

```
alturas_ad=alturas+0.05

par(mfrow=c(1,2))

stripchart(alturas,method = "stack",  at=0.5,
main="",pch = 20,
col="blue", cex=1, xlab="Alturas originais dos estudantes (m)",
ylab="Quantidades observadas (un)")
abline(v=mean(alturas), col="red")
text(mean(alturas)-0.2, 1, "Média=1,69 m", col = "red", srt=90)

stripchart(alturas_ad,method = "stack",  at=0.5,
main="",pch = 20,
col="blue", cex=1, xlab="Alt. dos estudantes (m) adic. de 5cm",
ylab="Quantidades observadas (un)")
abline(v=mean(alturas_ad), col="red")
text(mean(alturas_ad)-0.2, 1, "Média=1,74 m", col = "red", srt=90)
```

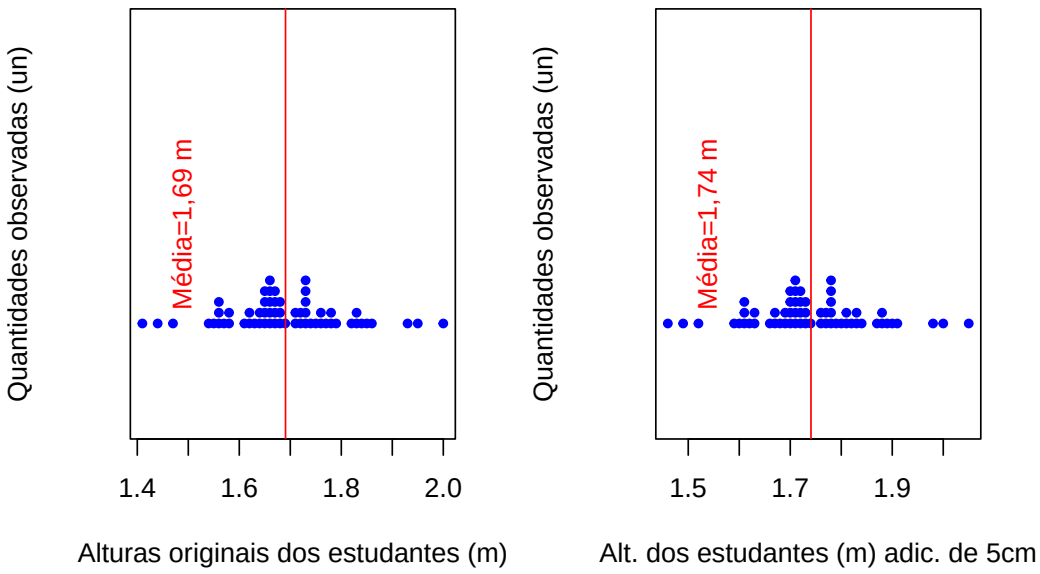


Figure 3.3: Mudanças na média pela adição (subtração) de uma constante $k = 0.05$

- multiplicando-se (ou dividindo-se) cada um dos elementos do conjunto de dados por uma constante arbitrária k, a média aritmética ficará multiplicada (ou dividida) por essa constante k

```
alturas_mult=alturas*1.2

par(mfrow=c(1,2))

stripchart(alturas,method = "stack",  at=0.5,
main="",pch = 20,
col="blue",  xlab="Alturas originais dos estudantes (m)",
ylab="Quantidades observadas (un)")
abline(v=mean(alturas), col="red")
text(mean(alturas)-0.1, 1, "Média=1,69 m", col = "red", srt=90)


stripchart(alturas_mult,method = "stack",  at=0.5,
main="",pch = 20,
col="blue",  xlab="Alt. dos estudantes (m) mult. por 1,2",
ylab="Quantidades observadas (un)")
abline(v=mean(alturas_mult), col="red")
text(mean(alturas_mult)-0.1, 1, "Média= 2,02 m", col = "red", srt=90)
```

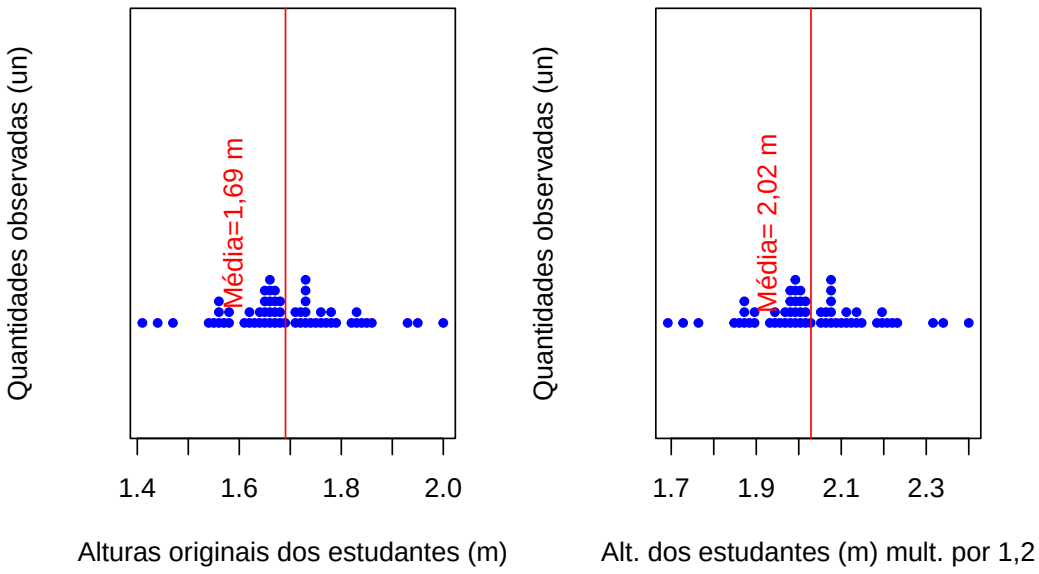


Figure 3.4: Mudanças na média pela multiplicação (divisão) de uma constante $k = 1.2$

- a soma dos desvios observados entre cada um dos valores assumidos pela variável X e sua média $\bar{x}$ é nula;
- a soma dos quadrados dos desvios é mínima;
- em uma distribuição de frequências, a soma dos produtos dos desvios entre a média o valor médio de cada uma das classes, pelas respectivas frequências é nula; e,
- multiplicando-se (ou dividindo-se) todas as frequências de uma distribuição por uma constante arbitrária, a média aritmética não se altera.

Usando os dados das medidas das alturas dos 60 estudantes teremos o seguinte valor para a **média**:

```
round(mean(alturas),2)
```

```
## [1] 1.69
```

3.3.1.2 Moda

Moda é o valor que ocorre com maior frequência na amostra. Uma amostra pode se apresentar como:

- unimodal;
- bimodal;
- plurimodal; ou,
- amodal.

```
tab_alturas=table(alturas)

tab_alturas
```

```
## alturas
## 1.41 1.44 1.47 1.54 1.55 1.56 1.57 1.58 1.61 1.62 1.63 1.64 1.65 1.66 1.67 1.68
##    1    1    1    1    1    3    1    2    1    2    1    2    4    5    4    3
## 1.69 1.71 1.72 1.73 1.74 1.75 1.76 1.77 1.78 1.79 1.82 1.83 1.84 1.85 1.86 1.93
##    1    2    2    5    1    1    2    1    2    1    1    2    1    1    1    1
## 1.95    2
##    1    1
```

```
barplot(tab_alturas,
        main="Valores observados da alturas dos estudantes",
        xlab="Altura (cm)",
        ylab="Quantidade observada (un)",
        ylim=c(0,6),
        col="blue",
        las=0,
        hor="FALSE")
```

Usando os dados das medidas das alturas dos 60 estudantes teremos os seguintes valores para a **moda**:

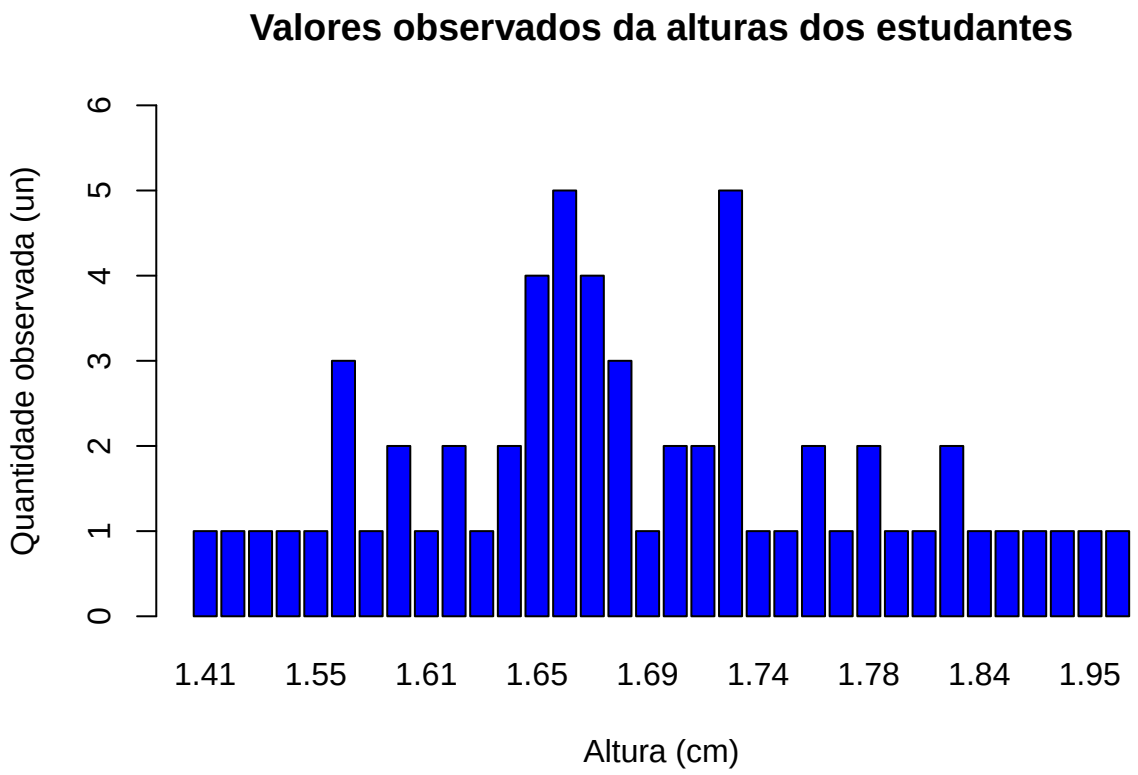


Figure 3.5: Bimodal: 1,66 m e 1,73 m

```
# função em R para extrair a moda:

Modes <- function(x) {
  ux <- unique(x)
  tab <- tabulate(match(x, ux))
  ux[tab == max(tab)]
}

Modes(alturas)
```

```
## [1] 1.66 1.73
```

3.3.1.3 Mediana

Mediana é uma medida quantitativa tal que divide a amostra ordenada dos dados em duas partes com *igual quantidade de dados* tais que na primeira delas as observações ossuem valores menores que sua medida e na outra parte as observações possuem valores superiores a ela.

Por essa razão, a mediana é uma medida separatriz (de subdivisão) de 50%, equivalente ao 2° quartil, ao 5° decil e ao 50° percentil. Para sua estimação necessitamos saber qual a **posição** que ela ocupa no rol de dados

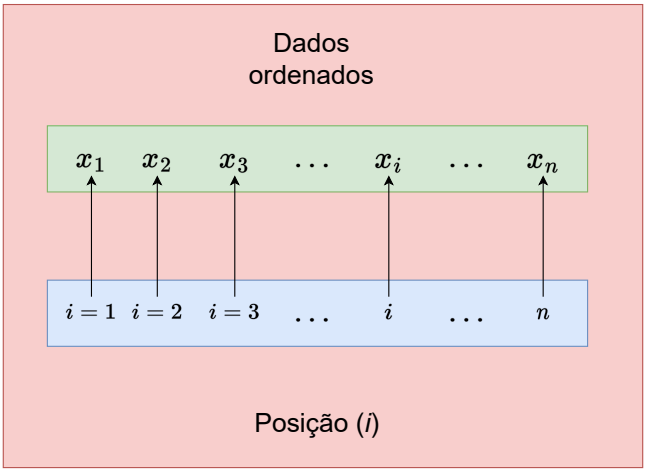


Figure 3.6: Entendendo a indexação de dados

e assim, duas situações podem ocorrer:

1- se a amostra possui um número **ímpar** (n) de elementos: a medida da mediana igual ao valor do $i - simo$ elemento da **amostra ordenada** (a medida da mediana será um valor, de fato, observado) tal que:

$$Md = x_i$$

com:

- $i = \frac{n+1}{2}$ (n é o número de observações);

2- se a amostra possui um número **par** (n) de elementos: a medida da mediana será a **média aritmética** dos valores dos elementos nas posições imediatamente anterior (i_{ant}) e posterior (i_{post}) à sua posição central virtual (a medida de mediana não será, portanto, um valor observado):

$$Md = mdia(x_{i_{ant}}; x_{i_{post}})$$

com:

- $i_{ant} = \frac{n}{2}$ e $i_{post} = \frac{n}{2} + 1$ (n é o número de observações).

Sendo uma **separatriz**, sua posição L pode ser também calculada pela expressão mais geral (para qualquer percentil) que logo mais será apresentada.

Mediana para dados apresentados na forma de uma **distribuição de frequências**:

$$Md = l_{inf} + [\frac{(\frac{n}{2} - F_{(i_{md}-1)})}{n_{md}}] \times \Delta_i$$

onde:

- l_{inf}: limite inferior da **classe mediana**: a classe que contem o elemento de ordem $\frac{n}{2}$; - $F_{(i_{md}-1)}$: é a frequência absoluta acumulada até a **classe anterior à classe mediana**; - n_{md}: é a frequência absoluta da **classe mediana**; e, - Δ_i: é o intervalo de cada classe.

Usando os dados das medidas das alturas dos 60 estudantes teremos o seguinte valor para a **mediana**:

```
sort(alturas)
```

```
##  [1] 1.41 1.44 1.47 1.54 1.55 1.56 1.56 1.56 1.57 1.58 1.58 1.61 1.62 1.62 1.63
## [16] 1.64 1.64 1.65 1.65 1.65 1.65 1.66 1.66 1.66 1.66 1.66 1.67 1.67 1.67 1.67
## [31] 1.68 1.68 1.68 1.69 1.71 1.71 1.72 1.72 1.73 1.73 1.73 1.73 1.73 1.74 1.75
## [46] 1.76 1.76 1.77 1.78 1.78 1.79 1.82 1.83 1.83 1.84 1.85 1.86 1.93 1.95 2.00
```

```
median(alturas)
```

```
## [1] 1.675
```

3.3.1.4 Diferentes posições da média, moda e mediana

Essas três medidas podem se apresentar com valores em posições alternadas quando as comparamos:

- quando a moda=mediana=média temos uma distribuição de frequências razoavelmente **simétrica**;

- quando a moda $\leq$ mediana $\leq$ média (há uma quantidade maior de dados com grandes valores, arrastando a média para a direita, para cima) temos uma distribuição de frequências **positivamente assimétrica**, ; e,

- quando a moda $\geq$ mediana $\geq$ média (há uma quantidade maior de dados com pequenos valores, arrastando a média para a esquerda, para baixo) temos uma distribuição de frequências **negativamente assimétrica**.

```
barplot(tab_alturas,
        main="Valores observados da alturas dos estudantes",
        xlab="Altura (cm)",
        ylab="Quantidade observada (un)",
        ylim=c(0,6),
        col="blue",
        las=0,
        hor="FALSE")
abline(v=mean(19.9, 21.1), col="red")
text( mean(19.9, 21.1)-0.5, 5, "Média=1,69 m", col = "red", srt=90)
abline(v=median(18.7 , 19.9), col="darkgreen")
text(median(18.7 , 19.9)-0.5, 5, "Mediana=1,675 m", col = "darkgreen", srt=90)
abline(v=c(16.3, 23.5), col="darkgrey")
text(c(16.3-0.5, 23.5-0.5), 5, c("Moda=1,66","Moda=1,73"), col = "darkgray", srt=90)
```

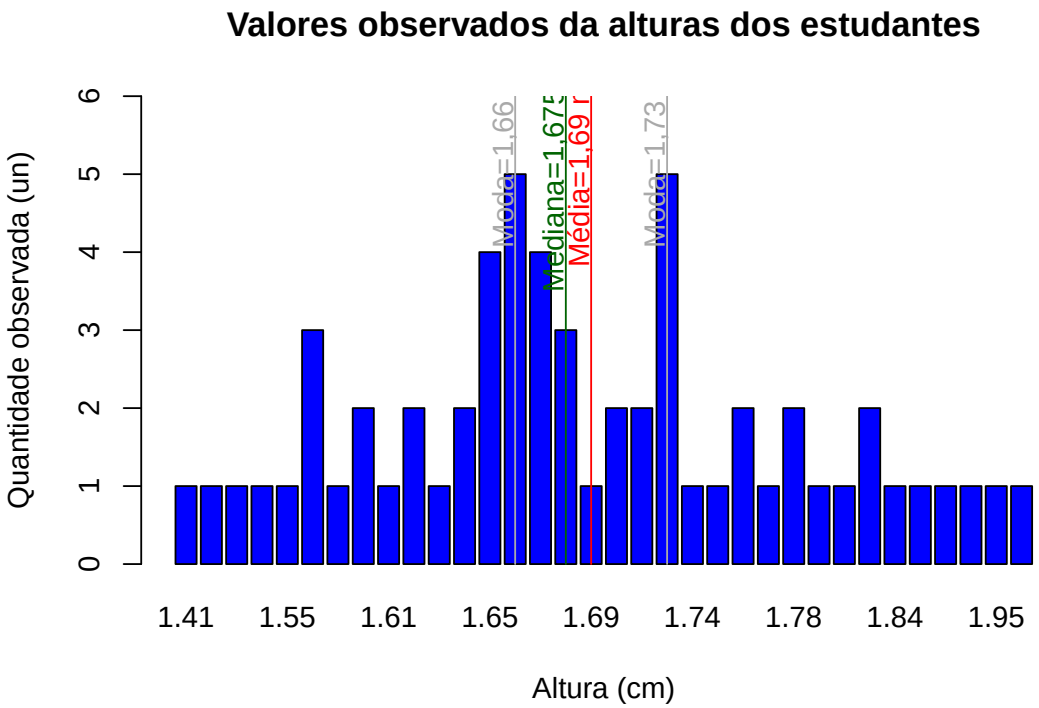


Figure 3.7: Valores observados das alturas dos estudantes e as posições da média, moda e mediana

Comparação entre medidas de posição

	Média	Mediana	Moda
Definição	$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$	Valor do meio	Valor mais freqüente
Existência	Sempre existe	Sempre existe	Pode não existir, pode haver mais de uma
Leva em conta todos os valores	Sim	Não	Não
Afetada por valores discrepantes	Sim	Não	Não
Vantagens	Usada em muitos métodos estatísticos	Menos sensível a valores discrepantes	Apropriada para dados qualitativos

Figure 3.8: Quadro comparativo entre as medidas de tendência central (posição)

3.3.2 Medidas de dispersão (variabilidade)

O conhecimento de uma medida de tendência central nos provê uma informação útil mas incompleta. As medidas de dispersão nos ajudam a ter uma perspectiva melhor dos dados.

- amplitude total dos dados;
- desvio padrão (variância): é considerada a mais útil das medidas de dispersão;
- coeficiente de variação; e,
- unidades padronizadas.

Diferentes tipos quanto à dimensão (unidade):

- **medidas absolutas** são aquelas expressas na mesma unidade de medida da variável do fenômeno estudado ($m; kg; \frac{R\$}{ms}; ...$);
- **medidas relativas** são adimiensionais e assim podem ser usadas para se comparar a variabilidade de dois ou mais conjuntos de dados, mesmo quando as variáveis se refiram a diferentes fenômenos ou que sejam expressas, originalmente, em diferentes unidades.

3.3.2.1 Amplitude total dos dados

A amplitude total dos dados é a simples diferença entre o **maior** e o **menor** dos valores observados:

$$A = x_{max} - x_{min}$$

3.3.2.2 Estimação da variância (e desvio padrão)

Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ os n valores assumidos pela variável X. Dá-se o nome de desvios a contar da média as diferenças entre cada uma das observações e a média: $x_i - \bar{x}$ com $i = 1, 2, ..., n$.

Não é possível considerar a possibilidade de se adotar o valor médio desses desvios pois uma das propriedades da média é que a soma dos desvios em torno de si é nula.

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right) = 0$$

constitui-se numa restrição linear dos desvios porque qualquer $n-1$ deles completamente determina o outro. Tampouco se considera a possibilidade de se adotar o valor médio desses desvios em módulo, pelas dificuldades teóricas em problemas de inferência.

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right|}{n}$$

Uma alternativa é adotar o valor médio do **quadrado** desses desvios.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}$$

ou,

$$S^2 = \frac{1}{(n-1)} \times \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i^2) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right]$$

Diz-se que a variância amostral (variância *ajustada*) possui $(n-1)$ graus de liberdade, denotado pela letra grega ν. A perda de *um* grau de liberdade deve-se à necessidade de se substituir a média populacional desconhecida (μ) por sua estimativa amostral $(\bar{x})$, deduzida a partir dos dados coletados.

Pode-se demonstrar que em razão dessa restrição a melhor estimativa para a variância populacional é obtida dividindo-se a soma dos quadrados dos desvios por $(n-1)$. Assim S^2 será um estimador não tendencioso para a variância amostral ao ser dividido por $(n-1)$.

```
IC.Na = function (N, n, mu, sigma) {
  dados=data.frame()
  plot(0, 0,
       type="n",
       xlim=c(sigma-0.1*sigma,sigma+0.1*sigma),
       ylim=c(0,N),
       bty="l",
       xlab="Desvio padrão",
       ylab="Amostras extraídas",
       main=paste0("Flutuação dos valores dos desvios padrão \nobtidos em ", N," amostras de
        ↪  tamanho ",n),
       sub=paste0("A população de origem tem uma distribuição ~ N  (\u03bc:",mu," ;
        ↪  \u03c3:", sigma,")"))
  abline(v=sigma, col='darkgreen', lwd=2, lty=2)
for (i in 1:N) {
  x = rnorm(n, mu, sigma)
  media = mean(x)
  sd = sqrt(sum((x-mean(x))^2)/(n-1))
  sd_vies = sqrt(sum((x-mean(x))^2)/(n))
  temp=cbind(mu, media, sd, sd_vies)
  dados=rbind(dados, temp)
  plotx = c(sd)
  ploty = c(i,i)
  if ( sd < sigma) points(sd, i, col="blue",cex=1)+text(y=i+3,x=sd, labels=round(sd,3),
   ↪  cex=1, col='blue')
  else
    points(sd, i, col="blue", cex=1)+text(y=i+3,x=sd, labels=round(sd,3), cex=1, col='blue')
     ↪
  plotx = c(sd_vies)
  ploty = c(i,i)
  if ( sd_vies < sigma) points(sd_vies, i, col="red",cex=1)+text(y=i+3,x=sd_vies,
   ↪  labels=round(sd_vies,3), cex=1, col='red')
  else
    points(sd_vies, i, col="red", cex=1)+text(y=i+3,x=sd_vies, labels=round(sd_vies,3),
     ↪  cex=1, col='red')
}
abline(v=mean(dados$sd), col='blue', lwd=2, lty=2)
abline(v=mean(dados$sd_vies), col='red', lwd=2, lty=2)
}
```

```
IC.Na(N=100, n=15, mu=170, sigma=7)
```

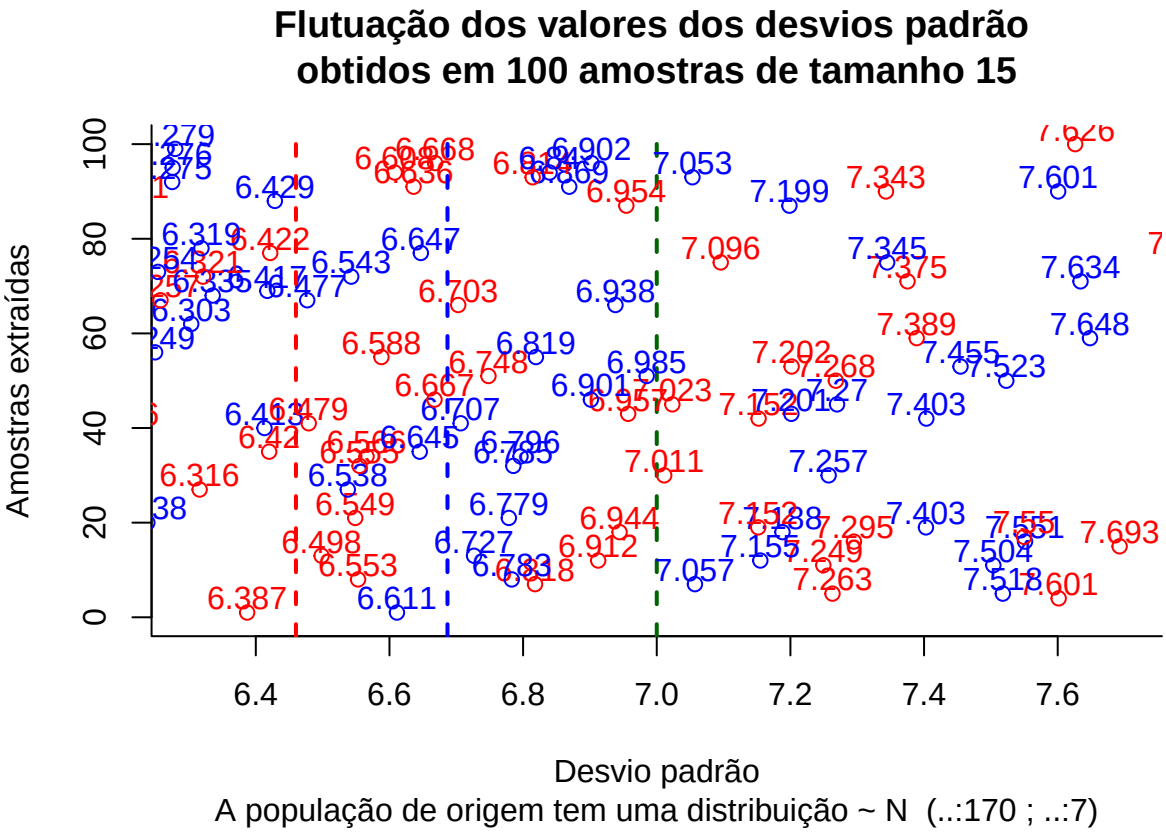


Figure 3.9: Flutuação dos valores do desvio padrão obtidos pelo estimador não viesado (em azul) e pelo estimador viesado (em vermelho) para diversas amostras extraídas de uma mesma população distribuição $\sim N(\mu;\sigma)$ (em verde o desvio padrão populacional, em azul a média dos desvios padrão amostrais correta e em vermelho a estimada de modo viesado)

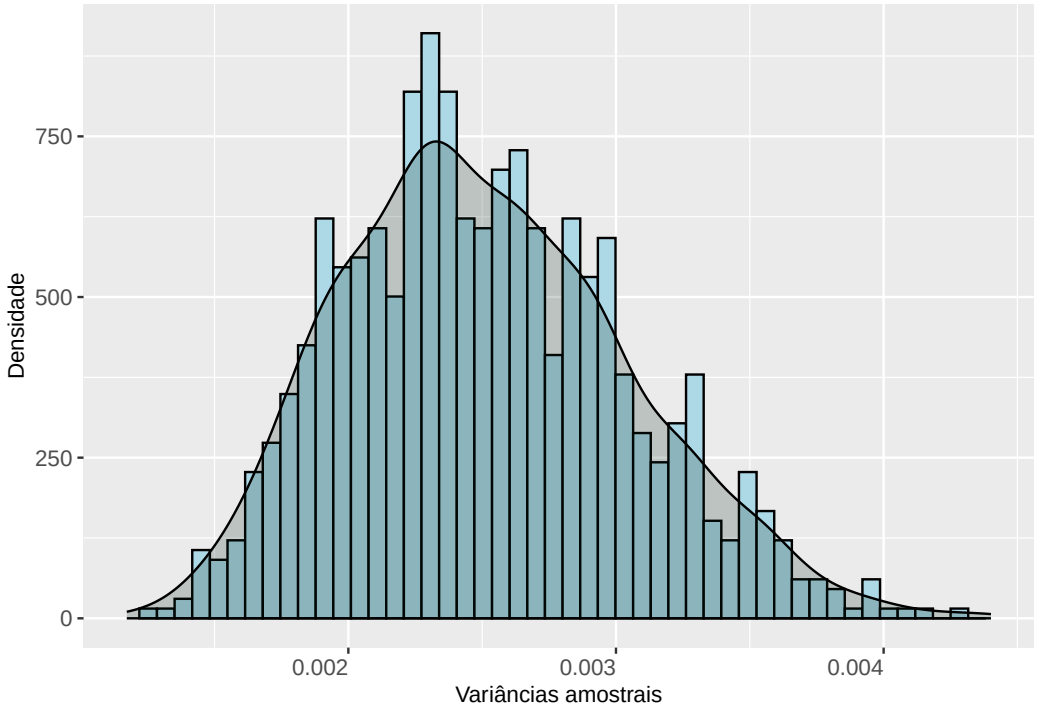


Figure 3.10: A distribuição das variâncias amostrais segue uma curva aproximada pela distribuição Qui-quadrado com (n-1) graus de liberdade

Uma medida de dispersão que apresenta a mesma unidade que a das observações originais é o **desvio-padrão**, definido como a raiz quadrada positiva da variância.

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}}$$

Tanto a variância quanto o desvio padrão indicam, em média, qual será o erro (desvio) cometido ao tentar substituir cada observação pela medida resumo do conjunto de dados (média).

Usando os dados das medidas das alturas dos 60 estudantes teremos o seguinte valor para a **variância** (com unidade igual a m^2) e o **desvio padrão** (com unidade igual a m):

```
# Variãncia
var(alturas)
```

```
## [1] 0.0130809
```

```r
# Desvio padrão
sd(alturas)
```

```
## [1] 0.1143718
```

Propriedades da variância:

- somando-se (ou subtraindo-se) cada um dos elementos do conjunto de dados por uma constante arbitrária, a variância (e o desvio padrão) não se altera; e,
- multiplicando-se (ou dividindo-se) cada um dos elementos do conjunto de dados por uma constante arbitrária, a variância ficará multiplicada (ou dividida) pelo quadrado dessa constante. O desvio padrão fica multiplicado (ou dividido) por essa constante

```r
# Adicionando-se uma constante k=0.05
alturas_ad=alturas+0.05

# Variância não se altera
var_ad= var(alturas_ad)
var_ad
```

```
## [1] 0.0130809
```

```r
# Multiplicando-se uma constante k=1.2
alturas_mult=alturas*1.2

# Variância fica multiplicada (dividida) pelo quadrado dessa constante)
var(alturas_mult)
```

```
## [1] 0.0188365
```

```r
all.equal(var(alturas_mult), var(alturas)*(1.2^2))
```

```
## [1] TRUE
```

3.3.2.3 Coeficiente de variação.

O coeficiente de variação (uma medida adimensional) é dado pela razão do desvio padrão pela média:

$$CV(\%) = 100 \cdot (\frac{s}{\bar{x}})$$

Table 3.1: Classificação da variabilidade a partir da medida do Coeficiente de variação

Classificação	Medida do Coeficiente de variação (CV %)
Baixo	$CV \leq 10\%$
Médio	$10\% \leq CV \leq 20\%$
Alto	$20\% \leq CV \leq 30\%$
Muito alto	$CV \geq 30\%$

3.3.2.4 Padronização (*z-scores*)

À conversão do valor assumido por uma variável em unidades de desvio padrão acima (ou abaixo) do valor médio de sua distribuição é dado o nome de *padronização*. Essa métrica permite comparações com outras, procedentes de outros fenômenos.

Para padronizar (achar o seu *z-score* Z) o valor de uma variável procede-se segundo a fórmula:

$$Z = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

O valor Z expressa quantos desvios esse dado está acima (ou abaixo) da média da distribuição.

Pelo *Teorema de Tchebichev* pode-se estimar a probabilidade mínima dos dados situados a certa distância de k desvios da média dessa distribuição:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Assim, se $k = 2$ **ao menos** 75% das observações devem estar entre a média e dois desvios padrões acima ou abaixo da média.

```
med=round(mean(alturas),2)
desv= round(sd(alturas),2)
```

No exemplo das alturas dos estudantes temos a média de 1.69 m e um desvio padrão de 0.11 m. Assim, **ao menos** 75% das alturas deverão estar entre 1.47 m e 1.91 m.

```r
sort(alturas)
```

```
##  [1] 1.41 1.44 1.47 1.54 1.55 1.56 1.56 1.56 1.57 1.58 1.58 1.61 1.62 1.62 1.63
## [16] 1.64 1.64 1.65 1.65 1.65 1.65 1.66 1.66 1.66 1.66 1.66 1.67 1.67 1.67 1.67
## [31] 1.68 1.68 1.68 1.69 1.71 1.71 1.72 1.72 1.73 1.73 1.73 1.73 1.73 1.74 1.75
## [46] 1.76 1.76 1.77 1.78 1.78 1.79 1.82 1.83 1.83 1.84 1.85 1.86 1.93 1.95 2.00
```

```r
# Duas observações menores que 1,47m e três maiores que 1,91m.
# Assim, 54 observações dentro do intervalo, equivalendo a 91,66% do total.
```

3.3.3 Medidas de subdivisão (separatrizes)

Separatrizes (quantis) são valores que delimitam uma proporção de observações existentes de um conjunto de dados previamente ordenados menores que ele. Os quantis mais expressivos são:

- 1° Quartil ($q_{0,25}$): 25% dos dados possuem valores abaixo desse valor e 75% estão acima;
- 2° Quartil ou mediana ($q_{0,50}$): 50% dos dados possuem valores abaixo desse valor e 50% estão acima; e,
- 3° Quartil ($q_{0,75}$): 75% dos dados possuem valores abaixo desse valor e 25% estão acima.

De modo geral, um *quantil* de ordem p (ou também $p - quantil$, indicado por q_p) é uma medida onde p é uma proporção qualquer (limitada no intervalo $0 < \text{p} < 1$), tal que $100p\%$ das observações sejam menores que seu valor q_p. Um importante gráfico que mais adiante será exposto em detalhes é o *Boxplot* que, além da mediana, para sua confecção necessitamos de duas outras separatrizes: o 1° e 3° quartis. \

Há muitos modos de se estabelecer os quantis descritos na literatura. O próprio R apresenta 9 modos diferentes:

```r
quantile(alturas, type=1)
```

```
##   0%  25%  50%  75% 100%
## 1.41 1.63 1.67 1.75 2.00
```

```r
quantile(alturas, type=2)
```

```
##    0%   25%   50%   75%  100%
## 1.410 1.635 1.675 1.755 2.000
```

```r
quantile(alturas, type=3)
```

```
##   0%  25%  50%  75% 100%
## 1.41 1.63 1.67 1.75 2.00
```

```r
quantile(alturas, type=4)
```

```
##   0%  25%  50%  75% 100%
## 1.41 1.63 1.67 1.75 2.00
```

```r
quantile(alturas, type=5)
```

```
##    0%   25%   50%   75%  100%
## 1.410 1.635 1.675 1.755 2.000
```

```r
quantile(alturas, type=6)
```

```
##     0%    25%    50%    75%   100%
## 1.4100 1.6325 1.6750 1.7575 2.0000
```

```r
quantile(alturas, type=7)
```

```
##     0%    25%    50%    75%   100%
## 1.4100 1.6375 1.6750 1.7525 2.0000
```

```r
quantile(alturas, type=8)
```

```
##       0%      25%      50%      75%     100%
## 1.410000 1.634167 1.675000 1.755833 2.000000
```

```r
quantile(alturas, type=9)
```

```
##       0%      25%      50%      75%     100%
## 1.410000 1.634375 1.675000 1.755625 2.000000
```

Para grandes conjuntos de dados a diferença entre os quantis determinados sob esses diferentes modos será despresível. De modo geral, para se calcular a posição L de um quantil qualquer de ordem p em um rol de dados pode-se usar a seguinte regra empírica:

$$L_p = \frac{p}{100} \times (n+1)$$

Onde:

- p é a **ordem** do quantil em % (50% no caso mediana, por exemplo);
- n é o número de dados do rol; e,
- L é a **posição** do valor referente ao quantil desejado.

Assim, para a determinação dos quartis, o valor de p seria:

- para o *primeiro quartil* (Q_1): $L_{q_{0,25}} = \frac{25}{100} \times (n+1)$;
- para o *segundo quartil* (a mediana ou Q_2): $L_{q_{0,50}} = \frac{50}{100} \times (n+1)$; ou,
- para o *terceiro quartil* (Q_3): $L_{q_{0,75}} = \frac{75}{100} \times (n+1)$.

Novamente podemos nos deparar com **duas situações possíveis** para o valor calculado para a posição L:

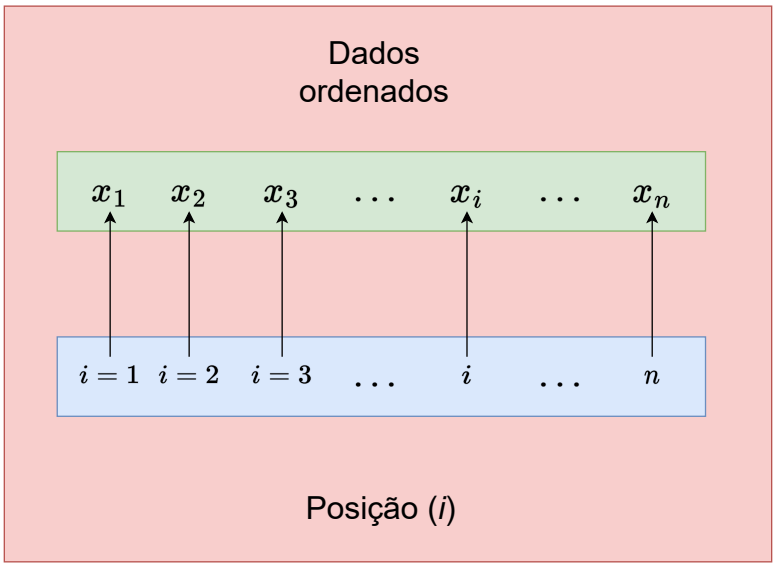


Figure 3.11: Entendendo a indexação de dados

- se valor calculado da **posição** L for um inteiro, essa será a posição onde encontraremos o valor referente ao quantil desejado;
- se o valor calculado da **posição L** for fracionário, o valor desse quantil será determinado pela média entre os dois valores dos dados que estão nas **posições** imediatamente anterior e imediatamente posterior à posição **L** calculada.

Juntamente com as observações mínima (x_i) e máxima (x_n), o 1°, 2° e 3° Quartis são importantes para se ter uma boa idéia da assimetria da distribuição dos dados.

Para uma distribuição simétrica (ou aproximadamente simétrica) deveremos observar (Distribuição Gaussiana):

- a dispersão inferior: $q_2 - x_1 \approx x_n - q_2$ à dispersão superior ;
- $q_2 - q_1 \approx q_3 - q_2$; e,
- $q_1 - x_1 \approx x_n - q_3$.

Para nosso conjunto de dados, segundo a regra empírica apresentada teremos as seguintes posições para determinação dos valores dos quartis:

- para o *primeiro quartil*:

$$\begin{aligned} L_{Q_1} &= \frac{p}{100} \times (n+1) \\ &= \frac{25}{100} \times (60+1) \\ &= 0,25 * 61 \\ &= 15,25 \end{aligned}$$

- para o *segundo quartil*:

$$\begin{aligned} L_{Q_2} &= \frac{p}{100} \times (n+1) \\ &= \frac{50}{100} \times (60+1) \\ &= 0,5 * 61 \\ &= 30,5 \end{aligned}$$

- para o *terceiro quartil*:

$$\begin{aligned} L_{Q_3} &= \frac{p}{100} \times (n+1) \\ &= \frac{75}{100} \times (60+1) \\ &= 0,75 * 61 \\ &= 45,75 \end{aligned}$$

E os quartis serão:

-Q_1=1,635 -Q_2=1,675 -Q_3=1,755

3.4 Medidas de forma (assimetria & curtose)

Quando analisamos o histograma (a representação gráfica da distribuição das frequências dos valores agrupados em classes) de uma determinada variável, não é muito comum que ele se mostre simétrico tal como seria se os dados fossem distribuídos de modo exatamente Normal.

Ao observarmos que a cauda se mostra mais alongada para a direita (indicativo da existência de uma quantidade maior de dados com grandes valores, *arrastando* a média para a direita: moda < mediana < média) diz-se que a *distribuição é assimétrica à direita.* Na situação oposta (moda > mediana > média) diz-se que ela é *assimétrica à esquerda.*

```
a=rbeta(10000,5,2)
c=rbeta(10000,5,5)
b=rbeta(10000,2,5)

par(mfrow=c(1,3))
hist(a,
     xlab="Valores",col = 'lightblue',
     ylab="Frequência",
     main="Assimetria à esq.")
hist(c,
     xlab="Valores",col = 'lightblue',
     ylab="Frequência",
     main="Relativa simetria")
hist(b,
     xlab="Valores",col = 'lightblue',
     ylab="Frequência",
     main="Assimetria à dir.")
```

De modo assemelhado, o histograma pode denotar uma forma mais *plana* ou menos *aguda*, onde um *cume* mostra-se mais destacado.

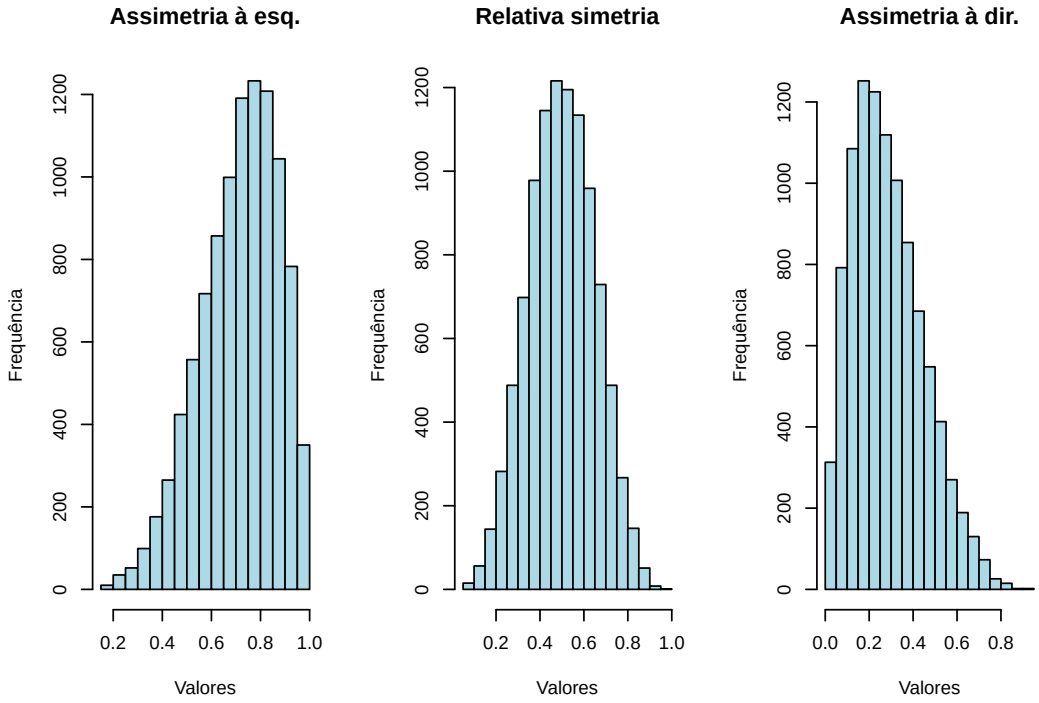


Figure 3.12: Diferentes formas na distribuição dos dados

Nesse aspecto da forma, uma variável com distribuição Gaussiana apresentaria uma curva a que denominamos *mesocúrtica*. Distribuições com um aspecto mais plano são denominadas de *platicúrticas* e as com um cume agudo são denominadas *leptocúrticas*.

A curtose é uma medida da agudeza da distribuição dos dados em relação à distribuição Gaussiana.

Essas possíveis variações na forma de uma distribuição podem ser numericamente quantificadas através dos *coeficientes de assimetria e curtose*.

Uma das medidas do coeficiente de assimetria é através do *primeiro ou segundo coeficientes de Pearson*, dados pelas seguintes relações:

- Primeiro coeficiente de assimetria de Pearson: $AS = \frac{\bar{x} - M_o}{s}$
- Segundo coeficiente de assimetria de Pearson: $AS = \frac{3(\bar{x} - M_d)}{s}$

Onde:

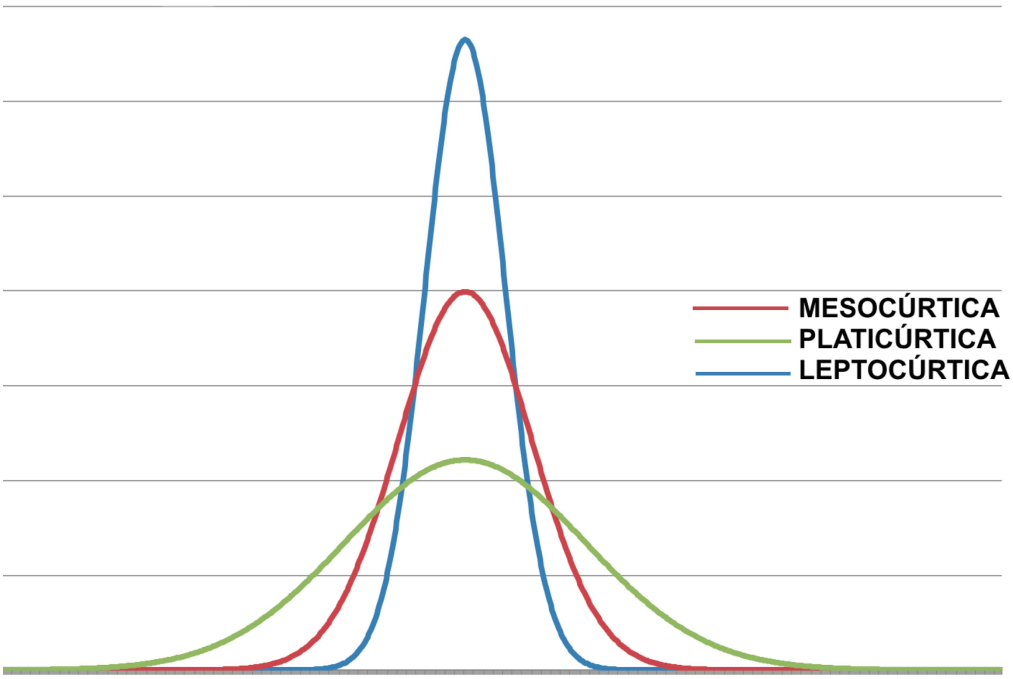


Figure 3.13: Diferentes aspectos de uma distribuição quanto à sua inclinação

- $\bar{x}$ é a média;
- M_o é a moda;
- S é o desvio padrão; e,
- M_d é a mediana.

A *assimetria* é classificada do modo seguinte:

- AS=0: distribuição simétrica;
- AS<0: distribuição com assimetria negativa; e,
- AS>0: distribuição com assimetria positiva.

Uma das medidas do coeficiente de curtose é através da seguinte relação entre *quartis* e *percentis*:

$$K = \frac{\frac{Q_3 - Q_1}{2}}{P_{90} - P_{10}}$$

Onde:

- $Q_3 = 3^o$ quartil;
- $Q_1 = 1^o$ quartil;
- $P_{90} = 90^o$ percentil; e,
- $P_{10} = 10^o$ percentil.

O *coeficiente de curtose* é classificado do modo seguinte:

- k = 0; 263: distribuição mesocúrtica;
- k < 0; 263: distribuição leptocúrtica; e,
- k > 0; 263: distribuição platicúrtica.

3.5 Apresentação tabular de dados

As sínteses numéricas expostas condensam ao máximo a informação trazida pelos dados na forma de estatísticas associadas à:

- posição: média, moda, mediana;
- dispersão: amplitude total dos dados, variância (esvio padrão), coeficiente de variação;
- separatrizes (repartição): como por exemplo os quartis (Q_1; Q_2/mediana e Q_3).

A correta exposição dos dados na forma de tabelas e gráficos auxilia o entendimento de muitas outras características relacionadas aos dados trabalhados por parte do leitor com grande riqueza visual.

Ao se lidar com grandes conjuntos de dados a visualização da informação contida nos dados fica comprometida se eles forem simplesmente apresentados como uma listagem, mesmo que depurados de eventuais inconsistências e ordenados como a lista abaixo:

```r
sort(alturas)
```

```
##  [1] 1.41 1.44 1.47 1.54 1.55 1.56 1.56 1.56 1.57 1.58 1.58 1.61 1.62 1.62 1.63
## [16] 1.64 1.64 1.65 1.65 1.65 1.65 1.66 1.66 1.66 1.66 1.66 1.67 1.67 1.67 1.67
## [31] 1.68 1.68 1.68 1.69 1.71 1.71 1.72 1.72 1.73 1.73 1.73 1.73 1.73 1.74 1.75
## [46] 1.76 1.76 1.77 1.78 1.78 1.79 1.82 1.83 1.83 1.84 1.85 1.86 1.93 1.95 2.00
```

Um dos modos de se lidar com isso é condensando a informação dos dados brutos em tabelas.

Uma tabela é uma forma não discursiva de apresentar informações nas quais o dado numérico se destaca como informação central. Uma tabela se diferencia de um quadro por este ter todos os seus campos delimitados por linhas e conter apenas informações de natureza qualitativa.

Uma tabela deve conter algumas **informações essenciais**, fora daquela estritamente relacionada aos dados, para que a compreensão do leitor acerca dos dados expostos seja a mais imediata possível:

- título que explique o que a tabela contém, local, data;
- cabeçalho nas colunas e linhas com a explicação, ainda que resumis, a que se referem as quantidades expostas no corpo;
- corpo formado pelos dados referentes às variáveis;
- fonte dos dados;
- uniformidade no número de casas decimais apresentadas no corpo;
- todas as casas devem apresentar valores ou símbolos que expliquem a ausência da informação (NI, NE, ou 0-zero).

Trabalhos de natureza acadêmica ou científica deveriam obrigatoriamente seguir, quando publicados no Brasil, a norma vigente publicada pela ABNT: Associação Brasileira de Normas Técnicas e algumas punlicações do IBGE: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (como em link).

Observa-se frequentemente, todavia, que as publicações seguem normas particulares das instituições de ensino (para trabalhos de conclusão de curso, monografias, dissertações e teses) ou das editoras (artigos), muitas vezes mescladas com recomendações da ABNT. Na Universidade Estadual de Londrina o portal da biblioteca possui uma ligação para a seção “Normas para trabalhos” (link).

3.5.1 Apresentação tabular de dados qualitativos

3.5.1.1 Dados qualitativos em entrada única

Para alguns tipos de dados, a apresentação tabular é bastante imediata.

Admita que tenha sido realizada uma pesquisa junto a um terminal de desembarque internacional em algum aeroporto sobre o continente de procedência do passageiro, num determinado período de um certo dia, tendo sido anotados os seguintes valores: AM, AM, A, A, A, AM, EU, EU, EU, EU, AM, AS, AS, AS, OC, AS, EU, AM, onde os continente anotados são assim identificados: americano (AM); africano (A), europeu (EU); asiático (AS) e da oceania (OC). Uma tabela para a apresentação dos resultados poderia ser:

Table 3.2: Desembarques no terminal internacional A em Cumbica (SP, Brasil-10/10/2021: 8 h 00min às 12 h 00 min)

Continente de procedência	Desembarques
América	5
África	3
Europa	5
Ásia	4
Oceania	1
Total	18

Fonte: Próprio autor

Outro exemplo de apresentação tabular onde são apresentadas as proporções relativas observadas de cada nível da variável estudada ("tipo de família", com quatro níveis diferentes), de um levantamento amostral feito pela Agência do Censo dos Estados Unidos em 2005.

Table 3.3: Estrutura domiciliar dos Estados Unidos

Estrutura domiciliar	Número (milhões)	Freq. rel.	Freq. rel. (%)
Casal com filhos	24,1	0,22	22
Casal sem filhos	31,1	0,28	28
Solteiro, sem parceiro	19,1	0,17	17
Morando sozinho	30,1	0,27	27
Outros domicílios	6,7	0,06	6
Total	111.1	1,00	100%

Fonte: Próprio autor

Table 3.4: Desembarques no terminal internacional A em Cumbica (SP, Brasil - 10/10/2021: 8 h 00min às 12 h 00 min)

Desembarques no terminal internacional A em Cumbica (SP, Brasil)	Sexo do passageiro		Total
	M	F	
América	3	2	5
África	3	0	3
Europa	1	4	5
Ásia	2	2	4
Oceania	0	1	1
Total	9	9	18

Fonte: Próprio autor

3.5.1.2 Dados qualitativos em entrada dupla

Outros tipos de dados são provenientes de pesquisas que têm por base respostas de natureza binária como, por exemplo:

- sim ou não;
- gosto ou não gosto;
- voto em "A" ou voto em "B"; ou,
- concordo ou não concordo.

Como resultado final, são obtidas contagens que expressam as frequências absolutas observadas para cada uma das variáveis (ou seus níveis) como na apresentação tabular de dados qualitativos por *Tabelas de Contingência.*

As *tabelas de contingência* são usadas para associar duas ou mais variáveis qualitativas (ou seus níveis) às contagens das respostas obtidas, na forma das frequências absoluta e relativa observadas em cada uma dessas variáveis (ou seus níveis).

O uso desse tipo de tabela é comum quando se pretende investigar se as variáveis estudadas têm alguma associação por meio de testes não paramétricos. Esse tipo de apresentação facilita a extração de informações relacionadas às probabilidades marginais ou condicionadas de cada uma variáveis ou seus níveis.

Admita agora que a pesquisa anterior junto ao terminal de desembarque internacional tenha também apontado o sexo do passageiro em seu desembarque. Uma tabela de dupla entrada com aqueles dados assumiria a forma:

Table 3.5: Incidência de baixo peso ao nascer em recém-nascidos de Pelotas, RS, segundo o hábito tabágico da mãe durante a gravidez (1982)

Classificação da mãe	Baixo peso ao nascer		Total
	Sim	Não	
Fumante	275	2.144	2.419
Não fumante	311	4.496	4.807
Total	586	6.640	7.226

Fonte: Próprio autor

Um outro exemplo, usando dados da incidência de baixo peso ao nascer em recém-nascidos de Pelotas (RS) segundo o hábito tabágico da mãe durante a gravidez (1982):

Ou ainda neste outro estudo que analisa a inclinação partidária de dois tipos de núcleos familiares em relação à presença de filhos:

Table 3.6: Inclinação partidária (frequências absolutas)

Estrutura domiciliar	Democrata	Republicano	Totais
Casal com filho(s)	762	468	1230
Casal sem filhos	484	477	961
Totais	1246	945	2191

Fonte: Próprio autor

A partir das contagens obtidas na pesquisa (as frequências absolutas), uma tabela com as frequências relativas pode ser construída, passando a apresentar as proporções relativas de cada categoria em relação aos níveis pesquisados:

Table 3.7: Inclinação partidária (frequências relativas)

Estrutura domiciliar	Democrata (%)	Republicano (%)	Totais (%)
Casal com filho(s)	34,78	21,36	56,14
Casal sem filhos	22,09	21,77	43,86
Totais (%)	56,87	43,13	100

Fonte: Próprio autor

3.5.2 Apresentação tabular de dados quantitativos

Todavia, para grandes quatidades de observações de dados quantitativos, a apresentação na forma de tabelas deve ser precedida do agrupamento dos valores observados em classes. O procedimento estatístico de agrupar os dados em *classes* ou *categorias* envolve construir uma *tabela de distribuição de frequências*.

Uma *tabela de distribuição de frequências* associa cada *classe* (intervalo) de valores da variável estudada ao número de ocorrências observadas. Como *regra prática*, a repartição dos dados brutos em classes deve sempre observar para que não haja um número excessivo de classes (diminuição da finalidade de resumir os dados, criação de classes sem nenhuma observação) nem tampouco poucas (que não possibilitem a visualização da distribuição e promovam perda da informação original).

A construção de uma *distribuição de frequências* consiste essencialmente em:

- escolher as *classes* ou *intervalos* (dados quantitativos) ou *categorias* (dados qualitativos);
- separar ou enquadrar os dados nessas *classes* ou *categorias*; e,
- contar o número de dados de cada *classe* ou *categoria*.

A literatura propõe vários modos para se determinar o número k de classes:

Crítério	Tamanho da amostra (n)	Fórmula
Raiz quadrada	$25 \leq$ n ≤ 220	k=$\sqrt{n}$
Herbert **Sturges**	$135 \leq 572237$	k=1+3,3log(n)$^{(1)}$
Giuseppe **Milone**	$20 \leq 36315$	k=-1+2ln(n) $^{(2)}$

- $^{(1)}$: logarítmo na base 10; e
- $^{(2)}$: logarítmo na base e.

Ao se escolher um número (k) de classes deve-se **ponderar** para que:

- os intervalos das classes tenham, geralmente, a mesma amplitude (raramente se necessita dispor de classes com amplitudes diferentes);
- os intervalos, a faixa de variação que vai do limite inferior da **primeira classe** ao limite superior da **última classe*, devem conter todos os valores possíveis da variável;
- cada valor observado deve pertencer **apenas a uma classe**;

- nenhuma classe deverá estar vazia (sem observação alguma);

- não adotar um número muito elevado de classes de modo que cada classe possua poucas observações (ou mesmo nenhuma); e,
- não adotar um número muito reduzido de classes de modo a esconder a variabilidade dos dados ao se reunir todas as observações em poucas faixas de valores;
- alguns autores recomendam um número mínimo de 5 classes e um máximo de 15.

Em nosso exemplo das alturas dos estudantes, a determinação do número de classes pelo critério da *raiz quadrada* (n=60) sugere 8 classes (pelo critérios de Sturges $k = 6,86 \sim 7$ e de Giuseppe Milone $k = 8,18 \sim 9$)):

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{n} \\ &= 7,74 \end{aligned}$$

Arredondar para **mais**: $k = 8$.

A *amplitude total* (C) dos valores observados é a simples diferença entre o *valor máximo* (2,00 m) e o *valor mínimo* (1,41 m):

$$\begin{aligned} C &= 2,00 - 1,41 \\ &= 0,59m \end{aligned}$$

A amplitude de cada uma das classes (c) será dada pelo quociente da *amplitude total* (C) pelo *número de classes* (k).

$$\begin{aligned} c &= \frac{C}{k} \\ &= \frac{0,59}{8} \\ &= 0,07375m \end{aligned}$$

Arredondar para **mais**: $c = 0,075m$.

As classes são então assim construídas:

- Limite inferior da 1ª classe (LI_1): valor mínimo observado; e,
- Limite superior da 1ª classe (LS_1): LI_1 + c.

e assim sucessivamente atá a última classe.

Símbolos gráficos para intervalos:

- Os símbolos abaixo indicam que o valor situado à sua esquerda **está incluído** no intervalo e o da direita **não está**:

$$\vdash \bullet - \circ$$

- Os símbolos abaixo indicam que o valor situado à sua esquerda **não está** incluído no intervalo e o da direita **está incluído*:

$$\dashv \circ - \bullet$$

As tabelas que serão apresentadas a seguir estão sem os requisitos essenciais expostos anteriormente uma vez que o propósito é explicar a construção e cálculo dos valores de suas células.

Com $c = 0,075m$ as 8 classes ficam assim estabelecidas, tendo-se como ponto de partida o valor mínimo observado: 1,41 m - 1,485 m; 1,485 m - 1,56 m; 1,56 m - 1,635 m; 1,635 m - 1,71 m; 1,71 m - 1,785 m; 1,785 m - 1,86 m; 1,86 m - 1,935m; 1,935 - 2,01 m.

{1,41 ; 1,44 ; 1,47 ; 1,54 ; 1,55 ; 1,56 ; 1,56 ; 1,56; 1,57 ; 1,58 ; 1,58 ; 1,61 ; 1,62 ; 1,62 ; 1,63; 1,64 ;1,64 ; 1,65 ; 1,65 ; 1,65 ; 1,65 ; 1,66 ; 1,66 ; 1,66 ; 1,66 ; 1,66 ; 1,67 ; 1,67 ; 1,67 ; 1,67 ; 1,68 ; 1,68 ;1,68 ; 1,69 ; 1,71 ; 1,71 ; 1,72 ; 1,72 ; 1,73 ; 1,73 ; 1,73 ; 1,73 ; 1,73 ; 1,74 ; 1,75 ; 1,76 ; 1,76 ; 1,77 ; 1,78 ; 1,78; 1,79 1,82 ; 1,83 ; 1,83 ; 1,84 ; 1,85 ; 1,86 ; 1,93; 1,95 ; 2,00}

A tabela de distribuição de frequências com 8 classes, cada uma com amplitude 0,075 m, assume a forma:

Classe	Frequência absoluta (f_i)
1,41 m $\vdash$ 1,485 m	3
1,485 m $\vdash$ 1,56 m	2
1,56 m $\vdash$ 1,635 m	10
1,635 m $\vdash$ 1,71 m	19
1,71 m $\vdash$ 1,785 m	16
1,785 m $\vdash$ 1,86 m	6
1,86 m $\vdash$ 1,935 m	2
1,935m $\vdash$ 2,01 m	2
Total	60

Alternativamente, caso adotássemos como ponto de partida (um pouco abaixo do valor mínimo observado) o valor de 1,40 m e como aplitude de classe 0,08 m, uma tabela alternativa de distribuição de frequências teria como classes : 1,40 m - 1,48 m; 1,48 m - 1,56 m; 1,56 m - 1,64 m; 1,64 m - 1,72 m; 1,72 m - 1,80 m; 1,80 m - 1,88 m; 1,88 m - 2,06 m e, para facilitar a contagem das observações pertencentes a cada uma das classes ordenamos os dados:

{ 1,41 ; 1,44 ; 1,47 ; 1,54 ; 1,55 ; 1,56 ; 1,56 ; 1,56 ; 1,57 ; 1,58 ; 1,58 ; 1,61 ; 1,62 ; 1,62 ; 1,63 ; 1,64 ;1,64 ; 1,65 ; 1,65 ; 1,65 ; 1,65 ; 1,66 ; 1,66 ; 1,66 ; 1,66 ; 1,66 ; 1,67 ; 1,67 ; 1,67 ; 1,67 ; 1,68 ; 1,68 ;1,68 ; 1,69 ; 1,71 ; 1,71 ; 1,72 ; 1,72 ; 1,73 ; 1,73 ; 1,73 ; 1,73 ; 1,73 ; 1,74 ; 1,75 ; 1,76 ; 1,76 ; 1,77 ; 1,78 ; 1,78 ;1,79; 1,82 ; 1,83 ; 1,83 ; 1,84 ; 1,85 ; 1,86 ; 1,93 ; 1,95 ; 2,00; }

A tabela de distribuição de frequências com 7 classes, cada uma com amplitude 0,08 m, assume a forma:

Classe	Frequência absoluta (f_i)
1,40 m $\vdash$ 1,48 m	3
1,48 m $\vdash$ 1,56 m	2
1,56 m $\vdash$ 1,64 m	10
1,64 m $\vdash$ 1,72 m	21
1,72 m $\vdash$ 1,80 m	15
1,80 m $\vdash$ 1,88 m	6
1,88 m $\vdash$ 2,06 m	3
Total	60

Classe	Frequência absoluta (f_i)

Também podemos cogitar adotar alternativamente um intervalo de classe $c = 0,10$ m, com a primeira classe começando (um pouco abaixo do valor mínimo observado) na altura de 1,40 m; todavia, a última classe não iria contemplar o valor máximo observado (2,00 m) e necessitaíamos abrir mais uma classe apenas para incluí-lo.

Mas começando-se no valor mínimo obseravado (1,41 m) estaríamos assegurando que o limite superior da última classe incluiria o valor máximo observado (2,00 m). Assim, essas seriam as classes sob uma amplitude de 0,10 m: 1,41 m - 1,51 m; 1,51 m - 1,61 m; 1,61 m - 1,71 m; 1,71 m - 1,81 m; 1,81 m - 1,91 m; 1,91 m - 2,01 m. O total de 6 classes (1,41 m a 2,01 m) cobre toda faixa de variação dos valores dos dados (de 1,41 m a 2,00 m) e é de rápida assimilação pelo leitor.

Ordenando-se os dados para facilitar a contagem das observações pertencentes a cada uma das classes:

{1,41 ; 1,44 ; 1,47 ; 1,54 ; 1,55 ; 1,56 ; 1,56 ; 1,56 ; 1,57 ; 1,58 ; 1,58 ; 1,61 ; 1,62 ; 1,62 ; 1,63 ; 1,64 ;1,64 ; 1,65 ; 1,65 ; 1,65 ; 1,65 ; 1,66 ; 1,66 ; 1,66 ; 1,66 ; 1,66 ; 1,67 ; 1,67 ; 1,67 ; 1,67 ; 1,68 ; 1,68 ;1,68 ; 1,69 ; 1,71 ; 1,71 ; 1,72 ; 1,72 ; 1,73 ; 1,73 ; 1,73 ; 1,73 ; 1,73 ; 1,74 ; 1,75 ; 1,76 ; 1,76 ; 1,77 ; 1,78 ; 1,78 ; 1,79 ; 1,82 ; 1,83 ; 1,83 ; 1,84 ; 1,85 ; 1,86 ; 1,93 ; 1,95 ; 2,00}

A tabela de distribuição de frequências com 6 classes, cada uma com amplitude 0,10 m, assume a forma:

Classe	Frequência absoluta (f_i)
1,41 m $\vdash$ 1,51 m	3
1,51 m $\vdash$ 1,61 m	8
1,61 m $\vdash$ 1,71 m	23
1,71 m $\vdash$ 1,81 m	17
1,81 m $\vdash$ 1,91 m	6
1,91 m $\vdash$ 2,01 m	3
Total	60

Tabelas de distribuição de frequências mais completas podem montadas agregando muitas informações adicionais em novas colunas, mediante simples operações aritméticas.

Essas informações servem para tornar a visualização mais imediata e muitas delas são obtidas com operações matemáticas elementares:

- Classe i: é a simples identificação de cada classe;
- Amplitude (Δ_i) da classe i: a diferença entre o valor do limite superior e o do inferior de cada classe;
- Intervalo de valores da classe i (onde seu limite inferior **está contido** e o limite superior **não está contido**);
- Valor médio ($\bar{x}_i$) de cada classe i: o valor de seu **limite inferior** mais a metade da amplitude da classe;
- Frequência absoluta (f_i) da classe i: o número de observações contidas no intervalo da classe considerada;
- Frequência relativa ($fr_i = \frac{f_i}{N}$) da classe i (ou frequência relativa percentual, se assim apresentada): o quociente do número de observações contidas no intervalo da classe (f_i) pelo número total de observações (N);
- Frequência acumulada (fac_i) da classe i (ou frequência acumulada percentual, se assim apresentada): o número de observações com medidas contidas na classe i e nas anteriores a ela;
- Densidade absoluta ($\delta_i = \frac{f_i}{\Delta_i}$): o quociente do número de observações da classe (f_i) pela sua amplitude (Δ_i);
- Densidade relativa $\delta_{fr_i} = \frac{fr_i}{\Delta_i}$: o quociente da frequência relativa (fr_i) pela amplitude (Δ_i) da classe.

Vejo como exemplo as tabelas abaixo:

Classe	Int. de valores	Alt. média	Freq. abs.	Freq. rel.	Freq. rel. (%)	Freq. acumulada	Freq. acum. (%)
		($\bar{x}_i$)	(f_i)	(fr_i)	(fr_i%)	(fac_i)	(fac_i%)
1	1,41 ⊢ 1,51	1,46	3	0,05	5	3	5,00
2	1,51 ⊢ 1,61	1,56	8	0,13	13,33	11	18,33
3	1,61 ⊢ 1,71	1,66	23	0,38	38,33	34	56,66
4	1,71 ⊢ 1,81	1,76	17	0,28	28,34	51	85,00
5	1,81 ⊢ 1,91	1,86	6	0,10	10	57	95,00
6	1,91 ⊢ 2,01	1,96	3	0,05	5	60	100,00
Totais	-		60	1,00	100,00	-	-

Classe	Int. de valores	Freq. abs.	Amplitude	Dens. abs	Freq. rel.	Dens. rel.
		(f_i)	(Δ_i)	(δ_i)	(fr_i)	(δ_{fr_i})
1	1,41 ⊢ 1,51	3	0,10	30	0,05	0,5
2	1,51 ⊢ 1,61	8	0,10	80	0,13	1,33
3	1,61 ⊢ 1,71	23	0,10	230	0,39	3,83
4	1,71 ⊢ 1,81	17	0,10	170	0,28	2,83
5	1,81 ⊢ 1,91	6	0,10	60	0,10	1
6	1,91 ⊢ 2,01	3	0,10	30	0,05	0,5
Totais	-	60	-	-	1,00	-

3.5.3 Média

Nas tabelas de *distribuições de frequências* os resultados estão agrupados em *intervalos de classes (i)*. Por essa razão, os dados perdem sua identidade individual e passam a se representados pelo valor médio de cada intervalo ($\bar{x}_i$).

A média será então dada pelo produto deste valor médio de cada intervalo ($\bar{x}_i$) pela frequência absoluta que ele apresentou (n_i), dividido pela quantidade de dados (N).

Sejam $n_1, n_2, ..., n_n$ as frequências apresentadas para cada intervalo i dos valores assumidos pela variável X para o total N de observações. Assim a *média aritmética simples* para dados agrupados será dada por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \cdot \bar{x}_i}{N}$$

onde:

- $\bar{x}_i$: o valor médio do intervalo da classe i;
- f_i: a frequência absoluta da classe i;
- k é o número de classes da tabela de distribuição de frequências;
- N é o número de dados da tabela (eventualmente, os dados podem se referir a toda a população sob estudo) .

3.5.4 Moda

Moda para dados apresentados na forma de uma distribuição de frequências:

$$Mo = l_{inf} + (\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}) \times \Delta_i$$

onde:

- l_{inf}: limite inferior da classe modal, **a classe de maior frequência absoluta**;
- Δ_1 frequência absoluta da **classe modal** menos a frequência absoluta da **classe anterior**;
- Δ_2 frequência absoluta da **classe modal** menos a frequência absoluta da **classe posterior**; e,
- Δ_i é o intervalo de cada classe.

3.5.5 Variância

Variância para dados agrupados:

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \times \left[\sum_{i=1}^{k} (\bar{x}_i)^2 \cdot f_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i \cdot f_i\right)^2}{N} \right]$$

em que:

- $\bar{x}_i$: o valor médio do intervalo da classe i;
- f_i: a frequência absoluta da classe i;
- k é o número de classes da tabela de distribuição de frequências;
- N é o número de dados da tabela (eventualmente, os dados podem se referir a toda a população sob estudo) .

3.5.6 Quartis

Quartis para dados agrupados:

$$Q_i = l_{inf_{Q_i}} + \Delta_i \frac{L_{Q_i} - f_{ac_{Q_{i-1}}}}{f_{Q_i}}$$

em que:

- n é o número de dados;
- Q_i é o quartil desejado: $i = 1, 2, 3$;
- L_{Q_i} é posição do quartil desejado tal que:
  - $L_{Q_1} = 0.25n$;
  - $L_{Q_2} = 0.5n$;
  - $L_{Q_3} = 0.75n$; que determinará a classe quartílica que o abriga;
- $l_{inf_{Q_i}}$ é o limite inferior da classe quartílica;

- $f_{ac_{Q_{i-1}}}$ é a frequência acumulada da classe imediatamente anterior à classe quartílica;
- f_{Q_i} é a frequência absoluta de classe quartílica;
- Δ_i é a amplitude de cada classe (usualmente igual para todas).

3.6 Apresentação gráfica de dados

Uma apresentação na forma gráfica torna ainda mais fácil a visualização das informações contidas nos dados. Há uma gama enorme de gráficos para a representação de dados a depender de sua natureza (qualitativa ou quantitativa).

3.6.1 Gráficos para uma variável qualitativa

- ranking: barras;
- parte em relação ao todo: setores;

3.6.1.1 Colunas

A partir das tabelas mostradas na seção 3.5.1.1 Dados qualitativos em entrada única poderíamos eleborar a apresentação gráfica na forma de *Gráficos de colunas*:

```
desembarque=c('AM','AM','A','A','A','AM','EU','EU','EU','EU','AM','AS','AS','AS','OC','AS','EU','AM')
tab_desembarque=table(desembarque)

barplot(tab_desembarque,
        main="Desembarques no terminal internacional A em Cumbica \n(10/10/2021: 8 h 00min
         ↪  às 12 h 00 min)",
        sub= "Continente de procedência: América: AM; África: A; Europa: EU; Ásia: AS;
         ↪  Oceania: OC \nfonte: próprio autor",
        xlab="",
        ylab="Quantidade observada (un)",
        ylim=c(0,6),
        col="blue",
        las=0,
        hor="FALSE")
```

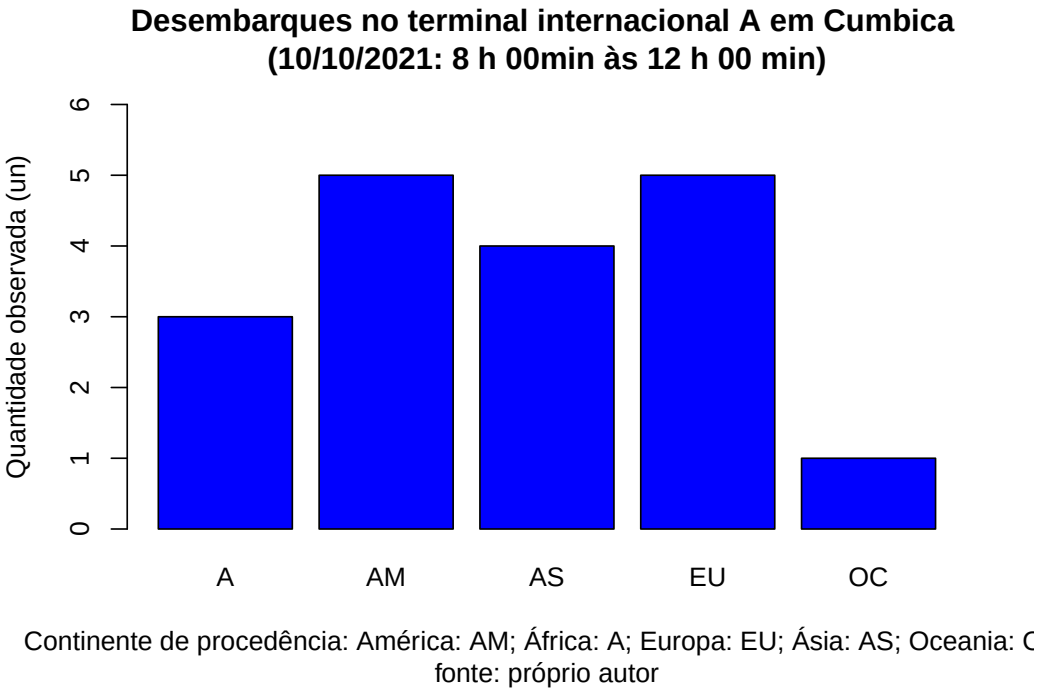


Figure 3.14: Gráfico de barras dos dados observados no terminal de desembarque internacional do aeroporto

```
library(ggplot2)
dados=data.frame(tipo=c("Casal com filhos",
                        "Casal sem filhos",
                        "Solteiro, s/parceiro",
                        "Morando sozinho",
                        "Outros domicíclios"),
                 quant=c(24.1, 31.1,
                       19.1, 30.1,
                       6.7))

ggplot(dados, aes(x=tipo, y=quant, color=tipo)) +
geom_bar(stat="identity", position=position_dodge())+
ggtitle("Estrutura domiciliar dos Estados Unidos, 2005") +
theme(legend.position="bottom")+
geom_text(aes(label=quant), vjust=1.6, color="white", position = position_dodge(0.9),
 ↪  size=3.5)+
scale_fill_brewer(palette="Paired")+
theme_minimal()+
xlab("")  +
ylab("Frequência absoluta observada (milhões)")+
labs(colour = "Tipos de domicílios")
```

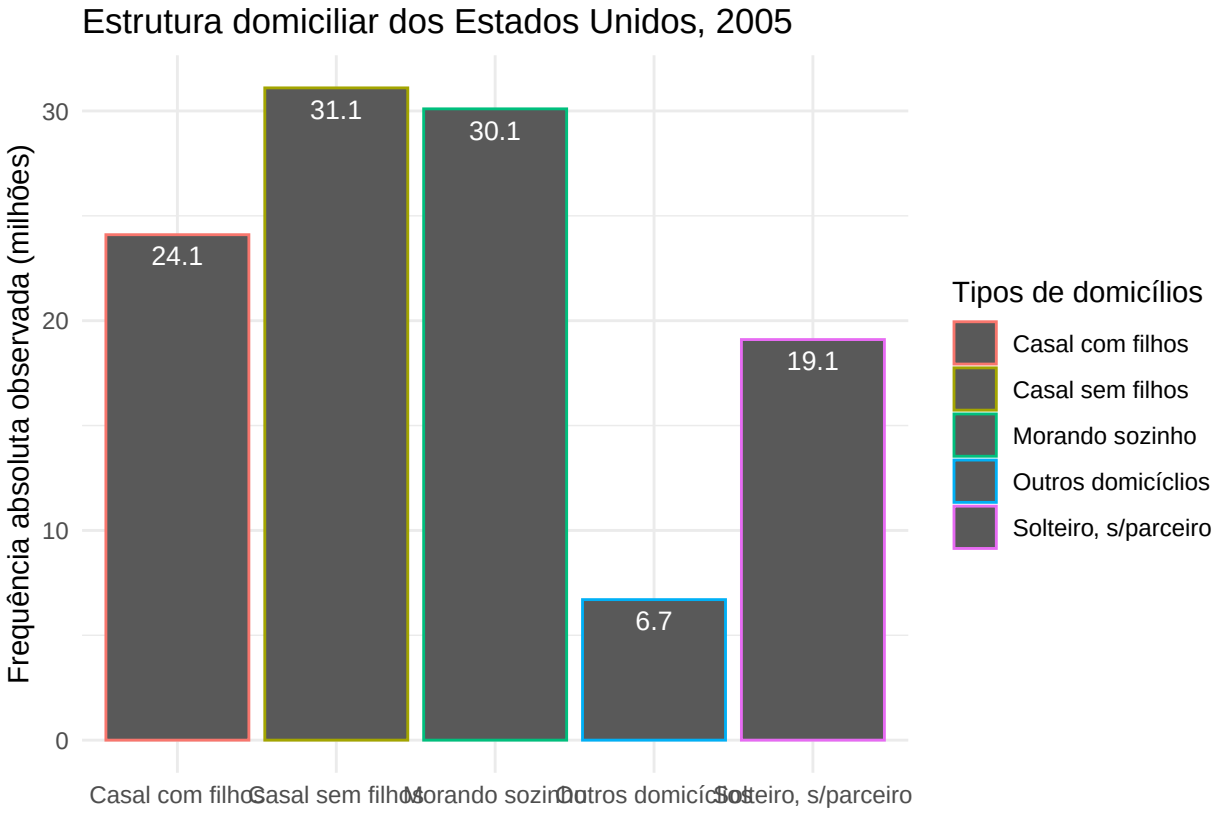


Figure 3.15: Gráfico de barras da estrutura domiciliar dos Estados Unidos

3.6.1.2 Setores

Em um *Gráfico de setores* a representação das quantidades está associada a uma fração do comprimento de um círculo. Para sua confecção considera-se a proporção da quantidade observada específica da quantidade total de dados, expressa na forma de fração do ângulo de um setor circular em relação ao ângulo interno total de um círculo (360º).

```
library(scales)
```

```
##
## Attaching package: 'scales'

## The following objects are masked from 'package:formattable':
##
##     comma, percent, scientific
```

```
library(ggplot2)

desembarques_classes=data.frame(
  group = c("América","África","Europa","Ásia","Oceania"),
  value = c(5,3,5,4,1))
```

```
blank_theme=theme_minimal()+
  theme(
    axis.title.x = element_blank(),
    axis.title.y = element_blank(),
    panel.border = element_blank(),
    panel.grid=element_blank(),
    axis.ticks = element_blank(),
    plot.title=element_text(size=14, face="bold")
  )

ggplot(desembarques_classes, aes(x="", y=value, fill=group)) +
  blank_theme +
  scale_fill_brewer("Blues")+
  labs(title="Desembarques no terminal internacional A em Cumbica",
          subtitle="(10/10/2021: 8 h 00min às 12 h 00 min)",
           caption = "Fonte: próprio autor") +
  theme(axis.text.x=element_blank()) +
  geom_bar(width = 1, stat = "identity") +
  coord_polar("y", start=0) +
  geom_text(aes(y = value/2 + c(0, cumsum(value)[-length(value)]),
                label = percent(value/18 )), size=5)+
  guides(fill = guide_legend(title = "Legenda",
                             label.position = "right",
                             title.position = "top", title.vjust = 1))
```

```
library(ggplot2)
library(scales)

blank_theme=theme_minimal()+
  theme(
    axis.title.x = element_blank(),
    axis.title.y = element_blank(),
    panel.border = element_blank(),
    panel.grid=element_blank(),
    axis.ticks = element_blank(),
    plot.title=element_text(size=14, face="bold")
  )

bp=ggplot(dados, aes(x="", y=quant, fill=tipo))+
  geom_bar(width = 1, stat = "identity")
pie=bp + coord_polar("y", start=0)
pie +
  scale_fill_brewer("Blues")+
  blank_theme +
  theme(axis.text.x=element_blank()) +
  geom_text(aes(x =  1.2,label = quant), position = position_stack(vjust = 0.5)) +
  ggtitle("Estrutura domiciliar dos Estados Unidos, 2005") +
  theme(legend.position = "right", legend.justification = "center", legend.direction =
   ↪  "vertical",
       legend.spacing.x = unit(0.5, 'cm'),legend.spacing.y = unit(0.5, 'cm'))+
```

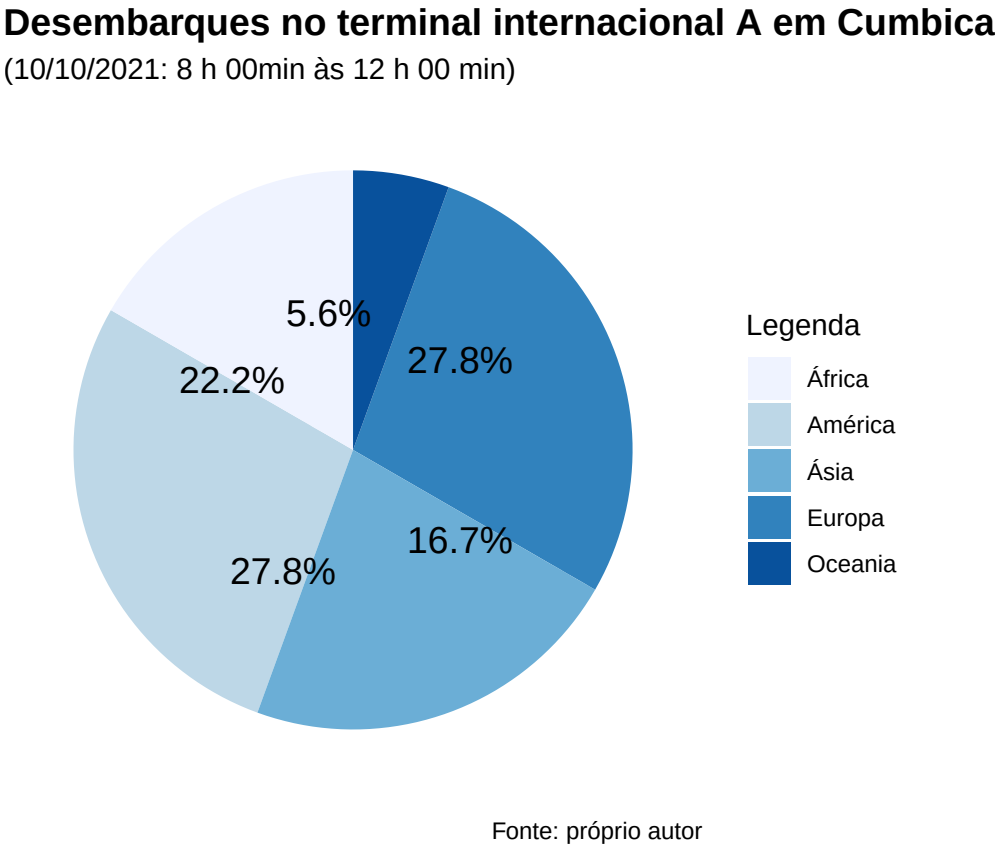


Figure 3.16: Gráfico de setores dos desembarques observados no terminal de desembarque internacional do aeroporto

```
  guides(fill = guide_legend(title = "Tipos de domicílios",
                             label.position = "right",
                             title.position = "top", title.vjust = 1))
```

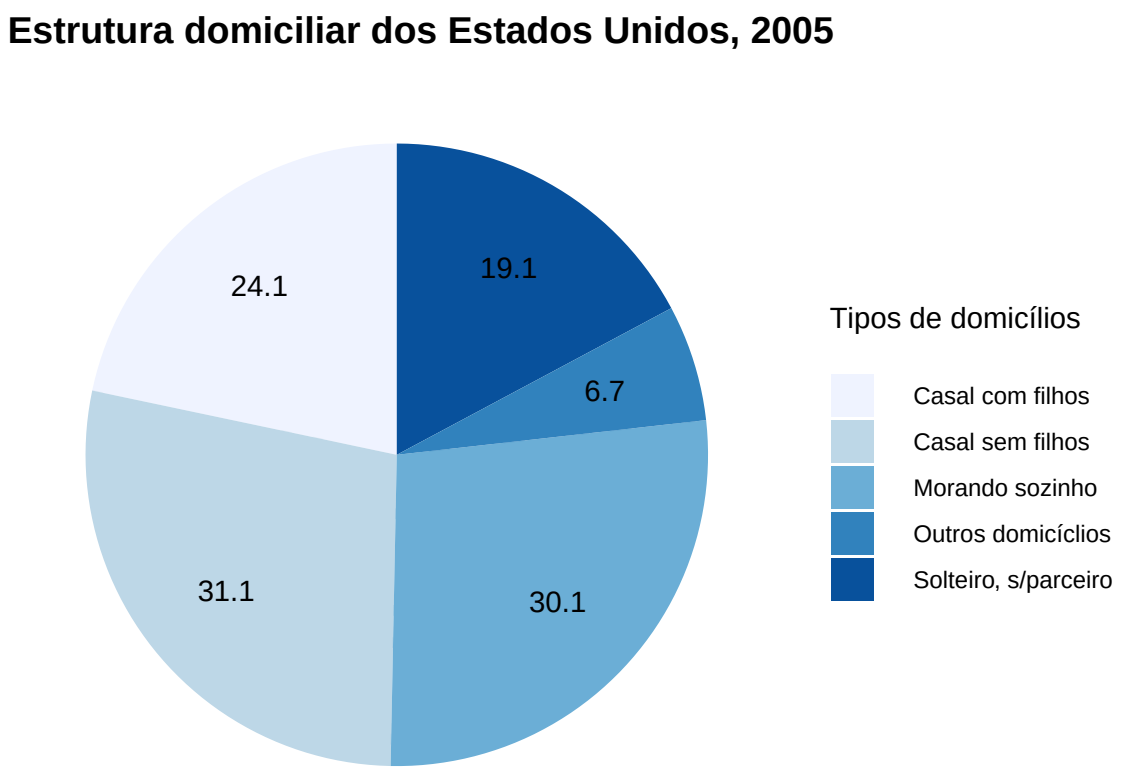


Figure 3.17: Gráfico de setores da estrutura domiciliar dos Estados Unidos

3.6.1.3 Colunas para dados em uma tabela de dupla entrada

```
library(ggplot2)              # Carrega a biblioteca ggplot2

# Dados fornecidos
casal_com_filho_democratas <- 3478
casal_com_filho_republicano <- 2136
casal_sem_filho_democratas <- 2209
casal_sem_filho_republicano <- 2177

# Criar um dataframe com os dados
dados <- data.frame(
  Categoria = c("Com Filhos", "Com Filhos", "Sem Filhos", "Sem Filhos"),
  Partido = c("Democratas", "Republicanos", "Democratas", "Republicanos"),
  Contagem = c(casal_com_filho_democratas, casal_com_filho_republicano,
               casal_sem_filho_democratas, casal_sem_filho_republicano)
)
```

```r
# Criar o gráfico de barras empilhadas
ggplot(dados, aes(x = Categoria, y = Contagem, fill = Partido)) +
  geom_bar(stat = "identity") +
  labs(title = "Contagem de Votos por Categoria e Partido (Censo dos EUA,2005)",
       x = "Categoria",
       y = "Contagem") +
  scale_fill_manual(values = c("Democratas" = "lightgreen", "Republicanos" = "lightblue")) +
  theme_minimal()
```

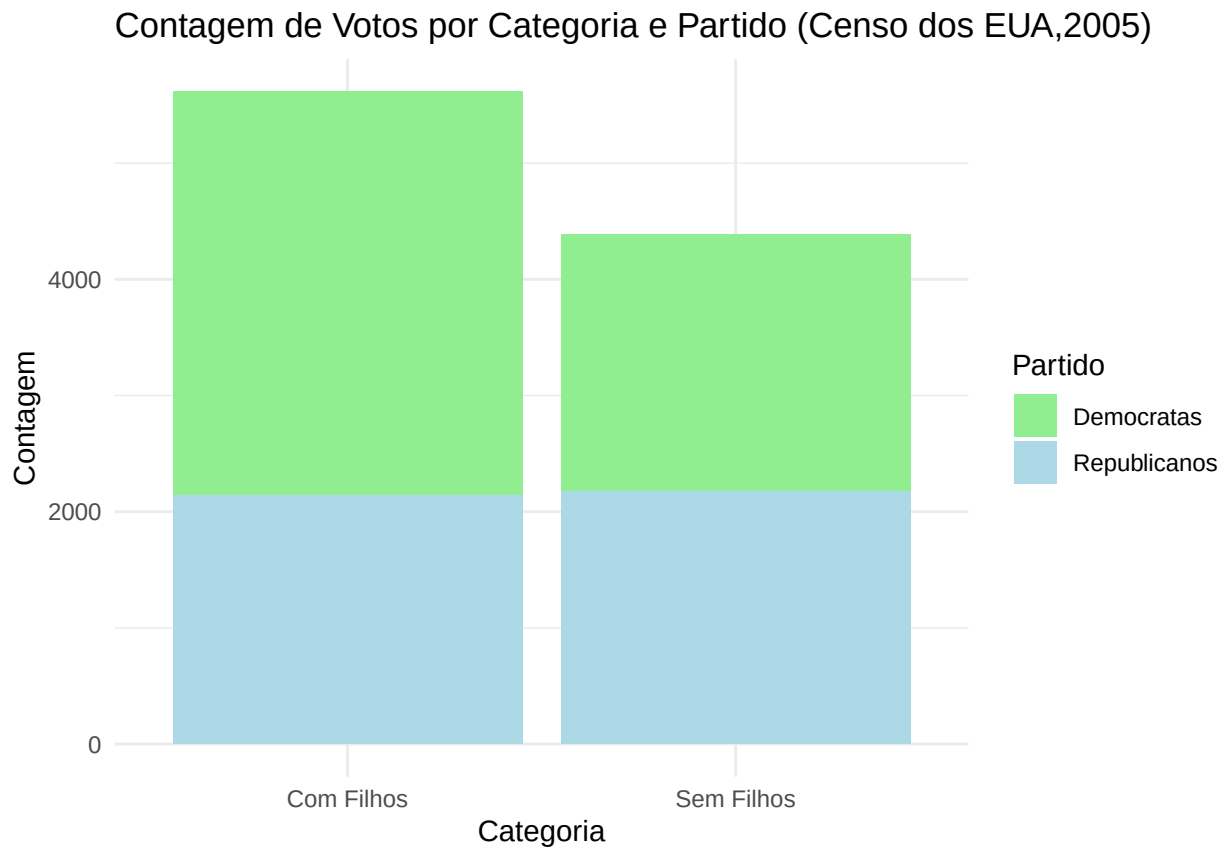


Figure 3.18: Gráfico de barras da estrutura familiar em relação à inclinação partidária nos Estados Unidos

```r
library(ggplot2)              # Carrega a biblioteca ggplot2

# Dados fornecidos
fumantes_filho_bp = 275
fumantes_filho_pn = 2144
n_fumantes_filho_bp = 311
n_fumantes_filho_pn = 6640

# Criar um dataframe com os dados
dados <- data.frame(
  Risco = c("Fumante", "Fumante", "Não fumante", "Não fumante"),
  Peso = c("Baixo peso", "Peso normal", "Baixo peso", "Peso normal"),
```

```
  Contagem = c(fumantes_filho_bp, fumantes_filho_pn,
               n_fumantes_filho_bp, n_fumantes_filho_pn)
)

# Criar o gráfico de barras empilhadas
ggplot(dados, aes(x = Risco, y = Contagem, fill = Peso)) +
  geom_bar(stat = "identity") +
  labs(title = "Peso de recém nascidos em Pelotas (RS, 1982)",
       x = "Exposição ao risco",
       y = "Contagem") +
  scale_fill_manual(values = c("Baixo peso" = "gray", "Peso normal" = "lightgreen")) +
  theme_minimal()
```

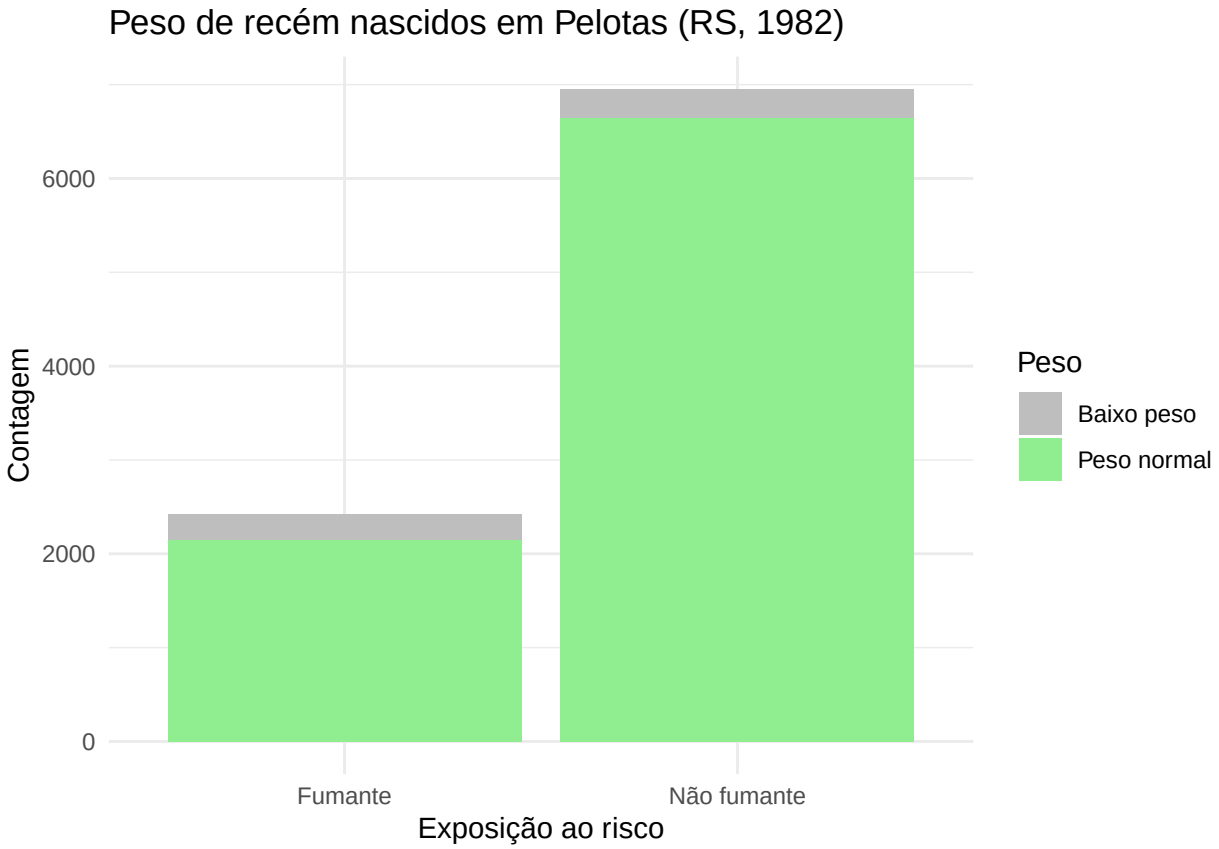


Figure 3.19: Gráfico de barras da exposição ao fator de risco e o efeito

3.6.2 Gráficos para uma variável quantitativa

- ranking: barras;
- parte em relação ao todo: setores;
- dispersão *unidimensional*;
- distribuição: histograma e o *box plot*.

3.6.2.1 Barras

Se modificarmos o diagrama de ramos e folhas dos comprimentos e quantidades observadas, representando cada uma das alturas medidas por um *retângulo* cujas alturas sejam proporcionais à quantidade contada de cada uma dessas alturas teremos um *Gráfico de barras*.

```
tab_alturas=table(alturas)

barplot(tab_alturas,
        main="Valores observados da alturas dos estudantes",
        xlab="Altura (cm)",
        ylab="Quantidade observada (un)",
        ylim=c(0,6),
        col="blue",
        las=0,
        hor="FALSE")
```

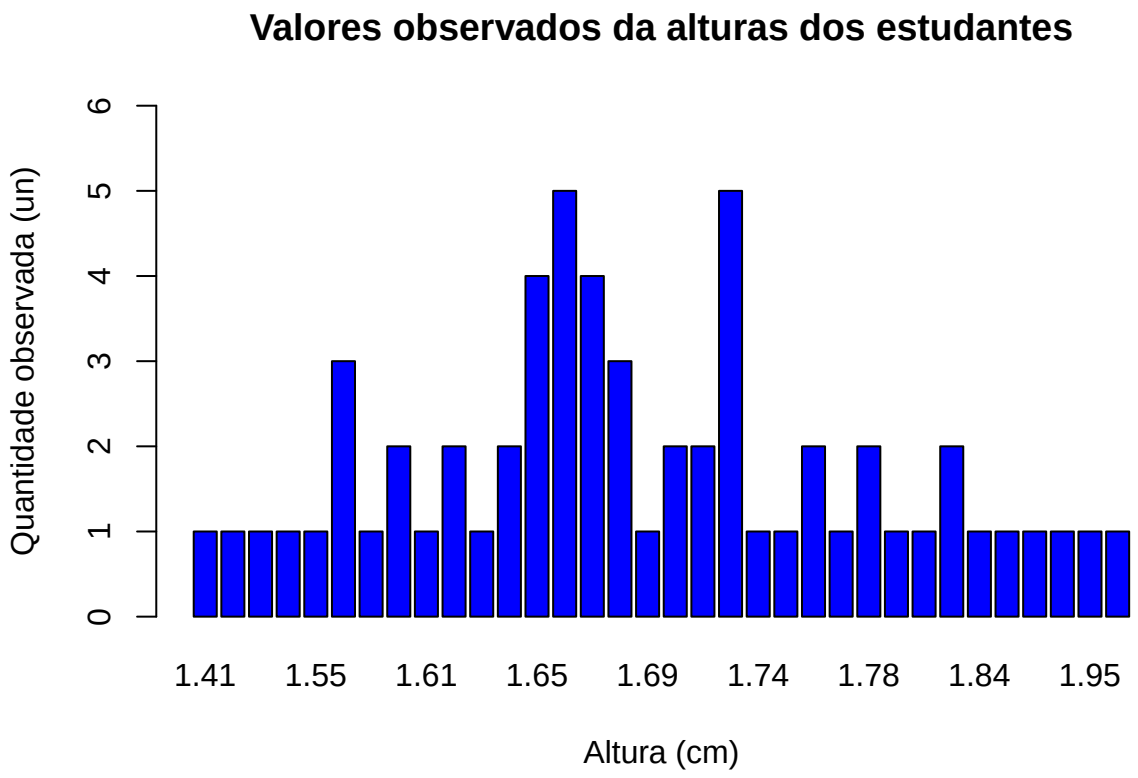


Figure 3.20: Gráfico de barras dos dados brutos: uma barra para cada observação e sua altura expressando o número de observações com esse valor

3.6.2.2 Histograma

Para dados quantitativos, o agrupamento dos valores brutos observados em classes (cada uma com um valor mínimo e máximo fixado) permite a geração de um *Histograma*, um tipo diferente de *Gráfico de barras* onde cada coluna está unida às colunas imediatamente adjacentes (indicando a continuidade de valores das medidas) e sua altura expressa a quantidade de observações contidas nessa classe.

Para as classes estabelecias na seção anterior o histograma das alturas dos estudantes terá esse aspecto:

```
h1=hist(alturas, breaks=seq(1.41 , 2.01 , 0.1),  include.lowest = TRUE, right = FALSE, main=
 ↪  "Histograma das alturas dos estudantes", col="blue",
xlab="Classes de alturas (m)", ylab="Frequência absoluta observada (un)" , cex=0.7,
 ↪  ylim=c(0,30))
text(h1$mids,h1$counts,labels=h1$counts, adj=c(0.5, -0.5))
abline(v=mean(alturas), col="red")
text(mean(alturas)-0.01, 28, "Média=1,69 m", col = "red", srt=90)
abline(v=median(alturas), col="darkgreen")
text(median(alturas)-0.01, 27.2, "Mediana=1,675 m", col = "darkgreen", srt=90)
abline(v=Modes(alturas), col="darkgrey")
text(Modes(alturas)+c(-0.01, -0.01), 27, c("Moda=1,66","Moda=1,73"), col = "darkgray",
 ↪  srt=90)
```

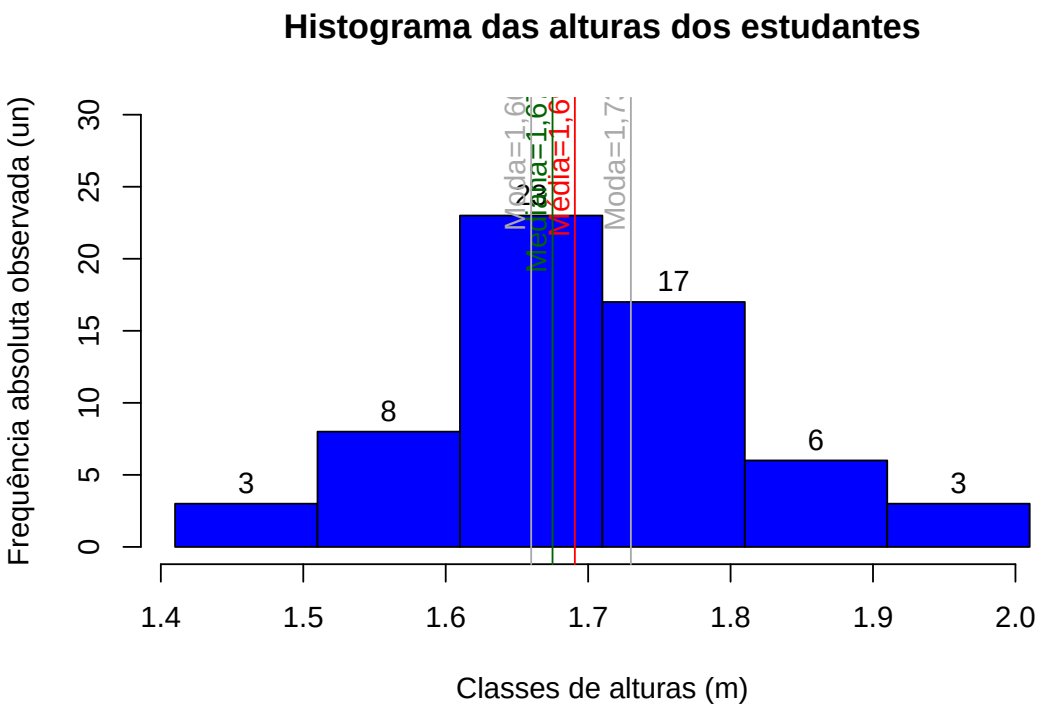


Figure 3.21: Histograma das alturas dos estudantes com as posições da média, moda e mediana

Um *histograma* é a representação gráfica de uma *tabela de distribuição de frequências* em colunas (retângulos).

A base de cada retângulo representa o intervalo de cada classe e a altura, a quantidade ou a *frequência absoluta* com que aquele valor da classe ocorre no conjunto de dados.

O termo *histograma* foi cunhado por Karl Pearson (c. 1891) e vem da composição em grego de *istos* (mastro) com *gramma* (escrita), convertida em inglês para *historical diagram: histogram*.

Como elemento gráfico, seu uso é anterior à sua denominação (maiores detalhes em: (link)).

Num *histograma de densidade*, a altura de cada retângulo representa uma *densidade* relacionada à *frequência relativa* no intervalo de cada classe.

```
h2=hist(alturas,breaks=seq(1.41 , 2.01 , 0.10),  include.lowest = TRUE, right = FALSE, main=
 ↪  "Histograma das densidades das alturas dos estudantes", col="blue",
xlab="Classes de alturas (m)", ylab="Densidade da freq. relativa", prob="TRUE", ylim=c(0,5))
text(h2$mids,h2$density,labels=round(h2$density, 5), adj=c(0.5, -0.5), cex=0.7)
lines(density(alturas), col="red")
lines(density(alturas, adjust=2), col="orange")
```

Como a área de cada retângulo é igual à proporção (fr_i) da classe (i) a soma de todas essas áreas será igual a 1:

```
(0.10*0.5)+(0.10*1.333)+(0.10*3.833)+(0.10*2.833)+(0.10*1)+(0.10*0.50)
```

```
## [1] 0.9999
```

Uma aproximação para a **área sob a curva da Função de Densidade** pode ser soma das áreas de um dos retângulo com:

- Base $= \Delta_i$; e,\
- Altura $= \frac{fr_i}{\Delta_i}$.

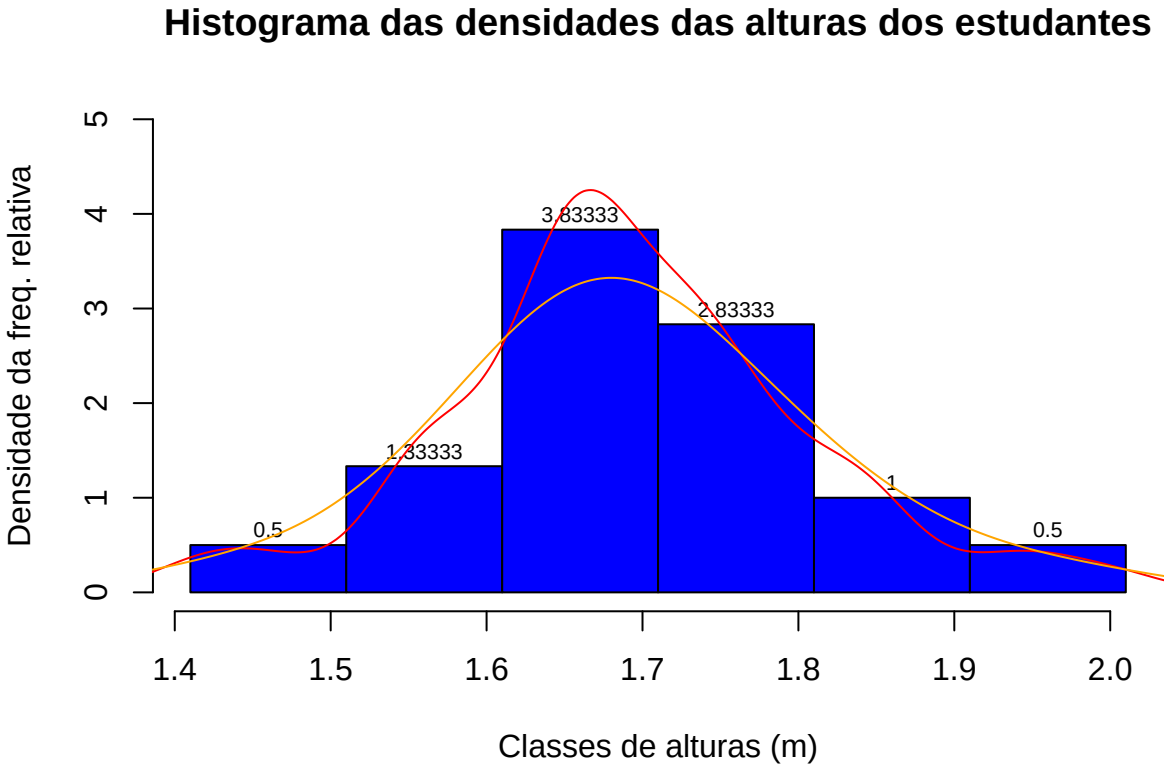


Figure 3.22: A linha vermelha é uma aproximação da Função de Densidade da frequência relativa de observação (a linha preta é a curva da função densidade de uma distribuição Normal com média e variâncias dadas pelos dados

A **área da curva da Função de Densidade delimitada por dois valores quaisquer** é uma analogia para a probabilidade de que um determinado valor de altura de um estudante (amostrado aleatoriamente dentre todos os 60 estudantes) esteja contida nesse intervalo.

Equivale dizer que, amostrando-se aleatoriamente um estudante dentre todos os 60 alunos, a probabilidade de que a altura desse estudante estaje contida entre os valores mínimo e máximo da amostra é, **naturalmente**, igual a 1 (100%)

3.6.2.3 Setores

Em um *Gráfico de setores* a representação das quantidades está associada a uma fração do comprimento de um círculo. Para sua confecção considera-se a proporção da quantidade observada específica da quantidade total de dados, expressa na forma de fração do ângulo de um setor circular em relação ao ângulo interno total de um círculo (360°).

```
library(scales)
library(ggplot2)

alturas_classes=data.frame(
  group = c("1,41-1,51",
            "1,51-1,61",
            "1,61-1,71",
            "1,71-1,81",
            "1,81-1,91",
            "1,91-2,01"),
  value = c(3,8,23,17,6,3))

blank_theme=theme_minimal()+
  theme(
    axis.title.x = element_blank(),
    axis.title.y = element_blank(),
    panel.border = element_blank(),
    panel.grid=element_blank(),
    axis.ticks = element_blank(),
    plot.title=element_text(size=14, face="bold")
  )

ggplot(alturas_classes, aes(x="", y=value, fill=group)) +
  blank_theme +
  scale_fill_brewer("Blues")+
  ggtitle("Alturas dos estudantes") +
  theme(axis.text.x=element_blank()) +
  geom_bar(width = 1, stat = "identity") +
  coord_polar("y", start=0) +
  geom_text(aes(y = value/2 + c(0, cumsum(value)[-length(value)]),
                label = percent(value/60 )), size=5)+
  guides(fill = guide_legend("Classes de valores (m)",
                             label.position = "right",
                             title.position = "top", title.vjust = 1))
```

3.6.2.4 Box-plot (gráfico de caixas)

O gráfico **Box-plot** (*box and whisker plot*): esse gráfico apresenta de modo conjunto, informações sobre a posição, dispersão, assimetria e dados discrepantes do conjunto analisado:

- a mediana (Q_2);
- os valores mínimo: x_1 e máximo: x_n (dados ordenados);
- o 1° e 3° quartis;
- a dispersão (intervalo interquartílico: $d_q = (Q_3 - Q_1)$);
- os limites superior: $LS = Q_3 + 1,50.d_q$, e inferior: $LI = Q_1 - 1,50.d_q$ (*bigodes*);
- os valores mínimo e máximo observados (caso não existam valores superiores aos limites LI e LS); ou

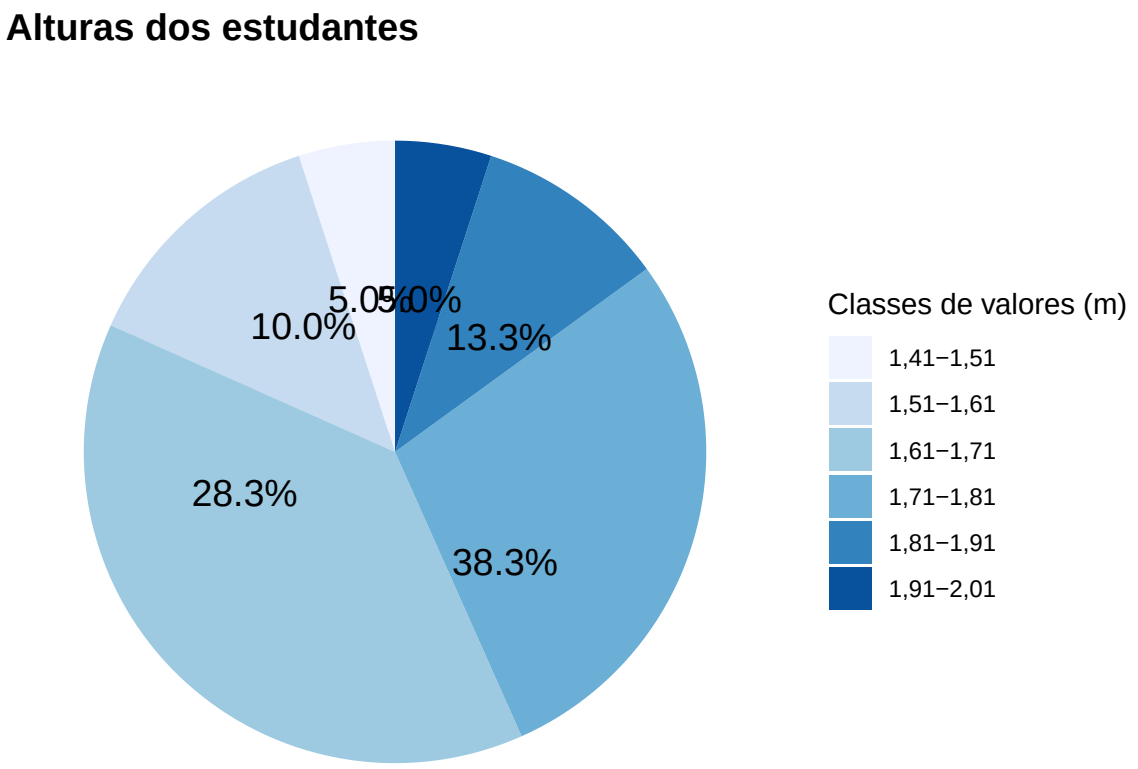


Figure 3.23: Gráfico de setores das alturas dos estudantes

- as observações mais extremas, situadas fora dos limites LI e LS (que **podem ou não** ser *outliers* , dados atípicos).

```
min=min(alturas)
q1=1.635
q2=1.675
med=mean(alturas)
q3=1.755
max=max(alturas)
iq=q3-q1
ls=q3+1.5*iq
li=q1-1.5*iq
head(sort(alturas,TRUE)) #2.00 1.95 >>1.93<< 1.86 1.85 1.84
```

```
## [1] 2.00 1.95 1.93 1.86 1.85 1.84
```

```
tail(sort(alturas,TRUE)) # 1.56 1.55 1.54 1.47 1.44 >>1.41<<
```

```
## [1] 1.56 1.55 1.54 1.47 1.44 1.41
```

```
boxplot(alturas,
        main="Boxplot do conjunto de dados de alturas",
        ylim=c(1.2, 2.1))
```

```
lines( y=c(1.47, 1.47), x=c(0.6,1), col="blue")
text(x=0.60, y=1.47-0.05, "Delimitador inferior do bigode=1,47", col = "blue", srt=0)

lines( y=c(1.93,1.93), x=c(0.6,1), col="blue")
text(x=0.60, y=1.93+0.05, "Delimitador superior do bigode=1,93", col = "blue", srt=0)

lines(y=c(med, med),  x=c(1,1.4), col="blue")
text(x=1.4 , y= med+0.05 , "Média=1,6907", col = "blue", srt=0)

lines(y=c(q1, q1), x=c(1, 1.4), col="blue")
text(x=1.4, y=q1 -0.05, "Primeiro quartil: Q1=1,635", col = "blue", srt=0)

lines(y=c(q2, q2),  x=c(0.6,1), col="blue")
text(x=0.60 , y= q2 - 0.05, "Mediana: Q2=1,675", col = "blue", srt=0)

lines(y=c(q3, q3), x=c(1, 1.4), col="blue")
text(x= 1.4 , y=q3 + 0.05, "Terceiro quartil: Q3=1,755", col = "blue", srt=0)

lines(y=c(li,li) , x=c(1.01,1.4) , col="red", lty=2)
text(x=1.2, y=q1-1.5*iq-0.05 , "Limite inferior teórico: LI=1,455) ", col = "red", srt=0)

lines(y=c(ls,ls) , x=c(1.01,1.4) , col="red", lty=2)
text(x=1.2, y=q3+1.5*iq +0.05 , "Limite superior teórico: LS=1,935", col = "red", srt=0)

points (y=1.47, x=1 , col="green", cex=1, lwd=5)
text(x=1, y=1.47-0.05 , "Última observação dentro do LI: h=1,47 ", col = "green", srt=0)

points (y=1.93, x=1 , col="green", cex=1, lwd=5)
text(x=1, y=1.93+0.05 , "Última observação dentro do LS: h=1,93 ", col = "green", srt=0)
```

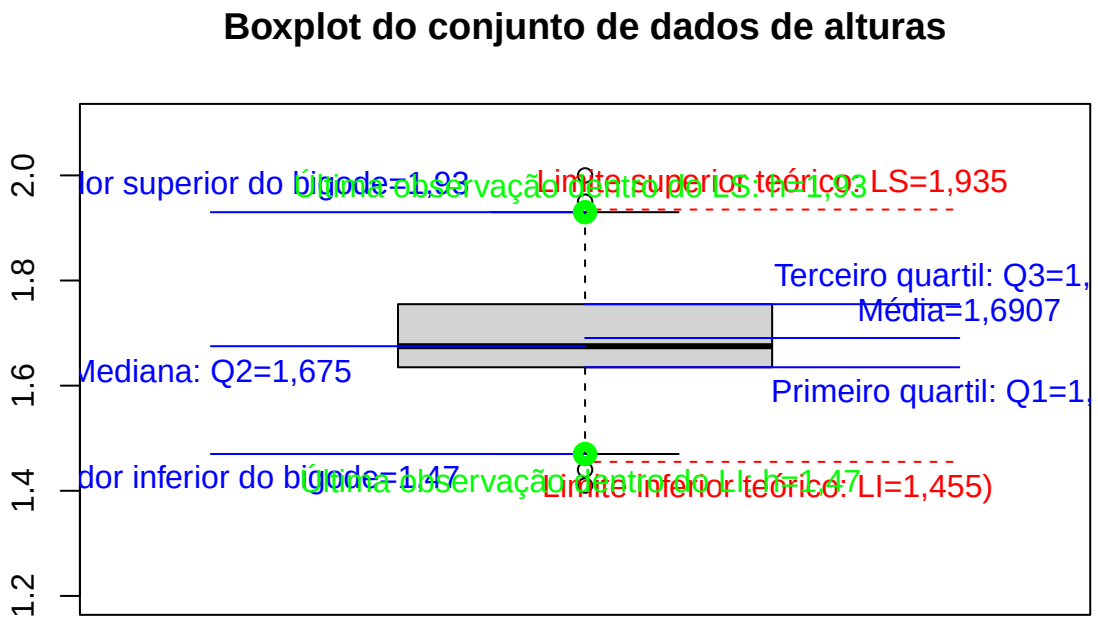


Figure 3.24: Box-plot de um rol de valores com Distribuição Normal (média 20 e variância 5

Módulo 4

Introdução ao cálculo de probabilidades

Seria bom começar o capítulo sobre teoria das probabilidades, dando uma definição concisa, simples e intuitiva, todavia formalmente rigorosa. Infelizmente, isto não será possível.

Se por um lado, uma definição rigorosa de probabilidade requer um aparato matemático sofisticado e é bem pouco intuitiva; por outro lado as definições simples e frequentemente encontradas são tautológicas como:

> Probabilidade é um *número* que quantifica, uma *medida da informação* disponível sobre a *possibilidade* de ocorrência de um determinado *evento* quando ainda não se sabe se ele ocorrerá ou não.

Essa definição é "circular'' (*definiendum* = *definien*) uma vez que se vale de um sinônimo de probabilidade: possibilidade, chance, esperança, viabilidade, exequibilidade, expectativa, ..., para se auto definir.

Todavia ela nos introduz **dois conceitos** que iremos usar como ponto de partida:

1. probabilidade refere-se a *experimentos aleatórios* e seus *eventos*;
2. que probabilidade é um *número*.

Após a exposição de conceitos essenciais relacionados ao cálculo de probabilidades, serão apresentados o *conceito clássico* e, ao final será abordado o conceito de probabilidade como uma *função matemática* alicerçada em alguns postulados (*conceito axiomático*).

4.1 Conceitos essenciais

4.1.1 Experimentos determinísticos e experimentos probabilísticos (aleatórios)

Aleatório provem do latim: *aleatorium*: fato cujo desfecho depende de um acontecimento futuro e incerto, resultado da sorte ou acaso, acidental.

Ao contrário de um **experimento determinístico**, cujo resultado pode ser previamente determinado (como a reação de dois átomos de H com um átomo de O ou a distância percorrida - no vácuo sob velocidade constante e sem atrito - por um objeto $S = V \times t$), o conceito de experimento aleatório é o que estabelece que seu resultado **não pode ser previsto com certeza**.

Os resultados observados **apresentam variações** mesmo quando esses experimentos são repetidos indefinidamente e sob as mesmas condições; todavia, é possível estabelecer um conjunto cujos elementos compõem todos os possíveis resultados.

4.1.2 O espaço amostral como um conjunto

A primeira coisa que fazemos quando começamos a pensar sobre a probabilidade de ocorrência de um certo resultado em um *experimento aleatório* é tentar listar todos os resultados com possibilidade de ocorrência.

Esses resultados são os elementos de um conjunto a que denominamos de *espaço amostral* que, usualmente, é representado pela letra grega maiúscula Ω.

Para que Ω seja considerado o *espaço amostral* desse experimento aleatório ele precisa apresentar duas propriedades:

1. *apenas um* de seus elementos pode ocorrer cada vez que se realizar o *experimento aleatório*; e,
2. *ao menos um* dos possíveis resultados deverá ocorrer sempre que realizarmos o *experimento aleatório*.

Tais propriedades são equivalentes a se dizer que os elementos do espaço amostral (os *resultados* listados com possibilidade de se verificar ao se realizar o *experimento aleatório*) são *mutuamente exclusivos e exaustivos*.

Toamando como exemplo clássico de experimento aleatório o *lançamento de uma moeda* veremos que, embora não consigamos determinar com certeza que face irá ficar voltada para cima, os resultados possíveis limitam-se ao seu *espaço amostral* representado por

$$\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$$

.

Outro exemplo igualmente clássico é o do *lançamento de um dado* e, mais uma vez, mesmo que seja impossível de se determinar o resultado, as possibilidades limitam-se ao seu *espaço amostral* representado por

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Um espaço amostral consiste então da *enumeração* (finita ou infinita) de todos os *possíveis resultados* de serem obtidos em um experimento aleatório.

Cada um dos possíveis resultados de um experimento aleatório é chamado de um *elemento* desse espaço amostral. Assim, para o espaço amostral Ω, seus elementos serão representados por letras gregas minúsculas ω_n

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_n, ...\}$$

4.1.3 Evento

Denomina-se como *evento de interesse* ao *subconjunto* finito do *espaço amostral* composto por *um ou mais* de seus elementos que *satisfazem* (*atendem*) ao *enunciado* definido no experimento aleatório proposto.

A expressão *evento de interesse* (*sucesso*) define, para o cálculo de probabilidades, a ocorrência do resultado *desejado* na realização do experimento aleatório. Frequentemente (não é regra) os *eventos de interesse* são representados com letras romanas maiúsculas e, às vezes, alguma explicação em conjunto ($E(...)$)

Admita, como exemplo, um *experimento aleatório* que consiste em se lançar um dado uma vez. Um *evento de interesse* ($E(2)$) pode ser definido sobre esse *experimento aleatório* como sendo obter o número *2* .

4.1.3.1 Eventos simples e eventos compostos

O evento de interesse ($E(2)$) definido no experimento aleatório anterior (obter o número *2*) é formado por apenas um elemento do espaço amostral. Eventos formados por apenas um elemento do espaço amostral são denominados de *evento simples*.

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} E(2) = \{2\}$$

Admita agora o mesmo *experimento aleatório* todavia definindo como *evento de interesse* (Eobter-se um número *par*. Um *evento de interesse* assim definido é um evento composto uma vez que é formado por mais de um elemento do espaço amostral:

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} E(par) = \{2; 4; 6\}$$

Outro exemplo, a partir de um *experimento aleatótrio* que consiste em se lançar uma moeda *duas* vezes, cujo *espaço amostral* é representado por um conjunto composto por *quatro* elementos

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

em que:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= (\text{Cara}, \text{Coroa}) \\
\omega_2 &= (\text{Coroa}, \text{Cara}) \\
\omega_3 &= (\text{Cara}, \text{Cara}) \\
\omega_4 &= (\text{Coroa}, \text{Coroa})
\end{aligned}$$

Se definirmos como *evento de interesse* na realização desse experimento aleatório obter-se $E = \{(Cara, Cara)\}$, o evento E será um *evento simples* pois é formado por apenas *um* elemento do espaço amostral.

Se, por outro lado, definimos como *sucesso* obter-se $E_1 = \{(Cara, Coroa)$ ou $(Coroa, Cara)\}$, o evento E_1 será um *evento composto* pois é formado por *dois* elementos do espaço amostral.

Se codificarmos *Cara=1* e *Coroa=0*, podemos representar num plano XY o espaço amostral Ω desse experimento aleatório e o *evento de sucesso* E_1

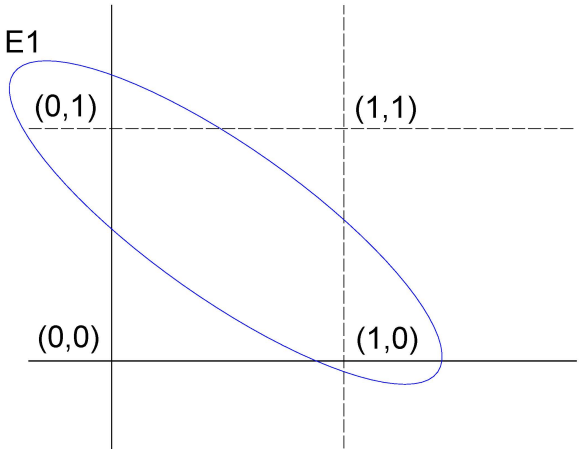


Figure 4.1: Representação gráfico do espaço amostral do experimento aleatório e do evento de interesse definido

4.1.3.2 Eventos certos e eventos impossíveis

Um *evento de interesse* G definido sobre o espaço amostral Ω tal que $G = \Omega$ expressa que *qualquer* um dos elementos de Ω, isto equivale a dizer que qualquer um dos possíveis resutados, atende ao evento G.

Um *evento de intersse* assim definido certamente ocorrerá e por essa razão eventos assim estabelecidos são chamados de *eventos certos*.

Se agora definirmos em *evento de interesse* I aquele com um resultado que não pertencente a *Omega* (o espaço amostral, i.e., todos os possíveis resutados), como, por exemplo, ocorrer o número 7 no lançamento de um dado, esse evento será impossível de ocorrer. Eventos assim definidos são chamados de *eventos impossíveis*.

4.1.3.3 Eventos equiprováveis e não equiprováveis

Se *todos* os elementos que compõem um espaço amostral finito de um experimento aleatório possuem a *mesma* probabilidade de ocorrência é dito que o *espaço amostral* desse *experimento aleatório* tem elementos *equiprováveis* (com a mesma probabilidade).

Um exemplo é o *experimento aleatório* de se lançar um dado e anotar o valor numérico de sua face todos os possíveis resultados apresentam a mesma probabilidade: $\frac{1}{6}$.

Admita agora um outro *experimento aleatório* estabelecido como a *soma* dos valores das faces de dois dados (ou um dado laçado duas vezes) aleatoriamente lançados. O espaço amostral desse experimento aleatório será um conjunto formado por 11 elementos.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}, \omega_{11}\}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 2 \\
\omega_2 &= 3 \\
\omega_3 &= 4 \\
\omega_4 &= 5 \\
\omega_5 &= 6 \\
\omega_6 &= 7 \\
\omega_7 &= 8 \\
\omega_8 &= 9 \\
\omega_9 &= 10 \\
\omega_{10} &= 11 \\
\omega_{11} &= 12
\end{aligned}$$

Cada um dos elementos que compõem o espaço amostral (a soma dos valores numéricos das faces no lançamento de um dado por duas vezes) poderá resultar de diferentes combinações de valores. A Tabela 4.1 apresenta todas as combinações possíveis de serem obtidas, bem como as proporções em relação ao total para cada elemento do espaço amostral.

Table 4.1: Quadro dos possíveis resultados de um experimento aleatório: somas dos valores numéricos das faces no lançamento de um dado por duas vezes

Soma	Possíveis combinações de resultados nos lançamentos	Frequência (n_i)	Proporção (f_i)
	(primeiro,segundo)		
2	(1,1)	1	$\frac{1}{36}$
3	(1,2); (2,1)	2	$\frac{2}{36}$
4	(1,3); (2,2); (3,1)	3	$\frac{3}{36}$
5	(1,4); (2,3); (3,2); (4,1)	4	$\frac{4}{36}$
6	(1,5); (2,4); (3,3); (4,2); (5,1)	5	$\frac{5}{36}$
7	(1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1)	6	$\frac{6}{36}$
8	(2,6); (3,5); (4,4); (5,3); (6,2)	5	$\frac{5}{36}$
9	(3,6); (4,5); (5,4); (6,3)	4	$\frac{4}{36}$
10	(4,6); (5,5); (6,4)	3	$\frac{3}{36}$
11	(5,6); (6, 5)	2	$\frac{2}{36}$
12	(6,6)	1	$\frac{1}{36}$
Totais		36	$\frac{1}{36}$

As probabilidades de ocorrência de cada um os elementos desse espaço amostral são doferentes e, por essa razão é dito que o *espaço amostral* desse *experimento aleatório* tem elementos *não equiprováveis*.

Um significativo resultado é que a soma das probabilidades associadas a cada um dos elementos do espaço amostral sempre será um (1), antecipando um dos postulados do conceito axiomático de probabilidade.

4.1.3.4 Eventos independentes

Quando a probabilidade de ocorrência de um *evento de interesse* em um determinado *experimento aleatório* não é alterada pelo resultado *prévio* de outro diz-se que esses dois eventos são *independentes*. Caso contrário são ditos *dependentes* ou *condicionados*.

Mais adiante esse conceito será introduzido de um modo mais detalhado.

4.1.3.5 Eventos mutuamente exclusivos

Dois eventos que *nunca* poderão ocorrer simultaneamente são ditos *mutuamente exclusivos.* No experimento do lançamento da moeda por uma vez, nunca observaremos, simultaneamente, dois eventos como $E = \{(Cara)\}$ **e** $F = \{(Coroa)\}$.

Um evento assim definido teria sua interseção vazia

$$G = (E \cap F) = \emptyset$$

e, por essa razão, sua probabilidade será $P(G) = P(E \cap F) = 0$.

4.1.3.6 Eventos complementares

Definido um *evento de interesse* qualquer pode-se observar apenas dois resultados:

1. *ocorrer*;
2. *não ocorrer* o sucesso.

Ou seja, um ou outro deverá forçosamente ocorrer.

Chama-se de *evento complementar* (E^c ou $\bar{E}$) a um evento (E) e sua probabilidade de sucesso será:

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

Se a probabilidade de sucesso de que ele ocorra for $P(E) = p$ e a de que ele não ocorra for $P(E^c = q)$ vê-se que a soma dessas quantidades deverá ser $p + q = 1$, novamente antecipando um dos postulados do conceito axiomático de probabilidade.

Desse modo temos diferentes tipos e relação entre *eventos de interesse* :

1. *simples* ou *composto*;
2. *certo* ou *impossível*;
3. *dependentes* ou *independentes* ;

4. *mutuamente exclusivos* ;
5. *complementares*;

4.1.4 Diagramas de Venn para representar o espaço amostral e eventos de interesse

Em muitos dos problemas de probabilidade, o *evento de interesse* pode se definido como *associações* de *dois* ou *mais* eventos formados, por sua vez, por um ou mais elementos do espaço amostral do experimento aleatório. Uniões, interseções e complementos são algumas dessas associações que, doravante, serão muito utilizados.

Por essa razão, a representação do espaço amostral e esses eventos por meio de Diagramas de Venn pode ajudar a compreensão de um problema de cálculo probabilidade

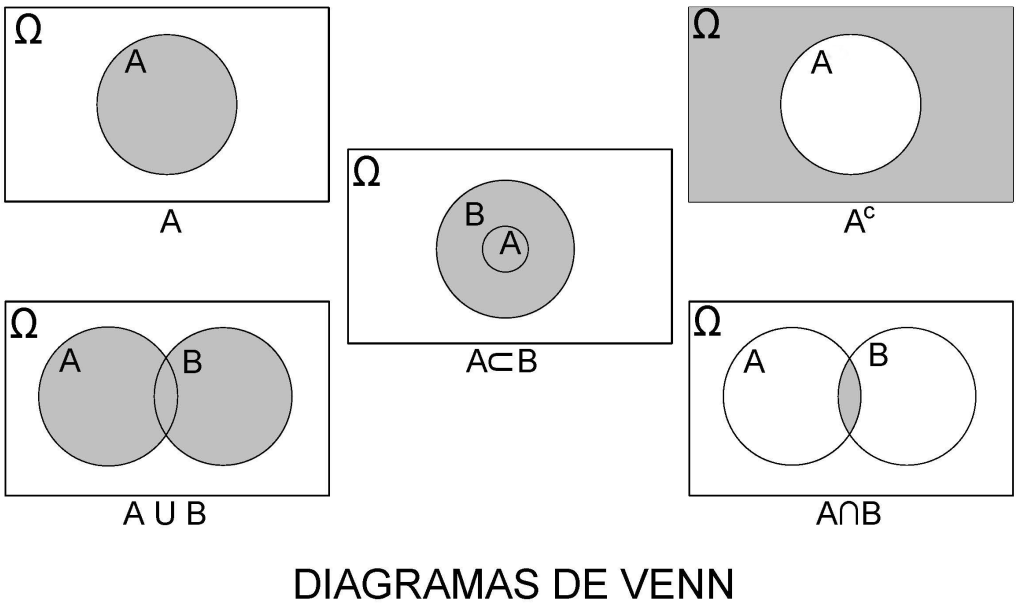


Figure 4.2: Diagramas de Venn

4.1.4.0.1 União $A \cup B$

Sejam A e B dois *eventos de interesse* definidos sobre o *espaço amostral* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (lançamento de um dado) tais que $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$.

Um *evento de interesse* E expresso como a *união* desses dois outros, representado por $E = (A \cup B)$, será o subconjunto do espaço amostral Ω que contém os elementos que pertençam **a** A**, ou a** B **ou a ambos**.

Desse modo, $E = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ e o Diagrama de Venn correspondente será:

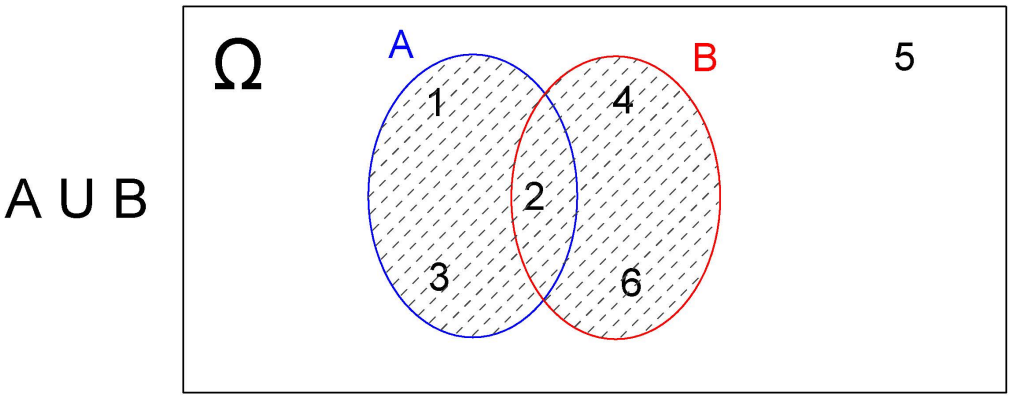


Figure 4.3: União: $A \cup B$

Na realização desse *experimento aleatório* (lançar um dado) o *evento de ineteresse* E ocorrerá quando qualquer um dos resultados for um elemento pertencente a A, ou a B ou a *ambos*.

4.1.4.0.2 Interseção $A \cap B$

Um *evento de interresse* E definido como a *interseção* dos eventos A e B anteriormente definodos, representado por $E = (A \cap B)$, será o subconjunto do espaço amostral Ω que contém todos os elementos que pertençam **a ambos os eventos A e B simultaneamente**.

Desse modo, $E = (A \cap B) = \{2\}$ e o Diagrama de Venn correspondente será:

Na realização desse *experimento aleatório* (lançar um dado) o *evento de interesse* E ocorrerá apenas quando o resultado for um elemento simultaneamente pertencente a A e B .

Quando o evento de interesse é definido pela interseção de dois outros, todavia esssa interseção é vazia, representa-se E como

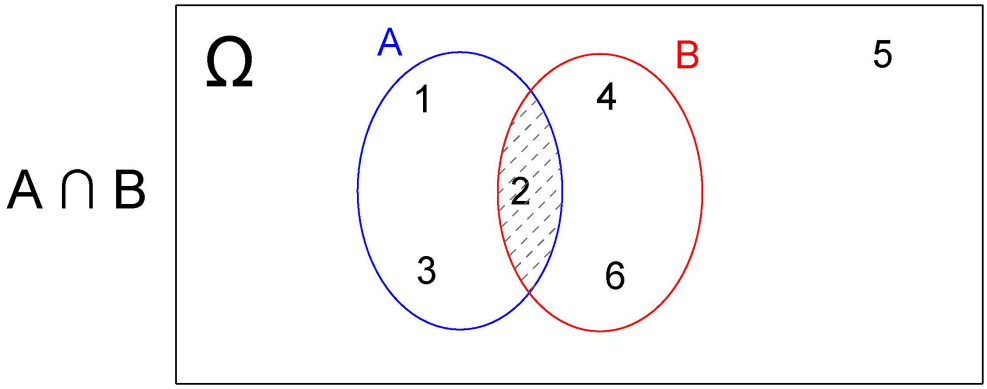


Figure 4.4: Interseção: $A \cap B$

$$E(A \cap B) = \emptyset$$

4.1.4.0.3 Complemmento A^c

Um *evento de intersse* pode também ser definido como o *complemento* de outros como, por exemplo, de A, sendo representado representado por $E = (A^c)$ (ou $E = (\overline{A})$).

Desse modo, $E = (A^c) = \{4, 5, 6\}$ e o Diagrama de Venn correspondente será:

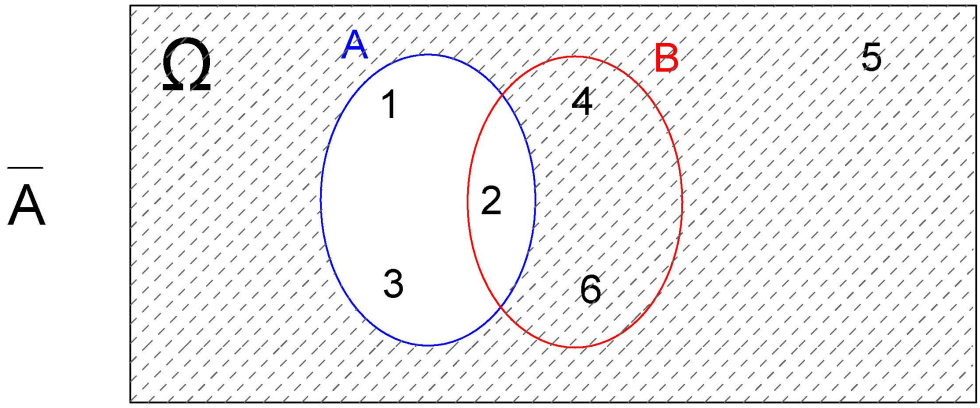


Figure 4.5: Complementar A^c

De modo análogo, para $E = (B^c) = \{1, 3, 5\}$ e o Diagrama de Venn correspondente será :

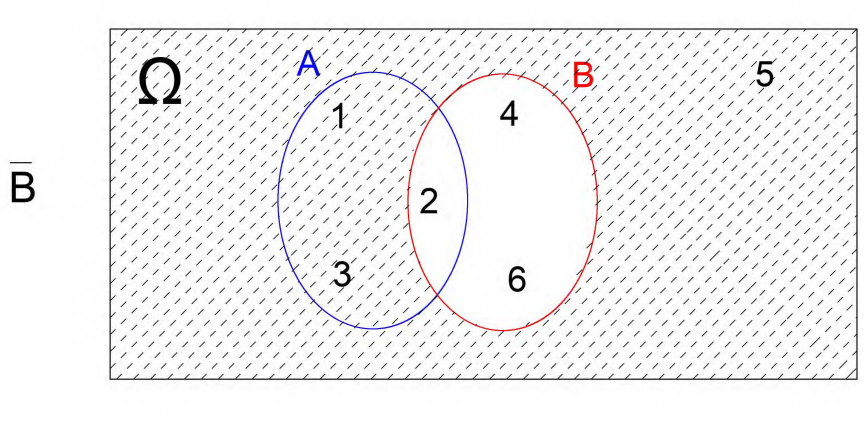


Figure 4.6: Complementar de B

4.2 Probabilidade

4.2.1 Introdução histórica

De acordo com alguns historiadores, a Teoria das probabilidades teve início como um ramo da Matemática com as célebres cartas entre Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1607-1665), após uma consulta feita por um nobre cavaleiro (Antoine Gombaud, o *Chevalier de Méré*) a Pascal, relacionadas a como repartir um montante apostado em um jogo: quatro lançamentos de um dado e a probabilidade de obter-se ao menos um seis. Todavia o estudo não formal desse problema remonta a alguns séculos atrás (vide Girolano Cardano).

Probabilidade tem sido definida como sendo o estudo da frequência de aparição de um fenômeno em relação a todas as suas possíveis alternativas; ou seja, seu objeto é o estudo das possibilidades dos fenômenos aleatórios. O estudo das probabilidades possui, digamos assim, duas raízes históricas:

1- a solução de problemas relacionados a jogos; e,
2- a análise estatística de dados atuariais.

Figure 4.7: Astralagus (um dos ossos que compõem o calcanhar, usado no Egito antigo como um dado rudimentar)

4.2.2 Conceito clássico ou *a priori*

Sob uma visão intuitiva, a probabilidade como uma medida da informação que temos sobre a possibilidade de ocorrência de um evento aleatório, pode ser definida como a medida numérica expressa em termos relativos (percentuais), obtida pela razão (proporção) entre o número de eventos favoráveis (sucessos) pelo número total de eventos prováveis no experimento (espaço amostral).

Esse conceito de probabilidade é denominado *clássico* ou *a priori*, baseado em um conhecimento prévio ou uma crença subjetiva sobre a probabilidade de um evento ocorrer.

Por exemplo, um jogador de cartas pode ter uma crença a priori de que a probabilidade de uma carta ser um ás é de 1 em 13, independentemente do número de baralhos no jogo

A distribuição de frequências é um instrumento importante para a análise da variabilidade de experimentos aleatórios e, em particular, as frequências relativas são estimativas das probabilidades.

$$P(E) = \frac{\text{número de resultados de interesse (sucessos)}}{\text{número total de resultados possíveis no espaço amostral}}$$

Com o estabelecimento de suposições adequadas, um modelo teórico de probabilidade pode ser estabelecido sem a observação *a priori* dos resultados de experimento aleatório, reproduzindo de modo razoável a distribuição das frequências quando o experimento é diretamente observado.

Consideremos o exemplo do experimento que consiste em se lançar um dado e observar o valor numérico de sua face. As suposições que deveriam ser estabelecidas *a priori* são:

- só pode ocorrer uma das seis faces; e,
- o dado utilizado não possui viés algum (não favorece face alguma).

Como todos os N resultados do espaço amostral apresentam uma **mesma probabilidade** de ocorrência, então a proporção teórica de ocorrência de qualquer um desse resultados poderá ser apresentado na forma vista na na forma vista na Tabela 4.2.

$$P(E) = \frac{1}{N}$$

Table 4.2: Distribuição das proporções teóricas do um experimento aleatório: lançamento de um dado

Face	1	2	3	4	5	6	Total
Proporção teórica	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Sendo equiprováveis todos os elementos do espaço amostral, todos terão a mesma probabilidade de ocorrência que será:

$$\begin{aligned} P(E) =& \frac{1}{N} \\ =& \frac{1}{6} \\ =& \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Por essa razão sabe-se, *a priori* a probabilidade de ocorrência de qualquer evento ao se realizar esse tipo de experimento aleatório uma única vez.

4.2.3 Conceito frequentista ou *a posteriori*

Todavia, se realizarmos o experimento aleatório anterior apenas algumas, tal regularidade poderá não ser comprovada: as frequências observadas (as quantidades obtidas para cada um dos valores numéricos das faces) apresentarão uma **grande irregularidade** diferindo das frequência teóricas definidas.

Observa-se que os resultados das frequências observadas irá se estabilizar, aproximando-se das frequências teóricas, à medida que se repete esse experimento um número suficientemente grande de vezes.

A definição frequencial (*a posteriori*):

1- refere-se à probabilidade empírica observada *a posteriori*; 2- tem por objetivo estabelecer um modelo adequado à interpretação de alguns tipos de experimentos aleatórios; e, 3- é a base para se formular um modelo teórico de distribuição de probabilidades como os que serão abordados mais adiante.

Ao se repetir o experimento aleatório um grande número de vezes (n tendendo a infinitas vezes), a quantidade de vezes que um determinado resultado foi verificado dividida por o número de repetições realizadas (n) irá se aproximar de sua proporção teórica.

É o que se denomina como *regularidade estatística dos resultados* por essa propriedade não mais se necessita que os eventos sejam *equiprováveis*.

$$P\left(E\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{F(E)}{n}$$

onde:

- $P(E)$ é a probabilidade de ocorrência do evento E;

- $F(E)$ é a frequência observada do evento E (o número de vezes que ele ocorre em n repetições); e,
- n é o número de repetições do experimento.

```r
library(ggplot2)

lanca_dado <- function(numero_de_lancamentos) {
  # Gere os lançamentos do dado
  lancamentos <- sample(1:6, numero_de_lancamentos, replace = TRUE)

  # Crie um data frame com os resultados
  dados <- data.frame(Face = lancamentos)

  # Contagem das ocorrências de cada face
  contagem <- table(dados$Face)

  # Crie um gráfico de barras com o número de lançamentos no título
  grafico <- ggplot(data = data.frame(Face = names(contagem), Contagem =
↪  as.numeric(contagem)),
                    aes(x = Face, y = Contagem)) +
    geom_bar(stat = "identity") +
    labs(x = "Face do Dado", y = "Contagem") +
    ggtitle(paste("Lançamento de um Dado por:", numero_de_lancamentos, "vezes")) +
    theme_minimal()

  # Exiba o gráfico
  print(grafico)
}
```

```r
lanca_dado(10)
```

```r
lanca_dado(10000)
```

4.2.4 Conceito axiomático

Esta abordagem é baseada em um conjunto de axiomas matemáticos que definem as propriedades básicas de probabilidades. A probabilidade é definida como uma função de conjuntos que atribui a cada conjunto de eventos um número entre 0 e 1, satisfazendo os axiomas matemáticos de probabilidade. Essa abordagem permite que as probabilidades sejam definidas formalmente e usadas para cálculos matemáticos.

> Um *axioma* é uma premissa considerada necessariamente evidente e verdadeira, fundamento de uma demonstração, porém ela mesma indemonstrável, originada, segundo a tradição racionalista, de princípios inatos da consciência ou, segundo os empiristas, de generalizações da observação empírica.

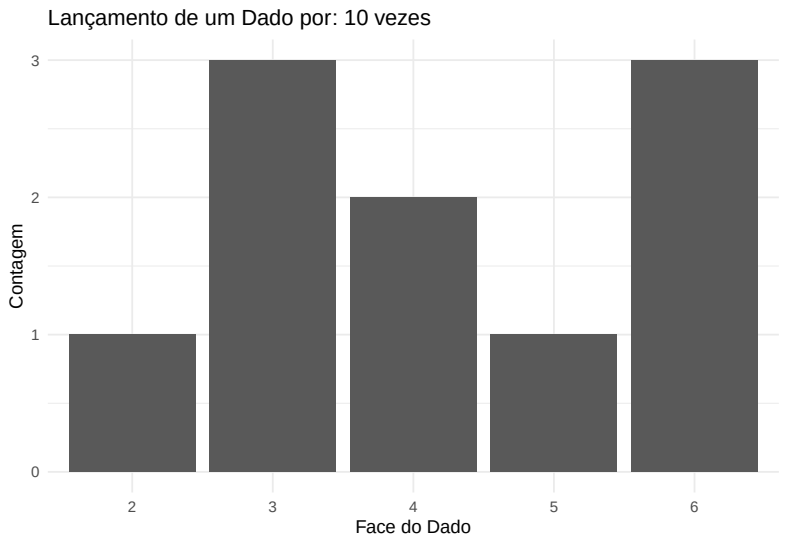


Figure 4.8: Histograma das frequências observadas no lançamento de um dad honesto por 10 vezes, demonstrando a irregularidade da probabilidade de cada reultado possível.

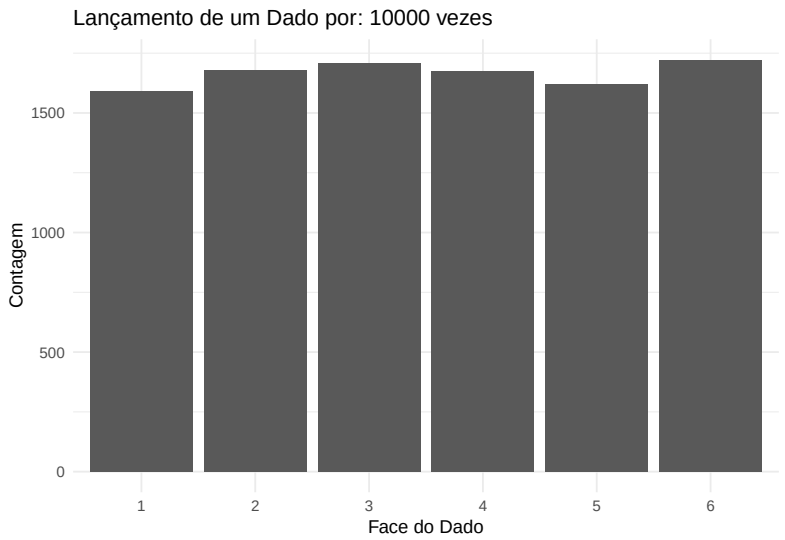


Figure 4.9: Histograma das frequências observadas no lançamento de um dad honesto por 10000 vezes, demonstrando a regularidade assintótica da probabilidade de cada um dos possíveis resultados.

Admita P uma função que opera sobre o espaço Ω; isto é, uma função que associa uma quantidade $P(\Omega)$ a cada elemento $\omega \in \Omega$.

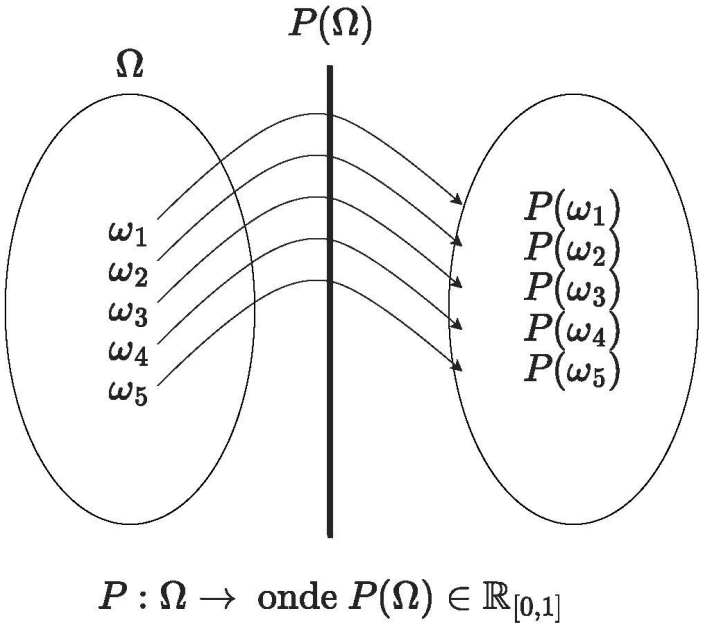


Figure 4.10: Representação gráfica da função $P(\Omega)$

Essa função P será uma **função de probabilidade** se, e somente se, satisfizer a **três axiomas** (postulados: conceitos iniciais necessários à construção ou aceitação de uma teoria) estabelecidos por Andrey Kolmogorov (1933).

Kolmogoroff afirmou que uma *Teoria das probabilidades* poderia ser desenvolvida a partir de *axiomas*, da mesma forma que a geometria e a álgebra, e a considerou como caso especial da *Teoria da medida e integração* desenvolvida por Lebesgue, Borel e Fréchet. Ele estabeleceu como postulados as propriedades comuns das noções de probabilidade clássica e frequentista que, desta forma, viraram casos particulares da definição axiomática.

4.2.4.1 Postulado do intervalo

A probabilidade de qualquer E **é um número real entre 0 e 1** (pode-se entender isso como uma convenção, onde então se estabelece a medida da probabilidade é um número positivo e que qualquer evento pode ter

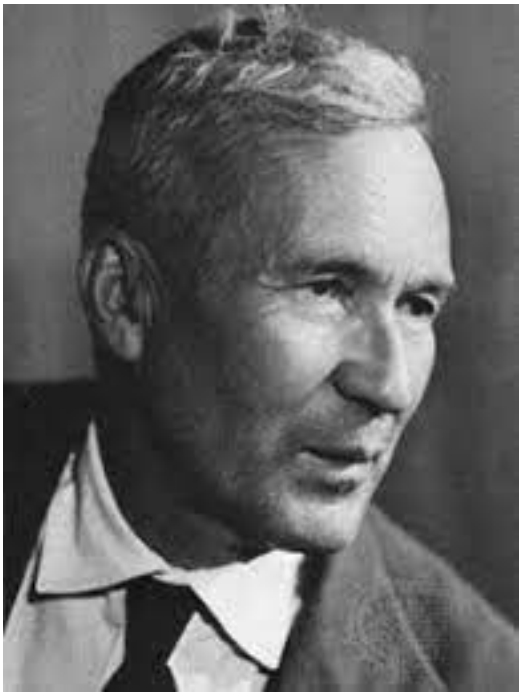


Figure 4.11: Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987)

probabilidade de, no máximo, 1). Esse postulado está plenamente de acordo com a interpretação frequentista de probabilidade.

$$0 \quad \leq P(\Omega) \quad \leq 1$$

4.2.4.2 Postulado da certeza

O segundo postulado refere-se à probabilidade do **evento certo** ser igua a 1. No que diz respeito à interpretação frequentista, uma probabilidade de 1 implica que o evento em questão ocorrerá 100% do tempo ou, em outras palavras, **que é certo que ele ocorra** (como, p. exemplo, um experimento aleatório de se lançar dois dados e somar o valor de suas faces o evento certo poderia ser definido como observar uym valor menor que 13 ou maior que 2)

$$P(\Omega) = 1$$

4.2.4.3 Postulado da aditividade para eventos mutuamente exclusivos

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\omega_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\omega_n\right)$$

para qualquer sequência de eventos **mutuamente exclusivos** $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,...,\omega_n,...\}$ (isto é, tal que $\omega_i\cap\omega_j\emptyset$ se $i\neq j$)

Tomando o terceiro postulado no caso mais simples, isto é, para **dois** eventos mutuamente exclusivos ω_1 e ω_2, pode ser facilmente visto que é satisfeito pela interpretação frequentista.

Se um evento ocorrer, digamos, 28% das vezes, outro evento ocorrerá 39%, **e os dois eventos não podem ocorrer ao mesmo tempo (ou seja, são mutuamente exclusivos)**, então um **ou outro** evento} ocorrerão em 28 + 39 = 67% das vezes. Assim, o terceiro postulado é satisfeito, e o mesmo tipo de argumento se aplica quando há mais de dois eventos mutuamente exclusivos.

Recapitulando

1- foi definido o conceito de **experimento aleatório** como sendo aquele cujos resultados não podem ser determinados com certeza antes de sua realização;
2- foi definido o conceito de **espaço amostral** de um experimento aleatório como sendo o conjunto de **todos os possíveis resultados** que ele pode apresentar;
3- foi definido que um **evento de interesse** é um subconjunto do espaço amostral no qual estamos particularmente interessados;
4- foi definida uma **função** que tem como domínio o espaço amostral e associa uma quantidade (entre **0** e **1**) a **cada elemento** do espaço amostral; e, por fim,
5- estabelecemos que **se** essa função atende a **três postulados** então ela será uma **medida da probabilidade** de ocorrẽncia de cada evento do espaço amostral em questão.

Assim, quando uma função P associa uma quantidade $P(\Omega)$ a um evento ω e $P(\Omega)$ atende aos três axiomas anteriormente estabelecidos, diz-se que que ela é a **função de probabilidade** de Ω.

4.2.5 Probabilidade da união de eventos

Considerem agora a Tabela 4.3 de dupla entrada onde vemos a distribuição de alunos conforme seu sexo e o curso escolhido:

Table 4.3: Distribuição da quantidade de alunos segundo seu sexo e curso escolhido

Curso	Sexo		
	Masculino (M)	Feminino (F)	Total
Matemática pura (M)	70	40	110
Matemática aplicada (A)	15	15	30
Estatística (E)	10	20	30
Computação (C)	20	10	30
Total	115	85	200

Essa tabela nos possibilita calcular a probabilidade de ocorrência de diversos eventos de interesse que desejemos estabelecer.

Exemplo: seja o experimento aleatório de se escolher, aleatoriamente, um estudante qualquer desses quatro cursos. Assim, se definimos nosso evento de interesse M como sendo **M:sexo masculino**, a probabilidade de sucesso (que o indivíduo sorteado aleatoriamente seja do sexo masculino) será:

$$P(M) = \frac{115}{200}$$

Exemplo: se nosso evento de interesse A como sendo A : **curso de matemática aplicada** , a probabilidade de sucesso (que o indivíduo sorteado aleatoriamente seja do curso de matemática aplicada será):

$$P(A) = \frac{30}{200}$$

A partir dos eventos de interesse anteriormente estabelecidos, podemos definir outros eventos na forma de uniões ($\cup$) e interseções ($\cap$):

- uma união entre os dois eventos de interesse anteriores A e M é representada por $A \cup M$ (alternativamente lê-se também **ou**) e representa um evento onde **pelo menos** um dos dois eventos básicos pode ocorrer: **ou** A, **ou** M **ou ambos**; e,

- uma interseção dos dois eventos de interesse anteriores A e M é representada por $A \cap M$ (alternativamente lê-se também **e**) e representa um evento onde **os dois eventos** básicos devem ocorrer: A **e** M.

Exemplo: se definimos nosso evento de interesse ($P(A \cap M)$) como sendo **sexo masculino e cursando matemática aplicada**. Facilmente podemos visualizar na Tabela 4.3 que apenas 15 alunos do curso do evento de interesse (matemática aplicada) são do sexo do segundo evento de interesse (masculino), em relação a todo espaço amostral e assim:

$$P(A \cap M) = \frac{15}{200}$$

.

Exemplo: consideremos agora o evento de interesse ($P(A \cup M)$) como sendo **sexo masculino ou cursando matemática aplicada**.

Na Tabela 4.3 temos as duas probabilidades **marginais**:

1. $P(A) = \frac{30}{200}$ (curso: matemática aplicada); e, 2- $P(M) = \frac{115}{200}$ (sexo masc).

Poderíamos intuir equivocadamente que:

$$P(A \cup M) = P(A) + P(M) = \frac{30}{200} + \frac{115}{200} = \frac{145}{200}$$

Tal raciocínio é errado pois iria considerar por **duas vezes** os alunos do **sexo masculino**. Uma fração da quantidade global (115) de alunos do **sexo masculino** já considera aqueles que estão matriculados no curso de **matemática aplicada** (15). É preciso **subtrair** da soma das probabilidades marginais essa **parcela em comum** que é a interseção dos dois eventos básicos.

A resposta correta será:

$$P(A \cup M) = P(A) + P(M) - P(A \cap M) = \frac{30}{200} + \frac{115}{200} - \frac{15}{200} = \frac{130}{200}$$

.

Portanto, para quaisquer eventos de intersse A e B, podemos estabelecer uma **regra geral da pobabilidade da união de dois eventos quaiquer** como:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Se A e B forem **mutuamente exclusivos**, a interseção entre eles será vazia ($A \cap B = \emptyset$) e, assim, essa probabiidade é zero. Nessa situação, a probabilidade de $P(A \cup B)$ fica reduzida a uma **regra particular para a adição de probabilidades de eventos mutuamente exclusivos**:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Exemplo: Seja o experimento aleatório de se lançar um dado (com seis faces) e observar o valor numérico da face que ficar exposta. Qual a probabilidade de se observar os valores 1 **ou** 4?

Definindo os eventos de interesse:

1- E_1 = sair face 1 ($P(E_1) = \frac{1}{6}$); e,
2- E_4 = sair face 4 ($P(E_4) = \frac{1}{6}$).

Pede-se $P(E_1 \cup E_4)$.

Como E_1 e E_4 são *eventos mutuamente exclusivos**: $E_1 \cap E_4 = \emptyset$ (portanto a probabilidade é zero), então $P(E_1 \cup E_4) = P(E_1) + P(E_4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Exemplo: Uma população é composta por 20 pessoas que consomem o produto **A**, 30 pessoas que consomem o produto **B** e 50 pessoas que consomem o produto **C** . Um pesquisador de mercado seleciona aleatoriamente uma pessoa desta população. **Sabendo que uma pessoa não consome mais de um produto ao mesmo tempo**, qual a probabilidade de ter sido selecionada uma pessoa que consome os produtos **A ou C**?

Solução:

Definindo os eventos de interesse e as probabilidades associadas:

1- E_A = consumidor do produto A: $P(E_A = \frac{20}{100})$;
2- E_B = consumidor do produto B: $P(E_B = \frac{30}{100})$; e,
3- E_C = consumidor do produto C: $P(E_C = \frac{50}{100})$.

Pela regra geral da probabilidade da união de dois eventos quaiquer sabemos que:

$$P(E_A \cup E_C) = P(E_A) + P(E_C) - P(E_A \cap E_C)$$

Como foi estabelecido no enunciado que uma pessoa **não** consome mais de um produto ao mesmo tempo (esses eventos são, portanto, **mutuamente exclusivos**: $E_A \cap E_C = \emptyset$) a probabilidade pedida será:

$$\begin{aligned} P(E_A \cup E_C) &= P(E_A) + P(E_C) - P(E_A \cap E_C) \\ &= \frac{20}{10} + \frac{50}{100} - 0 \\ &= \frac{70}{100} \\ &= 0,70 \end{aligned}$$

4.2.6 Probabilidade de eventos condicionados

Dois eventos A e B de um experimento aleatório qualquer são ditos **condicionados** quando a ocorrência prévia de um deles impõe **uma restrição** no espaço amostral do segundo.

A **probabilidade** de um evento qualquer A **condicionada** a um segundo evento B é representada como $P(A|B)$. A *barra* verTical pode ser "lida" adotando-se termos correlatos que facilitam o entendimento da relação existente, tais como :

- probabilidade de A **posto que** ocorreu B;
- probabilidade de A **admitindo-se** que ocorreu B;
- probabilidade de A **considerando-se** que ocorreu B,

e seu cálculo é feito pela **regra geral da probabilidade de dois eventos condicionados**:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

sendo $P(B) > 0$ e $P(A) > 0$ nas expressões acima.

De modo geral, admita que os eventos E_1, E_2,...,E_n formam uma partição do espaço amostral.

Os eventos não têm interseções entre si e a união destes é igual ao espaço amostral e seja A um evento qualquer desse espaço.

Então a probabilidade de ocorrência desse evento será dada por:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + \cdots + P(A \cap E_n) \\ &= P(E_1) \times P(A|E_1) + P(E_2) \times P(A|E_2) + \cdots + \\ & P(E_n) \times P(A|E_n) \end{aligned}$$

Exemplo: Consideremos a Tabela 4.3 que apresenta informações cruzadas do sexo dos alunos e seus respectivos cursos. Vamos definir os eventos **Fem:sexo feminino** e **Est: cursar estatística**. Como calcular a probabilidade condicionada de nosso evento de interesse **P(Fem|Est)** (a probabilidade de um aluno aleatoriamente escolhido ser do sexo **feminino**, **dado** que ele cursa **estatística**)?

$$\begin{aligned} P(Fem|Est) &= \frac{P(Fem \cap Est)}{P(Est)} \\ &= \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Esse cálculo é facilmente entendido observando-se as celulas da distribuição de frequências na Tabela 4.3.

Exemplo: Considerem a Tabela 4.4 que relaciona a ida à praia de uma certa pessoa às condições climáticas do dia.

Table 4.4: Condicionamento de passeios à praia em relação às condições climáticas observadas

Dia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Foi à praia?	N	S	N	S	S	S	N	N	S	S
Fez sol?	N	S	N	S	N	S	S	N	S	S

Baseado nos dados coletados responda:

1- Qual a probabilidade dessa pessoa ir à praia?
2- Sabendo-se que fez Sol, qual a probabilidade dessa pessoa ir à praia?
3- Os eventos **ir à praia** e **fazer Sol** são independentes ou condicionados?

Da Tabela 4.4 extraímos as seguintes probabilidades:

$$
\begin{aligned}
P(IP) &= \frac{6}{10} = 0,60 \\
P(FS) &= \frac{6}{10} = 0,60 \\
P(IP \cap FS) &= \frac{5}{10} \\
&= 0,50
\end{aligned}
$$

A partir delas podemos calcular a seguinte probabilidade condicionada:

$$
\begin{aligned}
P(IP|FS) &= \frac{P(IP \cap F)}{P(FS)} \\
&= \frac{5}{6} \\
&= 0,83
\end{aligned}
$$

A probabilidade dessa pessoa ir à praia ($P(IP)$) é 0,60; **mas** quando faz Sol a probabilidade ($P(IP|FS)$) dela aumenta para 0,83.

Assim, os eventos IP e FS são condicionados: essa pessoa vai à praia 60% dos dias analisados; mas, **quando faz sol**, ela vai em 83% dos dias (a presença de Sol altera a probabilidade dela ir à praia).

> Exemplo: Em uma cidade existem 15.000 usuários de telefonia, dos quais 10.000 possuem telefones fixos, 8.000 telefones móveis e 3.000 telefones fixos e móveis. Seja o experimento aleatório de uma operadora de telefone móvel selecionar uma pessoa dessa cidade para oferecer uma promoção do tipo "Fale Grátis de seu Móvel para seu Fixo".

Responda:

1- Sorteando-se aleatoriamente um cliente dessa operadora, se soubermos antecipadamente que ele tem telefone móvel, qual a probabilidade de esse cliente tenha telefone fixo também?
2- Sabendo-se que ele tem telefone fixo, qual a probabilidade de ele tenha telefone móvel também?

O espaço amostral de todos esses possíveis eventos pode ser ilustrado pelo diagrama de Venn abaixo:

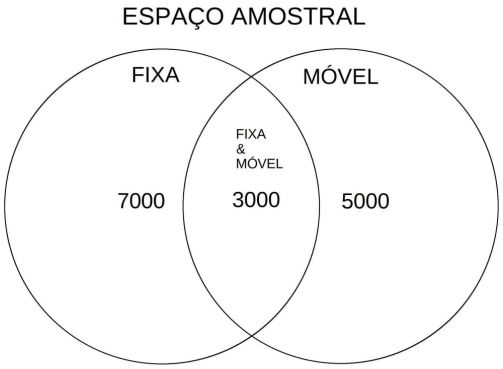


Figure 4.12: Diagrama de Venn do espaço amostral

Do diagrama apresentado na Figura4.12 podemos extrair imediatamente as probabilidades pedidas:

- $P(F|M)$ (probabilidade de ter uma linha fixa sabendo que possui um telefone móvel); e,
- $P(M|F)$ (probabilidade de ter uma linha móvel sabendo que possui um telefone fixo):

$$\begin{aligned} P(F|M) &= \frac{n(MF)}{n(M)} \\ &= \frac{3000}{8000} \\ &= 0,375 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P(M|F) &= \frac{n(MF)}{n(F)} \\ &= \frac{3000}{10000} \\ &= 0,300 \end{aligned}$$

Mas também podemos calcular as probablidades do modo como explicado no começo desta sessão. Definindo-se os eventos F : **telefone fixo** e M : **telefone móvel**, a primeira pergunta pede $P(F|M)$:probabilidade de ter um telefone fixo sabendo que ele tem um telefone móvel:

$$\begin{aligned} P(F|M) &= \frac{P(F \cap M)}{P(M)} \\ &= \frac{\frac{3000}{15000}}{\frac{8000}{15000}} \\ &= 0,375. \end{aligned}$$

A segunda pede $P(M|F)$: probabilidade de ter um telefone móvel sabendo que ele tem um telefone fixo:

$$\begin{aligned} P(M|F) &= \frac{P(M \cap F)}{P(F)} \\ &= \frac{\frac{3000}{15000}}{\frac{10000}{15000}} \\ &= 0,300 \end{aligned}$$

Exemplo: Considere a Tabela 4.5 onde são expostos os resultados de uma pesquisa relacionada ao gosto pela prática de tênis entre alunos e alunas. Definindo-se os eventos A**:"gostar de tênis"** e B**:"ser do sexo feminino"**, calcule as probabilidade pedidas ao se sortear, aleatoriamente, uma das pessoas pesquisadas.

1- Qual a probabilidade de que goste de tênis ($P(T)$)?
2- Qual probabilidade de que não goste de tênis ($P(T^c)$)?
3- Qual a probabilidade de que seja do sexo feminino **ou** goste de tênis: ($P(F \cup T)$)?
4- Sabendo-se que foi sorteada uma aluna, qual a probabilidade de que goste de tênis ($P(T|F)$)?
5- Verifique se os eventos T**: "gostar de tênis"** e F**:"ser do sexo feminino"** são condicionados ou independentes ($P(T \cap F) \stackrel{?}{=} P(T) \times P(F)$))

Table 4.5: Distribuição da quantidade de alunos segundo seu sexo e a preferência por tênis

	Sexo
Curso	

	Sexo		
	Masculino (M)	Feminino (F)	Total
Gostam de tênis (T)	400	200	600
Não gostam de tênis (NT)	50	50	100
Total	450	250	700

4.2.7 Dependência e independência de eventos

Pela **regra geral da probabilidade de dois eventos eventos condicionados**:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Como a probabilidade de interseção não se altera ($P(A \cap B) = P(B \cap A)$), podemos reescrever essas duas expressões:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$$
$$P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A)$$

com $P(B) > 0$ e $P(A) > 0$ nas expressões acima.

Se os eventos A e B são guardam nenhuma relação de condicionamento eles são chamadas de **eventos independentes**. Equivale dizer que $P(A|B) = P(A)$ (ou $P(B|A) = P(B)$), a probabilidade de A não se altera pela prévia ocorrência de B (ou a de B pelo de A).

Portanto, **dois eventos são denominados independentes se, e somente se**:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Independência e correlação: se duas variáveis aleatórias são **independentes** não há associação de natureza alguma entre elas, **inclusive a linear**, um caso particular de correlação. Todavia uma **correlação linear nula** não implica em **independência** posto existirem várias outras formas outras de relacionamento (quadrática, cúbica, ...).

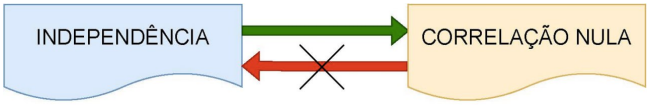


Figure 4.13: Independência implica em ausência de qualquer tipo de associação (a recíproca não se aplica

Mais adiante serão apresentados exemplos demonstrativos clássicos sobre a independência e dependência entre eventos.

4.2.8 Probabilidade da interseção de eventos independentes

Se E_1, E_2, ..., E_n são eventos independentes **entre si**, então:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap ...E_n) = P(E_1) \times P(E_2)... \times P(E_n)$$

Para que isso se verifique, a independência entre cada um e todos os eventos deve se verificada. Numa situação de três eventos, por exemplo, teríamos que observar:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

$$P(E_1 \cap E_3) = P(E_1) \times P(E_3)$$

$$P(E_2 \cap E_3) = P(E_2) \times P(E_3)$$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \times P(E_2) \times P(E_3)$$

Exemplo: considere o experimento aleatório de se lançar dois dados e obter o valor **1** no primeiro deles e **5** no segundo (defina os eventos $E_1 =$ sair face 1 e $E_5 =$ sair face 5).

Solução:

Quando lançamos dois dados o resultado obtido em um deles (o valor numérico da face) **não condiciona ou altera** o resultado obtido no outro: os resultados são **são independentes**. Desse modo, sendo $P(E_1) = \frac{1}{6}$ e $P(E_5) = \frac{1}{6}$:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_5) &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

Exemplo: Uma empresa que compra produtos de dois fabricantes diferentes (**Fabricante 1** e **Fabricante 2}**) adquiriu 168 unidades do primeiro e 84 do segundo. Sabendo que 8 unidades fabricadas pelo primeiro fornecedor não atenderam às especificações e apenas 4 do segundo, verifique se o fato de uma amostra ter atendido às especificações independe de ter sido produzida pelo **Fabricante 1**.

Solução:

Para a primeira verificação pedida defina os eventos $Fab1$: **ter sido produzida pelo Fabricante 1**, $Aprov$: **ter atendido às especificações** e $Fab2$: **ter sido produzida pelo Fabricante 2**. Na sequência podemos calcular as seguintes probabilidades:

$$
\begin{aligned}
P(Fab1) &= \frac{168}{252} \\
&= 0,6666 \\
P(Aprov) &= \frac{240}{252} \\
&= 0,9523 \\
P(Fab1 \cap Aprov) &= \frac{160}{252} \\
&= 0,6349
\end{aligned}
$$

Se o fato de uma amostra ter sido aprovada **independe** de ter sido produzida pelo Fabricante 1 **então** $P(Aprov|Fab1) = P(Aprov)$:

$$
\begin{aligned}
P(Aprov|Fab1) &= \frac{P(Aprov \cap Fab1)}{P(Fab1)} \\
&= \frac{0,6349}{0,6666} \\
&= 0,9523.
\end{aligned}
$$

Como $P(Aprov|Fab1) = P(Aprov)$, verifica-se que o fato de uma amostra aleatoriamente sorteada entre as peças do fabricante 1 não condiciona sua aprovação.

Exemplo: A probabilidade de um consumidor (C_1) ficar satisfeito com o desempenho de certa marca de produto é de 25%. A probabilidade de um outro consumidor (C_2) ficar satisfeito com a mesma marca é de 40%. Admitamos que os dois consumidores irão consumir o produto num mesmo momento e de **forma independente (incomunicáveis)**. Qual a probabilidade de **os dois** consumidores ficarem satisfeitos simultaneamente?

Solução:

As probabilidades individuais dos consumidores 1 **e** 2 ficarem satisfeitos com o desempenho da marca do produto são:

$$P(C_1) = 0,25$$
$$P(C_2) = 0,40$$

A probabilidade de **ambos** ficarem satisfeitos, dado que o enunciado afirma que esses eventos são **independente** será:

$$\begin{aligned} P(C_1 \cap C_2) &= 0,25 \times 0,40 \\ &= 0,10. \end{aligned}$$

4.2.9 Demonstração clássica de independência

Uma bolsa contém 5 bolas vermelhas e 5 azuis. Nós removemos uma bola aleatória da bolsa, registramos sua cor **e a colocamos de volta na sacola**. Em seguida, removemos outra bola aleatória da bolsa e registramos sua cor.

- Qual é a probabilidade de a primeira bola ser vermelha ?
- Qual é a probabilidade de a segunda bola ser azul?
- Qual é a probabilidade de a primeira bola ser vermelha e a segunda bola azul?
- A primeira bola retirada foi uma bola vermelha e a segunda bola azul; esses eventos foram *independentes* ?

Solução:

Probabilidade em se retirar uma bola vermelha em primeiro lugar:

Há 10 bolas das quais 5 são vermelhas . A probabilidade de se retirar uma bola vermelha será:

$$P(1^a vermelha) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Probabilidade em se retirar uma bola azul em segundo lugar:

O enunciado do experimento assegura que após a retirada da primeira bola ela é **devolvida** ao sacola; por essa razão, ao se retirar a segunda bola, há novamente 10 bolas no total, das quais 5 são azuis. A probabilidade de se retirar uma bola azul será:

$$P(2^a azul) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Probabilidade da primeira bola retirada ser vermelha e a segunda ser azul:

Ao se retirar duas bolas do sacola há quatro possíveis combinações de resultados. Nós podemos obter:

1- uma vermelha e depois outra vermelha;
2- uma vermelha e depois uma azul;
3- uma azul e depois uma vermelha; ou,
4- uma azul e depois outra azul;

Queremos saber a probabilidade do segundo resultado após termos obtido uma bola vermelha na primeira seleção.

Como existem 5 bolas vermelhas e 10 bolas no total, existem $\frac{5}{10}$ possibilidades de obter uma bola vermelha primeiro.

Agora nós colocamos a primeira bola de volta, então há novamente 5 bolas vermelhas e 5 bolas azuis na sacola.

Portanto, há $\frac{5}{10}$ possibilidades de obter uma segunda bola azul se a primeira bola for vermelha .

Isso significa que existem: $\frac{5}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{25}{100}$ possibilidades de se obter uma bola vermelha em primeiro lugar e uma bola azul em segundo.

Então, a probabilidade associada será de $\frac{1}{4}$.

A primeira bola retirada foi uma bola vermelha e a segunda bola azul. Esses dois eventos são independentes?

Esses eventos serão *independentes* **se, e somente se**:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$\begin{aligned} P(1^a vermelha) &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\ P(2^a azul) &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\ P(1^a vermelha, 2^a azul) &= \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, **os eventos são independentes**.

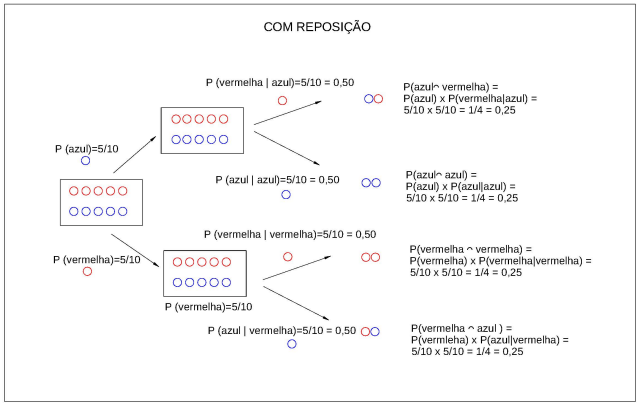


Figure 4.14: Ilustração do experimento aleatório sob a condição de reposição

4.2.10 Demonstração clássica de dependência

E se, ao retirarmos a primeira bola, **não a devolvêssemos** ao sacola?

Admitamos agora que o enunciado de nosso problema passou a ser:

Uma bolsa contém 5 bolas vermelhas e 5 azuis. Nós removemos uma bola aleatória da bolsa, registramos sua cor **e não a colocamos de volta na sacola**. Em seguida, removemos outra bola aleatória da bolsa e registramos sua cor.

1- Qual é a probabilidade de a primeira bola ser vermelha ?
2- Qual é a probabilidade de a segunda bola ser azul?
3- Qual é a probabilidade de a primeira bola ser vermelha e a segunda bola azul?
4- A primeira bola retirada foi uma bola vermelha e a segunda bola azul; esses eventos foram *independentes* ?

Solução:

1ª Etapa: analisar todos os possíveis resultados

Probabilidade da primeira bola retirada ser vermelha e a segunda ser azul:

Ao se retirar duas bolas do sacola há quatro possíveis combinações de resultados. Nós podemos obter:

- uma vermelha e depois outra vermelha;
- uma vermelha e depois uma azul;
- uma azul e depois uma vermelha ; ou,
- uma azul e depois outra azul.

Queremos saber a probabilidade do segundo resultado após termos obtido uma bola vermelha na primeira seleção.

Como existem 5 bolas vermelhas e 10 bolas no total, existem $\frac{5}{10}$ maneiras de obter uma bola vermelha primeiro.

Entretanto, nessa nova situação, nós não colocamos a primeira bola de volta, então haverá apenas 4 bolas vermelhas e 5 bolas azuis na sacola.

- Haverá $\frac{4}{9}$ maneiras de obter uma segunda bola vermelha se a primeira bola for vermelha . Isso significa que existem: $\frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{20}{90}$ maneiras de se obter uma bola vermelha em primeiro lugar **e** uma bola vermelha em segundo. Então, a probabilidade associada será de $\frac{2}{9}$;

- Haverá $\frac{5}{9}$ maneiras de obter uma segunda bola azul se a primeira bola for vermelha . Isso significa que existem: $\frac{5}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{25}{90}$ maneiras de se obter uma bola vermelha em primeiro lugar **e** uma bola azul em segundo. Então, a probabilidade associada será de $\frac{5}{18}$;

- Haverá $\frac{5}{9}$ maneiras de obter uma segunda bola vermelha se a primeira bola for azul. Isso significa que existem: $\frac{5}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{25}{90}$ maneiras de se obter uma bola azul em primeiro lugar **e** uma bola vermelha em segundo. Então, a probabilidade associada será de $\frac{5}{18}$.

- Haverá $\frac{4}{9}$ maneiras de obter uma segunda bola azul se a primeira bola for azul. Isso significa que existem: $\frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{20}{90}$ maneiras de se obter uma bola azul em primeiro lugar **e** uma bola azul em segundo. Então, a probabilidade associada será de $\frac{2}{9}$;

Resumo das probabilidades calculadas:

1 -uma vermelha **e** depois outra vermelha : $\frac{2}{9}$;
2- uma vermelha **e** depois uma azul: $\frac{5}{18}$;
3- uma azul **e** depois uma vermelha : $\frac{5}{18}$; e,
4- uma azul **e** depois outra azul: $\frac{2}{9}$.

2ª Etapa: analisar a possibilidade de se obter uma bola vermelha na primeira extração:

- uma vermelha e depois outra vermelha : $\frac{2}{9}$;
- uma vermelha e depois uma azul: $\frac{5}{18}$.

A probabilidade total de se obter uma bola vermelha na primeira extração será:

$$P(1^a vermelha) = \frac{2}{9} + \frac{5}{18} = \frac{1}{2}$$

3ª Etapa: analisar a possibilidade de se obter uma bola azul na segunda extração:

- uma vermelha e depois uma azul: $\frac{5}{18}$;
- uma azul e depois outra azul: $\frac{2}{9}$.

A probabilidade total de se obter uma bola azul na segunda extração será:

$P(2^a azul) = \frac{5}{18} + \frac{2}{9} = \frac{1}{2}$

4ª Etapa: analisar a possibilidade de se obter uma bola vermelha **e** em seguida azul:

- uma vermelha e depois outra azul: $\frac{5}{18}$;

5ª Etapa: Esses dois eventos são independentes?

Esses eventos serão *independentes* **se, e somente se**:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$\begin{aligned} P(1^a vermelha) &= \frac{2}{9} + \frac{5}{18} = \frac{1}{2} \\ P(2^a azul) &= \frac{5}{18} + \frac{2}{9} = \frac{1}{2} \\ P(1^a vermelha, 2^a azul) &= \frac{5}{18} \end{aligned}$$

Como $\frac{5}{18} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, os eventos **não são independentes**.

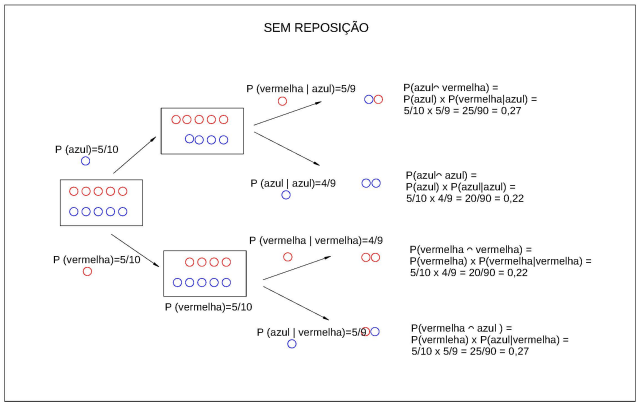


Figure 4.15: Ilustração do experimento aleatório sob a condição de não reposição

4.3 Teorema de Bayes

Figure 4.16: Thomas Bayes (1702 - 1761)

Admita os seguintes eventos e suas probabilidades associadas, baseados no sorteio aleatório de um estudante de uma escola:

- "M' ': ser do sexo masculino:
  - $P(M) = 0,65$;
- "F' ': ser do sexo feminino:
  - $P(F) = 0,35$.
- "C' ': possuir um carro:
  - $P(C|M) = 0,30$
  - $P(C|F) = 0,18$.

Sorteado aleatoriamente um estudante da escola verificou-se possuir um carro. Qual a probabilidade de que seja do sexo feminino ($P(F|C)$)?

Pela **regra da probabilidade condicionada** temos que

$$P(C|F) = \frac{P(C \cap F)}{P(F)}$$

e, de modo equivalente,

$$P(F|C) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)}$$

Pela igualdade $P(C \cap F) = P(F \cap C)$, substituindo-se a segunda expressão na primeira chega-se a:

$$\begin{aligned} P(F|C).P(C) &= P(C|F).P(F) \\ P(F|C) &= \frac{P(F).P(C|F)}{P(C)} \end{aligned}$$

uma **relação** entre duas probabilidades inversamente condicionadas conhecida como **Teorema de Bayes**.

A probabilidade de se sortear aleatoriamente um estudante com carro ($P(C)$) resulta de união de dois únicos e possíveis eventos disjuntos. Pela mesma regra da probabilidae condicionada segue-se

$$\begin{aligned}
P(C) &= P(C \cap M) \cup P(C \cap F) \\
P(C) &= [P(M).P(C|M)] \cup [P(F).P(C|F)] \\
P(C) &= [0,65.0,30] + [0,35.0,18] \\
P(C) &= 0,258
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
P(F|C) &= \frac{P(F).P(C|F)}{P(C)} \\
P(F|C) &= \frac{0,35.0,18}{0,258} \\
P(F|C) &= 0,2442
\end{aligned}$$

A probabilidade de que um estudante aleatoriamente sorteado nessa escola e sabendo-se **a priori** que possui um carro ser do sexo feminino é de 24,42%.

Essa **relação** entre duas probabilidades "reciprocamente' ' condicionadas é conhecida como **Teorema de Bayes**.

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(A)}{P(B)}$$

Para um espaço amostral mais amplo, de modo geral consideremos, inicialmente o diagrama da Figura 4.17 onde Ω é o espaço amostral de um experimento aleatório qualquer:

Admita que E_1, E_2, E_3 e E_4 formem a partição do espaço amostral Ω (seus elementos são **mutuamente exclusivos**) como exposto na Figura 4.18

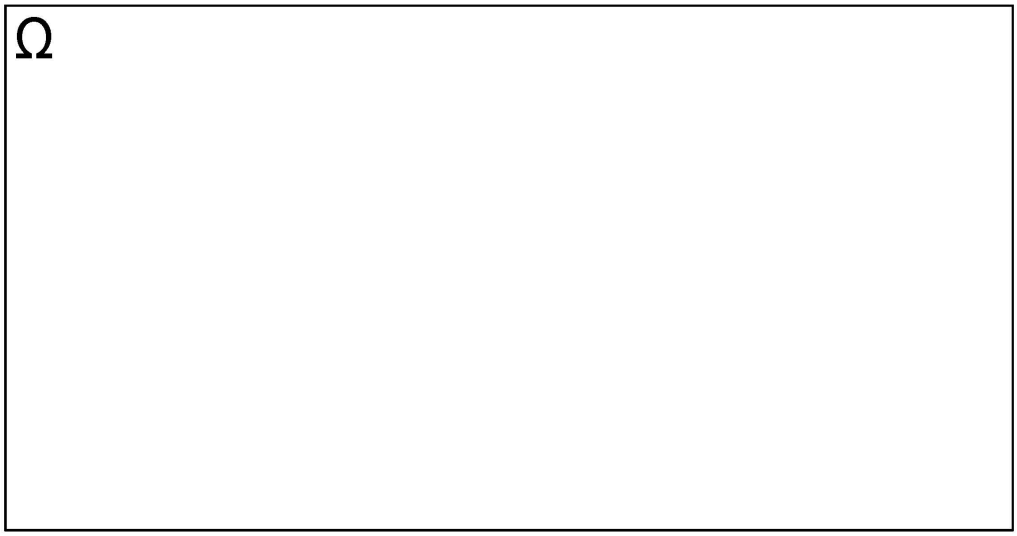


Figure 4.17: Espaço amostral

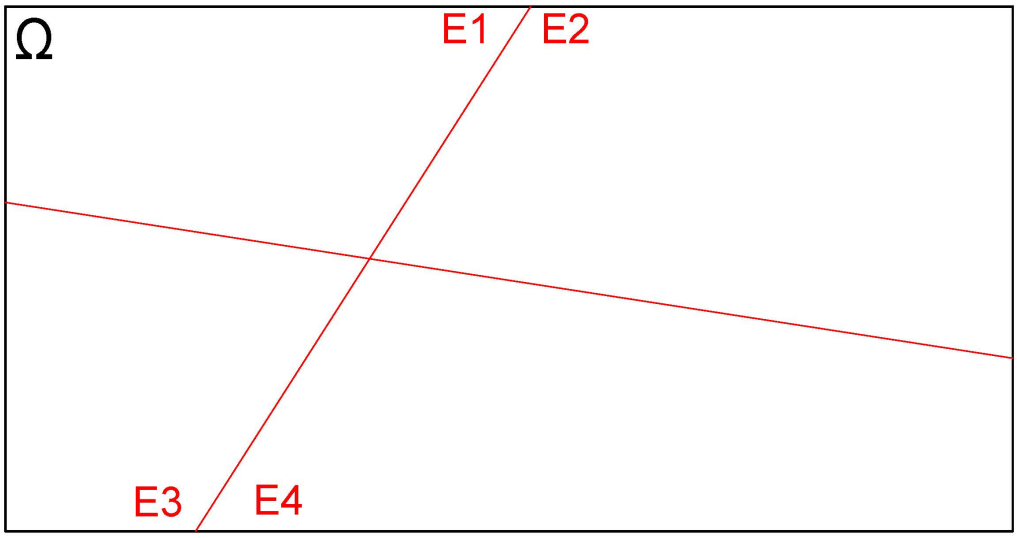


Figure 4.18: Espaço amostral e suas partições

E seja B um evento qualquer em Ω como ilustrado na Figura 4.19

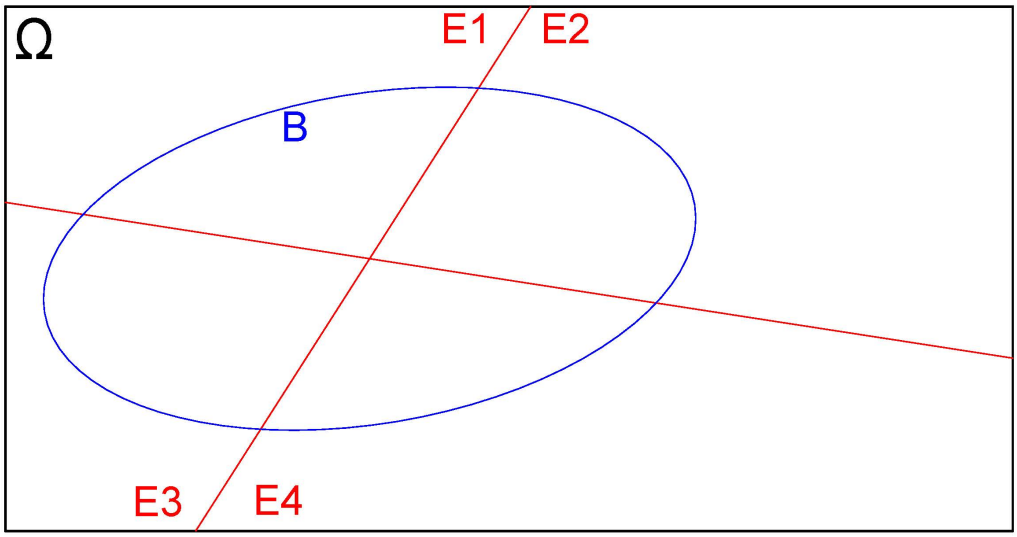


Figure 4.19: Evento definido sobre o espaço amostral

Delimitemos as interseções do evento B com as partições E_1, E_2, E_3 e E_4 do espaço amostral Ω, como ilustrado na Figura 4.20

Isso pode ser estendido, em uma forma geral, para $i = 1, \ldots, n$ partições como ilustrado na Figura 4.21

Na representação esquemática da Figura 4.21 podemos identificar:

1- E_1, E_2, ..., E_i, ..., E_n constituem-se em partições do espaço amostral Ω;
2- Todas as partições são mutuamente exclusivas: $E_i \cap E_j = \emptyset, \forall\ i \neq j$ (a interseção de quaisquer partições é vazia);
3- Sendo vazias as interseções entre quaisquer partições, o espaço amostral Ω será a simples união de todas elas: $\Omega = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup \cdots \cup E_i \cdots \cup E_n$; e,
4- **B** é um evento qualquer definido sobre as partições de Ω

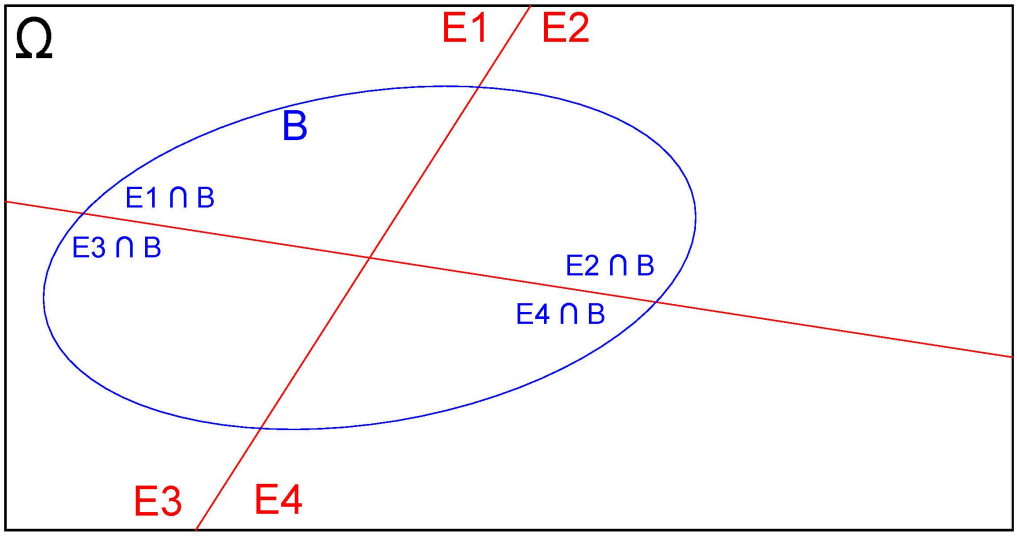


Figure 4.20: Interseções das partições do espaço amostral com o evento B

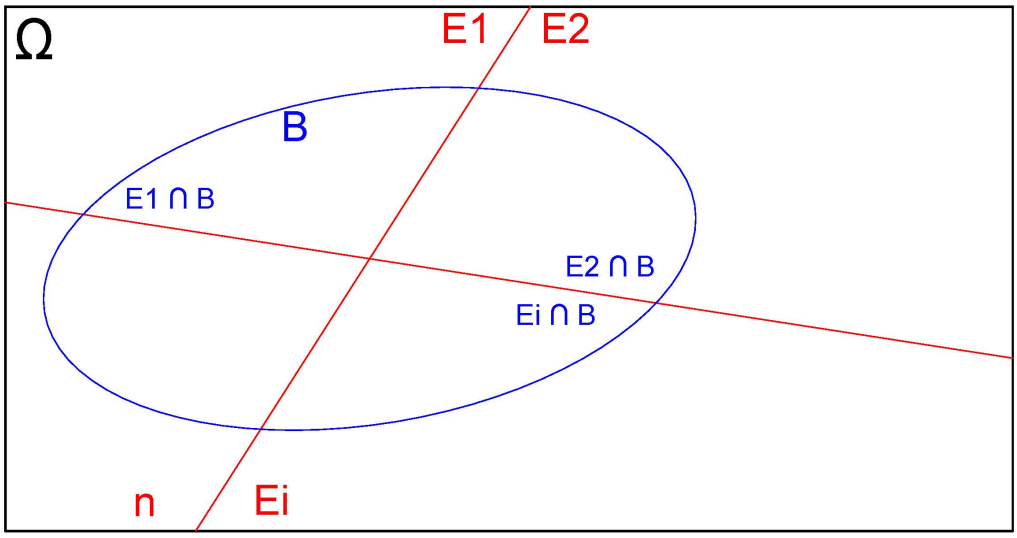


Figure 4.21: Interseções das n partições do espaço amostral com o evento B

São conhecidas as probabilidades de ocorrência de cada um dos elementos do espaço amostral Ω:

$$P(E_1); P(E_2); P(E_3); ...; P(E_i); ...; P(E_n)$$

e também as probabilidades do evento B condicionadas a cada elemento do espaço amostral:

$$P(B|E_1); P(B|E_2); ...; P(B|E_i); ...; P(B|E_n)$$

A *probabilidade de ocorrência do evento B* é dada pela soma das probabilidades de cada uma de suas interseções com os elementos do espaço amostral Ω, uma vez que essas interseções são disjuntas entre si:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(E_1 \cap B) \cup P(E_2 \cap B) \cup ... P(E_i \cap B) \cup ... P(E_n \cap B) \\ P(B) &= \sum_{i=1}^{n} P\left(E_i \cap B\right) \end{aligned}$$

Pela *Regra do produto de eventos condicionados*, a *probabilidade de ocorrência do evento B* **posto** ter ocorrido um evento E_i é:

$$\begin{aligned} P(B|E_i) &= \frac{P(E_i \cap B)}{P(E_i)} \\ P(E_i \cap B) &= P(E_i) \times P(B|E_i) \end{aligned}$$

com $P(E) > 0$

Aplicando-se na expressão anteriormente desenvolvida da *probabilidade de ocorrência do evento B* teremos:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(E_1 \cap B) \cup P(E_2 \cap B) \cup \cdots \cup P(E_i \cap B) \cup \cdots \cup P(E_n \cap B) \\ P(B) &= P(E_1) \times P(B|E_1) + P(E_2) \times P(B|E_2) + \\ &\quad \cdots + P(E_i) \times P(B|E_i) + \\ &\quad \cdots + P(E_n) \times P(B|E_n) \end{aligned}$$

Portanto a **probabilidade total** do evento B em Ω é dada pelo somatório:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} \left[P\left(E_i\right) \cdot P\left(B|E_i\right)\right]$$

Pela **Regra do produto de eventos condicionados** a probabilidade de ocorrência de um evento E_i posto ter ocorrido o evento B é:

$$\begin{aligned} P(E_i|B) &= \frac{P(E_i \cap B)}{P(B)} \\ P(E_i \cap B) &= P(B) \times P(E_k|B) \\ P(B) &= \frac{P(E_i \cap B)}{P(E_k|B)} \end{aligned}$$

com $P(B) > 0$

Pela **igualdade** dos dois modos de se expressar a probabilidade total do evento B desenvolvidos:

$$P(B) = \frac{P(E_i \cap B)}{P(E_i|B)}$$

e

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} \left[P\left(E_i\right) \cdot P\left(B|E_i\right)\right]$$

tem-se

$$\frac{P(E_i \cap B)}{P(E_i|B)} = \sum_{i=1}^{n} \left[P\left(E_i\right) \cdot P\left(B|E_i\right)\right]$$

Rearranjando-se em termos da expressão anterior para exprimir a probabilidade de ocorrência de um evento E_i posto ter ocorrido o evento B chegamos a:

$$P(E_i|B) = \frac{P(E_i \cap B)}{\sum_{i=1}^{n} \left[P\left(E_i\right) \cdot P\left(B|E_i\right)\right]}$$

Sendo

$$P(E_i \cap B) = P(B) \times P(E_i|B)$$

a expressão anterior pode ser reescrita como:

$$P(E_i|B) = \frac{P(E_i) \times P(B|Ei)}{\sum_{i=1}^{n} \left[P\left(E_i\right) \times P\left(B|E_i\right)\right]}$$

uma forma mais geral do **Teorema de Bayes**.

O Teorema de Bayes é também chamado de Teorema da probabilidade a *posteriori* ao permitir que se calcule $P(E_i|B)$ em termos da ocorrência $P(B|E_i)$

É, de certo modo, uma conjugação do *teorema na probabilidade total* e da *regra do produto* de probabilidades.

O denominador:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} \left[P\left(E_i\right) \times P\left(B|E_i\right)\right]$$

é a denominada **probabilidade marginal** de ocorrência do evento B no espaço amostral Ω composto por n elementos (partições).

Na expressão do Teorema de Bayes:

- $P(E_k|B)$ é a denominada probabilidade *a posteriori* do evento E_k condicionada pela ocorrência anterior do evento B;
- $P(E_k)$ é a denominada probabilidade *a priori* do evento E_k;
- $P(B|E_k)$ é a denominada probabilidade *a posteriori* do evento B condicionada pela ocorrência anterior do evento E_k;
- $P(E_i)$ é a denominada probabilidade *a priori* de cada evento E_i;
- $P(B|E_i)$ é a denominada probabilidade *a posteriori* do evento B condicionada pela ocorrência anterior de cada evento E_i.

Exemplo: Constatou-se que o aumento nas vendas de um certo produto comercializado por uma empresa num mês pode ocorrer **somente** por uma das quatro causas mutuamente exclusivas a seguir:

1- ação de *marketing*;
2- propaganda;
3- flutuações na economia do país; ou,
4- efeitos sazonais.

A probabilidade de haver uma ação da empresa no mês focada para o *marketing* é de 40%; e para propaganda é de 30%; as probabilidades de ocorrerem flutuações na economia do país é de 20% e de efeitos sazonais é de 10%. Uma pesquisa mostrou que a probabilidade de haver um aumento nas vendas do produto devido a uma ação de *marketing* é de 7%; devido à publicidade, de 7,5%, por flutuações na economia do país, de 3% e por sazonalidade de 2%.

Em um determinado mês a empresa observou um considerável incremento nas vendas. Qual seria sua causa mais provável? Qual a probabilidade de incremento das vendas em um certo mês?

Nosso experimento aleatório é a medida do **incremento das vendas** de um produto de uma certa empresa que ela o considera ser **influenciado exclusivamente** por quatro eventos - ações que ela pode adotar ou sofrer - independentes indicados como sendo:

1- *marketing*;
2- propaganda;
3- flutuações na economia; ou,
4- efeitos sazonais.

Cada um deles possui uma **intensidade diferente**.

Da leitura do enunciado extraímos as probabilidades de ocorrência de cada um dos eventos influenciadores:

- Ação de *marketing* $\rightarrow P(E_1) = 0,40$;
- Ação de propaganda $\rightarrow P(E_2) = 0,30$;
- Flutuações na economia $\rightarrow P(E_3) = 0,20$; ou,
- Sazonalidade $\rightarrow P(E_4) = 0,10$.

As probabilidades de incremento das vendas (B) pela ocorrência dos eventos causadores são (**posto ter ocorrido o evento** E_i):

- $P(B|E_1) = 0,07$;
- $P(B|E_2) = 0,075$;
- $P(B|E_3) = 0,03$; e,
- $P(B|E_4) = 0,02$.

Para responder à indagação do problema ("Qual a causa mais provável?") podemos invertê-la e reformulá-la:

"Qual a probabilidade de ter ocorrido cada um dos quatro eventos (E_1, E_2, E_3, E_4) **posto** (dado) ter ocorrido um incremento nas vendas?

Calculemos para cada um deles usando o Teorema de Bayes:

$$P(E_i|B) = \frac{P(E_i) \times P(B|Ei)}{\sum_{i=1}^{n} [P(E_i) \times P(B|E_i)]}$$

Probabilidade da empresa ter realizado uma ação de *marketing*, **posto** ter ocorrido um incremento nas vendas de seu produto:

$$\begin{aligned}
P(E_1|B) &= \frac{P(E_1) \times P(B|E1)}{\sum_{i=1}^{4} [P(E_i) \times P(B|E_i)]} \\
P(E_1|B) &= \frac{0,40 \times 0,07}{(0,40 \times 0,07) + (0,30 \times 0,075) + (0,20 \times 0,03) + (0,10 \times 0,02)} \\
P(E_1|B) &= 0,478
\end{aligned}$$

Probabilidade da empresa ter realizado propaganda, **posto** ter ocorrido um incremento nas vendas de seu produto:

$$\begin{aligned}
P(E_2|B) &= \frac{P(E_2) \times P(B|E2)}{\sum_{i=1}^{4} [P(E_i) \times P(B|E_i)]} \\
P(E_2|B) &= \frac{0,30 \times 0,075}{(0,40 \times 0,07) + (0,30 \times 0,075) + (0,20 \times 0,03) + (0,10 \times 0,02)} \\
P(E_2|B) &= 0,385
\end{aligned}$$

Probabilidade da empresa ter ocorrido flutuações na economia, **posto** ter ocorrido um incremento nas vendas de seu produto:

$$\begin{aligned}
P(E_3|B) &= \frac{P(E_3) \times P(B|E3)}{\sum_{i=1}^{4} [P(E_i) \times P(B|E_i)]} \\
P(E_3|B) &= \frac{0,20 \times 0,03}{(0,40 \times 0,07) + (0,30 \times 0,075) + (0,20 \times 0,03) + (0,10 \times 0,02)} \\
P(E_3|B) &= 0,103
\end{aligned}$$

Probabilidade da empresa ter ocorrido efeitos sazonais, **posto** ter ocorrido um incremento nas vendas de seu produto:

$$
\begin{aligned}
P(E_4|B) &= \frac{P(E_4) \times P(B|E4)}{\sum_{i=1}^{4} \left[P\left(E_i\right) \times P\left(B|E_i\right)\right]} \\
P(E_4|B) &= \frac{0,10 \times 0,02}{(0,40 \times 0,07) + (0,30 \times 0,075) + (0,20 \times 0,03) + (0,10 \times 0,02)} \\
P(E_4|B) &= 0,034
\end{aligned}
$$

Respostas:

1- Os cálculos indicam que o evento mais provável pelo incremento das vendas observado naquele mês foi o de uma **ação de marketing**;
2- A probabilidade de incremento das vendas em um determinado mês como resultado dos quatro possíveis eventos indicados é o **próprio denominador do Teorema de Bayes**: 0,058.

> Exemplo: Considere 5 urnas, cada uma delas contendo 6 bolas. Duas dessas urnas (urnas tipo C_1) possuem 3 bolas brancas em seu interior. Duas outras (urnas tipo C_2) possuem 2 bolas brancas em seu interior e a última (urnas tipo C_3) possui 6 bolas brancas em seu interior (cf. Figura 4.22).

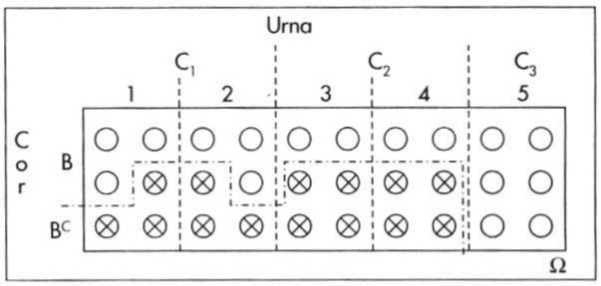


Figure 4.22: Cinco urnas cada uma com 6 bolas em cores de diferentes quantidades da cor branca

Escolhida aleatoriamente uma urna retira-se uma bola. Qual a probabilidade da urna escolhida ter sido a urna C_3 **sabendo-se que a bola retirada foi branca**?

Desejamos determinar $P(C_3|Branca)$

Da leitura do enunciado extraímos as seguintes informações:

$$
\begin{aligned}
P(C_1) &= \frac{2}{5} \\
P(C_2) &= \frac{2}{5} \\
P(C_3) &= \frac{1}{5} \\
P(Branca|C_1) &= \frac{1}{2} \\
P(Branca|C_2) &= \frac{1}{3} \\
P(Branca|C_3) &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(C_3|Branca) &= \frac{P(C_3) \times P(Branca|C_3)}{\sum_{i=1}^{3} \left[P\left(C_i\right) \times P\left(Branca|C_i\right)\right]} \\
P(C_3|Branca) &= \frac{0,20 \times 1,00}{(0,40 \times 0,50) + (0,40 \times 0,33) + (0,20 \times 1,00)} \\
P(C_3|Branca) &= 0,375
\end{aligned}
$$

4.4 Teoremas da Teoria das probabilidades

4.4.1 Teorema 01

Se E é um evento num espaço discreto Ω, então $P(E)$ é igual à soma das probabilidades de ocorrência de todos os elementos do espaço amostral que satisfazem ao evento de interesse E .

Sejam $E_1, E_2, E_3, ...$ a sequência finita ou infinita de eventos que satisfazem ao evento de interesse E. Assim, $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3....$ Como $E_1, E_2, E_3, ...$ são eventos **mutuamente exclusivos**, pelo terceiro postulado das probabilidades teremos:

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + ...$$

Exemplo: Lançamento de uma moeda duas vezes

Espaço amostral dos possíveis eventos (resultados): $\Omega = \{(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)\}$

- Evento de interesse E: obter ao menos uma *cara*
- Eventos que satisfazem: $E_1 = \{(cara, cara)\}$; $E_2 = \{(cara, coroa)\}$; $E_3 = \{(coroa, cara)\}$

A probabilidade de E ($P(E)$)será a soma das probabilidades dos eventos que o satisfazem:

$$P(E) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

4.4.2 Teorema 02

Se um experimento aleatório pode ter N resultados possíveis e equiprováveis e um evento E pode ter n resultados que o satisfazem, então $P(E) = \frac{n}{N}$.

Sejam $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_N$ os resultados do espaço amostral Ω, cada um deles equiprovável ($P(E_i = \frac{1}{N}$). Se E é a união de n desses eventos **mutuamente exclusivos**, pelo terceiro postulado das probabilidades teremos:

$$\begin{aligned}
P(E) &= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + ...P(E_n) \\
P(E) &= \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + ... + \frac{1}{N} \\
P(E) &= \frac{n}{N}
\end{aligned}$$

4.4.3 Teorema 03

Se E e E^c são eventos complementares no espaço amostra Ω então $P(E^c) = 1 - P(E)$.

Sendo os eventos E e E^c **mutuamente exclusivos** e também sendo $E \cup E^c = \Omega$, considerando-se que $P(\Omega) = 1$, pelos segundo e terceiro postulados tem-se:

$$\begin{aligned}
P(\Omega) &= 1 \\
1 &= P(E \cup E^c) \\
1 &= P(E) + P(E^c)
\end{aligned}$$

4.4.4 Teorema 04

$P(\emptyset) = 0$

Sendo Ω e $\emptyset$ são **mutuamente exclusivos** e, como de acordo com a definição de um espaço vazio $\Omega \cup \emptyset = \Omega$, pelo terceiro postulado tem-se:

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(\Omega \cup \emptyset) \\ P(\Omega) &= P(\Omega) + P(\emptyset) \\ P(\Omega) - P(\Omega) &= P(\emptyset) \\ P(\emptyset) &= 0 \end{aligned}$$

4.4.5 Teorema 05

Se A e B são eventos em um mesmo espaço amostral Ω e $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$.

Se $A \subset B$ então pode-se escrever: $B = A \cup (A^c \cap B)$ (verifica-se pelo correspondente diagrama de Venn).

Como A e $A^c \cap B$ são **mutuamente exclusivos**, pelo terceiro postulado tem-se:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A) + P(A^c \cap B) \\ P(A) &= P(B) - P(A^c \cap B) \end{aligned}$$

4.4.6 Teorema 06

A probabilidade de qualquer evento E em Ω está compreendida entre $0 \leq P(E) \leq 1$.

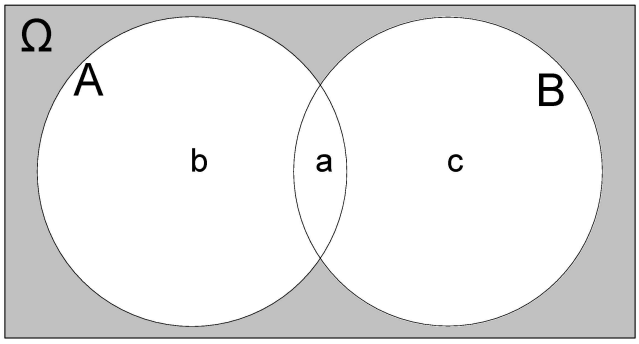
Estando $\emptyset \subset E \subset \Omega$ e considerando-se o Teorema 5 tem-se:

$$P(\emptyset) \leq P(E) \leq P(\Omega)0 \leq P(E) \leq 1$$

4.4.7 Teorema 07

Para dois eventos quaisquer em Ω, A e B tem-se que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Sejam as seguintes probabilidades para esses eventos **mutuamente exclusivos**:



- $P(A B) = a $;
- $P(A \cap B^c) = b$; e,
- $P(A^c \cap B) = c$.

$$P(A \cup B) = a + b + c$$
$$P(A \cup B) = (a + b) + (c + d) - a$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

4.4.8 Teorema 08

Para três eventos quaisquer em Ω, A, B e C tem-se que:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - \\ &P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + \\ &P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Escrevendo-se $A \cup B \cup C$ como $A \cup (B \cup C)$ e usando o Teorema 7 duas vezes (uma para $P[A \cup (B \cup C)]$ e a outra para $P(B \cup C)$ tem-se:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P[A \cup (B \cup C)] \\ P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B \cup C) - P[A \cap (B \cup C)] \\ P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P[A \cap (B \cup C)] \end{aligned}$$

Pela lei distributiva tem-se:

$$\begin{aligned} P[A \cap (B \cup C)] &= P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \\ P[A \cap (B \cup C)] &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P[(A \cap B) \cap (A \cap C)] \\ P[A \cap (B \cup C)] &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Chega-se a :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = \\ &P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + \\ &P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Módulo 5

Introdução a variáveis aleatórias

5.1 Função discreta de distribuição de probabilidade

Seja E um experimento aleatório e Ω seu espaço amostral. Uma função (X) que associe cada elemento ω pertencente a Ω a um número real $X(\omega) = x$, é denominada mais apropriadamente de função aleatória ou função estocástica.

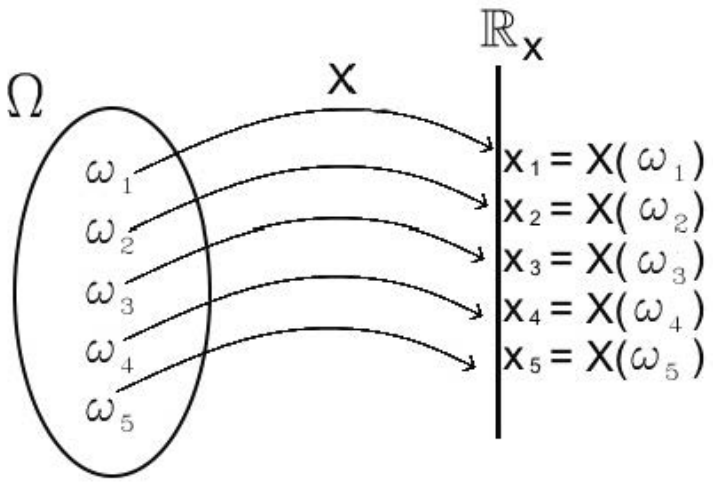


Figure 5.1: Função discreta de distribuição de probabilidade

Considere X uma variável aleatória discreta e suponha que os valores que ela pode assumir são dados por $x_1, x_2, x_3, ...$ dispostos em alguma ordem. Suponha que esses valores são assumidos tendo probabilidades de ocorrência dadas por:

$$P(X = x_k) = f(x_k)$$

com $k = 1, 2, ...$

Uma *função discreta de probabilidade* pode ser definida associando cada um dos possíveis valores da variável aleatória à sua probabilidade:

$$P(X = x) = f(x)$$

Para $x = x_k$,

$$P(X = x_k) = f(x_k)$$

Para que uma *função* $f(x)$ possa ser considerada uma **função (discreta ou contínua)** de distribuição de probabilidade, ela precisa necessariamente atender a:

$$0 \leq f(x_k) \leq 1$$

para qualquer $x_k \in \Omega$; e também que

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right) = 1.$$

A probabilidade de ocorrência de um dos valores da variável aleatória deverá estar sempre compreendida entre $0 \leq P(X = x_k) \leq 1$: **postulado do intervalo**.

A soma das probabilidades de todos os possíveis valores que a variável aleatória poderá assumir deverá ser sempre 1: **postulado da probabilidade do evento certo**.

> Exemplo: Suponha que uma moeda seja lançada duas vezes e que X seja a variável aleatória que represente o número de *caras* verificado. Defina o espaço amostral, associe para cada evento possível o valor da variável aleatória e definda uma função discreta de probabilidade correspondente.

O espaço amostral desse experimento é S = *{(cara,cara), (cara,coroa), (coroa,cara), (coroa,coroa)}* e a tabela abaixo relaciona o número de **caras** (o valor da variável aleatória X) associado a cada evento possível desse experimento:

As probabilidades de ocorrência de cada um desses eventos é:

Ponto amostral	(cara,cara)	(cara,coroa)	(coroa,cara)	(coroa,coroa)
X	2	1	1	0

Table 5.1: *

Função discreta de probabilidades da variável aleatória X

x_k	0	1
$P(X = x_k) = f(x_k)$	1/4	1/

$$
\begin{aligned}
P(cara, cara) &= \frac{1}{4} \\
P(cara, coroa) &= \frac{1}{4} \\
P(coroa, cara) &= \frac{1}{4} \\
P(coroa, coroa) &= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Para definir uma *função discreta de distribuição de probabilidade* deveremos associar a cada valor que a variável aleatória X assume sua correspondente *probabilidade de ocorrência.*

$$
\begin{aligned}
P(X = 0) &= P(coroa, coroa) = \frac{1}{4} \\
P(X = 1) &= P[(cara, coroa) \cup (coroa, cara)] \\
&= P(cara, coroa) + P(coroa, cara) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2} \\
P(X = 2) &= P(cara, cara) = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Uma *função de distribuição cumulativa* F para uma variável aleatória X exprime a probabilidade de que a variável aleatória X *assuma um valor inferior ou igual a determinado* x e é definida por:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Propriedades:

x_k	0	1	2
$P(X = x_k) = f(x_k)$	1/4	1/2	1/4

1- $0 \leq F(x) \leq 1$;
2- $F(x)$ é não decrescente: $F(x) \leq F(y)$ se $x \leq y$;
3- $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$;
4- $F(+\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

A função de probabilidade f para uma variável aleatória discreta X pode ser obtida de sua função de probabilidade cumulativa F pois para todo x em $(-\infty, \infty)$:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq n} f(u)$$

Equivale dizer que é a *soma sobre todos os valores u assumidos por X para os quais $u \leq x$.*

Se X é discreta e assume um número finito de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, então sua função de probabilidade cumulativa $F(x)$ será dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & x_2 \leq x < x_3 \\ \ldots & \\ f(x_1) + \ldots + f(x_n) & x_n \leq x < x_\infty \end{cases} \tag{5.1}$$

Exemplo: Suponha que uma moeda seja lançada duas vezes e que X seja a variável aleatória que represente o número de **caras** verificado. Especifique sua função de probabilidade cumulativa dessa variável aleatória e apresente seu gráfico.

Sua função de probabilidade cumulativa é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases} \tag{5.2}$$

O gráfico de sua função de probabilidade cumulativa é:

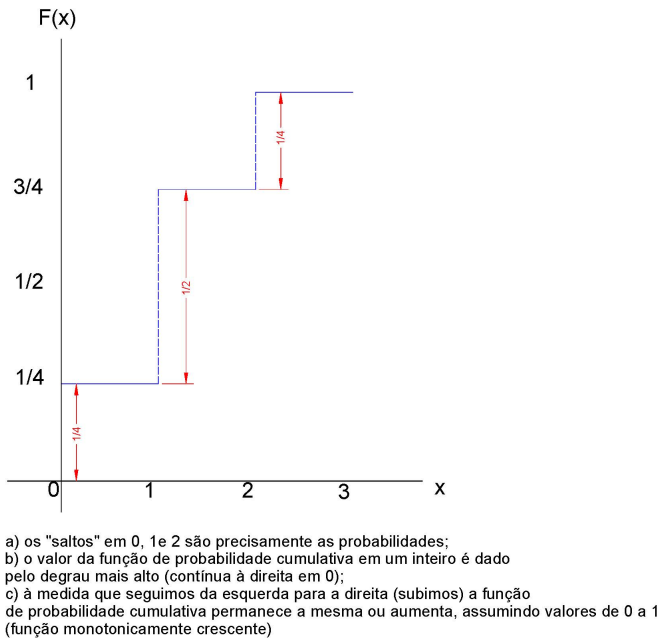


Figure 5.2: Função de probabilidade cumulativa

5.2 Função de densidade de probabilidade

Considerem os espaços amostrais a seguir $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5)$ representativos de 4 experimentos aleatórios e admitam também que todos os eventos possíveis são equiprováveis.

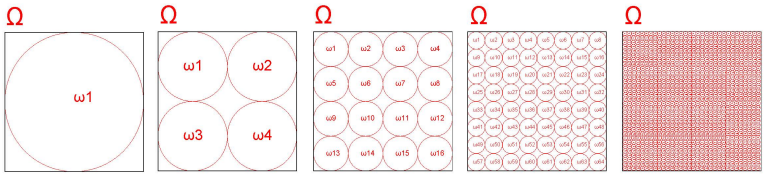


Figure 5.3: Diferentes espaços amostrais de um experimento aleatório (por razões gráficas desprezem o espaço fora dos círculos

Interpretem o último deles como um espaço amostral formado por ∞ pontos amostrais.

Os eventos que compõem os quatro primeiros espaços amostrais são variável aleatória discretas.

Discretas pois permitem a contagem dos possíveis valores (finitos ou infinitos contáveis) aleatórios que o experimento pode assumir. Mas no quinto espaço amostral temos incontáveis possibilidades.

Um *espaço amostral* com essa característica é representativo de uma *variável aleatória contínua.*

Sendo todos os eventos representados nos espaços amostrais **equiprováveis**, comparemos as probabilidades associadas a cada um desses possíveis resultados.

Em Ω_1, $P(\omega_1) = 1$

Em Ω_2, $P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = P(\omega_4) = 0,50$

Em Ω_3, $P(\omega_1) = P(\omega_2) = ... = P(\omega_{16}) = 0,0625$

Em Ω_4, $P(\omega_1) = P(\omega_2) = ... = P(\omega_{64}) = 0,015625$

Em Ω_5, $P(\omega_n) \to 0$, à medida que o número de eventos $n \to \infty$

A probabilidade individual de qualquer evento do quinto espaço amostral ocorrer $\to 0$.

Por essa razão com variáveis aleatórias contínuas não há sentido em se falar de uma *probabilidade pontual exata* (associada a um resultado específico).

Com variáveis aleatórias contínuas considera-se a probabilidade de realização de um *intervalo de valores* que ela assume e, ao estabelecermos sua função de probabilidade contínua ela apresentará as seguintes propriedades:

$$f(x) \geq 0$$

para todo $x \in (-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$$

Se X é uma variável aleatória contínua então a probabilidade de que X assuma qualquer valor em particular é zero, enquanto que a *probabilidade intervalar* de que X esteja entre dois valores diferentes, digamos, a e b será dada por:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

A interpretação gráfica de uma função de probabilidade de uma variável contínua é dada pela área sob a curva entre os limites de interesse: a e b.

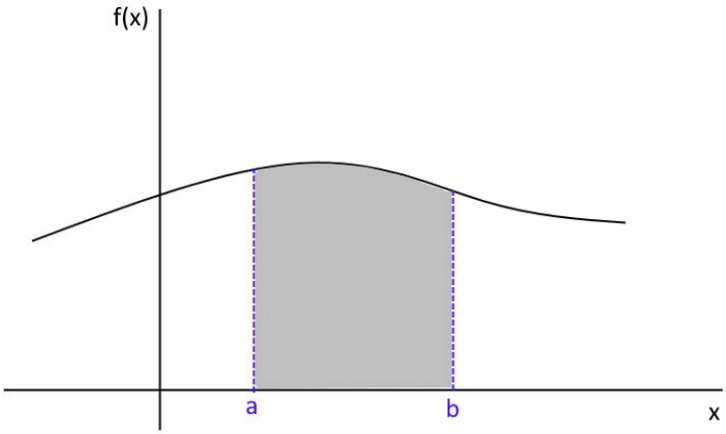


Figure 5.4: A área sob a curva de uma função de probabilidade de uma variável contínua entre dois valores quaisquer é a probabilidade de se observar valores entre esses dois pontos

Como $f(x) \geq 0$, essa curva estará acima do eixo x e a totalidade da área será igual a 1 posto que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

A função de probabilidade cumulativa: $F(x) = P(X \leq x)$ assumirá igualmente a forma de uma curva, crescente, aumentando de 0 para 1.

Exemplo: Seja a seguinte função e verifique se a função $f(x)$ pode ser a *função de densidade de probabilidade* da variável aleatória contínua X e determine qual a probabilidade associada a valores compreendidos no intervalo $0 \leq X \leq \frac{1}{2}$.

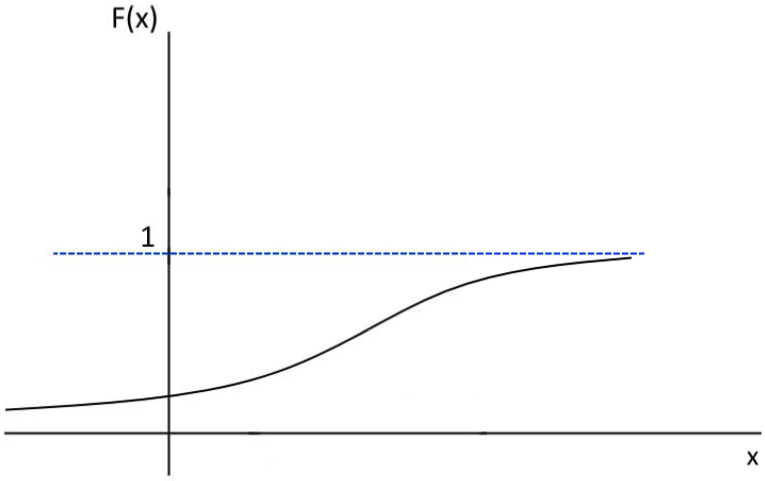


Figure 5.5: Função de probabilidade cumulativa

$$f(x) = \begin{cases} 2.x & \text{para} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{fora desse intervalo} \end{cases} \tag{5.3}$$

A resolução deste exemplo será feita de um modo *geométrico*.

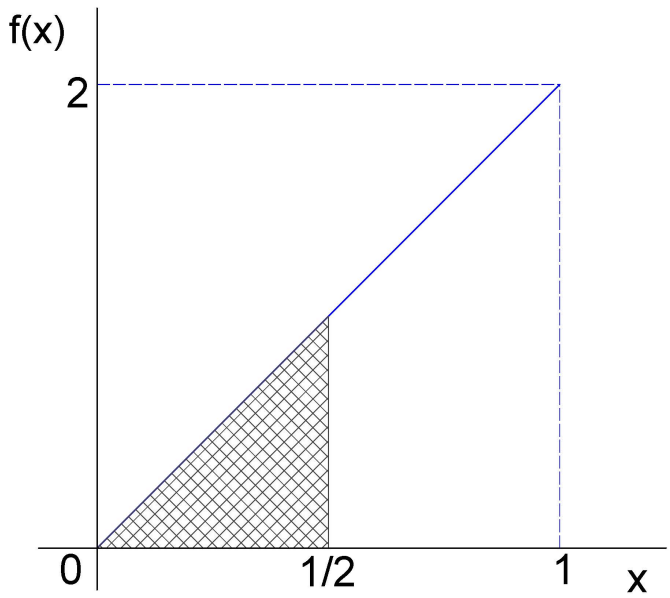


Figure 5.6: A probabiidade de se observar valores entre 0 e 1/2 é igual à area sob a função densidade de probabilidade entre esses dois valores

(a) Verificações para se aceitar a função como uma função de densidade de probabilidade para a variável aleatória X:

$$f(x) \geq 0$$

e,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

Resp.: Atende às duas condições (não assume valores menores que zero e a área sob a reta dessa função é unitária)

(b) Cálculo da probabilidade para o intervalo $0 \leq X \leq \frac{1}{2}$ a partir da área do triângulo hachurado ($\frac{base \times altura}{2}$):

$$P(0 \leq X \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} \times 1) = \frac{1}{4}$$

5.3 Esperança e variância de uma variável aleatória discreta

Coletando-se dados podemos analisá-los, por exemplo, em termos de sua distribuição, pelas estatísticas da média e variância.

De maneira análoga procedemos com variáveis aleatórias (discretas ou contínuas) onde dispomos das *probabilidades* de ocorrência associadas a cada um dos valores (discretos ou infinitos numeráveis) que ela pode assumir.

A *esperança matemática* (valor esperado ou expectância) de uma variável aleatória discreta é dada pela *somatória do produto* de cada um dos valores que ela pode assumir pela probabilidade associada a cada um desses valores.

Seja X uma variável aleatória discreta que pode assumir os valores $x_1, x_2, \ldots x_n$; e sejam $P_1, P_2, \ldots, P_n$ as respectivas probabilidades associadas às suas ocorrências.

A esperança da variável X, denotada por $E(X)$ será:

$$E\left(X\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i.P_i$$

Com n sendo o número de possíveis resultados que a variável X pode assumir.

A expressão anterior é semelhante àquela usada para se calcular a média para frequências de dados sendo que agora, no lugar de se utilizar a frequência relativa a cada dado observado, temos as probabilidades dadas por um modelo teórico pressuposto.

Algumas propriedades envolvendo a esperança:

1- Se c é uma contante qualquer, então: $E(c) = c$ $(c \in \mathbb{R})$;
2- Se c é uma contante qualquer, então: $E(cX) = c.E(X)$ $(c \in \mathbb{R})$;
3- Se c é uma contante qualquer, então: $E(X \pm c) = E(X) \pm c$ $(c \in \mathbb{R})$;
4- Se X e Y são duas variáveis aleatórias quaisquer, então: $E(X + / - Y) = E(X) + / - E(Y)$;
5- Se X e Y são duas variáveis aleatórias independentes quaisquer, então: $E(X.Y) = E(X).E(Y)$.

A variância de uma variável aleatória qualquer X, denotada por $Var(X)$, será dada por:

$$Var\left(X\right) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$Var\left(X\right) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2.P_i$$

Algumas propriedades envolvendo a variância:

1- Se c é uma contante qualquer, então: $Var(c) = 0$ $(c \in \mathbb{R})$;

2- Se c é uma contante qualquer, então: $Var(cX) = c^2.Var(X)$ $(c \in \mathbb{R})$;

3- Se X e Y são duas variáveis aleatórias **independentes** quaisquer, então: $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$;

4- Se X e Y são duas variáveis aleatórias **quaisquer**, então: $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2Cov(X, Y)$ (também).

A covariância $(Cov(X, Y))$ entre duas variáveis aleatórias quaisquer X e Y é dada por:

$$Cov\,(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Exemplo: Seja X uma variável aleatória discreta que indica o *número de pontos observados na face superior de um dado* quando ele é lançado. Calcule a esperança e a variância dessa variável aleatória.

Table 5.2: *

Função discreta de distribuição de probabilidades de X

x_i	$P(X = x_i)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6
Total	1

$E(X) = \frac{1}{6}.(1+2+3+4+5+6) = 3,50$

$$\begin{aligned} Var(X) &= (1-3,50)^2.(\frac{1}{6}) + (2-3,50)^2.(\frac{1}{6}) + \\ &(3-3,50)^2.(\frac{1}{6}) + (4-3,50)^2.(\frac{1}{6}) + (5-3,50)^2.(\frac{1}{6}) + \\ &(6-3,50)^2.(\frac{1}{6}) \\ &= 2,90 \end{aligned}$$

Exemplo: Uma empresa de caminhões de aluguel possui uma frota composta de 4 veículos. O aluguel é cobrado por diária de uso de um caminhão e a função de distribuição de probabilidade de locações diárias está a seguir especificada. Calcule a esperança e a variância de locação diária dessa empresa.

$E(X) = (0.0,10) + (1.0,20) + 2.0,30) + (3.0,30) + (4.0,10) = 2,10$ (caminhões por dia)

Table 5.3: *

Função discreta de distribuição de probabilidade de locações diárias

x_i	$P(X = x_i)$
0	0,10
1	0,20
2	0,30
3	0,30
4	0,10

$$\begin{aligned} Var(X) &= (0-2,10)^2.0,10 + (1-2,10)^2.0,20 + (2-2,10)^2.0,30 + \\ &(3-2,10)^2.0,30 + (4-2,10)^2.0,10 \\ &= 1,29^1 \end{aligned}$$

[1]: (caminhões por dia)^2

5.4 Esperança e variância de uma variável aleatória contínua

A esperança e a variância de uma variável aleatória contínua são dadas, respectivamente, por:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)\,dx$$

$$Var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2.f(x)\,dx$$

Módulo 6

Introdução a modelos teóricos de probabilidade

Existem variáveis aleatórias discretas ou contínuas, que apresentam certas características ou padrões de comportamento. Para essas variáveis, com base nesses comportamentos típicos, foram estruturados modelos teóricos de distribuições de probabilidade (variáveis discretas) e de densidade de probabilidade (variáveis contínuas) e derivadas as expressões de suas esperanças e variâncias.

6.1 Modelos teóricos discretos

6.1.1 Bernoulli

Variável aleatória com distribuição *Bernoulli* é uma variável definida por um experimento probabilístico em que os resultados possíveis se resumem a apenas dois: **sucesso** ou **fracasso** (ocorrência ou não).

Caracterização de uma variável aleatória X com distribuição de Bernoulli: $X \sim Ber(p)$

x_i	Evento	$P(X = x_i)$
1	Sucesso	p
0	Fracasso	q=1-p
Σ	-	1

Para uma variável de Bernoulli:

- Esperança: $E(X) = p$
- Variância: $VAR(X) = p(1 - p)$

Exemplo: Seja X uma variável aleatória resultante do lançamento de um dado uma única vez e cujo sucesso está definido como **obter a face com 5 pontos**. Calcule a probabilidade de sucesso e fracasso, assim como sua variância.

x_i (face 5 no lançamento de um dado)	Evento	$P(X = x_i)$
1	Sucesso	p=1/6
0	Fracasso	q=5/6
Σ	-	1

- Esperança: $E(X) = \frac{1}{6}$
- Variância: $Var(X) = \frac{5}{36}$

Admita agora X uma variável aleatória resultante de realização de n tentativas (repetições) de Bernoulli e definindo x como sendo o número de sucessos verificados nessas n tentativas. Desse modo, proporção de sucessos observada após n repetições é expressa como $\frac{x}{n}$.

Se p é a probabilidade de sucesso a cada repetição e se ϵ é um número qualquer positivo, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{x}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) = 0$$

A Lei dos grandes números para infinitas repetições de Bernoulli afirma que, após um **grande número de repetições** (n), a proporção de sucessos observada ($\frac{x}{n}$) **irá se aproximar** da probabilidade teórica da variável aleatória de Bernoulli p.

6.1.2 Binomial

Variável aleatória com distribuição Binomial é uma variável resultante da repetição de um **experimento modelado por uma variável de Bernoulli** (isto é, a cada repetição apenas dois resultados podem ocorrer: sucesso ou fracasso).

Para que X seja uma variável aleatória com distribuição Binomial: $X \sim b(n, p)$ é necessário que:

- o experimento deve ser realizado um número n finito de vezes;
- cada repetição deve ser independente das demais;
- cada repetição é, em essência, um ensaio de Bernoulli onde só pode haver dois resultados: sucesso ou fracasso;
- a probabilidade de sucesso p em cada repetição é **sempre a mesma**; e, consequentemente,
- a probabilidade de fracasso $q = 1 - p$ em cada repetição é **também a mesma**.

Considerem o diagrama de árvore ilustrado na Figura 6.1 que representa, esquematicamente, 3 repetições independentes de um evento modelado por uma variável de Bernoulli, com probabilidade individual de sucesso $P(X = 1) = p$ e, de fracasso, $P(X = 0) = 1 - p = q$.

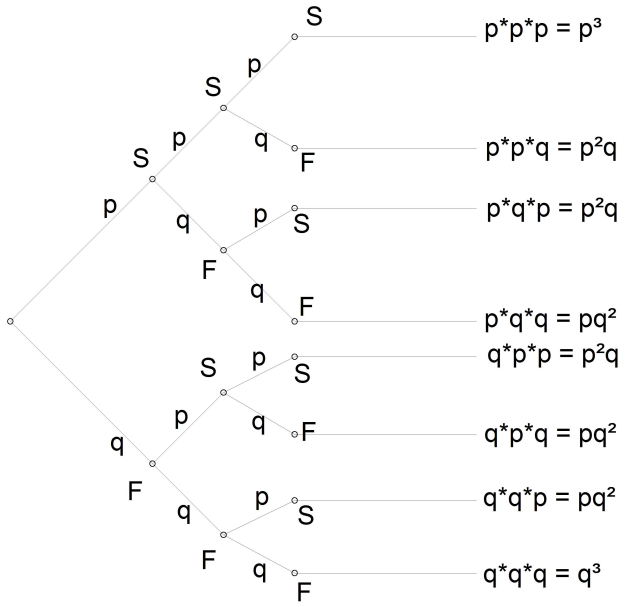


Figure 6.1: Três repetições independentes de um experimento aleatório modelado por uma variável de Bernoulli

Table 6.1: *
Função discreta de probabilidade da variável $X \sim b(n, p)$ com $n = 3$ (repetições)

Número de sucessos	Probabilidade	Probabilidade **se** $p = 0,50$
0	q^3	$\frac{1}{8}$
1	$3pq^2$	$\frac{3}{8}$
2	$3p^2q$	$\frac{3}{8}$
3	p^3	$\frac{1}{8}$

Se p é a probabilidade de se verificar sucesso em qualquer uma das n repetições de Bernoulli realizadas no experimento aletório então uma variável aleatória Geométrica X definida sobre esse experimento apresentará k sucessos após n repetições independentes e terá a seguinte função de probabilidade:

$$f(k) = P(X = k)$$
$$f(k) = C_k^n.p^k.q^{(n-k)}$$
$$f(k) = \frac{n!}{k!.(n-k)!}.p^k.q^{(n-k)}$$

Sendo a probabilidade p de sucesso, igual em todas as repetições, então:

- Esperança: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i.P(X = x_i) = n.p$
- Variância: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = n.p.q$

Exemplo: Numa prova com 6 questões, a probabilidade de que um aluno acerte cada uma delas é de 0,30. Admitindo que a resolução dessas 6 questões é feita de modo independente, qual a probabilidade desse aluno acertar 4 questões?

1- cada questão apresenta apenas duas possibilidades: **acertar ou errar**; assim, esse experimento aleatório pode seguir o modelo teórico de Bernoulli tendo o evento de sucesso definido como: **a chance de acertar uma prova**, com probabilidade de ocorrência $p = 0,30$;
2- ao se repetir esse experimento $n = 6$ (pois este é o número de questões a serem resolvidas) o experimento passa seguir o modelo teórico Geométrica pois nos foi assegurada a independência entre cada repetição bem como a constância da probabilidade p.

A probabilidade de se acertar $k = 4$ questões em $n - 6$ repetições independentes tendo cada uma uma probabilidade de sucesso $p = 0,30$ será então:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= C_k^n.p^k.q^{n-k} \\ P(X = 4) &= 15.0,30^4.0,70^{(6-4)} \\ &= 0,0595 \end{aligned}$$

Conclusão: a probabilidade de um aluno acertar 4 questões das 6 resolvidas, considerando a probabilidade associada ao acerto de cada questão, é de 0,0595.

Exemplo: Ainda utilizando a construções teórica desse experimento, admitamos que nosso interesse reside em obter as seguintes probabilidades a ele associadas: 1- probabilidade do aluno não acertar nenhuma questão;
2- probabilidade do aluno acertar todas as questões;
3- probabilidade do aluno acertar no mínimo 2 questões; e a
4- probabilidade do aluno acertar no máximo 2 questões.

A resposta aos dois primeiros itens é imediata pela simples aplicação dos dados ao odelo, pois o número de sucessos desejado é $k = 0$ no primeiro e $k = 6$ no segundo (e $p = 0,30$ para todos) . Assim:

$$\begin{aligned} P\left(X = k\right) &= C_k^n.p^k.q^{n-k} \\ P\left(X = 0\right) &= 1.0,30^0.0,70^{(6-0)} \\ &= 0,1176 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(X = k\right) &= C_k^n.p^k.q^{n-k} \\ P\left(X = 6\right) &= 1.0,30^6.0,70^{(6-6)} \\ &= 0,000729 \end{aligned}$$

A resposta aos dois últimos itens irá demandar o uso da **regra da adição de probabilidades** e, como cada evento é disjunto dos demais, essa regra recai sobre a simples adição das probabilidades envolvidas.

Ao perguntar qual a probabilidade do aluno acertar no **mínimo** 2 questões ($P(X \geq 2)$) equivale a se perguntar qual a probabilidade do aluno acertar 2 **OU** 3 **OU** 4 **OU** 5 **OU** 6 questões. Assim, temos como elementos desses eventos de sucesso $2, 3, 4, 5, 6$. Assim a solução passará pelo cálculo das probabilidades individuais para **cada** um desses eventos de sucesso que serão simplesmente somadas pois, a ocorrência de cada um desses eventos de sucesso é disjunta dos demais (se ocorrer 2 não ocorre simultaneamente 3).

$$\begin{aligned} P\left(X = k\right) &= C_k^n.p^k.q^{n-k} \\ P\left(X = 2\right) &= 15.0,30^2.0,70^{(6-2)} \\ &= 0,3241 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(X = k\right) &= C_k^n.p^k.q^{n-k} \\ P\left(X = 3\right) &= 20.0,30^3.0,70^{(6-3)} \\ &= 0,1852 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(X=k\right) &= C_k^n.p^k.q^{n-k} \\ P\left(X=4\right) &= 15.0,30^4.0,70^{(6-4)} \\ &= 0,0595 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(X=k\right) &= C_k^n.p^k.q^{n-k} \\ P\left(X=5\right) &= 6.0,30^5.0,70^{(6-5)} \\ &= 0,01020 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(X=k\right) &= C_k^n.p^k.q^{n-k} \\ P\left(X=6\right) &= 1.0,30^6.0,70^{(6-6)} \\ &= 0,000729 \end{aligned}$$

Assim, $P\left(X \geq 2\right) = 0,3241 + 0,1852 + 0,0595 + 0,01020 + 0,00079 = 0,5797$

```r
# Defina o número de repetições (n) e o número de sucessos (k)

n=10  # Número de repetições
k=c(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)   # Número de sucessos varia de nenhum (0) até dez (10) acertar
 ↪  as dez questões
p=0.30 # A probabilidade em cada repetição de Bernoulli


# Probabilidade de k sucessos em n repetições (utilizando a função 'dbinom')

probabilidade <- dbinom(k, n, prob = p)  # Neste exemplo, 0.5 é a probabilidade de sucesso

# Crie uma tabela com duas colunas (Número de Sucessos e Probabilidade)

tabela <- data.frame(Número_de_Sucessos = k, Probabilidade = probabilidade)

# Exiba a tabela

print(tabela)
```

```
##    Número_de_Sucessos Probabilidade
## 1                   0  0.0282475249
## 2                   1  0.1210608210
```

```
## 3                    2  0.2334744405
## 4                    3  0.2668279320
## 5                    4  0.2001209490
## 6                    5  0.1029193452
## 7                    6  0.0367569090
## 8                    7  0.0090016920
## 9                    8  0.0014467005
## 10                   9  0.0001377810
## 11                  10  0.0000059049
```

Exemplo: Uma pessoa trabalha em 3 empregos onde desenvolve atividades iguais, sendo remunerada também igualmente nos três lugares. A probabilidade de que o pagamento saia até o 2° dia útil nos três empregos é de 0,85. Qual a probabilidade de apenas um salário sair até o 2° dia útil?

1- a probabilidade de ocorrência do pagamento até o 2° dia útil em cada emprego pode ser modelada por uma variável aleatória de Bernoulli pois apresenta apenas duas possibilidades: ocorrer ou não, cuja probabilidade de sucesso nos foi dada: $p = 0,85$;
2- os três empregos podem ser considerados como repetições desse experimento básico;
3- esse experimento final pode ter as probabilidades modelaas por uma variável aleatória Geométrica com evento de sucesso definido como **chance de se receber apenas um pagamento até o 2° dia útil** $(k = 1)$ pois consiste na repetição de $(n = 3)$ experimentos de Bernoulli independentes e com probabilidade individual constante $(p - 0,85)$.

A probabilidade de se receber o pagamento até o 2° dia útil **em apenas um emprego será dada por**:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= C_k^n.p^k.q^{n-k} \\ P(X = 1) &= 3.0,85^1.0,15^2 \\ &= 0,0574 \end{aligned}$$

Conclusão: a probabilidade desse trabalhador receber **apenas um salário** até o 2° dia útil do mês é de 0,0574.

```r
# Defina o número de repetições (n) e o número de sucessos (k)

n=3  # Número de repetições
k=c(0,1,2,3)    # Número de sucessos varia de nenhum (0) até três (3) receber até o segundo
 ↪  dia nos três empregos
p=0.85 # A probabilidade em cada repetição de Bernoulli
```

```r
# Probabilidade de k sucessos em n repetições (utilizando a função 'dbinom')

probabilidade = dbinom(k, n, prob = p)  # Neste exemplo, 0,856 é a probabilidade de sucesso

# Crie uma tabela com duas colunas (Número de Sucessos e Probabilidade)

tabela = data.frame(Número_de_Sucessos = k, Probabilidade = probabilidade)

# Exiba a tabela

print(tabela)
```

```
##   Número_de_Sucessos Probabilidade
## 1                  0      0.003375
## 2                  1      0.057375
## 3                  2      0.325125
## 4                  3      0.614125
```

6.1.3 Poisson

A distribuição de *Poisson* (assim chamada em homenagem a Siméon Denis Poisson que a descobriu no início do século XIX) é largamente empregada quando se deseja **contar o número de eventos raros** cuja probabilidade m[edia seja dada em termos de um **intervalo de tempo**, ou em uma **determinada extensão**, **área** ou **volume**

Uma variável aleatória discreta X com Distribuição de *Poisson* é aquela que pode assumir **infinitos valores numeráveis** ($k = 0, 1, 2, .s, \infty$). Sua representação é: $X \sim Pois(\lambda)$ e sua função de probabilidade para esses valores é:

$$\begin{aligned} f(k) &= P(X = k) \\ &= \frac{\lambda^k . \epsilon^{-\lambda}}{k!} \end{aligned}$$

Com $\epsilon = 2,718$ (número irracional de Euler).

A esperança e a variância de uma variável aleatória discreta com Distribuição de *Poisson* são dados pelo seu parãmetro λ que expressa o número médio de eventos ocorrendo no **intervalo de tempo**, ou em uma **determinada extensão**, **área** ou **volume** :

- Esperança: $E(X) = \lambda$;
- Variância: $Var(X) = \lambda$

Exemplo:Uma central telefônica recebe em média 5 chamadas por minuto. Supondo que a Distribuição de Poisson seja adequada a esse contexto, obter as probabilidade de que essa central não receba chamadas num intervalo de 1 e que receba no máximo duas chamadas em 4 minutos.

Dados do problema:

1- λ = é o parãmetro da distribuição de Poisson (a esperança, a média); assim temos $\lambda = 5$ chamadas por **minuto** (é importante atentar para qual é a unidade associada ao valor do λ);
2- **não receber** chamada alguma equivale a um $k = 0$;
3- na sequência, ao se perguntar sobre a probabilidade de se receber **no máximo** duas chamadas em **4 minutos** equivale a não receber chamada alguma **ou** uma chamada **ou** duas chamadas (soma das probabilidades de eventos mutuamente excludentes);
4- **mas** é necessário reestimar o valor de λ pois agora o intervalo de tempo é de **4 minutos** e o valor que nos foi dado é para **1 minuto** (o que é feito mediante uma simples regra de três: 5 chamadas em **um ninuto** passam a ser 20 chamadas em **quatro minnutos**)

Probabilidade de **não receber chamada alguma**:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{\lambda^k.\epsilon^{-\lambda}}{k!} \\ P(X = 0) &= \frac{5^0.\epsilon^{-5}}{0!} \\ P(X = 0) &= \frac{1.0,00673}{1} \\ &= 0,00673 \end{aligned}$$

Probabilidade de receber no **máximo 2** chamadas em 4 minutos ($\lambda = 20$ chamadas por 4 minutos):

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \frac{20^0.\epsilon^{-20}}{0!} = 2,061154e-09 \\ P(X = 1) &= \frac{20^1.\epsilon^{-20}}{1!} = 4,122307e-08 \\ P(X = 2) &= \frac{20^2.\epsilon^{-20}}{2!} = 4,122307e-07 \end{aligned}$$

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 4,554699e-7$

```r
# Defina o número de repetições (n) e o número de sucessos (k)

k= 0    # Número de sucessos varia de nenhum (0) até infinito
l= 5 # A probabilidade de sucesso na proporção dada (área, comprimento, tempo...) 5 chamadas
 ↪  por minuto

k1= c(0,1,2)
l1= 20 # 5 chamadas em 1 minuto >> 20 chamadas em 20 minutos


# Probabilidade de k sucessos em n repetições (utilizando a função 'dbinom')

probabilidade = dpois(k, lambda = l)  # Neste exemplo, l=5 chamadas por minuto

probabilidade1 =  dpois(k1, lambda = l1)  # Neste exemplo, l=20 chamadas por minuto


# Crie uma tabela com duas colunas (Número de Sucessos e Probabilidade)

tabela = data.frame(Número_de_Sucessos = k, Probabilidade = probabilidade)
tabela1 = data.frame(Número_de_Sucessos = k1, Probabilidade = probabilidade1)


# Exiba a tabela

print(tabela)
```

```
##   Número_de_Sucessos Probabilidade
## 1                  0   0.006737947
```

```r
print(tabela1)
```

```
##   Número_de_Sucessos Probabilidade
## 1                  0  2.061154e-09
## 2                  1  4.122307e-08
## 3                  2  4.122307e-07
```

> Exemplo: Um posto de bombeiros recebe em média 3 chamadas por dia. Admitindo que as probabilidades associadas ao recebimento de diferentes números de chamadas podem ser modeladas por uma variável aleatória de *Poisson* qual seria a probabilidade desse posto receber 4 chamadas em 2 dias?

A unidade da esperança dessa variável de *Poisson* (λ) de chamadas nos foi dada **por dia** ao passo que a probabilidade pedida está associada a um período de **dois dias**, exigindo que a esperança λ seja convertida para essa nova unidade (uma simples regra de três: 3 chamadas por dia, então para 2 dias, 6 chamadas). Assim, a probabilidade pedida será:

$$
\begin{aligned}
P(X=k) &= \frac{\lambda^k.\epsilon^{-\lambda}}{k!} \\
P(X=4) &= \frac{6^4.\epsilon^{-6}}{4!} \\
&= 0,1338
\end{aligned}
$$

A figura abaixo ilustra a distribuição acumulada das probabilidades de alguns sucessos para o exemplo em estudo.

```
library(tidyverse)
```

```
## -- Attaching core tidyverse packages ------------------------ tidyverse 2.0.0 --
## v dplyr     1.1.2     v readr     2.1.4
## v forcats   1.0.0     v stringr   1.5.0
## v lubridate 1.9.2     v tibble    3.2.1
## v purrr     1.0.1     v tidyr     1.3.0
## -- Conflicts ------------------------------------------ tidyverse_conflicts() --
## x readr::col_factor() masks scales::col_factor()
## x purrr::discard()    masks scales::discard()
## x dplyr::filter()     masks stats::filter()
## x dplyr::group_rows() masks kableExtra::group_rows()
## x dplyr::lag()        masks stats::lag()
## i Use the conflicted package (<http://conflicted.r-lib.org/>) to force all conflicts to become error
```

```
prob=c(0.00248, 0.01448, 0.044643, 0.08929, 0.1338, 0.16072, 0.16072, 0.137762, 0.256105)
k=c("k=0", "k=1", "k=2", "k=3", "k=4", "k=5", "k=6", "k=7", "soma(k=8,k=9,...,inf)")
legend_title="Sucessos"
nchamadas=data.frame(sucesso = k, proporcao= prob)
nchamadas=nchamadas %>%
  mutate(va_poisson = "Probabilidades segundo o modelo teórico de Poisson")
ggplot(nchamadas, aes(x = va_poisson, y =proporcao, fill = forcats::fct_rev(sucesso))) +
  geom_col( width = 0.2) +
  geom_text(aes(label = proporcao),size=3,
            position = position_stack(vjust = 0.5) ) +
  theme(legend.position = "right") +
  ylab("Probabilidade acumulada") +
  xlab(NULL)+
  scale_fill_discrete(name="Número de sucessos",
                      labels=rev(c("k=0", "k=1","k=2","k=3","k=4",
                               "k=5","k=6","k=7","soma(k=8,k=9,...,inf)")))
```

Exemplo: Por um posto de pedágio passam, em média, 5 carros por minuto. Qual a probabilidade de passarem exatamente 3 carros em 1 minuto?

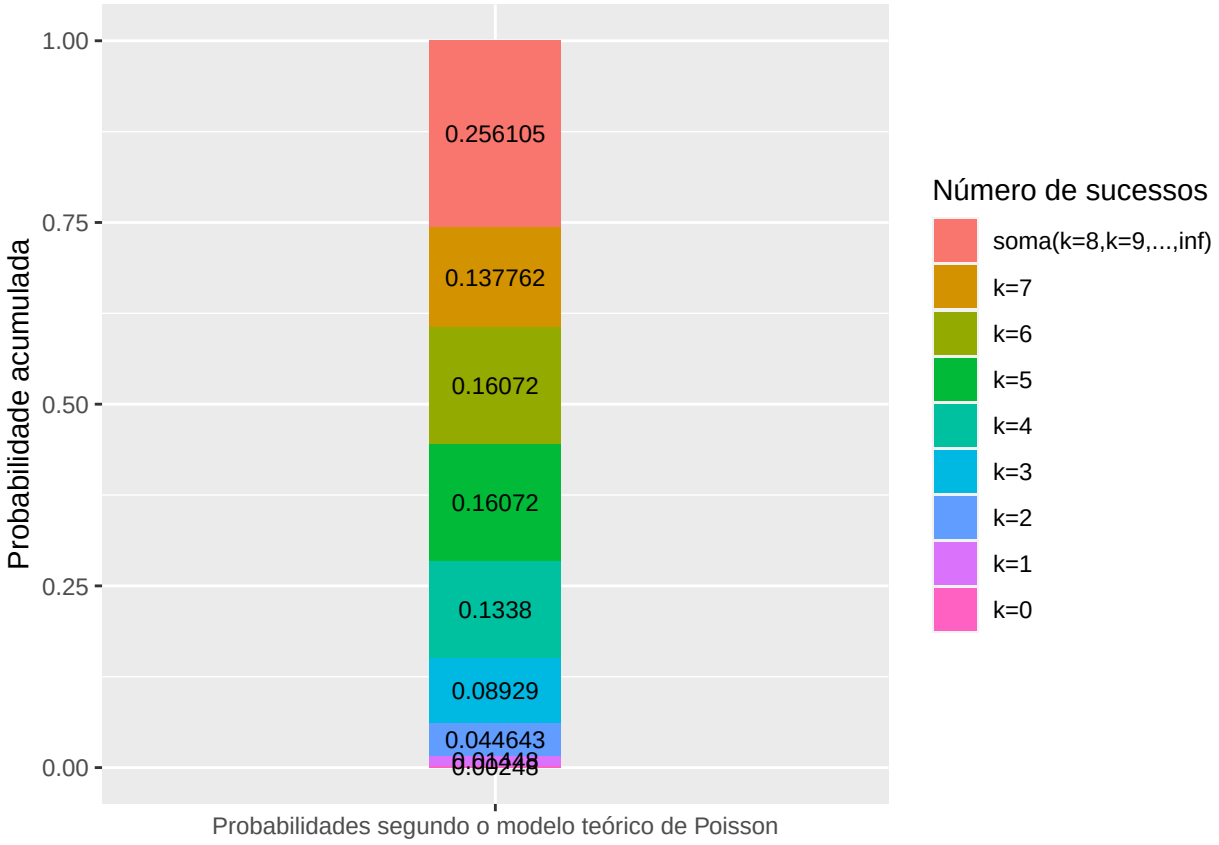


Figure 6.2: Gráfico ilustrativo das probabilidades acumuladas

$$
\begin{aligned}
P(X = k) &= \frac{\lambda^k.\epsilon^{-\lambda}}{k!} \\
P(X = 3) &= \frac{5^3.\epsilon^{-5}}{3!} \\
&= 0,1404
\end{aligned}
$$

Uma variável aleatória discreta de *Poisson* modela muito bem eventos raros; ou seja, aqueles que não acontecem com grande frequência para qualquer intervalo considerado (tempo, extensão, área, volume). Trata-se de uma caso de variável Geométrica no qual $n \to \infty$ e p é pequeno ($n \geq 50$ e $n.p \leq (5,7)$). Nesse cenário pode-se demonstrar que:

$$lim_{n\to\infty} P(X) = C_k^n.p^k.q^{n-k}$$

é igual a:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k.\epsilon^{-\lambda}}{k!}$$

Tal aproximação era, tempos atrás (antes da era computacional), bastante útil pois, para um n muito grande o cálculo fatorial era trabalhoso! Nesse contexto pode-se modelar o experimento acima, de modo bem aproximado, por uma variável aleatória de Poisson com $\lambda = n.p$:

$$f(k) = P(X = k) = \frac{n.p^k.\epsilon^{-n.p}}{k!}$$

6.1.4 Multinomial

A distribuição multinomial é uma generalização dadistribuição binomial - a qual admite apenas dois resultados: sucesso e fracasso - para as situações de mais de dois valores. Assim como a distribuição binomial, a distribuição multinomial é uma função de distribuição para processos discretos nos quais prevalecem probabilidades fixas para cada valor gerado de modo independente uns dos outros.

Admita que X seja uma variável aleatória com distribuição multinomial: $X_k \sim multinomial(n, p)$ que envolve um processo aleatório que possui um conjunto de k possíveis resultados, cada um com sua probabilidade p_k definida:

$$X_k = \begin{cases} X_1 \text{ com probabilidade } p_1 \\ X_2 \text{ com probabilidade } p_2 \\ \vdots \\ X_k \text{ com probabilidade } p_k \end{cases}$$

- $X_1, X_2, \dots, X_k$ são os k possíveis resultados assumidos pela variável aleatória multinomial X_k ;
- p é o vetor de probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_k$ associadas à ocorrência de cada um dos possíveis resultados da variável aleatória multinomial X_k;
- n é o número finito de vezes que o experimento é realizado;
- $n_1, n_2, \dots, n_k$ é o número de sucessos observados em cada um dos possíveis resultados que a variável aleatória multinomial X_k pode assumir, de tal modo que $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$;
- as probabilidades de sucesso p_k em cada uma das repetições são sempre as mesmas: indepenendência de resultados entre as as repetições.

A função de distribuição de probabilidades é dada por:

$$f(X = (n_1, n_2, \dots, n_k)) = P(X_1 = n_1; X_2 = n_2, \dots, X_k = n_k)$$
$$P(X_1 = n_1; X_2 = n_2, \dots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} . p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

A esperança e a variância de uma variável aleatória discreta com Distribuição de multinomial são dadas por:

- Esperança: $E(X_k) = n.p_k$;
- Variância: $Var(X_k) = n.p_k.(1 - p_k)$.

Exemplo: Em uma partida de xadrez dois jogadores têm a probabilidade de vencer, perder ou empatar. A probabilidade do jogador "A" vencer é 0,40, do jogador "B" vencer é 0,35 e do jogo terminar empatado é de 0,25. Calcule a probabilidade de, em 12 partidas, observar-se que o jogador "A" ganhou 7 partidas, o jogador "B" venceu 2 partidas e as 3 partidas restantes terminaram em empate.

Uma variável aleatória X pode ser definda para modelar a probabilidade dos diferentes resultados possíveis nesse experimento aleatório tal que $X_3 \sim multinomial(n, p)$ tal que:

$$X_3 = \begin{cases} X_1\text{: ”A” ganha probabilidade } p_1 = 0,40 \\ X_2\text{: ”B” ganha probabilidade } p_2 = 0,35 \\ X_3\text{: empate entre ”A” e ”B”probabilidade } p_3 = 0,25 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(X_1 = n_1; X_2 = n_2; X_3 = n_3) &= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \\ P(X_1 = 7; X_2 = 2; X_3 = 3) &= \frac{12!}{7!2!3!} \cdot 0,40^7 \cdot 0,35^2 \cdot 0,25^3 \\ P(X_1 = 7; X_2 = 2; X_3 = 3) &= 0.02483712 \end{aligned}$$

```r
# Defina as probabilidades de sucsesso de cada possível resultado da variável aleatória:
↪  p_(k). Admita que existam apenas têS:

p1= 0.4
p2= 0.35
p3= 0.25

# O número de repetições 'n' é automaticamente definido pelo arranjo de sucessos que se
↪  deseja estimar a probabilidade
x=c(7,2,3) # Nesse caso deseja-se 7 sucessos do resultado X_1, 2 do X_2 e 3 do X_3




# Probabilidade desse vetor de sucessos (utilizando a função 'dmultinom')

probabilidade = dmultinom(x=c(7,2,3), prob = c(0.4,0.35,0.25))

print(probabilidade)
```

```
## [1] 0.02483712
```

6.2 Modelos téoricos do tempo de espera

As distribuições do tempo de espera são outra importante classe de problemas associados com a quantidade de tempo que leva para a ocorrência de um evento específico de interesse. Dentro dessa classe de problemas se enquadram duas distribuições bastante conhecidas, são elas: geométrica e Geométrica negativa.

6.2.1 Geométrica

A distribuição geométrica é uma distribuição de probabilidade discreta que modela o número de tentativas independentes necessárias para obter o primeiro sucesso em um processo de Bernoulli, onde cada tentativa tem duas possibilidades: sucesso ou fracasso e a probabilidade de sucesso é constante e denotada por p sob as seguintes condicionantes:

1- cada experimento é um ensaio de Bernoulli (só poderá haver dois resultados possíveis: sucesso ou fracasso);
2- cada repetição deve ter seu resultado independente do resuluado das demais;
3- a probabilidade de sucesso (p) é constante para todas as repetições;
4- consequentemente, a probabilidade de fracasso ($q = 1 - p$) também o é; e,
5- o experimento é repetido segue até que se verifique o primeiro sucesso.

Considere o experimento aelatório de se lançar uma moeda **não honesta**, com probabilidade p de ocorrência de *Cara* e $(1 - p)$ de ocorrência de *Coroa*. Se definimos nosso evento de sucesso como sendo obter *Cara* no lançamento, quantos lançamentos serão necessários para se verificar a ocorrência de sucesso?

Admita uma sequência de n lançamentos: *{Coroa, Coroa, ..., Coroa, Cara}* onde no $n - simo$ lançamento verificou-se o sucesso. Assim sendo, podemos definir $j = (n - 1)$ como o número de tentativas **anteriores** fracassadas.

Uma variável aleatória X com Distribuição Geométrica, com parâmetro p $(0 \leq p \leq 1)$, é aquela que pode assumir **infinitos valores numeráveis** $(j = 0, 1, 2, .s, \infty)$ para a quantidade j de tentativas que **precedem o primeiro sucesso**, que será observado na tentativa seguinte $(j + 1)$.

Sua representação é $X \sim geo(p)$ e sua função de probabilidade é:

$$\begin{aligned} f(X = x; p) &= P(X = j) = p.(1 - p)^j \\ &= P(X = j) = p.q^j \end{aligned}$$

O Modelo geométrico pode ser escrito sub uma "forma alternativa": o **número de tentativas** n **até se observar o primeiro sucesso**, agora com $x = n = 1, 2, ...\}$.

$$\begin{aligned} f(X = x; p) &= P(X = n) = p.(1 - p)^{(n-1)} \\ &= P(X = n) = p.q^{(n-1)} \end{aligned}$$

A esperança e a variância de uma variável aleatória discreta com Distribuição geométrica $(X \sim geo(p))$ são:

- Esperança: $E(X) = \frac{1}{p}$
- Variância: $Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2} = \frac{q}{p^2}$.

A distribuição geométrica é frequentemente usada em situações em que estamos interessados em calcular quantas tentativas independentes são necessárias até que um evento específico ocorra. Por exemplo, pode ser usada para modelar o número de lançamentos de uma moeda justa até que a primeira cara apareça, ou o número de tentativas até que um cliente faça sua primeira compra em um site de comércio eletrônico.

> Lembrando que o modelo binomial é aplicado sobre a contagem de número de sucessos k em n tentativas de Bernoulli; ou seja, o número de tentativas n é **fixo** e o número de sucessos k é **aleatório**.

> Já o modelo geométrico estima o número de tentativas j até se observar o primeiro sucesso; isto é, o número de sucessos k é **fixo** e o número de tentativas j é **aleatório**.

Uma variável aleatória geométrica é definida como o número de tentativas até que o primeiro sucesso fosse encontrado e, como essas tentativas são independentes entre si; ie., a probabilidade p não se altera em razão de terem sido realizadas tentativas anteriores, a contagem do número de tentativas até o próximo sucesso pode ser começada em qualquer tentativa sem alterar a distribuição de probabilidades da variável aleatória. A consequência de usar um modelo geométrico é que o sistema presumivelmente não será desgastado, a probabilidade permanece constante.

Nesse sentido à distribuição geométrica é dita **faltar qualquer memória**.

> Exemplo: A probabilidade de que um *bit* transmitido através de um canal digital seja recebido **com erro** é de 0,1. Considere que as transmissões sejam eventos independentes e o erro relativamente raro. Uma variável aleatória discreta pode ser definida como $X \sim Geo(p)$. Qual a probabilidade de que **o primeiro erro** na transmissão de um *bit* ocorra na **quinta** transmissão?

Uma variável aleatória discreta com Distribuição geométrica pode ser definida para modelar a probabilidade desse experiment aleatório como $X \sim geo(p)$, onde p é a probabilidade individual de sucesso (no nosso caso, que o *bit* seja transmitido com erro).

Dados do problema:

1- a probabilidade de ocorrência de um sucesso (aqui bem entendido como sendo a transmissão de um *bit* com erro) é $p = 0,1$; e,
2- a probabilidade pedida é a de se observar a ocorrência do primeiro sucesso com 5 repetições (bem entendido aqui que o número de tentativas **sem se observar sucesso** será $j = 4$ e, em $j + 1 = 5$ teremos sucesso).

$$\begin{aligned} f(X = x; p) = P(X = j) &= (1 - p)^j.p \\ P(X = 4) &= (1 - 0,1)^4.0,1 \\ P(X = 4) &= 0,0656 \end{aligned}$$

A probabilidade de que na **quinta transmissão** de um *bit* ocorra um erro é de 6,56%.

> Exemplo: Uma linha de produção está sendo analisada para fins de controle da qualidade das peças produzidas. Tendo em vista o alto padrão requerido, a produção é interrompida para regulagem **toda vez que uma peça defeituosa é observada**. Se 0,01 é a probabilidade da peça ser defeituosa, determine a probabilidade de ocorrer uma peça defeituosa entre a 4^a e 6ª peças produzidas.

Uma variável aleatória discreta com Distribuição geométrica pode ser definida para modelar esse experimento aleatório como $X \sim Geo(p)$ onde p é a probabilidade individual de sucesso (no caso, a produção de uma peça defeituosa). Pede-se a probabiidade de que essa ocorrência se verifique **OU** na quarta **OU** na quinta **OU** na setxa peça produzida.

Dados do problema:

- a probabilidade de ocorrência de um sucesso (aqui bem entendido como sendo a produção de uma peça defeituosa) é $p = 0,01$; e,
- a probabilidade pedida é a de se observar a ocorrência da produção da primeira peça defeituosa com 4, 5 **OU** 6 repetições.

Assim sendo o número de tentativas **sem se ter nenhuma peça produzida com defeito** é de $3 \leq j \leq 5$ porque assim, em $j + 1$, teremos sucesso na quarta, quinta ou sexta peça produzidas.

Considerando-se que os eventos são disjuntos (ocorrerá na quarta, na quinta ou na sexta), probabilidade pedida será:

$$P(X = j)_{3 \leq j \leq 5} = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

A probabilidade de verificarnos sucesso na 4ª peça produzida (peça produzida com defeito) será:

$$\begin{aligned} f(X = x; p) &= P(X = j) \\ P(X = j) &= (1-p)^j.p \\ P(X = 3) &= (1-0,01)^3.0,01 \\ P(X = 3) &= 0,009702 \end{aligned}$$

A probabilidade de verificarnos sucesso na 5ª peça produzida (peça produzida com defeito) será:

$$\begin{aligned} f(X = x; p) &= P(X = j) \\ P(X = j) &= (1-p)^j.p \\ P(X = 4) &= (1-0,01)^4.0,01 \\ P(X = 4) &= 0,009605 \end{aligned}$$

A probabilidade de verificarnos sucesso na 6ª peça produzida (peça produzida com defeito) será:

$$\begin{aligned} f(X = x; p) &= P(X = j) \\ P(X = j) &= (1-p)^k.p \\ P(X = 5) &= (1-0,01)^5.0,01 \\ P(X = 5) &= 0,009809 \end{aligned}$$

A probabilidade de termos uma peça **produzida com defeito** na quarta **OU** na quinta **OU** na sexta das peças produzidas será:

$$\begin{aligned} P(3 \leq j \leq 5) &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ P(3 \leq j \leq 5) &= 0,009702) + 0,009605 + 0,009809 \\ P(3 \leq j \leq 5) &= 0,029116 \end{aligned}$$

A probabilidade de termos uma **peça defeituosa** na quarta **OU** na quinta **OU** na sexta das peças produzidas é de 2,9116%.

Exemplo 9 A probabilidade de um alinhamento ótico bem sucedido na montagem de produto de armazenamento de dados é de 0,80. Assuma que as tentativas são independentes e responda: 1- Qual é a probabilidade de que o primeiro alinhamento bem sucedido requeira exatamente quatro

tentativas?
2- Qual é a probabilidade de que o primeiro alinhamento bem sucedido requeira no máximo quatro tentativas?
3- Qual é a probabilidade de que o primeiro alinhamento bem sucedido requeira ao menos quatro tentativas?

Uma variável aleatória discreta com Distribuição geométrica pode ser definida para modelar esse experimento aleatório como $X \sim Geo(p)$ onde p é a probabilidade individual de sucesso .

Dados do problema:

- a probabilidade de ocorrência de um sucesso (alinhamento ótico bem sucedido na montagem de produto de armazenamento de dados) é $p = 0,80$;
- o item (1) pede a probabilidade de verificar o primeiro sucesso com exatamente **quatro repetições**; assim, o número de tentativas **sem se observar sucesso** é $j = 3$ (em $j + 1 = 4$ verifica-se sucesso);
- o item (2) pede a probabilidade de se verificar o primeiro sucesso com **no máximo** quatro repetições; assim, o número de tentativas **sem se observar** sucesso é de $0 \leq j \leq 3$ (em $j + 1$ teremos sucesso: no primeiro **OU** no segundo **OU** no terceiro **OU** no quarto alinhamentos realizados); e,
- o item (3) pede a probabilidade de se observar o primeiro sucesso com **no mínimo quatro** repetições; assim, o número de tentativas **sem se observar sucesso** é de \$3 j ∞\$ (em $j + 1$ teremos sucesso: no quarto **OU* no quinto** OU** sexto .s, alinhamentos realizados).

Para o item (1) a probabilidade de termos a ocorrência de um sucesso (ou seja, um alinhamento ótico bem sucedido) na 4ª montagem será:

$$\begin{aligned} f(X = x; p) &= P(X = j) \\ P(X = j) &= (1 - p)^j.p \\ P(X = 3) &= (1 - 0,80)^3.0,20 \\ P(X = 3) &= 0,0064 \end{aligned}$$

Para o item (2) considerando-se que as repetições são independentes, a probabilidade pedida será:

$$P(X = j)_{0 \leq j \leq 3} = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$
\begin{aligned}
f(X = x; p) &= P(X = j) \\
P(X = j) &= (1 - p)^j.p \\
P(X = 0) &= (1 - 0,80)^0.0,20 \\
P(X = 0) &= 0,80
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(X = x; p) &= P(X = j) \\
P(X = j) &= (1 - p)^j.p \\
P(X = 1) &= (1 - 0,80)^1.0,20 \\
P(X = 1) &= 0,16
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(X = x; p) &= P(X = j) \\
P(X = j) &= (1 - p)^j.p \\
P(X = 2) &= (1 - 0,80)^2.0,20 \\
P(X = 2) &= 0,032
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(X = x; p) &= P(X = j) \\
P(X = j) &= (1 - p)^j.p \\
P(X = 3) &= (1 - 0,80)^3.0,20 \\
P(X = 3) &= 0,0064
\end{aligned}
$$

A probabilidade pedida é de:

$$
\begin{aligned}
P(X = j)_{0 \leq j \leq 3} &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\
P(X = j)_{0 \leq j \leq 3} &= 0,9984
\end{aligned}
$$

Para o item (3) considerando-se que os eventos pedidos são disjuntos a probabiildade pedida deverá ser calculada a partir do complemento da probabilidade total menos os eventos que não são de interesse:

$$P(X=j)_{3\leq j\leq\infty} = 1 - P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$\begin{aligned} f(X=x;p) &= P(X=j) \\ P(X=j) &= (1-p)^j.p \\ P(X=0) &= (1-0,80)^0.0,20 \\ P(X=0) &= 0,80 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(X=x;p) &= P(X=j) \\ P(X=j) &= (1-p)^j.p \\ P(X=1) &= (1-0,80)^1.0,20 \\ P(X=1) &= 0,16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(X=x;p) &= P(X=j) \\ P(X=j) &= (1-p)^j.p \\ P(X=2) &= (1-0,80)^2.0,20 \\ P(X=2) &= 0,032 \end{aligned}$$

A probabilidade é de:

$$\begin{aligned} P(X=j)_{3\leq j\leq\infty} &= 1 - P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ P(X=j)_{3\leq j\leq\infty} &= 1 - (0,80 + 0,16 + 0,032) \\ P(X=j)_{3\leq j\leq\infty} &= 0,008 \end{aligned}$$

6.2.2 Binomial Negativa

Uma variável aleatória discreta que segue uma distribuição Binomial Negativa (também conhecida como de Distribuição de Pascal em homenagem ao matemático francês Blaise Pascal) pode ser considerada como uma generalização da variável Geométrica, na qual agora é considerada a situação em que se modelam as probabilidades de se verificar mais de um evento de sucesso.

Ao se realizar repetidos experimentos de Bernoulli, uma variável aleatória Binomial Negativa modela as probabilidades relacionadas ao número de repetições necessárias para se observar r sucessos.

Um experimento que apresenta uma distribuição Binomial Negativa satisfaz aos seguintes pressupostos:

1- cada repetição é um ensaio de Bernoulli (só poderá haver dois resultados possíveis: sucesso ou fracasso);
2- cada repetição não altera a probabilidad das demais (há independência);
3- a probabilidade de sucesso (p) em cada repetição é constante;
4- consequentemente, a probabilidade de fracasso ($q = 1 - p$) em cada repetição também é constante; e,
5- o experimento aleatório prossegue até que sejam verificados r sucessos.

Considere o experimento aelatório de se lançar uma moeda **não honesta**, com probabilidade p de ocorrência de *Cara* e $(1 - p)$ de ocorrência de *Coroa*. Se definimos nosso evento de sucesso como sendo obter *Cara* no lançamento, quantos lançamentos serão necessários para serão necessários para se observar r *Caras*?

Se arbitramos $r = 3$ e observarmos a sequência: *{Cara, Coroa, Coroa, Cara, Coroa, Coroa, Cara}*, então $n = 7$: foram necessárias sete repetições até que três *Caras* fosse observadas.

A notação de uma variável aleatória Binomial Negativa é $X \sim bn(p, r)$, onde o parâmetro p $(0 \leq p \leq 1)$ indica a probabilidade individual de sucesso a cada repetição de Bernoulli e r o número total de sucessos desejado (estabelecido *a priori*).

Sua função discreta de probabilidade calcula a probabilidade de se observar um total de r sucessos (estabelecido *a priori*) após n de ensaios de Bernoulli realizados é a seguinte:

$$f(X = x; p; r) = P(X = n) = C_{r-1}^{n-1}.p^r.q^{(n-r)}$$
$$f(X = x; p; r) = \frac{(n-1)!}{(r-1)!.(n-r-2)!}.p^r.q^{(n-r)}$$

Pela razão óbvia de se necessitar no mínimo r tentativas para se obter r sucessos, a faixa de $x = n = r, r+1, r+2...)$.

A esperança e a variância de uma variável aleatória discreta com Distribuição Binomial Negativa são:

- Esperança: $E(X) = \frac{r}{p}$;
- Variância: $Var(X) = \frac{r \times (1-p)}{p^2} = \frac{q \times r}{p^2}$.

Uma variável aleatória Binomial é uma contagem de número de sucessos k em n tentativas de Bernoulli; ou seja, o número de tentativas n é predeterminado (fixo) e o número de sucessos k é aleatório e em n tentativas a probabilidade de se observar k sucessos é medida pela sua função de distribuição discreta de probabilidades.

Uma variável aleatória Binomial Negativa é uma contagem do número de tentativas até se obter r sucessos; isto é, o número de sucessos r é predeterminado (fixo) e o número de tentativas é aleatório e a probabilidade de se observar r sucessos a cada n tentativas é calculada por sua função de distribuição discreta de probabilidades.

Exemplo: A probabilidade com que um *bit* transmitido através de um canal digital de transmissão seja recebido com erro é de 0,1 e que as transmissões sejam eventos independentes. Qual a probabilidade de que nas dez primeiras transmissões ocorram quatro erros?

Uma variável aleatória discreta com Distribuição Binomial Negativa pode ser definida para modelar esse experiment aleatório, tal que $X \sim bn(p, r)$ onde p é a probabilidade individual de sucesso e r o total de sucessos.

Dados do problema:

1- a probabilidade de ocorrência de um sucesso (aqui bem entendido como sendo a recepção errada de um *bit* transmitido) é $p = 0,1$; e,
2- o número de sucessos (aqui bem entendido como sendo a recepção errada de um *bit* transmitido) está definido *a priori* $r = 4$.

Pede-se a probabilidade de se observar **quatro** sucessos ($r = 4$) em **dez** ($n = 10$) transmissões.

A probabilidade de se obter $r = 4$ sucessos ao se realizar $n = 10$ tentativas é dada pela função discreta de probabilidade da variável aleatória Binomial Negativa:

$$f(X = x; p; r) = P(X = n) = C_{r-1}^{n-1}.p^r.q^{n-r}$$
$$f(X = x; p; r) = P(X = n) = \frac{(n-1)!}{(r-1)!.(n-r-2)!}.p^r.q^{n-r}$$
$$f(X = 10; p = 0,10; r = 4) = P(X = 10) = \frac{(10-1)!}{(4-1)!.(10-4-2)!}.0,1^4.0,9^{10-4}$$
$$P(X = 10) = 0,004464104$$

A probabilidade de se observar 4 sucessos em 10 tentativas é de 0,4464104%.

Exemplo 11: Bob é um jogador de basquete de uma escola. Ele é um lançador de arremessos livres e sua probabilidade de acertar é igual a 70%. Durante uma partida qualquer, qual a probabilidade de que Bob acerte seu **terceiro** arremesso livre na seu **quinta** tentativa?

Uma variável aleatória discreta com Distribuição Binomial Negativa pode ser definida para modelar esse experimento aleatório tal que $X \sim bn(p, r)$ onde p é a probabilidade individual de sucesso e r o total de sucessos.

Dados do problema:

1- a probabilidade de ocorrência de um sucessoé $p = 0,70$, e
2- o número de sucessos fixado *a priori* é $r = 3$.

Pede-se a probabilidade de se observar três sucessos em 5 arremessos $n = 5$.

A probabilidade de se obter $r = 3$ sucessos ao se realizar $n = 5$ tentativas é dada pela função discreta de probabilidade da variável Binomial Negativa:

$$
\begin{aligned}
f(X = x; p; r) = P(X = n) &= C_{r-1}^{n-1}.p^r.q^{n-r} \\
f(X = x; p; r) = P(X = n) &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!.(n-r-2)!}.p^r.q^{n-r} \\
f(X = 5; p = 0,70; r = 3) = P(X = 5) &= \frac{(5-1)!}{(3-1)!.(5-3-2)!}.0,70^3.0,9^{5-3} \\
P(X = 5) &= 0,18522
\end{aligned}
$$

A probabilidade de Bob acertar 3 arremessos em 5 tentativas é de 18,522%.

{Exemplo: Lançamos repetidas vezes uma moeda. Seja X o número de caras até que consigamos sete coroas. Qual é a probabilidade de que o número de caras seja igual a cinco até que consigamos as sete coroas?

Uma variável aleatória discreta com Distribuição Binomial Negativa pode ser definida para modelar esse fenômeno como $X \sim bn(p, r)$ onde p é a probabilidade individual de sucesso e r o total de sucessos.

Dados do problema:

- a probabilidade de ocorrência de um sucesso é $p = 0,5$, e,
- o número de sucessos fixado *a priori* é $r = 7$.

Pede-se a probabilidade de se observar sete sucessos em doze (5+7) tentativas $n = 12$.

A probabilidade de se obter $r = 7$ sucessos ao se realizar $n = 12$ tentativas é dada pela função discreta de probabilidade da variável Binomial Negativa:

$$
\begin{aligned}
f(X = x; p; r) = P(X = n) &= C_{r-1}^{n-1}.p^r.q^{n-r} \\
f(X = x; p; r) = P(X = n) &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!.(n-r-2)!}.p^r.q^{n-r} \\
f(X = 5; p = 0,50; r = 7) = P(X = 12) &= \frac{(12-1)!}{(7-1)!.(12-7-2)!}.0,50^7.0,50^{12-7} \\
P(X = 5) &= 0,1128
\end{aligned}
$$

A probabilidade de se obter 7 sucessos em 12 tentativas é de 11,28%.

> Exemplo: Considere o tempo para recarregar o flash de uma câmera de celular. Assuma que a probabilidade de que uma câmera instalada no celular durante sua montagem passe no teste seja de 0.80 e que cada câmera é montada de modo que a probabilidade não se altere (independência). Determine as seguintes probabilidades: 1- de que a segunda falha ocorra na décima câmera testada;
> 2- de que a segunda falha ocorra no teste de quatro ou menos câmeras; e,
> 3- o valor esperado do número de câmeras testadas para obter a terceira falha.

Uma variável aleatória discreta com Distribuição Binomial Negativa pode ser definida para modelar esse experimento aleatório tal que $X \sim bn(p, r)$ onde p é a probabilidade individual de sucesso e r o total de sucessos.

Dados do problema:

- probabilidade de que a câmera montada no celular passe no teste é $p = 0,80$; logo, a probabilidade de não passar será de $(q = 1 - 0,80) = 0,20$;
- fica bem entendido que o **sucesso** é a câmera montada no celular **não passar** no teste, logo $p = 0,20$;
- no item (1) pede-se a probabilidade de se observar um número de sucessos fixado *a priori* $r = 2$ em $n = 10$;

- no item (2) pede-se a probabilidade de se observar um número de sucessos também fixado *a priori* em $r = 2$ mas agora em $n \leq 4$ câmeras testadas; e,
- o valor esperado para o número de câmeras testadas ($n = ?$) para que se observem $r = 3$ sucessos.

A probabilidade de se obter $r = 2$ sucessos ao se realizar $n = 10$ tentativas é dada pela função discreta de probabilidade da variável Binomial Negativa:

$$\begin{aligned} f(X = x; p; r) = P(X = n) &= C_{r-1}^{n-1}.p^r.q^{n-r} \\ f(X = 10; p = 0,20; r = 2) = P(X = 10) &= C_{2-1}^{10-1}.0,20^2.0,80^{10-2} \\ P(X = 10) &= 0,06039 \end{aligned}$$

A probabilidade de se obter $r = 2$ sucessos em $n = 10$ tentativas é de 6,039%.

As probabilidades de se obter $r = 2$ sucessos ao se realizar $n \leq 4$ tentativas é dada pela função discreta de probabilidade da variável Binomial Negativa aplicada a:

$$\begin{aligned} f(X = x; p; r) = P(X = n) &= C_{r-1}^{n-1}.p^r.q^{n-r} \\ f(X = 2; p = 0,20; r = 2) = P(X = 2) &= C_{2-1}^{2-1}.0,20^2.0,80^{2-2} \\ P(X = 2) &= 0,04 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(X = x; p; r) = P(X = n) &= C_{r-1}^{n-1}.p^r.q^{n-r} \\ f(X = 3; p = 0,20; r = 2) = P(X = 2) &= C_{2-1}^{3-1}.0,20^2.0,80^{3-2} \\ P(X = 3) &= 0,064 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(X = x; p; r) = P(X = n) &= C_{r-1}^{n-1}.p^r.q^{n-r} \\ f(X = 4; p = 0,20; r = 2) = P(X = 2) &= C_{2-1}^{4-1}.0,20^2.0,80^{4-2} \\ P(X = 4) &= 0,0768 \end{aligned}$$

A probabilidade de se obter $r = 2$ sucessos em $n \leq 4$ tentativas é de $(0,032 + 0,064 + 0,0768)$ 18,08%.

O valor esperado (esperança) do número de câmeras testadas para que se observem $r = 3$ sucessos é dado

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{r}{p} \\
E(X) &= \frac{3}{0,2} \\
&= 15
\end{aligned}
$$

O valor esperado (esperança) do número n de câmeras testadas para que se observem $r = 3$ sucessos é 15

6.3 Modelos teóricos contínuos

Experimentos aleatórios nos quais os possíveis resultados assumem valores resultantes de processos de mensuração tais como, por exemplo, rendas, pesos, velocidades, tempos, comprimentos, pertencentes aos números Reais, podem ser adequadamente modelados por variáveis aleatórias contínuas.

Para estes uma função densidade de probabilidade é definida de modo a retornar a probabilidade de ocorrência associada a um intervalo de valores, posto a probabilidade exata de ocorrência de um valor aleatório contínuo tender a zero ($P(X = x) \to 0$).

A função $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade para a variável aleatória contínua X se atende às seguintes condições relacionadas aos axiomas da probabilidade:

- $f(x) \geq 0$ para todo $x \in (-\infty, \infty)$;
- a área definida por $f(x)$ é igual a 1 (área sob $f(x)$ e acima do eixo x).

Para tornar o conceito mais compreensível admita a função densidade de probabilidade (fdp) a seguir e sua representação gráfica na Figura 6.3

$$
f(X = x) = \begin{cases} 2.x & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{para qualquer outro x} \end{cases}
$$

6.3.1 Uniforme

A Distribuição Uniforme é uma das distribuições contínuas mais simples de toda a Estatística. Ela se caracteriza por ter uma função densidade contínua em um intervalo fechado $[a, b]$. Ou seja, a probabilidade de ocorrência de um certo valor é sempre a mesma.

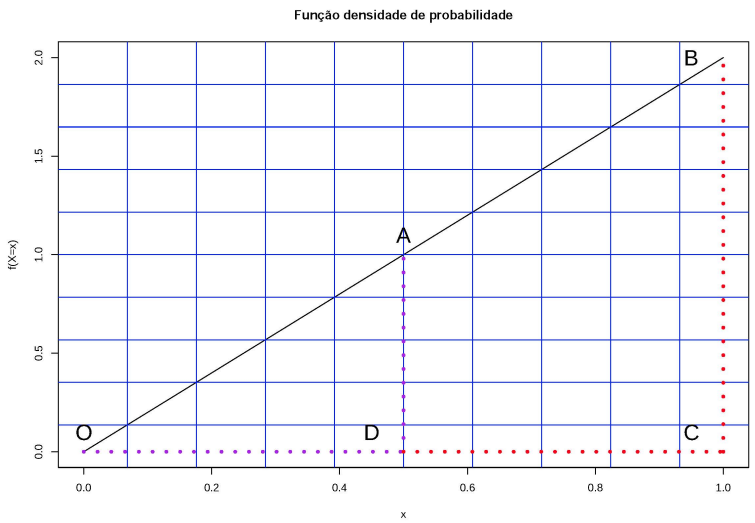


Figure 6.3: A área definida por (ODA) equivale à probabilidade de $f(X = x)$ no intervalo $0 \leq x \leq 0,50$ é notadamente menor que a área definida por (ABCD) equivalente à probabilidade de $f(X = x)$ no intervalo $0,5 \leq x \leq 1$. Tendo os intervalos [0;0,50] e [0,50; 1,00] igual amplitude, depreende-se que uma fdp é uma função indicadora da concentração massa (probabilidade) nos possíveis valores de X

Embora as aplicações desta distribuição não sejam tão abundantes quanto as demais distribuições que discutiremos mais adiante, utilizaremos a Distribuição Uniforme para introduzirmos as funções contínuas e darmos uma noção de como se utiliza a função densidade para determinarmos probabilidades, esperanças e variâncias.

Uma variável aleatória X tem Distribuição Uniforme no intervalo $[a, b]$, com notação $X \sim U(a, b)$, se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{para } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{para qualquer outro x} \end{cases}$$

A esperança e a variância de uma variável aleatória contínua com Distribuição Uniforme são:

- Esperança: $E(X) = \frac{(a+b)}{2}$; e,
- Variância: $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Exemplo 14: Verifique se as funções a seguir atendem os pressupostos necessários para ser uma função densidade de probabilidade (assuma que toda $f(x) = 0$ para valores fora dos intervalos especificados):

1- $f(x) = 3x$ para $0 \leq x \leq 1$;
2- $f(x) = \frac{x^2}{2}$ para $x \geq 0$;
3- $f(x) = \frac{(x-3)}{2}$ para $3 \leq x \leq 5$;
4- $f(x) = 2$ para $0 \leq x \leq 2$;
5-

$$f(X = x) = \begin{cases} \frac{(2+x)}{4}, & \text{para } -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{(2-x)}{4}, & \text{para } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

6- $f(x) = -\pi$ para $-\pi < x < 0$

Os gráficos das funções densidade de probabilidade são:

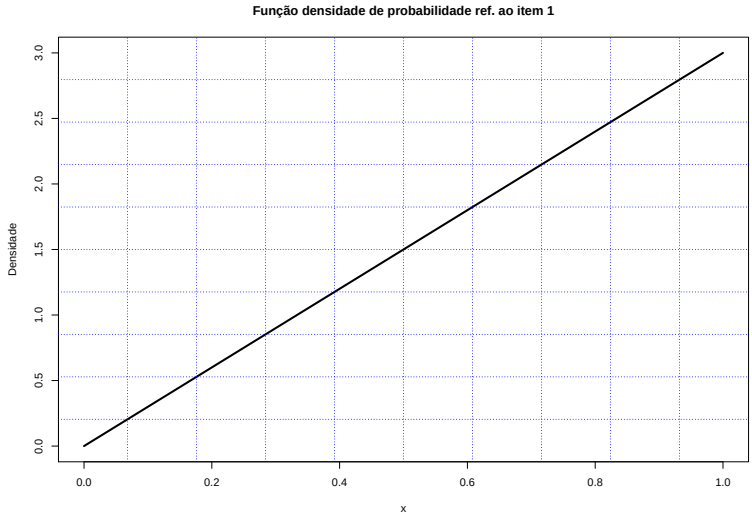


Figure 6.4: A área definida por $f(x)$ no intervalo $0 \leq x \leq 1$ é maior que 1. Por essa razão não pode ser uma fdp

Exemplo: A dureza X de uma peça de aço pode ser entendida como sendo uma variável aleatória contínua uniforme no intervalo $(50, 70)$ da escala Rockwel. Calcule a esperança e a variâcia dessa variável aleatória e a probabilidade de que uma peça tenha dureza entre 55 e 60?

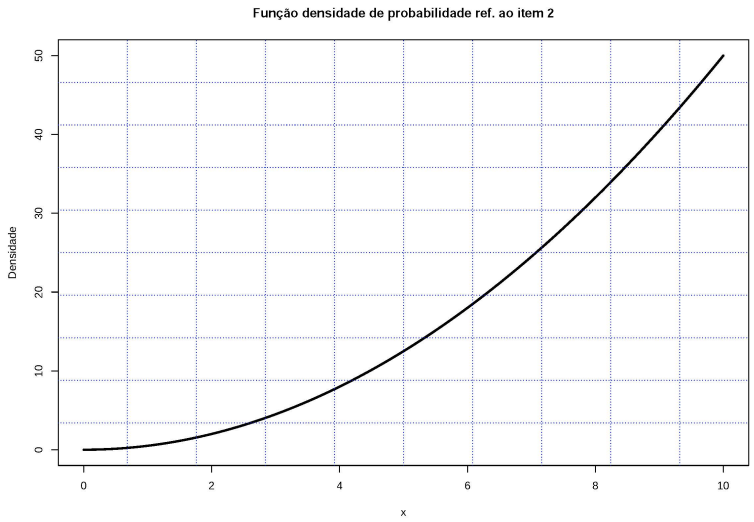


Figure 6.5: A área definida por $f(x)$ no intervalo $x \geq 0$ é maior que 1. Por essa razão não pode ser uma fdp

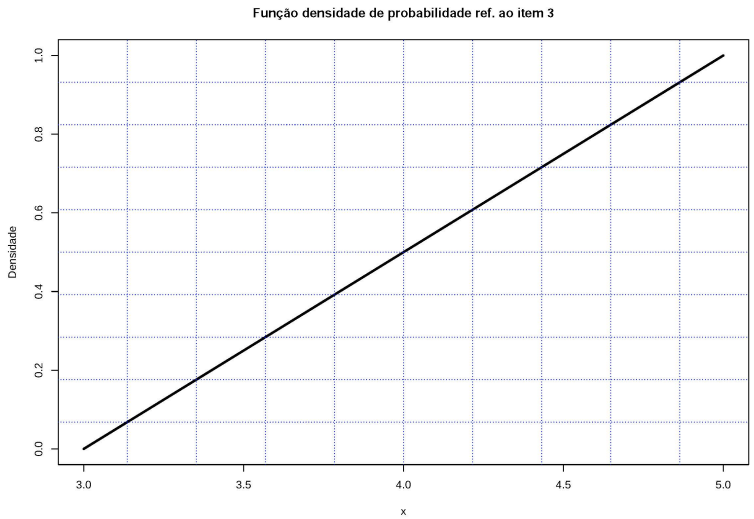


Figure 6.6: Os valores assumidos por $f(x)$ são ≥ 0 e a área definida por f(x) o intervalo $3 \leq x \leq 5$ é igual a 1. Por essa razão pode ser uma fdp

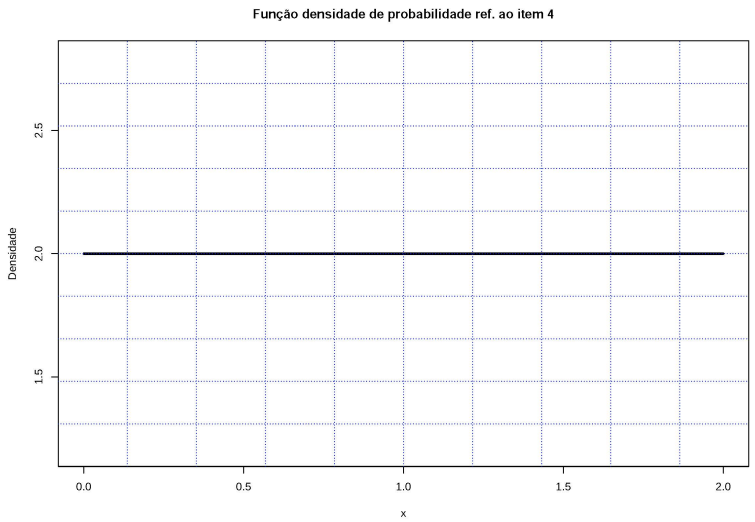


Figure 6.7: A área definida por $f(x)$ no intervalo $0 \leq x \leq 2$ é maior que 1. Por essa razão não pode ser uma fdp

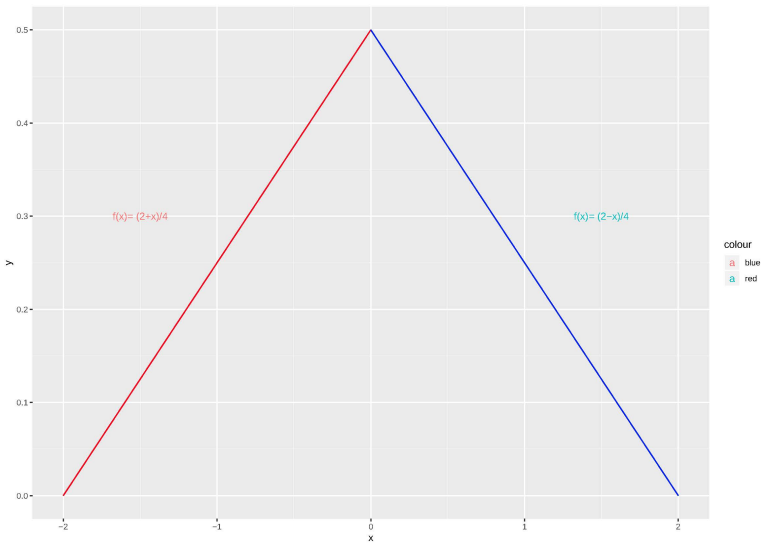


Figure 6.8: Os valores assumidos por $f(x)$ são ≥ 0 e a área definida por $f(x)$ nos intervalos $-2 \leq x \leq 0$ e $0 \leq x \leq 2$ é igual a 1. Pode ser uma fdp

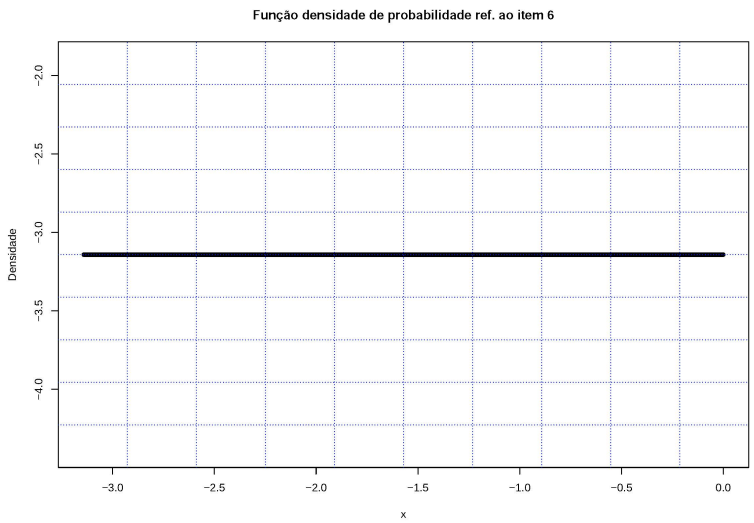


Figure 6.9: Os valores assumidos por f(x) são < 0. Por esa razão não pode ser uma fdp.

Definindo a variável aleatória contínua $X : X \sim U(50, 70)$:

$$f(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{70-50} = \frac{1}{20}, & \text{para } 50 \leq x \leq 70 \\ 0, & \text{para qualquer outro x} \end{cases}$$

Sua esperança e a variância são:

- Esperança: $E(X) = \mu = \frac{(70+50)}{2} = 60$; e,
- Variância: $Var(X) = \frac{(70-50)^2}{12} = 33,33$.

6.3.2 Exponencial

A Distribuição Exponencial é largamente utilizada nas áreas de engenharia, física, computação e biologia para modelar variáveis tais como vida útil de equipamentos, tempos entre falhas (TBF), tempos de sobrevivência de espécies, intervalos de solicitação de recursos por exemplo.

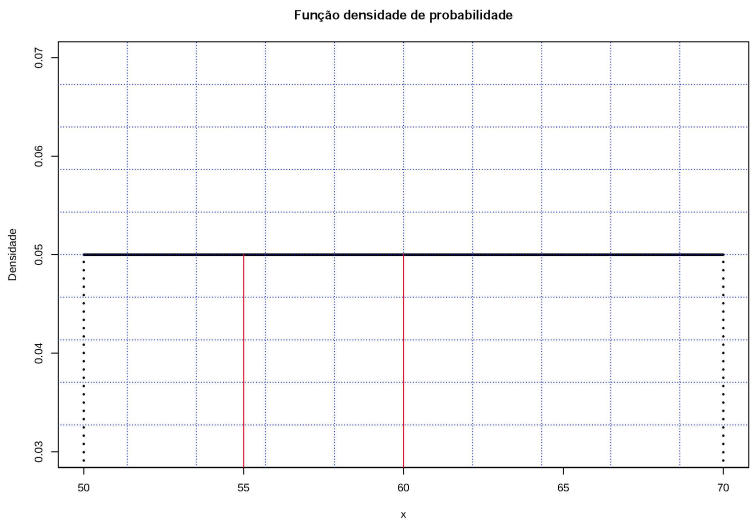


Figure 6.10: Os valores assumidos por $f(x)$ são ≥ 0 e a área definida por $f(x)$ no intervalo $50 \leq x \leq 70$ é igual a 1. Por essa razão pode ser uma fdp. A probabilidade pedida equivale à área $P(60 \leq x \leq 55) = (60-55).0,05 = 0,25$.

Esta é uma distribuição que se caracteriza por ter uma função de taxa de falha constante, a única com esta propriedade e por essa razão tem tem sido usada extensivamente como um modelo para o tempo de vida de certos produtos e materiais.

Uma variável aleatória contínua X que assume valores não negativos segue o modelo teórico Exponencial com parâmetro λ: $X \sim Exp(\lambda)$. Há duas parametrizações habituais.

Primeira parametrização: $\lambda > 0$: taxa e sua sua densidade de probabilidade é dada por:

$$f(X = x) = \begin{cases} \lambda \cdot \varepsilon^{-\lambda \cdot x}, \text{ para } x \geq 0 \\ 0, \text{ para } x < 0 \end{cases}$$

Segunda parametrização: $\alpha = \frac{1}{\lambda}$: escala e sua sua densidade de probabilidade é dada por:

$$f(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha} \cdot x}, \text{ para } x \geq 0 \\ 0, \text{ para } x < 0 \end{cases}$$

Para se calcular probabilidades de uma Distribuição Exponencial torna-se necessária a resolução da integral associada, posto que a análise simplificada de figuras geométricas não mais é possível.

De modo geral temos:

$$
\begin{aligned}
P(a < X < b) &= \int_a^b \lambda \cdot \varepsilon^{-\lambda \cdot x} dx \\
P(a < X < b) &= -\varepsilon^{-\lambda \cdot x}|_a^b \\
P(a < X < b) &= \varepsilon^{-\lambda \cdot a} - \varepsilon^{-\lambda \cdot b}
\end{aligned}
$$

Sua esperança e a variância são:

- Esperança: $E(X) = \mu = \frac{1}{\lambda} = \alpha$; e,
- Variância: $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \alpha^2$.

Exemplo: Uma indústria fabrica lâmpadas especiais que ficam em operação continuamente. A empresa oferece a seus clientes a garantia de reposição, caso a lâmpada dure menos de 50 horas. A vida útil dessas lâmpadas pode ser modelada adequadamente através da distribuição Exponencial com parâmetro $\lambda = \frac{1}{8000}$. Determine a probabilidade de uma lâmpada necessitar ser trocada pela indústria em razão da garantia oferecida ao cliente.

Definindo a variável aleatória contínua T como sendo a vida útil da lâmpada: $T \sim Exp(\frac{1}{8000})$ e sua função densidade de probabilidade:

$$
f(T = t) = \begin{cases} \frac{1}{8000} \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{800} \cdot t}, \text{ para } t \geq 0 \\ 0, \text{ para } x < 0 \end{cases}
$$

A probabilidade de que uma lâmpada tenha uma vida útil menor que 50 horas será dada pela integral da fdp no intervalo [0;50]:

$$
\begin{aligned}
P(0 < T < 50) &= \int_0^{50} \lambda \cdot \varepsilon^{-\lambda \cdot x} dx \\
P(0 < T < 50) &= -\varepsilon^{-\lambda \cdot x}|_0^{50} \\
P(0 < T < 50) &= \varepsilon^{-\frac{1}{8000} \cdot 0} - \varepsilon^{-\frac{1}{8000} \cdot 50} \\
P(0 < T < 50) &= 1 - 0,939413063 \\
&= 0,006
\end{aligned}
$$

A probabilidade de que uma lâmpada fabricada por essa empresa tenha uma vida útil menor que 50 h é de 0,006 (proporção de 0,60%), naturalmente muito pequena considerando que a duração média das lâmpadas é de $\mu = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{8000}} = 8000$ h (esperança da variável).

Exemplo: O intervalo de tempo (minutos) entre as emissões de uma fonte radioativa é uma variável aleatória contínua que pode ser modelada pela Distribuição Exponencial com parâmetro $\lambda = 0,20$. Calcule a probabilidade de haver uma emissão em um intervalo de tempo inferior a 2 minutos.

Definindo a variável aleatória contínua T como sendo o intervalo de tempo entre as emissões radioativas dessa fonte: $T \sim Exp(0,20)$ e sua função densidade de probabilidade:

$$
f(T = t) = \begin{cases} 0,20 \cdot \varepsilon^{-0,20 \cdot t}, \text{ para } t \geq 0 \\ 0, \text{ para } x < 0 \end{cases}
$$

A probabilidade de uma emissão em um intervalo de tempo inferior a 2 minutos será dada pela integral da fdp no intervalo [0;2]:

$$
\begin{aligned}
P(0 < T < 2) &= \int_0^{2} \lambda \cdot \varepsilon^{-\lambda \cdot x} dx \\
P(0 < T < 2) &= -\varepsilon^{-\lambda \cdot x}|_0^{2} \\
P(0 < T < 2) &= \varepsilon^{-0,20 \cdot 0} - \varepsilon^{-0,20 \cdot 2} \\
P(0 < T < 2) &= 1 - 0,6703 \\
&= 0,3296
\end{aligned}
$$

A probabilidade de uma emissão em um intervalo de tempo inferior a 2 min é de 0,3296, naturalmente considerável uma vez que o intervalo médio entre as emissões radioativas é de $\mu = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}20} = 5$ min (esperança da variável).

Exemplo: Certo tipo de fusível elétrico tem duração de vida (horas) que segue uma Distribuição Exponencial com tempo médio de vida de 100 horas. Cada peça tem um custo de R$ 10,00 e, se durar menos de 200 horas, existe um custo adicional de R$ 8,00. Pede-se: - a probabilidade de fusível durar mais de 150 horas; e,
- o custo esperado.

Se a vida útil média (μ) desse fusível é de 100 horas, então o valor do parâmetro dessa distribuição será $\frac{1}{100}$ (pois $\mu = \frac{1}{\lambda}$) e a variável aleatória contínua T será definida como sendo a vida útil do fusível: $T \sim Exp(\frac{1}{100})$, com sua função densidade de probabilidade:

$$f(T = t) = \begin{cases} \frac{1}{100} \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{100} \cdot t}, \text{ para } t \geq 0 \\ 0, \text{ para } x < 0 \end{cases}$$

O primeiro item pede a probabilidade de um fusível durar mais de 150 horas poderá ser dada por 1 menos o valor da integral da fdp no intervalo [0;150]:

$$\begin{aligned} P(T > 150) = 1 - P(0 < T < 150) &= 1 - \int_0^{150} \alpha \cdot \varepsilon^{-\alpha \cdot x} dx \\ &= 1 - \varepsilon^{-\alpha \cdot x}|_0^{150} \\ &= 1 - (\varepsilon^{-0{,}01 \cdot 0} - \varepsilon^{-0{,}01 \cdot 150}) \\ &= 1 - (1 - 0,22313) \\ &= 0,22313 \end{aligned}$$

A probabilidade de um fusível ter uma vida útil maior que 150 horas é de 0,22313.

O custo unitário de um fusível é de R$ 10,00 com um custo adicional de R$ 8,00 se sua vida for inferior a 200 horas. Assim o custo esperado de um fusível será dada produto dos custos pelas respectivas probabilidades associadas:

$$C = \begin{cases} R\$10,00 \text{ se t} > 200 \\ R\$18,00 \text{ se t} < 200 \end{cases}$$

A probabilidade de um fusível durar mais de 200 horas poderá ser dada por 1 menos o valor da integral da fdp no intervalo [0;200]:

$$\begin{aligned} P(T > 200) &= 1 - P(0 < T < 200) = 1 - \int_0^{200} \alpha \cdot \varepsilon^{-\alpha \cdot x} dx \\ &= 1 - \varepsilon^{-\alpha \cdot x}|_0^{200} \\ &= 1 - (\varepsilon^{-0,01 \cdot 0} - \varepsilon^{-0,01 \cdot 200}) \\ &= 1 - (1 - 0,1353) \\ &= 0,1353 \end{aligned}$$

A probabilidade de um fusível ter uma vida útil maior que 200 horas é de 0,1353.

A probabilidade de um fusível durar menos de 200 horas será dada por 1 menos o valor calculado anteriormente:

$$P(0 < T < 200) = 1 - 0,1353 = 0,8647$$

A probabilidade de um fusível ter uma vida útil menor que 200 horas é de 0,8647.

O custo esperado é de: $10,00 \times 0,1353 + 18,00 \times 0,8647 = R\$16,92$

6.3.3 Normal

A distribuição Normal (Gaussiana) é uma das mais importantes distribuições de probabilidades por possibilitar a adequada modelagem de fenômenos de diversas áreas: física, biologia, psicologia, ciências sociais e econômicas.

A história da curva Gaussiana está relacionada à formulação da Teoria da Probabilidade nos séculos XVIII e XIX, que contou com contribuições de muitos matemáticos dentre os quais podemos citar Abrahan De Moivre, Pierre Simon Laplace, Adrien-Marie Legendre, Francis Galton e Johann Carl Friedrich Gauss.

Esses matemáticos constataram que as variações entre repetidas medidas da mesma grandeza física apresentavam um grau surpreendente de regularidade. Com a repetição de medidas em um numero razoável observou-se que distribuição das variações poderia ser satisfatoriamente aproximada por uma curva contínua.

Em 1920 Karl Pearson relembra ter usado a expressão *curva normal* como uma substituição de *natureza diplomática* para evitar uma questão internacional sobre precedência que poderia surgir no uso comum à época

da denominação "Curva de Laplace-Gauss", dois grandes matemáticos e astrônomos. Todavia, reconheceu também que a nova denominação poderia levar pessoas a incorrer no erro de supor que todas as demais distribuições seriam anormais.

Uma variável aleatória contínua X que assuma valores x $(-\infty < x < \infty)$ com média μ e variância σ^2 distribuídos segundo uma Curva Gaussiana é denotada por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, e sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2.\sigma^2}}$$

A função de probabilidade cumulativa, a probabilidade de que a variável aleatória X apresente um valor menor ou igual a x é dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(v-\mu)^2}{2\sigma^2}} dv$$

Sejam as seguintes variáveis aleatórias contínuas com Distribuição Normal:

- $X \sim N(\mu_X, \sigma^2{}_X)$, tal que $E(X) = \mu_X$ e $Var(X) = \sigma^2_X$; e
- $Y \sim N(\mu_Y, \sigma^2{}_Y)$, tal que $E(Y) = \mu_Y$ e $Var(Y) = \sigma^2_Y$.

Uma variável aleatória definida como uma soma de variáveis Normais $W = X \pm Y$ terá:

- E(W) $= \mu_X \pm \mu_y$; e,
- Var(W) $= \sigma^2_X + \sigma^2_Y$.

Para qualquer variável aleatória contínua com Distribuição Normal, chama-se de *padronização* à mudança da escala original dos dados para unidades padronizadas: *scores* z.

Uma variável padronizada segue possuindo Distribuição Normal, sendo denotada por $Z \sim N(0,1)$, indicando que a média é 0 e o desvio-padrão é 1. Para a padronização de uma variável original X segue:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua padronizada é dada por:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$
$$f(z) = 0,3989 e^{-5z^2}$$

E a função de probabilidade cumulativa (a probabilidade de que a variável aleatória padronizada Z apresente um valor menor ou igual a $z\}$) é dada por:

$$F(z) = P(Z \leq z)$$
$$P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

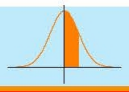
A área sob a curva padronizada (probabilidade cumulativa entre dois valores z) é obtida em tabelas, dispensando a resolução numérica da integral acima (posto não possuir solução analítica).

Essas tabelas apresentam no **cruzamento** de suas **linhas** e **colunas** , a área sob a curva Normal padronizada equivalente à probabilidade associada a um **determinado intervalo* como, por exemplo:

A tabela Z possibilita:

1- encontrar a probabilidade (área) partindo de *score* z; e
2- encontrar o *score* z.

Tabela - Normal Padrão de 0 a z



$P(0 \leq Z \leq z)$

Segunda casa decimal de Z

z (decimal de Z)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706

Figure 6.11: Tabela Z mostrando a probabilidade ao intervalo [0 ; 1,64] (quadro superior à esquerda explica onde a área se encontra)

Modo 1: admita que você padronizou um certo valor e obteve o *score* z igual a 1,64. Na coluna vertical à esquerda você deverá encontrar qual é a linha que apresenta a **unidade** e a **primeira casa decimal** desse valor: 1,6. Nas outras **dez** colunas verticais você deverá buscar aquela que apresenta a **segunda casa decimal** desse valor: 4. No cruzamento dessas duas colunas você irá fazer a leitura do número que lá dentro se encontra. Agora veja o desenho orientativo que há no canto superior à direita (cada tabela pode variar um pouco). Ele expõe graficamente uma área hachurada e na cor laranja entre o **zero** e um valor **z**. É exatamente o valor dessa área que você acabou de encontrar (a área sob a curva da fdp no intervalo [0 ; 1,64].

Modo 2: admita que você precisa determinar qual é o valor do score z para uma probabilidade (área) no intervalo [0 ; z] = 0,4495. Nessa situação, simplesmente faça o caminho reverso. Encontre que célula apresenta esse valor de 0,4495 e faça a leitura da **unidade** e a **primeira casa decimal** do valor do score z na coluna lateral à esquerda (1,6) e de sua **segunda casa decimal** na linha que identifica as outras dez colunas (4).

A fdp da distribuição Normal apresenta uma **curva simétrica** centrada em sua média μ. A fdp da distribuição Normal padronizada também é simétrica e centra em sua média que agora tem valor 0.

A **totalidade da área** sob essas fdp (ou seja, o intervalo $-\infty < z < \infty$) possui área igual a 1. Cada metade, consequentemente, terá área igual a $0,50$.

Por esse motivo as tabelas Z mostram apenas a **metade** da curva da fdp e muitos exercícios irão demandar que você some a área (0,50) do restante da curva da fdp, subtraia ou faça outras operações aritméticas simples para resolvê-los.

```
library(ggplot2)
options("digits"=4)
prob_desejada=0.95
z_desejado=round(qnorm(prob_desejada),4)
d_desejada=dnorm(z_desejado, 0, 1)
d_0=dnorm(0, 0, 1)

ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(-4, 0),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores score (z)", breaks = z_desejado) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(0, z_desejado),
            colour="red")+
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c( z_desejado, 4),
            colour="black")+
  labs(title=
      "Curva da função densidade da distribuição Normal padronizada",
      subtitle = "P(-inf; 0)=0,50 (cinza) \nP(0 ; 1,645)=0,4495 (vermelho) \nP(1,645 ;
       ↪  inf)=0,0505 (cinza) ")+
  geom_segment(aes(x = z_desejado, y = 0, xend = z_desejado, yend = d_desejada),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  geom_segment(aes(x = 0, y = 0, xend = 0, yend = d_0), color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=-1, y=0.2, label="Probabilidade (área) =0,50 ", angle=0, vjust=0,
   ↪  hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=0.1, y=0.1, label="Probabilidade (área) =0,4495", angle=0,
   ↪  vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=2, y=0.05, label="Probabilidade (área) =0,0505", angle=0, vjust=0,
   ↪  hjust=0, color="blue",size=3)+
  theme_bw()
```

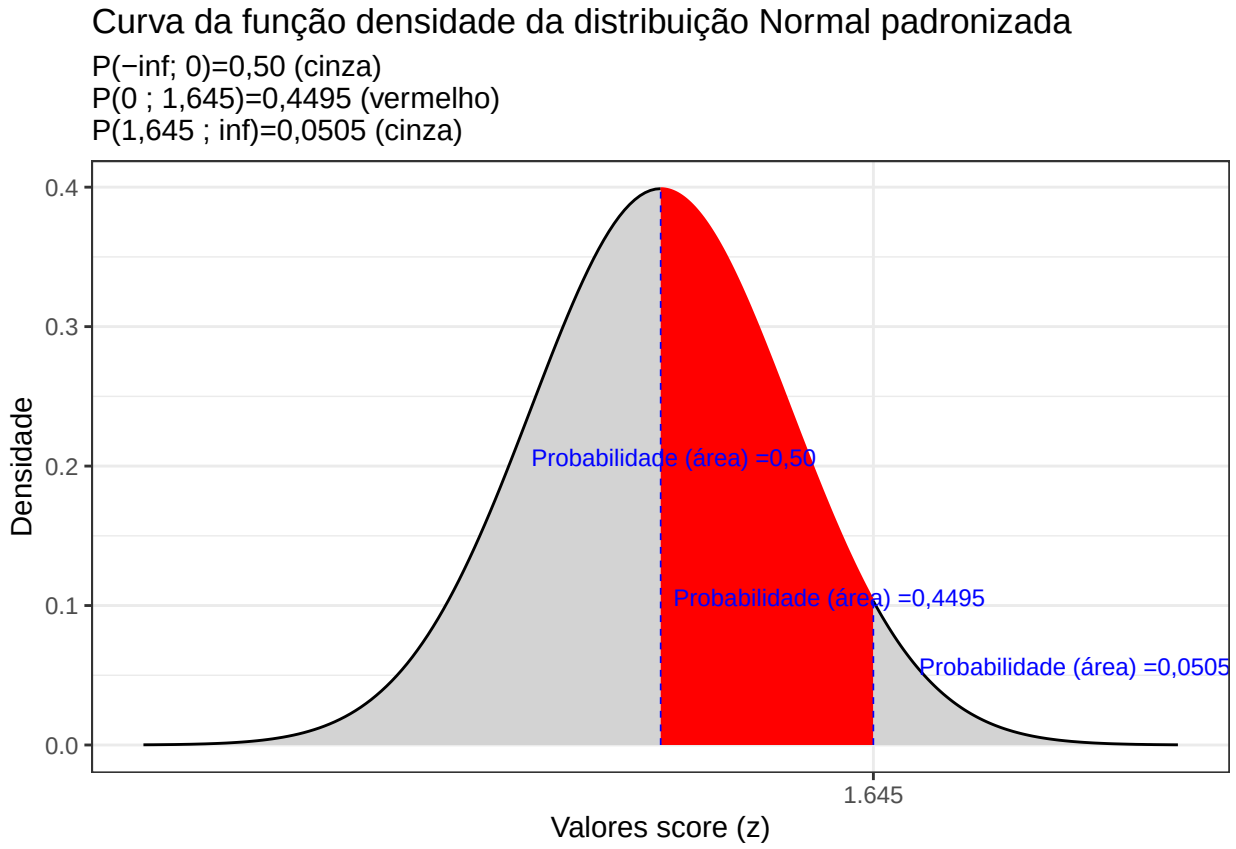


Figure 6.12: Curva da fdp da Distribuição Normal padronizada mostrando as áreas delimitadas pelo score z arbitrado (1,64)

Exemplo: Admita que o índice pluviométrico de uma cidade siga uma distribuição normal, com média de 101,60 mm/ano e desvio padrão de 12,70 mm/ano. Quais seriam as probabilidades dessa cidade ter menos de 83,82 mm/ano e mais de 96,52 mm/ano de precipitação no próximo ano?

A probabilidade de ocorrência de uma **precipitação inferior** a 83,82mm/ano equivale (graficamente) à área situada no intervalo $[-\infty; 83,82]$ na curva da fdp da distribuição Normal com média 101,60mm/ano e desvio padrão de 12,70mm/ano:

$$P(X \leq 83,82) \equiv rea[-\infty; 83,82]$$

A probabilidade de ocorrência de uma **precipitação superior** a 96,52 mm/ano equivale (graficamente) à área situada no intervalo $[96,52; +\infty]$ na curva da fdp distribuição Normal com média 101,60mm/ano e desvio padrão de 12,70mm/ano

$$P(X \geq 96,52) \equiv rea[96,52;+\infty]$$

Padronizando esses valores será possível estabelecer os valores das precipitações associadas às probabilidades pedidas em termos de scores z que podem ser obtidas em tabelas Z.

Considerando-se que a média é de 101,60mm/ano e o desvio padrão é de 12,70mm/ano, para a primeira precipitação (83,82mm/ano) teremos:

$$\begin{aligned} X_1 &= 83,82 \\ Z_n &= \frac{X_n - \mu}{\sigma} \\ z_1 &= -1,40 \end{aligned}$$

E a probailidade pedida equivale (graficamente) à área situada no intervalo $[-\infty;-1,40]$ na curva da fdp distribuição Normal padronizada:

$$P(X \leq 83,82) = P(Z \leq -1,40) \equiv rea[-\infty;-1,40]$$

Portanto, uma precipitação de 83,82mm/ano localiza-se a -1,40 desvios padrão à esquerda da média da curva Normal padronizada ($\mu = 0$).

Em uma tabela da Distribuição Normal Padronizada temos a probabilidade associada ao intervalo $P(0 < Z < z)$ tabelada para vários valores de z. No caso, veremos que para um valor $P(0 < z < 1,40) = 0,4192$ (lembre-se: a curva é simétrica por essa razão as tableas resumem-se a mostrar um dos lados).

Sendo a curva simétrica, a área total (probabilidade) sob a fdp é igual a 1: 0,50 **à esquerda** e 0,50 **à direita**. Assim, a área hachurada em vermelho na Figura 6.13 é a probabilidade pedida:

$$\begin{aligned} P(X \leq 83,82) &= 0,50 - 0,4192 \\ P(X \leq 83,82) &= 0,0808 \end{aligned}$$

```
library(ggplot2)
options("digits"=4)
prob_desejada=0.0808
z_desejado=round(qnorm(prob_desejada),4)
d_desejada=dnorm(z_desejado, 0, 1)
d_0=dnorm(0, 0, 1)

ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(-4, z_desejado),
            colour="red") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores score (z)", breaks = z_desejado) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(z_desejado, 0),
            colour="black")+
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(0, 4),
            colour="black")+
  labs(title=
      "Curva da função densidade da distribuição Normal padronizada",
      subtitle = "P(-inf; -1,40)=0,0808 (vermelho) \nP(-1,40 ; 0 )=0,4192 (cinza) \nP(0 ;
       ↪  inf)=0,50 (cinza) ")+
  geom_segment(aes(x = z_desejado, y = 0, xend = z_desejado, yend = d_desejada),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  geom_segment(aes(x = 0, y = 0, xend = 0, yend = d_0), color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  theme_bw()
```

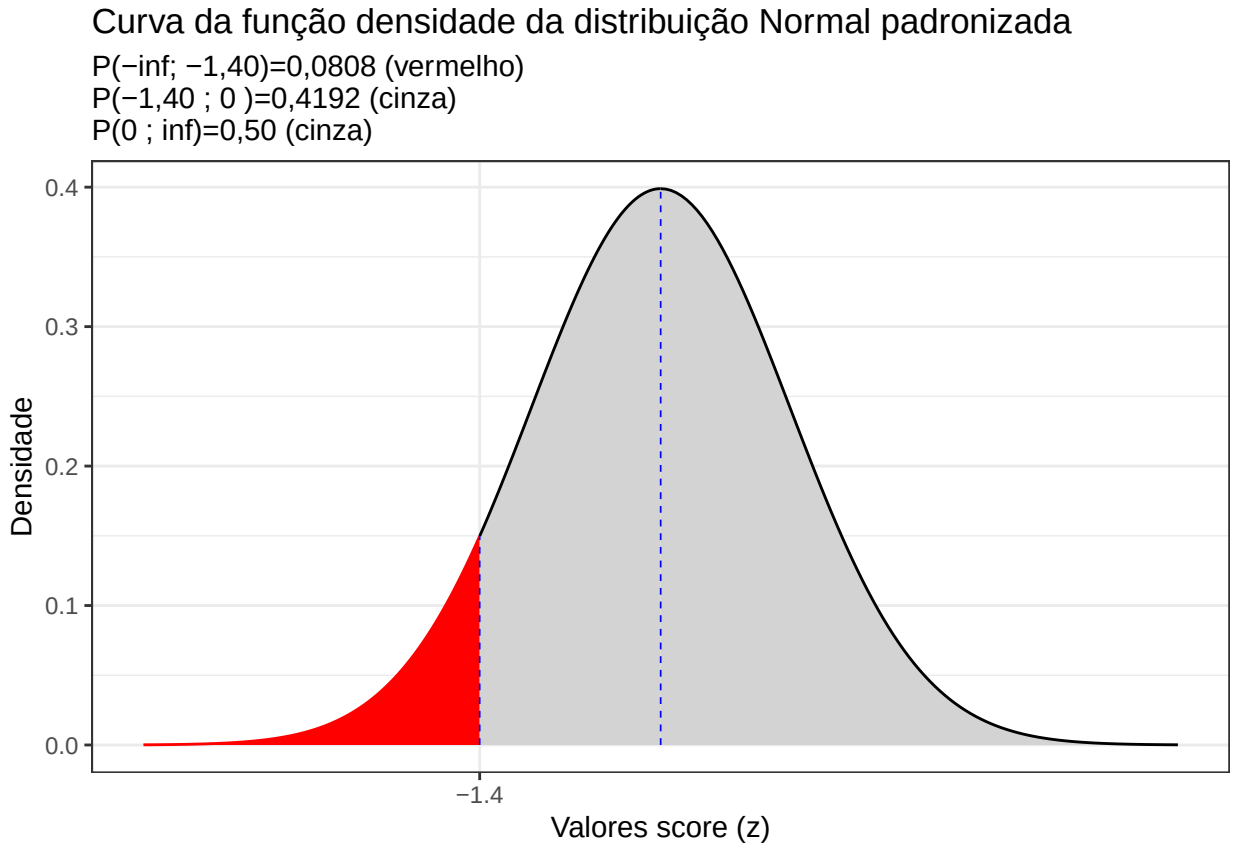


Figure 6.13: Curva da fdp da Distribuição Normal padronizada mostrando as áreas delimitadas pelo score z calculado (-1,40)

De modo análogo para a segunda questão 96,52 mm/ano) teremos:

$$X_2 = 96,52$$
$$Z_n = \frac{X_n - \mu}{\sigma}$$
$$z_2 = -0,40$$

E a probailidade pedida equivale (graficamente) à área situada no intervalo [$-0,40 ; ∞$] na curva da fdp distribuição Normal padronizada:

$$P(X \geq 96,52) = P(Z \geq -0,40) \equiv rea[-\infty; -1,40]$$

Portanto, uma precipitação de 96,52 mm/ano localiza-se a -0,40 desvios padrão à esquerda da média da curva Normal padronizada ($\mu = 0$).

Em uma tabela da Distribuição Normal Padronizada temos a probabilidade associada ao intervalo $P(0 < Z < z)$ tabelada para vários valores de z. No caso, veremos que para um valor $P(0 < z < 0,40) = 0,1554$ (lembre-se: a curva é simétrica por essa razão as tableas resumem-se a mostrar um dos lados).

Sendo a curva simétrica, a área total (probabilidade) sob a fdp é igual a 1: 0,50 **à esquerda** e 0,50 **à direita**. Assim, a área hachurada em vermelho na Figura 6.14 é a probabilidade pedida:

$$P(X \geq 96,52) = 0,50 + 0,4192 = 0,6554$$

```
library(ggplot2)
options("digits"=4)
prob_desejada=0.3446
z_desejado=round(qnorm(prob_desejada),3)
d_desejada=dnorm(z_desejado, 0, 1)
d_0=dnorm(0, 0, 1)

ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(-4, z_desejado),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores score (z)", breaks = z_desejado) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(z_desejado, 0),
            colour="red")+
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(0, 4),
            colour="red")+
  labs(title=
      "Curva da função densidade da distribuição Normal padronizada",
      subtitle = "P(-inf; -0,40)=0,3446 (cinza) \nP(-0,40 ; 0)=0,1554 (vermelho) \nP(0 ;
       ↪  inf)=0,50 (vermelho) ")+
  geom_segment(aes(x = z_desejado, y = 0, xend = z_desejado, yend = d_desejada),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  geom_segment(aes(x = 0, y = 0, xend = 0, yend = d_0), color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  theme_bw()
```

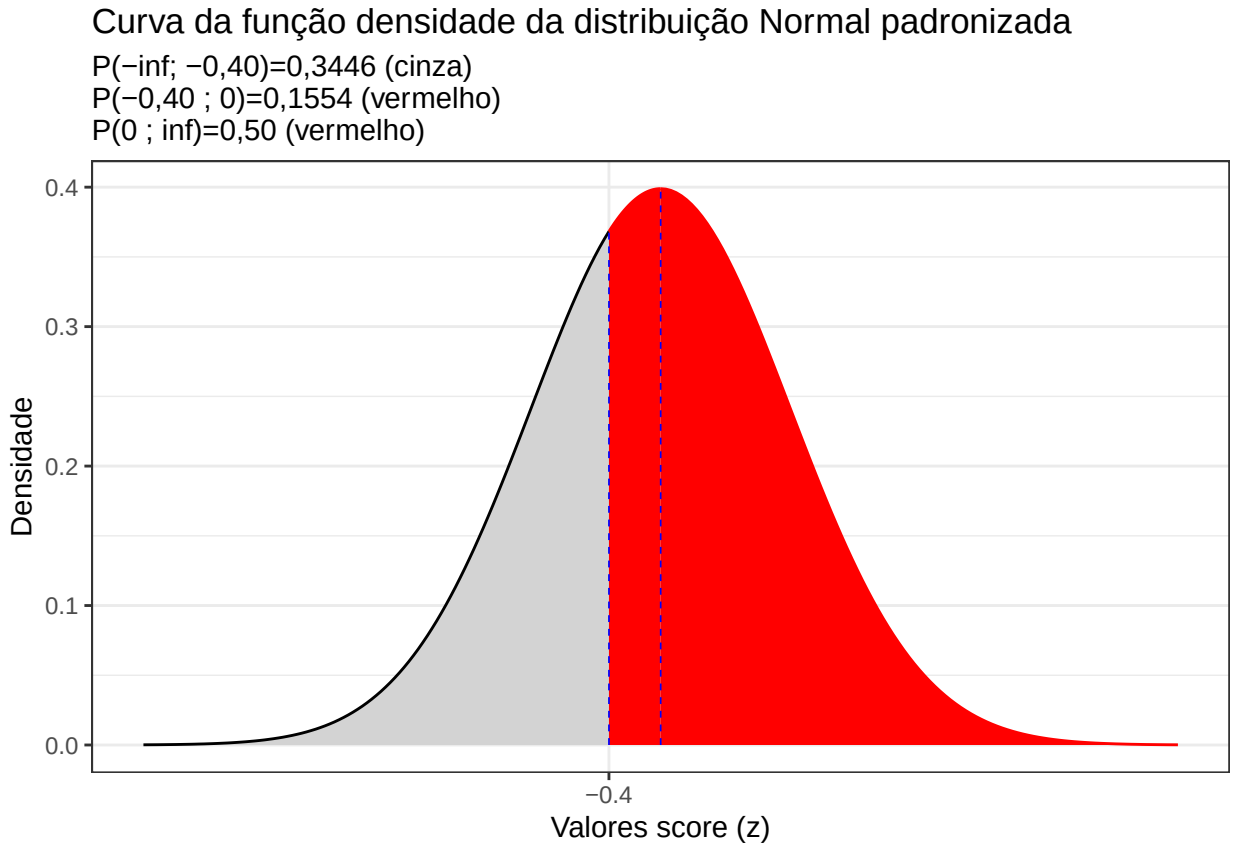


Figure 6.14: Curva da fdp da Distribuição Normal padronizada mostrando as áreas delimitadas pelo score z calculado (-0,40)

6.3.4 Student "t"

Se uma variável aleatória T contínua com ν graus de liberdade segue a *Distribuição t de Student*, sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(t) = \frac{-\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi} \cdot \Gamma \cdot \left(\frac{\nu}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{\frac{-(\nu+1)}{2}}$$

com $\Gamma(n) = (n!)$

Uma variável aleatória contínua com essa distribuição possui:

- $E(T) = \mu = 0$; e,
- $Var(T) = \sigma^2 = \frac{\nu}{(\nu-2)}$, para $\nu > 2$

Admitamos que a partir de uma amostra aleatória composta por n valores retirados de uma população Normal com variância conhecida σ^2 deseje-se estimar a média μ.

Para grandes amostras ($n \geq 30$) a distribuição amostral de $\bar{X}$ é aproximadamente Normal, com média μ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$. Isso torna possível estabelecer a seguinte estatística padronizada anteriormente vista:

$$Z \sim \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Entretanto, para amostras de tamanho reduzido e variância desconhecida, a adoção do desvio padrão amostral S na estatística anterior conduz a uma outra distribuição.

Essa nova distribuição ainda é simétrica e com média $\mu = 0$; todavia não mais seria a Normal padronizada pois seu denominador $\frac{S}{\sqrt{n}}$ é uma variável aleatória (S é uma variável aleatória pois depende da amostra extrída ao passo o denominador anterior era uma constante: σ).

Essa família de distribuições (cuja forma tende à de uma distribuição Normam padronizada quando $n \to \infty, t_n \to N(0,1)$) foi estabelecida pelo químico e estatístico inglês William Sealy Gosset.

$$T \sim \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Para se trabalhar com essa distribuição é preciso saber qual sua forma específica e isso é informado por uma estatística denominada **graus de liberdade**: ν.

Toda estatística de teste que dependa de uma variável aleatória possui graus de liberdade (ν). O número de informações independentes (ou livres) da amostra dá o número de graus de liberdade da Distribuição t de Student.

Na situação acima o propósito é estimar a média populacional μ através da média amostral $\bar{X}$; todavia, tivemos também que estimar sua variância σ^2 através de S^2, de tal modo que o número de graus de liberdade será $\nu = n - 1$: o tamanho da amostra menos 1.

A área sob a curva da fdp de uma distribuição de Student (probabilidade cumulativa entre dois valores t) é também obtida em tabelas.

Essas tabelas apresentam no **cruzamento** de suas **linhas** e **colunas** , o valor "t" para várias áreas (probabilidades) associadas cmom:

- ao intervalo fechado: [-t ; +t] (Figura 6.16);
- o intervalo aberto à esquerda: [-inf ; t] (Figura 6.17); e,
- o intervalo aberto à direita: [t, inf] (Figura 6.18).

Nas linhas horizontais lê-se os graus de liberdade ν e nas colunas as áreas (probabilidades).

Distribuição t de Student

gl/q	Área contida nas duas caudas laterais (bicaudal) da distribuição t de Student											
	0,990	0,980	0,975	0,950	0,900	0,800	0,200	0,100	0,050	0,025	0,020	0,010
	Área contida na cauda superior ou inferior (unicaudal) da distribuição t de Student											
	0,995	0,990	0,9875	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,0125	0,010	0,005
1	0,0157	0,0314	0,0393	0,0787	0,1584	0,3249	3,0777	6,3138	12,7062	25,4517	31,8205	63,6567
2	0,0141	0,0283	0,0354	0,0708	0,1421	0,2887	1,8856	2,9200	4,3027	6,2053	6,9646	9,9248
3	0,0136	0,0272	0,0340	0,0681	0,1366	0,2767	1,6377	2,3534	3,1824	4,1765	4,5407	5,8409
4	0,0133	0,0267	0,0333	0,0667	0,1338	0,2707	1,5332	2,1318	2,7764	3,4954	3,7469	4,6041
5	0,0132	0,0263	0,0329	0,0659	0,1322	0,2672	1,4759	2,0150	2,5706	3,1634	3,3649	4,0321
6	0,0131	0,0261	0,0327	0,0654	0,1311	0,2648	1,4398	1,9432	2,4469	2,9687	3,1427	3,7074
7	0,0130	0,0260	0,0325	0,0650	0,1303	0,2632	1,4149	1,8946	2,3646	2,8412	2,9980	3,4995
8	0,0129	0,0259	0,0323	0,0647	0,1297	0,2619	1,3968	1,8595	2,3060	2,7515	2,8965	3,3554
9	0,0129	0,0258	0,0322	0,0645	0,1293	0,2610	1,3830	1,8331	2,2622	2,6850	2,8214	3,2498
10	0,0129	0,0257	0,0321	0,0643	0,1289	0,2602	1,3722	1,8125	2,2281	2,6338	2,7638	3,1693
11	0,0128	0,0256	0,0321	0,0642	0,1286	0,2596	1,3634	1,7959	2,2010	2,5931	2,7181	3,1058
12	0,0128	0,0256	0,0320	0,0640	0,1283	0,2590	1,3562	1,7823	2,1788	2,5600	2,6810	3,0545
13	0,0128	0,0256	0,0319	0,0639	0,1281	0,2586	1,3502	1,7709	2,1604	2,5326	2,6503	3,0123

Figure 6.15: Tabela t mostrando duas áreas (probabilidades) para um grau de liberdade igual a 10. No intervalo fechado [-0,1289 ; 0,1289] a probabilidade é de 0,90 e para os intervalos abertos à direita: [0,1289 ; inf] e à esquerda: [+inf ; 0,1289] é de 0,95.

A tabela t possibilita:

1- encontrar a probabilidade (área) partindo de um valor "t"; e
2- encontrar um valor "t" para determinada probabilidade

A fdp da distribuição de Student apresenta também uma **curva simétrica** centrada em sua média $\mu = 0$.

A **totalidade da área** sob essa fdp (ou seja, o intervalo $-\infty < t < \infty$) possui área igual a 1. Cada metade, consequentemente, terá área igual a $0,50$.

Muitos exercícios irão demandar que você some a área (0,50) do restante da curva da fdp, subtraia ou faça outras operações aritméticas simples para resolvê-los.

```
library(ggplot2)

alfa=0.05

prob_desejada1=alfa/2
df=10
t_desejado1=round(qt(prob_desejada1,df ),4)
d_desejada1=dt(t_desejado1,df)

prob_desejada2=1-alfa/2
df=10
t_desejado2=round(qt(prob_desejada2, df),4)
d_desejada2=dt(t_desejado2,df)


ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "red",
            xlim = c(-4, t_desejado1),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(t_desejado1,0),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(0, t_desejado2),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "red",
            xlim = c(t_desejado2,4),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores de t", breaks = c(t_desejado1, t_desejado2))  +
  labs(title= "Curva da função densidade \nDistribuição t (df=10)",
       subtitle = "P(-2,228 ; 2,228)=0,90 (cinza) \nP(-inf ; -2,228)=P(2,086; inf)=0,05
        ↪  (vermelho)")+
  geom_segment(aes(x = t_desejado1, y = 0, xend = t_desejado1, yend = d_desejada1),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  geom_segment(aes(x = t_desejado2, y = 0, xend = t_desejado2, yend = d_desejada2),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
```

```
annotate(geom="text", x=-0.1, y=0.2, label="Probabilidade (área) =0,90 \n(gl=10)",
 ↪  angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=-3.5, y=0.1, label="Probabilidade (área) =0,05 \n(gl=10)",
 ↪  angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=2.5, y=0.1, label="Probabilidade (área) =0,05 \n(gl=10)", angle=0,
 ↪  vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
theme_bw()
```

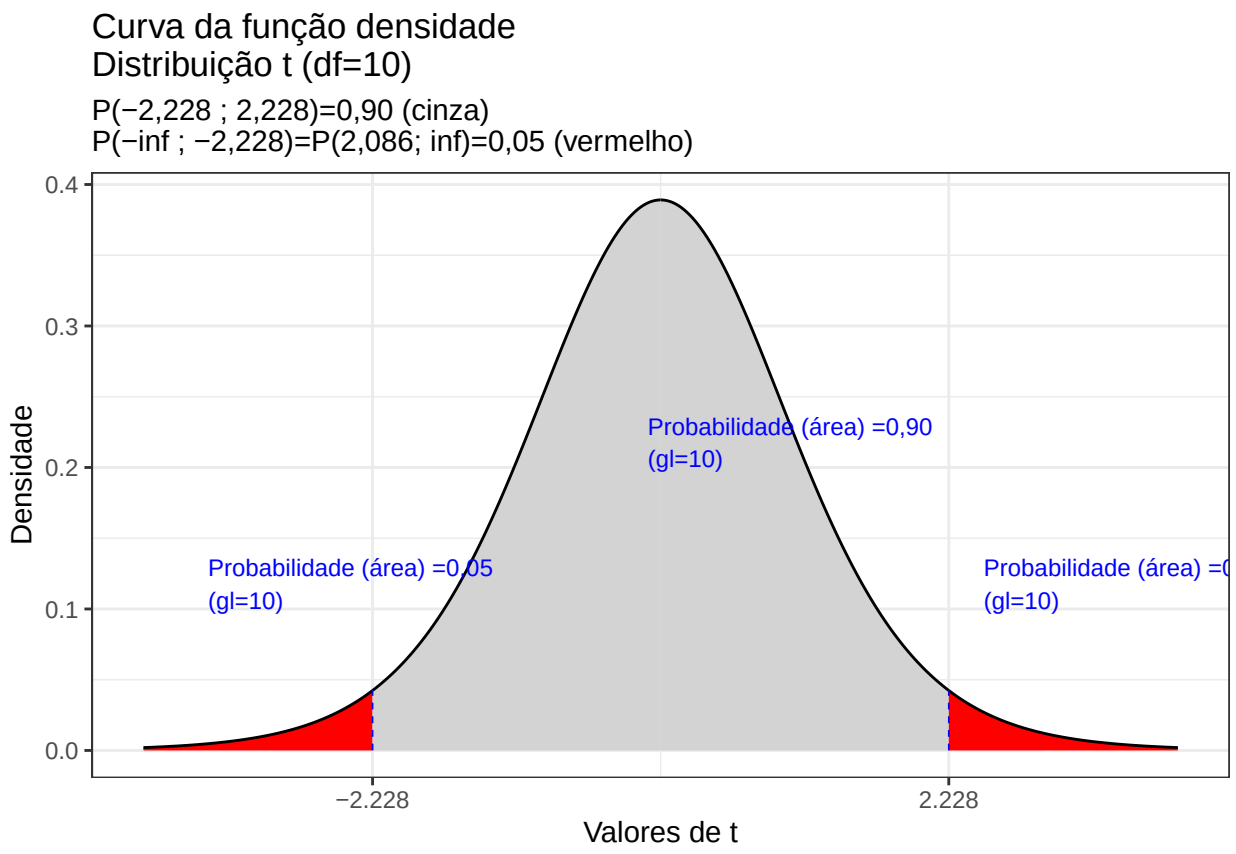


Figure 6.16: Curva da fdp da Distribuição Studentpara 10 graus de liberdade, mostrando as áreas delimitadas pelos valores +/-t (+/-2,28)

```
alfa=0.025
prob_desejada=alfa
df=10
t_desejado=round(qt(prob_desejada,df ),4)
d_desejada=dt(t_desejado,df)


ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "red",
            xlim = c(-4, t_desejado),
```

```
          colour="black") +
geom_area(stat = "function",
          fun = dt,
          args=list(df),
          fill = "lightgrey",
          xlim = c(t_desejado,0),
          colour="black") +
geom_area(stat = "function",
          fun = dt,
          args=list(df),
          fill = "lightgrey",
          xlim = c(0, 4),
          colour="black")+
scale_y_continuous(name="Densidade") +
scale_x_continuous(name="Valores de t", breaks = c(t_desejado)) +
labs(title= "Curva da função densidade \nDistribuição t (df=10)",
     subtitle = "P(-inf ; -2,228)=0,025 (vermelho) \nP(-2,228 ; +inf)= 0,975 (cinza)")+
geom_segment(aes(x = t_desejado, y = 0, xend = t_desejado, yend = d_desejada),
 ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=-0.1, y=0.2, label="Probabilidade (área) =0,975 \n(gl=10)",
 ↪  angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=-3.5, y=0.1, label="Probabilidade (área) =0,025 \n(gl=10)",
 ↪  angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
theme_bw()
```

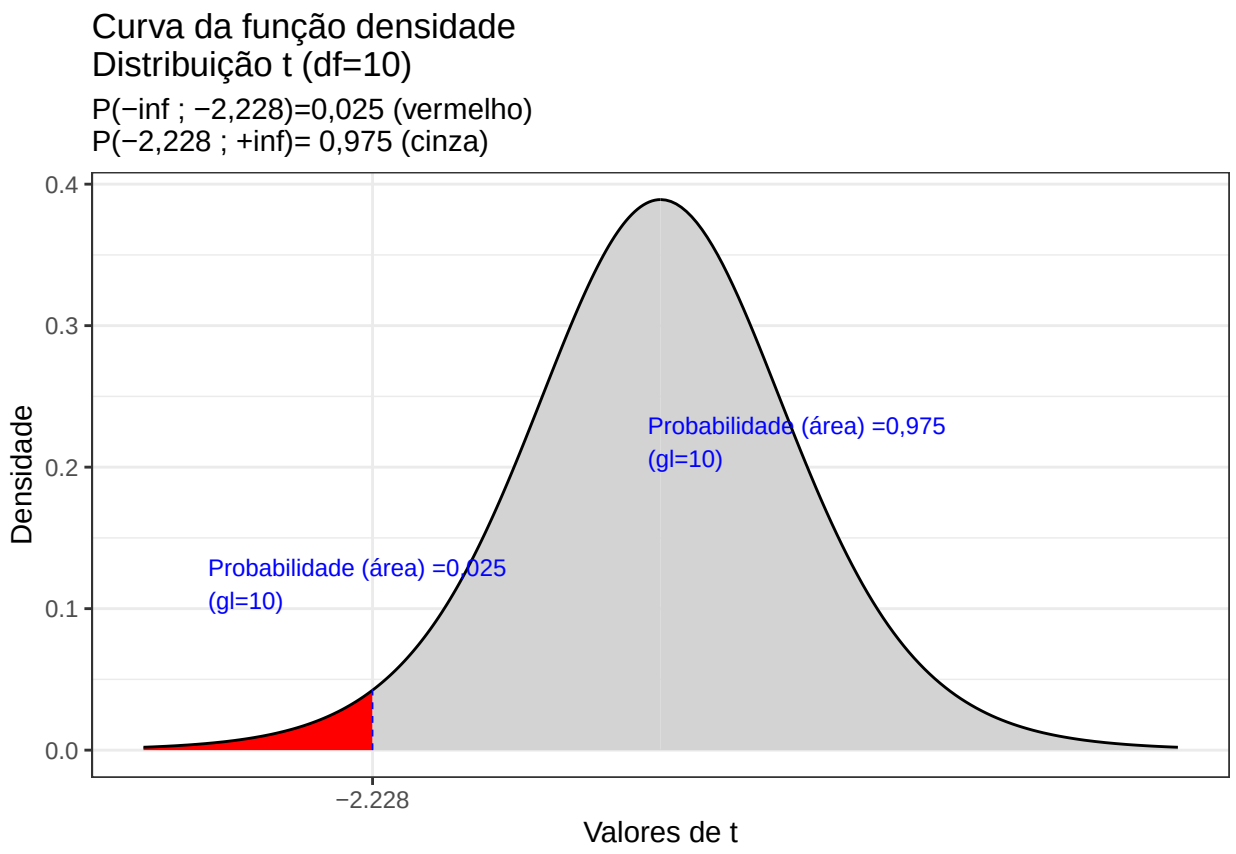


Figure 6.17: Curva da fdp da Distribuição Student para 10 graus de liberdade, mostrando as áreas delimitadas pelo valor -t (-2,28)

```
alfa=0.025
prob_desejada=1-alfa
df=10
t_desejado=round(qt(prob_desejada,df ),4)
d_desejada=dt(t_desejado,df)


ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(-4, 0),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(0, t_desejado),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "red",
            xlim = c(t_desejado, 4),
            colour="black")+
scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores de t", breaks = c(t_desejado)) +
  labs(title= "Curva da função densidade \nDistribuição t (df=10)",
       subtitle = "P(-inf ; 2,228)=0,975 (vermelho) \nP(2,228 ; +inf)= 0,025 (cinza)")+
  geom_segment(aes(x = t_desejado, y = 0, xend = t_desejado, yend = d_desejada),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=0, y=0.2, label="Probabilidade (área) =0,975 \n(gl=10)", angle=0,
   ↪  vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=2.5, y=0.1, label="Probabilidade (área) =0,025 \n(gl=10)",
   ↪  angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  theme_bw()
```

6.3.5 Qui-Quadrado

Considerem X_1,X_2,...,X_ν como ν variáveis aleatórias contínuas independentes e normalmente distribuídas com média zero e variância 1. Definamos também uma variável aleatória resultante da soma dos quadrados das variáveis anteriormente especificadas:

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + ...X_\nu^2$$

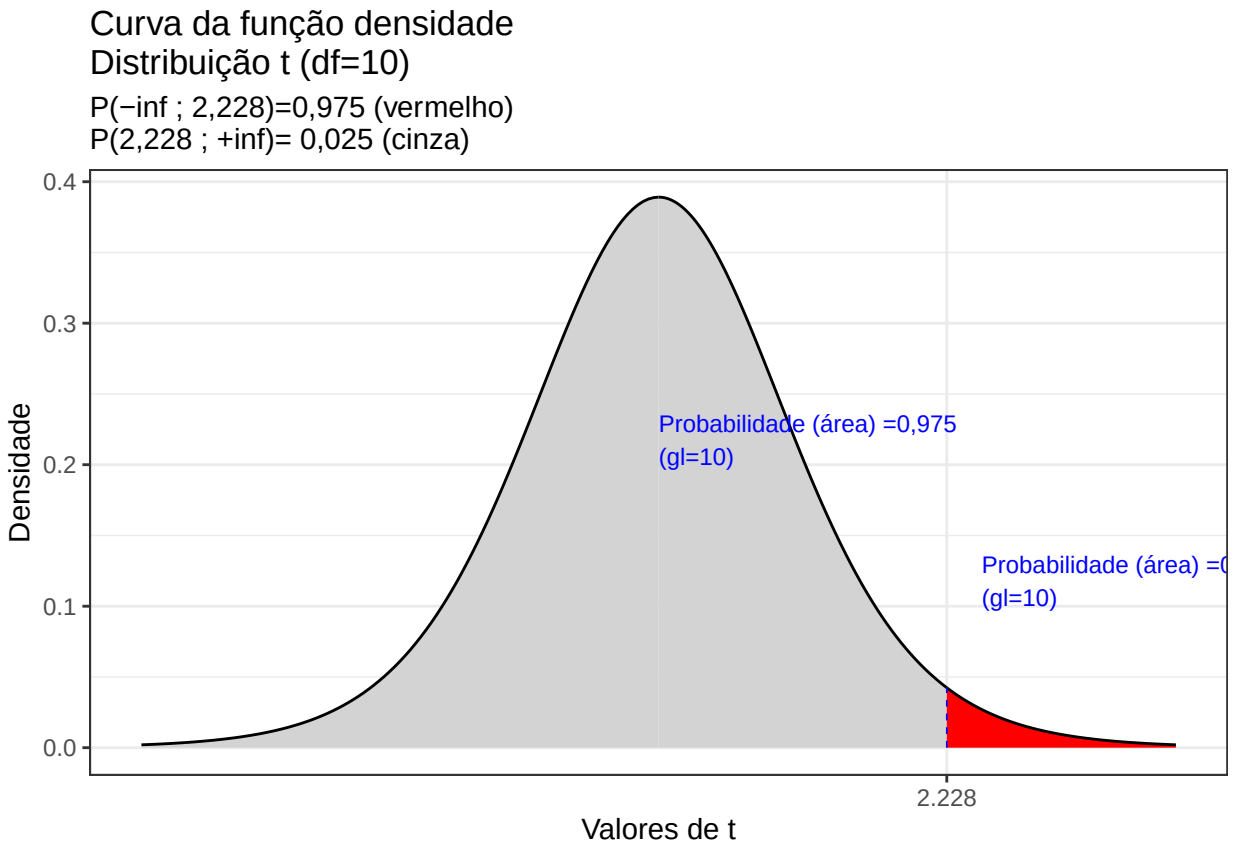


Figure 6.18: Curva da fdp da Distribuição Student para 10 graus de liberdade, mostrando as áreas delimitadas pelo valor -t (-2,28)

A variável aleatória χ^2 possui seguinte fdp para $x > 0$ (para $x \leq 0, f(x) = 0$), com ν graus de liberdade:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \cdot \Gamma \cdot (\frac{\nu}{2})} \cdot x^{(\frac{\nu}{2})^{-1} \cdot \epsilon^{\frac{-\nu}{2}}}$$

A função de probabilidade cumulativa é dada por:

$$P(\chi^2 \leq x) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \cdot \Gamma \cdot (\frac{\nu}{2})} \int_{-\infty}^{x} u^{(\frac{\nu}{2})^{-1} \cdot \epsilon^{\frac{-\nu}{2}}} du$$

Algumas propriedades da distriuição Qui-quadrado:

- Pelo Teorema Central do Limite esta família de distribuições tende a uma distribuição Normal quando o número de graus de liberdade tende ao infinito ($\nu \to \infty$ ($\chi^2 \to N(0,1)$));
- Se uma variável é definida como a soma de duas variáveis independentes com Distribuição Qui-quadrado com ν_1 e ν_2 graus de liberdade, essa variável também seguirá a Distribuição Qui-quadrado com $\nu_1 + \nu_2$ graus de liberdade
- É assimétrica e definda para $x > 0$.

6.3.6 Fisher-Snedecor "F"

Uma variável aleatória contínua definida como $X \sim F(\nu_1, \nu_2)$ segue a Distribuição Fisher-Snedecor com parâmetros ν_1 e ν_2, números inteiros positivos conhecidos como graus de liberdade do numerador e do denominador, respectivamente.

A Distribuição de Fisher-Snedecor é também conhecida como a Distribuição da razão de variâncias.

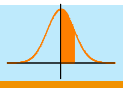
Uma variável aleatória X que segue uma Distribuição de Fisher-Snedecor com ν_1 e ν_2 graus de liberdade tem sua pdf dada por:

$$f(x) = \frac{\Gamma((\nu_1+\nu_2)/2)(\nu_1/\nu_2)^{\nu_1/2}x^{\nu_1/2-1}}{\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)[(\nu_1/\nu_2)x+1]^{(\nu_1+\nu_2)/2}} \qquad x > 0,$$

com $\nu_1 = 1, 2, \ldots$ e $\nu_2 = 1, 2, \ldots$.

6.4 Tabelas

Tabela - Normal Padrão de 0 a z



$P(0 \leq Z \leq z)$

z	Segunda casa decimal de Z									
Parte inteira e primeira casa decimal de Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Professor Guru professorguru.com.br

Figure 6.19: Tabela de valores “z“ da Distribuição Normal padronizada

AulasdeMatemática.com.br
Matemática | Estatística | Mat. Financeira | Rac. Lógico-Quantitativo
(11) 3499-2828
(11) 99828-2824
http://AulasdeMatematica.com.br
Atendimento de Seg à Sáb das 10 às 23hs
Av. Vereador José Diniz, 2804 - Campo Belo - São Paulo/SP - Brasil - CEP 04604-005
Atenção: O local é restrito a realização das aulas presenciais. Informações somente pelos telefones ou e-mail.
Thiago Rodrigo Carneiro
Lic. Matemática - USP
Bach. Estatística - USP

Distribuição t de Student

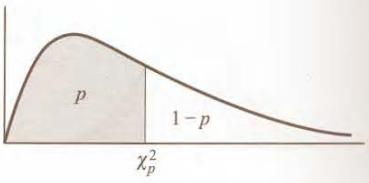
gl/q	Área contida nas duas caudas laterais (bicaudal) da distribuição t de Student											
	0,990	0,980	0,975	0,950	0,900	0,800	0,200	0,100	0,050	0,025	0,020	0,010
	Área contida na cauda superior ou inferior (unicaudal) da distribuição t de Student											
	0,995	0,990	0,9875	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,0125	0,010	0,005
graus de liberdade												
1	0,0157	0,0314	0,0393	0,0787	0,1584	0,3249	3,0777	6,3138	12,7062	25,4517	31,8205	63,6567
2	0,0141	0,0283	0,0354	0,0708	0,1421	0,2887	1,8856	2,9200	4,3027	6,2053	6,9646	9,9248
3	0,0136	0,0272	0,0340	0,0681	0,1366	0,2767	1,6377	2,3534	3,1824	4,1765	4,5407	5,8409
4	0,0133	0,0267	0,0333	0,0667	0,1338	0,2707	1,5332	2,1318	2,7764	3,4954	3,7469	4,6041
5	0,0132	0,0263	0,0329	0,0659	0,1322	0,2672	1,4759	2,0150	2,5706	3,1634	3,3649	4,0321
6	0,0131	0,0261	0,0327	0,0654	0,1311	0,2648	1,4398	1,9432	2,4469	2,9687	3,1427	3,7074
7	0,0130	0,0260	0,0325	0,0650	0,1303	0,2632	1,4149	1,8946	2,3646	2,8412	2,9980	3,4995
8	0,0129	0,0259	0,0323	0,0647	0,1297	0,2619	1,3968	1,8595	2,3060	2,7515	2,8965	3,3554
9	0,0129	0,0258	0,0322	0,0645	0,1293	0,2610	1,3830	1,8331	2,2622	2,6850	2,8214	3,2498
10	0,0129	0,0257	0,0321	0,0643	0,1289	0,2602	1,3722	1,8125	2,2281	2,6338	2,7638	3,1693
11	0,0128	0,0256	0,0321	0,0642	0,1286	0,2596	1,3634	1,7959	2,2010	2,5931	2,7181	3,1058
12	0,0128	0,0256	0,0320	0,0640	0,1283	0,2590	1,3562	1,7823	2,1788	2,5600	2,6810	3,0545
13	0,0128	0,0256	0,0319	0,0639	0,1281	0,2586	1,3502	1,7709	2,1604	2,5326	2,6503	3,0123
14	0,0128	0,0255	0,0319	0,0638	0,1280	0,2582	1,3450	1,7613	2,1448	2,5096	2,6245	2,9768
15	0,0127	0,0255	0,0319	0,0638	0,1278	0,2579	1,3406	1,7531	2,1314	2,4899	2,6025	2,9467
16	0,0127	0,0255	0,0318	0,0637	0,1277	0,2576	1,3368	1,7459	2,1199	2,4729	2,5835	2,9208
17	0,0127	0,0254	0,0318	0,0636	0,1276	0,2573	1,3334	1,7396	2,1098	2,4581	2,5669	2,8982
18	0,0127	0,0254	0,0318	0,0636	0,1274	0,2571	1,3304	1,7341	2,1009	2,4450	2,5524	2,8784
19	0,0127	0,0254	0,0318	0,0635	0,1274	0,2569	1,3277	1,7291	2,0930	2,4334	2,5395	2,8609
20	0,0127	0,0254	0,0317	0,0635	0,1273	0,2567	1,3253	1,7247	2,0860	2,4231	2,5280	2,8453
21	0,0127	0,0254	0,0317	0,0635	0,1272	0,2566	1,3232	1,7207	2,0796	2,4138	2,5176	2,8314
22	0,0127	0,0254	0,0317	0,0634	0,1271	0,2564	1,3212	1,7171	2,0739	2,4055	2,5083	2,8188
23	0,0127	0,0253	0,0317	0,0634	0,1271	0,2563	1,3195	1,7139	2,0687	2,3979	2,4999	2,8073
24	0,0127	0,0253	0,0317	0,0634	0,1270	0,2562	1,3178	1,7109	2,0639	2,3909	2,4922	2,7969
25	0,0127	0,0253	0,0317	0,0633	0,1269	0,2561	1,3163	1,7081	2,0595	2,3846	2,4851	2,7874
26	0,0127	0,0253	0,0316	0,0633	0,1269	0,2560	1,3150	1,7056	2,0555	2,3788	2,4786	2,7787
27	0,0127	0,0253	0,0316	0,0633	0,1268	0,2559	1,3137	1,7033	2,0518	2,3734	2,4727	2,7707
28	0,0126	0,0253	0,0316	0,0633	0,1268	0,2558	1,3125	1,7011	2,0484	2,3685	2,4671	2,7633
29	0,0126	0,0253	0,0316	0,0633	0,1268	0,2557	1,3114	1,6991	2,0452	2,3638	2,4620	2,7564
30	0,0126	0,0253	0,0316	0,0632	0,1267	0,2556	1,3104	1,6973	2,0423	2,3596	2,4573	2,7500
31	0,0126	0,0253	0,0316	0,0632	0,1267	0,2555	1,3095	1,6955	2,0395	2,3556	2,4528	2,7440
32	0,0126	0,0253	0,0316	0,0632	0,1267	0,2555	1,3086	1,6939	2,0369	2,3518	2,4487	2,7385
33	0,0126	0,0253	0,0316	0,0632	0,1266	0,2554	1,3077	1,6924	2,0345	2,3483	2,4448	2,7333
34	0,0126	0,0253	0,0316	0,0632	0,1266	0,2553	1,3070	1,6909	2,0322	2,3451	2,4411	2,7284
35	0,0126	0,0252	0,0316	0,0632	0,1266	0,2553	1,3062	1,6896	2,0301	2,3420	2,4377	2,7238
36	0,0126	0,0252	0,0316	0,0631	0,1266	0,2552	1,3055	1,6883	2,0281	2,3391	2,4345	2,7195
37	0,0126	0,0252	0,0316	0,0631	0,1265	0,2552	1,3049	1,6871	2,0262	2,3363	2,4314	2,7154
38	0,0126	0,0252	0,0315	0,0631	0,1265	0,2551	1,3042	1,6860	2,0244	2,3337	2,4286	2,7116
39	0,0126	0,0252	0,0315	0,0631	0,1265	0,2551	1,3036	1,6849	2,0227	2,3313	2,4258	2,7079
40	0,0126	0,0252	0,0315	0,0631	0,1265	0,2550	1,3031	1,6839	2,0211	2,3289	2,4233	2,7045
45	0,0126	0,0252	0,0315	0,0631	0,1264	0,2549	1,3006	1,6794	2,0141	2,3189	2,4121	2,6896
48	0,0126	0,0252	0,0315	0,0630	0,1263	0,2548	1,2994	1,6772	2,0106	2,3139	2,4066	2,6822
50	0,0126	0,0252	0,0315	0,0630	0,1263	0,2547	1,2987	1,6759	2,0086	2,3109	2,4033	2,6778
55	0,0126	0,0252	0,0315	0,0630	0,1262	0,2546	1,2971	1,6730	2,0040	2,3044	2,3961	2,6682
60	0,0126	0,0252	0,0315	0,0630	0,1262	0,2545	1,2958	1,6706	2,0003	2,2990	2,3901	2,6603
63	0,0126	0,0252	0,0315	0,0630	0,1262	0,2544	1,2951	1,6694	1,9983	2,2962	2,3870	2,6561
70	0,0126	0,0252	0,0315	0,0629	0,1261	0,2543	1,2938	1,6669	1,9944	2,2906	2,3808	2,6479
75	0,0126	0,0252	0,0314	0,0629	0,1261	0,2542	1,2929	1,6654	1,9921	2,2873	2,3771	2,6430
80	0,0126	0,0251	0,0314	0,0629	0,1261	0,2542	1,2922	1,6641	1,9901	2,2844	2,3739	2,6387
85	0,0126	0,0251	0,0314	0,0629	0,1260	0,2541	1,2916	1,6630	1,9883	2,2818	2,3710	2,6349
90	0,0126	0,0251	0,0314	0,0629	0,1260	0,2541	1,2910	1,6620	1,9867	2,2795	2,3685	2,6316
95	0,0126	0,0251	0,0314	0,0629	0,1260	0,2541	1,2905	1,6611	1,9853	2,2775	2,3662	2,6286
99	0,0126	0,0251	0,0314	0,0629	0,1260	0,2540	1,2902	1,6604	1,9842	2,2760	2,3646	2,6264
100	0,0126	0,0251	0,0314	0,0629	0,1260	0,2540	1,2901	1,6602	1,9840	2,2757	2,3642	2,6259
120	0,0126	0,0251	0,0314	0,0628	0,1259	0,2539	1,2886	1,6577	1,9799	2,2699	2,3578	2,6174
100000	0,0125	0,0251	0,0313	0,0627	0,1257	0,2533	1,2816	1,6449	1,9600	2,2414	2,3264	2,5759

As linhas indicam o número de graus de liberdade (gl) da distribuição t de Student e as colunas indicam a soma das áreas contidas nas caudas (bicaudal). Por exemplo, a linha com 16 gl e coluna 0,10 cujo valor tabelado é 1,746 indica que o valor 1,746 deixa 10% de probabilidade nas duas caudas quando há 16 gl. **Ou seja, dada a probabilidade bicaudal eu descubro o valor t correspondente.**

Fonte: Microsoft Excel 2007, fórmula INVT.

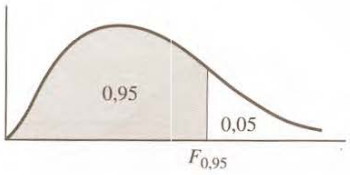
Figure 6.20: Tabela de valores "t" da Distribuição de Student

Percentis χ^2_p da Distribuição Qui-Quadrado com ν Graus de Liberdade



ν	$\chi^2_{0,005}$	$\chi^2_{0,01}$	$\chi^2_{0,025}$	$\chi^2_{0,05}$	$\chi^2_{0,10}$	$\chi^2_{0,25}$	$\chi^2_{0,50}$	$\chi^2_{0,75}$	$\chi^2_{0,90}$	$\chi^2_{0,95}$	$\chi^2_{0,975}$	$\chi^2_{0,99}$	$\chi^2_{0,995}$	$\chi^2_{0,999}$
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,102	0,455	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	21,7	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7
40	20,7	22,2	24,4	26,5	29,1	33,7	39,3	45,6	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8	73,4
50	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7	42,9	49,3	56,3	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5	86,7
60	35,5	37,5	40,5	43,2	46,5	52,3	59,3	67,0	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0	99,6
70	43,3	45,4	48,8	51,7	55,3	61,7	69,3	77,6	85,5	90,5	95,0	100	104	112
80	51,2	53,5	57,2	60,4	64,3	71,1	79,3	88,1	96,6	102	107	112	116	125
90	59,2	61,8	65,6	69,1	73,3	80,6	89,3	98,6	108	113	118	124	128	137
100	67,3	70,1	74,2	77,9	82,4	90,1	99,3	109	118	124	130	136	140	149

Figure 6.21: Tabela de valores “x“ da Distribuição Qui-quadrado



Valores do 95º Percentil (nível 0,05), $F_{0,95}$, para a Distribuição F

com graus de liberdade ν_1 no numerador e ν_2 no denominador.

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

Figure 6.22: Tabela de valores "x" da Distribuição F específicos do percentil 95 (há outras tabelas, para outros percentis)

Módulo 7

Introdução ao planejamento de pesquisas

O estudo de uma realidade ainda não compreendida impõe ao pesquisador a formulação de hipóteses sobre suas possíveis causas, qualquer que seja a área do conhecimento:

- ciências biológicas;
- ciências exatas;
- ciências agrárias;
- ciências humanas;
- ciência sociais e outras.

Uma hipótese é uma conjectura racional feita após um grande número de observações e experimentos; é uma tese que precisa ser confirmada ou verificada por meio de novas observações e experimentos.

Uma teoria científica é transitória. Uma conjectura temporariamente sustentada que um dia poderá ser refutada e substituída por outra.

Conclusões baseadas em raciocínios plausíveis são provisórias, ao contrário daquelas produzidas por raciocínios demonstrativos. Considere as hipóteses a seguir:

> Exemplo: Crianças socialmente isoladas assistem mais televisão do que crianças bem integradas a seus grupos?

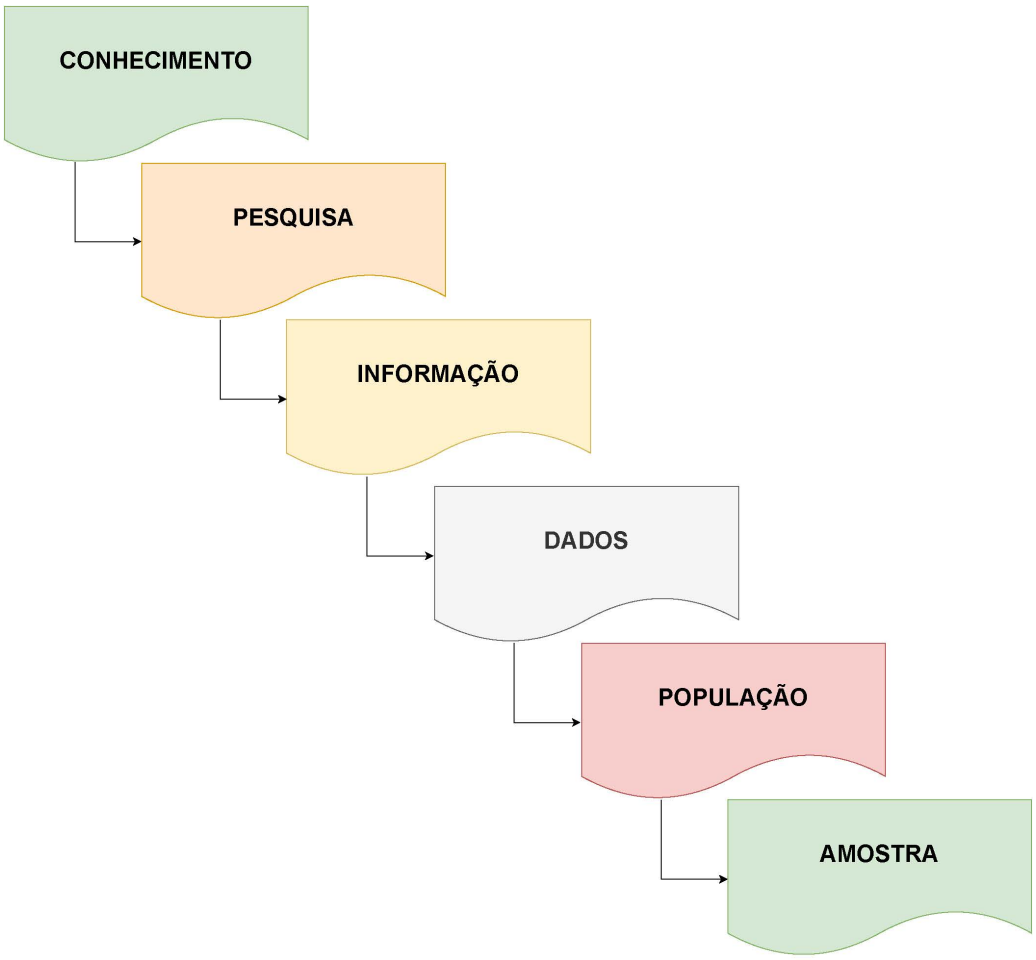


Figure 7.1: Representação esquemática do fluxo de infomações da amostra à produção de conhecimento

Exemplo: Famílias constituídas por um só dos genitores (pai ou mãe ausentes) geram mais delinquentes?

Exemplo: Diferentes tipos de uso do solo urbano influenciam na taxa de ocorrência de crimes?

Só após ter-se bem definido pelo pesquisador o que seria uma **criança socialmente isolada** e uma **criança bem integrada a um grupo**; assim como o que seria **família**, **genitor ausente** e até mesmo o que é **um delinquente**, o que é um **crime** e quais são os **usos do solo urbano** é que se pode avançar com o planejamento da pesquisa até a sua execução (entrevistas com crianças que responderiam o número de horas que passam defronte à televisão por dia ou um levantamento comparativo que permita verificar se há alguma correlação entre o comportamento social e o ambiente familiar de origem).

É necessário ao pesquisador testar suas hipóteses com informações trazidas da realidade estudada mesmo que, aparentemente, pareçam verdadeiras porque, caso contrário, seu julgamento seria conduzido baseado em ideias **pré-concebidas** por experiências pessoais anteriores, muitas vezes tendenciosas, resultando em conclusões cientificamente nulas.

7.1 Planejamento de pesquisas

Alguns consideram o artigo publicado em 1895 pelo estatístico norueguês Anders Nicolai Kiaer (*Observations et expériences concernant les dénombrements représentatifs*) como o nascimento oficial da pesquisa por amostragem, apesar de existirem registros anteriores da realização de pesquisas por Laplace, Lavoisier e outros (link).

Pesquisa é uma investigação sistemática para se obter informações precisas que permitam descrever, explicar o fenômeno que se deseja estudar.

Pesquisas são baseadas em raciocínio lógico e envolve métodos indutivos e dedutivos.

Requerem uma análise aprofundada de todos os dados coletados para que não haja anomalias associadas a eles.

Uma pesquisa cria um caminho para gerar novas perguntas: os dados existentes ajudam a criar mais oportunidades de pesquisa.

Uma pesquisa tem natureza analítica: utiliza todos os dados disponíveis para que não haja ambiguidade na inferência.

A precisão é um dos aspectos mais importantes da pesquisa: as informações obtidas devem ser o mais precisas e verdadeiras possível: precisão nos instrumentos utilizados, nas calibrações de instrumentos ou ferramentas, treinamento de operadores.

7.2 Tipos de pesquisas

Table 7.1: Quadro de tipos de pesquisas conforme sua classificação

Classificação	**Tipos de pesquisas**
Finalidade	básica (fundamental) aplicada (tecnológica)
Abordagem	qualitativa quantitativa (descritiva ou analítica)
Objetivos	exploratória explicativa
Tempo	transversal longitudinal
Natureza	observacional experimental
Obtenção dos dados	observacional experimental por amostragem

7.2.1 Quanto à finalidade

- na pesquisa básica os dados coletados para aprimorar o conhecimento; a principal motivação é a expansão do conhecimento; é uma pesquisa não comercial que não tem como propósito imediato a criação ou invenção de nada; e,
- uma pesquisa aplicada se concentra na análise e solução de problemas existentes na vida real; refere-se ao estudo que ajuda a resolver problemas práticos usando métodos científicos.

7.2.2 Quanto à forma de abordagem

Os tipos de métodos de pesquisa podem ser amplamente divididos em duas categorias quantitativas e qualitativas:

- a pesquisa quantitativa descreve, infere e resolve problemas usando números; a ênfase é colocada na coleta de dados numéricos, no resumo desses dados e na realiazação de inferências a partir dos dados;
- a pesquisa qualitativa é baseada em palavras, sentimentos, opiniões, sons e outros elementos não numéricos e não quantificáveis.

7.2.3 Quanto aos objetivos

- uma pesquisa exploratória é conduzida para explorar um grupo de perguntas; as respostas e análises podem não oferecer uma conclusão final para o problema analisado; tem como objetivo lidar com novas problemáticas que não foram exploradas antes;
- uma pesquisa explicativa é conduzida para entender o impacto de certas alterações em procedimentos padrão já estabelecidos; a realização de experimentos é a forma mais popular de pesquisa casual

7.2.4 Quanto ao desenvolvimento no tempo

- em uma pesquisa transversal a análise está fixada em um momento específico no tempo;
- uma pesquisa longitudinal desenrola-se em um período de tempo determinado

7.2.5 Quanto à natureza

- em uma pesquisa observacional o pesquisador atual de modo passivo;

- uma pesquisa experimental o pesquisador é ativo ao promover processos de modo deliberado;
- em uma pesquisa amostral o pesquisador define uma população que apresenta a característica de inetresse do estudo.

7.2.6 Quanto à forma de obtenção dos dados

- nos levantamento de dados em uma pesquisa observaciona o pesquisador atua meramente como expectador de fenômenos ou fatos, sem, no entanto, realizar qualquer intervenção que possa interferir no curso natural e/ou no desfecho dos mesmos, embora possa, neste meio tempo, realizar medições, análises e outros procedimentos para coleta de dados;

- em pesquisas experimentais o delineamento do experimento estabelece o modo como as variáveis em estudo serão aplicadas ao objeto com o propósito de se obter uma informação (resposta) sobre sua influência para validação ou não de uma hipótese previamente estabelecida;

- levantamentos amostrais são aqueles nos quais os dados são extraídos de um subconjunto tecnicamente extraído de uma população bem definida por meio de procedimentos controlados pelo pesquisador e que podem ser subdivididos em probabilísticos (casuais ou aleatórios) e não probabilísticos (intencionalmente dirigidos).

7.3 Principais etapas de uma pesquisa:

- Definição precisa do objetivo;

- Planejamento;

- Execução;
- Analise dos dados obtidos;

- Resultados; e,
- Conclusões.

7.3.1 Objetivo

Ao se iniciar qualquer pesquisa deve-se ter bem muito bem definido o problema a ser pesquisado, reduzido a uma *hipótese testável*.

Os objetivos de uma pesquisa devem ser elaborados de forma bastante clara (já que as demais etapas da pesquisa tomam como base esses objetivos) e, invariavelmente, envolve uma extensa revisão da literatura existente sobre o assunto.

> Exemplo: (objetivo geral) estabelecer o perfil dos estudantes universitários de Londrina para se (objetivos específicos) conhecer a renda média familiar e cidade de origem. Hipótese: a renda média familiar dos estudantes com origem diversa de Londrina é menor que do que os da própria cidade.

Uma vez que o objetivo geral está estabelecido e as hipóteses a serem testadas foram formuladas deve-se definir a população alvo cujos elementos contém a informação desejada considerando as definições estabelecidas para o problema.

- todas as universidades de Londrina (ou apenas as universidades públicas ou particulares);
- todos os cursos (ou algum em particular) ...

7.4 População

Denomina-se por população ao universo de todos os elementos que apresentam a característica (informação) sob estudo (o termo aqui é utilizado em sentido estritamente técnico, nada relacionado ao número de habitantes de um determinado local).

- os pesos dos estudantes de uma determinada escola (população: todos os alunos);
- os salários pagos por uma empresa (população: todos os funcionários legalmente existentes);
- a proporção de indivíduos favoráveis a determinado projeto em uma cidade (população: todos os habitantes dessa cidade);
- a durabilidade das peças sob produção em uma certa fábrica (população: todas as peças produzidas por essa fábrica);
- o número de horas passadas defronte à televisão por crianças até 10 anos de idade no Brasil (população: todas as crianças do Brasil com até 10 anos).

7.5 Censo

Denomina-se por censo à investigação de todos os elementos da população defnida, o que resulta em apuração exata da informação requerida na pesauisa.

Todavia, muitos objetos de pesquisa impõem um grau de dificuldade e custo financeiro muito elevados para a execução de um censo o que acaba por tornarem não muito frequentes e, usualmente são realizados apenas pelo estado para dar suporte ao planejamento nacional ou local.

7.6 Amostra

A coleta de dados em toda a população é inviável (ou até mesmo impossível) por diversas razões como, por exemplo:

- tempo e/ou recursos financeiros limitados;
- grande dispersão geográfica da população impondo complicações de ordem logística;
- ensaios destrutivos (corpos de prova) para geração de informações;
- inexistência *a priori* de dados, demandando a realização de experimentos para a sua geração.

Denomina-se por amostra a qualquer subconjunto da população, extraído mediante procedimentos tecnicamente prescritos.

Se a característica em estudo em uma população fosse homogênea em todos os seus elementos, qualquer tamanho de amostra seria suficiente (na realidade, bastaria um elemento dessa população para estudar a característica em toda ela).

Considerando que existe variabilidade da característica nos elementos da população o pesquisador deve usar procedimentos estatísticos para a realização da amostragem e assegurar que tal variabilidade se reflita igualmente na amostra.

Quando a população é grande o estudo de uma fração (amostra) mostra-se mais vantajoso pelas seguintes razões:

- redução de custos;

- redução de prazos: problemas relacionados à data de referência e a imprecisões introduzidas ao se fixar uma data pretérita (dificuldade em se recordar); e,

- maior precisão nas informações: menos entrevistadores (mas com alto nível de treinamento) e procedimentos de acompanhamento mais rigoros.

Todavia há situações nas quais a extração de uma amostra não recomendada como:

- população pequena
- a característica de interessa é de fácil mensuração na população;
- necessidade de elevada precisão na estimação.

7.7 Planejamento do levantamento amostral

O planejamento do levantamento amostral deve considerar:

-população objeto: identificar a população total de interesse sobre a qual desejamos obter informações; - característica populacional: delimitar o aspecto da população que interessa ao estudo;
- unidade amostral: definida de acordo com o interesse do estudo é onde a informação de interesse está; pode ser uma peça, um indivíduo, uma família, uma fazenda, um corpo de prova, etc;
- erro amostral: diferença entre um resultado obtido pela análise da informação trazida por uma amostral específica e o verdadeiro valor da informação na população;
- tamanho da amostra: decorrência do item anterior e também das probabilidades de cometimento de erros do tipo I e II estabelecidas *a priori* (testes de hipóteses)

7.8 Elaboração dos questionários

Um questionário deve ser previamente elaborado de modo a manter o foco na obtenção de dados necessários à pesquisa:

- facilitação da comunicação: a linguagem deve ser a mesma adotada pelo público-alvo; e a redação precisa ortograficamente;
- perguntas ambíguas ou não relacionadas à hipótese a ser testada devem ser evitadas, bem como o uso de termos ou simples palavras que possam induzir o respondente a uma opção;
- respostas possíveis: oferecer todas as possíveis alternativas de resposta para que o respondente possa encontrar sua melhor opção e não desistir da pesquisa;

7.8.1 Tipos de perguntas:

- pergunta desqualificatória: funciona como um filtro para evitar que respondentes que não integrem o público-alvo respondam à pesquisa;
- pergunta de resposta única: modelo de pergunta mais comum;
- pergunta de seleção múltipla: o respondente pode selecionar todas as opções que desejar dentre as alternativas oferecidas;
- pergunta em escala: formato de pergunta onde o respondente escolhe em uma escala de pontos pré-determinada (0 a 5; 0 a 10; 1 a 5, entre outros) e permite uma segunda análise a perguntas com apenas duas opções (*concordo totalmente* ou *discordo totalmente*, por exemplo).

Algumas vantagens de pesquisas virtuais:

- impessoalidade: a ausência do entrevistador induz o respondente a uma reposta sincera;
- conveniência: o respondente pode participar da pesquisa em horário mais flexível;
- abrangência: permite alcançar mais facilmente um maior número de pessoas;
- menor custo envolvido; e,
- facilidade de tabulação: as respostas apresentadas pelo respondente podem ser automaticamente tabuladas e apresentadas na forma de gráficos.

7.8.2 Execução do levantamento amostral

Encaminhamento dos questionários (ou disponibilização em meios virtuais); realização das entrevistas, do experimento ou ainda da observação.

7.8.3 Análise exploratória dos dados

Obtenção de sínteses numéricas, apresentação na forma de tabelas e gráficos de variados formatos das respostas obtidas nos questionários.

7.8.4 Resultados e conclusões

Apresentação dos resultados coerentes com os objetivos estipulados e a conclusão acerca da hipótese inicialmente proposta (rejeição u não rejeição da hipótes nula contraposta àquela formulada).

7.9 Técnicas de amostragem

O modo de se obter uma amostra é tão importante, e existem tantos modos de fazê-lo, que esses procedimentos constituem especialidades dentro da Estatística.

Todavia os que são mais frequentemente empregados estão representados na Figura **??**:

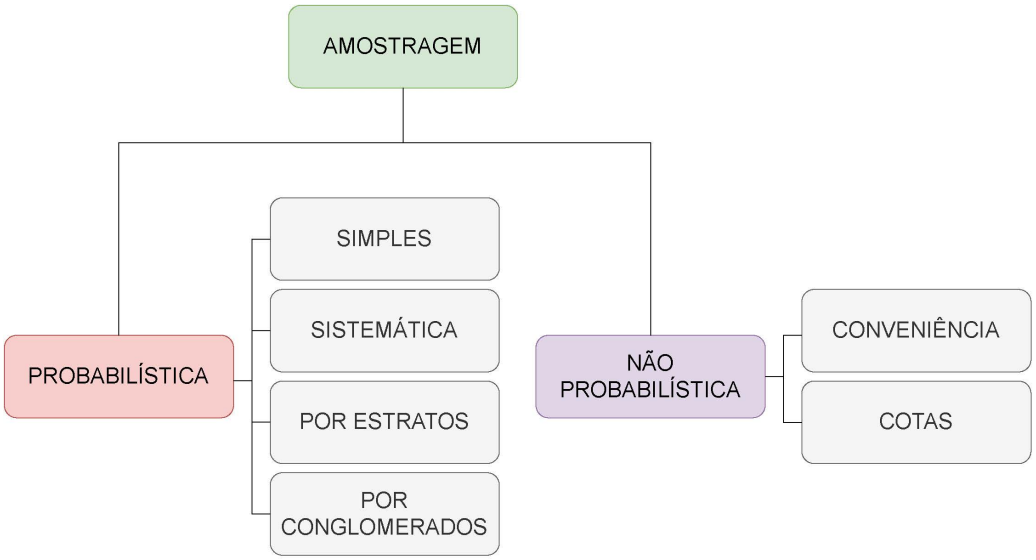


Figure 7.2: Principais procedimentos para se extrair uma amostra

7.10 Amostragem probabilística

Uma amostragem de natureza probabilística é aquela que reúne todas as técnicas pelas quais se deixa completamente ao acaso a escolha dos elementos da população a serem incluídos na amostra; isto é, a probabilidade de um elemento ser incluído na amostra é igual para todos.

Os elementos da população têm probabilidade conhecida e diferente de zero de serem selecionados para amostra (mas não necessariamente a mesma probabilidade).

A aleatorização visa assegurar que a informação extraída da amostra possa ser generalizada na população de origem.

7.10.1 Amostragem aleatória simples (AAS)

Consiste na seleção de n elementos amostrais de tal modo que cada um deles tenha a mesma probabilidade de pertencer à amostra que os demais.

Figure 7.3: Amostra aleatória simples AAS

Duas situações distintas:

- com reposição do elemento amostral escolhido: o mesmo elemento da população pode ser amostrado mais de uma vez (a probabilidade de seleção não se altera); ou,
- sem reposição: cada elemento da população é amostrado uma única vez (a probabilidade de seleção se altera)

Amostragem aleatória simples sem reposição. Admita uma população ($N = 5$) composta pelos elementos: {a, b, c, d, e} (podem ser as rendas anuais de cinco pessoas, os pesos de cinco vacas ou cinco modelos diferentes de aviões) da qual se deseje extrair uma amostra de tamanho $n = 3$.

Haverá 10 amostras possíveis de serem extraídas com tamanho 3 ($n = 3$): {abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde} pois:

$$C_{(N,n)} = \frac{N!}{n! \times (N-n)!} = 10$$

Amostragem aleatória simples com reposição. Considere agora a mesma população anterior ($N = 5$) e o mesmo tamanho da amostra ($n = 3$). Se a amostragem for feita com reposição teremos então $N^n = 125$ amostras possíveis de serem extraídas: {aaa, aab, aac, aad, aae, aba, abb, abc, abd, abe, ...}

```
# Dados
conjunto=c("a", "b", "c", "d", "e")


# As 10 combinações possíveis tomando-se 3 elementos:
library(combinat)
```

```
##
## Attaching package: 'combinat'

## The following object is masked from 'package:utils':
##
##     combn
```

```
#combn(conjunto, 3) (remova o # para executar)

# As 125 permutações possíveis tomando-se 3 elementos:
# permn(conjunto) (remova o # para executar)

# Extração de uma amostra (sem reposição) composta por 3 elementos do conjunto:
amostra_sr=sample(conjunto, 3, replace=FALSE)
amostra_sr
```

```
## [1] "c" "d" "e"
```

```
# Extração de uma amostra (com reposição) composta por 3 elementos do conjunto:
amostra_cr=sample(conjunto, 3, replace=TRUE)
amostra_cr
```

```
## [1] "a" "d" "e"
```

Do ponto de vista da quantidade de informação contida na amostra, a amostragem sem reposição é mais adequada.

Todavia a amostragem com reposição conduz a um tratamento teórico mais simples, pois ele implica que tenhamos independência entre as unidades selecionadas (não há alteração na probabilidade de seleção).

Para populações muito grandes a reposição ou não é irrelevante.

Uma vez determinadas as possíveis amostras, segue-se o problema de como elas serão efetivamente extraídas na prática numa amostragem aleatória simples.

Numa situação simples como a que acabamos de conceber poderíamos escrever cada uma das 10 (ou 125) possíveis amostras em um pedaço de papel e colocá-los em uma urna para serem sorteados.

Ou então enumerar os elementos da lista de possibilidades atribuindo um número a cada um e, em seguida, usar uma tabela de números aleatórios (ou um programa computacional para sua geração) para a escolha dos elementos que integrarão a amostra.

Uma AAS raramente é realizada na prática pois é necessário dispor de uma listagem bem definida *a priori*.

Assim, sob circunstâncias reais, um planejamento amostral pode ser definido de modo a assegurar que uma amostra mais informativa, mais barata e rápida possa ser extraída, principalmente quando a amostragem aleatória simples mostrar-se impraticável.

Em estudos de larga escala muitas vezes requerem uma abordagem mista.

A amostragem mista tem vantagens a nível prático, quando se conhecem algumas informações da população; assim sendo define-se uma característica dos elementos a incluir na amostra, deixando-se os restantes fatores ao acaso.

Neste tipo de amostragem salientam-se os seguintes métodos:

1- sistemática;
2- estratificada; e,
3- por conglomerado.

7.10.2 Amostragem aleatória sistemática

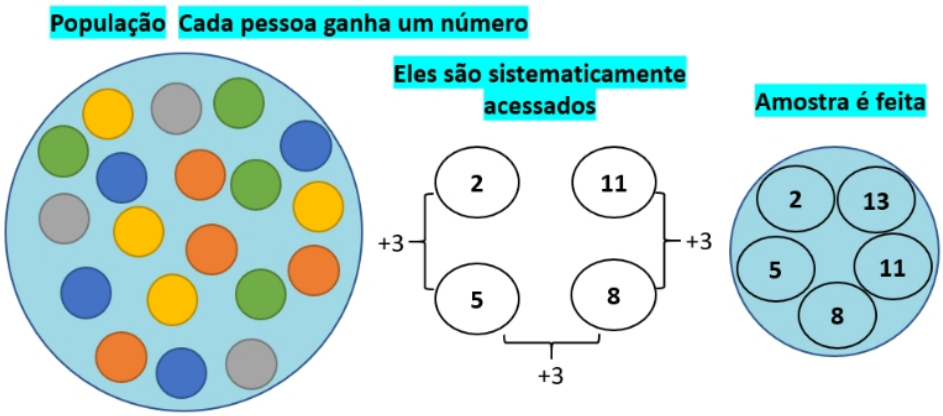


Figure 7.4: Amostra sistemática

Quando os elementos da população estão dispostos sob alguma maneira organizada e aleatória (linha de produção, listagens, ...) a extração de elementos pode ser realizada pela estipulação de um ponto de partida aleatório (o primeiro elemento a ser tomado como integrante da amostra) e de um passo (intervalo), de modo que a seleção dos demais elementos será feita a cada k elementos da listagem.

Roteiro:

- se N é o tamanho da população a ser amostrada;
- e n o tamanho da amostra que se deseja;

calcula-se o passo (intervalo) a ser adotado para a extração dos demais elementos amostrais. O primeiro elemento a ser coletado será aleatoriamente escolhido dentre os k primeiros.

$$S = \frac{N}{n}$$

Sorteia-se o ponto de partida (um dos S números do primeiro intervalo) e depois, a cada S elementos da população, retira-se um para fazer parte da amostra, até completar o valor de$n$.

Algumas situações possíveis de se encontrar:

- se S for fracionário pode-se aumentar n até tornar S um inteiro;
- reduzir N em 1 unidade;
- se N for um número primo, excluem-se por sorteio alguns elementos da população para tornar S inteiro.

Exemplo: considerem uma população composta por pelos seguintes elementos P={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} (N=10) da qual desejamos extrair uma amostra de tamanho 3 (n=3).

O passo S (o intervalo de extração de cada elemento) será igual a $S = \frac{N}{n} = \frac{10}{3} = 3,33$ (fracionário). Aumentando-se para $n = 4$ resultará também em um S fracionário (2,5). Com n=5, $S = 2$. O primeiro elemento a integrar a amostra será será aleatoriamente escolhido dentre os 5 (S) primeiros. Assim, as duas possíveis amostras serão:

$$A1 = 1, 3, 5, 7, 9; e,$$
$$A2 = 2, 4, 6, 8, 10.$$

Avaliar, alternativamente, excluir aleatoriamente 1 elemento da população ($N = 9$). Mantendo-se $n = 3$ teremos $S = 3$.

$$A1 = 1, 4, 7;$$
$$A2 = 2, 5, 8; e,$$
$$A3 = 3, 7, 9.$$

Exemplo: uma operadora telefônica pretende saber a opinião de seus assinantes comerciais sobre seus serviços na cidade de Florianópolis. Supondo que há 25.037 assinantes comerciais e a amostra precisa ter no mínimo 800 elementos, mostre como seria organizada uma amostragem sistemática para selecionar os respondentes sabendo que a operadora dispõe de uma lista ordenada alfabeticamente com todos os seus assinantes.

Calculando o passo (S):

$$\begin{aligned} S &= \frac{N}{n} \\ &= \frac{25037}{800} \\ &= 31,29 \end{aligned}$$

Aumentar n não irá resolver o problema ($N = 25037$ é um número **primo**). Arredondar S para cima irá extrapolar o tamanho da população ($32 \times 800 = 25600 > 25037$).

Podemos arredondar S para baixo ($31 \times 800 = 24800$) para baixo e excluir **aleatoriamente** 237 elementos da população (é uma população relativamente grande e isso não acarretará problema algum).

Assim nossa amostra será composta por 800 elementos (n) de uma população de (reduzida a) 24800 elementos. Sorteamos **aleatoriamente** o primeiro elemento dentre os 31 primeiros da listagem. Os demais, a cada 31 **elementos**.

Na amostragem sistemática deve-se avaliar o **risco** de periodicidades sistemáticas:

- se lista de elementos estiver organizada com base em alguma informação da população (escolaridade, renda, ...) que possa induzir a algum tipo de viés;
- se em um processo produtivo for sabidamente reconhecido que falhas podem se tornar mais frequentes a cada certo número de unidades produzidas (máquinas descalibradas).

7.10.3 Amostragem aleatória estratificada

Quando se pode identificar na população a presença de **grupos distintos** (estratos) a amostragem estratificada se dá pela realização de amostragens aleatórias simples dentre os elementos de **cada um desses grupos**.

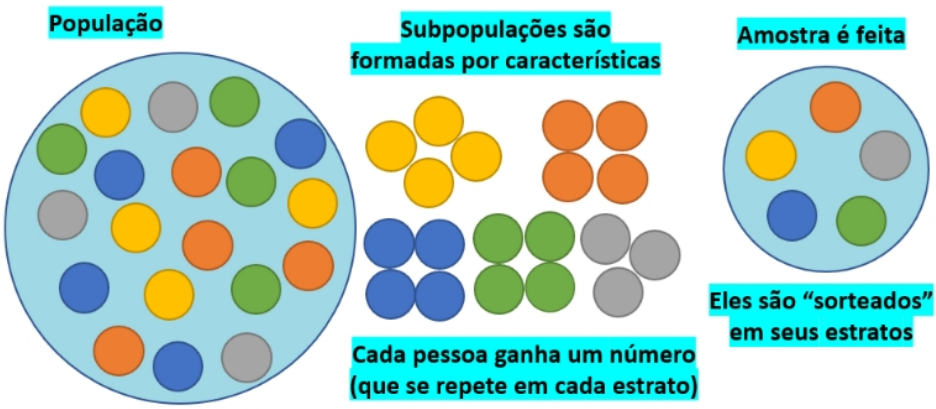


Figure 7.5: Amostra estratifiada

Um **estrato** é uma subdivisão da população onde se observa a existência de uma razoável **homogeneidade interna** da informação desejada. Desse modo, é esencial para que a amostra final tenha qualidade, que **entre os estratos** estabelecidos exista **heterogeneidade** e assim, cada indivíduo pertença a apenas um estrato.

Há dois modos possíveis de se realizar uma amostragem estratificada:

- não proporcional; e,
- proporcional.

Em uma amostragem estratificada **não proporcional** o total de elementos extraídos de cada estrato é igual à razão do tamanho da amostra pelo número de estratos (de cada estrato serão escolhidos aleatoriamente um **mesmo número** de elementos).

Esse modo de extração de elementos implica considerar **igual representatividade** de cada estrato na população, **independentemente** de quantos elementos ele abrigue (estratos menores teriam um mesmo peso que estrato maiores).

Já na amostragem estratificada **proporcional** a amostra extraída de cada um dos estratos **segue algum critério de ponderação** do peso ou variabilidade de cada estrato da população.

Na alocação proporcional ao tamanho dos estratos a proporção relativa de cada uma das k amostras extraídas (n_k) em relação ao tamanho de cada um dos k extratos (N_k) é a mesma (garantindo que estratos maiores tenham mais elementos dentro da amostra final e que estratos menores tenham menos presença nela):

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = \cdots = \frac{n_k}{N_k}$$

Onde:

- N é o tamanho da população;
- n o tamanho da amostra que se deseja extrair da população;
- N_i é o tamanho do $i - simo$ estrato da população, tal que $N = N_1 + N_2 + \cdots + N_k$;
- n_i o tamanho da $i - sima$ amostra a ser extraída do $i - simo$ estrato, tal que $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

O tamanho da $i - sima$ amostra a ser extraída de um $i - simo$ estrato será determinada em razão do tamanho da amostra que se deseja extrair (n), o tamanho da população (N) e o tamanho do $i - simo$ estrato (N_i) tal que:

$$n_i = \frac{N_i}{N} \cdot n$$

para i=1,2,...,k estratos.

> Exemplo: considerem uma comunidade universitária composta 8000 indivíduos (N=8000) sendo 800 professores ($N_1 = 800$), 1200 funcionários ($N_2 = 1200$) e 6000 estudantes ($N_3 = 6000$), da qual se estipulou extrair uma amostra de tamanho igual a 900 elementos ($n = 900$) para fins de uma pesquisa sobre o estilo de liderança preferido, que se considera ser diferente para cada grupo componente da comunidade acadêmica.

Numa amostragem estratificada **não proporcional** os elementos são extraídos em igual quantidade de cada um dos estratos:

- 300 professores;
- 300 funcionários; e,
- 300 alunos.

Numa amostragem estratificada uniforme todas os elementos são extraídos em quantidade de modo independente do peso proporcional dos estratos na população. Esse tipo de amostragem apresenta resultados **menos precisos** mas, em contrapartida, estudar características de cada camada de forma mais eficiente.

Numa amostragem estratificada **proporcional** os elementos são extraídos de cada um dos estratos considerando-se seus diferentes tamanhos (suas proporções em relação à população total):

- o estrato dos professores possui $N_p = 800$ elementos;
- o estrato dos funcionários possui $N_f = 1200$ elementos; e,
- o estrato dos estudantes possui $N_e = 6000$ elementos.

Para uma amostra com um total de $n = 900$ elementos seguem-se as quantidades a serem extraídas aleatoriamente de cada u dos três estratos:

- $n_p = \frac{N_p}{N}.n = \frac{800}{8000}.900 = 90$ professores;
- $n_f = \frac{N_f}{N}.n = \frac{1200}{8000}.900 = 135$ funcionários;
- $n_e = \frac{N_e}{N}.n = \frac{6000}{8000}.900 = 675$ alunos;

Partindo-se desses tamanhos amostrais determinados (90 professores, 135 funcionários e 675 alunos) pode-se recorrer à extração sistemática usando-se a listagem dessas três categorias:

- $S_p = \frac{N_p}{n_p}$ em que S_p é o passo a ser seguido na extração de n_p professores (90) da "população'' de N_p professores (800);
- $S_f = \frac{N_f}{n_f}$ em que S_f é o passo a ser seguido na extração de n_f funcionários (135) da "população'' de N_f funcionários (1200); e,
- $S_e = \frac{N_e}{n_e}$ em que S_e é o passo a ser seguido na extração de n_e alunos (675) da "população'' de N_e alunos (6000).

Muitos ajustes devem ser feitos pois, de modo frequente, os resultados dos passos obtids na prática resultam em números fracionários. Todavia, devemos ter sempre procurar não reduzir o tamanho amostral e ter em mente que o tamanho da população não pode ser aumentado.

Para os professores: $S_p = \frac{800}{90} = 8,88$. Se tomamos $S_p = 9$ (um professor a cada nove da lista) veremos que para extrair 90 professores a população teria de ser de 810 (a população é de 800). Uma das opções seria usar $S_p = 8$ e se extrair 100 professores (uma amostra um pouco maior). Outra possibilidade seria ainda usar $S_p = 8$ remover aleatoriamente 80 professores da população e então tomar 90 professores (pois com $S_p = 8$, $8.90 = 720$).

Para os funcionários: $S_f = \frac{1200}{135} = 8,88$ (o mesmo porque essas amostras foram estabelecidas de modo proporcional). Se tomamos $S_f = 9$ (um funcionário a cada nove da lista) veremos que para extrair 135 funcionários a população teria de ser de 1215 (a população é de 1200). Uma das opções seria usar $S_f = 8$ e se extrair 150 funcionários (uma amostra um pouco maior). Outra possibilidade seria ainda usar $S_f = 8$ remover aleatoriamente 120 funcionários da população e então tomar 135 funcionários (pois com $S_f = 8$, $8.135 = 1080$).

Do mesmo modo para os alunos: $S_e = \frac{6000}{675} = 8,88$ (o mesmo porque essas amostras foram estabelecidas de modo proporcional). Se tomamos $S_e = 9$ (um aluno a cada nove da lista) veremos que para extrair 675 alunos a população teria de ser de 6075 (a população é de 6000). Uma das opções seria usar $S_e = 8$ e se extrair 750 alunos (uma amostra um pouco maior). Outra possibilidade seria ainda usar $S_e = 8$ remover aleatoriamente 600 funcionários da população e então tomar 600 alunos (pois com $S_e = 8$, $8.135 = 1080$).

Ao final poderíamos extrair então 100 professores, 150 funcionários e 750 alunos; ou, pela segnda possibilidade, extrair 90 professores, 135 funcionários e 600 alunos (eliminando-se aleatoriamente elementos das populações antes de se sistematizar a extração, como antes explicado).

A proporção de elementos extraídos de cada um dos estratos é constante entre os extratos, asseguando uma extração proporcional:

$$\frac{100}{800} = \frac{150}{1200} = \frac{750}{6000} = 0,125 \frac{90}{720} = \frac{135}{1080} = \frac{675}{5400} = 0,125$$

Pode-se **otimizar** uma amostragem estratificada proporcional consideran-de também sua variabilidade interna. O tamanho de cada uma das amostras $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ dos diferentes estratos são proporcionais aos **tamanhos** dos estratos $(N_1, N_2, \dots, N_k)$ **e também** segundo algum critério adicional (otimização), como a variabilidade interna de cada estrato $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ de modo a se manter iguais as razões:

$$\frac{n_1}{N_1 \cdot \sigma_1} = \frac{n_2}{N_2 \cdot \sigma_2} = \dots = \frac{n_k}{N_k \cdot \sigma_k}$$

Onde:

- N é o tamanho da população;

- n o tamanho da amostra que se deseja extrair da população;
- N_i é o tamanho do $i-simo$ estrato da população, tal que $N = N_1 + N_2 + \cdots + N_k$;
- n_i o tamanho da $i-sima$ amostra a ser extraída do $i-simo$ estrato, tal que $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$;e,
- σ_i é o desvio padrão do $i-simo$ estrato.

O tamanho da $i-sima$ amostra a ser extraída de um $i-simo$ estrato será determinada em razão do tamanho da amostra que se deseja extrair (n), o tamanho da população (N), do tamanho e variabilidade do $i-simo$ estrato (N_i e σ_i) tal que:

$$n_i = \frac{n \cdot N_i \cdot \sigma_i}{N_1 \cdot \sigma_1 + N_1 \cdot \sigma_1 + \cdots + N_k \cdot \sigma_k}$$

para i=1,2,..., k estratos.

> Exemplo: considere estudar a opinião de estudantes de uma universidade com relação à legalização do aborto. A equipe possui dados descritivos relacionados ao sexo, orientação religiosa e rendimento médio familiar de toda a comunidade acadêmica. Pela descrição da população (estudantes universitário) observa-se que algumas das variáveis que habitualmente implicam em opiniões diferentes (escolaridade e idade) já não mais precisam ser consideradas. Um plano de estratificação de vários niveis pode ser estabelecido partindo-se da premissa de homogeneidade interna em cada um deles: sexo, orientação religiosa e rendimento familiar.

Considerando uma amostra de $n = 1.000$ estudantes e as seguintes medidas descritivas disponibilizadas pela universidade e relacionadas à sua população de estudantes:

- sexo: 35% masculino e 65% feminino;
- orientação religiosa: 60% católica; 20% evangélica; 10% sem; 5% espírita e 5% outras; e,
- rendimento médio mensal familiar: 35% até R$ 4.000,00, 65% acima de R$ 4.000,00.

podemos estabelecer vária camadas estratificadas proporcionalmente, tal como a ilustrado na Figura 7.6.

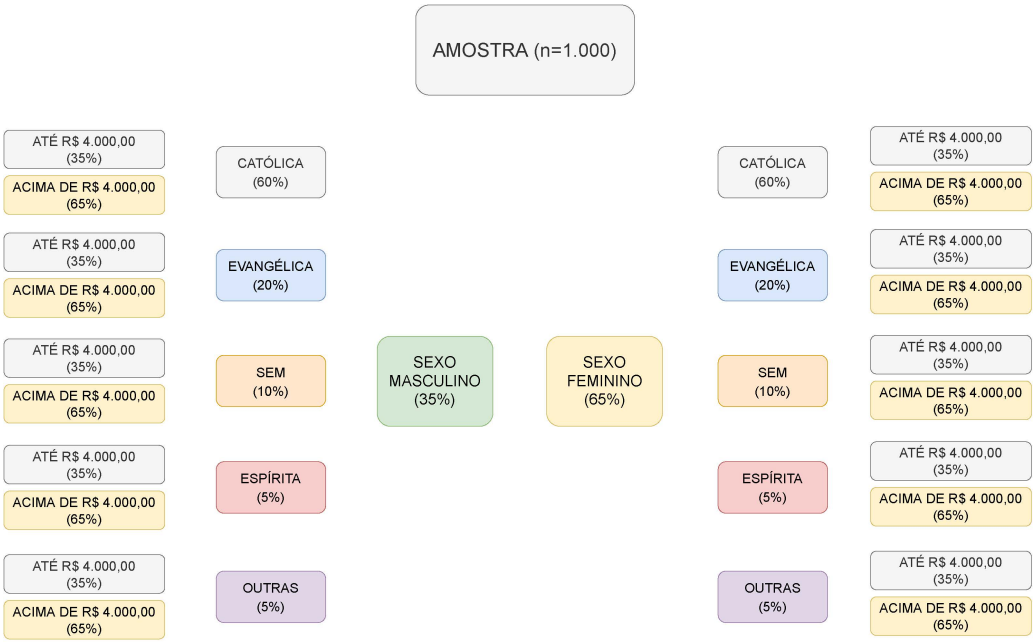


Figure 7.6: Plano de estratificação proporcional

7.10.4 Amostragem aleatória por conglomerados

Figure 7.7: Amostragem por conglomerados

Muitas vezes a **dispersão espacial**de uma população a ser investigada torna impeditiva uma amostragem aleatória simples.

Um modo de contornar essa dificuldade é dividir a área total onde se assenta a população de interesse em várias *áreas geográficas menores* e sem sobreposição, tais como cidades, regionais de cidades, bairros, quarteirões de um bairro, ... Essa subdivisão pode também ser realizada valendo-se de critérios organizacionais como, por exempo, universidades, escolas, grau escolar, departamentos de uma empresa, ...

As subpopulações que se localizam nessas áreas menores passam a ser denominadas de conglomerados e são como que representações **em escala reduzida** da população total.

A **heterogeneidade** presente na população original passa a estar representada dentro de um conglomerado. Ou seja, é essencial para a qualidade final da amostra extraída desse modo, que os elementos dentro de cada conglomerado sejam tão **diversos** quanto a diversidade que se observa nos elementos da população total (a ideia de representação em escala reduzida).

Em uma amostragem de **apenas 1 estágio**, após serem aletariamente sorteados um certo número de conglomerados, todos os elementos internos desses conglomerados são estudados.

Todavia, considerando que os elementos de um conglomerado natural dentro de uma população são habitualmente mais homogêneos do que os elementos da população total (os moradores de um bairro são mais semelhantes entre si do que todos os moradores do município), **pode não ser** necessário um grande número de elementos para se representar adequadamente um conglomerado natural.

Uma diretriz científica num processo de amostragem por conglomerados é **maximizar o número de conglomerados** e **diminuir** o número de elementos aleatoriamente escolhidos **dentro** de cada um deles.

Recomenda-se observar as diferenças de tamanho existentes entre cada conglomerado, de modo a equilibrar a probabilidade. A probabilidade de seleção de um elemento num desenho de amostragem com probabilidade proporcional ao tamanho:

- na primeira etapa é dada a cada conglomerado uma oportunidade de seleção **proporcional** ao seu tamanho; e,
- na segunda etapa um **mesmo número** de elementos é escolhido dentro de cada conglomerado selecionado.

Esses procedimentos igualam as probabilidades últimas de seleção de todos os elementos da população pois:

- conglomerados com mais elementos têm maior probabilidade de serem selecionados; e,
- elementos em conglomerados maiores têm menor chance de seleção do que elementos em conglomerados menores.

Exemplo: a população universitária de Londrina (estimada em 25.000 estudantes) pode ser entendida como distribuída por vários conglomerados organizacionais como, por exemplo: UEL; UNIFIL; PUC; INESUL; UTFPr; Arthur Thomas; CESUMAR; Pitágoras; Positivo; ....

Se desejamos realizar uma pesquisa entre os estudantes universitários de Londrina (na qual sabe-se que não fará diferença se a instituição é pública ou privada) podemos sortear aleatoriamente alguns desses conglomerados.

Entretanto, lembrando que todos os elementos de um conglomerado devem ser entrevistados, pode ser que o número de estudantes em cada conglomerado escolhido ainda seja por demais elevado.

Nesse caso, um segundo estágio (como, por exemplo, utilizar a subdivisão administrativa que as universidades habitualmente adotam ao se subdividir em diversos centrso de estudos como conglomerados dentro dela) pode ser proposto.

Assim como na estratificação, a proposição de conglomerados deve sempre consider as variáveis condicionantes relacionadas com o objeto de estudo para que as informações de todas as unidade amostrais finais a serem entrevistadas possa ser usada seguramente para se inferir sobre a informação na população sob estudo.

Exemplo: a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD) do IBGE coleta informações demográficas e socioeconômicas sobre a população brasileira. Sinteticamente, utiliza amostragem por conglomerados em três estágios:

- primeiro estágio: amostras de municípios (conglomerados) para cada uma das regiões geográficas do Brasil (Norte, Nordeste, Centro-Oeste, Sudeste e Sul);
- segundo estágio: setores censitários sorteados (subdivisão estabelecida pelo IBGE dentro de um município) em cada município (conglomerado sorteado);
- terceiro estágio: domicílios sorteados aleatoriamente em cada setor censitário.

7.11 Amostragem não probabilística

Não obstante os métodos de amostragem probabilísticos serem adequados à generalização da informação colhida, há diferentes situações para as quais podemos nos decidir por métodos probabilísticos como, por exemplo, para tornar a pesquisa menos custosa financeiramente ou ainda porque talvez não seja necessário ter um elevado rigor e precisão nas estimativas que se deseja obter.

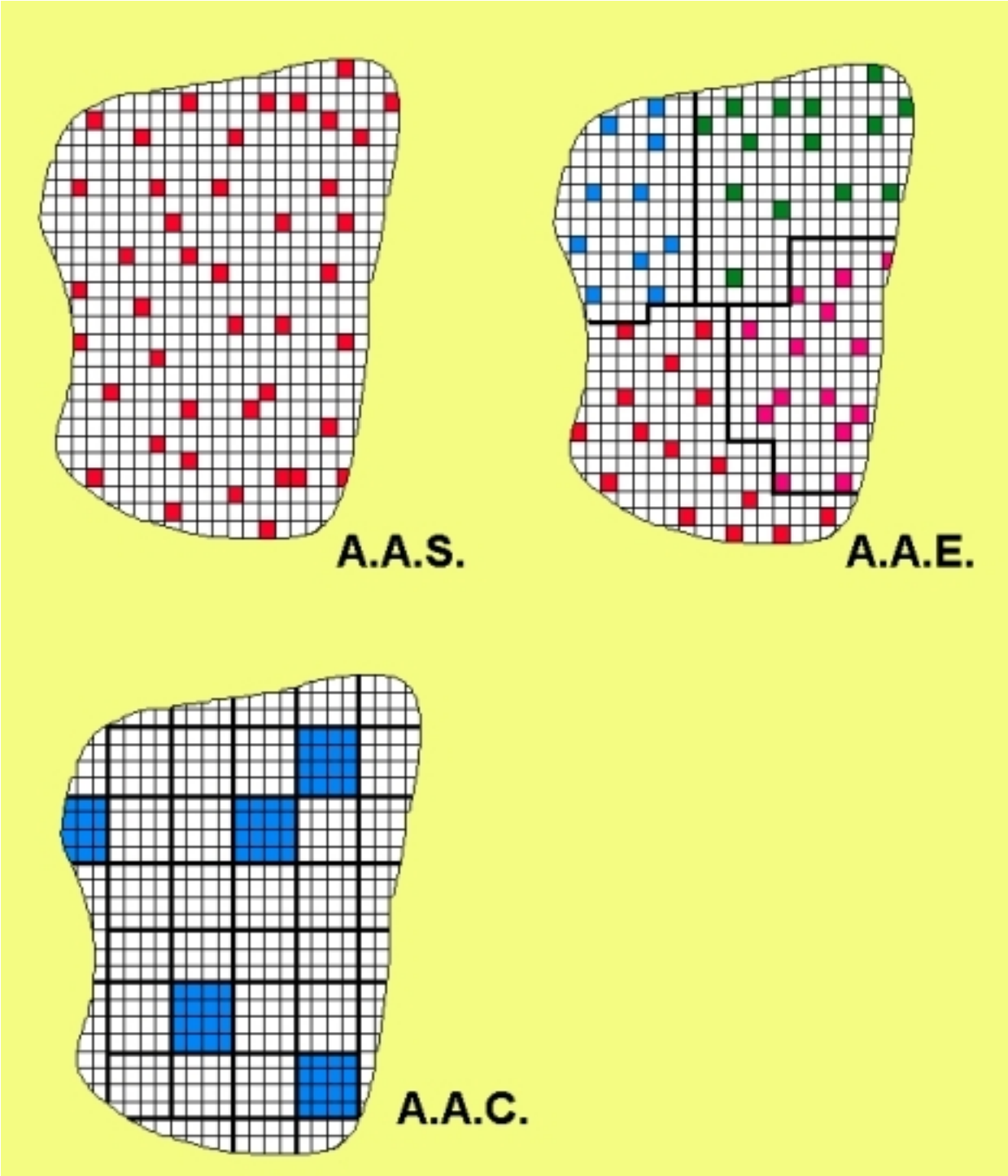


Figure 7.8: Ilustração comparativa dos principais modos de extração de amostras

Amostragens não probabilísticas são aquelas em que a amostra é extraída de modo *dirigido* (*intencional*, não aleatório) pelo pesquisador em decorrência da natureza de seu estudo, não sendo consideradas a probabilidade de seleção de seus elementos.

7.11.1 Amostragem por conveniência

Esta técnica é muito comum e consiste em se selecionar uma amostra da população imediatamente acessível (prontamente disponível). Considerem, por exemplo, pesquisar a opinião de estudantes universitários em Londrina sobre determinado assunto.

Poderíamos considerar cada universidade localizada em Londrina como um conglomerado e, dentro delas, realizar uma amostragem aleatória de todos os seus estudantes (ou parte, se realizarmos o delineamento em mais de um estágio).

Por conveniência podemos simplesmente decidir ir a um encontro de estudantes universitários que se realiza na cidade e perguntar a alguns deles que se declarem estudar em Londrina qual sua opinião sobre aquele assunto.

As limitações desse tipo de amostragem são óbvias posto poder haver no grupo de entrevistados diferentes segmentos sociais, econômicos, políticos, filosóficos, religiosos dentre muitos outros fatores de diferenciação, que podem ser fundamentais face às opiniões que se deseja colher sobre o assunto inquerido, resultando em graves distorções.

Esse tipo de amostragem, embora não aleatória, é bastante utilizada na área de *marketing* na qual geralmente as amostras são obtidas em locais com aglomerações, como teatros, cinemas, mercados, ... Neste caso, é importante o senso crítico do pesquisador para evitar vieses, por exemplo, não selecionar sempre pessoas de mesmo sexo, de mesma faixa etária, ...

7.11.2 Amostragem por cotas

A amostragem por cotas assemelha-se com a amostragem estratificada proporcional; mas, ao contrário da amostragem estratificada, a seleção final (no estrato) não precisa ser aleatória. A população é vista de forma segregada (estratificada), dividida em diversos subgrupos como sexo, idade, raça, local de residência, ocupação, ...

Para compensar a falta de aleatoriedade na seleção, costuma-se dividir a população num grande número de subgrupos e seleciona-se (não aleatoriamente) uma quantidade de elementos em cada subgrupo, proporcional ao seu tamanho.

Numa pesquisa socioeconômica, a população pode ser dividida por localidade, por nível de instrução, por faixas de renda, ...

7.12 Dimensionamento de amostras

7.12.1 Erros

Há de distinguir dois tipos de erros associados a levamentamentos amostrais:

- erros amostrais, as diferenças entre o resultado obtido em uma amostra específica (uma estatística) e seu verdadeiro valor na população (o parãmetro);
- erros não amostrais (experimentais), decorrentes de dados amostrais coletados incorretamente, inconsistentemente, fruto de erros nas transcrições, delineamentos fracamente estabelecidos (resultando em amostras tendenciosas), leituras instrumentais imprecisas (resultantes da perda da calibração dos instrumentos ou operação por técnicos com diferentes habilidades).

Os erros amostrais ocorrem porque as amostras são aleatórias: se de um grupo de 100 números extrairmos uma amostra aleatória de 10 deles a média amostral calculada teria um valor diferente a cada diferente amostra extraída (essa flutuação é assunto da teoria da distribuição das médias e proporções amostrais). Já os erros não amostrais devem ser minimizados ou melhor não existir.

A determinação do tamanho de uma amostra (n_0) é função do *erro amostral* tolerável e do *nível de significância* α estabelecido *a priori* pelo pesquisador que se relaciona ao *nível de confiança* pretendido por $(1 - \alpha)$:

Table 7.2: Valores críticos de z_c correspondentes a alguns níveis de significância α

Níveis de significância	20%	10%	5%	1%	0,1 %
z_c	1,28	1,64	1,96	2,57	3,29

Todavia, como mais adiante se verá, há situações nas quais o valor crítico referente ao nível de confiança estabelecido e que será empregado no dimensionamento da amostra será obtido de uma outra distribuição (t de *Student*).

7.12.2 Determinação do tamanho de uma amostra para estimação da média populacional

Determinação do tamanho n_0 de uma amostra para estimação da média considerando-se uma **população infinita** ($N \leq 20.n_0$) e seguindo uma distribuição Normal:

$$n_0 = \frac{z_c^2 \cdot \sigma^2}{\varepsilon^2}$$

em que:

- n_0: é o tamanho amostral;
- z_c: valor crítico tabelado da distribuição Normal usado para o nível de significância desejado (por exemplo, para α=5%, $z_c = 1,96$);
- σ desvio padrão populacional obtido em estudos prévios; e,
- ε: é o erro amostral, a máxima diferença entre μ e $\bar{x}$ que se espera observar sob um nível de confiança de $(1-\alpha)$.

Exemplo: Qual o tamanho de amostra necessária para se estimar o peso médio de cervos em uma dada população sob estudo, admitida **infinita**. Sabe-se de estudos anteriores que o desvio padrão σ do peso para animais dessa idade é de 30 kg. Utilize um erro ε de 10 kg na estimação e um nível confiança $(1-\alpha)$ de 95%.

$$\begin{aligned} n_0 &= \frac{Z^2 \cdot \sigma^2}{\varepsilon^2} \\ n_0 &= \frac{1,96^2 \cdot 30^2}{10^2} \\ n_0 &\sim 35 \end{aligned}$$

Se a população **não pode ser considerada infinita** ($N \leq 20.n_0$) aplica-se uma correção sobre o valor inicialmente calculado para a (n_0) obtendo-se um novo tamanho (n):

$$n = \frac{N \cdot n_0}{N + n_0}$$

No exemplo anterior, caso a população sob estudo fosse composta por apenas 200 animais ($N \leq 20.n_0$) o tamanho da amostra seria:

$$\begin{aligned} n &= \frac{N \cdot n_0}{N + n_0} \\ n &= \frac{200 \cdot 35}{200 + 35} \\ n &\sim 30 \end{aligned}$$

O conhecimento prévio do **desvio padrão populacional (σ)** para utilizar as expressões acima é quase que uma exceção. Na maioria dos estudos ele é desconhecido e a única informação disponível acerca da variabilidade é o **desvio padrão amostral** S.

Nesse cenário, a variável Norma padronizada Z é substituída por uma outra, que segue a distribuição "t" de *Student* e, para se obter seu valor crítico t_c para um determinado nível de confiança desejado necessitamos ter uma informação adicional: os *graus de liberdade* (gl ou *df*), que são iguais ao tamanho da amostra **menos 1** ($gl = n_0 - 1$). Observa-se que para $n \to \infty$, os valores críticos de $z_c = t_c$ para um mesmo nível de significância.

Ocorre porém que, não tendo ainda sido retirada a amostra, não dispomos do valor de s. Se não conhecemos nem ao menos um limite superior para σ, a única solução será colher uma amostra piloto de n_0 elementos para, com base nela obtermos uma estimativa de s e estimarmos o tamanho amostral pela expressão:

$$n = \frac{t_c^2 \cdot s^2}{\varepsilon^2}$$

com s calculado sobre a amostra piloto de n_0 elementos e com t_c obtido em uma tabela considerando o nível de sginificância α estabelecido e o tamanho da amostra piloto n_0.

Se $n \leq n_0$, a amostra piloto já terá sido suficiente para ser usada na análise. Caso contrário, deve-se retirar mais elementos da população, recalcular o tamanho da amostra n até se observe essa desigualdade.

> Observe que à medida que o tamanho da amostra cresce, o valor crítico t_c se aproxima do valor crítico $_c$ para um mesmo nível de significância. Por exemplo, para um $\alpha = 5\%$ uma amostra de 121 (df=121-1=120) elementos possui um valor crítico $t_c = 1,96$ (na distribuição de *Student*) e um valor crítico $z_c = 1,96$ (distribuição Normal padrão).

Graus de Liberdade	p ►	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	8%	6%	5%	4%	2%	1%	0,2%	0,1%
	1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	7,916	10,579	12,706	15,895	31,821	63,657	318,309	636,619
	2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	3,320	3,896	4,303	4,849	6,965	9,925	22,327	31,599
	3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	2,605	2,951	3,182	3,482	4,541	5,841	10,215	12,924
	4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,333	2,601	2,776	2,999	3,747	4,604	7,173	8,610
	5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,191	2,422	2,571	2,757	3,365	4,032	5,893	6,869
	6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,104	2,313	2,447	2,612	3,143	3,707	5,208	5,959
	7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,046	2,241	2,365	2,517	2,998	3,499	4,785	5,408
	8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,004	2,189	2,306	2,449	2,896	3,355	4,501	5,041
	9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	1,973	2,150	2,262	2,398	2,821	3,250	4,297	4,781
	10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	1,948	2,120	2,228	2,359	2,764	3,169	4,144	4,587
	11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	1,928	2,096	2,201	2,328	2,718	3,106	4,025	4,437
	12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	1,912	2,076	2,179	2,303	2,681	3,055	3,930	4,318
	13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	1,899	2,060	2,160	2,282	2,650	3,012	3,852	4,221
	14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	1,887	2,046	2,145	2,264	2,624	2,977	3,787	4,140
	15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	1,878	2,034	2,131	2,249	2,602	2,947	3,733	4,073
	16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	1,869	2,024	2,120	2,235	2,583	2,921	3,686	4,015
	17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	1,862	2,015	2,110	2,224	2,567	2,898	3,646	3,965
	18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	1,855	2,007	2,101	2,214	2,552	2,878	3,610	3,922
	19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	1,850	2,000	2,093	2,205	2,539	2,861	3,579	3,883
	20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	1,844	1,994	2,086	2,197	2,528	2,845	3,552	3,850
	21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	1,840	1,988	2,080	2,189	2,518	2,831	3,527	3,819
	22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	1,835	1,983	2,074	2,183	2,508	2,819	3,505	3,792
	23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	1,832	1,978	2,069	2,177	2,500	2,807	3,485	3,768
	24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	1,828	1,974	2,064	2,172	2,492	2,797	3,467	3,745
	25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	1,825	1,970	2,060	2,167	2,485	2,787	3,450	3,725
	26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	1,822	1,967	2,056	2,162	2,479	2,779	3,435	3,707
	27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	1,819	1,963	2,052	2,158	2,473	2,771	3,421	3,690
	28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	1,817	1,960	2,048	2,154	2,467	2,763	3,408	3,674
	29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	1,814	1,957	2,045	2,150	2,462	2,756	3,396	3,659
	30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	1,812	1,955	2,042	2,147	2,457	2,750	3,385	3,646
	31	0,127	0,256	0,389	0,530	0,682	0,853	1,054	1,309	1,696	1,810	1,952	2,040	2,144	2,453	2,744	3,375	3,633
	32	0,127	0,255	0,389	0,530	0,682	0,853	1,054	1,309	1,694	1,808	1,950	2,037	2,141	2,449	2,738	3,365	3,622
	33	0,127	0,255	0,389	0,530	0,682	0,853	1,053	1,308	1,692	1,806	1,948	2,035	2,138	2,445	2,733	3,356	3,611
	34	0,127	0,255	0,389	0,529	0,682	0,852	1,052	1,307	1,691	1,805	1,946	2,032	2,136	2,441	2,728	3,348	3,601
	35	0,127	0,255	0,388	0,529	0,682	0,852	1,052	1,306	1,690	1,803	1,944	2,030	2,133	2,438	2,724	3,340	3,591
	36	0,127	0,255	0,388	0,529	0,681	0,852	1,052	1,306	1,688	1,802	1,942	2,028	2,131	2,434	2,719	3,333	3,582
	37	0,127	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,051	1,305	1,687	1,800	1,940	2,026	2,129	2,431	2,715	3,326	3,574
	38	0,127	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,051	1,304	1,686	1,799	1,939	2,024	2,127	2,429	2,712	3,319	3,566
	39	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,304	1,685	1,798	1,937	2,023	2,125	2,426	2,708	3,313	3,558
	40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	1,796	1,936	2,021	2,123	2,423	2,704	3,307	3,551
	45	0,126	0,255	0,388	0,528	0,680	0,850	1,049	1,301	1,679	1,791	1,929	2,014	2,115	2,412	2,690	3,281	3,520
	50	0,126	0,255	0,388	0,528	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	1,787	1,924	2,009	2,109	2,403	2,678	3,261	3,496
	55	0,126	0,255	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,297	1,673	1,784	1,920	2,004	2,104	2,396	2,668	3,245	3,476
	60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	1,781	1,917	2,000	2,099	2,390	2,660	3,232	3,460
	70	0,126	0,254	0,387	0,527	0,678	0,847	1,044	1,294	1,667	1,776	1,912	1,994	2,093	2,381	2,648	3,211	3,435
	80	0,126	0,254	0,387	0,526	0,678	0,846	1,043	1,292	1,664	1,773	1,908	1,990	2,088	2,374	2,639	3,195	3,416
	90	0,126	0,254	0,387	0,526	0,677	0,846	1,042	1,291	1,662	1,771	1,905	1,987	2,084	2,368	2,632	3,183	3,402
	100	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,042	1,290	1,660	1,769	1,902	1,984	2,081	2,364	2,626	3,174	3,390
	110	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,659	1,767	1,900	1,982	2,078	2,361	2,621	3,166	3,381
	120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,766	1,899	1,980	2,076	2,358	2,617	3,160	3,373
	∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,751	1,881	1,960	2,054	2,326	2,576	3,090	3,291

Figure 7.9: Tabela t de Stdent: cada linha refere-se a um gl e cada coluna a um nível de significância (no cruzamento tem-se o valor crítico de t sob essas condições)

7.12.2.1 Margem de erro em uma estimativa amostral da média

Reescrevendo-se a expressão para a determinação do tamanho amostral podemos exprimir o erro ε associado à estimativa obtida de uma amostra de tamanho n: $\hat{p}$ da média populacional

$$\varepsilon = z_c \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

em que ε é uma quantidade para **mais e para menos** da estimativa obtida de uma amostra de tamanho n em relação a μ sob o nível de confiança $1 - \alpha$ que determina z_c.

A expressão anterior considera que a variâcia popuacional σ^2 é conhecida. Caso não se tenha informação alguma sobre seu valor, seguem-se as mesmas considerações relacionadas ao tamanho n da amostra:

- se $n \geq 30$, adotar a variância amostral S^2 como aproximação de σ^2;
- se $n < 30$, adotar a variância amostral S^2 como aproximação de σ^2 usando-se o valor crítico t_c da distribuição de *Student* (com gl/df iguais ao tamanho da amostra menos 1)

7.12.3 Determinação do tamanho de uma amostra para estimação da proporção populacional

A determinação do tamanho de uma amostra para estimação da proporção populacional considerando-se uma **população infinita** ($N \leq 20.n_0$):

$$n_0 = \frac{z_c^2 \cdot \pi \cdot (1 - \pi)}{\epsilon^2}$$

em que:

- n_0 é o tamanho da amostra;
- z_c é valor crítico tabelado da distribuição Normal para o nível de significância desejado (por exemplo, para α=5%, z_c=1,96);
- π é a proporção populacional;
- ε: é o erro amostral, a máxima diferença entre π e p que se espera observar sob um nível de confiança de $(1-\alpha)$.

Quando não se dispõe de nenhuma informação *a priori* sobre a proporção populacional (π) a adoção do máximo valor possível ao produto: $\pi.(1-\pi) = \frac{1}{4}$ assegura que o o tamanho de amostra obtido será suficiente para a estimação qualquer que seja a proporção populacional π.

Isso equivale a considerar:

$$n_0 = \frac{z_c^2}{\epsilon^2} \cdot \frac{1}{4}$$

De modo análogo, se a população **não pode ser considerada infinita** ($N \leq 20n_0$) aplica-se uma correção sobre o valor calculado do tamanho da amostra (n_0) chegando-se a um novo tamanho (n):

$$n = \frac{N \cdot n_0}{N + n_0}$$

Exemplo:Qual o tamanho de amostra (n_0) suficiente para estimarmos a proporção da área com solo contaminado que necessita de certo tratamento de descontaminação, com precisão (ε) de 0,02 e um nível de confiança $(1-\alpha)$ de 95%, sabendo que essa proporção seguramente não é superior a 0,2?

$$\begin{aligned}
n_0 &= \frac{z_c^2 \cdot \pi \cdot (1-\pi)}{\varepsilon^2} \\
n_0 &= \frac{1,96^2 \cdot 0,20 \cdot 0,80}{0,02^2} \\
n_0 &\sim 1.537
\end{aligned}$$

Considerando-se uma estimativa conservadora para $\pi.(1-\pi)$ pelo máximo valor possível desse produto $(\frac{1}{4})$ teremos:

$$
\begin{aligned}
n_0 &= \frac{z_c^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{4} \\
n_0 &= \frac{1,96^2}{0,02^2} \cdot \frac{1}{4} \\
n_0 &= 2.401
\end{aligned}
$$

7.12.3.1 Margem de erro em uma estimativa amostral da proporção

Reescrevendo-se a expressão para a determinação do tamanho amostral para a situação na qual não temos nenhuma informação sobre a proporção populacional (π), podemos exprimir o erro ε associado à estimativa da proporção (p) obtida de uma amostra de tamanho n da proporção populacional (π) sob o nível de confiança $(1-\alpha)$ pelo critério mais conservador $(\pi.(1-\pi) = \frac{1}{4})$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= z_c \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}} \\
\varepsilon &= z_c \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{4}}{n}}
\end{aligned}
$$

em que ε é uma quantidade para **mais e para menos** da estimativa p obtida de uma amostra de tamanho n em relação a π sob o nível de confiança $1-\alpha$ que determina z_c.

Exemplo: Uma pesquisa recente mostra o apoio dos eleitores a uma posição de liberação das restrições sobre a pesquisa de células estaminais embrionárias e permitir o uso médico do princípio ativo da *cannabis sativa*. A pesquisa realizada para o *The Detroit News* descobriram que 50% dos prováveis eleitores de Michigan apoiam a proposta de células-tronco, 32% são contra e 18% indecisos. A pesquisa telefônica ouviu 602 prováveis eleitores de Michigan. Qual a margem de erro a um nível de significância de 95% para os eleitores **a favor** da liberação das pesquisas? (link: Elgin C. College)

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= z_{(\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p} \cdot (1 - \widehat{p})}{n}} \\
&= 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,50 \cdot (1 - 0,50)}{602}} \\
&= 0,04
\end{aligned}
$$

A margem de erro é de 4 pontos percentuais para *cima ou para baixo* (46%; 54%) na proporção de eleitores em relação à proporção populacional π a favor da liberação das pesquisas, sob um um nível de confiança de 95%

Table 7.3: Independent Samples T-Test

					95% CI for Cohen	
cline6-7	t	df	p	Cohen	Lower	Upper
engagement	2.365	38	0.023	0.748	0.101	1.385

Módulo 8

Introdução às estatísticas epidemiológicas

8.1 Terminologia

- Epidemiologia

  A epidemiologia é uma ciência médica que se concentra na distribuição e nos determinantes (fatores de risco) da frequência das doenças na população (desfechos) , examinando seus padrões em busca de determinar por que alguns grupos ou certos indivíduos desenvolvem uma doença ao passo que outros não.

- Estudos epidemiológicos

  Estudos epidemiológicos são experimentos científicos realizados com o propósito mais comum de se desejar saber se determinadas características pessoais, hábitos ou aspectos do ambiente onde uma pessoa vive estão associados com certa doença, manifestações de uma doença ou outro evento de interesse do pesquisador.

- Desfecho ("sucesso")

  Desfecho é o termo usado para designar a ocorrência do evento de interesse em uma pesquisa. O desfecho pode ser o surgimento de uma doença, de um determinado sintoma, o óbito ou qualquer outro evento relacionado ao processo de saúde-doença. Uma dificuldade inerente está em quantificar a intensidade do desfecho.

- Fator de risco (fator sob estudo)

  Fator de risco é a denominação usada em Epidemiologia para designar uma variável que se supõe estar associada ao desfecho. Refere-se portanto a um aspecto de hábitos pessoais ou a uma exposição ambiental, que pode estar associada a uma maior probabilidade de ocorrência de uma doença. Uma dificuldade inerente reside em como quantificar a exposição.

- Risco

  Por risco entende-se a "a probabilidade de um membro de uma população definida desenvolver uma dada doença (ou condição) em um período de tempo". Perceba que nesta definição é possível observar três elementos: base populacional, doença (ou condição) e tempo.

- População em risco

  Um fator importante no cálculo das medidas da frequência de uma doença é a estimativa correta do número de pessoas em estudo. Idealmente, esses números devem incluir apenas pessoas potencialmente suscetíveis às doenças (ou condições) em estudo. Por exemplo: homens não devem ser incluídos no cálculo da frequência de câncer do colo do útero e, vice-e-versa para câncer de próstata. Uma vez que os fatores de risco geralmente podem ser modificados, intervir para alterá-los em uma direção favorável pode reduzir probabilidade de ocorrência da doença. O resultado dessas intervenções pode ser estatisticamente verificado em variados tipos de ensaios ou medidas repetidas usando-se os mesmos métodos e definições.

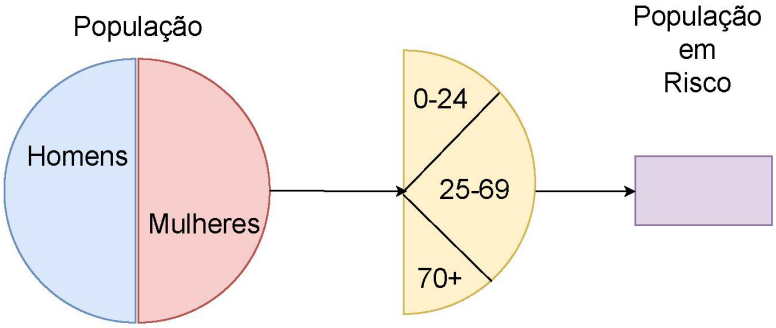


Figure 8.1: Adaptação: Basic Epidemiology: R. Bonita, R. Beaglehole, T Kjelltröm, 2006 (p. 17)

- Confundimento

A palavra "confundir" vem do latim *confundere* e significa misturar (fundir junto). O confundimento é outra importante questão em estudos epidemiológicos. Em um estudo da associação entre a exposição a uma causa (fator de risco) e a ocorrência de uma doença, o confundimento pode ocorrer quando existe outra exposição na população e está associada tanto à doença quanto ao fator de risco em estudo. O confundimento pode ter uma influência muito importante, podendo até alterar a direção aparente de uma associação. Uma variável que aparece como fator de proteção pode, após o controle de confundimento, ser considerada um fator de risco. Ou então o confundimento pode criar a aparência de uma relação causa-efeito que, na verdade, não existe. O confundimento ocorre quando os efeitos de duas exposições (fatores de risco) **não foram separados** e a análise conclui que o efeito é devido a um fator e não a outro. O confundimento surge porque a distribuição não aleatória de fatores de risco na fonte também ocorre na população de estudo, fornecendo estimativas enganosas de efeito. Nesse sentido, pode parecer um viés, mas na verdade não resulta de um erro sistemático no projeto de pesquisa.

Um exemplo de confundimento pode ser a explicação para a relação demonstrada entre beber café e o risco de doenças cardíaca coronariana, pois sabe-se que o consumo de café está associado com o uso de tabaco: as pessoas que bebem café são mais propensos a fumar do que as pessoas que não bebem café.

Também é sabido que o tabagismo é uma causa de doença cardíaca coronariana. É, portanto, possível que a relação entre o consumo de café e doenças cardíacas doença meramente reflete a associação causal conhecida do uso de tabaco e doenças cardíacas. Nesta situação, fumar causa confundimento na aparente relação entre o consumo de café e doença cardíaca coronariana porque o tabagismo está correlacionado com beber café e é um fator de risco mesmo para quem não bebe café.

Para se contornar esse tipo de problema deve-se, na etapa de delineamento do experimento, estabelecer os fatores envolvidos e, na realização da pesquisa observar a:

- casualização: as amostras devem ser de tal modo constituídas que variáveis e confundimento nelas existam, potencialmente, em igual proporção (como, por exemplo, fumantes e não fumantes;
- restrição: se estamos estudando a relação do café com doenças coronarianas, admitir apenas não fumantes.

8.2 Medidas de risco, morte, associação e correlação

- Incidência (I);
- Prevalência (P);
- Incidência cumulativa (risco - IC);
- Fatalidade dos casos (FC);
- Taxa de mortalidade (TM);
- Diferença de risco (risco atribuível - RA);
- Razão de risco (risco relativo - RR);
- Risco atribuível proporcional (fração etiológica - FE);
- *Odds ratio* (razão de chances - OR); e,
- Correlação linear de Pearson.

A morbidade é um dos importantes indicadores de saúde. É um termo genérico usado para designar o conjunto de casos de uma dada doença ou a soma de agravos à saúde que atingem um grupo de indivíduos.

Medir morbidade nem sempre é uma tarefa fácil, pois são muitas as limitações que contribuem para essa dificuldade, como a subnotificação.

Para fazer essas mensurações, utilizam-se principalmente as medidas de incidência e prevalência.

8.2.1 Incidência

Incidência representa a **proporção** de número de **novos casos** de uma determinada doença em um **intervalo de tempo** em uma população exposta ao risco. É, por conseguinte, uma medida dinâmica pois pode sofrer alteração em razão do tempo no qual o estudo foi realizado.

Para um indivíduo pertencente à população exposta, indica a probabilidade de desenvolver a doença (risco).

Observe como calcular a incidência:

$$I = \frac{\text{Número de novos casos de uma doença durante um determinado período de tempo}}{\text{Tamanho da população exposta ao risco nesse determinado período de tempo}}(\times 10^n)$$

Exemplo: para se determinar a incidência de meningite no Maranhão no ano de 2014, será necessário saber o número de casos de meningite que ocorreram naquele período de tempo entre os residentes do Maranhão e o número de habitantes do estado no mesmo período de tempo (todos os possíveis expostos à doença):

$$I = \frac{\text{177 novos casos notificados de meningite no Maranhão em 2014}}{\text{2.648.532 casos na população do Maranhão em 2014}}(\times 10^5) = \frac{4,41}{100.000}$$

Os dados sobre prevalência e incidência tornam-se muito mais úteis se convertidos em taxas!

Como você pode notar, os **casos novos**, ou incidentes, são aqueles que **não existiam no início** do período de observação (tempo analisado), mas que vieram a ocorrer no decorrer desse período.

As taxas de incidência tendem a variar conforme o número de episódios da doença analisada, o número de pessoas que tiveram um episódio de uma doença, tempo para diagnosticá-la e a duração da investigação.

8.2.2 Prevalência

Prevalência representa a proporção de indivíduos de uma população que é acometida por uma determinada doença (ou agravo) em um determinado **momento**. É considerada uma medida **estática**.

Ela engloba tanto os casos casos preexistentes, quanto os novos que ocorreram no período.

Indica a probabilidade de ter a doença.

Observe como calcular a prevalência:

$$P = \frac{\text{Número de casos existentes de doença em um determinado momento no tempo}}{\text{Tamanho da população em risco nesse mesmo momento no tempo}}(\times 10^n)$$

Exemplo: se em uma determinada comunidade mensurou-se 89 casos de indivíduos portadores de hipertensão em um determinado momento. Sabendo-se que a população (todos estão potencialmente expostos) dessa comunidade é de 3.500 a prevalência será:

$$P = \frac{\text{89 casos de hipertensão na comunidade no dia 01/01/2014}}{\text{3.500 indivíduos como população em risco na comunidade em 01/01/2014}}(\times 10^2) = \frac{2,54}{100}$$

Os dados sobre prevalência e incidência tornam-se muito mais úteis se convertidos em taxas!

8.2.3 Relação entre prevalência e incidência

A prevalência depende tanto da incidência quanto da duração da doença. Se os casos de incidentes não forem resolvidos e continuarem ao longo do tempo eles se tornarão casos prevalentes. Nesse sentido:

$$P = \text{Incidência} \times \text{Duração média da doença}$$

8.2.4 Quadro comparativo entre medidas de incidência e de prevalência

Table 8.1: Quadro comparativo entre medidas de incidência e de prevalência

	Incidência	Prevalência
Numerador	Número de **novos** casos de doença durante um determinado período de tempo	Número de casos **existentes** de doença em um determinado momento no tempo
Denominador	Tamanho da população em risco	Tamanho da população em risco
Foco	Se o evento é um caso novo Tempo de início da doença	Presença ou ausência de uma doença O período de tempo é arbitrário Um "instantâneo" no tempo
Uso	Expressa o risco de adoecer A principal medida de doenças ou condições agudas, mas também usado para doenças crônicas Mais útil para estudos de causalidade	Estima a probabilidade da população estar doente no período de tempo estudado Útil no estudo da carga de doenças crônicas e implicações para os serviços de saúde

8.2.5 Incidência cumulativa - IC (Risco)}

Incidência Cumulativa (ou risco) é uma medida da ocorrência de uma doença.

Ao contrário da Incidência, no denominador temos agora o número de pessoas na população exposta **sem a doença** no começo do período do estudo:

$$IC = \frac{\text{Número de novos casos de uma doença durante um determinado período de tempo}}{\text{Tamanho da população em risco (exposta) livre (sem) da doença no começo de um determinado período de tempo}}(\times$$

8.2.6 Quadro comparativo entre medidas de risco e prevalência

Table 8.2: Quadro comparativo entre medidas de risco e prevalência

Característica	Risco	Prevalência
O que é medido	Probabilidade da doença	Percentagem da população com a doença
Unidade	adimensional	adimensional
Momento do diagnóstico da doença:	Casos novos (recém diagnosticados)	Existentes
Sinônimos	Incidência cumulativa	-

8.2.7 Fatalidade dos Casos (FC)

Fatalidade dos casos é uma medida da severidade da doença, definida como a proporção de casos com desfecho em óbito pelo total de acometidos (portadores da condição) em um determinado período de tempo.

$$FC(\%) = \frac{\text{Número de mortes de casos diagnosticados da doença durante um determinado período de tempo}}{\text{Número de casos diagnosticados nesse período de tempo}}(\times 100)$$

8.3 Sobrevida

Uma vez que a TM representa a proporção de pessoas afetadas por uma doença e que faleceram em decorrência dela, a sobrevida S pode ser considerada como seu complemento:

$$S = 1 - TM$$

8.3.1 Taxas de mortalidade (TM)

A principal desvantagem da Taxa bruta de mortalidade é que ela não leva em conta o fato de que a chance de morrer varia de acordo com idade, sexo, etnia e incontáveis outros fatores (sociais, econômicos, ...).

Geralmente não é apropriado usá-la para comparar diferentes períodos de tempo ou áreas geográficas. Por exemplo, padrões de morte em núcleos urbanos recentemente constituídos e formados predominantemente por famílias jovens provavelmente serão muito diferentes das estâncias balneares escolhidas frequentemente por aposentados.

A Taxa bruta de mortalidade para todas as mortes ou uma causa específica de morte é calculado da seguinte forma:

$$TM(\%) = \frac{\text{Número de mortes durante um determinado período de tempo}}{\text{Número de pessoas sob risco de morte nesse período de tempo}}(\times 10^n)$$

8.3.2 Taxas mais específicas

- taxa de mortalidade infantil;
- taxa de mortalidade maternal;
- taxa de mortalidade entre adultos; ou,
- taxas de mortalidade ajustadas por faixa etária.

Quantificar a ocorrência de doenças ou alterações nos estados de saúde é o primeiro passo de um estudo epidemiológico.

8.4 Medidas de associação

Uma tabela é uma forma de representação retangular que permite mostrar clara e resumidamente os dados correspondentes a uma ou mais variáveis, visualizar o comportamento dos dados e facilitar o entendimento das informações. Uma tabela de dupla entrada permite extrair facilmente as proporções **individuais**, **marginais** e **associadas** relativas a duas variáveis (tabelas com mais variáveis são possíveis de serem construídas).

Especificamente para estudos epidemiológicos, admita que as variáveis envolvidas se refiram a contagens relacionadas à ocorrência de uma doença em dois grupos de pessoas sob diferentes exposições. O grupo não exposto ao fator de risco é frequentemente usado como referência.

- (a) o grupo de pessoas expostas a um determinado fator de risco;
- (b) o grupo de pessoas não expostas.

Table 8.3: Casos classificados em relação ao desfecho a partir da exposição ao fator de risco

Fator de risco	Desfecho observado (doença)		Total
	Presente	Ausente	
Exposto	(a)	(b)	(e)
Não exposto	(c)	(d)	(f)
Total	(a) + (c)	(b) + (d)	(e) + (f)

Table 8.4: Incidência de baixo peso ao nascer em recém-nascidos de Pelotas, RS, segundo o hábito tabágico da mãe durante a gravidez (1982)

Classificação da mãe	Baixo peso ao nascer		Total
	Sim	Não	
Fumante	275 (a)	2.144 (b)	2.419 (e)
Não fumante	311 (c)	4.496 (d)	4.807 (f)
Total	586	6.640	7.226

Exemplo: Incidência de baixo peso ao nascer em recém-nascidos de Pelotas (RS) segundo o hábito tabágico da mãe durante a gravidez (1982)

8.4.1 Incidência observada de nascimentos com baixo peso entre mães expostas ao risco (fumantes)

$$\frac{(a)}{(e)} \times 100 = \frac{275}{2.419} \times 100 = 11,37\%$$

8.4.2 Incidência observada de nascimentos com baixo peso entre mães não expostas ao risco (não fumantes)

$$\frac{(c)}{(g)} \times 100 = \frac{311}{4.807} \times 100 = 6,47\%$$

8.4.3 Prevalência de nascimentos com baixo peso na população estudada

$$\frac{(a)+(c)}{(e)+(g)} \times 100 = \frac{586}{7.226} \times 100 = 8,11\%$$

8.4.4 Diferença de risco (Risco atribuível - RA)

A diferença de risco (também chamada de excesso de risco ou risco atribuível) é a diferença nas taxas de ocorrência entre os grupos expostos e não expostos da população. Essa medida quantifica o excesso absoluto de risco associado a uma dada exposição. É uma medida útil do problema de saúde pública causado pela exposição ao fator de risco.

Analisando-se as incidências na Tabela vemos que a diferença de risco de nascimento de bebês com baixo peso entre mães fumantes e não fumantes é:

$$\begin{aligned} RA &= \frac{(a)}{(e)} - \frac{(c)}{(f)} \\ &= \frac{275}{2.419} - \frac{311}{4.807} \\ &= 0,11368334 - 0,064697316 \\ &= 4,9\% \end{aligned}$$

8.4.5 Razão de risco (Risco relativo - RR)

A razão de risco (também chamada de risco relativo) é o quociente entre as taxas de ocorrência entre os grupos expostos e não expostos da população. Pode ser interpretado como a probabilidade de um indivíduo exposto apresentar o desfecho relativa à de um indivíduo não exposto também apresentar.

- razão de risco maior que 1: **fator de risco**;
- razão de risco menor que 1: **fator protetor**.

Analisando-se as incidências na Tabela vemos que a razão de risco de nascimento de bebês com baixo peso entre mães fumantes e não fumantes é de:

$$
\begin{aligned}
RR &= \frac{\frac{(a)}{(e)}}{\frac{(c)}{(f)}} \\
&= \frac{\frac{275}{2.419}}{\frac{311}{4.807}} \\
&= \frac{0,11368334}{0,064697316} \\
&= 1,76
\end{aligned}
$$

8.4.6 Risco atribuível proporcional (Fração etiológica - FE)

Quando se acredita que uma determinada exposição é um fator de risco de uma determinada doença, a fração atribuível é a proporção da doença na população específica que seria eliminada se a exposição fosse evitada. As frações etiológicas (frações relacionadas à origem da doença) são úteis para avaliar as prioridades da ação de saúde pública.

> Exemplo: tanto o tabagismo quanto a poluição do ar são causas de câncer de pulmão, mas a fração devido ao fumo é geralmente muito maior do que a devido ao ar poluição. Apenas em comunidades com prevalência de tabagismo muito baixa e severos índices de poluição, esta é provável de ser a principal causa de câncer de pulmão. Assim, em muitos países, controle do tabagismo deve ter prioridade nos programas de prevenção do câncer de pulmão.

O Risco atribuível proporcional (fração etiológica) é, assim, a proporção de todos os casos que podem ser atribuídos diretamente a uma exposição específica. Pode ser determinado pelo quociente da diferença de riscos das incidências pela incidência entre a população exposta.

Esta medida é útil para determinar a importância relativa das exposições para toda a população. É a proporção pela qual a taxa de incidência do desfecho em toda a população seria reduzido se a exposição fosse eliminada.

Observe como calcular o Risco atribuível proporcional (Fração etiológica - FE):

$$FE = \frac{I_e - I_o}{I_e} \times 100$$

- I_e: é a incidência da doença no grupo exposto;
- I_o: é a incidência da doença no grupo não exposto.

Analisando-se as incidências na Tabela vemos que o risco atribuível proporcional de nascimento de bebês com baixo peso entre mães fumantes é de:

$$
\begin{aligned}
FE =& \frac{\left(\frac{(a)}{(e)} - \frac{(c)}{(f)}\right)}{\frac{(c)}{(f)}} \\
=& \frac{\left(\frac{275}{2.419} - \frac{311}{4.807}\right)}{\frac{311}{4.807}} \\
=& \frac{(0,11368334 - 0,064697316)}{0,064697316} \\
=& 75,72\%
\end{aligned}
$$

Cerca de 75,72% dos casos de nascimentos de bebês com baixo peso é atribuível à exposição de mães ao fumo (mães fumantes).

8.4.7 *Odds ratio* (Razão das chances)

Em estudos de caso-controle os pacientes são incluídos de acordo com a **presença ou não do desfecho**. Geralmente são definidos um grupo de casos (com o desfecho) e outro de controles (sem o desfecho) e avalia-se uma eventual exposição, **no passado** a potenciais fatores de risco nestes dois grupos.

Devido ao fato de que o delineamento deste tipo de estudo baseia-se no **próprio desfecho**, não se pode estimar diretamente a incidência do desfecho de acordo com a **presença ou ausência** da exposição, como é usual em **estudos de coorte**.

Isto se deve ao fato de que a proporção **casos/controles)** (ou **desfecho/não-desfecho**) é determinada pelo próprio pesquisador (a proporção não é a mesma observada na população toda com possibilidade de exposição). Assim, a ocorrência de desfechos no grupo total estudado não é regida pela **história natural** da doença e depende de quantos casos e controles o pesquisador selecionou.

Apesar de não se poder estimar diretamente as incidências da doença (desfecho) entre **expostos e não-expostos** em estudos de caso-controle, é possível, entretanto, obter-se uma aproximação da Razão de risco (risco relativo - RR).

Se **se o desfecho for suficientemente raro** na população (10% ou menos), a Razão de risco (risco relativo - RR) pode ser **estimada aproximadamente** em estudos de caso-controle através da Razão de chances (*odds ratio* - OR) de exposição entre casos e controle:

A chance (*odds*) de se observar o desfecho entre os expostos:

$$O_{exp} = \frac{\left(\frac{a}{a+b}\right)}{\left(\frac{b}{a+b}\right)} = \frac{a}{b}$$

A chance (*odds*) de se observar o desfecho entre os não expostos:

$$O_{n.exp} = \frac{\left(\frac{c}{c+d}\right)}{\left(\frac{d}{c+d}\right)} = \frac{c}{d}$$

A razão das chances (*odds ratio* - OR) de exposição entre casos e controle:

$$OR = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{ad}{bc}$$

- OR (*odds ratio*) maior que 1: **fator de risco**;
- OR (*odds ratio*) menor que 1: **fator protetor**.

A razão de chances (*odds ratio*) exprime numericamente quantas vezes a exposição a um determinado fator de risco implica na possibilidade do desfecho estudado.

Analisando-se as incidências na Tabela vemos que a razão de chances é de:

$$\begin{aligned} OR =& \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} \\ =& \frac{\left(\frac{275}{2144}\right)}{\left(\frac{311}{4.496}\right)} \\ =& \frac{0,1282649}{0,0691726} \\ =& 1,8542 \end{aligned}$$

Uma razão de chances de 1,85 indica que uma gestante fumante terá 1,85 mais chances de ter um bebê com baixo peso no momento de seu nascimento do que uma gestante não fumante (alternativamente, para cada 1,85 bebês nascidos com peso abaixo do normal de mães fumantes, nasce 1 bebê com peso abaixo do normal de mãe não fumante).

Utilizando-se o mesmo grupo de dados, o valor obtido para a Razão de chances (*odds ratio* - OR) é geralmente maior do que aquele que se obtém através da fórmula tradicional da razão de risco (risco relativo - RR). Para os dados da Tabela, uma Razão de chaces de 1,85 é uma aproximação razoável para um Risco relativo de 1,76.

À medida que o evento mensurado é mais raro esta aproximação torna-se progressivamente mais precisa.

8.4.8 Correlação linear de Pearson

Em estatística, a expressão correlação se refere à relação existente entre variáveis, digamos X e Y. Essa correlação pode assumir padrões diferentes: linear, não linear (quadrática, cúbica, ...).

A correlação existente entre valores observados de uma mesma variável, digamos X em diferentes momentos de tempo $X_{(t_i-1)}, X_{(t_i)}$ é denominada autocorrelação.

É preciso sempre ter em mente que uma **correlação** estatística, por si só, não implica logicamente em **causação**. Para atribuir uma relação de causa-efeito deve-se lançar mão de considerações *a priori* ou teóricas acerca do objeto do estudo.

Em (A), (B), (C) e (D) parece-nos que a relação observada entre as variáveis X e Y pode ser expressa por uma função linear (uma reta):

- em (A) e (C) vemos que a variação de ocorre no mesmo sentido: quando o valor da variável X sofre um incremento, também assim ocorre, em algum grau, na variável Y;
- em (B) e (D) vemos que uma variação inversa: quando o valor da variável X sofre um incremento, a variável Y sofre um decremento em algum grau;
- em (A) e (B) parece-nos que uma função linear exprimiria uma relação entre as variáveis X e Y de modo exato quando comparada a (C) e (D).

Em (G) não se vislumbra um padrão linear no comportamento das variáveis X e Y e em (H) o padrão de comportamento observado entre as variáveis X e Y sugere haver uma boa relação, todavia não **linear**.

O cálculo do **Coeficiente de correlação linear de Pearson (r)** envolve diversos somatórios dos valores das variáveis X, Y, seus quadrados e também de seu produto $X.Y$.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right) \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n}\right]}}$$

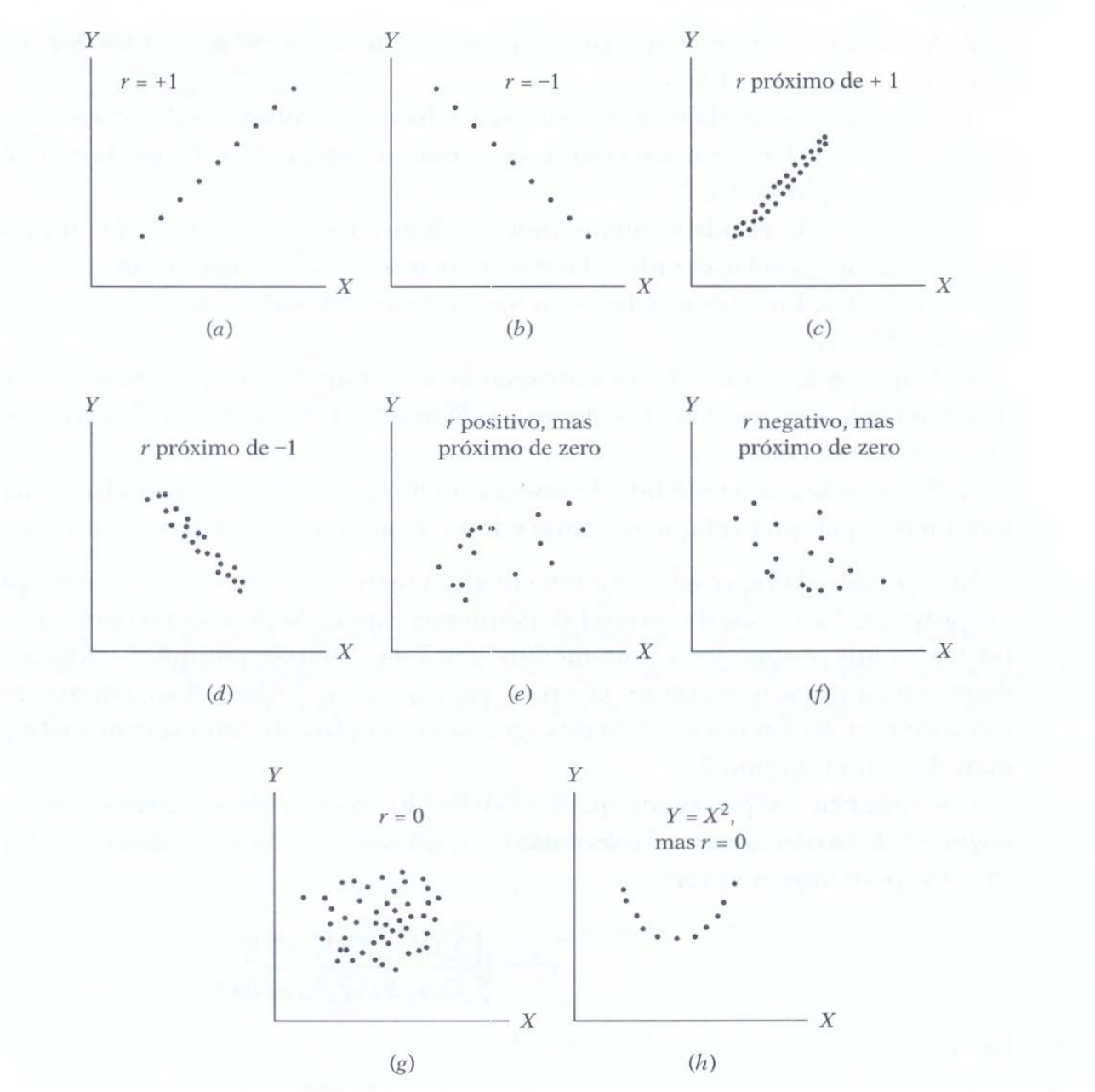


Figure 8.2: Diferentes diagramas de dispersão entre duas variáveis X e Y (Fonte: Introduction to Econometrics. Englewoods Cliffs, 1978)

Na expressão acima:

- x_i: é o *i-ésimo* valor observado de X;
- y_i: é o *i-ésimo* valor observado de Y; e,
- n é o número de pares de valores observados.

Simplificadamente podemos exprimir r na forma abaixo:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}}$$

em que:

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \\ S_{xx} &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n} \\ S_{yy} &= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n} \end{aligned}$$

O coeficiente de correlação de Pearson quantifica a **intensidade** das relações lineares entre x e y e não estabelece *per si* nenhuma relação de causação.

É apenas uma medida da associação linear entre duas variáveis e, portanto, não tem sentido usá-lo na quantificação de relações que não o sejam.

O coeficiente de correlação linear de Pearson tem uma **faixa limitada de variação** e é simétrico; isto é, a correlação linear observada entre X e Y é a mesma que a medida entre Y e X.

$$-1 \leq r \leq 1$$

- se $r > 0$ dizemos que há uma relação linear positiva entre as variáveis estudadas: para um incremento na primeira variável observa-se também um incremento na segunda;

- se $r < 0$ a relação linear é negativa: um incremento em uma das variáveis é acompanhado por um decremento na outra; e,
- quando $r = 0$ não há **relação linear** entre as variáveis consideradas.

Exemplo: onsidere as medidas obtidas de duas variáveis no quadro abaixo.

Table 8.5: Quadro de dados

X	Y
74	139
45	108
48	98
36	76
27	62
16	57

Table 8.6: Quadro auxiliar para cálculo do coeficiente de correlação linear (r)

X	Y	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	y_i^2
74	139	10286	5476	19321
45	108	4860	2025	11664
48	98	4704	2304	9604
36	76	2736	1296	5776
27	62	1674	729	3844
16	57	912	256	3249
246	540	25172	12086	53458

Assim, sendo $n = 6$ obervações segue-se:

$$
\begin{aligned}
S_{xy} =& \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \\
=& 25172 - \frac{246 \cdot 540}{6} \\
=& 3032 \\
S_{xx} =& \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n} \\
=& 12086 - \frac{246^2}{6} \\
=& 2000 \\
S_{yy} =& \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n} \\
=& 53458 - \frac{540^2}{6} \\
=& 4858
\end{aligned}
$$

Portanto:

$$
\begin{aligned}
r =& \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx} \cdot s_{yy}}} \\
=& \frac{3032}{\sqrt{2000 \cdot 4858}} \\
=& 0,9727
\end{aligned}
$$

8.5 Intervalos de confiança

As técnicas para obter intervalos de confiança para estimativas amostrais de riscos relativos e *odds ratio* que serão apresentadas estão descritas no livro *Statistics with Confidence* (Douglas Altman _et a_l) e, embora se constituam em aproximações para grandes amostras, são estimativas razoáveis para pequenos estudos.

Através de uma transformação logarítmica, obtém-se uma curva com forma aproximadamente Normal e assim esses intervalos podem ser delimitados a partir da função densidade de probabilidade da distribuição Normal padronizada.

Para o intervalo de confiança da estimativa amostral da diferença de risco (risco atribuível) a proposição se encontra no artigo *Statistical algorithms in Review Manager 5* de Jonathan J. Deeks e Julian P. T. Higgins e está baseada na distribuição da diferença de proporções.

$$
\log(IC_{(medida)}) = \log(medida) \pm \left[z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \times EP(\log(medida)) \right]
$$

em que:

- $EP(\log(medida))$ é o erro padrão do logaritmo da medida e os valores mínimo e máximo do intervalo de confiança serão dados por $\exp[\log((IC_{(medida)})]$;
- α é o nível de significânica tolerado e, por conseguinte, $(1-\alpha)$ o nível de confiança pretendido; e,
- e os valores de $|z_{(1-\frac{\alpha}{2})}|$ poderão ser obtidos em uma tabela da distribuição Normal padronizada, sendo os mais usuais:

Table 8.7: Valores críticos z_c correspondentes a vários níveis de significância (α)

Níveis de significância (α)	0,10	0,05	0,01	0,005	0,002
Valores críticos de z_c para testes unilaterais	-1,28 **ou** 1,28	-1,645 **ou** 1,645	-2,33 **ou** 2,33	-2,58 **ou** 2,58	-2,88 **ou** 2,88
Valores críticos de z_c para testes bilaterais	-1,645 **e** 1,645	-1,96 **e** 1,96	-2,58 **e** 2,58	-2,81 **e** 2,81	-3,08 **e** 3,08

8.5.1 Razão de risco (Risco relativo - RR)

Considere a estrutura dos dados presentes na Tabela para a estimação dos erros padrão a seguir.

$$EP(\log(RR)) = \sqrt{\left[\frac{1}{(a)} - \frac{1}{(a)+(b)}\right] + \left[\frac{1}{(c)} - \frac{1}{(c)+(d)}\right]}$$

O erro padrão do Risco Relativo - RR para os dados da Tabela poderá ser assim estimado:

$$\begin{aligned}
EP(\log(RR)) =& \sqrt{\left[\frac{1}{(a)} - \frac{1}{(a)+(b)}\right] + \left[\frac{1}{(c)} - \frac{1}{(c)+(d)}\right]} \\
EP(\log(RR)) =& \sqrt{\left[\frac{1}{(275)} - \frac{1}{2.419}\right] + \left[\frac{1}{311} - \frac{1}{4.807}\right]} \\
EP(\log(RR)) =& \sqrt{0,006230374} \\
EP(\log(RR)) =& 0,078932718
\end{aligned}$$

Para um nível de confiança de 95% (nível de significância de 0,05%) extraímos o valor crítico de $z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$ da Tabela ($z_c = |1,96|$).

A partir do Risco relativo previamente calculado (1,76), um intervalo com nível de confiança de $(1-\alpha = 95\%)$ fica assim delimitado:

$$\begin{aligned}
\log(IC_{(RR)}) &= \log(RR) \pm \left[z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \times EP(\log(RR))\right] \\
\log(IC_{(RR)}) &= \log(1,76) \pm (1,96 \times 0,078932718) \\
\log(IC_{(RR)}) &= 0,565313809 \pm 0,154708127 \\
\text{Limite superior } IC_{(RR)} &= \exp(0.7147081) \\
&= 2,04359 \\
\text{Limite inferior } IC_{(RR)} &= \exp(0.4052919) \\
&= 1,49974
\end{aligned}$$

Assim, o intervalo com nível de confiança $(1-\alpha)$ estabelecido em 95% para a estimativa amostra do Risco relativo (RR) calculada em 1,76 é:

$$IC_{RR(1-\alpha=0,95)} = [1,49974; 2,04359]$$

8.5.2 Razão de chances (*odds ratio* - OR)

Considere a estrutura dos dados presentes na Tabela para a estimação dos erros padrão a seguir.

$$EP(\log(OR)) = \sqrt{\frac{1}{(a)} + \frac{1}{(b)} + \frac{1}{(c)} + \frac{1}{(d)}}$$

O erro padrão da Razão das chances (*odds ratio* - OR) para os dados da Tabela poderá ser assim estimado:

$$\begin{aligned}
EP(\log(OR)) &= \sqrt{\frac{1}{(a)} + \frac{1}{(b)} + \frac{1}{(c)} + \frac{1}{(d)}} \\
EP(\log(OR)) &= \sqrt{\frac{1}{275} + \frac{1}{2.144} + \frac{1}{311} + \frac{1}{4.496}} \\
EP(\log(OR)) &= \sqrt{0,007540636} \\
EP(\log(OR)) &= 0,08683683
\end{aligned}$$

Para um nível de confiança de 95% (nível de significância de 0,05%) extraímos o valor de $z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$ da Tabela ($z_c = |1,96|$).

A partir da Razão das chances previamente calculada (1,85), um intervalo com nível de confiança de ($1-\alpha =$ 95%) fica assim delimitado:

$$\begin{aligned}
\log(IC_{(OR)}) &= \log(OR) \pm \left[z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \times EP(\log(OR))\right] \\
\log(IC_{(OR)}) &= \log(1,85) \pm (1,96 \times 0,08683683) \\
\log(IC_{(OR)}) &= 0,6151856 \pm 0,1702002 \\
\text{Limite superior } IC_{(OR)} &= \exp(0.7853858) \\
&= 2,193253 \\
\text{Limite inferior } IC_{(OR)} &= \exp(0.4449854) \\
&= 1,560467
\end{aligned}$$

Assim, o intervalo com nível de confiança ($1-\alpha$) estabelecido em 95% para a estimativa amostra da Razão de chances (OR) calculada em 1,85 é:

$$IC_{OR(1-\alpha=0,95)} = [1,560467; 2,193253]$$

8.5.3 Diferença de risco (Risco atribuível - RA)

Considere a estrutura dos dados presentes na Tabela para a estimação dos erros padrão a seguir.

$$EP(RA) = \sqrt{\left[\frac{a \times b}{(a+b)^3}\right] + \left[\frac{c \times d}{(c+d)^3}\right]}$$

$$IC_{(RA)} = RA \pm \left[z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \times EP(RA))\right]$$

O erro padrão da Diferença de Risco - RA para os dados da Tabela poderá ser assim estimado:

$$
\begin{aligned}
EP(RA) =& \sqrt{\left[\frac{a \times b}{(a+b)^3}\right] + \left[\frac{c \times d}{(c+d)^3}\right]} \\
EP(RA) =& \sqrt{\left[\frac{275 \times 2144}{(275+2.144)^3}\right] + \left[\frac{311 \times 4.496}{(311+4.496)^3}\right]} \\
EP(RA) =& 0,007364887
\end{aligned}
$$

Para um nível de confiança de 95% (nível de significância de 0,05%) extraímos o valor de $z_{(1-\frac{\alpha}{2})}$ da Tabela ($z_c = |1,96|$).

A partir da Diferença de risco previamente calculada (0,049), um intervalo com nível de confiança de ($1 - \alpha =$ 95%) fica assim delimitado:

$$
\begin{aligned}
IC_{(RA)} =& RA \pm \left[z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \times EP(RA))\right] \\
IC_{(RA)} =& 0,049 \pm [1,96 \times 0,007364887] \\
\text{Limite superior} =& 0,06343518 \\
\text{Limite inferior} =& 0,03456482
\end{aligned}
$$

Assim, o intervalo com nível de confiança $(1-\alpha)$ estabelecido em 95% para a estimativa amostras da Diferença de risco (RA) calculada em 4,9% é:

$$IC_{RA(1-\alpha=0,95)} = [3,46\%; 6,34\%]$$

Módulo 9

Introdução à distribuição das médias e diferenças entre médias amostrais e seus intervalos de confiança

A finalidade de uma amostra é obter uma estimativa do valor de um ou mais parãmetros de uma população.

Observa-se que os valores amostrais repetidamente extraídos de modo aleatório de uma mesma população variam de uma para outra amostra e também em relação ao verdadeiro parâmetro dessa população; todavia, demonstra-se que essa variabilidade pode ser descrita por meio de distribuições de probabilidade.

Distribuições de probabilidade quando usadas para esse propósito são denominadas de distribuições amostrais e permitem responder para cada amostra o quão próxima está a estatística amostral do verdadeiro parâmetro populacional. Essa resposta depende fundamentalmente de três fatores:

- a estatistica que está sendo utilizada: diferentes estatísticas requerem diferentes distribuições de probabilidade para modelar sua variabilidade;
- o tamanho da amostra que implica de modo inverso na variabilidade entre as amostras;
- a variabilidade existente na própria população sob estudo e amostragem.

9.1 Distribuições amostrais

Parâmetro é toda medida numérica descritiva de uma população. Quando essas medidas são calculadas sobre amostras extraídas de uma população passam a ser denominadas como estatísticas da população de origem. A média, a mediana, a variância, a proporção amostrais, assim como outras estatísticas amostrais, são exemplos de variáveis aleatórias (v.a.) uma vez que seus valores sofrem variação a cada amostra extraída.

Considere uma população com N elementos da qual se deseja extrair todas as possíveis amostras de tamanho n. Para cada amostra extraída pode-se calcular uma mesma medida descritiva como, por exemplo, a média (ou a

variância, proporção ...). O conjunto dos valores resultantes nos permite analisar como as estimativas amostrais se distribuem em comparação ao parâmetro que estão a estimar.

Essas distribuições são denominadas *distribuições amostrais*. O estudo das *distribuições amostrais* é um elemento fundamental na *inferência estatística* posto possibilitar o estabelecimento de *intervalos de confiança* relacionados ao valor de um *parâmetro* que se deseja inferir, a partir de uma estatística proveniente de uma única amostra.

O processo de extração de amostras pode ser *com* ou *sem* reposição. A extração *com* reposição assegura a independência entre os eventos e, eventos independentes são mais facilmente analisados.

O quantidade possível de amostras de tamanho n extraídas de uma população de tamanho N é dado por :

- com reposição: N^n; e,
- sem reposição: $C_{(N.n)}$

Mais adiante veremos que processos de extração de amostras de tamanho n, *sem* reposição de populações finitas com parâmetros μ (média) e σ^2 (variância) a esperança da v.a. de sua média amostral ainda é dada por:

$$E(\bar{X}) = \mu$$

mas sua variância deve ser corrigida de:

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

para:

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot (\frac{N-n}{N-1})$$

em que $(\frac{N-n}{N-1})$ é denominado como fator de correção para populações finitas.

Para ilustrar o conceito de distribuição das médias amostrais considere uma situação onde uma empresa produz lâmpadas e a vida útil média, em horas, dessas lâmpadas segue uma distribuição Normal tal que $VU \sim N(1600, 120)$.

Usando conceitos já explicados em uma unidade anterior podemos determinar o tamanho amostral em função de:

- um erro máximo: ε=20 horas;
- um nível de significância estabelecido: α=0,05; e,
- e alguma informação sobre a medida da variabilidade da variável em estudo: σ=120 horas (no caso, o desvio padrão populacional).

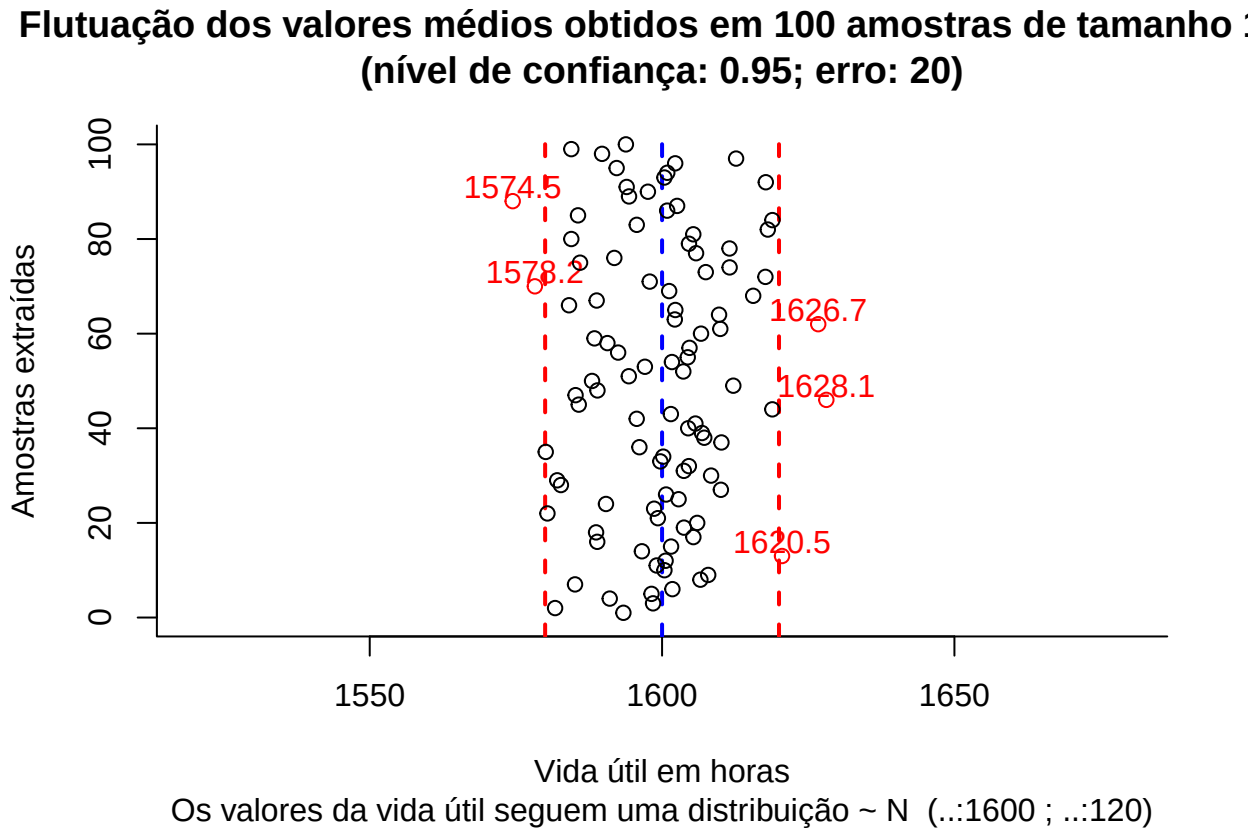


Figure 9.1: Flutuação dos valores médios para diversas amostras extraídas de uma mesma população distribuição $\sim N(\mu; \sigma)$

```
##       mu media     erro   li   ls
## 1   1600  1593  -6.6144 1574 1612
```

```
## 2   1600  1582 -18.2959 1562 1602
## 3   1600  1598  -1.5433 1581 1616
## 4   1600  1591  -8.9508 1570 1612
## 5   1600  1598  -1.8101 1578 1618
## 6   1600  1602   1.7664 1583 1620
## 7   1600  1585 -14.8877 1565 1605
## 8   1600  1607   6.5530 1585 1628
## 9   1600  1608   7.8873 1589 1627
## 10  1600  1600   0.4023 1580 1621
## 11  1600  1599  -0.9201 1578 1620
## 12  1600  1601   0.6002 1581 1620
## 13  1600  1621  20.5130 1601 1640
## 14  1600  1597  -3.4480 1576 1617
## 15  1600  1602   1.5364 1581 1622
## 16  1600  1589 -11.0894 1567 1610
## 17  1600  1605   5.3517 1586 1625
## 18  1600  1589 -11.2870 1566 1611
## 19  1600  1604   3.7383 1587 1621
## 20  1600  1606   6.0072 1586 1626
## 21  1600  1599  -0.7176 1578 1621
## 22  1600  1580 -19.6063 1561 1600
## 23  1600  1599  -1.3611 1579 1618
## 24  1600  1590  -9.5942 1572 1609
## 25  1600  1603   2.8241 1584 1622
## 26  1600  1601   0.6860 1580 1622
## 27  1600  1610  10.0566 1589 1631
## 28  1600  1583 -17.3028 1564 1601
## 29  1600  1582 -17.9327 1562 1602
## 30  1600  1608   8.3823 1588 1629
## 31  1600  1604   3.7250 1581 1626
## 32  1600  1605   4.5821 1587 1622
## 33  1600  1600  -0.2948 1577 1622
## 34  1600  1600   0.1924 1581 1620
## 35  1600  1580 -19.8970 1561 1599
## 36  1600  1596  -3.8793 1576 1616
## 37  1600  1610  10.1528 1592 1629
## 38  1600  1607   7.2131 1587 1628
## 39  1600  1607   6.8249 1587 1627
## 40  1600  1604   4.4693 1586 1623
## 41  1600  1606   5.6990 1585 1626
## 42  1600  1596  -4.3376 1575 1617
## 43  1600  1602   1.5002 1583 1620
## 44  1600  1619  18.8575 1599 1639
## 45  1600  1586 -14.2506 1567 1605
## 46  1600  1628  28.0905 1608 1649
## 47  1600  1585 -14.7984 1565 1606
## 48  1600  1589 -11.0503 1570 1607
## 49  1600  1612  12.1805 1592 1633
## 50  1600  1588 -11.9752 1569 1607
## 51  1600  1594  -5.6885 1575 1613
## 52  1600  1604   3.6333 1583 1624
## 53  1600  1597  -2.9376 1580 1614
## 54  1600  1602   1.6872 1582 1621
## 55  1600  1604   4.3904 1585 1624
## 56  1600  1592  -7.5137 1573 1612
## 57  1600  1605   4.6907 1585 1625
```

```
## 58  1600  1591  -9.3511 1572 1610
## 59  1600  1588 -11.5613 1568 1609
## 60  1600  1607   6.6610 1586 1627
## 61  1600  1610   9.9565 1591 1629
## 62  1600  1627  26.7054 1606 1647
## 63  1600  1602   2.1754 1582 1622
## 64  1600  1610   9.7439 1587 1633
## 65  1600  1602   2.2698 1582 1623
## 66  1600  1584 -15.9161 1563 1605
## 67  1600  1589 -11.1873 1569 1609
## 68  1600  1616  15.5818 1597 1634
## 69  1600  1601   1.2137 1580 1622
## 70  1600  1578 -21.7540 1559 1598
## 71  1600  1598  -2.1109 1580 1616
## 72  1600  1618  17.6733 1597 1638
## 73  1600  1607   7.4719 1588 1627
## 74  1600  1612  11.5522 1590 1634
## 75  1600  1586 -14.0278 1567 1605
## 76  1600  1592  -8.1681 1571 1613
## 77  1600  1606   5.8113 1586 1626
## 78  1600  1612  11.5314 1593 1630
## 79  1600  1605   4.5999 1583 1626
## 80  1600  1584 -15.5238 1564 1605
## 81  1600  1605   5.3382 1587 1624
## 82  1600  1618  18.0809 1598 1638
## 83  1600  1596  -4.3321 1576 1616
## 84  1600  1619  18.8682 1600 1638
## 85  1600  1586 -14.3788 1566 1606
## 86  1600  1601   0.8695 1581 1621
## 87  1600  1603   2.5739 1584 1622
## 88  1600  1574 -25.5465 1555 1594
## 89  1600  1594  -5.6534 1575 1614
## 90  1600  1598  -2.4224 1578 1617
## 91  1600  1594  -6.0547 1575 1613
## 92  1600  1618  17.7392 1597 1638
## 93  1600  1600   0.4001 1581 1620
## 94  1600  1601   0.8879 1579 1622
## 95  1600  1592  -7.7689 1572 1612
## 96  1600  1602   2.2431 1580 1624
## 97  1600  1613  12.6577 1592 1634
## 98  1600  1590 -10.2662 1572 1608
## 99  1600  1584 -15.5233 1565 1603
## 100 1600  1594  -6.1874 1573 1614
```

Observa-se no gráfico acima que algumas das amostras (em vermelho), numa proporção igual ao nível de significância estabelecido quando do dimensionamento (5%), geram médias (amostrais) se afastam do valor médio na população mais que o erro estabelecido (20 h).

9.2 Intervalos de confiança

Um *intervalo de confiança* (IC) pode ser entendido com a faixa de valores delimitada por um mínimo e um máximo, calculados como função direta de um *nível de confiança* e da *variabilidade* e inversa da *tamanho amostral*.

$$\text{estimativa amostral} \pm confiana.\sqrt{\frac{variabilidade}{n}}$$

Raramente se dispõe de informação a respeito da variabilidade (σ^2) da população estudada. Assim, a variabilidade populacional será frequentemente incorporado na expressão acima, com ligeiras modificações, na forma de sua estimativa amostral (S^2).

De certo modo, um intervalo de confiança reflete uma estimativa objetiva da (im)precisão e do tamanho da amostra de determinada pesquisa e, assim, podemos considerá-lo como uma medida da qualidade da amostra e da pesquisa.

O *nível de confiança* é designado pela quantidade $(1-\alpha)$ na qual α é denominado de *nível de significância*, uma medida da probabilidade de erro.

Dependendo do *nível de confiança* que escolhemos os limites superior e inferior do intervalo mudam para uma mesma estimativa amostral. Os intervalos de confiança mais utilizados na literatura são os de 90%, 95%, 99% e menos de 99,9%.

O *intervalo de confiança* de 95% é tradicionalmente o intervalo mais utilizado na literatura e isso está relacionado ao *nível de significância* estatística ($P < 0,05$) geralmente mais aceito.

Quanto menor for a *amplitude* de um intervalo, maior será a *precisão* da estimativa. Todavia, somente estudos com amostras razoavelmente *grandes* resultarão em um intervalo de confiança estreito, indicando simultaneamentente com alta precisão e alto grau de confianla a estimativa do parâmetro.

Intervalos de confiança podem ser construídos a quase todas as quantidades estatísticas e suas diferenças (quando se procura estudar se há ou não diferenças entre os parâmetros de duas populaçoes) como, por exemplo:

- médias;
- proporções; e,
- variâncias.

Um *intervalo de confiança* estabelecido sob certa probabilidade **não** deve ser interpretado como sendo a *faixa* de valores, delimitada por um mínimo e máximo, entre os quais o *parâmetro* da população (o qual se estima ou sobre o qual se infere) se insere.

Mas **sim** que, extraíndo-se um grande número de amostras de igual tamanho e da mesma população, e construindo-se para cada uma dessas amostras um intervalo de confiança de um mesmo nível de significância (α), observaremos que uma determinada proporção desses intervalos, chamada de nível de confiança $(1-\alpha)$ **irá, de fato, conter** o *parâmetro* sobre o qual se estima ou sobre o qual se infere. Por conseguinte, uma proporção desses intervalos chamada de nível de significância (α) **não irá** conter o verdadeiro valor do parâmetro populacional.

Assim, $(1-\alpha)$ traduz o grau de confiança que se tem que um intervalo de confiança, calculado sobre uma estatística advinda de uma particular amostra de tamanho n da variável aleatória X, inclua o verdadeiro valor do parâmetro da população:

```
IC.N = function (N, n, mu, sigma, conf) {
  dados=data.frame()
  plot(0, 0,
       type="n",
       xlim=c(mu-0.4*mu,mu+0.4*mu),
       ylim=c(0,N),
       bty="l",
       xlab="Escala de valores da variável",
       ylab="Intervalos amostrais construídos",
       main=paste0("Intervalos com iguais níveis de confiança fixados em ", 100*conf, "%
        ↪  \n(",N," amostras de tamanho ",n,")") ,
       sub=paste0("Parâmetros da distribuição da população Normal ( \u03bc, \u03c3) =
        ↪  (",mu,", ", sigma,")"))
  abline(v=mu, col='red', lwd=2, lty=2)
  #axis(1, at = c(mu-1*mu, mu, mu+1*mu))
zc = qnorm(1-((1-conf)/2))
#sigma.xbarra = sigma/sqrt(n)
for (i in 1:N) {
  x = rnorm(n, mu, sigma)
  media = mean(x)
  erro= media-mu
  sd = sd(x)
  li = media - zc * sd/(sqrt(n))
  ls = media + zc * sd/(sqrt(n))
  temp=cbind(mu, media, erro, li, ls)
  dados=rbind(dados, temp)
  plotx = c(li,ls)
  ploty = c(i,i)
  if (li > mu | ls < mu) lines(plotx,ploty, col="red", lwd=2, lend=0)
  else lines(plotx,ploty, lend=0)
   if (li > mu | ls < mu) points(media, i, col="red", cex=1)+text(y=i+3,x=media,
    ↪  labels=round(media,1), cex=1, col='red')
```

```
  else points(media, i, col="black", cex=1)
}
colnames(dados)=c("mu", "media", "erro", "li", "ls")
return(dados)
}
```

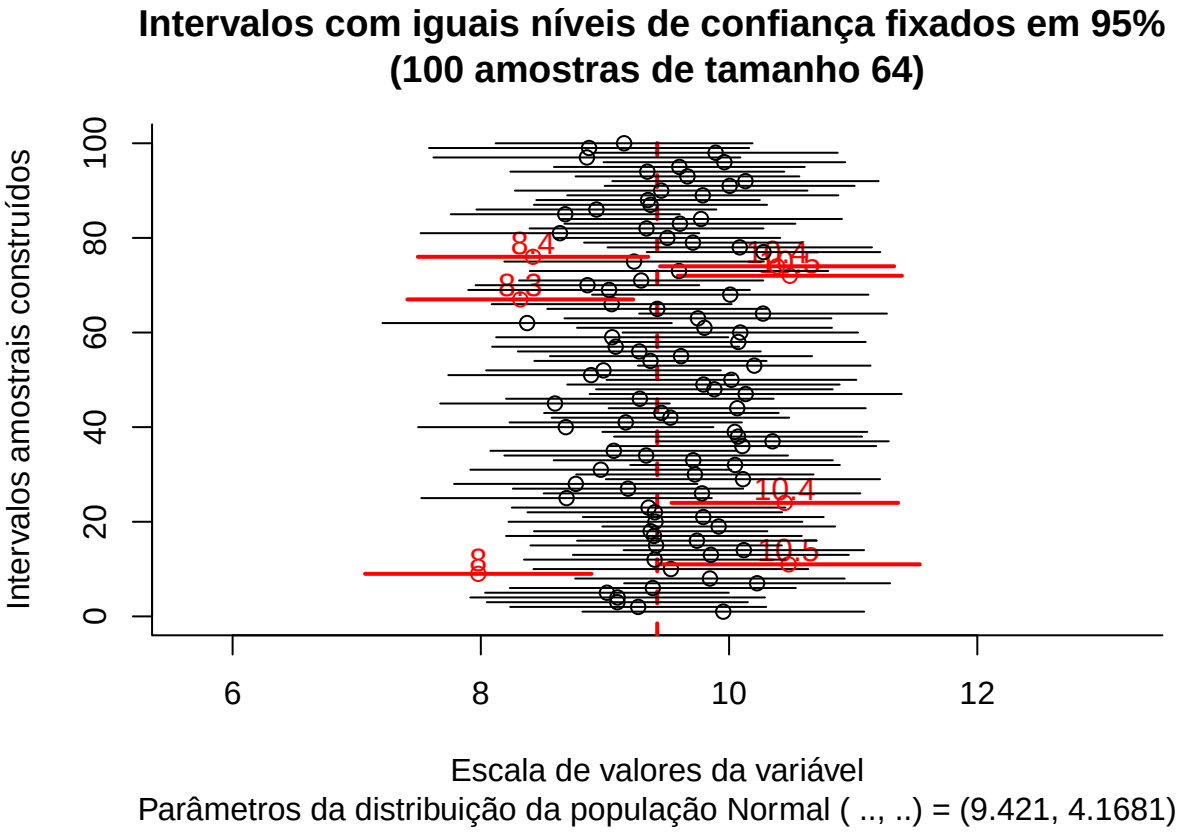
```
N=100
n=64
mu=9.421
sigma=4.1681
conf=0.95
IC.N(N, n, mu, sigma, conf)
```

```
## Warning in title(...): conversion failure on 'Parâmetros da distribuição da
## população Normal (  ,  ) = (9.421, 4.1681)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted
## for <ce>
```

```
## Warning in title(...): conversion failure on 'Parâmetros da distribuição da
## população Normal (  ,  ) = (9.421, 4.1681)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted
## for <bc>
```

```
## Warning in title(...): conversion failure on 'Parâmetros da distribuição da
## população Normal (  ,  ) = (9.421, 4.1681)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted
## for <cf>
```

```
## Warning in title(...): conversion failure on 'Parâmetros da distribuição da
## população Normal (  ,  ) = (9.421, 4.1681)' in 'mbcsToSbcs': dot substituted
## for <83>
```




```
##        mu  media       erro    li     ls
## 1   9.421  9.953  0.5319566 8.818 11.088
## 2   9.421  9.268 -0.1532641 8.236 10.299
## 3   9.421  9.100 -0.3212736 8.048 10.151
## 4   9.421  9.102 -0.3194210 7.915 10.289
## 5   9.421  9.016 -0.4047899 8.034  9.998
## 6   9.421  9.385 -0.0356313 8.233 10.538
## 7   9.421 10.226  0.8047551 9.154 11.297
## 8   9.421  9.846  0.4246060 8.760 10.931
## 9   9.421  7.979 -1.4416390 7.067  8.892
## 10  9.421  9.531  0.1099850 8.424 10.638
## 11  9.421 10.480  1.0585154 9.423 11.536
## 12  9.421  9.400 -0.0210601 8.348 10.452
## 13  9.421  9.853  0.4323677 8.742 10.965
## 14  9.421 10.119  0.6977988 9.150 11.088
## 15  9.421  9.412 -0.0091099 8.399 10.424
## 16  9.421  9.741  0.3195968 8.775 10.706
## 17  9.421  9.394 -0.0265104 8.203 10.586
## 18  9.421  9.368 -0.0526703 8.428 10.309
## 19  9.421  9.916  0.4948015 8.978 10.854
## 20  9.421  9.407 -0.0142335 8.223 10.591
## 21  9.421  9.792  0.3708692 8.821 10.762
## 22  9.421  9.402 -0.0192071 8.376 10.428
## 23  9.421  9.351 -0.0698229 8.249 10.453
## 24  9.421 10.449  1.0278414 9.536 11.362
## 25  9.421  8.691 -0.7302893 7.520  9.861
## 26  9.421  9.782  0.3606713 8.506 11.057
## 27  9.421  9.186 -0.2350305 8.258 10.114
## 28  9.421  8.765 -0.6559180 7.785  9.746
```

```
## 29  9.421 10.112  0.6909194 9.007 11.216
## 30  9.421  9.724  0.3034679 8.768 10.681
## 31  9.421  8.967 -0.4544363 7.915 10.018
## 32  9.421 10.048  0.6269948 9.203 10.893
## 33  9.421  9.711  0.2901972 8.587 10.836
## 34  9.421  9.332 -0.0890899 8.189 10.475
## 35  9.421  9.071 -0.3497127 8.077 10.066
## 36  9.421 10.107  0.6860059 9.028 11.186
## 37  9.421 10.350  0.9290540 9.413 11.287
## 38  9.421 10.072  0.6510533 9.073 11.071
## 39  9.421 10.046  0.6248297 8.979 11.113
## 40  9.421  8.684 -0.7365480 7.495  9.874
## 41  9.421  9.167 -0.2535083 8.231 10.104
## 42  9.421  9.527  0.1062397 8.570 10.484
## 43  9.421  9.455  0.0336756 8.509 10.400
## 44  9.421 10.065  0.6444653 9.030 11.101
## 45  9.421  8.597 -0.8237163 7.672  9.522
## 46  9.421  9.281 -0.1398358 8.203 10.359
## 47  9.421 10.133  0.7124289 8.876 11.390
## 48  9.421  9.881  0.4603690 8.928 10.835
## 49  9.421  9.794  0.3725049 8.696 10.891
## 50  9.421 10.019  0.5980100 9.013 11.025
## 51  9.421  8.889 -0.5322746 7.738 10.040
## 52  9.421  8.988 -0.4331752 8.043  9.933
## 53  9.421 10.203  0.7818083 9.266 11.140
## 54  9.421  9.367 -0.0544454 8.431 10.302
## 55  9.421  9.613  0.1918762 8.557 10.669
## 56  9.421  9.276 -0.1445687 8.298 10.255
## 57  9.421  9.086 -0.3347284 8.091 10.081
## 58  9.421 10.074  0.6529624 9.047 11.101
## 59  9.421  9.058 -0.3627809 8.123  9.993
## 60  9.421 10.090  0.6693213 9.141 11.039
## 61  9.421  9.802  0.3807430 8.775 10.829
## 62  9.421  8.373 -1.0479482 7.208  9.539
## 63  9.421  9.749  0.3279586 8.674 10.824
## 64  9.421 10.273  0.8523889 9.275 11.272
## 65  9.421  9.421  0.0004369 8.535 10.308
## 66  9.421  9.054 -0.3671965 8.087 10.021
## 67  9.421  8.318 -1.1032074 7.408  9.228
## 68  9.421 10.009  0.5883192 8.896 11.123
## 69  9.421  9.033 -0.3878605 7.898 10.168
## 70  9.421  8.859 -0.5620976 7.957  9.760
## 71  9.421  9.292 -0.1294712 8.308 10.275
## 72  9.421 10.489  1.0684076 9.587 11.392
## 73  9.421  9.596  0.1753172 8.394 10.799
## 74  9.421 10.387  0.9658367 9.444 11.330
## 75  9.421  9.234 -0.1865158 8.189 10.280
## 76  9.421  8.421 -1.0002803 7.493  9.349
## 77  9.421 10.277  0.8563729 9.336 11.219
## 78  9.421 10.086  0.6649526 9.021 11.151
## 79  9.421  9.709  0.2875603 8.832 10.585
## 80  9.421  9.503  0.0817412 8.593 10.413
## 81  9.421  8.637 -0.7837332 7.515  9.760
## 82  9.421  9.335 -0.0859285 8.393 10.278
## 83  9.421  9.604  0.1829056 8.674 10.534
## 84  9.421  9.774  0.3529368 8.639 10.909
```

```
## 85  9.421  8.680 -0.7410828 7.757  9.603
## 86  9.421  8.931 -0.4897601 7.965  9.898
## 87  9.421  9.367 -0.0539601 8.428 10.306
## 88  9.421  9.347 -0.0738329 8.447 10.248
## 89  9.421  9.788  0.3670697 8.695 10.881
## 90  9.421  9.453  0.0320048 8.274 10.632
## 91  9.421 10.004  0.5833805 8.997 11.012
## 92  9.421 10.132  0.7106769 9.059 11.205
## 93  9.421  9.664  0.2434507 8.763 10.566
## 94  9.421  9.341 -0.0796525 8.238 10.445
## 95  9.421  9.599  0.1782742 8.589 10.610
## 96  9.421  9.962  0.5407788 8.988 10.935
## 97  9.421  8.855 -0.5664562 7.618 10.091
## 98  9.421  9.892  0.4706129 8.908 10.875
## 99  9.421  8.872 -0.5489971 7.582 10.162
## 100 9.421  9.154 -0.2667632 8.119 10.189
```

O gráfico acima expõe os intervalos de confiança: $(1-\alpha)$=95% produzidos para as 100 médias de amostras de tamanho 64 extraídas de uma população com parâmetros μ : 9.421 e σ : 4.1681.

A proporção de intervalos amostrais que não contém o verdadeiro valor do parâmetro populacional pode ser visualmente inspecionada pelas linhas em vermelho.

> Intervalos de confiança bilaterais: intervalos delimitados por dois valores: mínimo e máximo, para a proporção amostral, dentro do qual todos os valores possuem um mesmo nível de confiança de ocorrência.
>
> Intervalos de confiança unilaterais: intervalos delimitados apenas em um de seus lados, nos quais todos os valores possuem um mesmo nível de confiança. Podem ser limitados à direita por um valor máximo ou limitados à esquerda por um valor mínimo.

9.3 Distribuição das médias amostrais e seus intervalos de confiança

Para estudarmos a distribuição das médias amostrais considerem uma população com parâmetros μ (média) e σ^2 (variância).

A distribuição das médias amostrais expressa como se distribuem os valores dessa estatística calculada para todas as possíveis amostras de tamanho n extraídas de uma população cujo valor desse parãmetro é desconhecido.

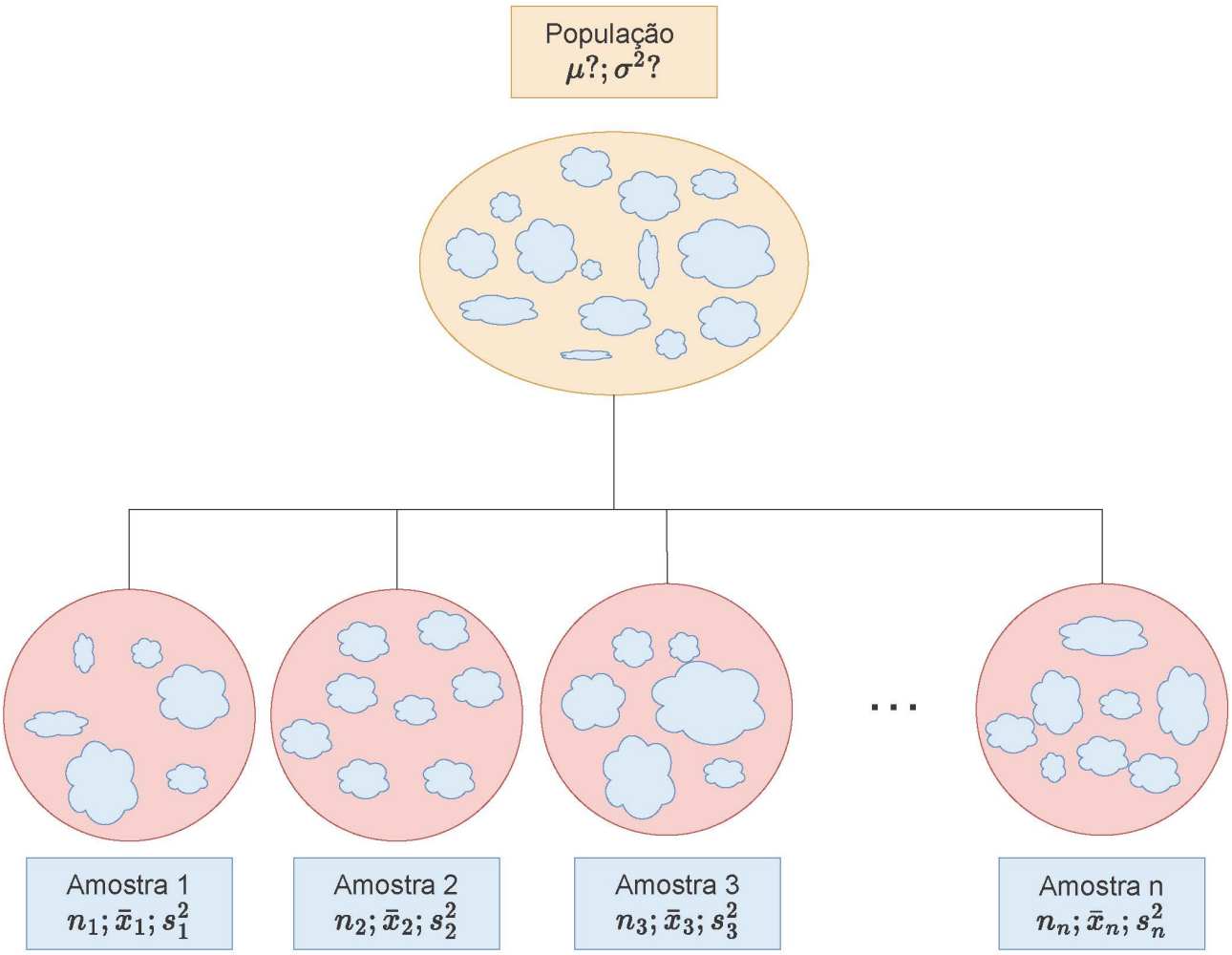


Figure 9.2: Ilustração esquemática de n amostras extraídas de uma mesma população de parâmetros μ e σ, cada uma apresentando as respectivas estatísticas calculadas

A convergência da forma de distribuição e dos parâmetros dessa distribuição das médias amostrais são elucidadas pela **Lei dos Grandes Números** e pelo **Teorema Central do Limite**.

De acordo com a teoria, pelo uso de simulações computacionais consegue-se ilustrar que para uma amostra de tamanho n (onde $x_1, x_1, ..., x_n$ são os valores assumidos das variáveis aleatórias $X_1, X_1, ..., X_n$) em amostras extraídas de uma população infinita de tamanho N com média μ e variância σ^2) a distribuição das médias amostrais (v.a. $\bar{X}$) segue uma distribuição com os média $= \mu$ e variância $= \frac{\sigma^2}{n}$ pois:

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \frac{1}{n} \cdot \{E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)\} \\ &= (\frac{1}{n}) \cdot \{\mu + \mu + ... + \mu\} = \frac{n \cdot \mu}{n} = \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(\bar{X}) &= \frac{1}{n^2} \cdot \{Var(X_1) + Var(X_2 + ... + Var(X_n)\} \\ &= (\frac{1}{n^2}) \cdot \{\sigma^2 + \sigma^2 + ... + \sigma^2\} = n \cdot \frac{\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Equivale afirmar que, **independentemente** da forma de distribuição da população de origem da qual são extraídas as amostras, a distribuição dos valores da variável aleatória $\bar{X}$ tenderá a seguir uma distribuição $\sim N(\mu; \frac{\sigma^2}{n})$ à medida que n , o tamanho da amostra aumenta, como ilustrado nas Figuras 9.3 e 9.5.

O **TCL** garante a aproximação da distribuição de $\bar{X}$ a uma distribuição Normal com média μ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$ quando n é grande, independentemente da distribuição da população de origem. Na prática, essa aproximação é usada quando $n \geq 30$.

Portanto, para populações **infinitas** ou amostragem **com reposição**:

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

Demostração usando amostras extraídas de uma população com distribuição $\sim U(v_{min}; v_{max})$

```
# Definindo os parâmetros e a amostra
min_1=2
max_1=6
NN=5000
pop_1=runif(NN, min=min_1, max=max_1)
df=as.data.frame(pop_1)

# A distribuição da população ilustrada em um histograma
ggplot(df, aes(x=pop_1)) +
  geom_histogram( binwidth=1,color="black", fill="lightblue")+
  scale_y_continuous(name="Frequência") +
  scale_x_continuous(name="Valores")+
  labs(title= paste("Histograma de uma população com Distribuição Uniforme"),
       subtitle = paste("Parâmetros: valor min =",min_1,"; valor max =", max_1))+
  theme(plot.title = element_text(size = 10, face = "bold"),
        axis.text.x = element_text(angle=0, hjust=1, size=10),
        axis.text.y = element_text(angle=0, hjust=1, size=10),
        axis.title.x = element_text(size = 10),
        axis.title.y = element_text(size = 10))
```

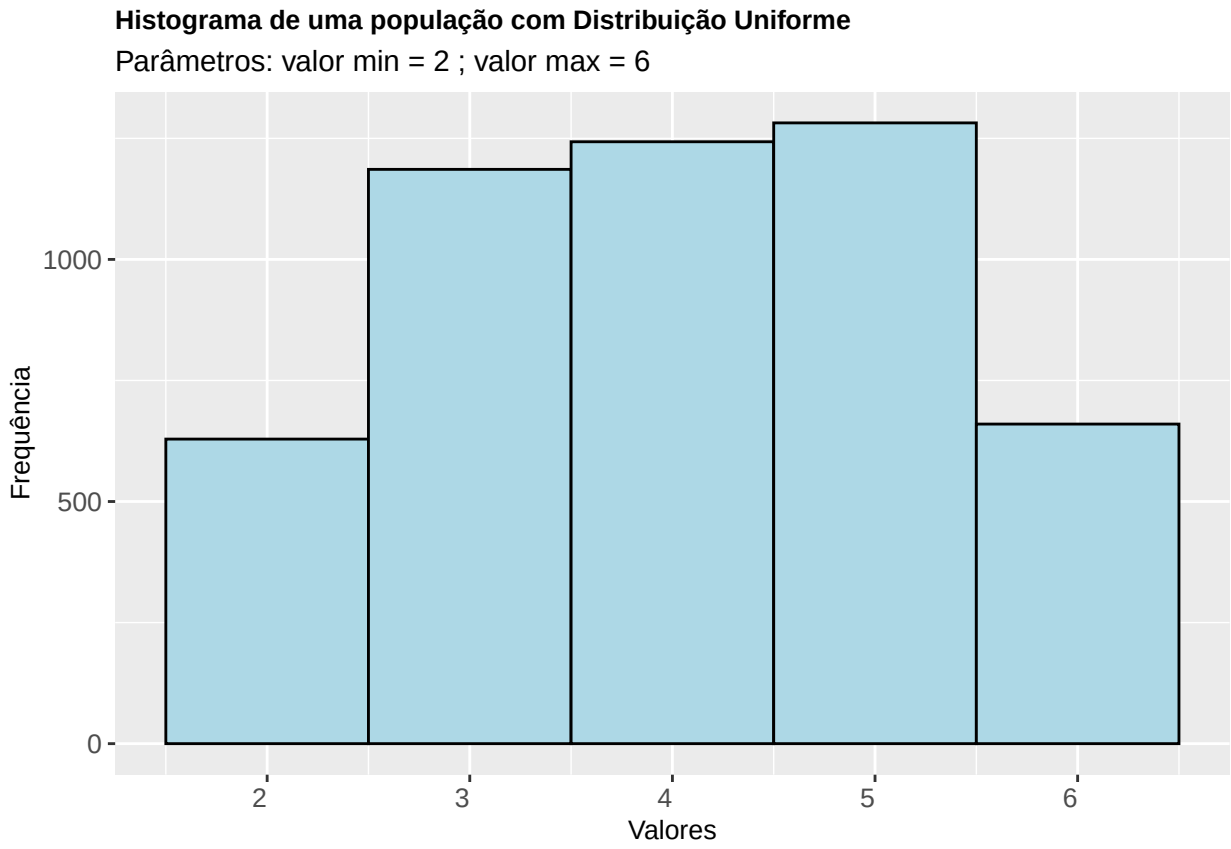


Figure 9.3: Histograma de uma população cuja característica de interesse segue uma Distribuição Uniforme

A Figura 9.3 mostra o histograma de uma amostra de 5000 elementos de uma população com Distribuição Uniforme de parâmetros v_{min} : 2 e v_{max} : 6.

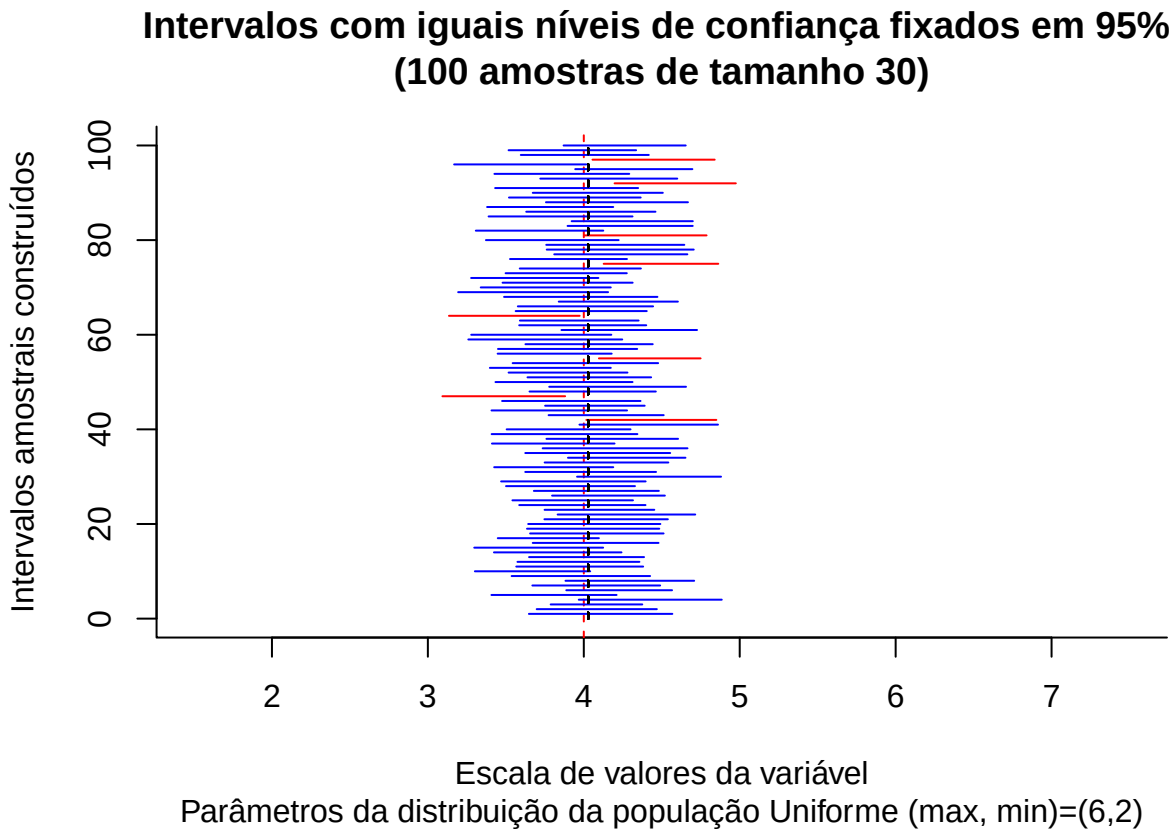


Figure 9.4: Intervalos de confiança construídos para diversas estimativas amostrais de uma população com Distribuição $\sim N(\mu = \frac{max-min}{2}; \sigma^2 = \frac{1}{12}(max-min)^2)$

A Figura 9.4 expõe os intervalos sob nível de confiança de $(1-\alpha)$=95% produzidos para as 100 médias de amostras de tamanho 30 extraídas de uma população Uniforme com parâmetros v_{max} : 6 e v_{min} : 2 e, conforme assegura o **TCL**, o valor médio das médias amostrais (linha tracejada preta) converge assintoticamente para a média da população de origem (linha tracejada em vermelho) com o incremento do tamanho das amostras.

```
meu_titulo1=paste("Distribuição das médias de", N, "amostras de tamanho n=",n,"\n população
 ↪  de origem sob Dist. Unif. (min: ", min_1, "; max: ", max_1, ")")
meu_titulo2=paste("As médias amostrais ~ N( x=",round(mean(m),2),";sd=",round(sd(m),2),")")

dados=as.data.frame(m)
ggplot(dados, aes(m)) +
  geom_histogram(aes(y = stat(density)), bins=10, fill="lightblue", col="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            args = list(mean=mean(m), sd=sd(m)),
            fill = NA,
            colour="red") +
```

```
scale_y_continuous(name="Densidade") +
scale_x_continuous(name="Valores das médias amostrais") +
labs(title=meu_titulo1)+
geom_segment(aes(x = mean(m), y = 0, xend = mean(m), yend = max(dnorm(m))), color="blue",
 ↪  lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=mean(m), y=max(dnorm(m)),
         label=meu_titulo2, angle=0, vjust=-0.5, hjust=0.5, color="blue",size=6)+
theme(plot.title = element_text(size = 10, face = "bold"),
      axis.text.x = element_text(angle=0, hjust=1, size=10),
      axis.text.y = element_text(angle=0, hjust=1, size=10),
      axis.title.x = element_text(size = 10),
      axis.title.y = element_text(size = 10))
```

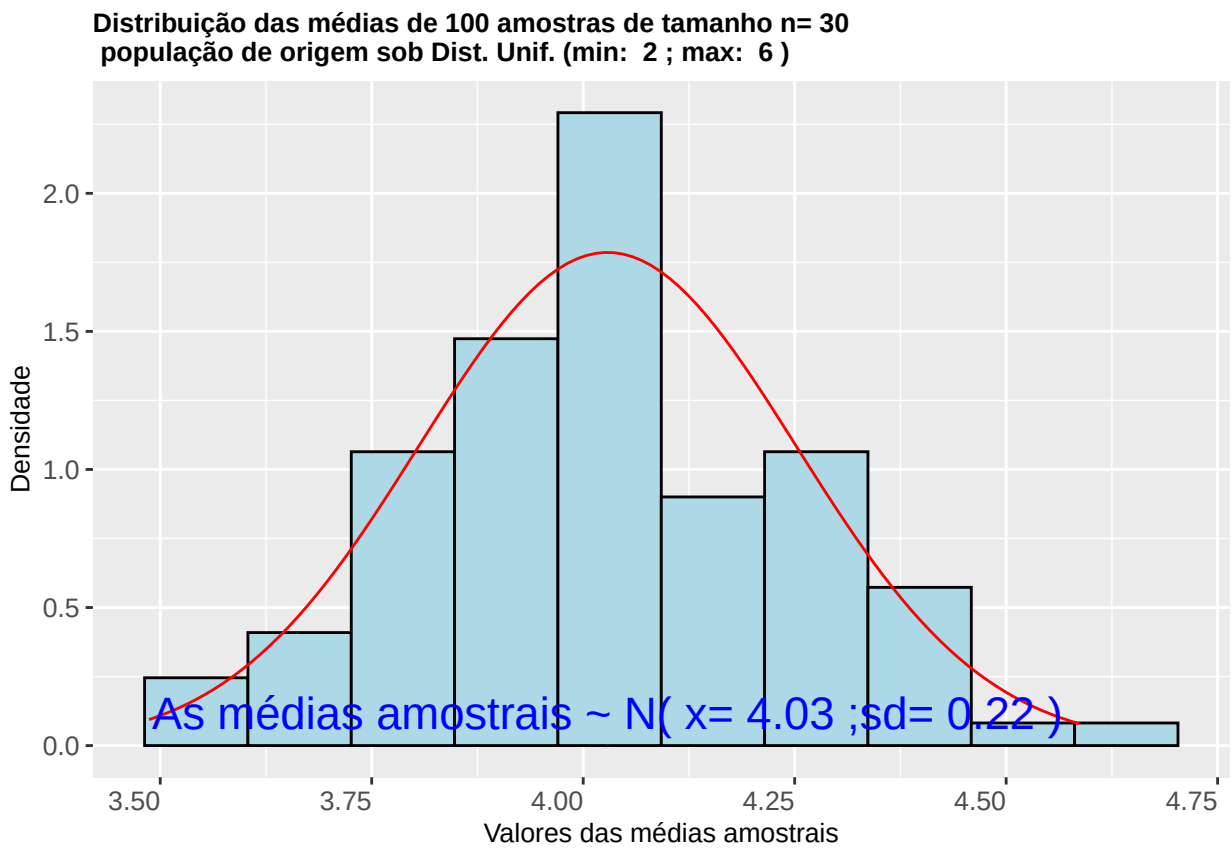


Figure 9.5: Histograma da distribuição das médias de amostras extraidas de uma população com Distribuição Uniforme mostra que as mesmas seguem uma Distribuição $\sim N(\mu = \frac{max-min}{2}; \sigma^2 = \frac{1}{12}(max-min)^2)$

O histograma da Figura 9.5 ilustra que os valores das médias calculadas de 30 amostras extraídas de uma população com distribuição Uniforme $\sim U(v_{min}, v_{max})$ seguem uma distribuição Normal $\sim N(\mu = \frac{v_{max}-v_{min}}{2}; \sigma^2 = \frac{1}{12}(v_{max}-v_{min})^2)$.

Demostração usando amostras extraídas de uma população com distribuição $\sim N(\mu; \sigma)$

```
# Definindo os parâmetros e a amostra
media=80
desvio=4
NN=5000
pop_2=rnorm(n=NN, mean = media, sd = desvio)

df=as.data.frame(pop_2)

# A distribuição da população ilustrada em um histograma
ggplot(df, aes(x=pop_2)) +
  geom_histogram( binwidth=1,color="black", fill="lightblue")+
  scale_y_continuous(name="Frequêcia") +
  scale_x_continuous(name="Valores")+
  labs(title= paste("Histograma de uma população com Distribuição Normal"),
       subtitle = paste("Parâmetros: média =",media,"; desv. padrão =", desvio))+
  theme(plot.title = element_text(size = 10, face = "bold"),
        axis.text.x = element_text(angle=0, hjust=1, size=10),
        axis.text.y = element_text(angle=0, hjust=1, size=10),
        axis.title.x = element_text(size = 10),
        axis.title.y = element_text(size = 10))
```

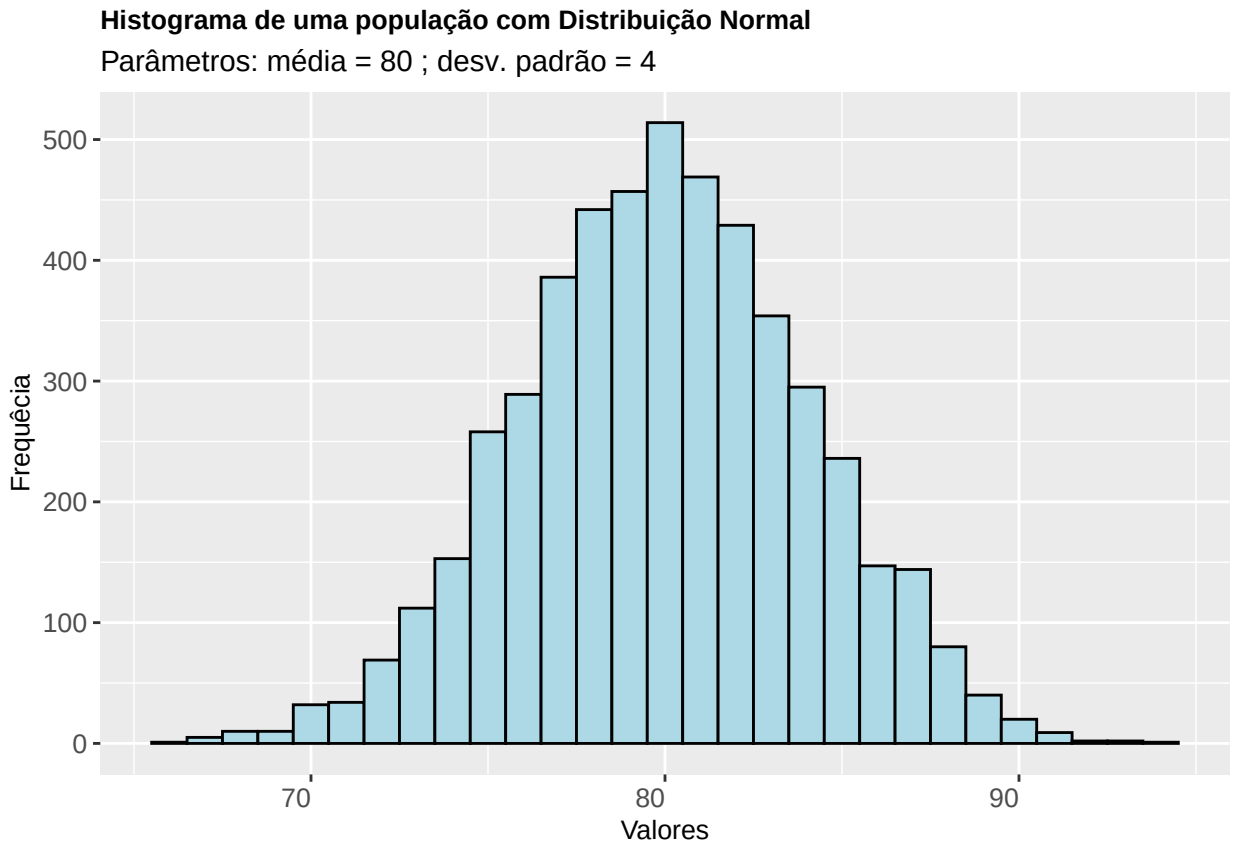


Figure 9.6: Histograma de uma população cuja característica de interesse segue uma Distribuição Normal

A Figura 9.6 mostra o histograma de uma amostra de 5000 elementos de uma população com Distribuição Normal de parâmetros média= 80 e desvio padrão =4.

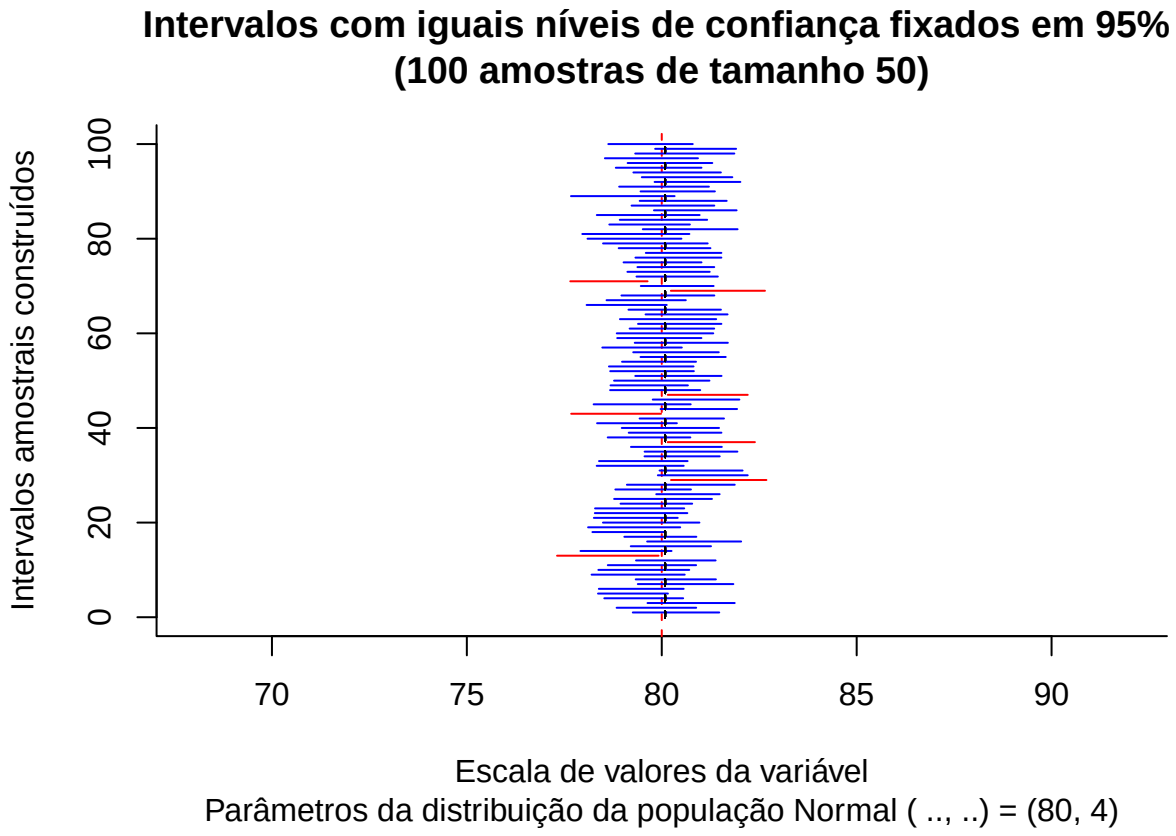


Figure 9.7: Intervalos de confiança construídos para diversas estimativas amostrais de uma população com Distribuição $\sim N(\mu;\sigma)$

A Figura 9.7 expõe os intervalos sob nível de confiança de $(1-\alpha)$=95% produzidos para as 100 médias de amostras de tamanho 50 extraídas de uma população Uniforme com parâmetros v_{max} : 6 e v_{min} : 2 e, conforme assegura o **TCL**, o valor médio das médias amostrais (linha tracejada preta) converge assintoticamente para a média da população de origem (linha tracejada em vermelho) com o incremento do tamanho das amostras.

```
meu_titulo1=paste("Distribuição das médias de", N, "amostras de tamanho n=",n,"\n população
 ↪  de origem sob Dist. Normal ( \u03bc: ", media, ", \u03c3: ", desvio, ")")
meu_titulo2=paste("As médias amostrais ~ N(
 ↪  x\u0304=",round(mean(m),2),";sd=",round(sd(m),2),")")

dados=as.data.frame(m)
ggplot(dados, aes(m)) +
  geom_histogram(aes(y = stat(density)), bins=10, fill="lightblue", col="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            args = list(mean=mean(m), sd=sd(m)),
```

```
            fill = NA,
            colour="red") +
scale_y_continuous(name="Densidade") +
scale_x_continuous(name="Valores das médias amostrais") +
labs(title=meu_titulo1)+
geom_segment(aes(x = mean(m), y = 0, xend = mean(m), yend = max(dnorm(m))), color="blue",
 ↪  lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=mean(m), y=max(dnorm(m)),
         label=meu_titulo2, angle=0, vjust=-0.5, hjust=0.5, color="blue",size=6)+
theme(plot.title = element_text(size = 10, face = "bold"),
      axis.text.x = element_text(angle=0, hjust=1, size=10),
      axis.text.y = element_text(angle=0, hjust=1, size=10),
      axis.title.x = element_text(size = 10),
      axis.title.y = element_text(size = 10))
```

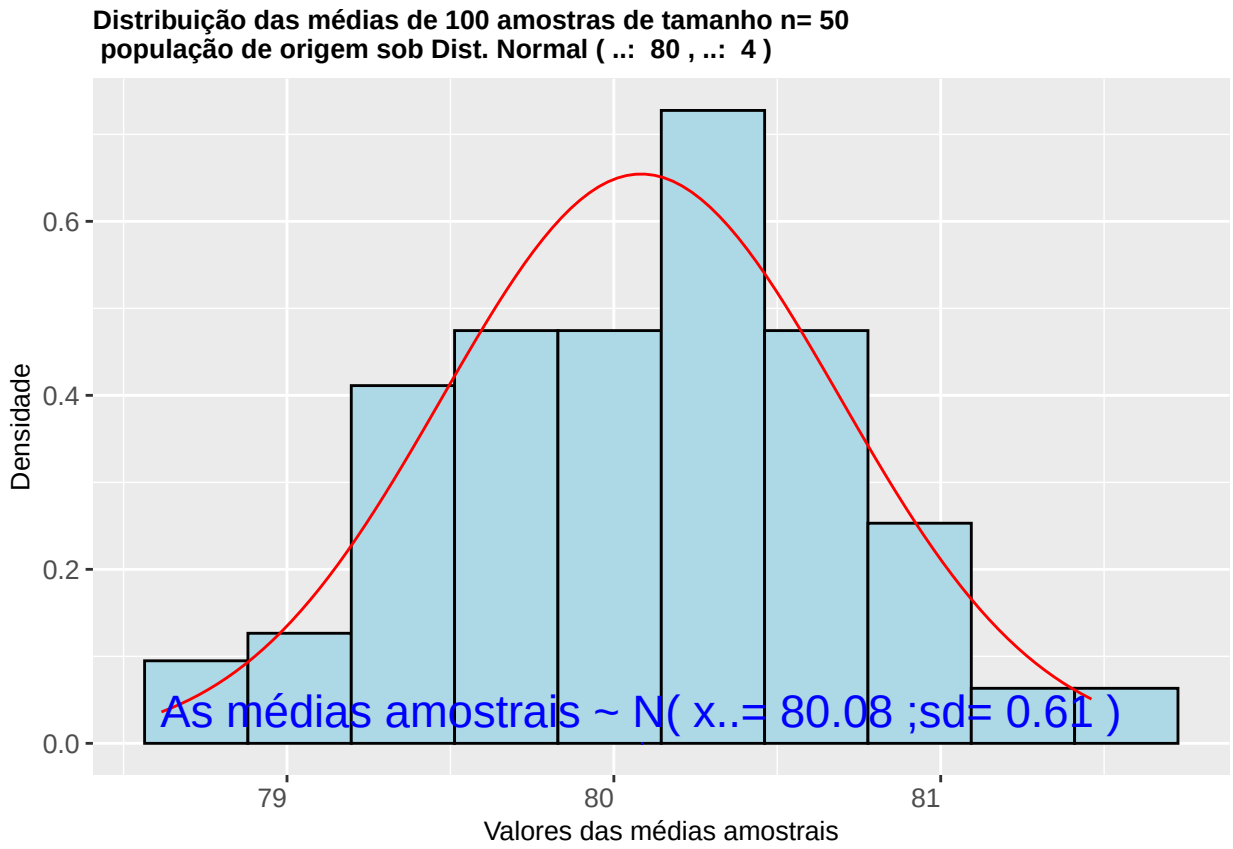


Figure 9.8: Histograma da distribuição das médias de amostras extraidas de uma população Normal mostra que as mesmas seguem uma Distribuição $\sim N(\bar{x}= \mu; s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

O histograma da Figura 9.8 ilustra que os valores das médias calculadas de 50 amostras extraídas de uma população com distribuição Normal $\sim N(\mu, \sigma)$ seguem uma distribuição Normal $\sim N(\mu = \mu; \sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Sendo o erro amostral expresso como: $\varepsilon = \bar{X} - \mu$, o histograma abaixo ilustra que os valores dos erros calculados de 50 amostras extraídas de uma população com distribuição Normal $\sim N(\mu, \sigma)$ seguem uma distribuição

Normal $\sim N(\mu = \mu; \sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

```
N=100
n=50
mu=80
sigma=4
conf=0.95
matriz=IC.Na(N, n, mu, sigma, conf)
```

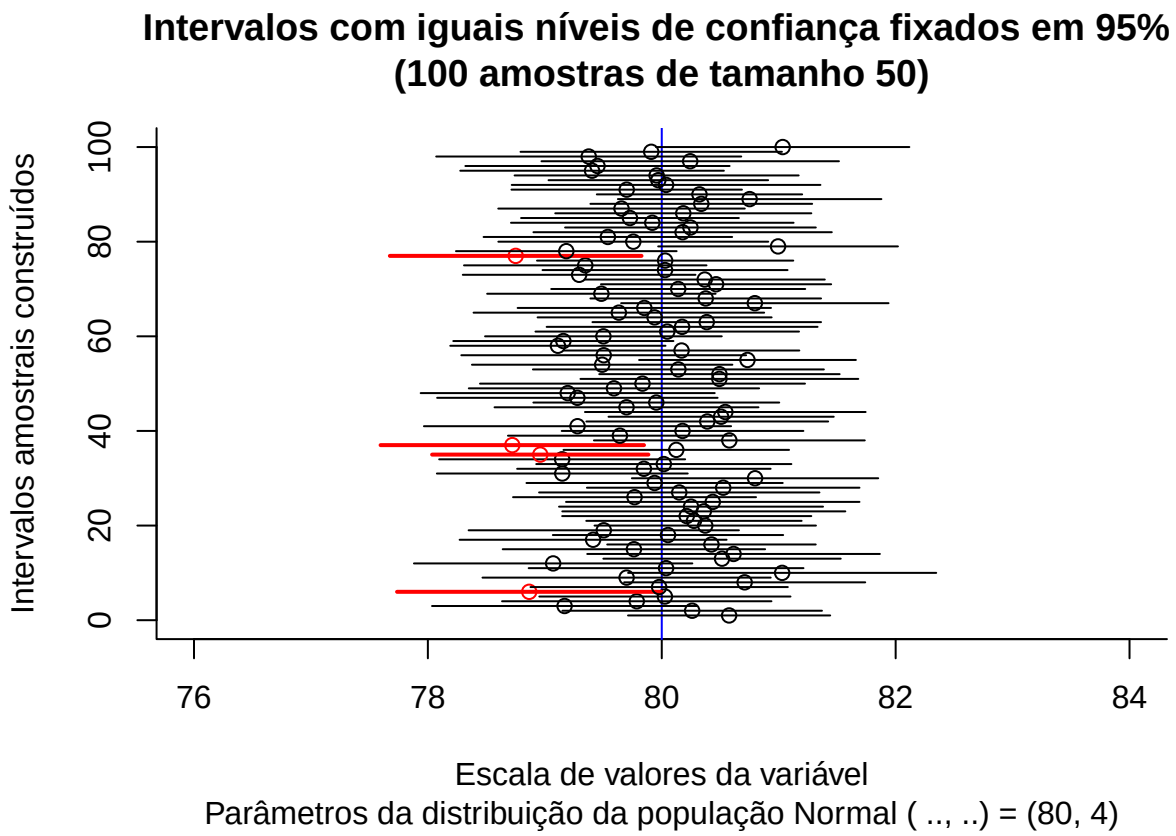


Figure 9.9: Histograma da distribuição dos erros de amostras de tamanho n, extraidas de uma população com distribuição $\sim N(\mu; \sigma)$ mostra que os mesmos seguem uma distribuição $\sim N(0; s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

```
erro_min=min(matriz$erro)
erro_max=max(matriz$erro)


meu_titulo1=paste("Distribuição dos erros de", N, "amostras de tamanho n=",n,"\n extraídas
 ↪  de uma população Normal ( \u03bc: ", mu, ", \u03c3: ", sigma, ")")
meu_titulo2=paste("Os erros amostrais ~ N( x\u0304=",round(mean(matriz$erro),2),"~0 ;
 ↪  sd=",round(sd(matriz$erro),2)," ~\u03c3/sqrt(n))")

ggplot(matriz, aes(x=erro)) +
```

```
geom_histogram(aes(y = stat(density)), bins=round(sqrt(N),0), fill="lightblue",
 ↪  col="black") +
geom_area(stat = "function",
          fun = dnorm,
          args = list(mean=mean(matriz$erro), sd=sd(matriz$erro)),
          fill = NA,
          colour="red") +
scale_y_continuous(name="Frequência") +
scale_x_continuous(name="Valores dos erros amostrais", limits=c(-2,2) )+
labs(title=meu_titulo1)+
annotate(geom="text",
         label=meu_titulo2, x=-0.7,y= 0.9,
         angle=0, vjust=-0.5, hjust=0.5,
         color="blue",size=4)+
theme(plot.title = element_text(size = 10, face = "bold"),
      axis.text.x = element_text(angle=0, hjust=1, size=10),
      axis.text.y = element_text(angle=0, hjust=1, size=10),
      axis.title.x = element_text(size = 10),
      axis.title.y = element_text(size = 10))
```

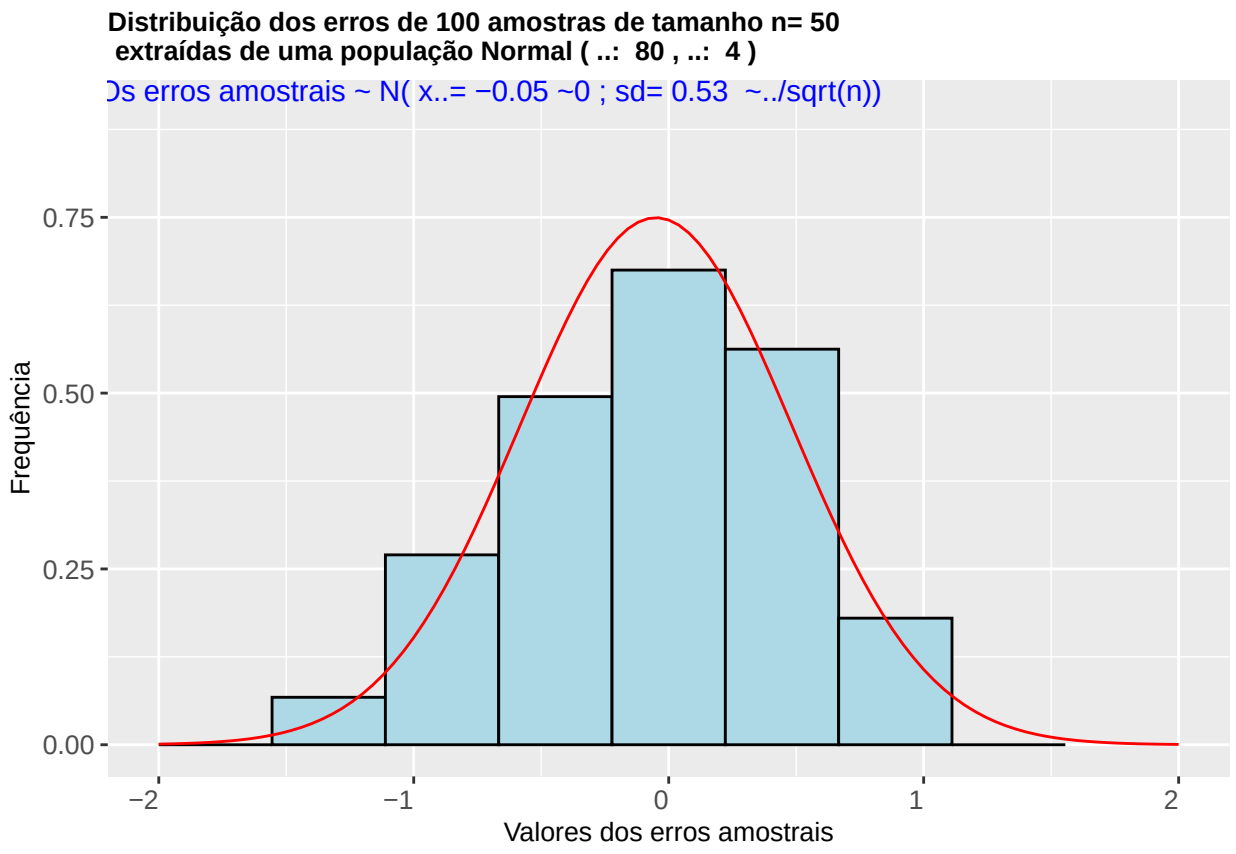


Figure 9.10: Histograma da distribuição dos erros de amostras de tamanho n, extraidas de uma população com distribuição $\sim N(\mu;\sigma)$ mostra que os mesmos seguem uma distribuição $\sim N(0; s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Corolário: se $(X_1, X_2, ..., Xn)$ for uma amostra aleatória simples da população X de média μ e

variância σ^2 conhecida, e $\bar{X}=\frac{(X_1+X_2+...+Xn)}{n}$, tal que $n \geq 30$, então a estatística Z pode ser definida, bem como sua correspondente distribuição:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Uma vez que a estatística $Z \sim N(0,1)$ (ela "decorre'' da padronização da variável aleatória $\bar{X}$) as probabilidades para os intervalos desejados de valores Z podem ser facilmente encontrados em tabelas, como mais adiante se verá na constução de intervalos de confiança.

9.3.1 Fator de correção para populações finitas

Se amostras de tamanho n *sem reposição* são extraídas de uma população finita de tamanho N aplica-se o fator de correção para populações finitas ($\sqrt{\frac{(N-n)}{(N-1)}}$) junto ao desvio padrão das expressões do erro máximo ε anteriormente expostas:

$$\begin{aligned}
\varepsilon = (\bar{x} - \mu) &= z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{(N-n)}{(N-1)}} \\
= (\bar{x} - \mu) &= z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{(N-n)}{(N-1)}} \\
= (\bar{x} - \mu) &= (t_{(1-\frac{\alpha}{2},(n-1))} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{(N-n)}{(N-1)}})
\end{aligned}$$

Portanto, para populações *finitas* com amostragem *sem reposição* (com $n < N$):

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{(N-n)}{(N-1)})$$

9.3.2 Intervalo de confiança para médias amostrais

Se, por alguma razão, a variância populacional (σ^2) é conhecida, podemos utilizar $\bar{X}$ como estimador pontual da média.

Assim, X seguirá uma distribuição Normal tal que:

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

Segue também que a estatística Z, como antes definida, seguirá uma distribuição Normal tal que:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

com:

- $\bar{X}$ é a média da amostra;
- μ é a média populacional;
- σ é o desvio padrão populacional; e,
- n é o tamanho da amostra extraída.

Entretanto, a situação mais usual é aquela na qual não termos informação alguma sobre a variância populacional (σ^2).

Nessas situações, se o tamanho da amostra é grande (na prática $n \geq 30$), podemos substituir σ na estatística Z por S: substituir o desvio padrão populacional pelo desvio padrão da amostra extraída, sem que o erro cometido com esta substituição seja grande.

Com tal substituição, a estatística Z e passa a ser tal que:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

em que:

- $\bar{X}$ é a média amostral;
- μ é a média populacional;
- S é o desvio padrão da amostra; e,
- n é o tamanho da amostra.

Caso a variância populacional (σ^2) não seja conhecida e o tamanho da amostra **não possa** ser admitido como grande ($n < 30$) e sendo o estimador da variância amostral assim definido:

$$S^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}_1 \right)^2$$

Definindo-se a variável $Y = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2}$ tem uma distribuição χ^2 com (n-1) graus de liberdade tal que:

$$Y = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)},$$

e considerando-se que Z é tal que:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

segue a estatística T e sua correspondente distribuição, denominada por t de *Student* :

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{(n-1)}}} \sim t_{(n-1)}.$$

Para essa situação na qual a variância populacional não é conhecida e o tamanho amostral é pequeno, com alguma manipulação chega-se à estatística T e sua correspondente distribuição:

$$T = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}$$

em que:

- $\bar{X}$ é a média amostral;
- μ é a média populacional;
- S é o desvio padrão da amostra; e,
- n é o tamanho da amostra; e,
- $(n-1)$ é uma quantidade denominada como *graus de liberdade*.

As probabilidades associadas a um intervalo para um determinado valor da estatística "t'' da distribuição de *Student* encontram-se tabeladas para variados graus de liberdade , como mais adiante se verá na constução de intervalos de confiança.

9.3.3 Intervalo de confiança bilateral para uma média amostral sob variância populacional conhecida (Figura 6.17)

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

em que:

- $\bar{X}$ é a média amostral;
- μ é a média populacional;
- σ é o desvio padrão populacional;
- n é o tamanho da amostra; e,
- Z é a estatística a ser calculada para a construção do intervalo de confiança sob o nível de significância α estabelecido.

```
alfa=0.05

prob_desejada1=alfa/2
z_desejado1=round(qnorm(prob_desejada1),4)
d_desejada1=dnorm(z_desejado1, 0, 1)

prob_desejada2=1-alfa/2
z_desejado2=round(qnorm(prob_desejada2),4)
d_desejada2=dnorm(z_desejado2, 0, 1)



ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(-4, z_desejado1),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(z_desejado1,0),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(0, z_desejado2),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(z_desejado2,4),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores ``z'' da distribuição Normal padrão")  +
  labs(title=
         "Curva da função densidade \nDistribuição Normal Padrão",
       subtitle = "P(-z, z)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança) \nP(-\U221e; -z)= P(z;
        ↪  \U221e)= \u03b1/2 em vermelho ")+
  geom_segment(aes(x = z_desejado1, y = 0, xend = z_desejado1, yend = d_desejada1),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  geom_segment(aes(x = z_desejado2, y = 0, xend = z_desejado2, yend = d_desejada2),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado1-0.1, y=d_desejada1, label="-z", angle=90, vjust=0,
   ↪  hjust=0, color="blue",size=6)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado2+0.3, y=d_desejada2, label="z", angle=90, vjust=0,
   ↪  hjust=0, color="blue",size=6)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado1-1.8, y=0.1, label="Intervalo aberto à esq.
   ↪  \n(probabilidade=\u03b1/2)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado2+0.5, y=0.1, label="Intervalo aberto à dir.
   ↪  \n(probabilidade=\u03b1/2)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado1+1.3, y=0.2, label="Intervalo fechado \n(probabilidade=
   ↪  (1-\u03b1))", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
```

```
theme_bw()
```

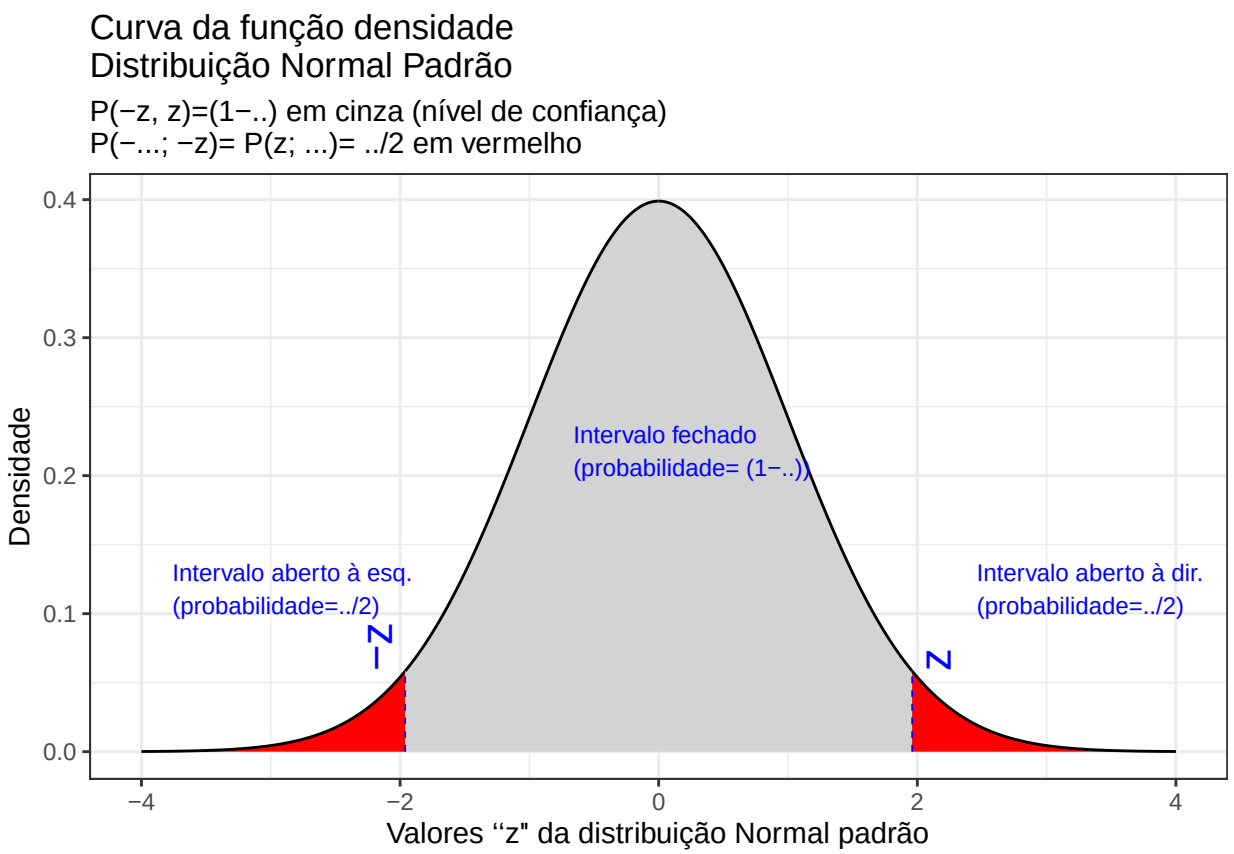


Figure 9.11: Regiões críticas, aquém e além das quais, a probabilidade associada aos valores Z é inferior a $\frac{\alpha}{2}$, estabelecendo assim um intervalo com nível de confiança igual a $(1-\alpha)$

Na Figura 9.11 observa-se:

- o nível de significância α;
- o nível de confiança $(1-\alpha)$; e,
- o valor tabelado da estatística $Z(z)$ para o nível de confiança fixado.

Assim,

$$P\left[-Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \leq Z \leq Z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\right] = (1-\alpha)$$
$$P\left[-z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\right] = (1-\alpha)$$
$$P[\bar{x} - (z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \leq \mu \leq \bar{x} + (z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})] = (1-\alpha)$$

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)} = [\bar{x} \pm z_c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

Assim, se $\bar{x}$ é usado como estimativa de μ, podemos afirmar estar $100.(1-\alpha)\%$ confiantes de que o erro não excederá $(z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

A quantidade $\varepsilon = (\bar{x} - \mu) = z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ é chamada de Erro máximo da estimativa ao se arbitrar um nível de confiança α para um determinado tamanho amostral.

Exemplo: As vendas de 15 lojas de uma região do país apresentam uma média igual a US$ 20.000,00. Sabendo-se que as vendas de todas as lojas da região é uma variável aleatória que segue uma distribuição Normal, com desvio padrão igual a US$ 8.300,00, construa o intervalo de confiança para a média ao nível de confiança de 95%.

Dados do problema:

- o tamanho da amostra: $n = 15$;
- a média amostral: $\bar{x} =$ US$ 20.000;
- o desvio padrão populacional: $\sigma=$ US$ 8.300;
- nível de confiança: $(1-\alpha) = 0,95$; e,
- valor extraído da tabela $z = 1,96$ correspondente ao nível de confiança estipulado $(1-\alpha) = 95\%$.

$$P[\bar{x} - (z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \leq \mu \leq \bar{x} + (z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})] = (1-\alpha)$$
$$P[20.000 - (1,96 \cdot \frac{8.300}{\sqrt{15}}) \leq \mu \leq 20000 + (1,96 \cdot \frac{8.300}{\sqrt{15}})] = 0,95$$
$$P[20.000 - 4.200,38 \leq \mu \leq 20.000 + 4.200,38] = 0,95$$

$$IC_{(1-\alpha=0,95)} = [US\$15.799,62; US\$24.200,38]$$

Se quisermos ser rigorosos na interpretação do intervalo de confiança calculado podemos explicar que, se extrairmos um grande número de amostras de tamanho 15 dessa população, e para todas elas calcularmos intervalos de confiança como o acima definido, a proporção desses intervalos onde poderemos encontrar a média populacional de vendas será de 0,95 (95 intervalos em 100).

De uma forma mais sintética, podemos afirmar que o intervalo aleatório]US$ 15.799,62; US$ 24.200,38[, é um intervalo de confiança a 95% para a média de vendas.

De forma mais corrente, *embora menos correta* em termos teóricos, é usual afirmar que, com 95% de confiança a média de vendas se situa entre os valores US$ 15.799,62 e US$ 24.200,38.

Intervalos de confiança unilaterais para uma média amostral sob variância populacional conhecida.

A Figura 6.18 ilustra um intervalo de confiança unilateral limitado à direita por um valor máximo, dde tal sorte que a probabilidade associada ao intervalo de valores da estatística Z inferiores a esse limitante é

$$P\left[\mu \leq \bar{x} + z_c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = (1-\alpha)$$

```
prob_desejada=0.95
z_desejado=round(qnorm(prob_desejada),4)
d_desejada=dnorm(z_desejado, 0, 1)

ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(-4, 0),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores ``z'' da distribuição Normal padrão")  +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
```

```
          fill = "lightgrey",
          xlim = c(0, z_desejado),
          colour="black")+
geom_area(stat = "function",
          fun = dnorm,
          fill = "red",
          xlim = c( z_desejado, 4),
          colour="black")+
labs(title=
    "Curva da função densidade
    \nDistribuição Normal Padrão",
    subtitle = "P(-\U221e; z)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança)  \nP(z, + \U221e)=
     ↪  \u03b1, em vermelho ")+
annotate(geom="text", x=z_desejado1+3.5, y=d_desejada1, label="z", angle=90, vjust=0,
 ↪  hjust=0, color="blue",size=6)+
annotate(geom="text", x=z_desejado1+4.5, y=0.1, label="Intervalo aberto à dir.
 ↪  \n(probabilidade=\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado1+1.3, y=0.2, label="Intervalo aberto à esq.
 ↪  \n(probabilidade= (1-\u03b1))", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
theme_bw()
```

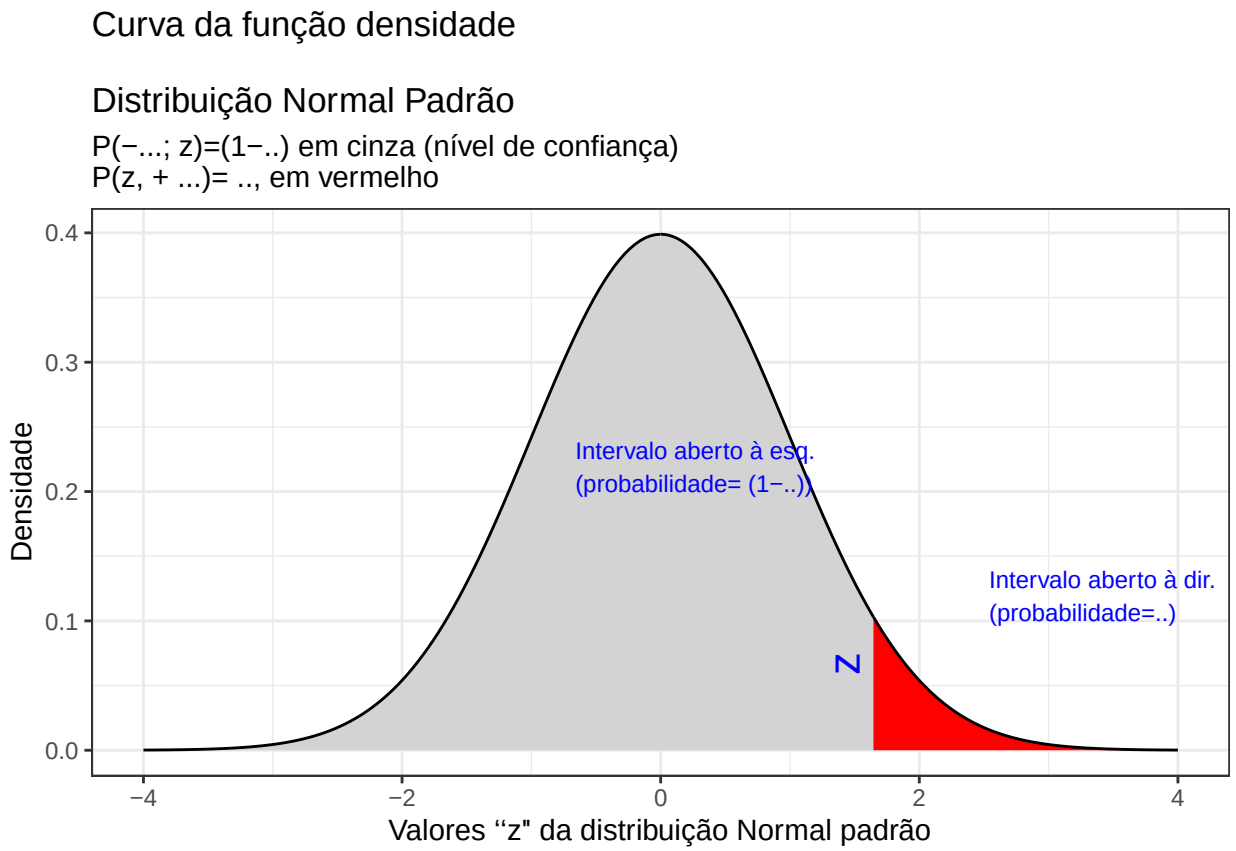


Figure 9.12: Região crítica, além da qual, a probabilidade associada aos valores Z é inferior a α, delimitando assim, à esquerda, um intervalo aberto com nível de confiança igual a $(1-\alpha)$

A Figura 9.13 ilustra um intervalo de confiança unilateral limitado à esquerda por um valor mínimo, de tal sorte

que a probabilidade associada ao intervalo de valores da estatística Z superiores a esse limitante é

$$P\left[\mu \geq \bar{x} - z_c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = (1-\alpha)$$

```
prob_desejada=0.05
z_desejado=round(qnorm(prob_desejada),4)
d_desejada=dnorm(z_desejado, 0, 1)

ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(-4, 0),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores ``z'' da distribuição Normal padrão")  +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(-4, z_desejado),
            colour="black")+
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c( z_desejado, 4),
            colour="black")+
  labs(title=
      "Curva da função densidade
      \nDistribuição Normal Padrão",
      subtitle = "P(-\U221e; z)=\u03b1, em vermelho \nP(z, + \U221e)= (1-\u03b1) em cinza")+
  annotate(geom="text", x=z_desejado1+0.5, y=d_desejada1, label="-z", angle=90, vjust=0,
   ↪  hjust=0, color="blue",size=6)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado1-2, y=0.1, label="Intervalo aberto à esq.
   ↪  \n(probabilidade=\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado1+1.3, y=0.2, label="Intervalo aberto à dir.
   ↪  \n(probabilidade= (1-\u03b1))", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  theme_bw()
```

9.3.4 Intervalo de confiança para uma média amostral sob variância populacional desconhecida mas amostras não tão pequenas: $n \geq 30$ (Figura 9.14)

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

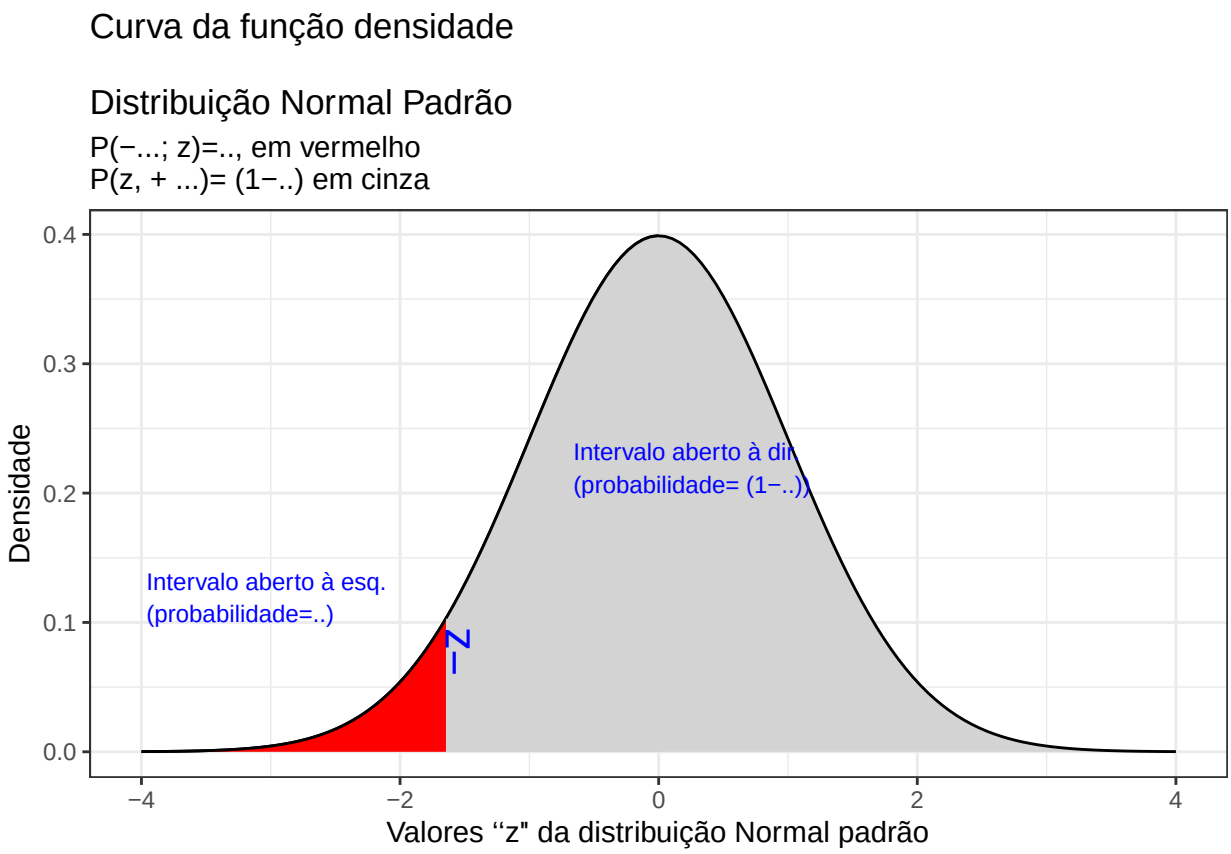


Figure 9.13: Região crítica, aquém da qual, a probabilidade associada aos valores Z é inferior a α, delimitando assim, à direita, um intervalo aberto com nível de confiança igual a $(1-\alpha)$

em que:

- $\bar{X}$ é a média amostral;
- μ é a média populacional;
- S é o desvio padrão amostral;
- n é o tamanho da amostra; e,
- Z é a estatística a ser calculada para a construção do intervalo de confiança sob o nível de significância α estabelecido.

```
alfa=0.05

prob_desejada1=alfa/2
z_desejado1=round(qnorm(prob_desejada1),4)
d_desejada1=dnorm(z_desejado1, 0, 1)

prob_desejada2=1-alfa/2
z_desejado2=round(qnorm(prob_desejada2),4)
d_desejada2=dnorm(z_desejado2, 0, 1)




ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(-4, z_desejado1),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(z_desejado1,0),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(0, z_desejado2),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(z_desejado2,4),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores ``z'' da distribuição Normal padrão")  +
  labs(title=
         "Curva da função densidade \nDistribuição Normal Padrão",
       subtitle = "P(-z; z)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança) \nP(-\U221e; -z)= P(z;
        ↪  \U221e)= \u03b1/2 em vermelho")+
```

```
geom_segment(aes(x = z_desejado1, y = 0, xend = z_desejado1, yend = d_desejada1),
 ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
geom_segment(aes(x = z_desejado2, y = 0, xend = z_desejado2, yend = d_desejada2),
 ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado1-0.1, y=d_desejada1, label="-z", angle=90, vjust=0,
 ↪  hjust=0, color="blue",size=6)+
annotate(geom="text", x=z_desejado2+0.3, y=d_desejada2, label="z", angle=90, vjust=0,
 ↪  hjust=0, color="blue",size=6)+
annotate(geom="text", x=z_desejado1-1.8, y=0.1, label="Intervalo aberto à esq.
 ↪  \n(probabilidade=\u03b1/2)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado2+0.5, y=0.1, label="Intervalo aberto à dir.
 ↪  \n(probabilidade=\u03b1/2)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado1+1.3, y=0.2, label="Intervalo fechado \n(probabilidade=
 ↪  (1-\u03b1))", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
theme_bw()
```

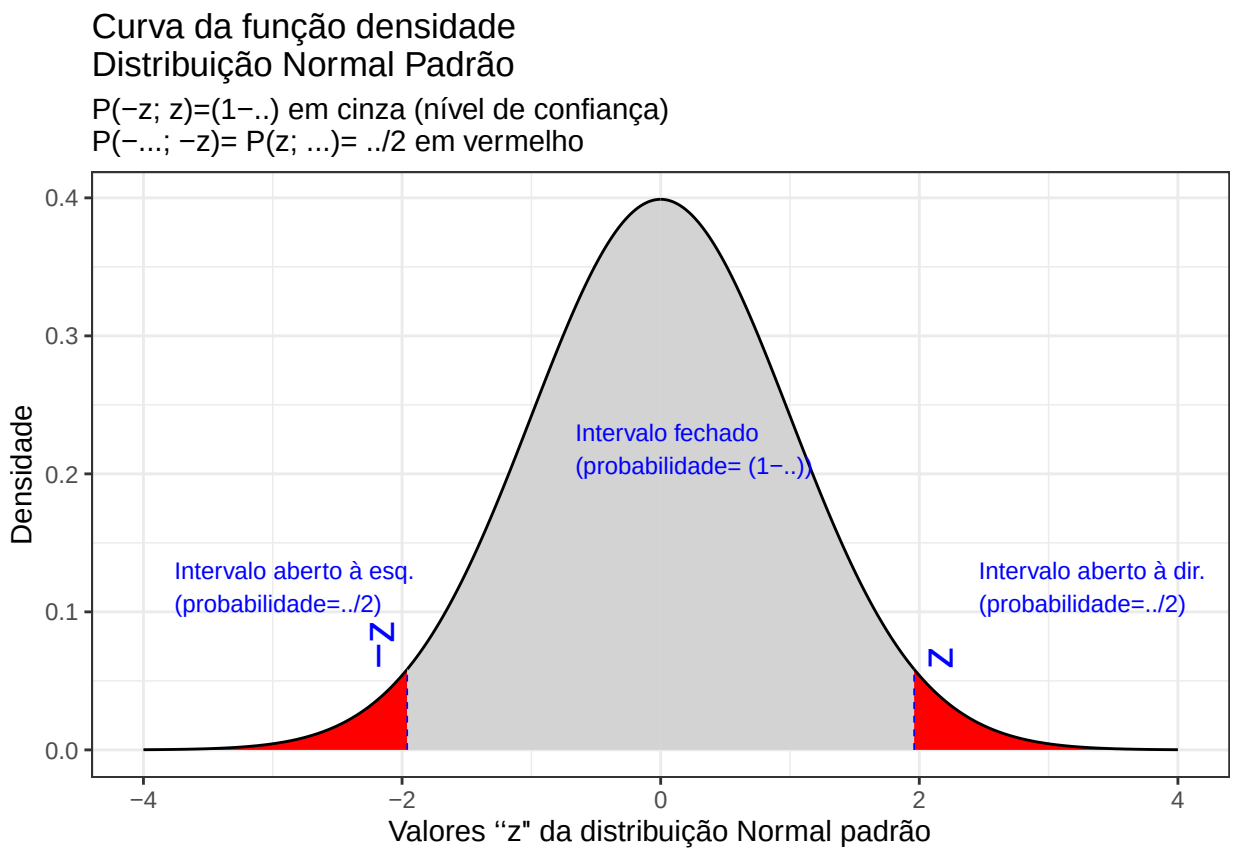


Figure 9.14: Regiões críticas, aquém e além das quais, a probabilidade associada aos valores Z é inferior a $\frac{\alpha}{2}$, estabelecendo assim um intervalo com nível de confiança igual a $(1-\alpha)$

Na Figura 9.14 observa-se:

- o nível de significância α;

- o nível de confiança $(1-\alpha)$; e,
- o valor tabelado da estatística $Z(z)$ para o nível de confiança fixado.

Assim,

$$P\left[-Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \leq Z \leq Z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\right] = (1-\alpha)$$
$$P\left[-z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \leq \frac{\bar{x}-\mu}{(\frac{S}{\sqrt{n}})} \leq z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\right] = (1-\alpha)$$
$$P[\bar{x}-(z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}) \leq \mu \leq \bar{x}+(z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})] = (1-\alpha)$$

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)} = [\bar{x} \pm z_c \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}]$$

Assim, se $\bar{x}$ é usado como estimativa de μ podemos afirmar estar $100(1-\alpha)\%$ confiantes de que o erro não excederá $(z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})$.

A quantidade $\varepsilon = (\bar{x}-\mu) = z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ é chamada de Erro máximo da estimativa ao se arbitrar um nível de confiança α para um determinado tamanho amostral.

Exemplo: As vendas de 60 lojas de uma região do país apresentam uma média igual a US$ 20.000,00 e desvio padrão de US$ 8.300,00. Construa o intervalo de confiança para a média ao nível de confiança de 95%.

Dados do problema:

- o tamanho da amostra: $n = 60$;
- a média amostral: $\bar{x}= US\$20.000$;
- o desvio padrão amostral: $s = US\$8.300$;
- nível de confiança: $(1-\alpha) = 0,95$; e,
- valor extraído da tabela $z = 1,96$ correspondente ao nível de confiança estipulado $(1-\alpha) = 95\%$.

$$P[\bar{x} - (z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}) \leq \mu \leq \bar{x} + (z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})] = (1-\alpha)$$
$$P[20.000 - (1,96 \cdot \frac{8.300}{\sqrt{60}}) \leq \mu \leq 20.000 + (1,96 \cdot \frac{8.300}{\sqrt{60}})] = 0,95$$
$$P[20.000 - 2.100,19 \leq \mu \leq 20.000 + 2.100,19] = 0,95$$

$$IC_{(1-\alpha=0,95)} = [US\$17.899,81; US\$22.100,19]$$

Se quisermos ser rigorosos na interpretação do intervalo de confiança calculado podemos explicar que se extrairmos um grande número de amostras de tamanho 60 dessa população, e para todas elas calcularmos intervalos de confiança como o acima definido, a proporção desses intervalos onde poderemos encontrar a média populacional de vendas será de 0,95 (95 intervalos em 100).

De uma forma mais sintética, podemos afirmar que o intervalo aleatório]US$ 17.899,81; US$ 22.100,19[, é um intervalo de confiança a 95% para a média de vendas.

De forma mais corrente, *embora menos correta* em termos teóricos, é usual afirmar que, com 95% de confiança a média de vendas se situa entre os valores US$ 17.899,81 e US$ 22.100,19.

Intervalos de confiança unilaterais para uma média amostral sob variância populacional desconhecida mas amostras não tão pequenas: $n \geq 30$.

A Figura 9.15 ilustra um intervalo de confiança unilateral limitado à direita por um valor máximo, de tal sorte que a probabilidade associada ao intervalo de valores da estatística Z inferiores a esse limitante é

$$P\left[\mu \leq \bar{x} + z_c \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = (1-\alpha)$$

```
prob_desejada=0.95
z_desejado=round(qnorm(prob_desejada),4)
d_desejada=dnorm(z_desejado, 0, 1)

ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(-4, 0),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores ``z'' da distribuição Normal padrão")  +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(0, z_desejado),
            colour="black")+
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c( z_desejado, 4),
            colour="black")+
  labs(title=
      "Curva da função densidade
      \nDistribuição Normal Padrão",
      subtitle = "P(-\U221e; z)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança)  \nP(z, + \U221e)=
       ↪  \u03b1, em vermelho ")+
  annotate(geom="text", x=z_desejado1+3.5, y=d_desejada1, label="z", angle=90, vjust=0,
   ↪  hjust=0, color="blue",size=6)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado1+4.5, y=0.1, label="Intervalo aberto à dir.
   ↪  \n(probabilidade=\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado1+1.3, y=0.2, label="Intervalo aberto à esq.
   ↪  \n(probabilidade= (1-\u03b1))", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  theme_bw()
```

A Figura 9.16 ilustra um intervalo de confiança unilateral limitado à esquerda por um valor mínimo, de tal sorte que a probabilidade associada ao intervalo de valores da estatística Z superiores a esse limitante é

$$P\left[\mu \geq \bar{x} - z_c \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = (1-\alpha)$$

```
prob_desejada=0.05
z_desejado=round(qnorm(prob_desejada),4)
d_desejada=dnorm(z_desejado, 0, 1)

ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
```

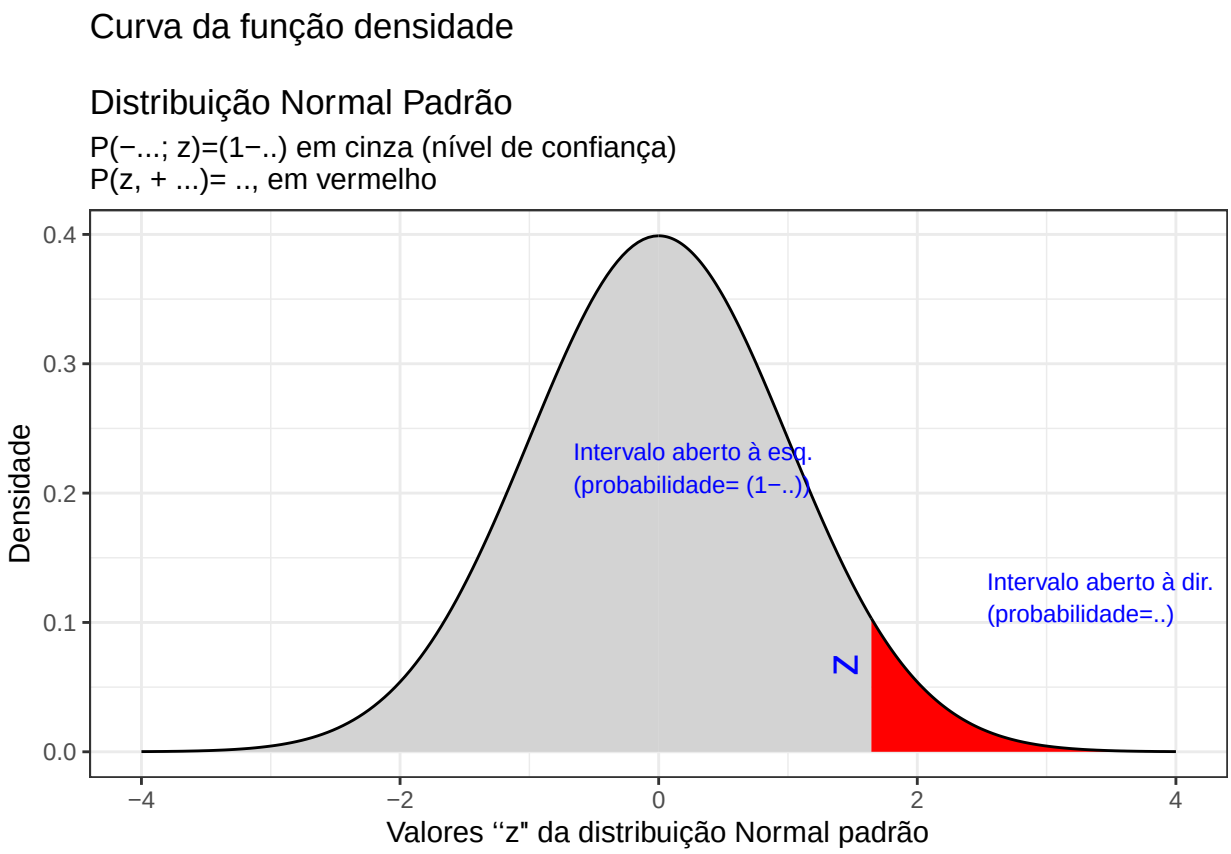


Figure 9.15: Região crítica, além da qual, a probabilidade associada aos valores Z é inferior a α, delimitando assim, à esquerda, um intervalo aberto com nível de confiança igual a $(1-\alpha)$

```
          fun = dnorm,
          fill = "lightgrey",
          xlim = c(-4, 0),
          colour="black") +
scale_y_continuous(name="Densidade") +
scale_x_continuous(name="Valores ``z'' da distribuição Normal padrão")  +
geom_area(stat = "function",
          fun = dnorm,
          fill = "red",
          xlim = c(-4, z_desejado),
          colour="black")+
geom_area(stat = "function",
          fun = dnorm,
          fill = "lightgrey",
          xlim = c( z_desejado, 4),
          colour="black")+
labs(title=
    "Curva da função densidade
    \nDistribuição Normal Padrão",
    subtitle = "P(-\U221e; z)=\u03b1, em vermelho \nP(z, + \U221e)= (1-\u03b1) em cinza")+
annotate(geom="text", x=z_desejado1+0.5, y=d_desejada1, label="-z", angle=90, vjust=0,
 ↪  hjust=0, color="blue",size=6)+
annotate(geom="text", x=z_desejado1-1.5, y=0.1, label="Intervalo aberto à esq.
 ↪  \n(probabilidade=\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado1+1.3, y=0.2, label="Intervalo aberto à dir.
 ↪  \n(probabilidade= (1-\u03b1))", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
theme_bw()
```

9.3.5 Intervalo de confiança para uma média amostral sob variância populacional desconhecida e amostras de qualquer tamanho (Figura 9.17)

$$T = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}$$

em que:

- $\bar{X}$ é a média amostral;
- μ é a média populacional;
- S é o desvio padrão amostral;
- n é o tamanho da amostra; e,
- T é a estatística a ser calculada para a construção do intervalo de confiança sob o nível de significância α estabelecido.

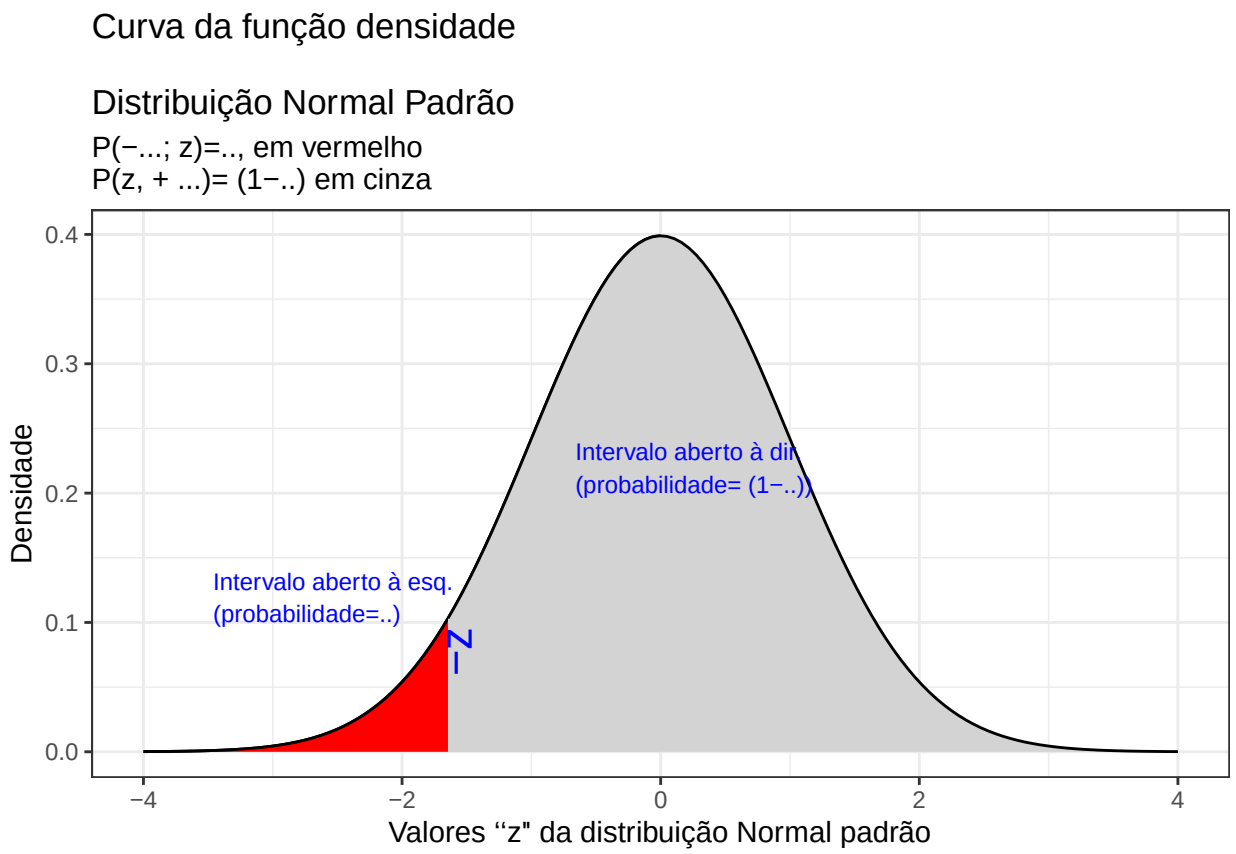


Figure 9.16: Região crítica, aquém da qual, a probabilidade associada aos valores Z é inferior a α, delimitando assim, à direita, um intervalo aberto com nível de confiança igual a $(1-\alpha)$

```
alfa=0.05

prob_desejada1=alfa/2
df=20
t_desejado1=round(qt(prob_desejada1,df ),4)
d_desejada1=dt(t_desejado1,df)

prob_desejada2=1-alfa/2
df=20
t_desejado2=round(qt(prob_desejada2, df),4)
d_desejada2=dt(t_desejado2,df)



ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "red",
            xlim = c(-4, t_desejado1),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(t_desejado1,0),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(0, t_desejado2),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "red",
            xlim = c(t_desejado2,4),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores ``t'' da distribuição de Student com gl=n-1")  +
  labs(title= "Curva da função densidade \nDistribuição t ",
       subtitle = "P(-t; t)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança) \nP(-\U221e; -t)= P(t;
        ↪  \U221e)= \u03b1/2 em vermelho ")+
  geom_segment(aes(x = t_desejado1, y = 0, xend = t_desejado1, yend = d_desejada1),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  geom_segment(aes(x = t_desejado2, y = 0, xend = t_desejado2, yend = d_desejada2),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=t_desejado1-0.1, y=d_desejada1, label="-t", angle=90, vjust=0,
   ↪  hjust=0, color="blue",size=6)+
  annotate(geom="text", x=t_desejado2+0.3, y=d_desejada2, label="t", angle=90, vjust=0,
   ↪  hjust=0, color="blue",size=6)+
  annotate(geom="text", x=t_desejado1-1.8, y=0.1, label="Intervalo aberto à esq.
   ↪  \n(probabilidade=\u03b1/2)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=t_desejado2+0.5, y=0.1, label="Intervalo aberto à dir.
   ↪  \n(probabilidade=\u03b1/2)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
```

```
annotate(geom="text", x=t_desejado1+1.3, y=0.2, label="Intervalo fechado \n(probabilidade=
↪  (1-\u03b1))", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+  theme_bw()
```

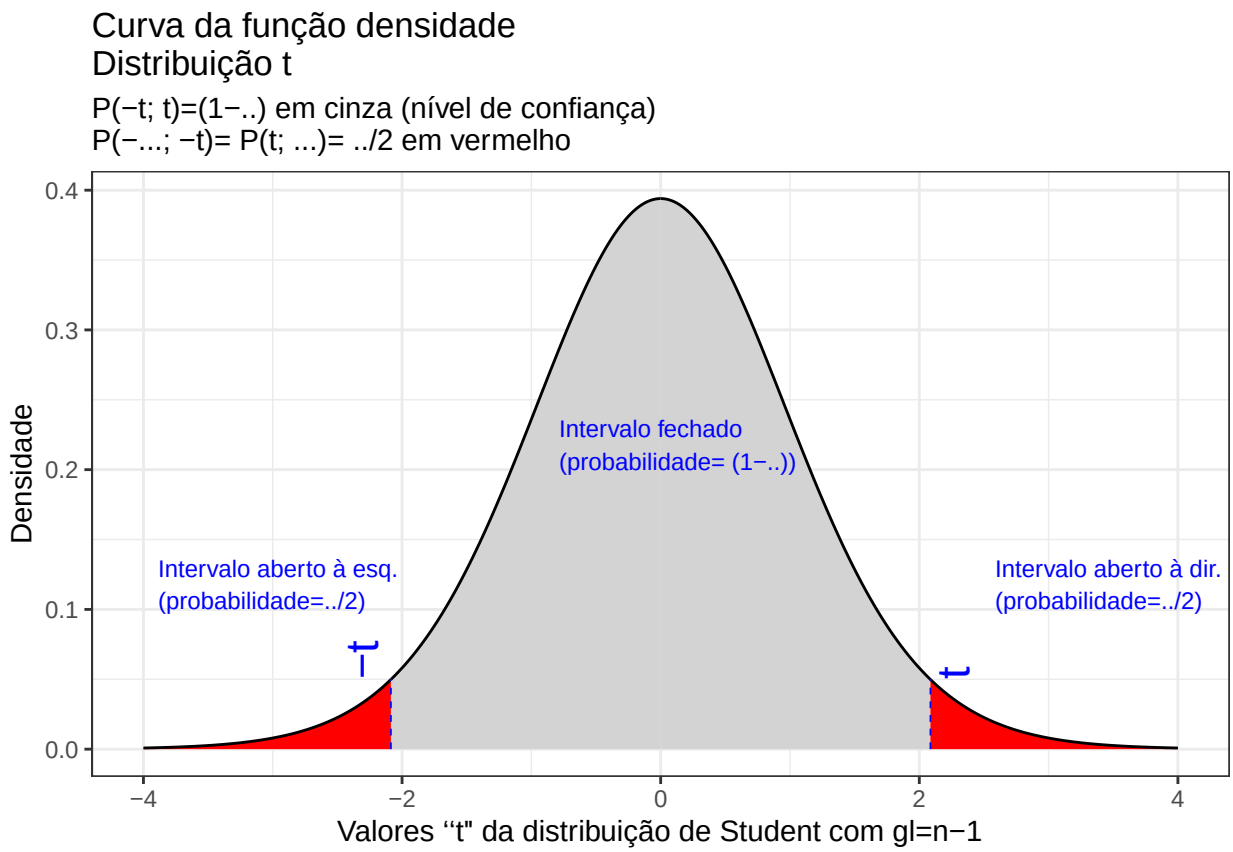


Figure 9.17: Regiões críticas, aquém e além das quais, a probabilidade associada aos valores T ($(n-1)$ graus de liberdade) é inferior a $\frac{\alpha}{2}$, estabelecendo assim um intervalo com nível de confiança igual a $(1-\alpha)$

Na Figura 9.17 observa-se:

- o nível de significância α;
- o nível de confiança $(1-\alpha)$; e,
- o valor tabelado da estatística $T(t)$ sob $n-1$ graus de liberdade para o nível de confiança fixado.

Assim,

$$P\left[-T_{(1-\frac{\alpha}{2},(n-1))} \leq T \leq T_{(1-\frac{\alpha}{2},(n-1))}\right] = (1-\alpha)$$
$$P\left[-t_{(1-\frac{\alpha}{2},(n-1))} \leq \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq t_{(1-\frac{\alpha}{2},(n-1))}\right] = (1-\alpha)$$
$$P[\bar{x}-(t_{(1-\frac{\alpha}{2},(n-1))} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}) \leq \mu \leq \bar{x}+(t_{(1-\frac{\alpha}{2},(n-1))} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})] = (1-\alpha)$$

$$IC(\mu)_{(1-\alpha)} = [\bar{x} \pm t_{c_{(n-1)}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}]$$

Assim, se $\bar{x}$ é usado como estimativa de μ podemos afirmar estar $100(1-\alpha)\%$ confiantes de que o erro não excederá $(t_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})$.

A quantidade $\varepsilon = (\bar{x}-\mu) = (t_{(1-\frac{\alpha}{2},(n-1))} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})$ é chamada de Erro máximo da estimativa ao se arbitrar um nível de confiança α, (n-1) graus de liberdade e um determinado tamanho amostral.

Exemplo: As vendas de 15 lojas de uma região do país apresentam uma média igual a US$ 20.000,00 e desvio padrão de US$ 8.300,00. Construa o intervalo de confiança para a média ao nível de confiança de 95%.

Dados do problema:

- o tamanho da amostra: $n = 15$;
- a média amostral: $\bar{x}= US\$20.000$;
- o desvio padrão amostral: $s = US\$8.300$;
- nível de confiança: $(1-\alpha) = 0,95$; e,
- valor extraído da tabela da distribuição de *Student* sob $(n-1 = 15-1 = 14)$ graus de liberdade $t_c = 2,1448$ associado ao nível de confiança estipulado $(1-\alpha) = 95\%$.

$$P[\bar{x}-(t_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}) \leq \mu \leq \bar{x}+(t_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})] = (1-\alpha)$$
$$P[20000-(2,1448 \cdot \frac{8300}{\sqrt{15}}) \leq \mu \leq 20000+(2,1448 \cdot \frac{8300}{\sqrt{15}})] = 0,95$$
$$P[20000-4596,41 \leq \mu \leq 20000+4596,41] = 0,95$$

$$IC_{(1-\alpha=0,95)} = [US\$15403,59; US\$24496,41]$$

Se quisermos ser rigorosos na interpretação do intervalo de confiança calculado podemos explicar que se extrairmos um grande número de amostras de tamanho 15 dessa população, e para todas elas calcularmos intervalos de confiança como o acima definido, a proporção desses intervalos onde poderemos encontrar a média populacional de vendas será de 0,95 (95 intervalos em 100).

De uma forma mais sintética, podemos afirmar que o intervalo aleatório]US$ 15.403,59; US$ 24.496,41[, é um intervalo de confiança a 95% para a média de vendas.

De uma forma mais corrente, *embora menos correta* em termos teóricos, é usual afirmar que, com 95% de confiança a média de vendas se situa entre os valores US$ 15.403,59 e US$ 24.496,41.

Intervalos de confiança unilaterais para uma média amostral sob variância populacional desconhecida e amostras de qualquer tamanho

A Figura 9.18 ilustra um intervalo de confiança unilateral limitado à direita por um valor máximo, de tal sorte que a probabilidade associada ao intervalo de valores da estatística T inferiores a esse limitante é

$$P\left[\mu \leq \bar{x} + t_{c_{(n-1)}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = (1-\alpha)$$

```
alfa=0.95
prob_desejada1=alfa
df=20
t_desejado1=round(qt(prob_desejada1,df ),4)
d_desejada1=dt(t_desejado1,df)

ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "red",
            xlim = c( t_desejado1, 4),
            colour="black") +
```

```
geom_area(stat = "function",
          fun = dt,
          args=list(df),
          fill = "lightgrey",
          xlim = c(0, t_desejado1),
          colour="black") +
geom_area(stat = "function",
          fun = dt,
          args=list(df),
          fill = "lightgrey",
          xlim = c(-4, 0),
          colour="black") +
scale_y_continuous(name="Densidade") +
scale_x_continuous(name="Valores ``t'' da distribuição de Student com gl=n-1")  +
labs(title= "Curva da função densidade \nDistribuição t ",
     subtitle = "P(-\U221e, t)=(1-\u03b1) em cinza \nP(t, \U221e)= \u03b1 em vermelho ")+
geom_segment(aes(x = t_desejado1, y = 0, xend = t_desejado1, yend = d_desejada1),
 ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=t_desejado1+0.5, y=d_desejada1, label="t", angle=90, vjust=0,
 ↪  hjust=0, color="blue",size=6)+
annotate(geom="text", x=t_desejado1+1, y=0.1, label="Intervalo aberto à esq.
 ↪  \n(probabilidade=\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=t_desejado1-2.5, y=0.2, label="Intervalo aberto \n(probabilidade=
 ↪  (1-\u03b1))", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+  theme_bw()
```

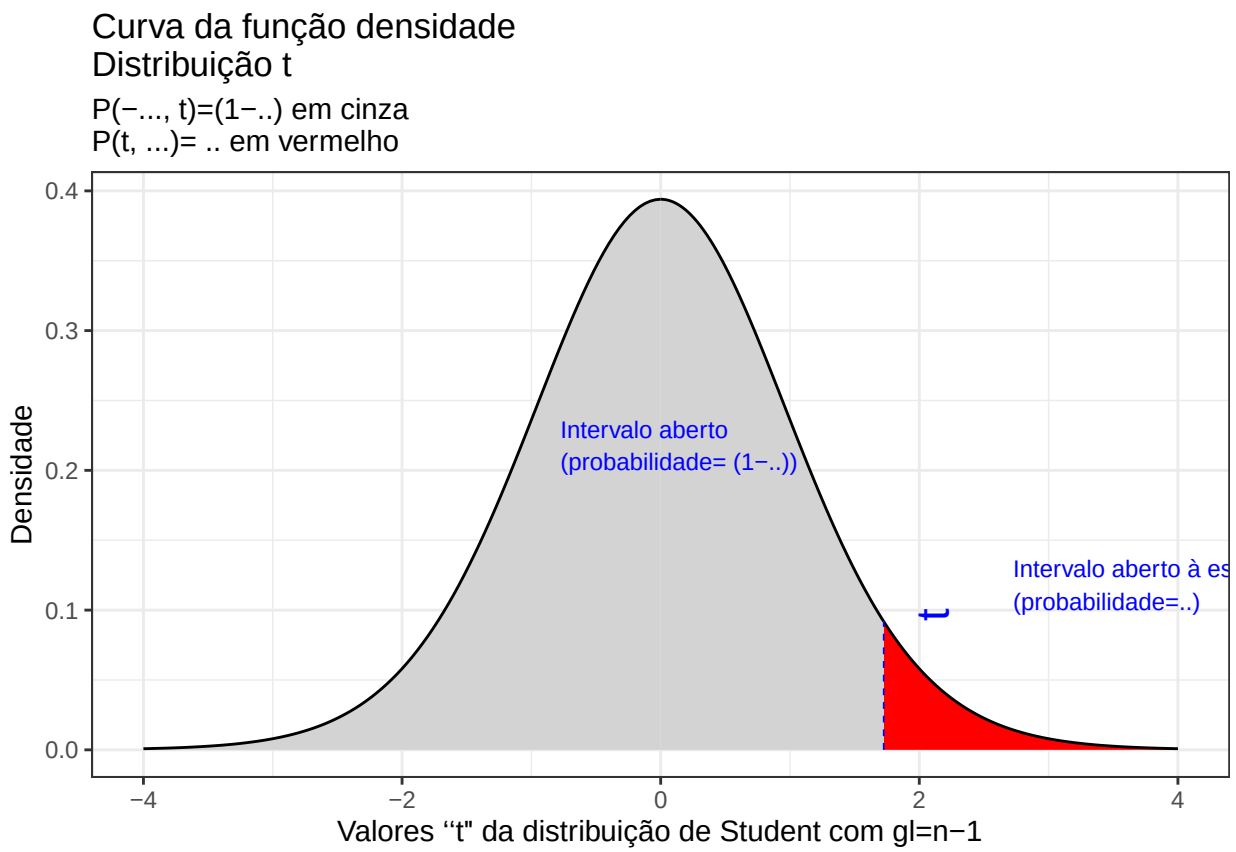


Figure 9.18: Região crítica, além da qual, a probabilidade associada aos valores T ($(n-1)$ graus de liberdade) é inferior a α, delimitando assim, à esquerda, um intervalo aberto com nível de confiança igual a $(1-\alpha)$

A Figura 9.19 ilustra um intervalo de confiança unilateral limitado à esquerda por um valor mínimo, de tal sorte que a probabilidade associada ao intervalo de valores da estatística T superiores a esse limitante é

$$P\left[\mu \geq \bar{x} - t_c \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = (1-\alpha)$$

```
alfa=0.05
prob_desejada1=alfa
df=20
t_desejado1=round(qt(prob_desejada1,df ),4)
d_desejada1=dt(t_desejado1,df)


ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "red",
            xlim = c(-4, t_desejado1),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(t_desejado1,0),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(0, 4),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores ``t'' da distribuição de Student com gl=n-1")  +
  labs(title= "Curva da função densidade \nDistribuição t ",
       subtitle = "P(-t, \U221e)=(1-\u03b1) em cinza \nP(-\U221e; -t)= \u03b1 em vermelho
        ↪  ")+
  geom_segment(aes(x = t_desejado1, y = 0, xend = t_desejado1, yend = d_desejada1),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=t_desejado1-0.1, y=d_desejada1, label="-t", angle=90, vjust=0,
   ↪  hjust=0, color="blue",size=6)+
  annotate(geom="text", x=t_desejado1-2.5, y=0.1, label="Intervalo aberto à esq.
   ↪  \n(probabilidade=\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=t_desejado1+1, y=0.2, label="Intervalo aberto \n(probabilidade=
   ↪  (1-\u03b1))", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+  theme_bw()
```

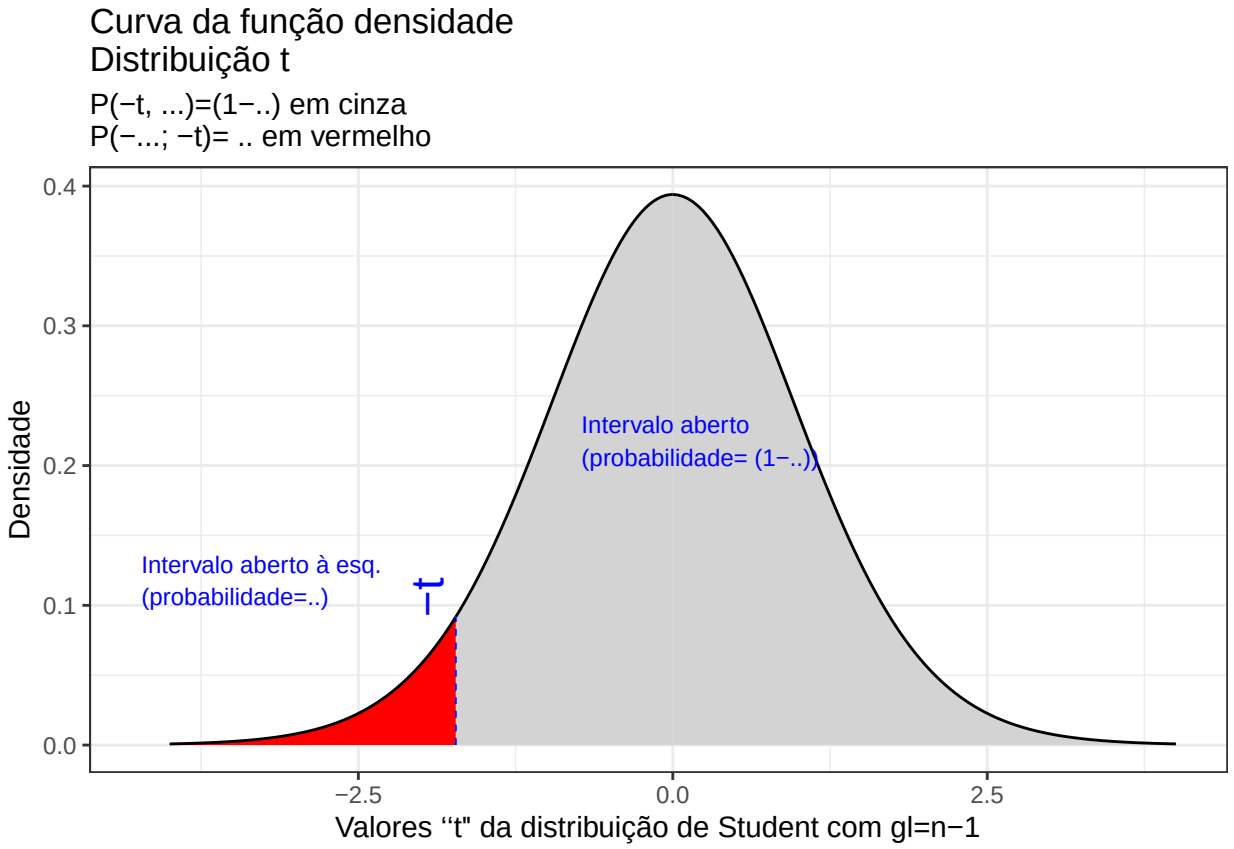


Figure 9.19: Região crítica, aquém da qual, a probabilidade associada aos valores T ($(n-1)$ graus de liberdade) é inferior a α, delimitando assim, à direita, um intervalo aberto com nível de confiança igual a $(1-\alpha)$

9.4 Distribuição das diferenças de médias amostrais independentes e seus intervalos de confiança

Consideremos duas populações X e Y com médias μ_1 e μ_2 e variâncias σ_1^2 e σ_2^2, respectivamente.

Conforme seções anteriores, as médias amostrais $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ são duas variáveis aleatórias tais que:

$$\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1})$$
$$\bar{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

Pode-se demonstrar, pelas propriedades da esperança e da variância, que a média e a variância de uma variável aleatória (população) que resulta da soma ou diferença de duas outras, X e Y, é:

$$\mu_{(X \pm Y)} = \mu_1 \pm \mu_2$$
$$\sigma^2_{(X \pm Y)} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

E a média e variância da soma ou diferença das distribuições amostrais das médias de X e Y é:

$$\mu_{(\bar{X} \pm \bar{Y})} = \mu_1 \pm \mu_2$$
$$\sigma^2_{(\bar{X} \pm \bar{Y})} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

9.4.1 Intervalos de confiança para a diferença entre duas médias amostrais com variância populacionais conhecidas

Se $(X_1, X_2, ..., Xn_1)$ e $(Y_1, Y_2, ..., Yn_2)$ forem amostras aleatórias simples das populações X e Y com médias μ_1 e μ_2, e variâncias σ_1^2 e σ_2^2 conhecidas, e $\bar{X}= \frac{(X_1+X_2+...+Xn_1)}{n}$ e $\bar{Y}= \frac{(Y_1+Y_2+...+Yn_2)}{n_2}$, então:

$$X \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}})$$
$$Y \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}})$$

Demonstra-se que a diferença entre $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ é tal que:

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N((\mu_1 - \mu_2), \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})$$

Demonstra-se que a estatística Z pode ser assim definida, bem como sua correspondente distribuição (cf.Figura 9.20):

$$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

em que:

- $\bar{X}$e $\bar{Y}$ são as médias amostrais;
- μ_1 e μ_2 são as médias populacionais;
- σ_1^2 e σ_2^2 são as variâncias populacionais; e,
- n_1 e n_2 são os tamanhos das amostras

```
alfa=0.05

prob_desejada1=alfa/2
z_desejado1=round(qnorm(prob_desejada1),4)
d_desejada1=dnorm(z_desejado1, 0, 1)

prob_desejada2=1-alfa/2
z_desejado2=round(qnorm(prob_desejada2),4)
```

```
d_desejada2=dnorm(z_desejado2, 0, 1)




ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(-4, z_desejado1),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(z_desejado1,0),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(0, z_desejado2),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(z_desejado2,4),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores ``z'' da distribuição Normal padrão")  +
  labs(title=
         "Curva da função densidade \nDistribuição Normal Padrão",
       subtitle = "P(-z; z)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança) \nP(-\U221e; -z)= P(z;
        ↪  \U221e)= \u03b1/2 em vermelho")+
  geom_segment(aes(x = z_desejado1, y = 0, xend = z_desejado1, yend = d_desejada1),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  geom_segment(aes(x = z_desejado2, y = 0, xend = z_desejado2, yend = d_desejada2),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado1-0.1, y=d_desejada1, label="-z", angle=90, vjust=0,
   ↪  hjust=0, color="blue",size=6)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado2+0.3, y=d_desejada2, label="z", angle=90, vjust=0,
   ↪  hjust=0, color="blue",size=6)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado1-1.8, y=0.1, label="Intervalo aberto à esq.
   ↪  \n(probabilidade=\u03b1/2)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado2+0.5, y=0.1, label="Intervalo aberto à dir.
   ↪  \n(probabilidade=\u03b1/2)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado1+1.3, y=0.2, label="Intervalo fechado \n(probabilidade=
   ↪  (1-\u03b1))", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  theme_bw()
```

Na Figura 9.20 observa-se:

- o nível de significância α;

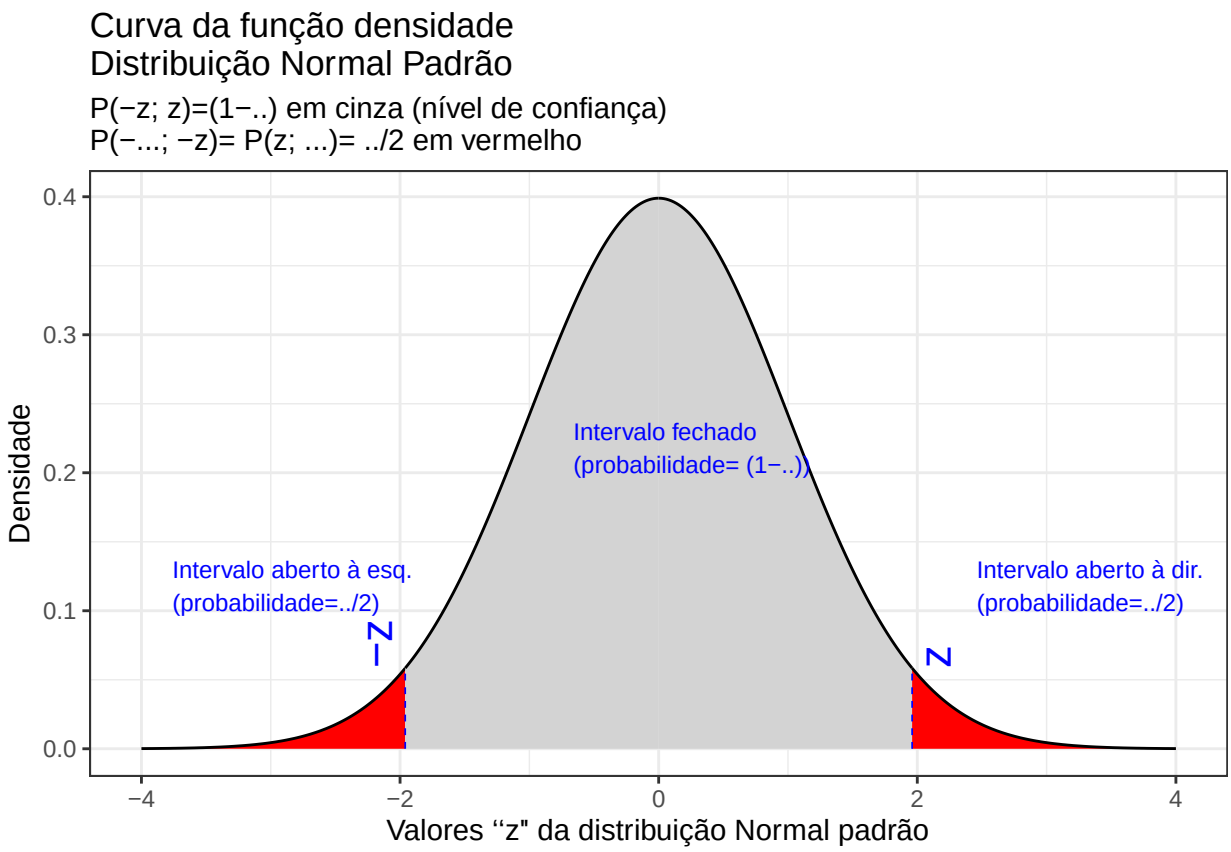


Figure 9.20: Regiões críticas, aquém e além das quais, a probabilidade associada aos valores da estatística Z é inferior a $\frac{\alpha}{2}$, estabelecendo assim um intervalo com nível de confiança igual a $(1-\alpha)$

- o nível de confiança $(1-\alpha)$; e,
- o valor tabelado da estatística $Z(z)$ para o nível de confiança fixado.

Assim,

$$P\left[-Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \leq Z \leq Z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\right] = (1-\alpha)$$

$$P\left[-z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \leq \frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\right] = (1-\alpha)$$

$$P[(\bar{x}-\bar{y})-(z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}) \leq (\mu_1-\mu_2) \leq (\bar{x}-\bar{y})+(z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}})] = (1-\alpha)$$

$$IC(\mu_1-\mu_2)_{(1-\alpha)} = [(\bar{x}-\bar{y}) \pm z_c \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}]$$

Exemplo: Uma empresa possui duas filiais (A e B). Uma amostra das vendas de 20 dias forneceu uma venda média diária de 40 unidades dessa peça a filial A e de 30 unidades da mesma peça para a filial B. Os desvios padrão das vendas diárias dessa peça são de 5 e 3, respectivamente. Admitindo que a distribuição diária das vendas dessa peça siga uma distribuição Normal, qual o intervalo de confiança para a diferença de médias das vendas nas duas filiais com um nível de confiança de 95%?

Dados do problema:

- $\bar{X}$= 40 e $\bar{Y}$= 30 são as médias amostrais (vendas médias diárias nas filiais A e B, respectivamente);
- $\sigma_1^2 = 25$ e $\sigma_2^2 = 9$ são as variâncias populacionais;
- $n_1 = n_2 = 20$ são os tamanhos das amostras; e,
- valor extraído da tabela $z = 1,96$ correspondente ao nível de confiança estipulado $(1-\alpha) = 95\%$.

$$P[(\bar{x}-\bar{y})-(z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}})\leq(\mu_1-\mu_2)\leq(\bar{x}-\bar{y})+(z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}})]=(1-\alpha)$$

$$P[(\bar{x}-\bar{y})-(z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}})\leq(\mu_1-\mu_2)\leq(\bar{x}-\bar{y})+(z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}})]=(1-\alpha)$$

$$P[10-(1,96\cdot\sqrt{\frac{25}{20}+\frac{9}{20}})\leq(\mu_1-\mu_2)\leq(10+(1,96\cdot\sqrt{\frac{25}{20}+\frac{9}{20}})]=0,95$$

$$P[10-(1,96\times1,3038)\leq(\mu_1-\mu_2)\leq10+(1,96\times1,3038)]=0,95$$

$$IC(\mu_1-\mu_2)_{0,95}=[7;13]$$

Se quisermos ser rigorosos na interpretação do intervalo de confiança calculado podemos explicar que, se extrairmos um grande número de amostras dessas mesmas dimensões das vendas dessa peça nas duas empresas, e para cada uma delas calcularmos suas médias e as diferenças entre elas, e calcularmos os intervalos de confiança como o acima definido, a proporção desses intervalos onde podemos encontrar a diferença das médias de vendas dessa peça da filial A para a filial B será de 0,95 (95 intervalos em 100).

De uma forma mais sintética podemos afirmar que, o anterior intervalo aleatório [7 ; 13], é um intervalo de confiança a 95% para a diferença das médias de vendas dessa peça nas duas empresa

De uma forma mais corrente, *embora menos correta* em termos teóricos, é usual afirmar que, com 95% de confiança a diferença das médias de vendas dessa peça da filial A para a filial B se situa entre os valores 7 e 13.

Uma segunda observação se faz pertinente e se refere à natureza dos dados analisados e a forma de apresentação do resultado. Por serem dados discretos, o intervalo de confiança deverá ser apresentado em igual forma, sem ultrapassar os limites estabelecidos. Isto posto: $IC(\mu_1-\mu_2)_{0,95}=[7;13]$ **peças**.

9.4.2 Intervalos de confiança para a diferença entre duas médias amostrais com variâncias populacionais desconhecidas mas admitidas iguais

Se $(X_1, X_2, ..., Xn_1)$ e $(Y_1, Y_2, ..., Yn_2)$ forem amostras aleatórias simples das populações X e Y com médias μ_1 e μ_2, e variâncias σ_1^2 e σ_2^2 desconhecidas porém iguais ($\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$), e $\bar{X}=\frac{(X_1+X_2+...+Xn_1)}{n}$ e $\bar{Y}=\frac{(Y_1+Y_2+...+Yn_2)}{n_2}$, então:

$$X \sim N(\mu_1, \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}})$$
$$Y \sim N(\mu_2, \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}})$$

Demonstra-se que a estatística T pode ser assim definida, bem como sua correspondente distribuição (cf. Figura **??**):

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

em que:

- $\bar{X}$e $\bar{Y}$são as médias amostrais;
- S_1^2 e S_2^2 são as variâncias amostrais;
- μ_1 e μ_2 são as médias populacionais;
- S_p é um desvio padrão amostral ponderado para as duas amostras;
- n_1 e n_2 são os tamanhos das amostras;

O desvio padrão ponderado S_p é dado por:

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) \cdot S_1^2 + (n_2 - 1) \cdot S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

```
alfa=0.05

prob_desejada1=alfa/2
df=20
t_desejado1=round(qt(prob_desejada1,df ),4)
d_desejada1=dt(t_desejado1,df)

prob_desejada2=1-alfa/2
```

```
df=20
t_desejado2=round(qt(prob_desejada2, df),4)
d_desejada2=dt(t_desejado2,df)



ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "red",
            xlim = c(-4, t_desejado1),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(t_desejado1,0),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(0, t_desejado2),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "red",
            xlim = c(t_desejado2,4),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores ``t'' da distribuição de Student")  +
  labs(title= "Curva da função densidade \nDistribuição t (df=20)",
       subtitle = "P(-t; t)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança) \nP(-\U221e; -t)= P(t;
        ↪  \U221e)= \u03b1/2 em vermelho ")+
  geom_segment(aes(x = t_desejado1, y = 0, xend = t_desejado1, yend = d_desejada1),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  geom_segment(aes(x = t_desejado2, y = 0, xend = t_desejado2, yend = d_desejada2),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=t_desejado1-0.1, y=d_desejada1, label="-t", angle=90, vjust=0,
   ↪  hjust=0, color="blue",size=6)+
  annotate(geom="text", x=t_desejado2+0.3, y=d_desejada2, label="t", angle=90, vjust=0,
   ↪  hjust=0, color="blue",size=6)+
  annotate(geom="text", x=t_desejado1-1.8, y=0.1, label="Intervalo aberto à esq.
   ↪  \n(probabilidade=\u03b1/2)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=t_desejado2+0.5, y=0.1, label="Intervalo aberto à dir.
   ↪  \n(probabilidade=\u03b1/2)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=t_desejado1+1.3, y=0.2, label="Intervalo fechado \n(probabilidade=
   ↪  (1-\u03b1))", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+  theme_bw()
```

Na Figura 9.21 observa-se:

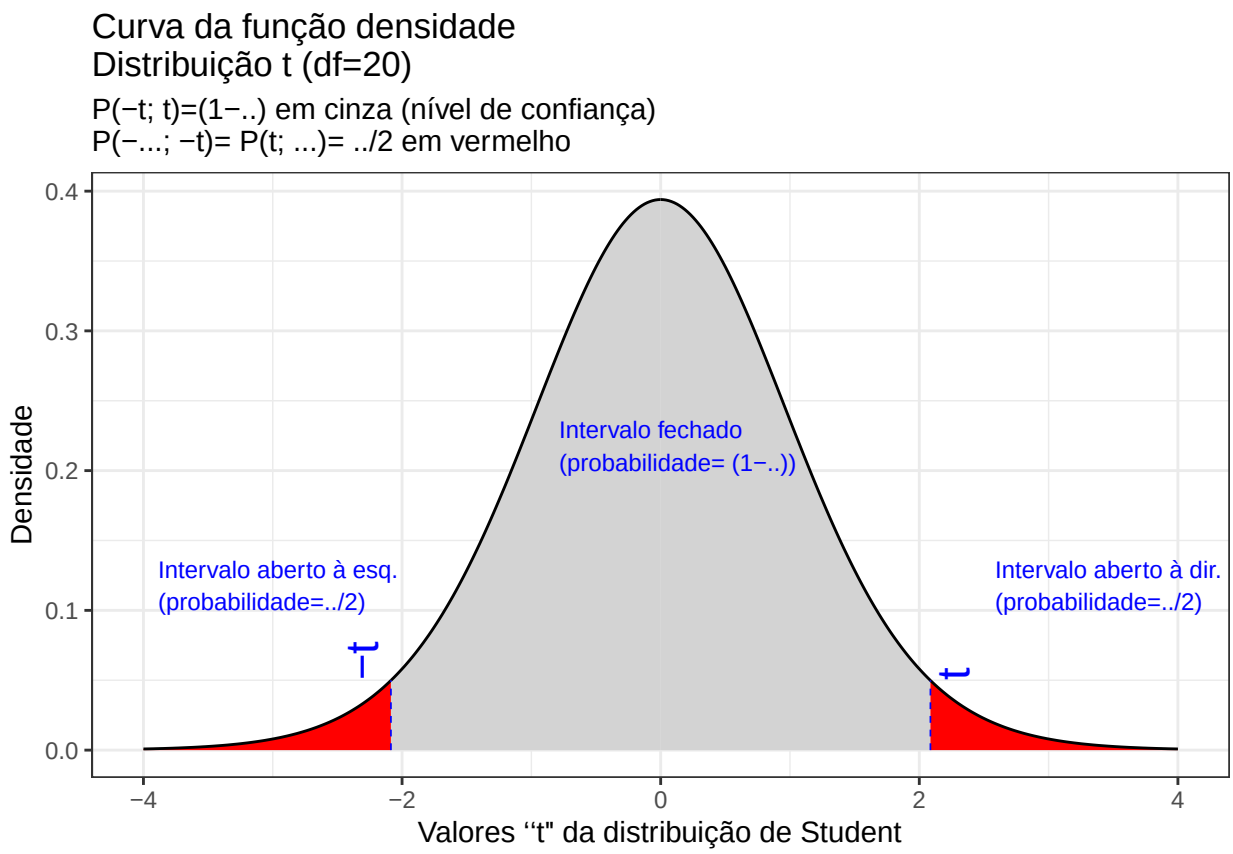


Figure 9.21: Regiões críticas, aquém e além das quais, a probabilidade associada aos valores da estatística T ($(n-1)$ graus de liberdade) é inferior a $\frac{\alpha}{2}$, estabelecendo assim um intervalo com nível de confiança igual a $(1-\alpha)$

- o nível de significância α;
- o nível de confiança $(1-\alpha)$; e,
- o valor tabelado da estatística $T(t)$ sob (n_1+n_2-2) graus de liberdade para o nível de confiança fixado.

Assim,

$$P\left[-T_{(n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2})} \leq T \leq T_{(n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2})}\right] = (1-\alpha)$$

$$P\left[-t_{(n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2})} \leq \frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \leq t_{(n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2})}\right] = (1-\alpha)$$

$$P[(\bar{x}-\bar{y}) - (t_{(n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2})} \cdot S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}) \leq (\mu_1-\mu_2) \leq (\bar{x}-\bar{y}) + (t_{(n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2})} \cdot S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}})] = (1-\alpha)$$

$$IC(\mu_1-\mu_2)_{(1-\alpha)} = [(\bar{x}-\bar{y}) \pm t_{c(n_1+n_2-2)} \cdot S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}]$$

Exemplo: De uma grande turma extraiu-se uma pequena amostra de quatro notas de uma prova: 64, 66, 89, 77. De uma outra turma, extraiu-se uma outra amostra, independente, de três notas: 56, 71, 53. Se for razoável admitir que as variâncias das duas turmas (σ_1^2 e σ_2^2) sejam iguais, qual seria o intervalo de confiança para a diferença observada entre essas médias, a um nível de confiança de 95%?

Dados do problema:

- $\bar{X}$= 74 e $\bar{Y}$= 60 são as médias calculadas sobre as duas amostras (notas nas turmas);
- $S_1^2 = 132,71$ e $S_2^2 = 92,93$ são as variâncias calculadas sobre as duas amostras;
- $n_1 = 4$ e $n_2 = 3$ são os tamanhos das amostras;
- $n_1+n_2-2 = 5$ são os graus de liberdade; e,
- $t = 2,57$ o valor tabelado da estatística para um nível de significância $\alpha = 5\%$ e graus de liberdade $gl = 5$.

$$P[(\bar{x}-\bar{y})-(t_{(n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2})}\cdot S_p\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}})\leq(\mu_1-\mu_2)\leq(\bar{x}-\bar{y})+(t_{(n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2})}\cdot S_p\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}})]=(1-\alpha)$$

O desvio padrão ponderado S_p é dado por:

$$S_p=\sqrt{\frac{(n_1-1)\cdot S_1^2+(n_2-1)\cdot S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$
$$S_p=\sqrt{\frac{(4-1)\cdot 132,71+(3-1)\cdot 92,93}{4+3-2}}$$
$$S_p=10,81$$

$$P[(\bar{x}-\bar{y})-(t_{(n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2})}\cdot S_p\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}})\leq(\mu_1-\mu_2)\leq(\bar{x}-\bar{y})+(t_{(n_1+n_2-2,1-\frac{\alpha}{2})}\cdot S_p\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}})]=(1-\alpha)$$
$$P[14-(2,57\cdot 10,81\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}})\leq(\mu_1-\mu_2)\leq 14+(2,57\cdot 10,81\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}})]=0,95$$
$$P[14-21,23\leq(\mu_1-\mu_2)\leq 14+21,23]=0,95$$

$$IC(\mu_1-\mu_2)_{0,95}=[-7,23;35,23]$$

Se quisermos ser rigorosos na interpretação do intervalo de confiança calculado podemos explicar que, se extrairmos um grande número de amostras dessas mesmas dimensões das vendas dessa peça nas duas empresas, e para cada uma delas calcularmos suas médias e as diferenças entre elas, e calcularmos os intervalos de confiança como o acima definido, a proporção desses intervalos onde podemos encontrar a diferença das médias de vendas dessa peça da filial A para a filial B será de 0,95 (95 intervalos em 100).

De uma forma mais sintética podemos afirmar que o intervalo aleatório [-7,23; 35,23], é um intervalo de confiança a 95% para a diferença das médias das notas dessas provas nas duas turmas.

De uma forma mais corrente, *embora menos correta* em termos teóricos, é usual afirmar que, com 95% de confiança a diferença das médias das notas da primeira turma para a segunda turma se situa entre os valores -7,23 e 35,23.

Uma importante conclusão pode ser extraída ao se analisar um pouco mais atentamente o intervalo calculado [-7,23 ; 35,23]. Vê-se que encontra-se dentro desse intervalo o valor 0 indicando que a diferença entre as médias amopstrais pode ser zero sob esse nível de confiança, o que equivale dizer que sob esse nível de confiança não se pode afirmar existir diferença significativa (i.e. sob o nível de significância) entre as médias das notas dessas duas turmas.

9.4.3 Intervalos de confiança para a diferença entre duas médias amostrais com variâncias populacionais desconhecidas e desiguais

Se $(X_1, X_2, ..., Xn_1)$ e $(Y_1, Y_2, ..., Yn_2)$ forem amostras aleatórias simples das populações X e Y com médias μ_1 e μ_2, e variâncias σ_1^2 e σ_2^2 desconhecidas porém iguais ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$), e $\bar{X}= \frac{(X_1+X_2+...+Xn_1)}{n}$ e $\bar{Y}= \frac{(Y_1+Y_2+...+Yn_2)}{n_2}$, então:

$$X \sim N(\mu_1, \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}})$$
$$Y \sim N(\mu_2, \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}})$$

Demonstra-se que a estatística T pode ser assim definida, bem como sua correspondente distribuição (cf. Figura **??**):

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_\nu$$

em que:

- $\bar{X}$e $\bar{Y}$ são as médias das amostras extraídas;
- μ_1 e μ_2 são as médias populacionais;

- n_1 e n_2 são os tamanhos das amostras; e,
- S_1^2 e S_2^2 são as variâncias das amostras.

O número de graus de liberdade (ν) é dado por:

$$\nu = \frac{(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2})^2}{\frac{(\frac{S_1^2}{n_1})^2}{n_1-1} + \frac{(\frac{S_2^2}{n_2})^2}{n_2-1}}$$

```
alfa=0.05

prob_desejada1=alfa/2
df=20
t_desejado1=round(qt(prob_desejada1,df ),4)
d_desejada1=dt(t_desejado1,df)

prob_desejada2=1-alfa/2
df=20
t_desejado2=round(qt(prob_desejada2, df),4)
d_desejada2=dt(t_desejado2,df)



ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "red",
            xlim = c(-4, t_desejado1),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(t_desejado1,0),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(0, t_desejado2),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "red",
            xlim = c(t_desejado2,4),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores ``t'' da distribuição de Student")  +
  labs(title= "Curva da função densidade \nDistribuição t (df=20)",
       subtitle = "P(-t; t)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança) \nP(-\U221e; -t)= P(t;
        ↪  \U221e)= \u03b1/2 em vermelho ")+
  geom_segment(aes(x = t_desejado1, y = 0, xend = t_desejado1, yend = d_desejada1),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  geom_segment(aes(x = t_desejado2, y = 0, xend = t_desejado2, yend = d_desejada2),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=t_desejado1-0.1, y=d_desejada1, label="-t", angle=90, vjust=0,
   ↪  hjust=0, color="blue",size=6)+
```

```
annotate(geom="text", x=t_desejado2+0.3, y=d_desejada2, label="t", angle=90, vjust=0,
 ↪  hjust=0, color="blue",size=6)+
annotate(geom="text", x=t_desejado1-1.8, y=0.1, label="Intervalo aberto à esq.
 ↪  \n(probabilidade=\u03b1/2)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=t_desejado2+0.5, y=0.1, label="Intervalo aberto à dir.
 ↪  \n(probabilidade=\u03b1/2)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=t_desejado1+1.3, y=0.2, label="Intervalo fechado \n(probabilidade=
 ↪  (1-\u03b1))", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+  theme_bw()
```

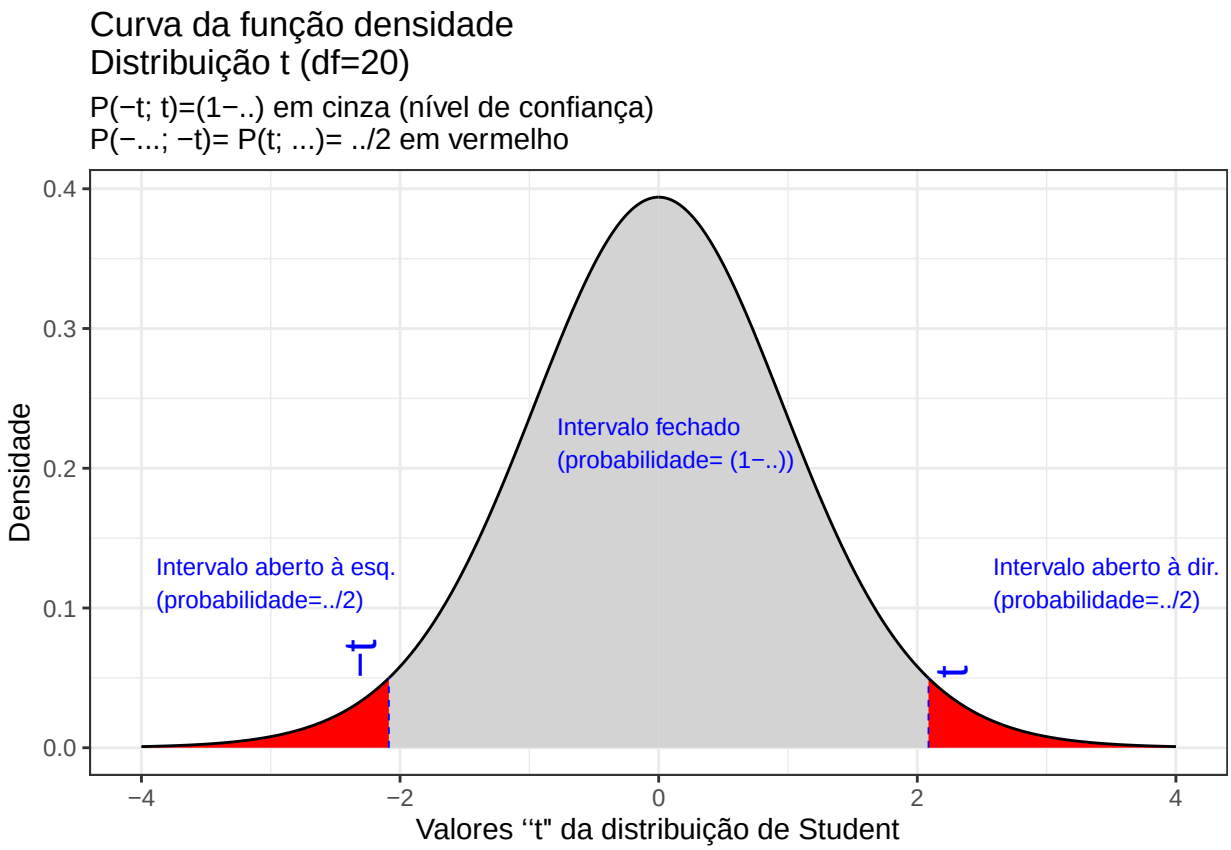


Figure 9.22: Regiões críticas, aquém e além das quais, a probabilidade associada aos valores da estatística T (com ν graus de liberdade) é inferior a $\frac{\alpha}{2}$, estabelecendo assim um intervalo com nível de confiança igual a $(1-\alpha)$

Na Figura 9.22 observa-se:

- o nível de significância α;
- o nível de confiança $(1-\alpha)$; e,
- o valor tabelado da estatística $T(t)$ sob ν graus de liberdade para o nível de confiança fixado.

Assim,

$$P\left[-T_{(\nu,1-\frac{\alpha}{2})} \leq T \leq T_{(\nu,1-\frac{\alpha}{2})}\right] = (1-\alpha)$$

$$P\left[-t_{(\nu,1-\frac{\alpha}{2})} \leq \frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \leq t_{(\nu,1-\frac{\alpha}{2})}\right] = (1-\alpha)$$

$$P[(\bar{x}-\bar{y})-(t_{(\nu,1-\frac{\alpha}{2})}\cdot\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}) \leq (\mu_1-\mu_2) \leq (\bar{x}-\bar{y})+(t_{(\nu,1-\frac{\alpha}{2})}\cdot\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}})] = (1-\alpha)$$

$$IC(\mu_1-\mu_2)_{(1-\alpha)} = [(\bar{x}-\bar{y}) \pm t_{c(\nu)}\cdot\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}]$$

Exemplo: De uma pequena classe do curso de ensino médio tomou-se uma amostra de 4 provas de matemática, obtendo-se um valor médio de 81 sob uma variância de 2. Outra amostra, de 6 provas de biologia, forneceu um valor médio de 77 sob uma variância de 14,4. Qual seria o intervalo de confiança para a diferença observada entre essas médias, sob um nível de confiança de 95%?

Dados do problema:

Dados do problema:

- $\bar{X}$= 81 e $\bar{Y}$= 77 são as médias calculadas sobre as duas amostras (notas nas turmas);
- $S_{1}^{2}=2 $ e $S_2^2 = 14,40$ são as variâncias calculadas sobre as duas amostras;e,
- $n_1 = 4$ e $n_2 = 6$ são os tamanhos das amostras.

O número de graus de liberdade (ν) é dado por:

$$\nu = \frac{(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2})^2}{\frac{(\frac{S_1^2}{n_1})^2}{n_1-1} + \frac{(\frac{S_2^2}{n_2})^2}{n_2-1}}$$
$$\nu = \frac{(\frac{2}{4} + \frac{14,40}{6})^2}{\frac{(\frac{2}{4})^2}{4-1} + \frac{(\frac{14,40}{6})^2}{6-1}}$$
$$\nu = \frac{2,90^2}{0,083 + 1,152}$$
$$\nu = \frac{8,41}{1,23} = 6,83 \sim 7$$

Portanto, $t = 2,36$ é o valor tabelado da estatística para um nível de significância $\alpha = 5\%$ e graus de liberdade $gl = 7$.

$$P[(\bar{x} - \bar{y}) - (t_{(\nu,1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}) \leq (\mu_1 - \mu_2) \leq (\bar{x} - \bar{y}) + (t_{(\nu,1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}})] = (1 - \alpha)$$
$$P[4 - (2,36 \cdot \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{14,40}{6}}) \leq (\mu_1 - \mu_2) \leq 4 + (2,36 \cdot \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{14,40}{6}})] = 0,95$$
$$P[4 - (2,36 \cdot 1,70) \leq (\mu_1 - \mu_2) \leq 4 + (2,36 \cdot 1,70)] = 0,95$$
$$P[4 - 4,01 \leq (\mu_1 - \mu_2) \leq 4 + 4,01)] = 0,95$$

$IC(\mu_1 - \mu_2)_{0,95} = [-0,01; 8,01]$

Se quisermos ser rigorosos na interpretação do intervalo de confiança calculado podemos explicar que, se extrairmos um grande número de amostras dessas mesmas dimensões das notas dessas provas nas duas turmas, e para cada uma delas calcularmos suas médias e as diferenças entre elas, e calcularmos os intervalos de confiança como o acima definido, a proporção desses intervalos onde podemos encontrar a diferença das notas notas da prova de matemática para a prova de biologia será de 0,95 (95 intervalos em 100).

De uma forma mais sintética podemos afirmar que, o anterior intervalo aleatório [-0,01; 8,01], é um intervalo de confiança a 95% para a diferença das médias das notas dessas provas nas duas turmas.

De uma forma mais corrente, *embora menos correta* em termos teóricos, é usual afirmar que, com 95% de confiança a diferença das médias das notas da prova de matemática para a prova de biologia situa entre os valores -0,01 e 8,01.

Uma importante conclusão pode ser extraída ao se analisar um pouco mais atentamente o intervalo calculado [-0,01 ; 8,01]. Vê-se que encontra-se dentro desse intervalo o valor 0 indicando que a diferença entre as médias amopstrais pode ser zero sob esse nível de confiança, o que equivale dizer que sob esse nível de confiança não se pode afirmar existir diferença significativa (i.e. sob o nível de significância) entre as médias dessas notas.

9.5 Distribuição das diferenças de médias amostrais dependentes e seus intervalos de confiança

Na prática temos algumas situações onde as populações não são independentes com, por exemplo, em situações onde as amostras são extraídas de uma mesma população em dois momentos distintos (antes e depois de algum fato), ou como numa situação de comparação inter laboratorial, onde dois laboratórios medem a mesma peça, as medidas entre os laboratórios não são independentes. Nestes casos diz-se que os dados são pareados.

Considere duas amostras dependentes $(X_1, \dots X_n)$ e $(Y_1, \dots Y_n)$. O pareamento das observações será considerado tomando-se $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ e as diferenças serão tomadas a cada par $D_i = X_i - Y_i$, para $i = 1, \dots, n$.

Assim obtemos uma amostra $(D_1, \dots, D_n)$, resultante das diferenças entre os valores de cada par. A variável aleatória será admitida tal que

$$D \sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$$

O parâmetro da média dessa distribuição (μ_D) será estimado a partir da própria amostra das diferenças, tal que:

$$\mu_D = \bar{D} = \sum_{i=1}^{n} D_i$$

e a variância populacional desconhecida será aproximada por:

$$S_D^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(Di - \bar{D})^2}{n-1}$$

Demonstra-se que a estatística T pode ser assim definida, bem como sua correspondente distribuição

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}$$

Assim,

$$IC(\mu_D)_{(1-\alpha)} = [\bar{D} \pm t_{c(n-1)} \cdot \sqrt{\frac{S_D^2}{n}}]$$

Exemplo: Determinar o intervalo de confiança sob um nível de confiança de 95% para a diferença de médias do resultados dos testes de um grupo de 15 alunos submetidos a um vídeo instrutivo tais que a primeira amostra foi tomada antes de assistirem ao vídeo e a segunda depois, mediante a aplicação de um novo teste, similar ao primeiro.

Aluno	Primeira nota (X)	Segunda nota (Y)
1	74	80
2	64	74
3	79	83
4	90	92
5	89	96
6	94	98
7	55	59
8	75	77
9	88	93
10	66	78
11	70	75
12	60	59
13	59	61
14	67	70
15	69	74

$$\bar{D} = \sum_{i=1}^{n} D_i = -4,667$$

$$S_D^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(Di - \bar{D})^2}{n-1} = 10,52354$$

Sendo o valor crítico tabelado da estatística para um nível de significância $\alpha = 5\%$ e graus de liberdade $gl = (n-1) = 14$ igua a 1,761, o intervalo de confiança será:

$$
\begin{aligned}
IC(\mu_D)_{(1-\alpha)} &= [\bar{D} \pm t_{c(n-1)} \cdot \sqrt{\frac{S_D^2}{n}}] \\
IC(\mu_D)_{(1-\alpha)} &= [-4,667 \pm 1,761 \cdot \sqrt{\frac{10,52354}{15}}] \\
IC(\mu_D)_{(1-\alpha)} &= [-5,396; -3,937]
\end{aligned}
$$

Sendo negativos os valores desse intervalo de confinaça deduz-se que a **primeira nota** é menor que a **segunda nota** ($X - Y < 0$) e assim, o vídeo que os alunos assistiram melhorou sua compreensão do assunto e seu desempenho no segundo teste (similar ao primeiro). Caso o valor "zero" estivesse contemplado nesse intervalo, a interpretação seria de que não há diferença estatisticamente significativa nas notas dos alunos nos dois testes (o vídeo não os ajudou em coisa alguma).

Módulo 10

Introdução à distribuição das proporções amostrais e seus intervalos de confiança

A finalidade de uma amostra reside em obter uma estimativa do valor de um ou mais parâmetros associados a uma população. Verifica-se que, ao se extrair repetidamente valores amostrais de forma aleatória da mesma população, estes variam de uma amostra para outra, assim como em relação ao verdadeiro parâmetro dessa população. No entanto, é possível demonstrar que essa variabilidade pode ser caracterizada por meio de distribuições de probabilidade.

Quando utilizadas com esse propósito, essas distribuições de probabilidade são chamadas de distribuições amostrais. Elas permitem avaliar, para cada amostra, quão próximo está o valor da estatística amostral em relação ao verdadeiro parâmetro da população. A resposta a essa questão depende essencialmente de três fatores:

- A estatística específica que está sendo empregada: diferentes estatísticas demandam diferentes distribuições de probabilidade para modelar sua variabilidade.
- O tamanho da amostra, que exerce uma influência inversa na variabilidade entre os valores amostrais.
- A variabilidade intrínseca da população em estudo e do processo de amostragem.

10.1 Conceito elementar de uma proporção

O conceito básico de proporção remete à razão entre duas grandezas. Vejam os exemplos:

- segundo dados demográficos de 2012 (IBGE), a cidade de Recife possui proporcionalmente mais mulheres que homens;

- em 18 dias de campanha, somente 25,09% do público-alvo se vacinou contra gripe no País, segundo dados divulgados pelo Ministério da Saúde. De 17 de abril, quando a imunização foi iniciada, até 5 de maio, 13,6 milhões de brasileiros procuraram os postos de saúde para se vacinar.

Na primeira afirmação, a ideia de proporcionalidade advém do quociente do número habitantes do sexo feminino pelo numero total de habitantes naquele ano ($\frac{827.885}{1.537.704} = 0,5384$). Já na segunda, a afirmação resulta do quociente do número de brasileiros vacinados pelo total da população-alvo ($\frac{13.600.000}{54.200.000} = 0,2509$).

10.2 Distribuição das proporções amostrais

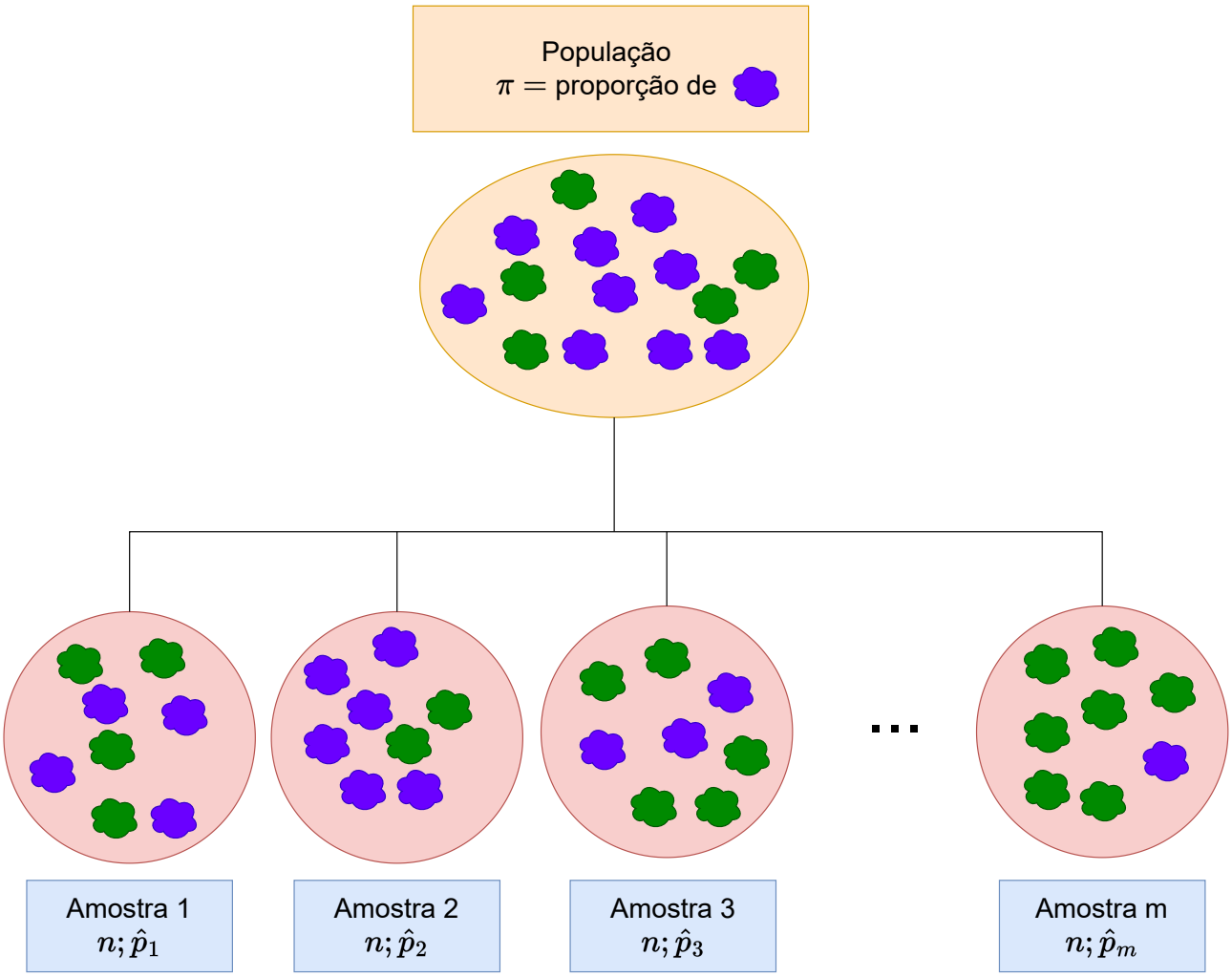


Figure 10.1: Ilustração de m amostras de mesmo tamanho (n) extraídas de uma mesma população onde a característica de interesse se manifesta sob uma proporção populacional π

Para estudarmos a distribuição das proporções amostrais ($\hat{p}$) considerem uma população apresentando uma determinada característica de interesse com proporção π. Essa característica de interesse assume apenas duas possibilidades em cada elemento da população: ela **pode ou não** estar presente:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o i-ésimo elemento é portador da característica} \\ 0, & \text{se o i-ésimo elemento não é portador da característica} \end{cases}$$

Assim, ao se escolher ao acaso um elemento da população, a probabilidade dessa característica estar presente pode ser estimada seguindo o modelo teórico de uma variável de *Bernoulli* e assim $X_i \sim Ber(\pi)$ e, como tal, $E(X) = \pi$ e $Var(X) = \pi(1-\pi)$.

Repetindo-se essa "extração'' por n vezes podemos definir a variável aleatória Y_n como sendo o número de sucessos observados em n repetições de *Bernoulli*:

$$Y_n = X_1 + \cdots + X_n$$

e assim, $Y_n \sim Bin(n, \pi)$ e a proporção amostral observada de sucessos ao final das n repetições será a média:

$$\hat{p} = \frac{Y}{n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

.

em que $\hat{p}$ é uma estimativa amostral da proporção populacional π.

Demonstra-se que para:

- um razoável número de repetições: $n \geq 30$;
- de uma população onde a proporção π não é extrema: próximas a 0 ou 1; e tal que
- $(n \cdot \pi)$ e $(n \cdot (1-\pi))$ sejam maiores que 15 (alguns autores consideram limites mais brandos, iguais a 10 ou ainda a 5),

ao se repetir o experimento anotando-se as proporções amostrais $\hat{p}$ obtida em cada uma das n repetições de *Bernoulli* , o perfil da curva de distribuição dessas proporções amostrais torna-se razoavelmente simétrico à medida que o número n de repetições de *Bernoulli* cresce, para qualquer que seja a proporção populacional, e oscila em torno de π.

Pelo Teorema de *DeMoivre* e *Laplace* (anteriores ao Teorema do Limite Central), demonstra-se que, para um grande número de repetições (n), o *valor esperado* e a *variância* das proporções amostrais são:

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= n \cdot \pi \\
Var(Y) &= n \cdot \pi \cdot (1 - \pi)
\end{aligned}
$$

e a distribuição das proporções amostrais será aproximadamente Normal com parâmetros $\mu = n.\pi$ e $\sigma^2 = n.\pi.(1-\pi)$:

$$
Y \sim N\left(n \cdot \pi; n \cdot \pi \cdot (1 - \pi)\right)
$$

Uma vez que a proporção amostral está definida como: $\hat{p} = \frac{Y_n}{n}$ segue-se que o valor esperado $\hat{p} = \mu$:

$$
\begin{aligned}
E(\hat{p}) &= E(\frac{Y}{n}) \\
&= \frac{1}{n} \cdot E(Y) \\
&= \frac{1}{n} \cdot n \cdot \pi \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

e a variância $Var(\hat{p} = \frac{1}{n}.\pi.(1-\pi))$:

$$
\begin{aligned}
Var(\hat{p}) &= Var(\frac{Y}{n}) \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot Var(Y) \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \pi \cdot (1-\pi) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \pi \cdot (1-\pi)
\end{aligned}
$$

Assim, as proporções amostrais se distribuem de modo aproximadamente Normal sob uma média $\mu = \pi$ e com uma variância $\sigma^2 = \frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}$:

$$
\hat{p} \sim N\left(\pi; \frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}\right)
$$

10.2.1 Simulações ilustrativas da aproximação da distribuição das proporções amostrais pela distribuição Normal

Para exemplificar considere o lançamento de um dado de seis faces,. A probabilidade de que uma certa face caia voltada para cima é de $\frac{1}{6} = 0,167$. Se lançarmos esse dado um número crescente de vezes e anotarmos a proporção delas em que a face escolhida caiu voltada para cima comprova-se que o valor esperado das proporções amostrais aproxima-se da proporção populacional.

As Figuras 10.2 (tamanho de cada amostra $n = n_1$) e 10.3 (tamanho de cada amostra $n = n_2$) mostram o perfil assumido pela distribuição de 100 proporções amostrais obtidas de uma população que apresenta uma proporção $\pi = p_1$ da característica de interesse.

```
##############################################################################
# Considere uma população cuja característica de interesse (A) se manifesta de modo
 ↪  dicotômico:
# sim/não, sob uma probabilidade p_1 e (1-p_1).
# A probabilidade de se obter um elemento com a característica de interesse
# - ao se sortear aleatoriamente um indivíduo qualquer - pode ser modelada como uma variável
 ↪  de Bernoulli.
# A probabilidade de se observar a característica de interesse ao se
# repetir a amostragem (com reposição) por n_1 (n_2) vezes pode ser modelada como uma
 ↪  variável binomial (repetição de um experimento de Bernoulli n_1/n_2 vezes)
# Repetindo-se esses experimentos binomiais por N vezes, as proporções amostrais de
# elementos com a característica de interesse (sucesso) nas N amostras obtidas será
```

```
# dada pelo número de elementos de cada conjunto nas n_1 (n_2) repetições dividido por
# n_1 (n_2).
# Desse modo, obtemos N proporções de amostras de tamanho n_1 (n_2)
#
#
# Selecionando-se aleatoriamente um elemento desta população
# resulta em uma variável aleatória dicotômica/Bernoulli que assume
# o valor 1 caso o elemento selecionado possua a propriedade A (sucesso)
# e assume o valor 0 caso não possua a propriedade A.
#
# A retirada (com reposição) de `n_1` elementos dessa população poderemos observar a
 ↪  frequência absoluta com que a propriedade A (sucesso) se manifesta na amostra,
# a qual pode ser expressa  como uma variável aleatória (X) que segue o modelo teórico
 ↪  Binomial de probabilidade.
#
# A frequência relativa, o quociente entre o número de sucessos por `n_1` expressa a
# proporção com que a propriedade "A" foi observada na 'amostra' de tamanho `n_1` é também
 ↪  uma variável aleatória (p) com distribuição altamente relacionada à variável X  pois é a
 ↪  média de `n_1` ensaios (repetições) de Bernoulli.
#
# Repetindo-se sucessivamente  `N` vezes extrações de tamanho `n_1`
# a anotando-se a proporção de sucesso em cada uma dessas amostras poderemos analisar como
 ↪  eles se distribuem em relação à quantidade de elementos extraídos `n_1` (repetições de
 ↪  Bernoulli)
# e à verdadeira proporção com que a propriedade A se manifesta na população (pi)
#
# Demonstra-se que:
# para `n_1` suficientemente grande (repetições de Bernoulli com reposição);]
# n_1 * pi > 5 e
# n_1*(1-pi) 5
# a distribuição de p pode ser aproximada pela distribuição Normal
# tal que p ~N (mu,sigma)
# onde mu e sigma são aproximados por:
# mu = E(p) = pi
# sigma^2 = sigma^2*p >>>> sigma = sqrt[ p*(1-p)/(n_1)  ]
#
##########################################################################

# Proporção escolhida para a manifestação da característica: sim/não (probabilidade de cada
 ↪  evento de Bernoulli)
p_1=round(1/6,2)

# Número de amostras
N=100

# Tamanho escolhido para cada amostra: repetições de Bernoulli
n_1=10

# Vetor com o número de sucessos observados (a frequência absoluta) nas N amostras de n_1
 ↪  elementos dicotômicos (repetições de Bernoulli, sob uma probabilidade individual de
 ↪  sucesso igual a p_1)

suc_10rep=rbinom(n=N, size = n_1, prob = p_1)
suc_10rep
```

```
#  Vendo a proporção de sucessos (a frequência relativa) em cada uma das N_1 amostras de n_1
 ↪  elementos dicotômicos
prop_10rep=suc_10rep/n_1
mean(prop_10rep) # ~ pi
sd(prop_10rep) # ~ sqrt(pi*(1-pi)/n_1)

# Dataframe com as N proporções amostrais sob n_1
dados_10=as.data.frame(prop_10rep)

##########################################################################
# O mesmo procedimento, mas agora com amostras com um maior número de elementos em cada uma
##########################################################################

# Tamanho escolhido para cada amostra: repetições de Bernoulli
n_2=100

# Vetor com o número de sucessos observados (a frequência absoluta) nas N amostras de n_2
 ↪  elementos dicotômicos (repetições de Bernoulli, sob uma probabilidade individual de
 ↪  sucesso igual a p_1)

suc_100rep=rbinom(n=N, size = n_2, prob = p_1)
suc_100rep


#  Vendo a proporção de sucessos (a frequência relativa) em cada uma das N_1 amostras de n_1
 ↪  elementos dicotômicos
prop_100rep=suc_100rep/n_2
mean(prop_100rep) # ~ pi
sd(prop_100rep) # ~ sqrt(pi*(1-pi)/n_2)

# Dataframe com as N proporções amostrais sob n_2
dados_100=as.data.frame(prop_100rep)
```

```
meu_titulo1=paste("Distribuição de frequência das proporções de sucesso observadas em \n",N,
 ↪  "amostras de n=", n_1, "elementos dicotômicos extraídos (com reposição) da
 ↪  população","\n(proporção de sucesso na população \u03c0=", p_1,")")
meu_titulo2=paste("As proporções amostrais ~ \nN(\u03bc=
 ↪  \u03c0=",round(mean(dados_10$prop_10rep),3),";\u03c3 =sqrt(\u03c0*(1-
 ↪  \u03c0)/n)=",round(sd(dados_10$prop_10rep),3),")")


ggplot(dados_10, aes(x = prop_10rep)) +
  geom_histogram(aes(y =..density..),
                 breaks = seq(0, 0.4, by = 0.05),
                 colour = "black",
                 fill = "lightblue") +
  stat_function(fun = dnorm,
                args = list(mean = p_1, sd = sqrt(p_1*(1-p_1)/n_1)),
                 colour="red") +
  scale_y_continuous(name="",breaks = NULL) +
  scale_x_continuous(name="Valores das proporções amostrais") +
  #labs(title=meu_titulo1)+
```

```
  annotate(geom="text", x=mean(prop_10rep), y=max(dnorm(prop_10rep)),
           label=meu_titulo2, angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=4)+
  theme(plot.title = element_text(size = 10, face = "bold"),
        axis.text.x = element_text(angle=0, hjust=1, size=10),
        axis.text.y = element_text(angle=0, hjust=1, size=10),
        axis.title.x = element_text(size = 10),
        axis.title.y = element_text(size = 10))
```

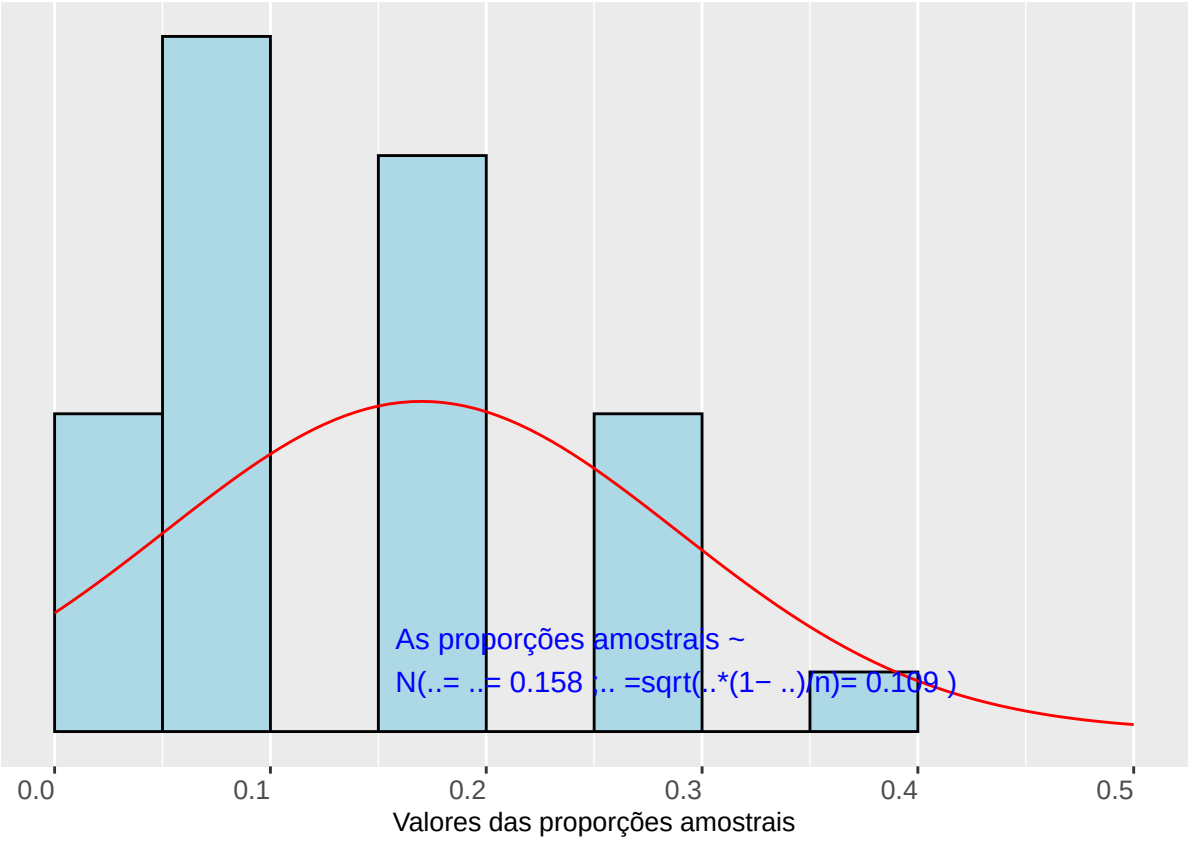


Figure 10.2: Distribuição das frequências das proporções de sucesso observadas em 100 amostras de tamanho n=10 elementos dicotômicos extraídos (com reposição) de uma população (a proporção de sucesso na população é =1/6)

```
meu_titulo1=paste("Distribuição de frequências das proporções de sucesso observadas em
 ↪  \n",N, "amostras de n=", n_2, "elementos dicotômicos extraídos (com reposição) da
 ↪  população","\n(proporção de sucesso na população \u03c0=", p_1,")")
meu_titulo2=paste("As proporções amostrais ~ \nN(\u03bc=
 ↪  \u03c0=",round(mean(dados_100$prop_100rep),3),";\u03c3=sqrt(\u03c0*(1-
 ↪  \u03c0)/n)=",round(sd(dados_100$prop_100rep),3),")")

ggplot(dados_100, aes(x = prop_100rep)) +
  geom_histogram(aes(y =..density..),
                 breaks = seq(0, 0.4, by = 0.03),
                 colour = "black",
                 fill = "lightblue") +
```

```
stat_function(fun = dnorm,
              args = list(mean = p_1,
                          sd = sqrt(p_1*(1-p_1)/n_2)),
              colour="red") +
scale_y_continuous(name="",breaks = NULL) +
scale_x_continuous(name="Valores das proporções amostrais") +
#labs(title=meu_titulo1)+
annotate(geom="text", x=mean(prop_100rep), y=max(dnorm(prop_100rep)),
         label=meu_titulo2, angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=4)+
theme(plot.title = element_text(size = 10, face = "bold"),
      axis.text.x = element_text(angle=0, hjust=1, size=10),
      axis.text.y = element_text(angle=0, hjust=1, size=10),
      axis.title.x = element_text(size = 10),
      axis.title.y = element_text(size = 10))
```

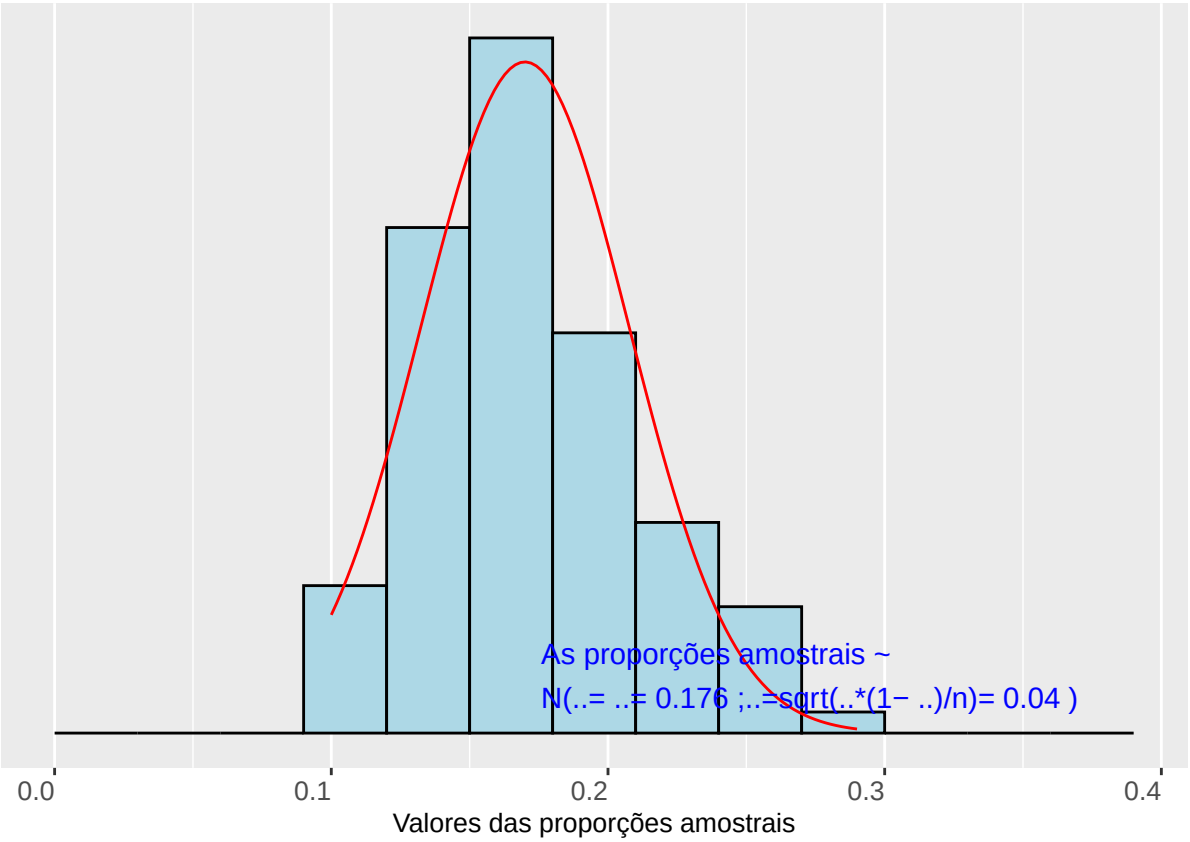


Figure 10.3: Distribuição das frequências das proporções de sucesso observadas em 100 amostras de tamanho n=100 elementos dicotômicos extraídos (com reposição) de uma população (a proporção de sucesso na população é =1/6)

10.3 Pobabilidades associadas à observação de uma proporção amostral $\hat{p}$

Ao se definir a estatística Z como a simples padronização da variável $\hat{p}$ vemos que esta seguirá uma distribuição normal com média 0 e desvio-padrão 1:

$$Z = \frac{\hat{p} - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \sim N\left(0, 1\right)$$

Essa aproximação da distribuição de uma variável binomial (proporções amostrais $\hat{p}$) pela distribuição Normal será tanto mais simétrica e com perfil de um sino quanto vier a atender (n grande e π não próximo de 0 ou 1) e nos permite determinar probabilidades associadas a proporções amostrais.

> Exemplo: um sistema de produção opera de tal maneira que 10% das peças produzidas são defeituosas. Suponha que os itens sejam vendidos em caixas com 100 unidades e calcule as probabilidades de que em uma caixa: - tenha mais do que 10% de defeituosas? - tenha menos do que 15% de defeituosas?

Dados do problema: $\pi = 0,10$ e $n = 100$.

Considerando que a proporção populacional π não é extrema (próxima a 0 ou 1) e $(n \cdot \pi)$ e $(n \cdot (1 - \pi))$ são maiores que 5, as proporções amostrais $\hat{p}$ se distribuem, aproximadamente, do modo:

$$\hat{p} \sim N\left(\mu : \pi; \sigma^2 : \frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}\right) \hat{p} \sim N\left(0,10; \frac{0,10 \cdot (1-0,10)}{100}\right) \hat{p} \sim N(0,10; 0,0009)$$

Para se calcular as probabilidades de serem observadas proporções amostrais $\hat{p} > 0,10$ e $\hat{p} < 0,15$, basta-se mapear essas proporções amostrais à distribuição Normal padronizada. Assim, denotando-se uma variável aleatória (as proporções amostrais) $X \sim n(\mu : 0,1; \sigma^2 : 0,0009(\sigma : 0,03))$ segue-se:

$$\begin{aligned} P(\hat{p} > 0,10) &= P(X > 0,10) \\ &= P\left(\frac{X - 0,10}{0,03} > \frac{0,10 - 0,10}{0,03}\right) \\ &= P\left(Z > 0\right) \\ &= 0,50 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P(\hat{p} < 0,15) &= P(X < 0,15) \\ &= P\left(\frac{X - 0,15}{0,03} < \frac{0,15 - 0,10}{0,03}\right) \\ &= P\left(Z < 1,67\right) \\ &= 0,9525 \end{aligned}$$

10.4 A aleatoriedade das proporções amostrais e o tamanho amostral

No módulo "Introdução ao planejamento de pesquisas'' explicamos que quando não se dispõe de nenhuma informação *a priori* sobre a proporção populacional (π) a adoção do máximo valor possível ao produto: $\pi.(1-\pi) = \frac{1}{4}$ assegura que o o tamanho de amostra obtido será suficiente para a estimação qualquer que seja a proporção populacional π. Trazendo a variável Z antes definida:

$$Z = \frac{\hat{p} - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \sim N\left(0,1\right)$$

podemos reescrevê-la de modo a se obter o dimensionamento amostral em função do nível de confiança e um erro máximo estabelecidos:

$$z_{(1-\alpha)} = \frac{\hat{p} - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} z_{(1-\alpha)} \cdot \sqrt{\frac{\pi\left(1-\pi\right)}{n}} = \hat{p} - \pi \frac{\pi\left(1-\pi\right)}{n} = (\frac{\varepsilon}{z_{(1-\alpha)}})^2 n = \frac{z^2_{(1-\alpha)}}{\varepsilon^2} \cdot \pi\left(1-\pi\right)$$

Deste modo podemos simular a flutuação dos valores das proporções obtidas em sucessivas amostras, ilustrando simultaneamente as proporções amostrais observadas e a proporção das amostras que apresentam um erro amostral (ε) superior ao estipulado pelo nível de confiança $(1-\alpha)$.

Desconhecendo-se qualquer informação acerca da proporção populacional (π), a dimensão da amostra pode ser estipulada tomando-se o maior valor do produto $\pi\,(1-\pi)$ como sendo igual a $\frac{1}{4}$ pois:

```
p <- seq(0, 1, by = 0.01)
y <- p * (1 - p)
plot(p, y, type = "l", xlab = "\u03c0", ylab = "\u03c0*(1- \u03c0)", main = "Possíveis
 ↪  valores assumidos pelo produto: \u03c0*(1- \u03c0)")
```

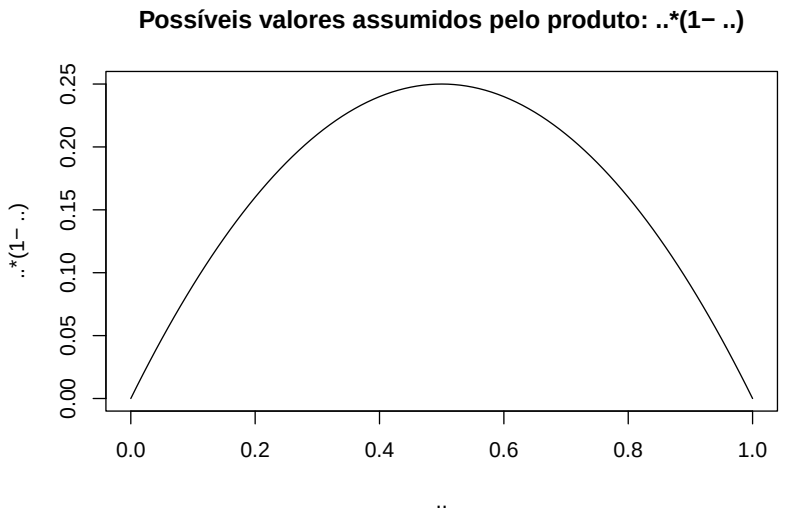


Figure 10.4: Possíveis valores assumidos pelo produto: *(1-)

Assim, a dimensão conservadora para a amostra será dada por:

$$n = \frac{z^2_{(1-\alpha)}}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{4}$$

10.4.1 Simulações ilustrativas sobre as flutuações das proporções amostrais e o erro amostral fixado

As próximas figuras ilustram a flutuação das proporções amostrais obtidas de amostragens (com reposição) de elementos de uma população que apresentam a característica de interesse se manifestando de modo dicotômico, sob variados tamanhos amostrais (385, 210 e 100).

```
# Flutuação das proporções amostrais observadas

flut.N = function (N, n, p, conf, er) {
zc = qnorm(1-((1-conf)/2))
suc=rbinom(n=N, size = n, prob = p)
prop_suc=suc/n
dados=as.data.frame(prop_suc)
names=c("Proporção amostral")
colnames(dados)=names
row.names(dados)=NULL
meu_titulo01=paste0("Flutuação das proporções amostrais \n", N," amostras de tamanho ",n,"
 ↪  (dimensionamento sob um nível de confiança (1-\u03b1)= ",conf," e um erro amostral
 ↪  \u03b5= ", er," \nAs linhas verticais mostram a propoção populacional em azul (\u03c0=
 ↪  ", p , ") \ne os valores limites estabelecidos pelo erro arbitrado em vermelho (\u03c0
 ↪  +/-\u03b5= ",  p, "+/-", er ,")")
meu_titulo02=paste0("Os valores das proporçoes amostrais seguem uma distribuição ~ N (
 ↪  \u03bc, \u03c3) = (", round(mean(dados$`Proporção amostral`),4) ,", ",
 ↪  round(sqrt(p*(1-p)/n),4) ,")")


plot(0, 0,
type="n",
xlim=c( 0.5*min(dados$`Proporção amostral`) , 1.1*max(dados$`Proporção amostral`) ),
ylim=c(0,N),
bty="l",
xlab="Proporções amostrais observadas",
ylab="Amostras extraídas",
main="", #meu_titulo01
sub="") #meu_titulo02

for (i in 1:N) {
prop_amostral=dados$`Proporção amostral`[i]
ploty = c(i,i)
if (prop_amostral > p+er || prop_amostral < p-er)
     points(prop_amostral, i, col="red", cex=1)+text(y=i+3,x=prop_amostral,
      ↪  labels=round(prop_amostral,2), cex=1, col='red')
  else
    points(prop_amostral, i, col="black", cex=1)
segments(x0=p , y0=0, x1=p ,y1=N,col="blue", lwd=2, lty=2)
segments(x0=p-er , y0=0, x1=p-er ,y1=N,col="red", lwd=1, lty=2)
segments(x0=p+er , y0=0, x1=p+er ,y1=N,col="red", lwd=1, lty=2)
}
}
```

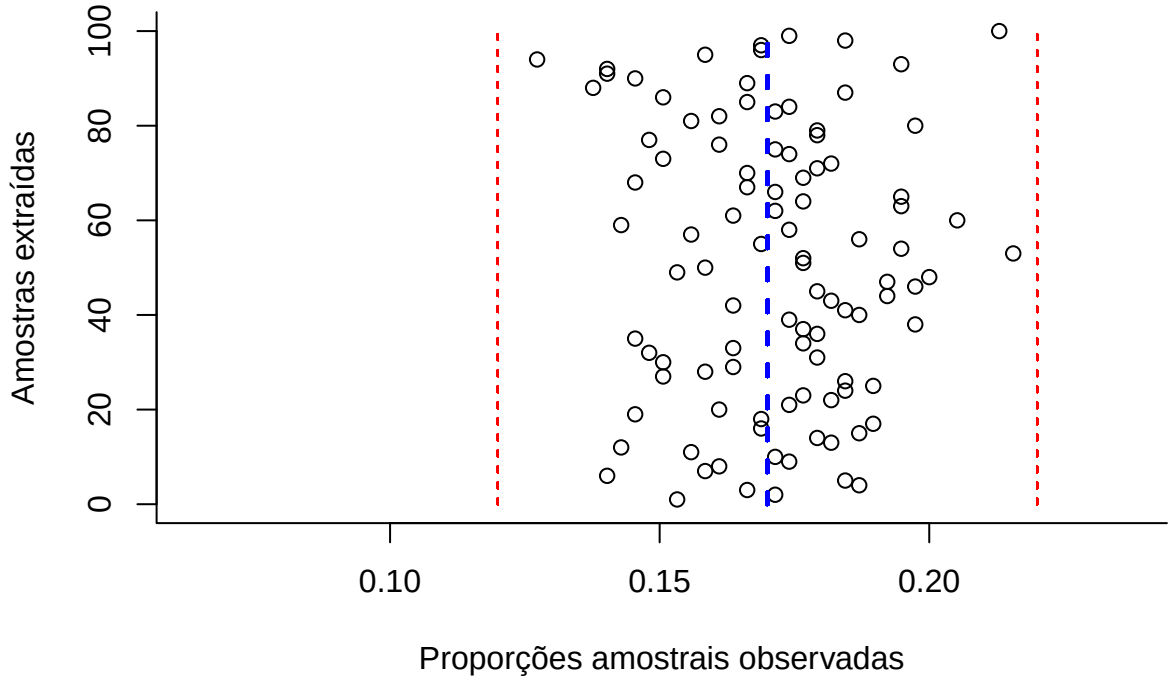


Figure 10.5: Flutuação das diversas proporções amostrais obtidas de amostragens cujo dimensionamento (385 elementos) foi estimado ignorando-se o conhecimento da proporção populacional ( ) para um nível de confiança (1-)=0,95 e um erro amostral =0,05 (em preto as proporções amostrais dentro da tolerância fixada e, em vermelho, as que aleatoriamente ultrapassam a tolerância fixada em +/-).

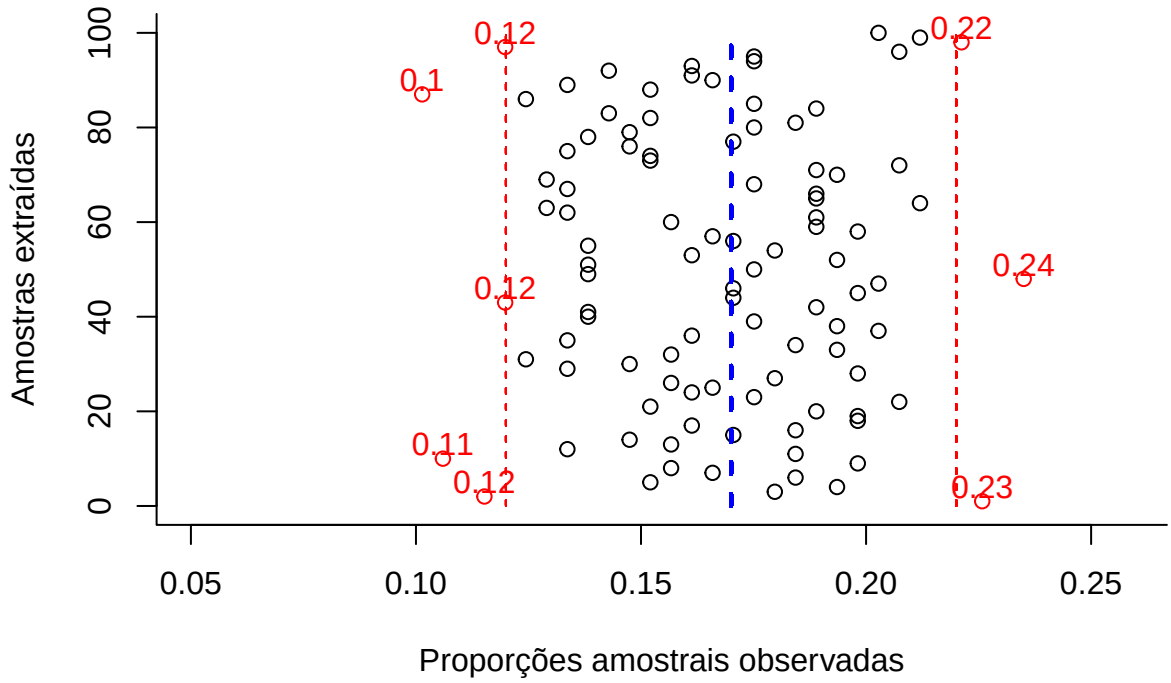


Figure 10.6: Flutuação das diversas proporções amostrais obtidas de amostragens cujo dimensionamento (217 elementos) foi estimado admitindo-se o conhecimento da proporção populacional ( ) para um nível de confiança (1-)=0,95 e um erro amostral =0,05 (em preto as proporções amostrais dentro da tolerância fixada e, em vermelho, as que aleatoriamente ultrapassam a tolerância fixada em +/-).

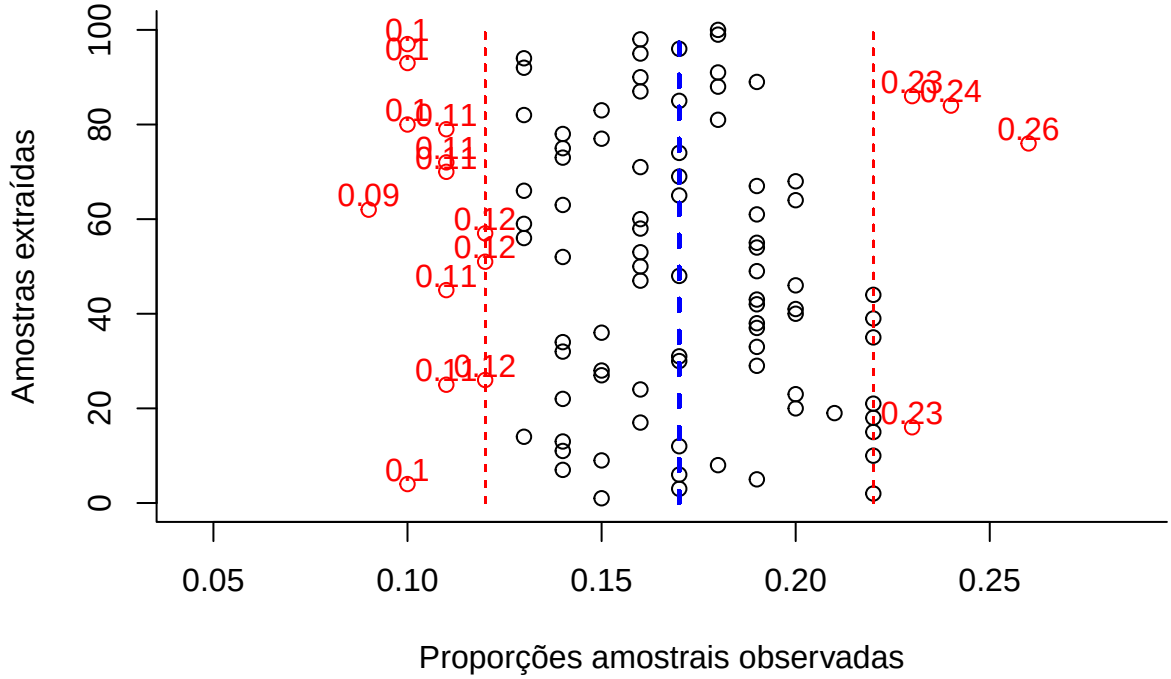


Figure 10.7: Flutuação das diversas proporções amostrais obtidas de amostragens cujo dimensionamento foi arbitrariamente fixado (100 elementos) para um nível de confiança (1-)=0,95 e um erro amostral =0,05 (em preto as proporções amostrais dentro da tolerância fixada e, em vermelho, as que aleatoriamente ultrapassam a tolerância fixada em +/-).

10.5 Intervalos de confiança para proporções amostrais

Podemos escrever o parâmetro (π) da proporção populacional em função da proporção amostral observada $\hat{p}$ e de seu desvio padrão $\sigma_{\hat{p}}$:

$$Z = \frac{\hat{p} - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \sim N(0,1),$$

ou

$$Z = \frac{\hat{p} - \pi}{\sigma_{\hat{p}}}$$

com $Z \sim N(0,1)$.

Assim,

$$\hat{p} - \pi = Z \cdot \sigma_{\hat{p}}$$

e

$$\pi = \hat{p} + Z \cdot \sigma_{\hat{p}}$$

Observa-se, todavia, que a variância da distribuição Normal da aproximação da distribuição das proporções amostrais é expressa em termos do parâmetro da proporção populacional π que não é conhecido:

$$\hat{p} \sim N[\pi; \frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}]$$

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\pi\,(1-\pi)}{n}}.$$

Demonstra-se que para:

- um razoável número de repetições: $n \geq 30$;
- de uma população onde a proporção π não é extrema: próximas a 0 ou 1; e tal que
- $(n \cdot \pi)$ e $(n \cdot (1-\pi))$ sejam maiores que 15 (alguns autores consideram limites mais brandos, iguais a 10 ou ainda a 5),

Podemos tomar a proporção amostral $\hat{p}$ como uma aproximação direta da proporção populacional π na expressão da variância da distribuição Normal que modela a distribuição das proporções amostrais sem que isso resulte em grande alteração na distribuição da variável Z.

Ou ainda, alternativamente, fazendo-se antes uma aproximação com correção de continuidade, onde definimos uma nova estimativa amostral da proporção populacional $\widehat{p}_c$ corrigida:

$$\widehat{p}_c = \widehat{p} + \frac{1}{2n}$$

se $\widehat{p} < 0,50$,

ou

$$\widehat{p}_c = \widehat{p} - \frac{1}{2n}$$

se $\widehat{p} > 0,50$.

As probabilidades associadas aos valores assumidos pela variável $Z \sim N(0,1)$: **a área sob a curva**, encontram-se tabelados e podem ser utilizados para construir intervalos de confiança para o parâmetro da proporção populacional π associados a probabilidades desejadas.

$$P[\widehat{p} - Z \cdot \sigma_{\widehat{p}} < \pi < \widehat{p} + Z \cdot \sigma_{\widehat{p}}] = (1 - \alpha)$$

Assim (com $\widehat{p}$ ou $\widehat{p}_c$) podemos construir *intervalos de confiança* em torno da proporção populacional π associados a um nível de significância estabelecido:

Bilaterais: intervalo delimitado por dois valores: mínimo e máximo, para a proporção amostral, dentro do qual todos os valores possuem um mesmo nível de significância:

$$P[\widehat{p} - z_{(\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p} \cdot (1 - \widehat{p})}{n}} \ \leq \ \pi \ \leq \ \widehat{p} + z_{(\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p} \cdot (1 - \widehat{p})}{n}}] = (1 - \alpha)$$

Unilaterais: intervalos delimitados apenas em um de seus lados nos quais todos os valores possuem um mesmo nível de significância:

- Valor máximo (limitando à direita):

$$P[\pi \leq \hat{p} + z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}] = (1-\alpha)$$

- Valor mínimo (limitando à esquerda):

$$P[\pi \ \geq \hat{p} - z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} \ ] = (1-\alpha)$$

```
# Intervalos de confiança das proporções amostrais observadas

IC.N = function (N, n, p, conf, er) {
zc = qnorm(1-((1-conf)/2)) #Z=1,96
suc=rbinom(n=N, size = n, prob = p)
prop_suc=suc/n
dados=as.data.frame(prop_suc)
dados$lim_sup=dados$prop_suc + zc*sqrt(dados$prop_suc*(1-dados$prop_suc)*(1/n))
dados$lim_inf=dados$prop_suc - zc*sqrt(dados$prop_suc*(1-dados$prop_suc)*(1/n))
names=c("Proporção amostral", "lim superior", "lim inferior")
colnames(dados)=names
row.names(dados)=NULL
meu_titulo001=paste0("Intervalos com iguais níveis de confiança fixados em ", 100*conf, "%
 ↪  \n(",N," amostras de tamanho ",n,") \nAs linhas verticais mostram a propoção
 ↪  populacional em azul (\u03c0: ", p , ") \ne a média das proporções amostrais em vermelho
 ↪  ( \u0070\u0302: ",round(mean(dados$`Proporção amostral`),4) , ").")
meu_titulo002=paste0("Parâmetros da distribuição da população Normal aproximada ( \u03bc,
 ↪  \u03c3) = (", round(mean(dados$`Proporção amostral`),4) ,", ", round(sqrt(p*(1-p)/n),4)
 ↪  ,")")



plot(0, 0,
type="n",
xlim=c( 0.5*min(dados$`lim inferior`) , 1.1*max(dados$`lim superior`) ),
ylim=c(0,N),
bty="l",
xlab="Proporções amostrais observadas",
ylab="Amostras extraídas",
main="", #meu_titulo001
```

```
sub="") #meu_titulo002

for (i in 1:N) {
prop_amostral=dados$`Proporção amostral`[i]
li = dados$`lim inferior`[i]
ls = dados$`lim superior`[i]
plotx = c(li,ls)
ploty = c(i,i)
if (li > p | ls < p) lines(plotx,ploty, col="red", lwd=2, lend=0)
  else lines(plotx,ploty, lend=0)
    if (li > p | ls < p) points(prop_amostral, i, col="red",
     ↪  cex=1)+text(y=i+3,x=prop_amostral, labels=round(prop_amostral,1), cex=1, col='red')
      else points(prop_amostral, i, col="black", cex=1)
segments(x0=mean(dados$`Proporção amostral`) , y0=0, x1=mean(dados$`Proporção amostral`)
 ↪  ,y1=N,col="red", lwd=2, lty=2)
segments(x0=p , y0=0, x1=p ,y1=N,col="blue", lwd=2, lty=1)
}
}
```

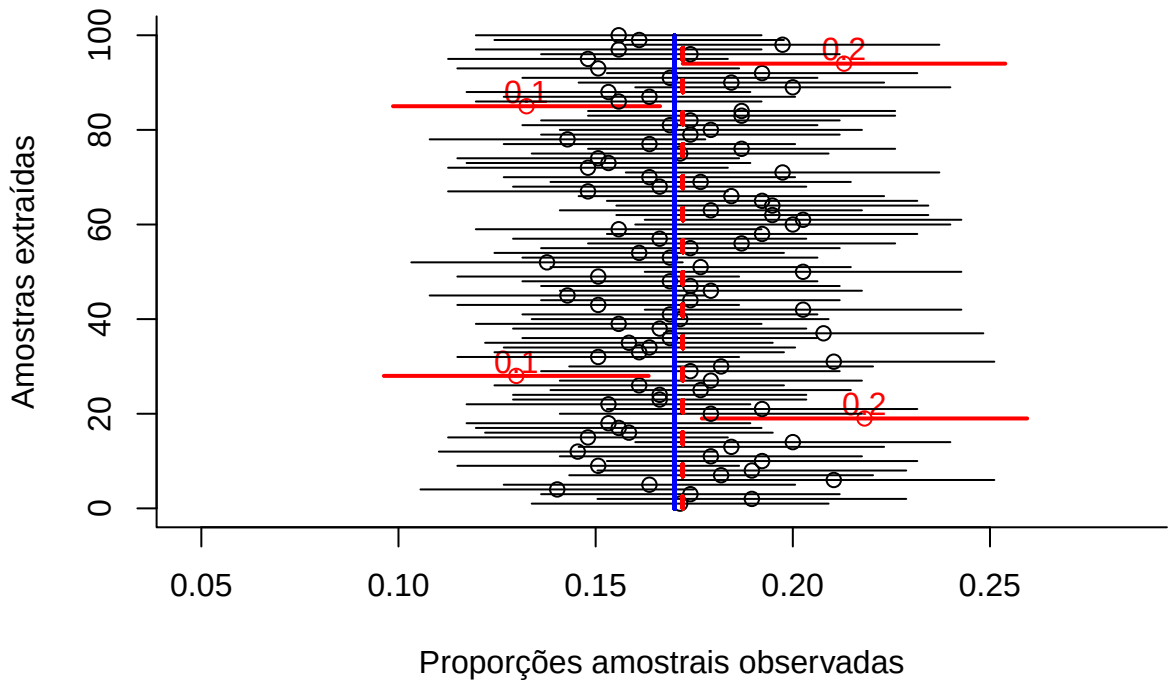


Figure 10.8: Intervalos de confiança construídos para as diversas proporções amostrais obtidas de amostragens (com reposição) de elementos de uma população que apresentam a característica de interesse se manifestando de modo dicotômico. O dimensionamento foi estimado ignorando-se o conhecimento da proporção populacional ( ) para um nível de confiança (1-) e um erro amostral ( ) estipulados: 385 elementos.

Exemplo: Em uma amostra aleatória, 136 pessoas de um grupo de 400 que receberam a vacina contra gripe, declararam haver sentido algum efeito colateral. Construa um intervalo com 95% de confiança para a verdadeira proporção populacional da ocorrência de efeitos colaterais vacinais .

Dados do problema:

- $\hat{p} = \frac{136}{400} = 0,34$ é a *proporção amostral* observada;
- o tamanho amostral ($n = 400$) é grande e a proporção amostral ($\hat{p} = 0,34$) não é extrema (próxima a zero ou um);

- π é a proporção populacional (desconhecida); e,
- para o nível de confiança solicitado ($(1-\alpha) = 0,95$) temos da tabela $z_{(\frac{\alpha}{2})} = +/-1,96$.

Um intervalo bilateral (fechado) para a proporção populacional desconhecida (π) sob um nível de confiança $(1-\alpha)$ de 0,95 estará delimitado:

$$\begin{aligned}
\hat{p} - z_{(\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} \leq & \pi \leq \hat{p} + z_{(\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} \\
0,34 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,34 \cdot (1-0,34)}{400}} \leq & \pi \leq 0,34 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,34 \cdot (1-0,34)}{n}} \\
0,2936 \leq & \pi \leq 0,3864
\end{aligned}$$

Exemplo: Em uma amostra aleatória de 2000 eleitores do Brasil constatou-se uma intenção de voto de 43% para um candidato à presidência. Realizada a eleição, deseja-se inferir qual o intervalo de variação da proporção populacional a um nível de confiança de 99%.

Dados do problema:

- $\hat{p} = 0,43$ é a *proporção amostral* observada;
- o tamanho amostral ($n = 2000$) é grande e a proporção amostral ($\hat{p} = 0,43$) não é extrema (próxima a zero ou um);

- π é a proporção populacional (desconhecida); e,
- para o nível de confiança solicitado ($(1-\alpha) = 0,99$) temos da tabela $z_{(\frac{\alpha}{2})} = +/-2,58$.

Um intervalo bilateral (fechado) para a proporção populacional desconhecida (π) sob um nível de confiança $(1-\alpha)$ de 0,99 estará delimitado:

$$\begin{aligned}
\widehat{p} - z_{(\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p} \cdot (1-\widehat{p})}{n}} \leq & \pi \leq \widehat{p} + z_{(\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p} \cdot (1-\widehat{p})}{n}} \\
0,43 - 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,43 \cdot (1-0,43)}{2000}} \leq & \pi \leq 0,43 + 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,43 \cdot (1-0,43)}{2000}} \\
0,4014 \leq & \pi \leq 0,4586
\end{aligned}$$

10.5.1 Intervalos de confiança para a diferença entre duas proporções amostrais

Para a construção de um intervalo de confiança para a diferença de duas proporções populacionais π_X e π_Y a partir das proporções obtidas em duas amostras de razoável tamanho ($n_X \geq 30$ e $n_Y \geq 30$) e proporções amostrais $\widehat{p}_X$ e $\widehat{p}_Y$ não extremas (próximos a zero ou um) demosntra-se que a variável aleatória dessa diferença é tal que

$$Z = \frac{(\widehat{p}_X - \widehat{p}_Y) - (\pi_X - \pi_Y)}{\sqrt{\frac{\pi_X(1-\pi_X)}{n_X} + \frac{\pi_Y(1-\pi_Y)}{n_Y}}} \sim N(0,1),$$

Sob as condições anunciadas, demostran-se que se pode tomar as proporções amostrais $\widehat{p}_X$ e $\widehat{p}_Y$ como aproximações diretas das proporções populacionais π_X e π_Y na expressão da variância da distribuição Normal que modela a distribuição das diferenças das proporções amostrais sem que isso resulte em grande alteração na distribuição da variável Z.

$$Z = \frac{(\widehat{p}_X - \widehat{p}_Y) - (\pi_X - \pi_Y)}{\sqrt{\frac{\widehat{p}_X(1-\widehat{p}_X)}{n_X} + \frac{\widehat{p}_Y(1-\widehat{p}_Y)}{n_Y}}} \sim N(0,1),$$

Assim podemos construir *intervalos de confiança* em torno da diferença das proporções populacionais π_X e π_Y associados a um nível de significância estabelecido:

Bilaterais: intervalo delimitado por dois valores: mínimo e máximo, para a proporção amostral, dentro do qual todos os valores possuem um mesmo nível de significância:

$$P\left[(\hat{p}_X - \hat{p}_Y) - z_{(\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_X} + \frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_Y}} \leq (\pi_X - \pi_Y) \leq (\hat{p}_X - \hat{p}_Y) + z_{(\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_X} + \frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_Y}}\right] = (1-$$

Unilaterais: intervalos delimitados apenas em um de seus lados nos quais todos os valores possuem um mesmo nível de significância:

- Valor máximo (limitando à direita):

$$P\left[(\pi_X - \pi_Y) \leq (\hat{p}_X - \hat{p}_Y) + z_{(\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_X} + \frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_Y}}\right] = (1-\alpha)$$

- Valor mínimo (limitando à esquerda):

$$P\left[(\pi_X - \pi_Y) \geq (\hat{p}_X - \hat{p}_Y) - z_{(\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_X} + \frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_Y}}\right] = (1-\alpha)$$

Módulo 11

Introdução a testes de hipóteses

11.1 Filosofia da ciência

> Estritamente falando, todo o conhecimento fora da matemática, da lógica demonstrativa (um ramo da mesma) e da taxonomia encontra-se fundamentado em hipóteses (naturalmente há inúmeros tipos de hipóteses, mas as que estamos a nos referir são altamente confiáveis, como as expressas em certas leis gerais da física e da química como, por exemplo, a Lei de Hooke as Leis de Kepler dentre tantas outras).

O *raciocínio lógico demonstrativo* permeia as ciências até onde a matemática lhe suporta; todavia, em si (assim como também a matemática), é incapaz de gerar novos conhecimentos sobre o mundo que nos rodeia.

> O *método lógico demonstrativo* é próprio para objetos que existem apenas *idealmente*, que são construídos inteiramente pelo nosso pensamento.

> O *método hipotético experimental* é próprio das ciências naturais (física, química, biologia, etc.), que observam seus objetos e realizam experimentos.

Hipotético porque os cientistas partem de hipóteses sobre os objetos que guiam os experimentos e a avaliação dos resultados e *experimental* porque se baseia em observações e em experimentos, tanto para formular quanto para verificar as teorias.

O método hipotético experimental pode ser indutivo (fatos $\rightarrow$ lei geral) ou dedutivo (lei geral $\rightarrow$ fatos):

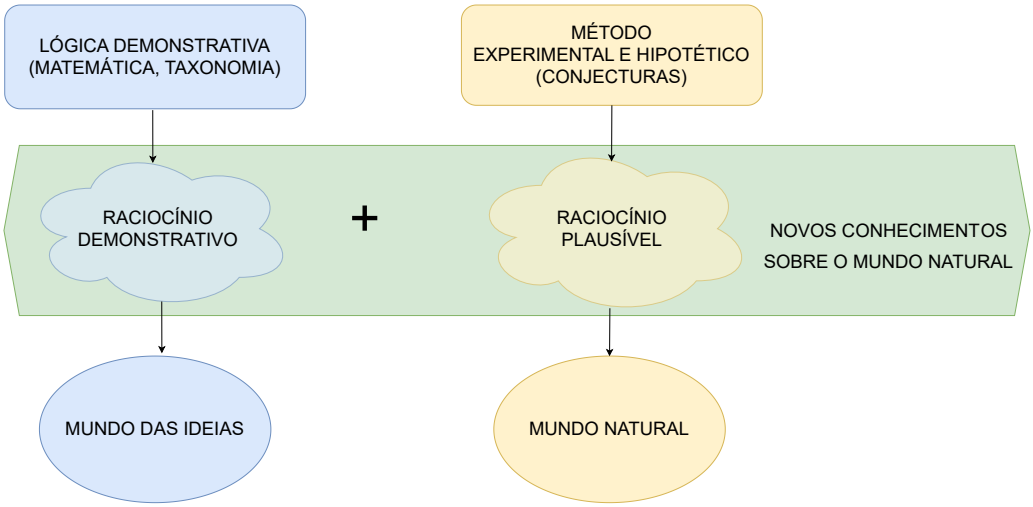


Figure 11.1: Método demonstrativo e Método experimental hipotético (George Polya, 1954)

Hipotético-indutivo porque o cientista observa inúmeros fatos variando as condições da observação; elabora uma hipótese e realiza novos experimentos (ou induções) para confirmar ou negar a hipótese; se esta não for negada, chega-se à lei do fenômeno estudado.

Hipotético-dedutivo porque tendo chegado à lei, o cientista pode formular novas hipóteses, deduzidas do conhecimento já adquirido, e com elas prever novos fatos, ou formular novas experiências, que o levam a conhecimentos novos.

Em muitos processos de investigação científica é frequente ao pesquisador formular perguntas que deverão ser apropriadamente respondidas.

- comparar esses resultados a outros valores; ou,
- comparar resultados obtidos pela aplicação de diferentes métodos/ou produtos (valores centrais, variabilidade, proporções) observados em diferentes amostras.

Uma hipótese é uma conjectura racional feita após um grande número de observações e experimentos; é uma tese que precisa ser confirmada ou verificada por meio de novas observações e experimentos.

Uma hipótese estatística é uma suposição feita sobre uma determinada característica de interesse de uma população sob estudo (um parâmetro) que subsiste (perdura, sobrevive, permanece incontestável) até que alguma informação sobre essa população seja estatisticamente significativa para contradizê-la.

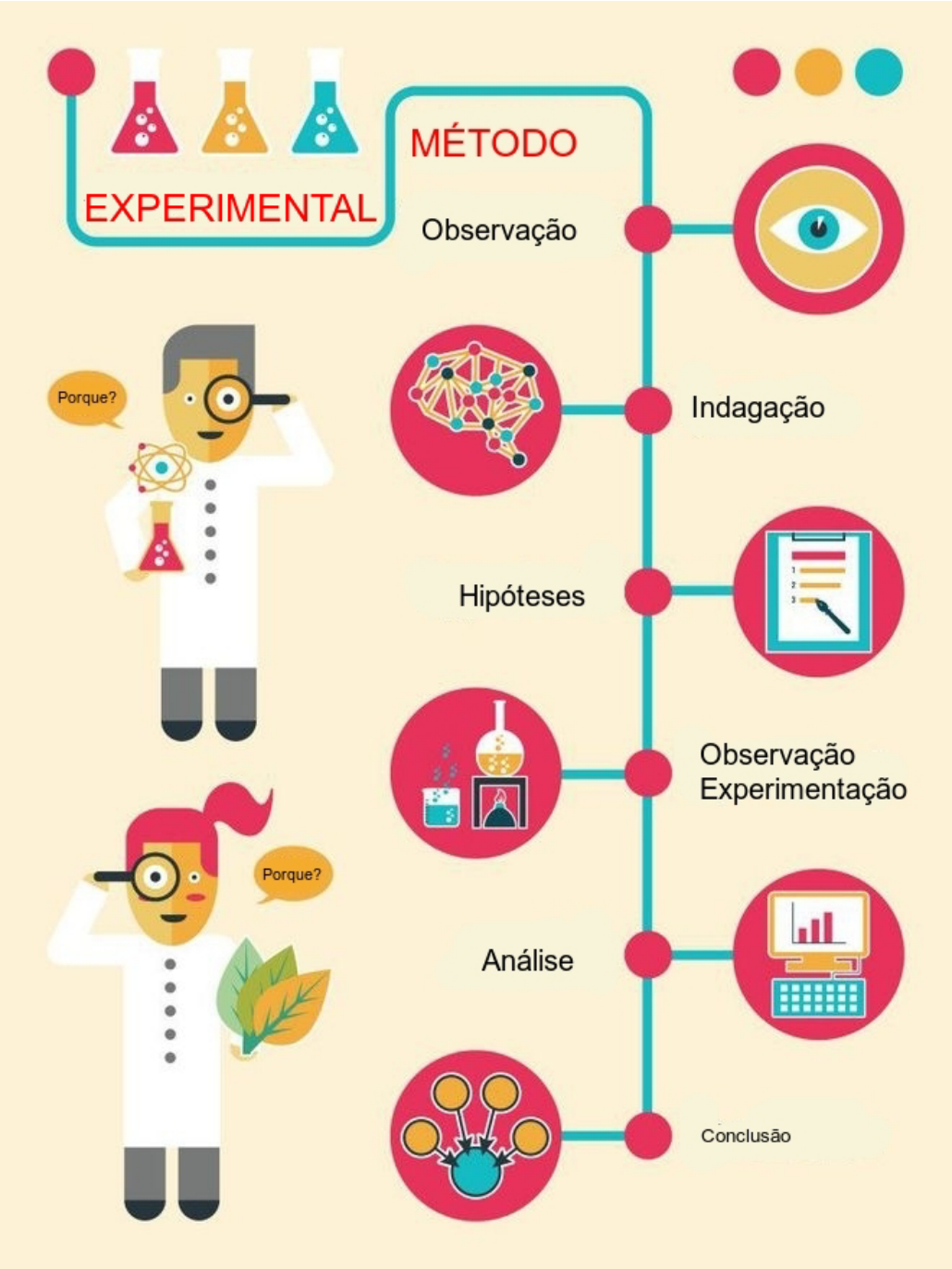


Figure 11.2: Método experimental hipotético

"A ciência não consegue provar coisa alguma. Ela pode apenas refutar as coisas'' (Karl Popper)

Uma teoria científica é, portanto, transitória. Uma conjectura temporariamente sustentada que um dia poderá ser refutada e substituída por outra. Conclusões baseadas em raciocínios plausíveis são provisórias, ao contrário daquelas produzidas por raciocínios lógico demonstrativos.

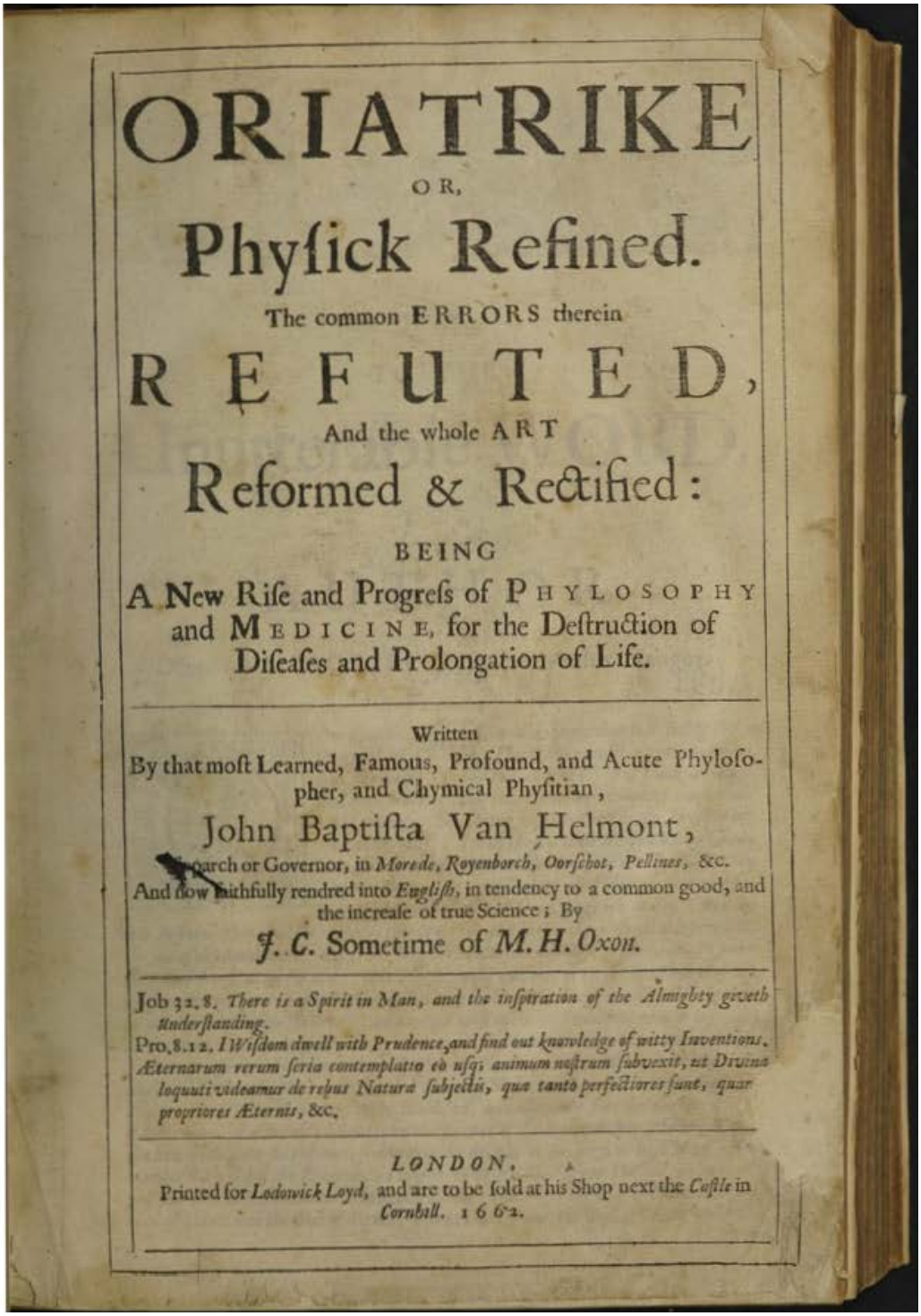
Um teste de hipóteses refere-se, portanto, a um método quantitativo subsidiário em processos de decisão, baseado na inferência estatística e de ampla aplicabilidade na experimentação e pesquisa; virtualmente, em qualquer área do conhecimento.

11.2 História

Antigas referências relativas a testes de valores remontam aos séculos XVIII e XIX. Historicamente podemos retroceder a 1662, quando o médico flamengo Jean Baptista Van Helmont escreveu um desafio (*aposta de 300 florins*) em seu livro (Figura 11.4), sobre um *procedimento teste* que consistiria em se dividir 200 ou 500 pacientes com febre e pleurite em dois grupos iguais e aplicar a eles diferentes tratamentos: os habitualmente adotados pelos médicos da época e os seus próprios métodos. Ao final de um período de tempo (não foi especificado) verificar quantos *funerais* ocorreriam num e no outro (o livro foi publicado após sua morte, ocorrida em 1944, e não se tem registro sobre sua realização efetiva).

Outro registro histórico é o artigo publicado em 1710 na *Royal Society's Philosophical Transactions* pelo médico escocês John Arbuthnot (1667-1735, Figura 11.5): *An argument for Divine Providence* (link).

Este artigo foi um marco na história da estatística; em termos modernos, ele realizou testes de hipóteses estatísticas, calculando o p-valor através de um teste de sinais e interpretou-o como estatisticamente significante e assim rejeitou a hipótese nula. Isso é creditado como "[...] o primeiro uso de testes de significância [...]" (*in* "Estatísticos do século", David Bellhouse, 2001).



ORIATRIKE

OR,

Physick Refined.

The common ERRORS therein

REFUTED,

And the whole ART

Reformed & Rectified:

BEING

A New Rise and Progress of PHYLOSOPHY and MEDICINE, for the Destruction of Diseases and Prolongation of Life.

Written

By that most Learned, Famous, Profound, and Acute Phylosopher, and Chymical Physitian,

John Baptista Van Helmont,

Monarch or Governor, in *Morede, Royenborch, Oorschot, Pellines*, &c.

And now faithfully rendred into *English*, in tendency to a common good, and the increase of true Science; By

J. C. Sometime of *M. H. Oxon.*

Job 32. 8. *There is a Spirit in Man, and the inspiration of the Almighty giveth understanding.*

Pro. 8. 12. *I Wisdom dwell with Prudence, and find out knowledge of witty Inventions.*

Æternarum rerum seria contemplatio eò usq; animum nostrum subvexit, ut Divina loquuti videamur de rebus Naturæ subjectis, quæ tanto perfectiores sunt, quanto propriores Æternis, &c.

LONDON.

Printed for *Lodowick Loyd*, and are to be sold at his Shop next the *Castle* in *Cornhill*. 1 6 6 2.

Figure 11.3: Oriatrike or, physick refined. The common errors therein refuted, and the whole art reformed and rectified: being a new rise and progress of phylosophy and medicine, for the destruction of diseases and prolongation of life (p. 526)

Figure 11.4: Tratamento mais utilizado à época (sangria)

Figure 11.5: John Arbuthnot, FRS (1667-1735)

A estruturação dos testes de hipóteses, tal como são promovidos atualmente, é devida à metodológia empreendida por alguns dos mais destacados cientistas da área do final do século XIX e começo do XX (Figura 11.6).

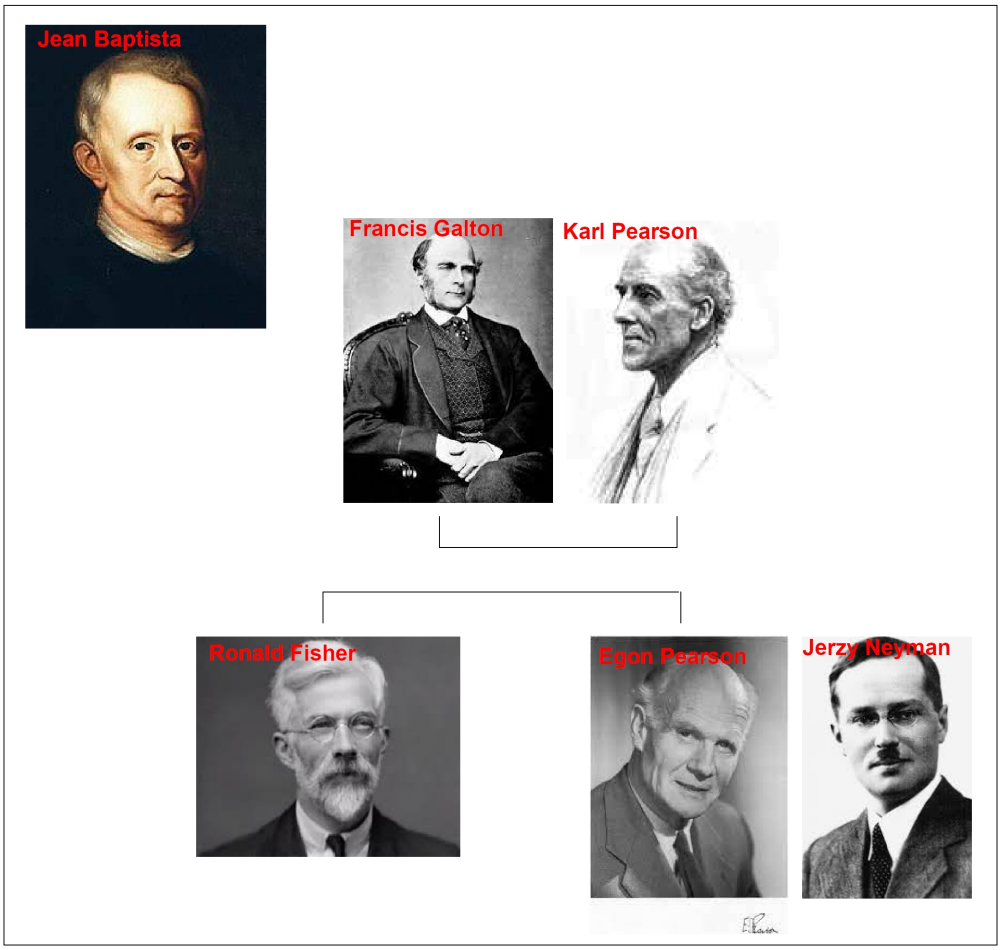


Figure 11.6: Personagens históricos

Em 1932 Karl Pearson se aposentou com professor da *University College London* e diretor do Laboratório Galton de eugenia. Apesar das objeções de Fisher, o laboratório de estatística foi dividido em dois departamentos. O Departamento de estatística (criado em 1901, o primeiro do gênero em uma universidade), assumido pelo filho mais novo de Karl, Egon; e o Laboratório de eugenia, assumido por seu sucessor na cadeira de Eugenia, Ronald Fisher.

O artigo de Henry F. Inman (*Karl Pearson and R. A. Fisher on Statistical Tests: A 1935 Exchange From Nature*, 1994) registra uma intensa troca de correspondências entre Fisher e Pearson tendo por assunto suas diferenças conceituais matemáticas e estatísticas, pela contrariedade de Pearson ante a continuidade de Fisher em lecionar teoria estatística e até mesmo por espaço físico para os experimentos científicos de Fisher, ao remover material do Museu de eugenia deixado por Pearson.

O pensamento estatístico da primeira metade do século XXI tem seu interesse voltado à solução dos problemas de testes de hipóteses e sua formulação e filosofia, tal como hoje são conhecidos, foi em grande parte criada por Ronald Aylmer Fisher (1890-1962), Jerzy Neyman (1894-1981) e Egon Sharpe Pearson (1895-1980) no período compreendido entre 1915-1933:

- Estudo biológico realizado por Karl Pearson para tentar associar informações coletadas a distribuições de probabilidade apresentava os componentes básicos de um teste de hipóteses;

- Ronald Fisher (1925): *Statistical Methods for Research Workers*;
- George Waddel Snedecor (1940): *Statistical Methods*; e,

- Erich Leo Lehmann (1959): *Testing Statistical Hypotheses* condensando os estudos desenvolvidos em 1920 pelo filho de Pearson, Egon, e o matemático polonês, Jerzy Neyman (formulação de *Neyman-Pearson*).

11.3 Conceitos

A metodologia analisada na estruturação do método dos testes de hipóteses no fornece elementos auxiliares da decisão de rejeitar ou não - sob um prisma probabilístico - determinada conjectura postulada acerca de um parâmetro da população estudada.

A *conclusão* de um teste de hipóteses resume-se a: *aceitar* ou *rejeitar* uma hipótese. Muitos estatísticos não adotam a expressão *aceitar* uma hipótese preferindo, no lugar, usar a expressão *não rejeitar* a hipótese sob um certo nível de significância.

Por que essa distinção entre *aceitar* e *não rejeitar*?

Ao se usar a expressão *aceitar* pode haver uma pré-concepção de que a hipótese é universalmente verdadeira (lembrando que a conclusão encontra-se alicerçada simplesmente em uma amostra).

Utiliando-se a expressão *não rejeitar* salienta-se que a informação trazida pelos dados (a amostra) não foi *suficientemente* robusta para que pudéssemos abandonar essa hipótese em favor de uma outra.

Alguns dizem que os estatísticos não se perguntam qual a probabilidade de estarem *certos*; mas de não estarem *errados*.

Um *teste de hipóteses* guarda uma certa semelhança a um julgamento. Caso não haja indício forte o suficiente que comprove a culpa do acusado ele é declarado como inocente (mesmo que não o seja de fato). No contexto estatístico, os *indícios* que nos levam a rejeitar uma hipótese provêm da análise de informações observadas na amostra.

> A *hipótese nula* (H0) é a hipótese inicial, a que reflete a situação em que não há mudança. É pois uma *hipótese conservadora* (resultado de experimentos anteriores).

> A *hipótese alternativa* (H1) contradiz aquilo anunciado pela hipótese nula, é uma *hipótese inovadora*.

Inicialmente a hipótese nula ela é assumida como verdadeira para, logo a seguir, ser confrontada novas evidências amostrais para se verificar a sustentabilidade de sua afirmação:

- caso a informação amostral demonstre a consistência de hipótese nula tudo o que pode ser feito é se decidir por sua manutenção (falho na tentativa de se derrubar a hipótese conservadora); e,
- caso não seja, analisa-se quão improvável pode ser a informação amostral além de uma dúvida razoável ou mera coincidência (nível de significância).

> "Em relação a qualquer experimento não devemos falar desta hipótese como a *hipótese nula*, e deve-se atentar que a *hipótese nula* nunca é provada ou estabelecida, mas é, possivelmente, refutada, no decorrer da experimentação. Todo experimento deve existir apenas para das aos fatos a chance de refutar a *hipótese nula...*'' (*The Design of Experiments*, Ronald Aylmer Fisher, 1935, p. 19)

O objetivo de um teste de hipóteses é, pois, o de tomar uma decisão no sentido de verificar se existem razões para rejeitar ou não a hipótese nula. Esta decisão é baseada na informação disponível, obtida a partir de uma amostra, que se recolhe da população.

Teste de hipóteses nos possibilitam associar um *nível de significância* (α) como medida probabilística do erro que se pode incorrer ao se concluir pela *rejeição* de uma *hipótese verdadeira*, na tomada de decisão.

> Nível de significância (α) é estabelecido pelo pesquisador (baseado tanto na expertise dele, quanto no campo a que o estudo pertence) antes do experimento ser realizado e corresponde ao grau do risco que se deseja incorrer ao se "rejeitar" uma hipótese verdadeira.

Nível de confiança $(1 - \alpha)$ é a medida da confiabilidade de nossa conclusão no teste de hipóteses: "não rejeitar" uma hipótese verdadeira.

11.4 Natureza dos erros

Para introduzir os conceitos relacionados aos erros considere uma situação onde uma empresa produz lâmpadas e a vida útil média, em horas, dessas lâmpadas segue uma distribuição Normal tal que $VU \sim N(1600, 120)$.

Se não temos conhecimento algum sobre a real vida útil média dessas lâmpadas e alguém nos afirma que a vida útil é de 1.600 h, para confirmar ou não essa proposição (de um modo "científico'') devemos extrair uma amostra.

Usando conceitos já explicados em uma unidade anterior podemos determinar o tamanho amostral em função de:

- um erro máximo tolerado: ε=20 horas;
- um nível de significância estabelecido: α=0,05; e,
- e alguma informação sobre a medida da variabilidade da variável em estudo: σ=120 horas (no caso, o desvio padrão populacional).

```
##       mu media      erro   li   ls
## 1   1600  1599  -1.28298 1581 1616
## 2   1600  1610  10.31374 1590 1630
## 3   1600  1610   9.72937 1591 1628
## 4   1600  1609   9.42746 1589 1629
## 5   1600  1612  11.79006 1593 1630
## 6   1600  1576 -23.82380 1556 1597
## 7   1600  1597  -3.45468 1577 1617
## 8   1600  1605   4.90413 1585 1625
## 9   1600  1606   5.95376 1586 1626
## 10  1600  1586 -14.07798 1568 1604
## 11  1600  1603   2.71194 1582 1623
## 12  1600  1621  21.16351 1600 1642
## 13  1600  1597  -3.32827 1578 1616
## 14  1600  1597  -2.55934 1576 1619
## 15  1600  1605   4.96904 1587 1623
```

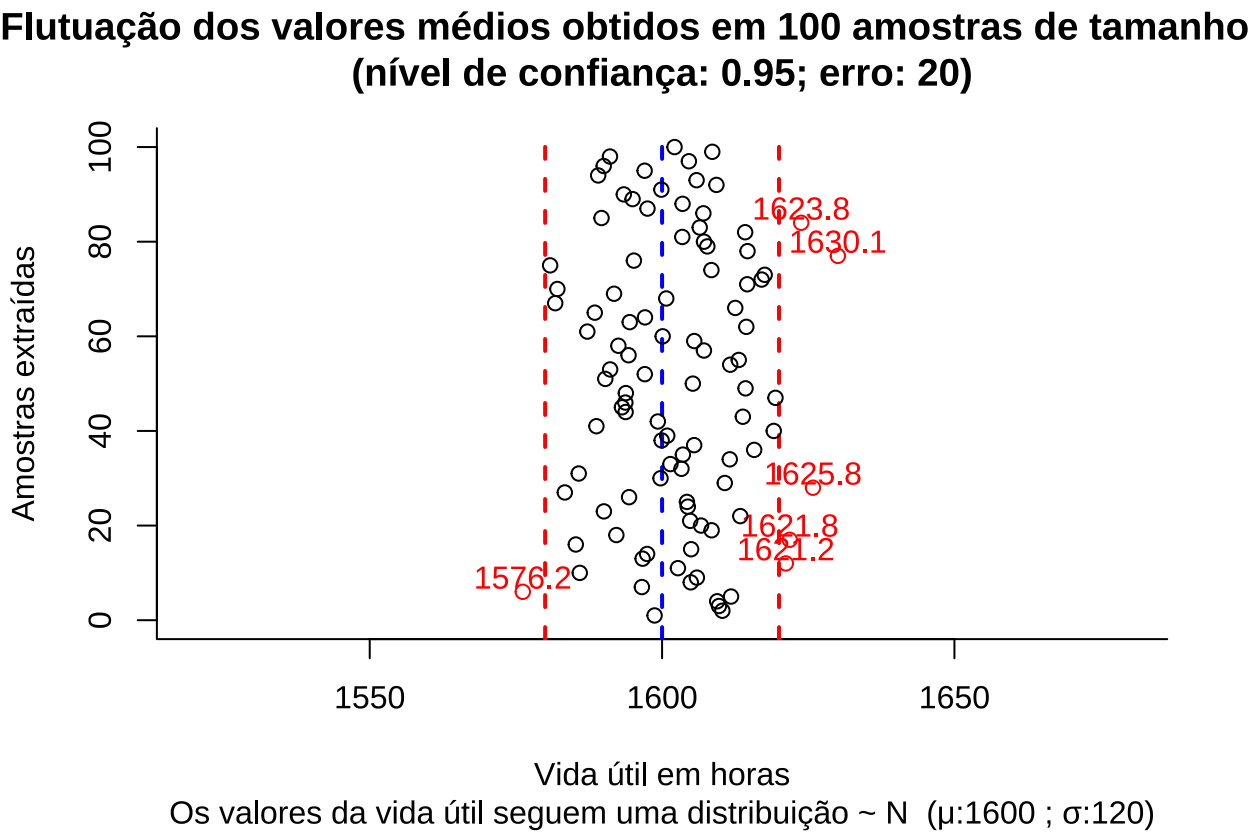


Figure 11.7: Flutuação dos valores médios para diversas amostras extraídas de uma mesma população distribuição $\sim N(\mu; \sigma)$

```
## 16  1600  1585 -14.75471 1566 1604
## 17  1600  1622  21.82528 1603 1641
## 18  1600  1592  -7.82032 1572 1612
## 19  1600  1608   8.47467 1588 1629
## 20  1600  1607   6.66563 1590 1623
## 21  1600  1605   4.80921 1585 1624
## 22  1600  1613  13.37784 1592 1635
## 23  1600  1590  -9.95360 1569 1611
## 24  1600  1604   4.40454 1586 1623
## 25  1600  1604   4.25039 1584 1624
## 26  1600  1594  -5.64438 1574 1615
## 27  1600  1583 -16.63692 1563 1604
## 28  1600  1626  25.80603 1607 1644
## 29  1600  1611  10.72452 1591 1630
## 30  1600  1600  -0.26578 1580 1620
## 31  1600  1586 -14.25466 1567 1605
## 32  1600  1603   3.31641 1584 1623
## 33  1600  1601   1.42903 1582 1621
## 34  1600  1612  11.57494 1592 1631
## 35  1600  1604   3.55715 1585 1622
## 36  1600  1616  15.75280 1596 1636
## 37  1600  1605   5.48851 1585 1626
## 38  1600  1600  -0.07375 1577 1622
## 39  1600  1601   0.87991 1583 1619
## 40  1600  1619  19.10051 1600 1638
## 41  1600  1589 -11.23144 1568 1609
## 42  1600  1599  -0.72346 1578 1620
## 43  1600  1614  13.81179 1594 1633
## 44  1600  1594  -6.23836 1575 1613
## 45  1600  1593  -6.86750 1573 1613
## 46  1600  1594  -6.28071 1572 1616
## 47  1600  1619  19.39075 1600 1639
## 48  1600  1594  -6.19679 1573 1614
## 49  1600  1614  14.27056 1595 1634
## 50  1600  1605   5.26146 1585 1625
## 51  1600  1590  -9.71327 1571 1610
## 52  1600  1597  -2.95483 1578 1616
## 53  1600  1591  -8.88183 1571 1611
## 54  1600  1612  11.65447 1593 1630
## 55  1600  1613  13.11346 1592 1634
## 56  1600  1594  -5.73485 1575 1614
## 57  1600  1607   7.15671 1589 1625
## 58  1600  1593  -7.47597 1572 1613
## 59  1600  1606   5.50337 1587 1624
## 60  1600  1600   0.10143 1581 1619
## 61  1600  1587 -12.78400 1568 1606
## 62  1600  1614  14.40661 1596 1633
## 63  1600  1594  -5.53546 1574 1615
## 64  1600  1597  -2.92433 1575 1619
## 65  1600  1588 -11.51032 1569 1608
## 66  1600  1613  12.51418 1594 1631
## 67  1600  1582 -18.27321 1561 1602
## 68  1600  1601   0.71635 1582 1619
## 69  1600  1592  -8.21461 1573 1611
## 70  1600  1582 -17.90380 1563 1601
## 71  1600  1615  14.56221 1595 1634
```

```
## 72  1600  1617  17.02195 1596 1638
## 73  1600  1618  17.54895 1599 1637
## 74  1600  1608   8.43566 1590 1627
## 75  1600  1581 -19.14345 1560 1602
## 76  1600  1595  -4.81842 1576 1614
## 77  1600  1630  30.06555 1609 1651
## 78  1600  1615  14.61380 1596 1633
## 79  1600  1608   7.73733 1588 1628
## 80  1600  1607   7.16860 1585 1629
## 81  1600  1603   3.45820 1583 1624
## 82  1600  1614  14.20690 1593 1635
## 83  1600  1606   6.43686 1587 1625
## 84  1600  1624  23.79359 1603 1644
## 85  1600  1590 -10.35766 1570 1609
## 86  1600  1607   7.06372 1588 1626
## 87  1600  1598  -2.49475 1576 1619
## 88  1600  1604   3.50641 1584 1623
## 89  1600  1595  -5.04358 1574 1616
## 90  1600  1593  -6.54220 1573 1614
## 91  1600  1600  -0.12257 1580 1620
## 92  1600  1609   9.29456 1588 1630
## 93  1600  1606   5.90190 1584 1628
## 94  1600  1589 -10.92785 1568 1610
## 95  1600  1597  -2.98198 1576 1618
## 96  1600  1590  -9.98441 1569 1611
## 97  1600  1605   4.58393 1585 1625
## 98  1600  1591  -8.91252 1572 1610
## 99  1600  1609   8.58717 1587 1631
## 100 1600  1602   2.13169 1580 1624
```

Observa-se que algumas das amostras, numa proporção igual ao nível de significância estabelecido quando do dimensionamento (5%), apresentam médias com valores que se afastam do valor médio populacional mais que o erro estabelecido (20 h).

> Como já informado anteriormente, um teste de hipóteses é um método quantitativo e não se baseia, sobremaneira, em impressões pessoais ou outros achismos. Os cenários a seguir foram criados apenas para tentar estabelcer um paralelo entre a probabilidade de se obter médias amostrais muito destoantes da média populacional e uma "inclinação subjetiva" em se rejeitar uma afirmação.

Considere que a sua amostra em particular é uma das que não se afasta tanto do valor que lhe afirmaram (a vida útil das lâmpadas é de 1.600 h).

Nessa situação, talvez você não se "convencesse" de que a vida útil média fosse diferente daquilo que lhe informaram e, assim, não iria recusar a afirmação.

Agora considere que a sua amostra em particular é uma das que se afasta muito do valor que lhe afirmaram.

Nessa nova situação, certamente você iria "suspeitar" que a vida útil média é diferente daquilo que lhe informaram e assim, recusar a afirmação.

Na primeira decisão, você **não recusou uma afirmação que era, de fato, verdadeira**; ao passo que na segunda, você **rejeitou uma afirmação que era verdadeira** (lembrando que você **não** sabia que a vida útil média é, de fato, 1.600 h).

Como se vê no quadro abaixo, há **dois tipos de erros** envolvidos em um teste de hipóteses e suas consequências, muitas vezes, são bem diferentes.

- Erro do tipo I e
- Erro do tipo II.

Um *erro do tipo I* ocorre quando o pesquisador rejeita uma hipótese nula quando é verdadeira. A probabilidade (limitada pelo pesquisador) de se incorrer em um *erro do tipo I* é chamada de *nível de significância* e é frequentemente denotada pela letra grega α.

Um *erro do tipo II* ocorre quando o pesquisador não rejeita uma hipótese nula que é falsa. A probabilidade de cometer um *erro do tipo II*, também chamada de *poder do teste* e é frequentemente denotada pela letra grega β.

Table 11.1: Erros envolvidos na rejeição ou não da hipótese nula

Valor real do parâmetro (desconhecido)	Não rejeitar H_0	Rejeitar H_0
H_0 verdadeira	Decisão correta probabilidade associada=$(1-\alpha)$	Erro do tipo I probabilidade associada= α
H_0 falsa	Erro do tipo II probabilidade associada=β	Decisão correta probabilidade associada =$(1-\beta)$

No quadro acima identificam-se:

- α: a probabilidade associada ao cometimento de um *erro do tipo I*: rejeitar a hipótese nula sendo ela verdadeira (arbitrado pelo pesquisador, é denominado nível de significância do teste);

- β: a probabilidade associada ao cometimento de um *erro do tipo II*: não rejeitar a hipótese nula sendo esta falsa;
- (1-α): o nível de confiança estabelecido para a decisão, a probabilidade associada em **não se rejeitar a hipótese nula** (H_0) quando ela é, de fato, verdadeira; e,
- (1-β): o *poder do teste*, a probabilidade associada em não se aceitar a hipótese nula (H_0) quando ela é, de fato, falsa.

Qual erro é o pior? Depende!

Por exemplo, se alguém testa a presença de alguma doença em um paciente, decidindo incorretamente sobre a necessidade do tratamento (ou seja, decidindo que a pessoa está doente), pode submetê-lo ao desconforto pelo tratamento (efeitos colaterais) além de perda financeira pela despesa incorrida.

Mas por outro lado, a falha em diagnosticar a presença da doença no paciente pode levá-lo à morte pela ausência de tratamento.

Outro exemplo clássico a ser citado seria o de condenar uma pessoa inocente ou libertar um criminoso.

Como não há uma regra clara sobre qual tipo de erro é o pior recomenda-se quando se usa dados para testar uma hipótese observar com muito cuidado as consequências que podem seguir os dois tipos de erros. Vários especialistas sugerem o uso de uma tabela como a abaixo para detalhar as consequências de um erro Tipo 1 e Tipo 2 em sua análise específica.

Table 11.2: Consequências da tomada de decisão face aos erro envolvidos

H_0 explicada	Erro tipo 1: rejeitar H_0 quando verdadeira	Erro tipo II: não rejeitar H_0 quando falsa
O medicamento "A" não alivia a Condição "B"	O medicamento "A" não alivia a Condição "B", mas não é eliminado como opção de tratamento	O medicamento "A" alivia a condição "B", mas é eliminado como opção de tratamento
Consequências	Pacientes com Condição "B" que recebem o Medicamento "A" não obtêm alívio. Eles podem experimentar piora da condição e/ou efeitos colaterais, até e incluindo a morte. A empresa produtora do medicamento pode enfrentar processos judiciais	Um tratamento viável permanece indisponível para pacientes com Condição "B". Os custos de desenvolvimento são perdidos. O potencial lucro pela produção do medicamente "A" pela empresa é eliminado.

É desejável conduzir o teste de um modo a manter a probabilidade de ambos os tipos de erro em um mínimo.

- aumentar o tamanho amostral reduz a probabilidade associada ao cometimento de erro do tipo II (β) e, consequentemente, aumenta o poder do teste $(1-\beta)$;
- aumentar o nível de significância (α) tem implicação direta na probabilidade associada ao cometimento de erro do tipo I todavia reduz a probabilidade associada ao cometimento de erro do tipo II (β).

11.5 Recomendações gerais

- o pesquisador deve delimitar o objeto de sua pesquisa;

- uma boa hipótese deve ser baseada em uma boa pergunta sobre o objeto do estudo;
- deve ser simples e específica;
- deve ser formulada na fase propositiva da pesquisa e não após a coleta de dados (*post hoc*);
- enunciar as hipóteses: as hipóteses são apresentadas de tal maneira que sejam **mutuamente exclusivas** (o que afirmado por uma deve ser contradito pela outra);

- as hipóteses são comumente denominadas por hipótese nula (H_0) e hipótese alternativa (H_1);
- a hipótese nula (H_0) que será testada sob um nível de significância (α) é, em geral, de concordância com o parâmetro que se estuda da população (conservadora) e baseada em conhecimento prévio;
- a hipótese alternativa (H_1) é contrária, oposta, antagônica à hipótese nula (novadora); e,
- estabelecer um nível apropriado para a significância α (em alguns campos do conhecimento níveis de significância muito reduzidos são impraticáveis).

11.6 Efeito do limite central

Seja $X_1, X_2, ...$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, cada uma com média finita $\mu = E(X_i)$.

A Lei forte dos grandes números (teorema) demonstra que

$$\frac{X_1 + X_2 + ..., X_n}{n} \to \mu$$

quando $n \to \infty$.

Isto é, $P\{lim_{\to\infty}(\frac{X_1+X_2\cdots+X_n}{n}) = \mu\} = 1$

11.6.1 Erro global

O erro global ($\varepsilon = X - \mu$) é um agregado de componentes. Uma medida (observação) obtida em um ensaio experimental específico pode estar sujeita a erros:

- analíticos;
- de amostragem (física, química, biológica, ...);

- processuais (produzido por falhas no cumprimento das configurações exatas das condições experimentais);
- erros devidos à variação de matérias-primas;
- medição (diferentes operadores de equipamentos ou equipamentos descalibrados).

Assim, ε será uma função linear de componentes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ de erros. Se cada erro individual for relativamente pequeno, será possível aproximar o erro global como uma função linear dos componentes de erros, onde a são constantes:

$$\varepsilon = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + ... + a_n\varepsilon_n$$

O Teorema do limite central afirma que, sob condições quase sempre satisfeitas no mundo real da experimentação, a distribuição de tal função linear de erros tenderá à uma distribuição Normal quando o número de seus componentes torna-se grande, **independentemente** da distribuição original da população de onde suas amostras geradoras se originaram.

Seja $X_1, \dots, X_n$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com média μ e variância σ^2.

A distribuição assumirá um perfil

$$\frac{X_1 + X_2 \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

quando $n \to \infty$.

Assim, para $-\infty < a < \infty$,

$$P\{\frac{X_1 + X_2 \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\} \to \mathcal{N}(0,1)$$

quando $n \to \infty$.

Denotando-se de um modo alternativo, podemos então definir a estatística Z e sua correspondente distribuição como

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}\left(\bar{X} - \mu\right)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Ou seja, Z é uma variável aleatória que segue a distribuição Normal com média zero e desvio-padrão unitário (Normal padronizada).

> Em resumo: quando, como é habitual, um erro experimental é um agregado de vários erros de componentes, sua distribuição tende para a forma Normal, mesmo a distribuição dos componentes pode ser marcadamente não Normal;

A média da amostra tende a ser distribuída Normalmente, mesmo que as observações individuais em que se baseia não o sejam. Consequentemente, métodos estatísticos que dependam, não diretamente da distribuição das observações individuais, mas na distribuição das médias tendem a ser insensíveis ou robustos à não normalidade.

Procedimentos que comparam médias são geralmente robustos à não normalidade.

11.7 Estruturas das hipóteses

11.7.1 Interpretação gráfica dos níveis de significância/confiança

O delineamento de um teste de hipóteses inclui regras de decisão para se rejeitar ou não a hipótese nula.

Essas regras de decisão passam pela comparação dos valores calculados de uma estatística apropriada para o teste em curso com seus valores extremos, frequentemente obtidos em tabelas, os quais estão associados ao complemento de uma probabilidade (o nível de confiança) de ocorrência condizente ao nível de significância estabelecido na pesquisa.

Essa comparação é por demais facilitada se visualizada no gráfico da densidade de probabilidade da distribuição da estatística do teste, onde regiões (baseadas no nível de significância estabelecido) podem ser estabelecidas:

- testes bilaterais (*hipótese alternativa do tipo: diferente de*): a região é fechada, delimitada à esquerda e à direita por valores críticos de estatística do teste;
- testes unilaterais à direita (*hipótese alternativa do tipo: maior que*): a região é fecfada à esquerda, delimitada por um valor crítico da estatística do teste e aberta à direita (ao $\rightarrow \infty$); e,
- testes unilaterais à esquerda (*hipótese alternativa do tipo: menor que*): a região é fechada à direita, delimitada por um valor crítico da estatística do teste e aberta à esquerda ($\rightarrow -\infty$).

No gráfico de densidade de probabilidade da estatística do teste temos uma primeira região frequentemente denominada de *região de não rejeição*: um intervalo de valores dentro do qual, se o valor calculado para a estatística de teste estiver contido, a hipótese nula não será rejeitada.

O intervalo de valores que delimitam a *região de não rejeição* é tal que a probabilidade dessa região é igual ao nível de confiança $(1 - \alpha)$.

Se a estatística calculada para o teste estiver fora da faixa de valores delimitada na *região de não rejeição* a hipótese nula poderá ser rejeitada sob o nível de significância α estabelecido; ou seja, a probabilidade de se incorrer em um erro *Tipo I: rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira* é igual a α.

Com a popularização dos programas estatísticos computacionais, a *probabilidade exata* associada ao valor calculado da estatística do teste passou ser neles apresentada de modo *default*, nominada pela expressão *valor p* (*p-Value*) que expressa uma probabilidade.

Para melhor entender o *valor-p* (*p-value*) suponha que o valor da estatística do teste seja igual a ζ. O *valor p* é o quantil associado (a probabiliadde exata) a ζ na distribuição de probabilidade usada como referência. Se

o *valor p* for menor que o nível de significância (α) estipulado pelo pesquisador, rejeita-se a hipótese nula sob esse nível de significância de cometimento de um erro do tipo I.

11.7.2 Teste de hipóteses Bilateral

Nesse tipo de teste a *hipótese aternativa* é proposta como a dizer que o valor em teste é diferente daquele afirmado pela *hipótese nula* (conservadora):

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

em que μ é o valor conservador do parâmetro que se deseja testar frente ao valor alternativo μ_0.

```
alfa=0.05

prob_desejada1=alfa/2
z_desejado1=round(qnorm(prob_desejada1),4)
d_desejada1=dnorm(z_desejado1, 0, 1)

prob_desejada2=1-alfa/2
z_desejado2=round(qnorm(prob_desejada2),4)
d_desejada2=dnorm(z_desejado2, 0, 1)



ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(-4, z_desejado1),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(z_desejado1,0),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(0, z_desejado2),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(z_desejado2,4),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
```

```
scale_x_continuous(name="Valores da estatística calculada para o teste")  +
labs(title=
       "Regiões críticas sob a curva da função densidade da \ndistribuição apropriada ao
        ↪  teste",
     subtitle = "P((-val. crítc), (val. crít.))=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança)
      ↪  \nP(-\U221e; (-val. crític.))= P((val.crítc.); \U221e)= \u03b1/2 em vermelho ")+
geom_segment(aes(x = z_desejado1, y = 0, xend = z_desejado1, yend = d_desejada1),
 ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
geom_segment(aes(x = z_desejado2, y = 0, xend = z_desejado2, yend = d_desejada2),
 ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado1-0.1, y=d_desejada1, label="-(valor crítico)",
 ↪  angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado2+0.3, y=d_desejada2, label="(valor crítico)", angle=90,
 ↪  vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado1-2, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
 ↪  \nprobabilidade=\u03b1/2", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado2+0.5, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
 ↪  \nprobabilidade=\u03b1/2", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado1+1.3, y=0.2, label="Região de não rejeição da hipótese
 ↪  nula \nprobabilidade= (1-\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
theme_bw()
```

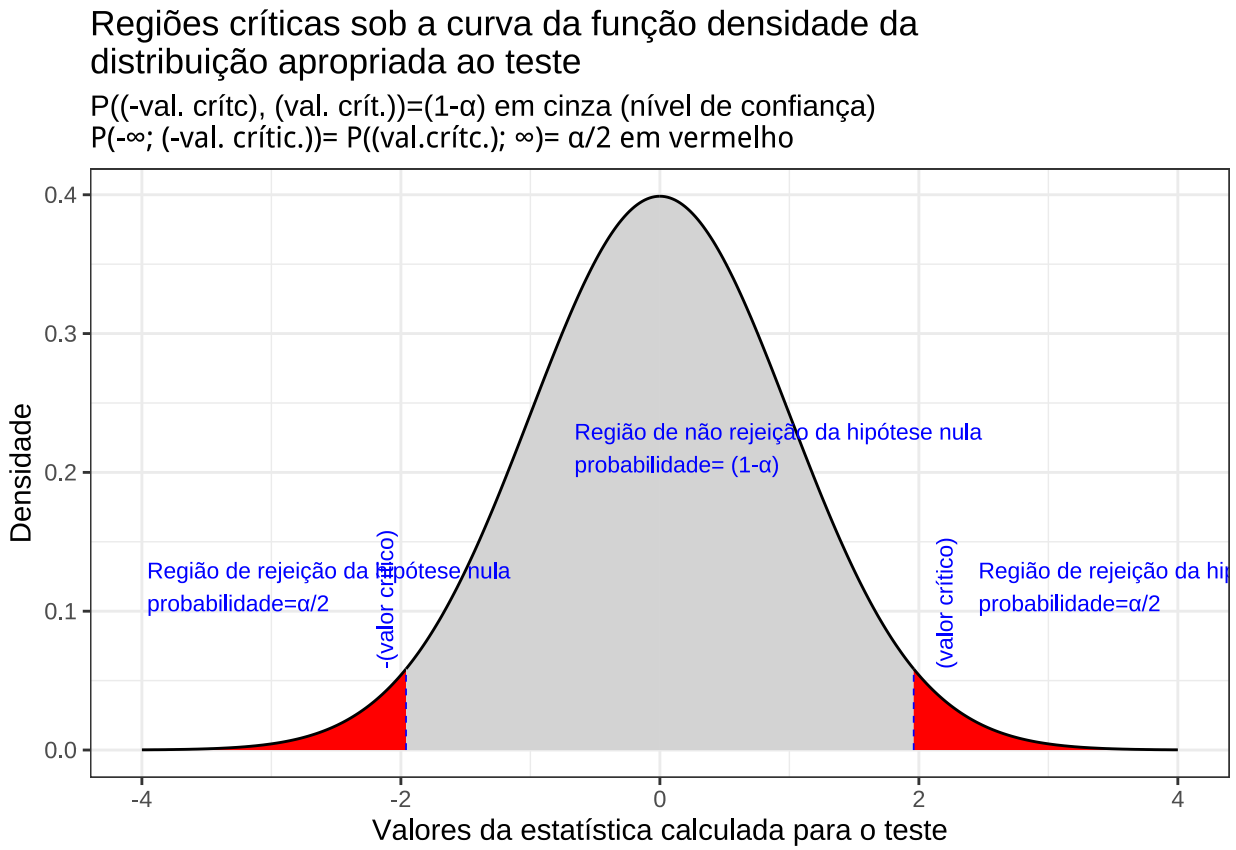


Figure 11.8: Regiões críticas, aquém e além das quais, a probabilidade associada aos valores amostrais observados é inferior a $\frac{\alpha}{2}$, estabelecendo assim um intervalo com nível de confiança igual a $(1-\alpha)$

Na Figura 11.8 observa-se:

- as regiões de rejeição da hipótese nula (subdivididas nos dois lados) sob a curva da função densidade de probabilidade da distribuição adequada ao teste com probabilidades iguais ao nível de significância α ;
- a região de não rejeição da hipótese nula (delimitada à esquerda e à direita) com probabilidade igual ao nível de confiança $(1-\alpha)$; e,
- os valores críticos da estatística do teste.

11.7.3 Teste de hipóteses Unilateral à esquerda

Nesse tipo de teste a *hipótese aternativa* é proposta como a dizer que o valor em teste não apenas é diferente, mas é menor do que aquele afirmado pela *hipótese nula* (conservadora):

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

em que μ é o valor conservador do parâmetro que se deseja testar frente ao valor alternativo μ_0.

```
alfa=0.05
prob_desejada=alfa
z_desejado=round(qnorm(prob_desejada),4)
d_desejada=dnorm(z_desejado, 0, 1)




ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(-4, z_desejado),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(z_desejado,0),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(0, z_desejado),
            colour="black") +
```

```
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(z_desejado,4),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores da estatística calculada para o teste")  +
  labs(title=
         "Região crítica sob a curva da função densidade da \ndistribuição apropriada ao
          ↪  teste",
       subtitle = "P( (-val. crít.),\U221e,)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança)
        ↪  \nP(-\U221e; (-val. crític.))=\u03b1 em vermelho ")+
geom_segment(aes(x = z_desejado, y = 0, xend = z_desejado, yend = d_desejada), color="blue",
 ↪  lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado-0.1, y=d_desejada, label="-(valor crítico)", angle=90,
 ↪  vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado-2, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
 ↪  \nprobabilidade=\u03b1", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado+1.3, y=0.2, label="Região de não rejeição da hipótese
 ↪  nula  \nprobabilidade= (1-\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
theme_bw()
```

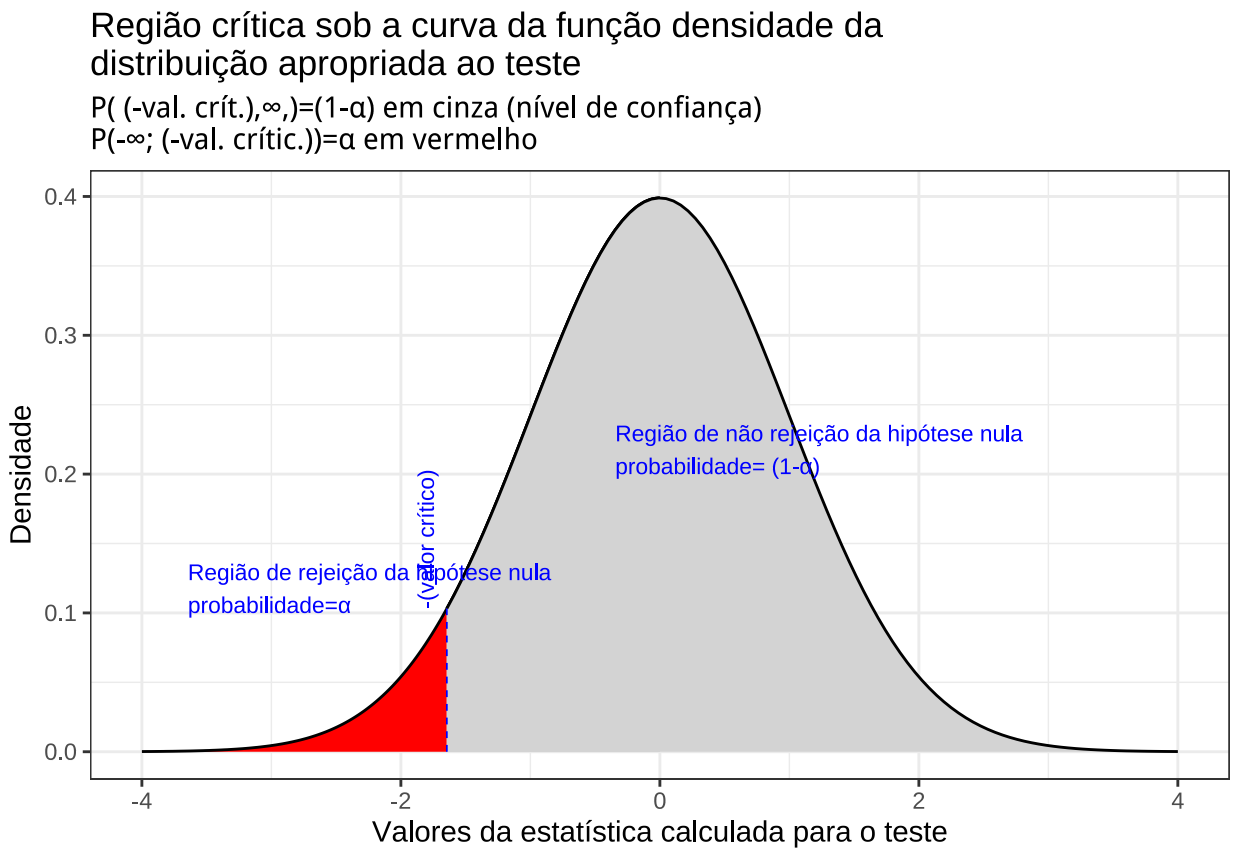


Figure 11.9: Região crítica aquém da qual a probabilidade associada aos valores amostrais observados é inferior a α, estabelecendo assim um intervalo com nível de confiança igual a $(1-\alpha)$

Na Figura 11.9 observa-se:

- a região de rejeição da hipótese nula delimitada sob a curva da função densidade de probabilidade da distribuição adequada ao teste com probabilidade igual ao nível de significância α ;
- a região de não rejeição da hipótese nula (delimitada à esquerda) com probabilidade igual ao nível de confiança $(1-\alpha)$; e,
- os valores críticos da estatística do teste.

11.7.4 Teste de hipóteses Unilateral à direita

Nesse tipo de teste a *hipótese aternativa* é proposta como a dizer que o valor em teste não apenas é diferente, mas é maior do que aquele afirmado pela *hipótese nula* (conservadora):

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

em que μ é o valor conservador do parâmetro que se deseja testar frente ao valor alternativo μ_0.

```
alfa=0.95
prob_desejada=alfa
z_desejado=round(qnorm(prob_desejada),4)
d_desejada=dnorm(z_desejado, 0, 1)




ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(-4, z_desejado),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(z_desejado,4),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores da estatística calculada para o teste")  +
  labs(title=
         "Região crítica sob a curva da função densidade da \ndistribuição apropriada ao
          ↪  teste",
       subtitle = "P(-\U221e, (val. crít.))=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança)
        ↪  \nP((val.crítc.); \U221e)= \u03b1 em vermelho ")+
```

```
geom_segment(aes(x = z_desejado, y = 0, xend = z_desejado, yend = d_desejada), color="blue",
 ↪  lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado+0.3, y=d_desejada, label="(valor crítico)", angle=90,
 ↪  vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado+0.5, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
 ↪  \nprobabilidade=\u03b1", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado-2.5, y=0.2, label="Região de não rejeição da hipótese
   ↪  nula \nprobabilidade= (1-\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  theme_bw()
```

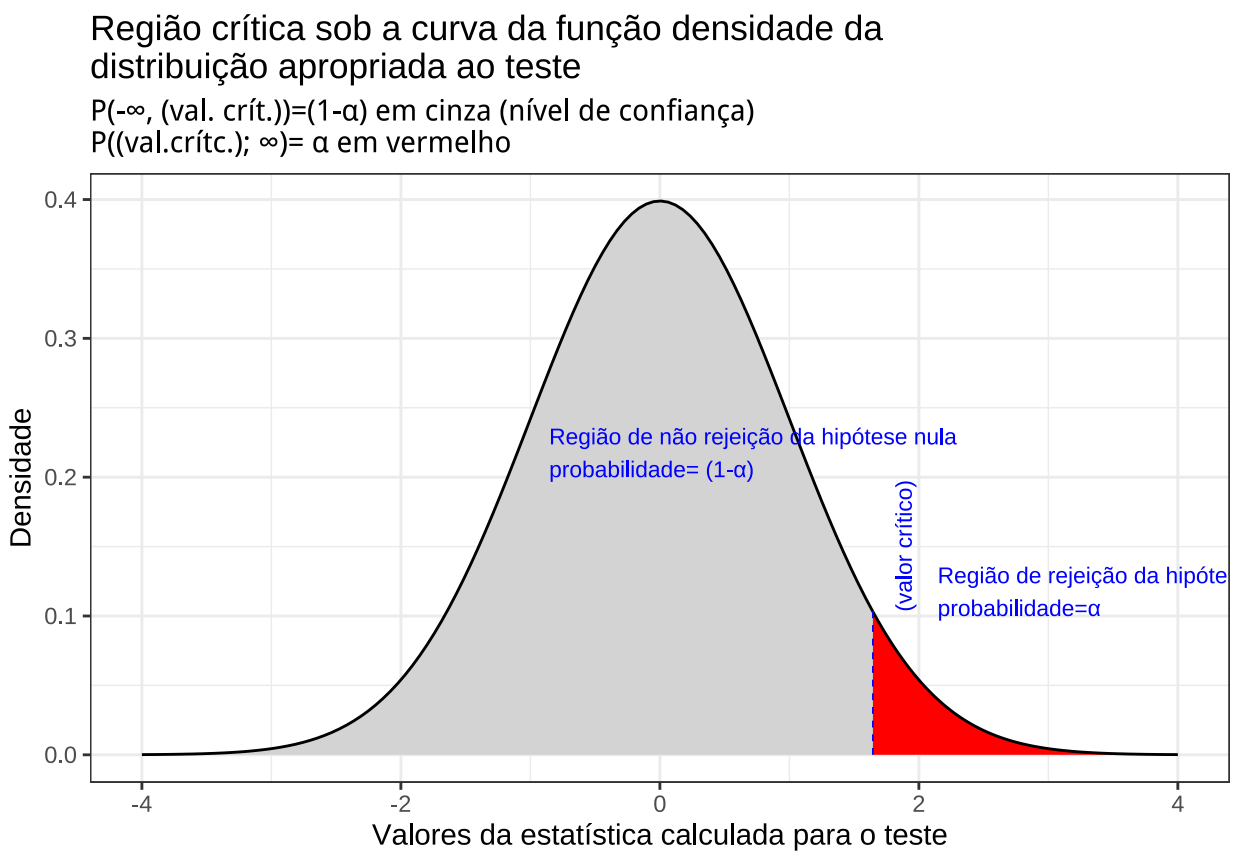


Figure 11.10: Região crítica além da qual a probabilidade associada aos valores amostrais observados é inferior a α, estabelecendo assim um intervalo com nível de confiança igual a $(1-\alpha)$

Na Figura 11.10 observa-se:

- a região de rejeição da hipótese nula delimitada sob a curva da função densidade de probabilidade da distribuição adequada ao teste com probabilidade igual ao nível de significância α ;
- a região de não rejeição da hipótese nula (delimitada à direita) com probabilidade igual ao nível de confiança $(1-\alpha)$; e,
- os valores críticos da estatística do teste.

11.8 Teste de uma média amostral

11.8.1 Cenários possíveis

- variância populacional (σ^2) *teoricamente conhecida*;
- variância populacional (σ^2) desconhecida, mas o tamanho da amostra (n) é grande: $n \geq 30(40)$; e,
- variância populacional (σ) desconhecida e as amostras de tamanho (n) reduzido: $n < 30$.

Estatística do teste para a primeira situação: variância populacional conhecida

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

em que:

- $\bar{X}$ é a média observada na amostra;
- μ o valor (desconhecido) inferido à média populacional, a ser testado frente à média amostral observada;
- σ é o desvio padrão populacional; e,
- n é o tamanho da amostra.

Estatística do teste para a segunda situação: variância populacional desconhecida mas amostras grandes: $n \geq 30(40)$: S pode ser tomado como estimativa de σ:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

em que:

- $\bar{X}$ é a média observada na amostra;
- μ o valor (desconhecido) inferido à média populacional a ser testado frente à média amostral observada;
- S é o desvio padrão amostral; e,
- n é o tamanho da amostra.

Estatística do teste para a terceira situação: variância populacional desconhecida e amostras pequenas: $n < 30$:

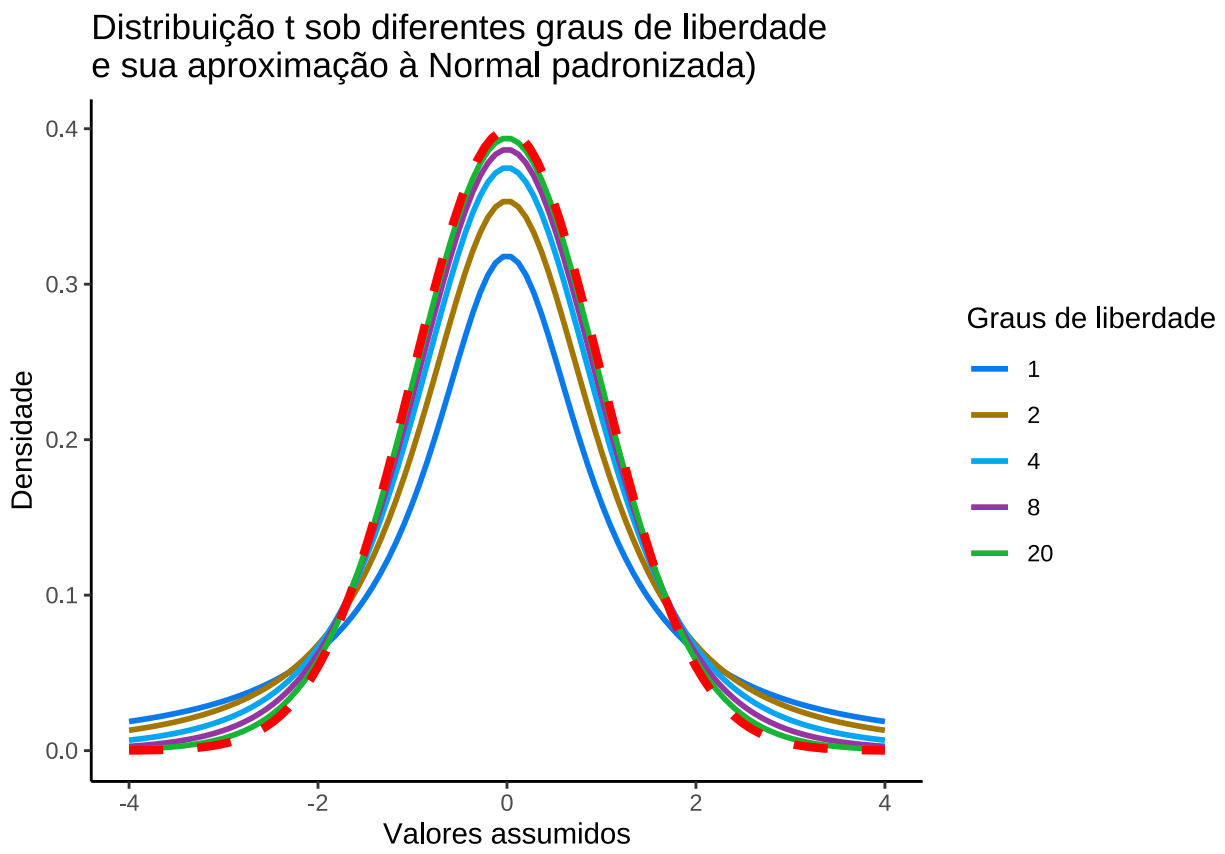
$$T = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}$$

em que:

- $\bar{X}$ é a média observada na amostra;
- μ o valor (desconhecido) inferido à média populacional, a ser testado frente à média amostral;
- S é o desvio padrão amostral; e,
- n é o tamanho da amostra.

```r
# Definição do eixo x
x <- seq(-4, 4, length.out = 100)

# Densidade da distribuição normal padrão
y_norm <- dnorm(x, mean = 0, sd = 1)

# Lista com diferentes graus de liberdade
df_list=c(1, 2, 4, 8, 20)

# Lista com cores para as curvas da distribuição t
colors=c("#097aeb", "#a37602", "#02a6f2", "#9635a1", "#16b533")
```

```
# Criação do data frame com todas as curvas
data=data.frame()
for (i in seq_along(df_list)) {
  df = df_list[i]
  y_t = dt(x, df)
  df_data = data.frame(x, y_t, df)
  data = rbind(data, df_data)
}

# Plotagem do gráfico
p = ggplot(data, aes(x = x)) +
  geom_line(aes(y = y_t, color = factor(df)), size = 1) +
  scale_color_manual(values = colors, name = "Graus de liberdade")+
  ggtitle("Distribuição t sob diferentes graus de liberdade \ne sua aproximação à Normal
   ↪ padronizada)") +
  xlab("Valores assumidos") +
  ylab("Densidade") +
  theme_classic() +
  stat_function(fun = dnorm, args = list(mean = 0, sd = 1), color = "red", size=1.5,
   ↪ linetype='dashed')
print(p)
```



11.8.2 Roteiro geral

- identificar o modelo de probabilidade do estimador do parâmetro da população que se estuda;
- identificar a estatística apropriada para o teste em razão das informações disponíveis acerca da população, do tamanho da amostra e sua independência:
  - escore médio;
  - proporção;
  - estatísticas T, Z, F, ou χ;
- determinar na curva de densidade de probabilidade do modelo da estatística de teste a(s) região(ões) crítica(s): faixa(s) de valores da estatística que nos levam à rejeição ou não da hipótese H_0 em função do nível de significância previamente arbitrado pelo pesquisador α;
- calcular a estatística do teste apropriada para o parâmetro que se pretende inferir com base na amostra extraída;
- concluir com base nos resultados analisados: se o valor da estatística do teste pertence à(s) região(ões) crítica(s) de sua distribuição teórica, rejeitar H_0; caso contrário não há evidências estatisticamente significativas para rejeitá-la.

11.8.3 Probabilidade dos intervalos de confiança para os testes de hipóteses com o uso da estatística Z ($Z \sim \mathcal{N}(0,1)$):

- Teste de hipóteses bilateral (tipo: diferente de):

$$P[|Z_{calc}| \leq Z_{tab(\frac{\alpha}{2})}|\mu = \mu_0] = (1-\alpha)$$
$$P(-Z_{tab(\frac{\alpha}{2})} \leq Z_{calc} \leq Z_{tab(\frac{\alpha}{2})}) = (1-\alpha)$$

- Teste de hipóteses unilateral à esquerda (tipo: menor que):

$$P[Z_{calc} \geq -Z_{tab(\alpha)} | \mu \geq \mu_0] = (1-\alpha)$$
$$P(Z_{calc} \geq -Z_{tab(\alpha)}) = (1-\alpha)$$

- Teste de hipóteses unilateral à direita (tipo maior que):

$$P[Z_{calc} \leq Z_{tab(\alpha)} | \mu \leq \mu_0] = (1-\alpha)$$
$$P(Z_{calc} \leq Z_{tab(\alpha)}) = (1-\alpha)$$

11.8.4 Probabilidade dos intervalos de confiança para os testes de hipóteses com o uso da estatística T ($T \sim t_{(n-1)}$):

- Teste de hipóteses bilateral (tipo: diferente de):

$$P[|t_{calc}| \geq t_{tab(\frac{\alpha}{2};n-1)} | \mu = \mu_0] = (1-\alpha)$$
$$P(-t_{tab(\frac{\alpha}{2};n-1)} \leq t_{calc} \leq t_{tab(\frac{\alpha}{2};n-1)}) = (1-\alpha)$$

- Teste de hipóteses unilateral à esquerda (tipo: menor que):

$$P[t_{calc} \geq -t_{tab(\alpha)} | \mu \geq \mu_0] = (1-\alpha)$$
$$P(t_{calc} \geq -t_{tab(\alpha;n-1)}) = (1-\alpha)$$

- Teste de hipóteses unilateral à direita (tipo: maior que):

$$P[t_{calc} \leq t_{tab(\alpha)} | \mu \leq \mu_0] = (1-\alpha)$$
$$P(t_{calc} \leq t_{tab(\alpha;n-1)}) = (1-\alpha)$$

Exemplo: O tempo de vida útil de uma amostra de 100 lâmpadas fluorescentes produzidas por uma fábrica foi calculado resultando em uma vida útil média de 1570 h sob um desvio padrão de 120 h. Seja μ é o tempo de vida útil das lâmpadas produzidas pela empresa. Teste a hipótese de $\mu = 1600h$ contra a hipótese alternativa de $\mu \neq 1600h$ sob um nível de significância $\alpha = 0,05$.

O problema nos pede um teste bilateral (tipo: diferente de):

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 1.600 \\ H_1 : \mu \neq 1.600 \end{cases}$$

Iremos verificar se a informação amostral obtida nos permite rejeitar a hipótese nula que afirma ser a vida útil média das lâmpadas a 1.600 h., fazendo então valer a hipótese alternativa que afirma ser a vida útil das lâmpadas **diferente de** 1.600 h.

Pelo enunciado do problema a variância populacional σ^2 é desconhecida mas, como a amostra é de grande tamanho (n=100) podemos tomar S como uma estimativa de σ e a estatística do teste fica definida como sendo:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Extraindo os dados do problema:

- $\bar{X}$= $1570h$ é a média amostral;
- $\mu_0 = 1600$ o valor (desconhecido) inferido à média populacional a ser testado frente à média amostral;
- $S = 120h$ é o desvio padrão amostral; e,

- $n = 100$ é o tamanho da amostra.

Calculando-se o valor da estatística do teste:

$$z_{calc} = \frac{1570 - 1600}{\frac{120}{\sqrt{100}}} = -2,50$$

Da tabela da distribuição Normal reduzida obtemos o valor crítico bicaudal: $|z_{crit}| = 1,96$. Pelo cálculo, a estatística do teste é $z_{calc} = -2,50$.

```
alfa=0.05

prob_desejada1=alfa/2
z_desejado1=round(qnorm(prob_desejada1),4)
d_desejada1=dnorm(z_desejado1, 0, 1)

prob_desejada2=1-alfa/2
z_desejado2=round(qnorm(prob_desejada2),4)
d_desejada2=dnorm(z_desejado2, 0, 1)

z_calculado=-2.5
d_calculado=dnorm(z_calculado, 0, 1)


ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(-4, z_desejado1),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(z_desejado1,0),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(0, z_desejado2),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(z_desejado2,4),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores de z", breaks = c(z_desejado1,z_desejado2))  +
  labs(title=
         "Regiões críticas sob a curva da função densidade da \ndistribuição apropriada ao
          ↪  teste",
       subtitle = "P(-1,96, 1,96)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança=0,95) \nP(-\U221e;
        ↪  -1,96)= P(1,96; \U221e)= \u03b1/2 em vermelho (nível de significância/2=0,025)
        ↪  ")+
```

```
geom_segment(aes(x = z_desejado1, y = 0, xend = z_desejado1, yend = d_desejada1),
 ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
geom_segment(aes(x = z_desejado2, y = 0, xend = z_desejado2, yend = d_desejada2),
 ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado1-0.1, y=d_desejada1, label="valor crítico=-1,96",
 ↪  angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado2+0.3, y=d_desejada2, label="valor crítico=1,96",
 ↪  angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado1-2, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
 ↪  \nprobabilidade=\u03b1/2", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado2+0.5, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
 ↪  \nprobabilidade=\u03b1/2", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado1+1.3, y=0.2, label="Região de não rejeição da hipótese
 ↪  nula \nprobabilidade= (1-\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
geom_segment(aes(x = z_calculado, y = 0, xend = z_calculado, yend = d_calculado),
 ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=z_calculado-0.1, y=d_calculado, label="valor da estatística do
 ↪  teste=-2,5", angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
theme_bw()
```

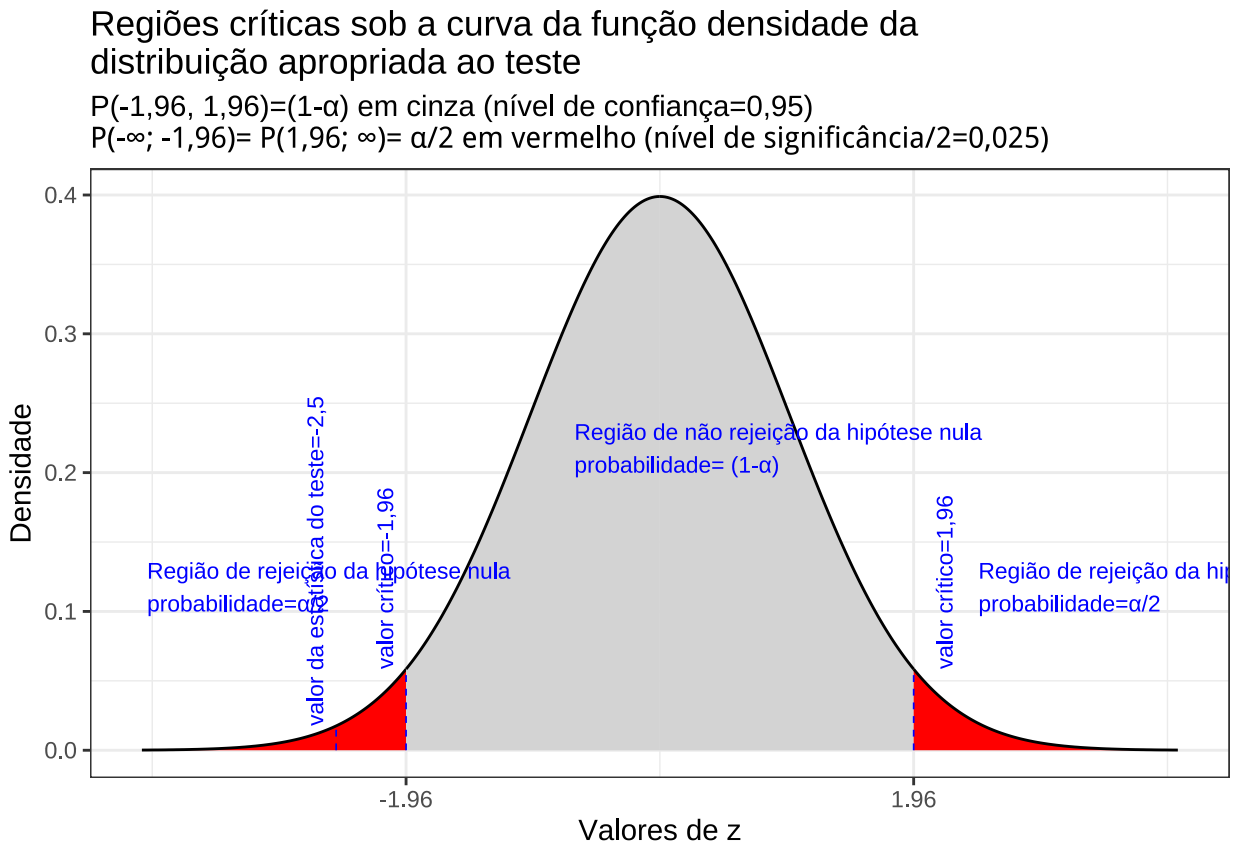


Figure 11.11: Regiões de rejeição da hipótese nula para o teste bilateral (tipo: diferente de) realizado: a região de não rejeição da hipótese nula (região de não significância do teste) está delimitada pelos valores críticos da estatística do teste: $z_{crit} = \pm 1,96$. O valor calculado da estatística ($z_{calc} = -2,50$) situa-se na faixa de significância do teste, possibilitando a rejeição da hipótese nula sob aquele nível de confiança

Conclusão: Os resultados obtidos na análise estatística realizada nos permitem rejeitar a hipótese de que a duração média populacional das lâmpadas seja igual a 1600h sob um nível de confiança de 95%. A vida útil média das lâmpadas é **diferente** de 1600h (Figura 11.11).

Podemos ainda realizar testes de hipóteses unilaterais ($\mu < \mu_0$ ou $\mu > \mu_0$).

Teste unilateral à esquerda (tipo: menor que)

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 1.600 \\ H_1 : \mu < 1.600 \end{cases}$$

Iremos verificar se a informação amostral obtida nos permite rejeitar a hipótese nula que afirma ser a vida útil média das lâmpadas igual ou superior a 1.600 h., fazendo então valer a hipótese alternativa que afirma ser a vida útil das lâmpadas **menor que** 1.600 h.

Da tabela da distribuição Normal reduzida obtemos o valor crítico monocaudal: $z_{crit} = -1,64$. Pelo cálculo, a estatística do teste é $z_{calc} = -2,50$.

```
alfa=0.05
prob_desejada=alfa
z_desejado=round(qnorm(prob_desejada),4)
d_desejada=dnorm(z_desejado, 0, 1)

z_calculado=-2.5
d_calculado=dnorm(z_calculado, 0, 1)




ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(-4, z_desejado),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
```

```
            xlim = c(z_desejado,0),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(0, z_desejado),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(z_desejado,4),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores da estatística calculada para o teste")  +
  labs(title=
         "Região crítica sob a curva da função densidade da \ndistribuição apropriada ao
          ↪  teste",
       subtitle = "P( -1,64,\U221e,)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança=0,95)
        ↪  \nP(-\U221e; -1,64)=\u03b1 em vermelho (nível de significância=0,05) ")+
geom_segment(aes(x = z_desejado, y = 0, xend = z_desejado, yend = d_desejada), color="blue",
 ↪  lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado-0.1, y=d_desejada, label="valor crítico=-1,64", angle=90,
 ↪  vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado-2.5, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
 ↪  \nprobabilidade=\u03b1", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado+1, y=0.2, label="Região de não rejeição da hipótese nula
 ↪  \nprobabilidade= (1-\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  geom_segment(aes(x = z_calculado, y = 0, xend = z_calculado, yend = d_calculado),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=z_calculado-0.1, y=d_calculado, label="valor da estatística do
   ↪  teste=-2,5", angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  theme_bw()
```

Conclusão: Os resultados obtidos na análise estatística realizada nos permitem rejeitar a hipótese de que a duração média populacional das lâmpadas seja igual ou superior a 1600h sob um nível de confiança de 95%. A vida útil média é **menor que** 1600h (Figura 11.12).

Teste unilateral à direita (tipo: maior que)

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq 1.600 \\ H_1 : \mu > 1.600 \end{cases}$$

Iremos verificar se a informação amostral obtida nos permite rejeitar a hipótese nula que afirma ser a vida útil média das lâmpadas igual ou inferior a 1.600 h., fazendo então valer a hipótese alternativa que afirma ser a vida útil das lâmpadas **maior que** 1.600 h.

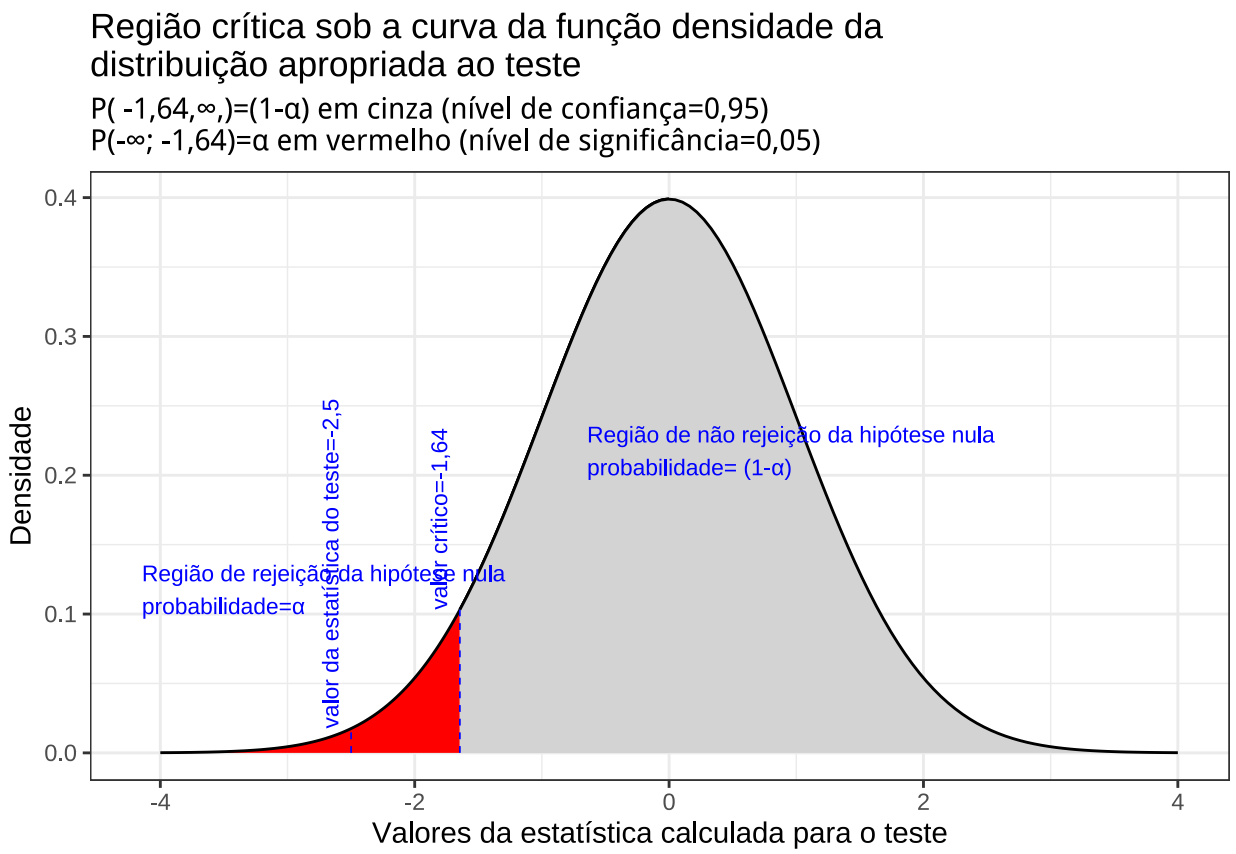


Figure 11.12: Região de rejeição da hipótese nula para o teste unilateral à esquerda (tipo: menor que) realizado: a região de não rejeição da hipótese nula (região de não significância do teste) está delimitada pelo valor crítico da estatística do teste: $z_{crit} = -1,64$. O valor calculado da estatística ($z_{calc} = -2,50$) situa-se na faixa de significância do teste, possibilitando a rejeição da hipótese nula sob aquele nível de confiança

Da tabela da distribuição Normal reduzida obtemos o valor crítico monocaudal: $z_{crit} = 1,64$. Pelo cálculo, a estatística do teste é $z_{calc} = -2,50$.

```
alfa=0.95
prob_desejada=alfa
z_desejado=round(qnorm(prob_desejada),4)
d_desejada=dnorm(z_desejado, 0, 1)

z_calculado=-2.5
d_calculado=dnorm(z_calculado, 0, 1)




ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(-4, z_desejado),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(z_desejado,4),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores da estatística calculada para o teste")  +
  labs(title=
         "Região crítica sob a curva da função densidade da \ndistribuição apropriada ao
          ↪  teste",
       subtitle = "P( -1,96,\U221e,)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança=0,95)
        ↪  \nP(-\U221e; -1,96)=\u03b1 em vermelho (nível de significância=0,05) ")+
geom_segment(aes(x = z_desejado, y = 0, xend = z_desejado, yend = d_desejada), color="blue",
 ↪  lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado-0.1, y=d_desejada, label="valor crítico=-1,64", angle=90,
 ↪  vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado+1, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
 ↪  \nprobabilidade=\u03b1", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado-2.5, y=0.2, label="Região de não rejeição da hipótese
 ↪  nula  \nprobabilidade= (1-\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  geom_segment(aes(x = z_calculado, y = 0, xend = z_calculado, yend = d_calculado),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=z_calculado-0.1, y=d_calculado, label="valor da estatística do
   ↪  teste=-2,5", angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  theme_bw()
```

Conclusão: Os resultados obtidos na análise estatística realizada não nos permitem rejeitar a hipótese de que a duração média populacional das lâmpadas seja igual ou inferior a 1600h sob um nível de confiança de 95%. A vida útil média é maior que 1600h (Figura 11.12).

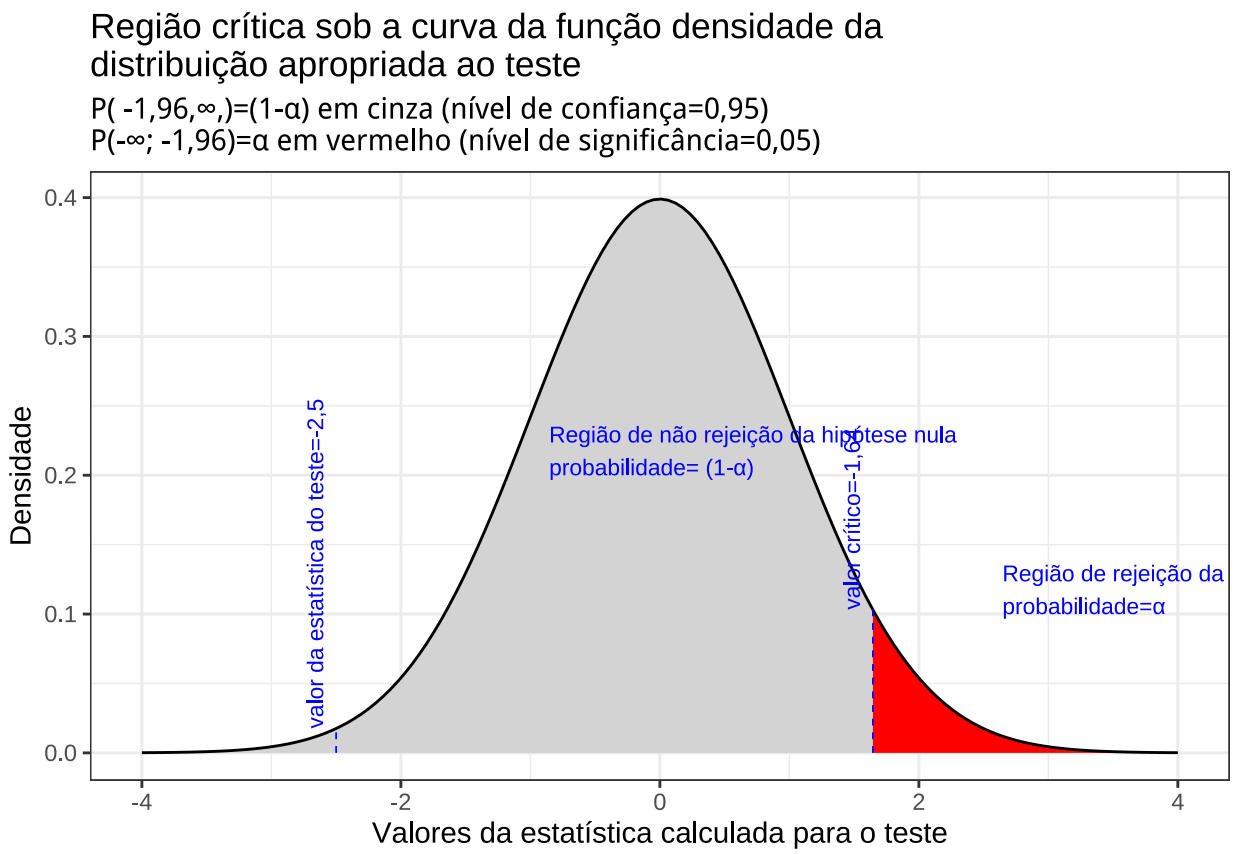


Figure 11.13: Região de rejeição da hipótese nula para o teste unilateral à direita (tipo: maior que) realizado: a região de não rejeição da hipótese nula (região de não significância do teste) está delimitada pelo valor crítico da estatística do teste: $z_{crit} = 1,64$. O valor calculado da estatística ($z_{calc} = -2,50$) situa-se na faixa de não significância do teste, não possibilitando a rejeição da hipótese nula sob aquele nível de confiança

Exemplo: De um universo Normal com parâmetros média e variância (μ e σ^2) desconhecidos, retirou-se uma amostra aleatória composta por 9 observações que apresentou as seguintes sínteses numéricas: $\bar{X}$= 4 e $S^2 = 2,2$. Proceda ao seguinte teste de hipóteses, a um nível de significância: $\alpha = 0,05$, de que a média populacional é igual a 5.

O problema nos pede um teste bilateral (tipo: diferente de):

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 5 \\ H_1 : \mu \neq 5 \end{cases}$$

Iremos verificar se a informação amostral obtida nos permite rejeitar a hipótese nula que afirma ser a média igual a 5, fazendo então valer a hipótese alternativa que afirma ser a média **diferente de** 5.

Pelo enunciado do problema a variância populacional σ^2 é desconhecida e a amostra é pequena (n=9). Nessa situação, a estatística do teste fica definida como sendo:

$$T = \frac{(\bar{X} - \mu_0)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}$$

Extraindo os dados do problema:

- $\bar{x}$= 4 é a média amostral;
- $\mu_0 = 5$ o valor (desconhecido) inferido à média populacional, a ser testado frente à média amostral;
- $s = \sqrt{2,2} = 1,48$ é o desvio padrão da amostra extraída;
- $n = 9$ é o tamanho da amostra extraída;

Calculando-se o valor da estatística do teste:

$$t_{calc} = \frac{(\bar{X} - \mu_0)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = -2,02$$

Da tabela "t'' de Student obtemos o valor crítico bicaudal: $|t_{tab(\frac{\alpha}{2}),(n-1)}| = 2,306$. Pelo cálculo a estatística do teste é $t_{calc} = -2,02$.

```
alfa=0.05

prob_desejada1=alfa/2
df=8
t_desejado1=round(qt(prob_desejada1,df ),df)
d_desejada1=dt(t_desejado1,df)

prob_desejada2=1-alfa/2
df=8
t_desejado2=round(qt(prob_desejada2, df),df)
d_desejada2=dt(t_desejado2,df)

t_calculado=-2
d_calculado=dt(t_calculado,df)


ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "red",
            xlim = c(-4, t_desejado1),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(t_desejado1,0),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(0, t_desejado2),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "red",
            xlim = c(t_desejado2,4),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
```

```
 scale_x_continuous(name="Valores de t", breaks = c(t_desejado1, t_desejado2))  +
 labs(title=
        "Regiões críticas sob a curva da função densidade da \ndistribuição apropriada ao
         ↪  teste",
      subtitle = "P(-2,306, 2,306)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança=0,95)
       ↪  \nP(-\U221e; -2,306)= P(2,306; \U221e)= \u03b1/2 em vermelho (nível de
       ↪  significância/2=0,025) ")+ geom_segment(aes(x = t_desejado1, y = 0, xend =
       ↪  t_desejado1, yend = d_desejada1), color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
geom_segment(aes(x = t_desejado2, y = 0, xend = t_desejado2, yend = d_desejada2),
 ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
 annotate(geom="text", x=t_desejado1-0.1, y=d_desejada1, label="valor crítico=-2,306",
  ↪  angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
 annotate(geom="text", x=t_desejado2+0.3, y=d_desejada2, label="valor crítico=2,306",
  ↪  angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=t_desejado1-2, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
 ↪  \nprobabilidade=\u03b1/2", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=t_desejado2+0.5, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
 ↪  \nprobabilidade=\u03b1/2", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=t_desejado1+2, y=0.2, label="Região de não rejeição da hipótese
 ↪  nula \nprobabilidade= (1-\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
geom_segment(aes(x = t_calculado, y = 0, xend = t_calculado, yend = d_calculado),
 ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=t_calculado-0.1, y=d_calculado, label="valor da estatística do
 ↪  teste=-2.02", angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
 theme_bw()
```

Conclusão: Os resultados obtidos na análise estatística realizada não nos permitem rejeitar a hipótese de que a média populacional seja igual a 5 sob um nível de confiança de 95% (Figura 11.14).

```
# Dados do problema
n=9
media_amostral=4
var_amostral=2.2
media_populacao=5
alfa=0.05

# Estatística de teste
t=(media_amostral - media_populacao) / sqrt(var_amostral / n)

# Graus de liberdade
df=n - 1

# Valor-p à esquerda
p_valor_1=pt(-abs(t), df, lower.tail = TRUE)

# Valor-p à direita
p_valor_2=pt(abs(t), df, lower.tail = FALSE)

# p-valor
p_valor=p_valor_1+p_valor_2
```

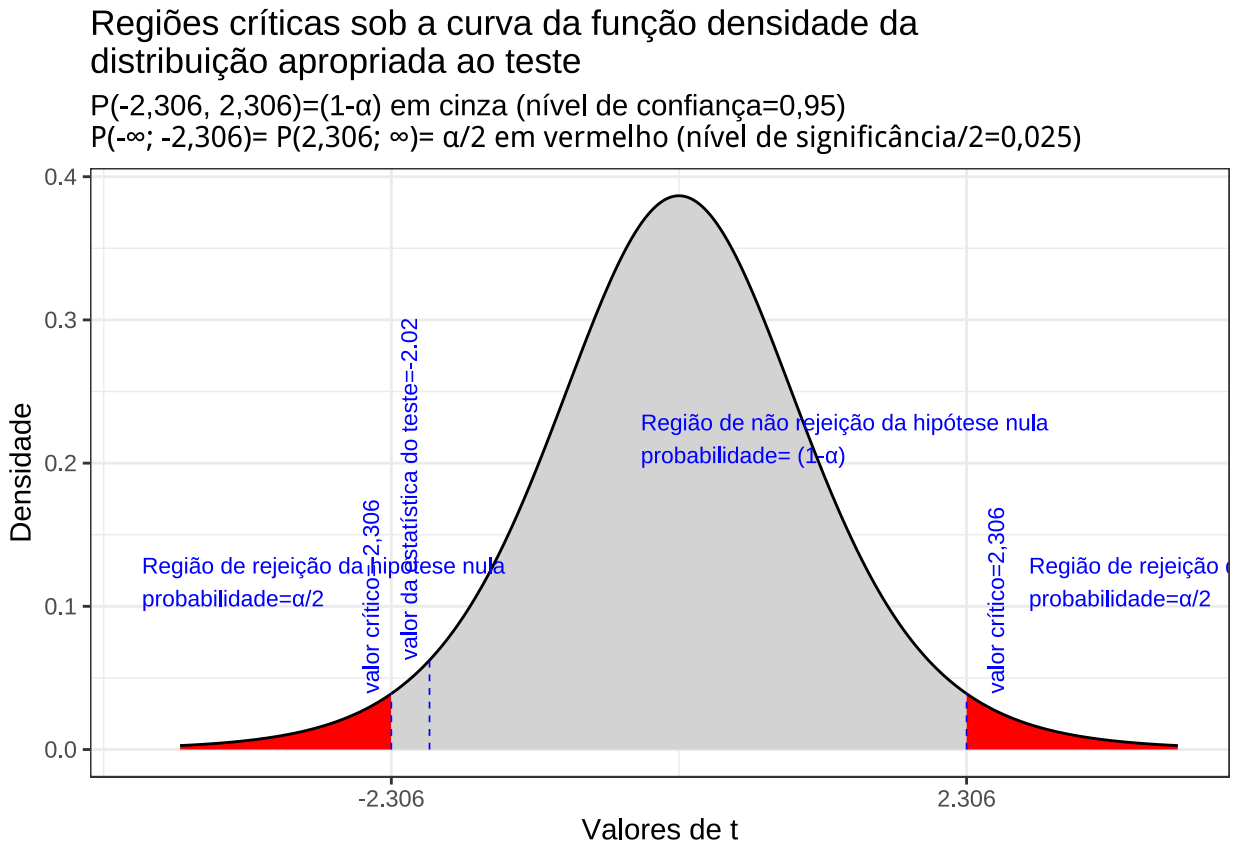


Figure 11.14: Regiões de rejeição da hipótese nula para o teste bilateral (tipo: diferente de) realizado: a região de não rejeição da hipótese nula (região de não significância do teste) está delimitada pelos valores críticos da estatística do teste: $t_{crit} = \pm 2,306$. O valor calculado da estatística ($t_{calc} = -2,02$) situa-se na faixa de significância do teste, possibilitando a rejeição da hipótese nula sob aquele nível de confiança

```
# Ou
p_valor <- 2 * pt(-abs(t), df)

# Decisão e conclusão
if (p_valor < alfa) {
  cat("Os dados amostrais trazidos à análise nos permitem rejeitar, sob o nível de
   ↪ significância estabelecido de", alfa ,"de se cometer um erro do tipo I, a hipótese
   ↪ nula (H0) que afirma ser a média populacional igual a", media_populacao,".A média
   ↪ populacional  é diferente.")
} else {
  cat("Os dados amostrais trazidos à análise não nos permitem rejeitar, sob o nível de
   ↪ confiança de", 1-alfa ,",a hipótese nula (H0). A média populacional é igual a",
   ↪ media_populacao,".")
}
```

```
## Os dados amostrais trazidos à análise não nos permitem rejeitar, sob o nível de confiança de 0.95 ,a
```

> Teste unilateral à esquerda (tipo: menor que)

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 5 \\ H_1 : \mu < 5 \end{cases}$$

Iremos verificar se a informação amostral obtida nos permite rejeitar a hipótese nula que afirma ser a média igual ou maior a 5, fazendo então valer a hipótese alternativa que afirma ser a média **menor que** 5.

Da tabela "t'' de Student obtemos o valor crítico monocaudal: $|t_{tab_{(\alpha,(n-1))}}| = -1,86$. Pelo cálculo a estatística do teste é $t_{calc} = -2,02$.

```
alfa=0.05
prob_desejada=alfa
df=8
t_desejado=round(qt(prob_desejada,df ),4)
d_desejada=dt(t_desejado,df)

t_calculado=-2
d_calculado=dt(t_calculado,df)


ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
```

```
            fill = "red",
            xlim = c(-4, t_desejado),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(t_desejado,4),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores de t", breaks = c(t_desejado))  +
  labs(title=
         "Regiões críticas sob a curva da função densidade da \ndistribuição apropriada ao
          ↪  teste",
       subtitle = "P(-1,86, \U221e)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança=0,95)
        ↪  \nP(-\U221e; -1,86)= \u03b1 em vermelho (nível de significância=0,05) ")+
  geom_segment(aes(x = t_desejado, y = 0, xend = t_desejado, yend = d_desejada),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
 annotate(geom="text", x=t_desejado-0.1, y=d_desejada, label="valor crítico=-1,86",
  ↪  angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=t_desejado-2, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
   ↪  \nprobabilidade=\u03b1", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
 annotate(geom="text", x=t_desejado+1.5, y=0.2, label="Região de não rejeição da hipótese
  ↪  nula \nprobabilidade= (1-\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
 geom_segment(aes(x = t_calculado, y = 0, xend = t_calculado, yend = d_calculado),
  ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
 annotate(geom="text", x=t_calculado-0.1, y=d_calculado, label="valor da estatística do
  ↪  teste=-2.02", angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  theme_bw()
```

Conclusão: sob um nível de confiança de confiança de 95%, face aos dados trazidos à análise podemos rejeitar a hipótese de que a média seja de no mínimo a 5 (Figura 11.15).

Caso estabelecêssemos um nível de confiança $(1-\alpha) \geq 0,9611277$ (ou tivéssemos uma informação amostral $\bar{x} \geq 4.080639$), a hipótese nula **não** seria rejeitada: a média populacional é maior ou igual a 5.

```
# Dados do problema
n=9
media_amostral=4
var_amostral=2.2
media_populacao=5
alfa=0.05

# Estatística de teste
t=(media_amostral - media_populacao) / sqrt(var_amostral / n)

# Graus de liberdade
df=n - 1
```

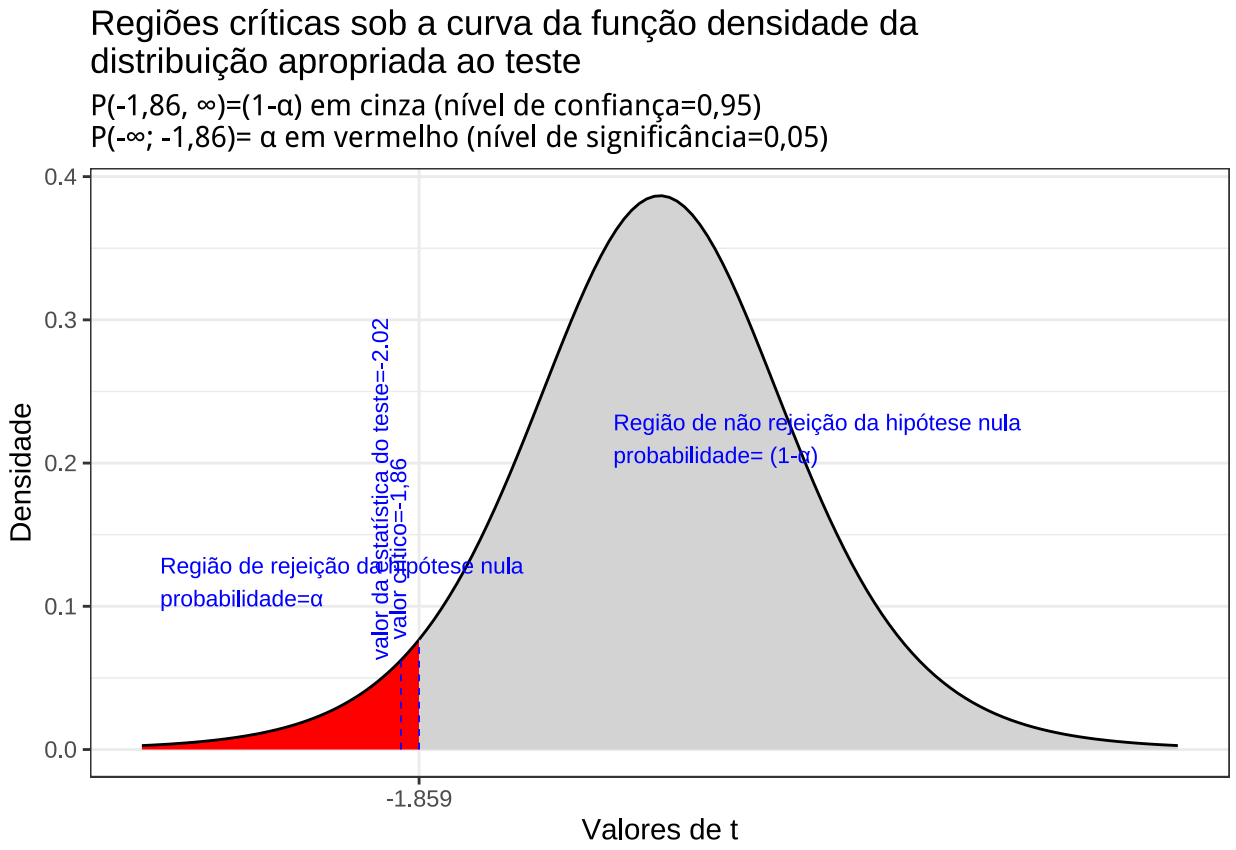


Figure 11.15: Região de rejeição da hipótese nula para o teste unilateral à esquerda (tipo: menor que) realizado: a região de não rejeição da hipótese nula (região de não significância do teste) está delimitada pelo valor crítico da estatística do teste: $t_{crit} = -1,86$. O valor calculado da estatística ($t_{calc} = -2,02$) situa-se na faixa de significância do teste possibilitando a rejeição da hipótese nula sob aquele nível de confiança

```
# Valor-p à esquerda
p_valor=pt(t, df)


# Decisão e conclusão
if (p_valor < alfa) {
  cat("Os dados amostrais trazidos à análise nos permitem rejeitar, sob o nível de
   ↪ significância estabelecido de", alfa ,"de se cometer um erro do tipo I, a hipótese
   ↪ nula (H0) que afirma ser a média populacional maior ou igual a ", media_populacao,".A
   ↪ média populacional é menor.")
} else {
  cat("Os dados amostrais trazidos à análise não nos permitem rejeitar, sob o nível de
   ↪ confiança de", 1-alfa ,",a hipótese nula (H0). A média populacional é maior ou igual
   ↪ a", media_populacao,".")
}
```

```
## Os dados amostrais trazidos à análise nos permitem rejeitar, sob o nível de significância estabeleci
```

Teste unilateral à direita (tipo: maior que)

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq 5 \\ H_1 : \mu > 5 \end{cases}$$

Iremos verificar se a informação amostral obtida nos permite rejeitar a hipótese nula que afirma ser a média igual ou menor a 5, fazendo então valer a hipótese alternativa que afirma ser a média **maior que** 5.

Da tabela "t'' de Student obtemos o valor crítico monocaudal: $|t_{tab_{(\alpha,(n-1))}}| = 1,86$. Pelo cálculo a estatística do teste é $t_{calc} = -2,02$.

```
alfa=0.95
prob_desejada=alfa
df=8
t_desejado=round(qt(prob_desejada,df ),4)
d_desejada=dt(t_desejado,df)

t_calculado=-2
d_calculado=dt(t_calculado,df)
```

```
ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(-4, t_desejado),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "red",
            xlim = c(t_desejado,4),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores de t", breaks = c(t_desejado))  +
  labs(title=
         "Regiões críticas sob a curva da função densidade da \ndistribuição apropriada ao
          ↪  teste",
       subtitle = "P(-\U221e; 1,86)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança=0,95) \nP(1,86;
        ↪  \U221e)= \u03b1 em vermelho (nível de significância=0,05) ")+
  geom_segment(aes(x = t_desejado, y = 0, xend = t_desejado, yend = d_desejada),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=t_desejado-3, y=0.1, label="Região de não rejeição da hipótese
   ↪  nula \nprobabilidade=\u03b1", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
 annotate(geom="text", x=t_desejado, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
  ↪  \nprobabilidade= (1-\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
 geom_segment(aes(x = t_calculado, y = 0, xend = t_calculado, yend = d_calculado),
  ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
 annotate(geom="text", x=t_calculado-0.1, y=d_calculado, label="valor da estatística do
  ↪  teste=-2.02", angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  theme_bw()
```

Conclusão: sob um nível de confiança de confiança de 95%, face aos dados trazidos à análise não podemos rejeitar a hipótese de que a média seja inferior a 5 (Figura 11.16).

Caso estabelecêssemos um nível de confiança $(1-\alpha) \geq 0,9611277$ (ou tivéssemos uma informação amostral $\bar{x} \geq 5.919361$), a hipótese nula **seria** rejeitada: a média populacional é maior que 5.

```
# Dados do problema
n=9
media_amostral=4
var_amostral=2.2
media_populacao=5
alfa=0.95

# Estatística de teste
t=(media_amostral - media_populacao) / sqrt(var_amostral / n)
```

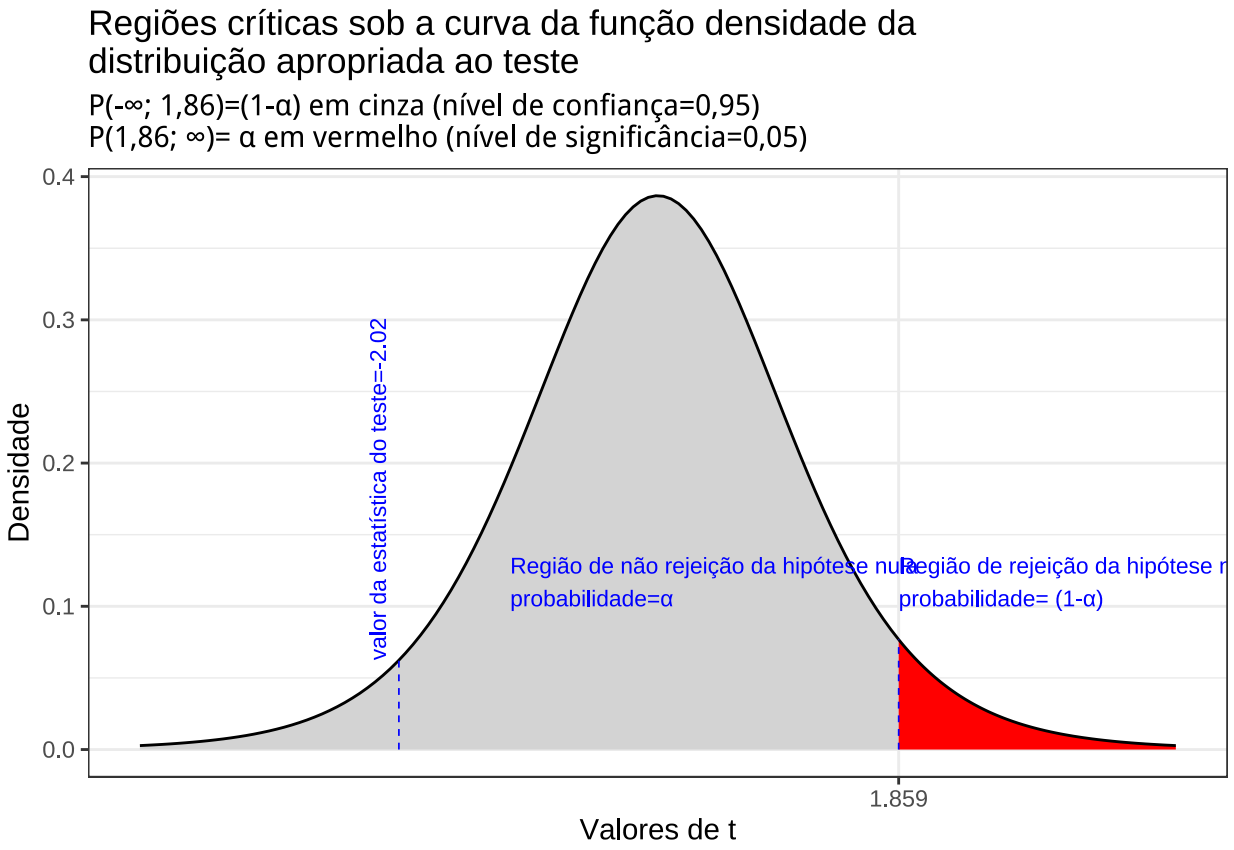


Figure 11.16: Região de rejeição da hipótese nula para o teste unilateral à direita (tipo: maior que) realizado: a região de não rejeição da hipótese nula (região de não significância do teste) está delimitada pelo valor crítico da estatística do teste: $t_{crit} = 1,86$. O valor calculado da estatística ($t_{calc} = -2,02$) situa-se na faixa de não significância do teste, não possibilitando a rejeição da hipótese nula sob aquele nível de confiança

```
# Graus de liberdade
df=n - 1

# Valor-p à direita
p_valor=pt(-t, df)


# Decisão e conclusão
if (p_valor < alfa) {
  cat("Os dados amostrais trazidos à análise nos permitem rejeitar, sob o nível de
   ↪ significância estabelecido de", alfa ,"de se cometer um erro do tipo I, a hipótese
   ↪ nula (H0) que afirma ser a média populacional menor ou igual a", media_populacao,".A
   ↪ média populacional  é maior que",media_populacao,"." )
} else {
  cat("Os dados amostrais trazidos à análise não nos permitem rejeitar, sob o nível de
   ↪ confiança de", 1-alfa ,",a hipótese nula (H0). A média populacional é menor ou igual
   ↪ a", media_populacao,".")
}
```

```
## Os dados amostrais trazidos à análise não nos permitem rejeitar, sob o nível de confiança de 0.05 ,a
```

11.9 Teste de médias amostrais independentes de duas populações Normais

Pelo Teorema Limite Central, para tamanhos amostrais n suficientemente grandes a média amostral $\overline{X}$ tem distribuição aproximadamente Normal, com média μ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$, independente da distribuição da população, onde μ e σ^2 são a média e a variância populacionais.

- grandes: $n \geq 30(40)$; e
- pequenas: $n < 30$.

Situações possíveis:

- Variâncias populacionais conhecidas ou não conhecidas mas com amostras de grande tamanho;

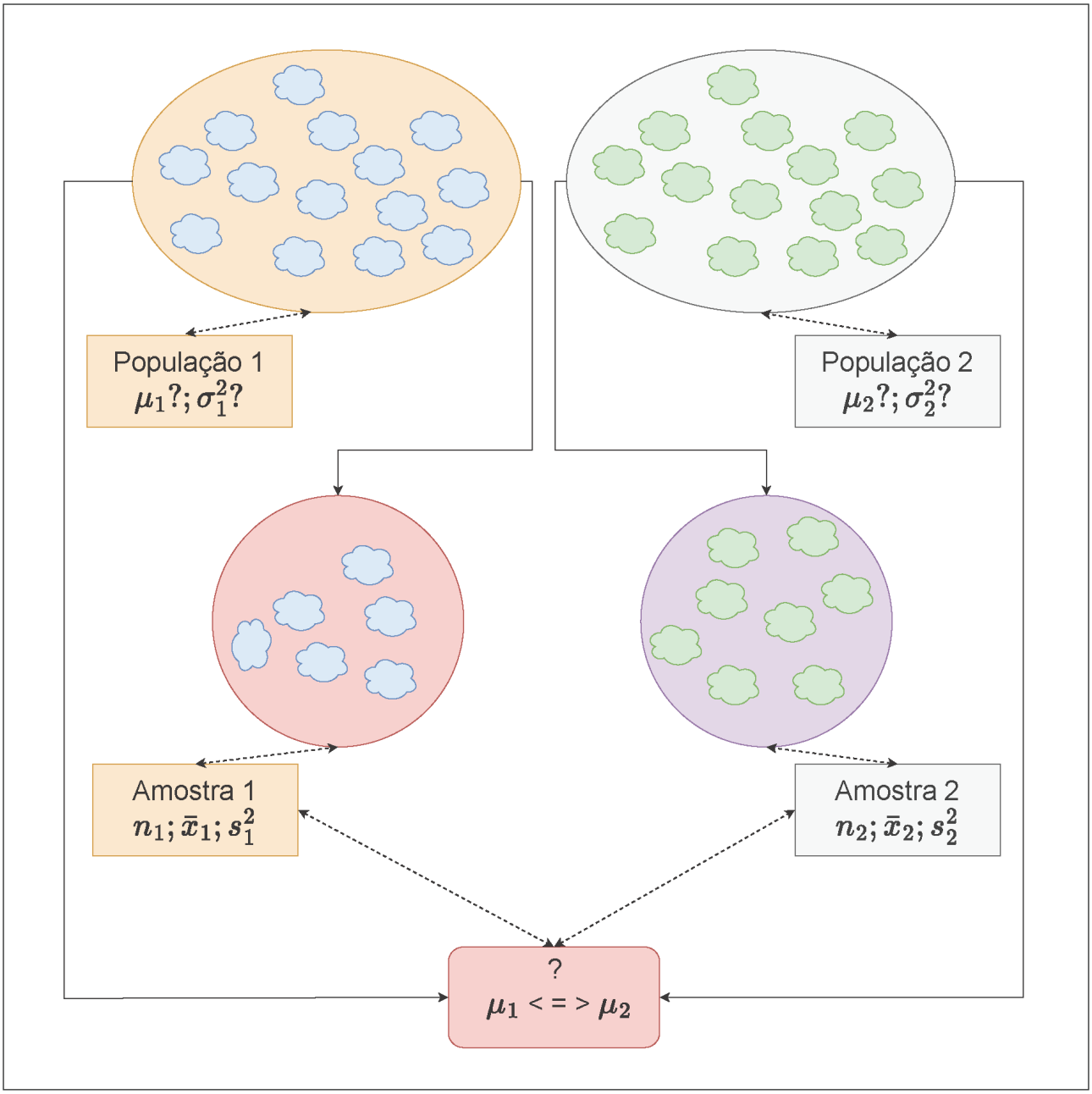


Figure 11.17: Visão esquemática das amostras de duas populações

- Variâncias populacionais desconhecidas:
  - Variâncias populacionais admitidas iguais; ou,
  - Variâncias populacionais quaisquer.

Os valores assumidos pelas características de nosso interesse nas populações são tais que:

$$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1; \sigma_1^2)$$

e

$$X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2; \sigma_2^2)$$

Ao se extrair duas amostras, os valores amostrais assumidos por essas características serão duas variáveis aleatórias tais que:

$$\bar{X}_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1 \frac{\sigma_1^2}{n_1})$$

e

$$\bar{X}_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2; \frac{\sigma_2^2}{n_2}).$$

É de nosso particular interesse definir uma variável aleatória expressa como a diferença das variáveis $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$.

Segue-se assim (por serem independentes) que

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2; \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}).$$

11.9.1 As estruturas possíveis dos testes de hipóteses relacionados às suas médias serão:

Teste bilateral (tipo: diferente de)

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0 \end{cases}$$

Teste unilateral à esquerda (tipo: menor que)

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \Delta_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0 \end{cases}$$

Teste unilateral à direita (tipo: maior que)

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \Delta_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0 \end{cases}$$

Os valores assumidos pelas diferenças amostrais são tais que:

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

para

- amostras Normais: n_1 e n_2 qualquer;
- amostras sob outras distribuições, desde que: n_1 e $n_2 \geq 30(40)$:
- $Z_{tab(\frac{\alpha}{2})}$ ou $Z_{tab(\alpha)}$: valores da distribuição Normal padronizada para o nível de significância pretendido no teste (bilateral ou unilateral); e,
- $Z_{calc} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

em que:

- Δ_0 é o valor inferido à diferença das médias populacionais μ_1 e μ_2, usualmente 0 (igualdade);
- σ_1^2 é a variância da população 1;
- σ_2^2 é a variância da população 2;
- $\bar{x}_1, n_1$ são a média e o tamanho da amostra 1; e,
- $\bar{x}_2, n_2$ são a média e o tamanho da amostra 2.

11.9.2 Testes de hipóteses para as médias de duas populações com variâncias conhecidas (ou não conhecidas mas o tamanho das amostras é grande)

Probabilidade dos intervalos de confiança para os testes de hipóteses com o uso da estatística Z ($Z \sim \mathcal{N}(0,1)$):

- Teste de hipóteses bilateral (tipo: diferente de):

$$P[|Z_{calc}| \leq Z_{tab(\frac{\alpha}{2})} | \mu_1 = \mu_2] = (1-\alpha)$$
$$P(-Z_{tab(\frac{\alpha}{2})} \leq Z_{calc} \leq Z_{tab(\frac{\alpha}{2})}) = (1-\alpha)$$

- Teste de hipóteses unilateral à esquerda (tipo: menor que):

$$P[Z_{calc} \geq -Z_{tab(\alpha)} | \mu_1 \geq \mu_2] = (1-\alpha)$$
$$P(Z_{calc} \geq -Z_{tab(\alpha)}) = (1-\alpha)$$

- Teste de hipóteses unilateral à direita (tipo maior que):

$$P[Z_{calc} \leq Z_{tab(\alpha)} | \mu_1 \leq \mu_2] = (1-\alpha)$$
$$P(Z_{calc} \leq Z_{tab(\alpha)}) = (1-\alpha)$$

Nas figuras 11.8, 11.9 e 11.10 observam-se:

- as regiões de rejeição da hipótese nula (subdivididas nos dois ou em apenas um dos lados) sob a curva da função densidade de probabilidade da distribuição adequada ao teste com probabilidades iguais ao nível de significância α ;
- a região de não rejeição da hipótese nula (delimitada à esquerda e à direita ou apenas em um dos lados) com probabilidade igual ao nível de confiança $(1-\alpha)$; e,
- os valores críticos da estatística do teste.

Exemplo: Duas máquinas são usadas para encher garrafas plásticas com um volume líquido de 16oz. Os volumes de enchimento podem ser admitidos como normais, tendo desvios padrão iguais a $\sigma_1 = 0,020$oz e $\sigma_2 = 0,025$oz. O departamento de engenharia da fábrica deseja saber a um nível de significância de $\alpha = 0,01$ se ambas as máquinas enchem um mesmo volume e para isso coletou uma amostra de 10 garrafas enchidas por cada uma das máquinas cf. tabela abaixo:

As variâncias populacionais σ_1^2 e σ_2^2 são conhecidas e as populações seguem uma distribuição Normal. A estatística do teste é:

Table 11.3: Enchimento de duas máquinas

Máquina 01		Máquina 02	
16,03	16,01	16,02	16,03
16,04	15,96	15,97	16,04
16,05	15,98	15,96	16,02
16,05	16,02	16,01	16,01
16,02	15,99	15,99	16,00

$$z_{calc} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

tal que tal que Z ($Z \sim \mathcal{N}(0,1)$), em que:

- μ_1, μ_2 são as médias das populações em teste;
- $\sigma_1^2 = 0,020^2, \sigma_2^2 = 0,025^2$ são as variâncias das populações em teste;
- $\bar{x}_1 = 16,015, n_1 = 10$ são a média e o tamanho da amostra 1;
- $\bar{x}_2 = 16,005, n_2 = 10$ são a média e o tamanho da amostra 2; e,
- o nível de significância estabelecido para o teste é $\alpha = 0,01$.

O problema nos pede um teste bilateral (tipo: diferente de):

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

Se z_{calc} for tal que:

$$-z_{tab(\frac{\alpha}{2})} \leq z_{calc} \leq z_{tab(\frac{\alpha}{2})}$$

não se rejeita a hipótese nula sob o nível de signficância estabelecido. Da tabela da distribuição Normal padronziada obtemos o valor crítico bicaudal: $|Z_{tab(\frac{\alpha}{2})}| = 2,57$. Pelo cálculo, a estatística do teste é $z_{calc} = 0,98773$.

```
alfa=0.01

prob_desejada1=alfa/2
z_desejado1=round(qnorm(prob_desejada1),4)
d_desejada1=dnorm(z_desejado1, 0, 1)

prob_desejada2=1-alfa/2
z_desejado2=round(qnorm(prob_desejada2),4)
d_desejada2=dnorm(z_desejado2, 0, 1)

z_calculado=0.98773
d_calculado=dnorm(z_calculado, 0, 1)


ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(-4, z_desejado1),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(z_desejado1,0),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(0, z_desejado2),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(z_desejado2,4),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores de z", breaks = c(z_desejado1,z_desejado2))  +
  labs(title=
         "Regiões críticas sob a curva da função densidade da \ndistribuição apropriada ao
          ↪  teste",
       subtitle = "P(-2,57, 2,57)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança=0,99) \nP(-\U221e;
        ↪  -2,57)= P(2,57; \U221e)= \u03b1/2 em vermelho (nível de significância/2=0,005)
        ↪  ")+
  geom_segment(aes(x = z_desejado1, y = 0, xend = z_desejado1, yend = d_desejada1),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  geom_segment(aes(x = z_desejado2, y = 0, xend = z_desejado2, yend = d_desejada2),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado1-0.1, y=d_desejada1, label="valor crítico=-2,57",
   ↪  angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado2+0.3, y=d_desejada2, label="valor crítico=2,57",
   ↪  angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado1-1.5, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
   ↪  \nprobabilidade=\u03b1/2", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
```

```
annotate(geom="text", x=z_desejado2+0.5, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
 ↪  \nprobabilidade=\u03b1/2", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado1+2, y=0.2, label="Região de não rejeição da hipótese
 ↪  nula \nprobabilidade= (1-\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
geom_segment(aes(x = z_calculado, y = 0, xend = z_calculado, yend = d_calculado),
 ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=z_calculado-0.1, y=d_calculado, label="valor da estatística do
 ↪  teste=0,9877", angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
theme_bw()
```

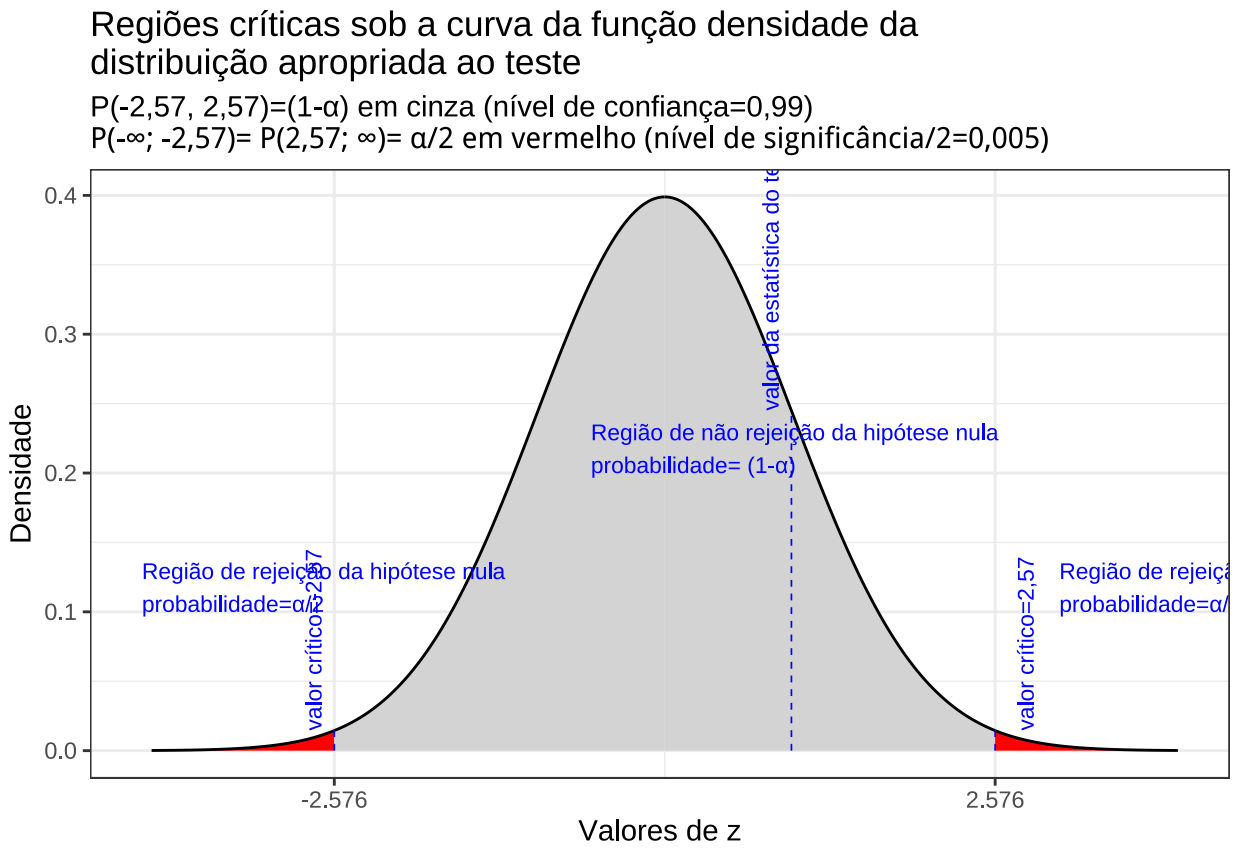


Figure 11.18: Regiões de rejeição da hipótese nula para o teste bilateral (tipo: diferente de) realizado: a região de não rejeição da hipótese nula (região de não significância do teste) está delimitada pelos valores críticos da estatística do teste: $z_{crit} = \pm 2,57$. O valor calculado da estatística ($z_{calc} = 0,987$) não nos possibilita a rejeição da hipótese nula sob aquele nível de confiança

Conclusão: Os resultados obtidos pela análise estatística de comparação de médias das duas amostras colhidas de garrafas de plástico enchidas por duas máquinas diferentes 1 e 2 não nos permitem rejeitar a hipótese de que suas médias sejam iguais sob um nível de confiança de 99% (Figura 11.18).

Podemos ainda realizar testes de hipóteses para as diferenças entre as médias observadas ($\mu_1 < \mu_2$ ou $\mu_1 > \mu_2$). As conclusões derivadas desses testes deverão indicar que as médias não diferem entre si ao nível de significância dos testes chegando assim, por outras vias (agora não se rejeitando a hipótese nula), à mesma conclusão do teste de igualdade das médias antes realizado.

Teste unilateral à esquerda (tipo: menor que)

Nessa situação postula-se que a diferença da média 1 **para** a média 2 é **no mínimo** 0 (o que equivale dizer que a média 1 **é no mínimo igual** à média 2):

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0 \end{cases}$$

Da tabela da distribuição Normal padronizada obtemos o valor crítico monocaudal: $Z_{tab(\alpha)} = -2,33$. Pelo cálculo, a estatística do teste é $Z_{calc} = 0,98773$.

```
alfa=0.01
prob_desejada=alfa
z_desejado=round(qnorm(prob_desejada),4)
d_desejada=dnorm(z_desejado, 0, 1)

z_calculado=0.98773
d_calculado=dnorm(z_calculado, 0, 1)




ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(-4, z_desejado),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(z_desejado,0),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(0, z_desejado),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(z_desejado,4),
            colour="black") +
```

```
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores de z", breaks = c(z_desejado))  +
  labs(title=
         "Região crítica sob a curva da função densidade da \ndistribuição apropriada ao
          ↪  teste",
       subtitle = "P( -2,33,\U221e,)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança=0,99)
        ↪  \nP(-\U221e; -2,33)=\u03b1 em vermelho (nível de significância=0,01) ")+
geom_segment(aes(x = z_desejado, y = 0, xend = z_desejado, yend = d_desejada), color="blue",
 ↪  lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado-0.1, y=d_desejada, label="valor crítico=-2,33", angle=90,
 ↪  vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado-2, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
 ↪  \nprobabilidade=\u03b1", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado+1, y=0.2, label="Região de não rejeição da hipótese nula
 ↪  \nprobabilidade= (1-\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  geom_segment(aes(x = z_calculado, y = 0, xend = z_calculado, yend = d_calculado),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=z_calculado-0.1, y=d_calculado, label="valor da estatística do
   ↪  teste=0,98773", angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  theme_bw()
```

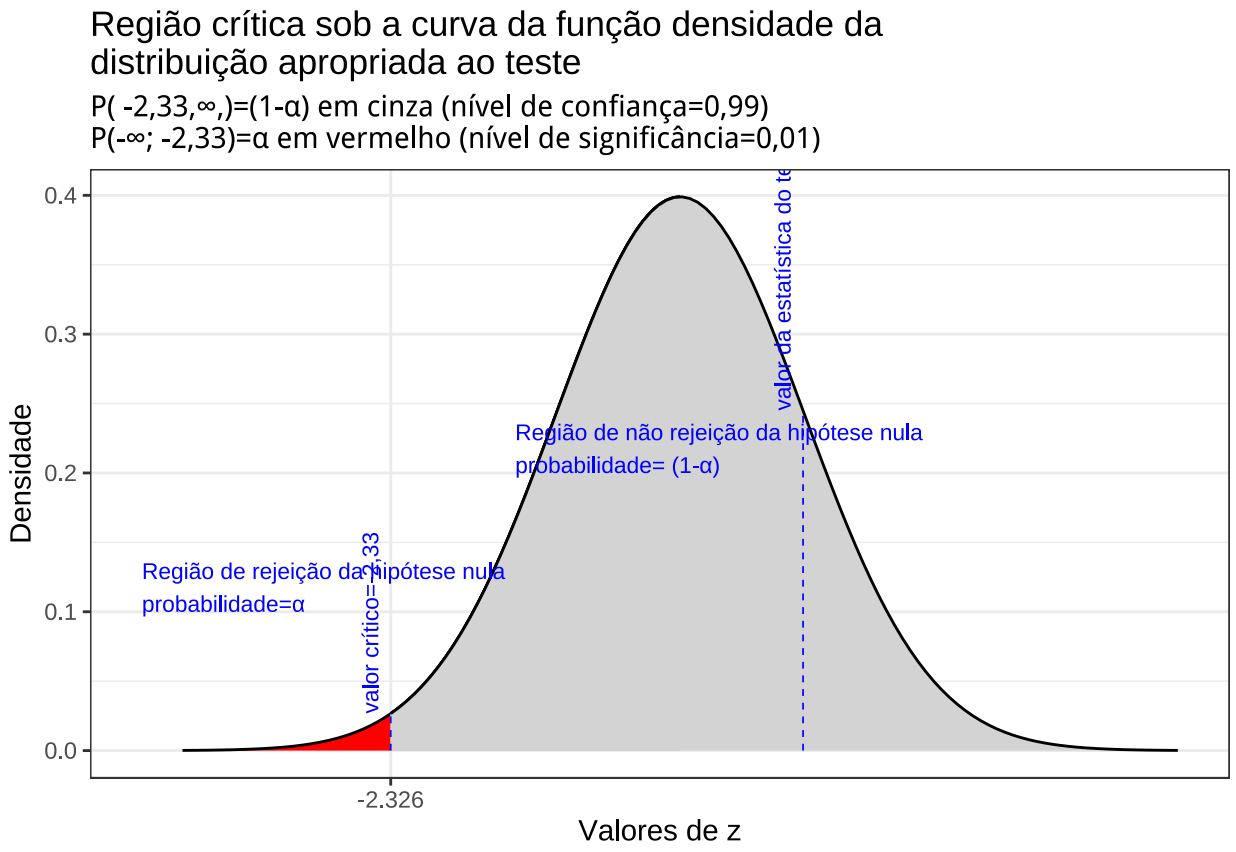


Figure 11.19: Regiões de rejeição da hipótese nula para o teste unilateral à esquerda (tipo: menor que) realizado: a região de não rejeição da hipótese nula (região de não significância do teste) está delimitada pelos valor crítico da estatística do teste: $z_{crit} = -2,33$. O valor calculado da estatística ($z_{calc} = 0,98773$) não nos possibilita a rejeição da hipótese nula sob aquele nível de confiança

Conclusão: Os resultados obtidos pela análise estatística de comparação de médias das duas amostras colhidas de garrafas de plástico enchidas por duas máquinas diferentes 1 e 2 não nos permitem rejeitar a hipótese de que a média de enchimento da máquina 1 seja no mínimo igual à da máquina 2 sob um nível de confiança de 99% (Figura 11.19).

Teste unilateral à direita (tipo: maior que)

Nessa situação postula-se que a diferença da média 1 **para** a média 2 é **no máximo** 0 (o que equivale dizer que a média 1 **é no máximo igual** à média 2):

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases}$$

Da tabela da distribuição Normal padronizada obtemos o valor crítico monocaudal: $Z_{tab(\alpha)} = -2,33$. Pelo cálculo, a estatística do teste é $Z_{calc} = 0,98773$.

```
alfa=0.99
prob_desejada=alfa
z_desejado=round(qnorm(prob_desejada),4)
d_desejada=dnorm(z_desejado, 0, 1)

z_calculado=0.98773
d_calculado=dnorm(z_calculado, 0, 1)




ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(-4, z_desejado),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(z_desejado,4),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores de z", breaks = c(z_desejado))  +
  labs(title=
         "Região crítica sob a curva da função densidade da \ndistribuição apropriada ao
          ↪  teste",
       subtitle = "P(- \U221e; 2,33)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança=0,99) \nP(2,33
        ↪  ; \U221e)=\u03b1 em vermelho (nível de significância=0,01) ")+
geom_segment(aes(x = z_desejado, y = 0, xend = z_desejado, yend = d_desejada), color="blue",
 ↪  lty=2, lwd=0.3)+
```

```
annotate(geom="text", x=z_desejado-0.1, y=d_desejada, label="valor crítico=-1,88", angle=90,
 ↪  vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
 ↪  \nprobabilidade=\u03b1", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado-3, y=0.2, label="Região de não rejeição da hipótese nula
 ↪  \nprobabilidade= (1-\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  geom_segment(aes(x = z_calculado, y = 0, xend = z_calculado, yend = d_calculado),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=z_calculado-0.1, y=d_calculado, label="valor da estatística do
   ↪  teste=0,98773", angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  theme_bw()
```

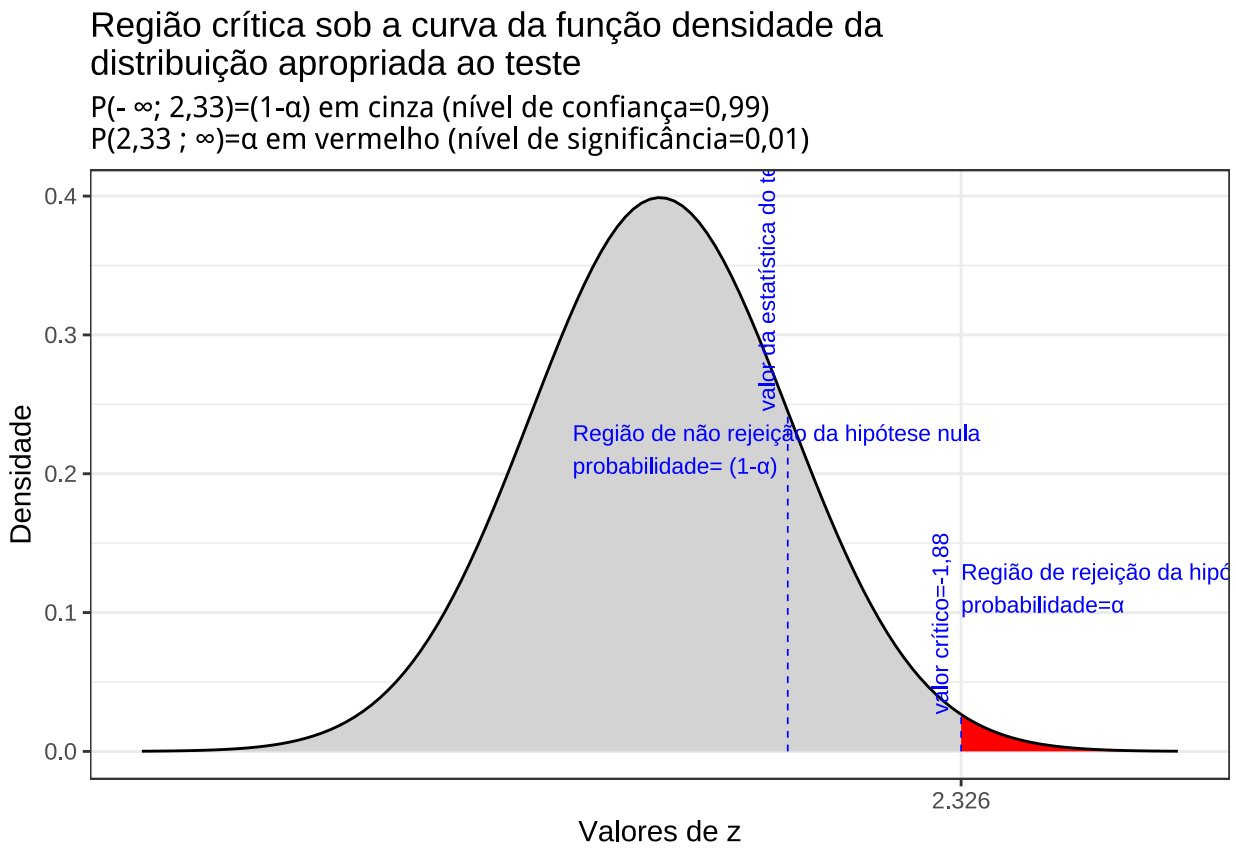


Figure 11.20: Região de rejeição da hipótese nula para o teste unilateral à direita (tipo: maior que) realizado: a região de não rejeição da hipótese nula (região de não significância do teste) está delimitada pelo valor crítico da estatística do teste: $z_{crit} = 2,33$. O valor calculado da estatística ($z_{calc} = 0,98773$) não nos possibilita a rejeição da hipótese nula sob aquele nível de confiança

Conclusão: Os resultados obtidos pela análise estatística de comparação de médias das duas amostras colhidas de garrafas de plástico enchidas por duas máquinas diferentes 1 e 2 não nos permitem rejeitar a hipótese de que a média de enchimento da máquina 1 seja no máximo igual à da máquina 2 sob um nível de confiança de 99% (Figura 11.20).

Pelo teste unilateral à esquerda concluiu-se que $\mu_1 \geq \mu_2$; pelo teste unilateral à direita conclui-se que $\mu_1 \leq \mu_2$.

Sob o nível de significânca estabelecido conclui-se que $\mu_1 = \mu_2$.

11.9.3 Testes de hipóteses para as médias de duas populações Normais com variâncias desconhecidas mas iguais: teste "t'' homocedástico ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ?$)

Probabilidade dos intervalos de confiança para os testes de hipóteses com o uso da estatística t ($T \sim t_{(n_1+n_2-2)}$). Os valores assumidos pelas diferenças amostrais são tais que

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \Delta_0}{S_c \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{(n_1+n_2-2)}$$

em que:

- Δ_0 usualmente é 0 (igualdade);
- $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ são as variâncias populacionais desconhecidas, mas admitidas iguais (homogêneas);
- $\bar{x}_1, S_1^2, n_1$ são a média, a variância e o tamanho referentes à amostra 1;
- $\bar{x}_2, S_2^2, n_2$ são a média, a variância e o tamanho referentes à amostra 2; e,
- S_c^2 é a variância conjunta ou ponderada.

Condições:

- amostras Normais (n_1 e n_2 qualquer);
- amostras sob outras distribuições (desde que n_1 e $n_2 \geq 30$);
- a utilização da estatística "t'' para n_1 e $n_2 \geq 30$ apenas pressupõe que S_c e seja um estimador suficientemente bom para σ_i; e,
- $t_{tab(\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2)}$ ou $t_{tab(\alpha;n_1+n_2-2)}$: o quantil associado na distribuição "t'' de *Student* ao nível de significância pretendido no teste, com $(n_1 + n_2 - 2)$ graus de liberdade.

A variância conjunta (ou variância ponderada) S_c^2 a ser utilizada no cálculo da estatística do teste é definida como:

$$S_c^2 = \frac{(n_1 - 1) \cdot S_1^2 + (n_2 - 1) \cdot S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Probabilidade dos intervalos de confiança para os testes de hipóteses com o uso da estatística t (T $\sim t_{(n_1+n_2-2)}$)

- Teste de hipóteses bilateral (tipo: diferente de):

$$P[|t_{calc}| \geq t_{tab(\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2)}|\mu_1 = \mu_2] = (1-\alpha)$$
$$P(-t_{tab(\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2)} \leq t_{calc} \leq t_{tab(\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2)}) = (1-\alpha)$$

- Teste de hipóteses unilateral à esquerda (tipo: menor que):

$$P[t_{calc} \geq -t_{tab(\alpha)}|\mu_1 \geq \mu_2] = (1-\alpha)$$
$$P(t_{calc} \geq -t_{tab(\alpha;n_1+n_2-2)}) = (1-\alpha)$$

- Teste de hipóteses unilateral à direita (tipo: maior que):

$$P[t_{calc} \leq t_{tab(\alpha)}|\mu_1 \leq \mu_2] = (1-\alpha)P(t_{calc} \leq t_{tab(\alpha;n_1+n_2-2)}) \qquad = (1-\alpha)$$

Nas figuras 11.8, 11.9 e 11.10 observam-se:

- as regiões de rejeição da hipótese nula (subdivididas nos dois ou em apenas um dos lados) sob a curva da função densidade de probabilidade da distribuição adequada ao teste com probabilidades iguais ao nível de significância α ;

- a região de não rejeição da hipótese nula (delimitada à esquerda e à direita ou apenas em um dos lados) com probabilidade igual ao nível de confiança $(1-\alpha)$; e,

- os valores críticos da estatística do teste.

11.9.3.1 Teste "F" para a razão de duas variâncias

Para se verificar se a consideração de igualdade das variâncias é estatisticamente sustentável pode-se recorrer ao teste "F'' de sua razão. Estrutura do teste:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 - \sigma_2^2 = \delta \\ H_1 : \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \neq \delta \end{cases}$$

em que, usualmente, $\delta = 0$ (igualdade).

Tendo-se $\frac{(\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1)$ na Hipótese nula (H_0) pela pressuposição da igualdade, F_{calc} será dado por:

$$f_{calc} = (\frac{S_1^2}{S_2^2}) \cdot (\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}) \sim F_{(n_1-1),(n_2-1)}$$

A Hipótese nula será rejeitada se:

$$f_{calc} \geq f_{((n_1-1),(n_2-1),1-\frac{\alpha}{2})}$$

ou

$$f_{calc} \leq f_{((n_1-1),(n_2-1),\frac{\alpha}{2})}$$

em que $f_{(n_1-1),(n_2-1)}$ são os quantis de ordem α (pelo lado esquerdo da curva) e $(1-\frac{\alpha}{2})$ (pelo lado direito da curva) da Distribuição F (Ronald Fisher e George Waddel Snedecor) com graus de liberdade: (n_1-1) são os graus de liberdade (GL) no numerador e (n_2-1) são os graus de liberdade (GL) no denominador (em concordância com a razão utilizada $(\frac{S_1}{S_2})$.

Em razão da limitação das tabelas torna-se interessante relembrar a propriedade:

$$f_{((n_1-1),(n_2-1),\alpha)} = \frac{1}{f_{((n_1-1),(n_2-1),(1-\frac{\alpha}{2}))}}$$

Regiões de rejeição da hipótese nula (Figura 11.21):

```
prob_desejada1=0.025
prob_desejada2=0.975

df1=3
df2=50

f_desejado1=round(qf(prob_desejada1,df1, df2), 4)
f_desejado2=round(qf(prob_desejada2,df1, df2), 4)

d_desejada1=df(f_desejado1,df1, df2)
d_desejada2=df(f_desejado2,df1, df2)


f_test_1=ggplot(data.frame(x = c(0, 6)), aes(x)) +
  stat_function(fun = df,
                geom = "area",
                fill = "red",
                xlim = c(0,f_desejado1),
                colour="black",
                args = list(
                  df1 = df1,
                  df2 = df2
                ))+
  stat_function(fun = df,
                geom = "area",
                fill = "lightgrey",
                xlim = c(f_desejado1, f_desejado2),
                colour="black",
                args = list(
                  df1 = df1,
                  df2 = df2
                ))+
  stat_function(fun = df,
                geom = "area",
                fill = "red",
                xlim = c(f_desejado2,6),
                colour="black",
                args = list(
                  df1 = df1,
                  df2 = df2
                ))+
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
```

```
#scale_x_continuous(name="Valores score (f)", breaks = c(f_desejado1, f_desejado2))+
scale_x_continuous(name="Valores score (f)")+
labs(title="Curva da função densidade \nDistribuição F",
subtitle = "P(f crítico 1, f crítico 2)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança) \nP(0; f
 ↪  crítico 1)= P(f crítico 2; \U221e)= \u03b1/2 em vermelho (nível de significância/2)
 ↪  ")+
geom_segment(aes(x = f_desejado1, y = 0, xend = f_desejado1, yend = d_desejada1),
 ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
geom_segment(aes(x = f_desejado2, y = 0, xend = f_desejado2, yend = d_desejada2),
 ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=f_desejado1+0.2, y=0.2, label="f crítico 1", angle=90, vjust=0,
 ↪  hjust=0, color="blue",size=4)+
annotate(geom="text", x=f_desejado2-0.2, y=0.2, label="f crítico 2", angle=90, vjust=0,
 ↪  hjust=0, color="blue",size=4)+
annotate(geom="text", x=f_desejado1+1, y=0.4, label="Zona de não rejeição \n(para f
 ↪  calculado)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=f_desejado2+1, y=0.2, label="Zona de rejeição  \n(para f
 ↪  calculado)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=f_desejado1-1, y=0.2, label="Zona de rejeição  \n(para f
 ↪  calculado)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
theme_bw()
```

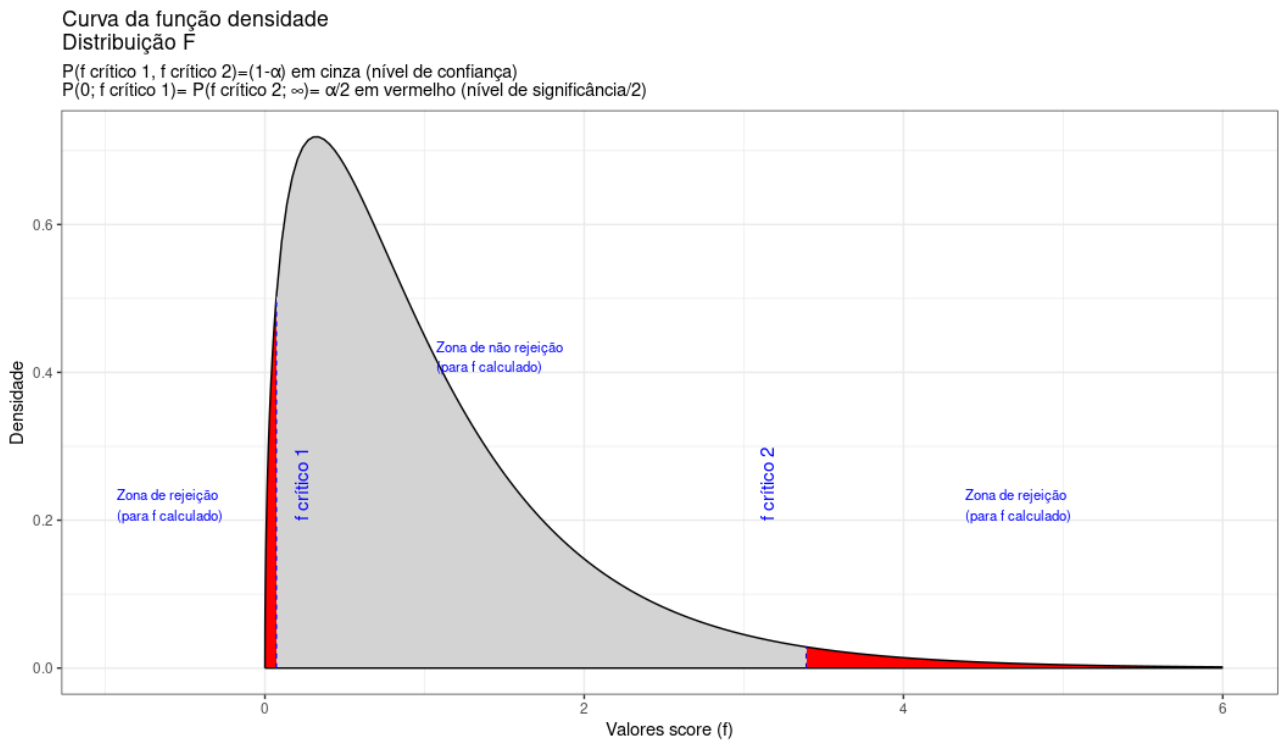


Figure 11.21: Regiões de rejeição da hipótese nula para o teste bilateral (tipo: diferente de) realizado: a região de não rejeição da hipótese nula (região de não significância do teste) está delimitada pelos valores críticos da estatística do teste: f_{crit1} e f_{crit2} para o nível de significância pretendido (α dividido em ambas as caudas) e $(df_1; df_2)$ graus de liberdade. A curva não é simétrica e assim, os valores críticos são diferentes

Uma regra prática permite reverter o teste bilateral em um teste unilateral à direita se tomarmos o maior valor (f_{calc} maior que 1, portanto) de f_{calc} dentre as possíveis razões:

$$f_{calc} = (\frac{S_1^2}{S_2^2}) \cdot (\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}) \sim F(_{(n_1-1),(n_2-1))}$$

ou

$$f_{calc} = (\frac{S_2^2}{S_1^2}) \cdot (\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}) \sim F(_{(n_2-1),(n_1-1))}$$

em que:

- $F_{tab(\alpha,n_1-1,n_2-1)}$ é o quantil de ordem α da Distribuição "F'' (Ronald Fisher e George Waddel Snedecor) com graus de liberdade $(n_1 - 1)$ no numerador e $(n_2 - 1)$ no denominador (em concordância com a razão utilizada: $\frac{S_1}{S_2}$); ou,
- $(n_2 - 1)$ são os graus de liberdade (GL) no numerador e $(n_1 - 1)$ são os graus de liberdade (GL) no denominador (em concordância com a razão utilizada: $\frac{S_2}{S_1}$).

Região de rejeição da hipótese nula (Figura 11.22):

```
prob_desejada1=0.95

df1=3
df2=50

f_desejado1=round(qf(prob_desejada1,df1, df2), 4)
d_desejada1=df(f_desejado1,df1, df2)



df_test_2=ggplot(data.frame(x = c(0, 6)), aes(x)) +
  stat_function(fun = df,
                geom = "area",
                fill = "lightgrey",
                xlim = c(0,f_desejado1),
                colour="black",
                args = list(
                  df1 = df1,
                  df2 = df2
                ))+
```

```
stat_function(fun = df,
              geom = "area",
              fill = "red",
              xlim = c(f_desejado1,6),
              colour="black",
              args = list(
                df1 = df1,
                df2 = df2
              ))+
scale_y_continuous(name="Densidade") +
#scale_x_continuous(name="Valores score (f)", breaks = c(f_desejado1, f_desejado2))+
scale_x_continuous(name="Valores score (f)")+
labs(title="Curva da função densidade \nDistribuição F",
subtitle = "P(0; f crítico 1)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança) \nP(f crítico ;
 ↪ \U221e)= \u03b1 em vermelho (nível de significância) ")+
geom_segment(aes(x = f_desejado1, y = 0, xend = f_desejado1, yend = d_desejada1),
 ↪ color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=f_desejado1+0.1, y=d_desejada1, label="f crítico 1", angle=90,
 ↪ vjust=0, hjust=0, color="blue",size=4)+
annotate(geom="text", x=f_desejado1+1, y=d_desejada1, label="Zona de rejeição \n(para f
 ↪ calculado)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=f_desejado1-1, y=d_desejada1, label="Zona de não rejeição  \n(para
 ↪ f calculado)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
theme_bw()
```

Exemplo: A Secretaria de Educação de um município deseja saber se o desempenho dos alunos de duas diferentes escolas municipais na disciplina de matemática pode ser considerado igual a um nível de significância de $\alpha = 0,05$. Verifique antes de as variâncias são iguais. Para tanto ministrou um mesmo teste a 10 alunos de cada uma delas e obteve os seguintes notas:

Table 11.4: Notas em matemática de duas escolas

Escola 01		Escola 02	
78	83	85	79
84	79	75	88
81	75	83	94
78	85	87	87
76	81	80	82

- Teste de hipóteses para a igualdade das variâncias:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 - \sigma_2^2 = \delta \\ H_1 : \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \neq \delta \end{cases}$$

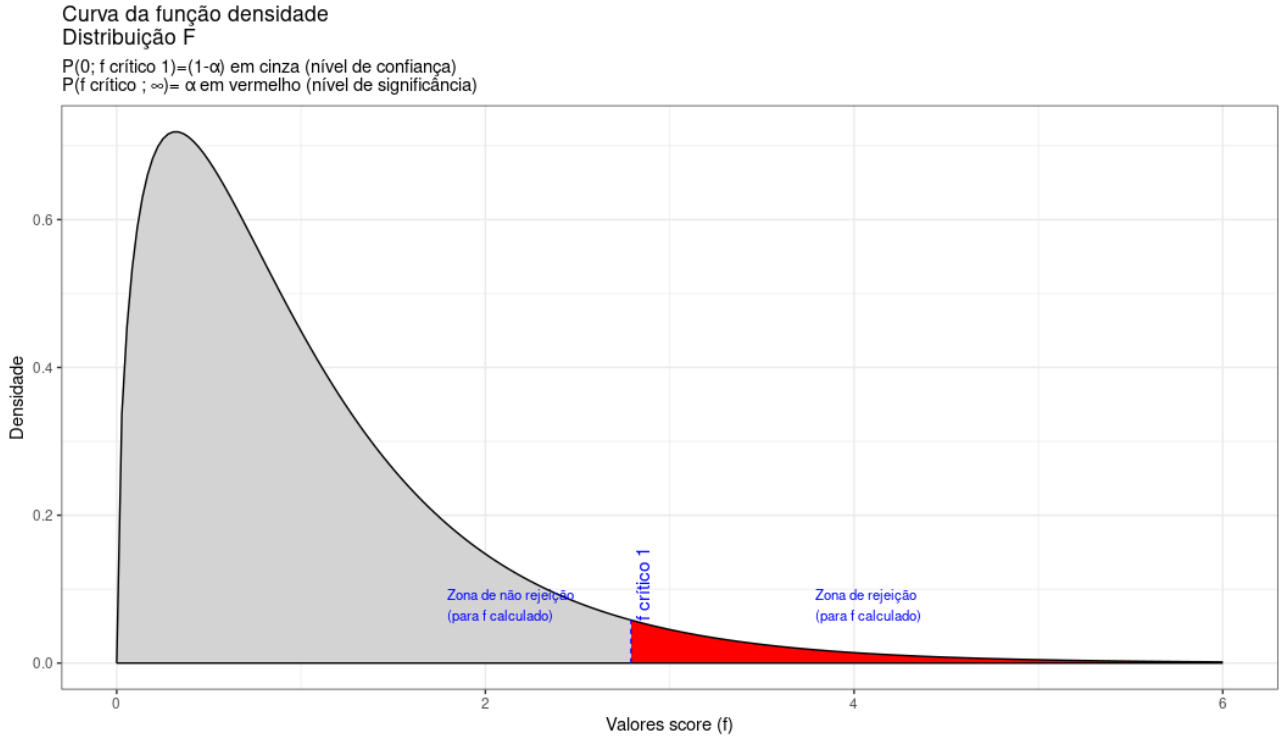


Figure 11.22: Região de rejeição da hipótese nula para o teste uniletaral à direita (tipo: menor que): a região de não rejeição da hipótese nula (região de não significância do teste) está delimitada pelo valor crítico da estatística do teste: f_{crit} para o nível de significância pretendido (α em uma cauda) e $(df_1; df_2)$ graus de liberdade.

em que, usualmente, $\delta = 0$ (igualdade). Se $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, então $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$.

$$F_{cal} = \frac{S_2^2}{S_1^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 2,56$$

$$F_{critico(\alpha, n_1-1, n_2-1)} = F_{tab(5\%,9,9)} = 3,18$$

```
prob_desejada1=0.95

df1=9
df2=9

f_desejado1=round(qf(prob_desejada1,df1, df2), 4)
d_desejada1=df(f_desejado1,df1, df2)

f_calculado=2.56
d_calculado=df(f_calculado,df1, df2)
```

```
f_test_3=ggplot(data.frame(x = c(0, 6)), aes(x)) +
  stat_function(fun = df,
                geom = "area",
                fill = "lightgrey",
                xlim = c(0,f_desejado1),
                colour="black",
                args = list(
                  df1 = df1,
                  df2 = df2
                ))+
  stat_function(fun = df,
                geom = "area",
                fill = "red",
                xlim = c(f_desejado1,6),
                colour="black",
                args = list(
                  df1 = df1,
                  df2 = df2
                ))+
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  #scale_x_continuous(name="Valores score (f)", breaks = c(f_desejado1, f_desejado2))+
  scale_x_continuous(name="Valores score (f)")+
  labs(title="Curva da função densidade \nDistribuição F",
  subtitle = "P(0; 3,18 1)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança=0,95) \nP(3,18 ; \U221e)=
   ↪  \u03b1 em vermelho (nível de significância=0,05) ")+
  geom_segment(aes(x = f_desejado1, y = 0, xend = f_desejado1, yend = d_desejada1),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=f_desejado1+0.1, y=d_desejada1, label="F crítico 1=3,18",
   ↪  angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=4)+
 annotate(geom="text", x=f_desejado1+1, y=d_desejada1, label="Zona de rejeição \n(para F
 ↪  calculado)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=f_desejado1-2, y=d_desejada1, label="Zona de não rejeição  \n(para
   ↪  F calculado)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
    geom_segment(aes(x = f_calculado, y = 0, xend = f_calculado, yend = d_calculado),
     ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=f_calculado+0.1, y=d_calculado, label="f calculado=2,56",
   ↪  angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=4)+
  theme_bw()
```

O valor calculado da estatística de teste ($F_{calc} = 2,56$) situa-se na região não significante do teste, não permitindo a rejeição da hipótese nula de que as variâncias sejam iguais sob o nível de confiança estabelecido. Não se pode rejeitar a hipótese de que as variâncias sejam iguais a um nível de significância de 5% (Figura 11.23).

Estrutura do teste:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

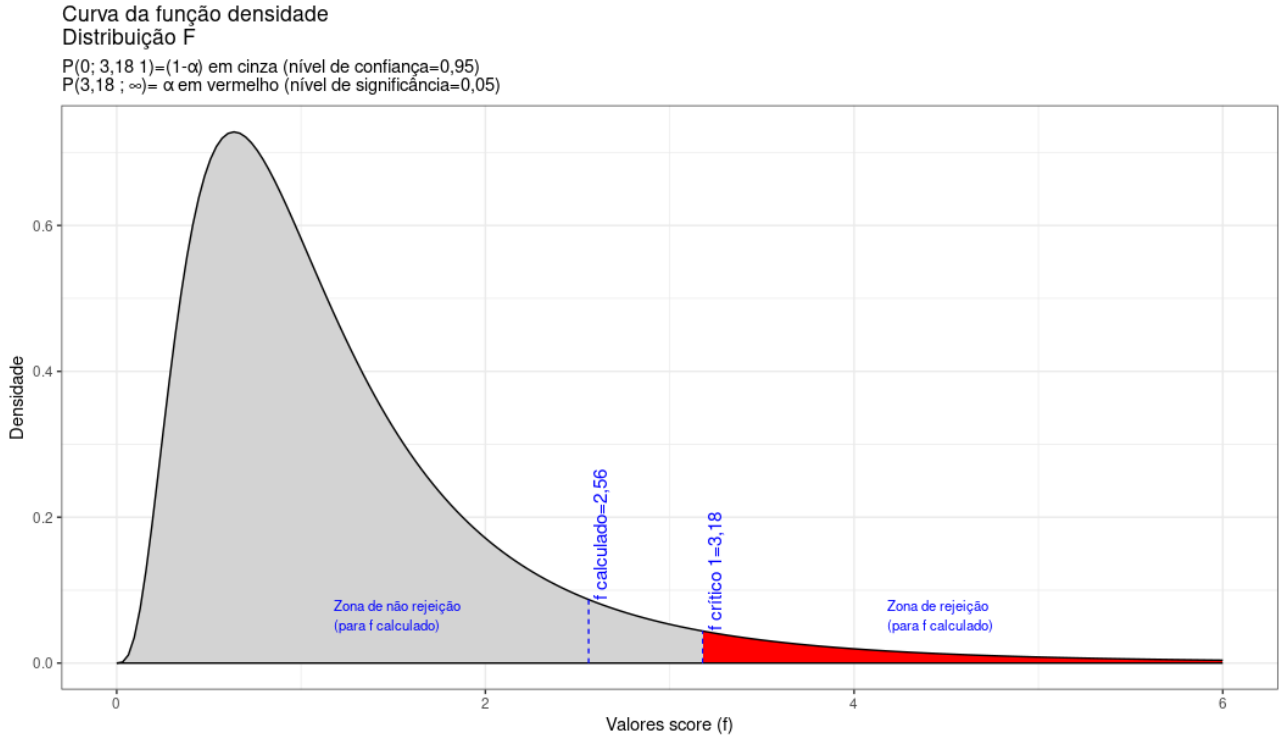


Figure 11.23: O valor calculado da estatística de teste ($F_{calc} = 2,56$) situa-se na região não significante do teste, não permitindo a rejeição da hipótese nula de que as variâncias são iguais sob o nível de confiança estabelecido.

Variâncias populacionais desconhecidas mas estatisticamente iguais. Nada se sabe sobre a distribuição da população e amostras de reduzido tamanho.

$$S_c^2 = \frac{(n_1 - 1) \cdot S_1^2 + (n_2 - 1) \cdot S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

é a variância conjunta ponderada, em que:

- μ_1, μ_2 são as médias das populações em teste;
- $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ são as variâncias das populações em teste, desconhecidas e estatisticamente iguais;
- $\bar{x}_1 = 80, S_1^2 = 3,366^2, n_1 = 10$ são a média, a variância e o tamanho referentes à amostra 1;
- $\bar{x}_2 = 84, S_2^2 = 5,395^2, n_2 = 10$ são a média, a variância e o tamanho referentes à amostra 2;
- $t_{tab(\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2)}$: o quantil associado na distribuição "t'' de **Student** ao nível de significância pretendido no teste, com $(n_1 + n_2 - 2)$ graus de liberdade.

$$S_c^2 = 20,2180$$
$$S_c = 4,4964$$

Estatística do teste:

$$t_{calc} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{S_c \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$t_{cal} = -1,9892$$

Teste bilateral:

$$t_{tab(\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2)} < t_{calc} < t_{tab(\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2)}$$

$$|t_{tab(\frac{\alpha}{2};n_1+n_2-2)}| = |t_{tab(2.5\%;18)}| = 2,101$$

```
alfa=0.05

prob_desejada1=alfa/2
df=8
t_desejado1=round(qt(prob_desejada1,df ),df)
d_desejada1=dt(t_desejado1,df)

prob_desejada2=1-alfa/2
df=8
t_desejado2=round(qt(prob_desejada2, df),df)
d_desejada2=dt(t_desejado2,df)

t_calculado=-1.9892
d_calculado=dt(t_calculado,df)


ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
```

```
 geom_area(stat = "function",
           fun = dt,
           args=list(df),
           fill = "red",
           xlim = c(-4, t_desejado1),
           colour="black") +
 geom_area(stat = "function",
           fun = dt,
           args=list(df),
           fill = "lightgrey",
           xlim = c(t_desejado1,0),
           colour="black") +
 geom_area(stat = "function",
           fun = dt,
           args=list(df),
           fill = "lightgrey",
           xlim = c(0, t_desejado2),
           colour="black") +
 geom_area(stat = "function",
           fun = dt,
           args=list(df),
           fill = "red",
           xlim = c(t_desejado2,4),
           colour="black") +
 scale_y_continuous(name="Densidade") +
 scale_x_continuous(name="Valores de t", breaks = c(t_desejado1, t_desejado2))  +
 labs(title=
        "Regiões críticas sob a curva da função densidade da \ndistribuição apropriada ao
         ↪  teste",
      subtitle = "P(-2,101, 2,101)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança=0,95)
       ↪  \nP(-\U221e; -2,101)= P(2,101; \U221e)= \u03b1/2 em vermelho (nível de
       ↪  significância/2=0,025) ")+ geom_segment(aes(x = t_desejado1, y = 0, xend =
       ↪  t_desejado1, yend = d_desejada1), color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
geom_segment(aes(x = t_desejado2, y = 0, xend = t_desejado2, yend = d_desejada2),
 ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
 annotate(geom="text", x=t_desejado1-0.1, y=d_desejada1, label="valor crítico=-2,101",
  ↪  angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
 annotate(geom="text", x=t_desejado2+0.3, y=d_desejada2, label="valor crítico=2,101",
  ↪  angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=t_desejado1-2, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
 ↪  \nprobabilidade=\u03b1/2", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=t_desejado2+0.5, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
 ↪  \nprobabilidade=\u03b1/2", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=t_desejado1+2, y=0.2, label="Região de não rejeição da hipótese
 ↪  nula \nprobabilidade= (1-\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
geom_segment(aes(x = t_calculado, y = 0, xend = t_calculado, yend = d_calculado),
 ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=t_calculado-0.1, y=d_calculado, label="valor da estatística do
 ↪  teste=-1,9892", angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
 theme_bw()
```

Conclusão: Os resultados obtidos pela análise estatística de comparação de médias das duas amostras colhidas das notas de testes de matemáticas realizados em duas escolas diferentes (escola 1 e escola 2) não nos permitem

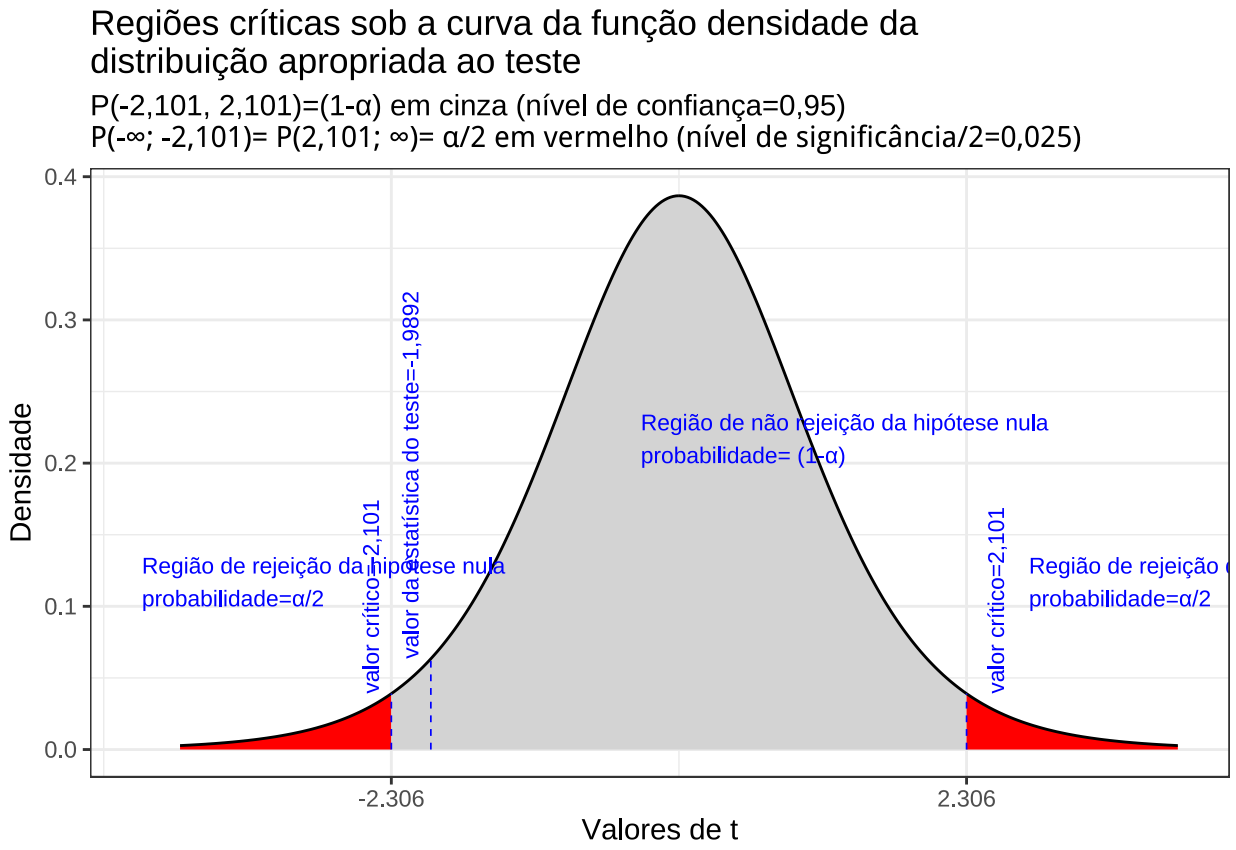


Figure 11.24: Regiões de rejeição da hipótese nula para o teste bilateral (tipo: diferente de) realizado: a região de não rejeição da hipótese nula (região de não significância do teste) está delimitada pelos valores críticos da estatística do teste: $t_{crit} = \pm 2,101$. O valor calculado da estatística ($t_{calc} = -1,9892$) situa-se na faixa de não significância do teste, impossibilitando a rejeição da hipótese nula sob aquele nível de confiança

rejeitar a hipótese de que suas médias sejam iguais a um nível de confiança de 5% (Figura 11.24).

11.9.4 Teste de hipóteses para as médias de duas populações Normais com variâncias desconhecidas e desiguais: teste " "t' ' heterocedástico ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 = ?$)

Probabilidade dos intervalos de confiança para os testes de hipóteses com o uso da estatística t ($T \sim t_\nu$). Os valores assumidos pelas diferenças amostrais são tais que

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \Delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_\nu$$

em que:

- Δ_0 usualmente é 0 (igualdade);
- $\bar{x}_1, S_1^2, n_1$ são a média, a variância e o tamanho referentes à amostra 1;
- $\bar{x}_2, S_2^2, n_2$ são a média, a variância e o tamanho referentes à amostra 2; e,
- a aproximação dos graus de liberdade (ν) é dada por uma combinação linear de variâncias de amostras independentes (Welch-Satterhwaite, 1946)

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

Condições:

- amostras Normais (n_1 e n_2 qualquer);
- amostras sob outras distribuições (desde que n_1 e $n_2 \geq 30$);

- $t_{tab(\frac{\alpha}{2};\nu)}$ ou $t_{tab(\alpha;\nu)}$: o quantil associado na distribuição "t'' de *Student* ao nível de significância pretendido no teste, com ν graus de liberdade.

Probabilidade dos intervalos de confiança para os testes de hipóteses com o uso da estatística t (T $\sim t_\nu$)

- Teste de hipóteses bilateral (tipo: diferente de):

$$P[|t_{calc}| \geq t_{tab(\frac{\alpha}{2};\nu)}|\mu_1 = \mu_2] = (1-\alpha)$$
$$P(-t_{tab(\frac{\alpha}{2};\nu)} \leq t_{calc} \leq t_{tab(\frac{\alpha}{2};\nu)}) = (1-\alpha)$$

- Teste de hipóteses unilateral à esquerda (tipo: menor que):

$$P[t_{calc} \geq t_{tab(\alpha;\nu)}|\mu_1 \geq \mu_2] = (1-\alpha)$$
$$P(t_{calc} \geq t_{tab(\alpha;\nu)}) = (1-\alpha)$$

- Teste de hipóteses unilateral à direita (tipo: maior que):

$$P[t_{calc} \leq t_{tab(\alpha;\nu)}|\mu_1 \leq \mu_2] = (1-\alpha)$$
$$P(t_{calc} \leq t_{tab(\alpha;\nu)}) = (1-\alpha)$$

Exemplo: a Secretaria de Educação de um município deseja saber se o desempenho dos alunos de duas diferentes escolas municipais na disciplina de matemática pode ser considerado igual a um nível de significância de $\alpha = 0,05$ (verifique antes se as variâncias podem ser admitidas como iguais). Para tanto ministrou um mesmo teste a 10 alunos de cada uma delas e obteve os seguintes notas:

Table 11.5: Desempenho dos alunos de duas escolas

Escola 01		Escola 02	
68	94	85	79
51	100	75	88
50	75	83	94
81	70	87	87
100	20	80	82

Estrutura do teste:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

- Teste de hipóteses bilateral (tipo: diferente de):

$$P(-t_{tab(\frac{\alpha}{2};\nu)} \leq t_{calc} \leq t_{tab(\frac{\alpha}{2};\nu)}) = (1 - \alpha)$$

As variâncias populacionais não são conhecidas e o tamanho das amostras é reduzido.

Teste de hipóteses para a igualdade das variâncias:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 - \sigma_2^2 = \delta \quad \text{usualmente } \delta = 0 \text{ (igualdade)} \\ H_1 : \sigma_1^2 - \sigma_2^2 \neq \delta \end{cases}$$

Se $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, então $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$. O maior valor de F_{calc} é dado por:

$$F_{cal} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 22,056$$

e o valor crítico é

$$F_{tab(\alpha,n_1-1,n_2-1)} = F_{tab(5\%,9,9)} = 3,18$$

```
prob_desejada1=0.95

df1=9
df2=9

f_desejado1=round(qf(prob_desejada1,df1, df2), 4)
d_desejada1=df(f_desejado1,df1, df2)

f_calculado=22.056
d_calculada=df(f_calculado,df1, df2)


f_test_4=ggplot(data.frame(x = c(0, 25)), aes(x)) +
  stat_function(fun = df,
                geom = "area",
                fill = "lightgrey",
                xlim = c(0,f_desejado1),
                colour="black",
                args = list(
                  df1 = df1,
                  df2 = df2
                ))+
  stat_function(fun = df,
                geom = "area",
                fill = "red",
                xlim = c(f_desejado1,25),
                colour="black",
                args = list(
                  df1 = df1,
                  df2 = df2
                ))+
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  #scale_x_continuous(name="Valores score (f)", breaks = c(f_desejado1, f_desejado2))+
  scale_x_continuous(name="Valores score (f)")+
  labs(title="Curva da função densidade \nDistribuição F",
  subtitle = "P(0; 22,056)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança) \nP(22,056 ; \U221e)=
   ↪  \u03b1 em vermelho (nível de significância) ")+
  geom_segment(aes(x = f_desejado1, y = 0, xend = f_desejado1, yend = d_desejada1),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=f_desejado1+0.1, y=d_desejada1, label="F crítico", angle=90,
   ↪  vjust=0, hjust=0, color="blue",size=4)+
```

```
    geom_segment(aes(x = f_calculado, y = 0, xend = f_calculado, yend = d_calculada),
     ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=f_calculado+0.1, y=d_desejada1, label="F calculado", angle=90,
   ↪  vjust=0, hjust=0, color="blue",size=4)+
 annotate(geom="text", x=f_desejado1+5, y=d_desejada1, label="Zona de rejeição \n(para F
  ↪  calculado)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=f_desejado1-2.5, y=d_desejada1, label="Zona de não rejeição
   ↪  \n(para F calculado)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  theme_bw()
```

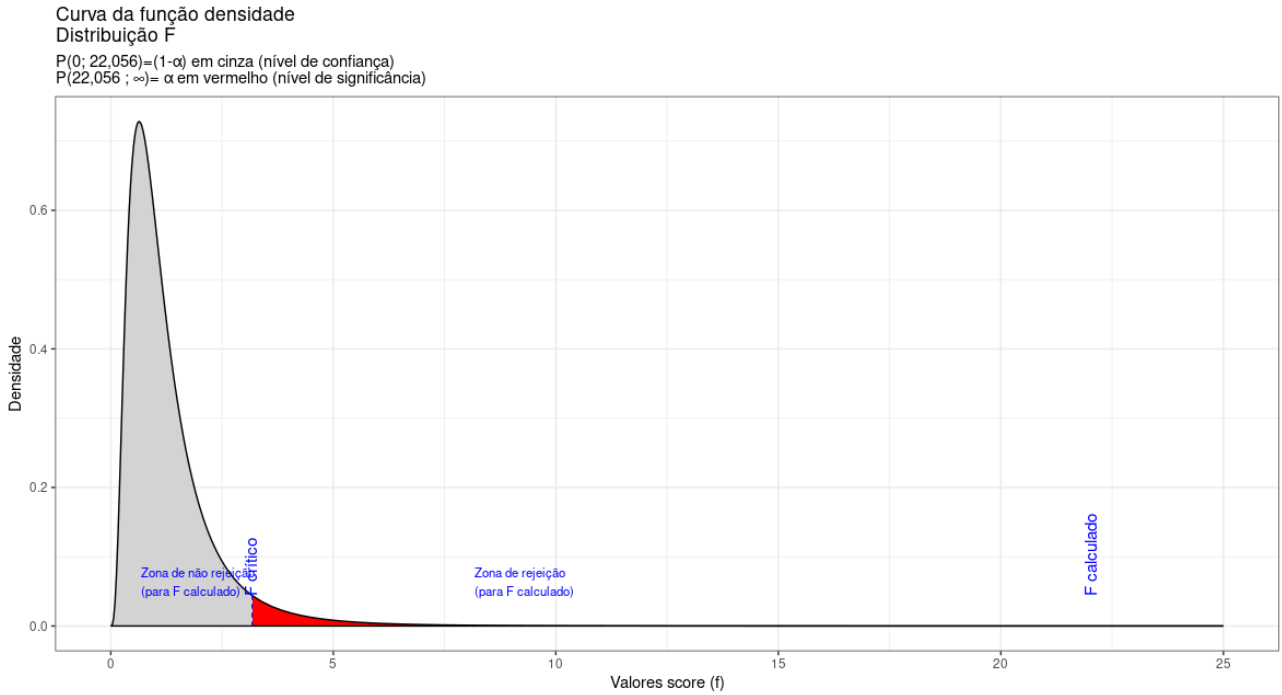


Figure 11.25: O valor calculado da estatística de teste ($F_{calc} = 3,18$) situa-se na região significante do teste, permitindo a rejeição da hipótese nula de que as variâncias sejam iguais sob o nível de confiança estabelecido.

Conclusão: não se pode aceitar a hipótese de que as variâncias sejam iguais a um nível de significância de 5% (cf. figura 11.25).

Estatística do teste: $T \sim t_{(\nu)}$ considerando que as variâncias populacionais não podem ser, estatisticamente, admitidas como iguais:

$$t_{calc} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \Delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

em que:

- μ_1, μ_2 são as médias das populações em teste;
- $\bar{x}_1 = 70,90, S_1^2 = 25,339^2, n_1 = 10$ são a média, a variância e o tamanho amostral 1;
- $\bar{x}_2 = 84, S_2^2 = 5,395^2, n_2 = 10$ são a média, a variância e o tamanho amostral 2;
- $t_{tab(\frac{\alpha}{2};\nu)}$ ou $t_{tab(\alpha;\nu)}$: o quantil associado na distribuição "t'' de *Student* ao nível de significância pretendido no teste, com graus de liberdade (ν).

A aproximação dos graus de liberdade (ν) é dada por uma combinação linear das variâncias de amostras independentes (equação de Welch-Satterhwaite, 1946):

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}} = 10$$

(aproximar o resultado para o inteiro superior mais próximo).

Cálculo da estatística do teste:

$$t_{calc} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \Delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = -1,599$$

Da tabela 't'' de Student obtemos o valor crítico bicaudal da estatística:

$$|t_{tab(\frac{\alpha}{2};\nu)}| = |t_{tab(\frac{0,025}{2};10)}| = 2,22$$

```
alfa=0.05

prob_desejada1=alfa/2
df=8
t_desejado1=round(qt(prob_desejada1,df ),df)
d_desejada1=dt(t_desejado1,df)
```

```
prob_desejada2=1-alfa/2
df=8
t_desejado2=round(qt(prob_desejada2, df),df)
d_desejada2=dt(t_desejado2,df)

t_calculado=-1.599
d_calculado=dt(t_calculado,df)


ggplot(NULL, aes(c(-4,4))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "red",
            xlim = c(-4, t_desejado1),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(t_desejado1,0),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(0, t_desejado2),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "red",
            xlim = c(t_desejado2,4),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores de t", breaks = c(t_desejado1, t_desejado2))  +
  labs(title=
         "Regiões críticas sob a curva da função densidade da \ndistribuição apropriada ao
          ↪  teste",
       subtitle = "P(-2,22, 2,22)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança=0,95) \nP(-\U221e;
        ↪  -2,22)= P(2,22; \U221e)= \u03b1/2 em vermelho (nível de significância/2=0,025)
        ↪  ")+ geom_segment(aes(x = t_desejado1, y = 0, xend = t_desejado1, yend =
        ↪  d_desejada1), color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
 geom_segment(aes(x = t_desejado2, y = 0, xend = t_desejado2, yend = d_desejada2),
  ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=t_desejado1-0.1, y=d_desejada1, label="valor crítico=-2,101",
   ↪  angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=t_desejado2+0.3, y=d_desejada2, label="valor crítico=2,101",
   ↪  angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
 annotate(geom="text", x=t_desejado1-2, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
  ↪  \nprobabilidade=\u03b1/2", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
 annotate(geom="text", x=t_desejado2+0.5, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
  ↪  \nprobabilidade=\u03b1/2", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
 annotate(geom="text", x=t_desejado1+2, y=0.2, label="Região de não rejeição da hipótese
  ↪  nula \nprobabilidade= (1-\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
```

```
geom_segment(aes(x = t_calculado, y = 0, xend = t_calculado, yend = d_calculado),
 ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=t_calculado-0.1, y=d_calculado, label="valor da estatística do
 ↪  teste=-1,599", angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
 theme_bw()
```

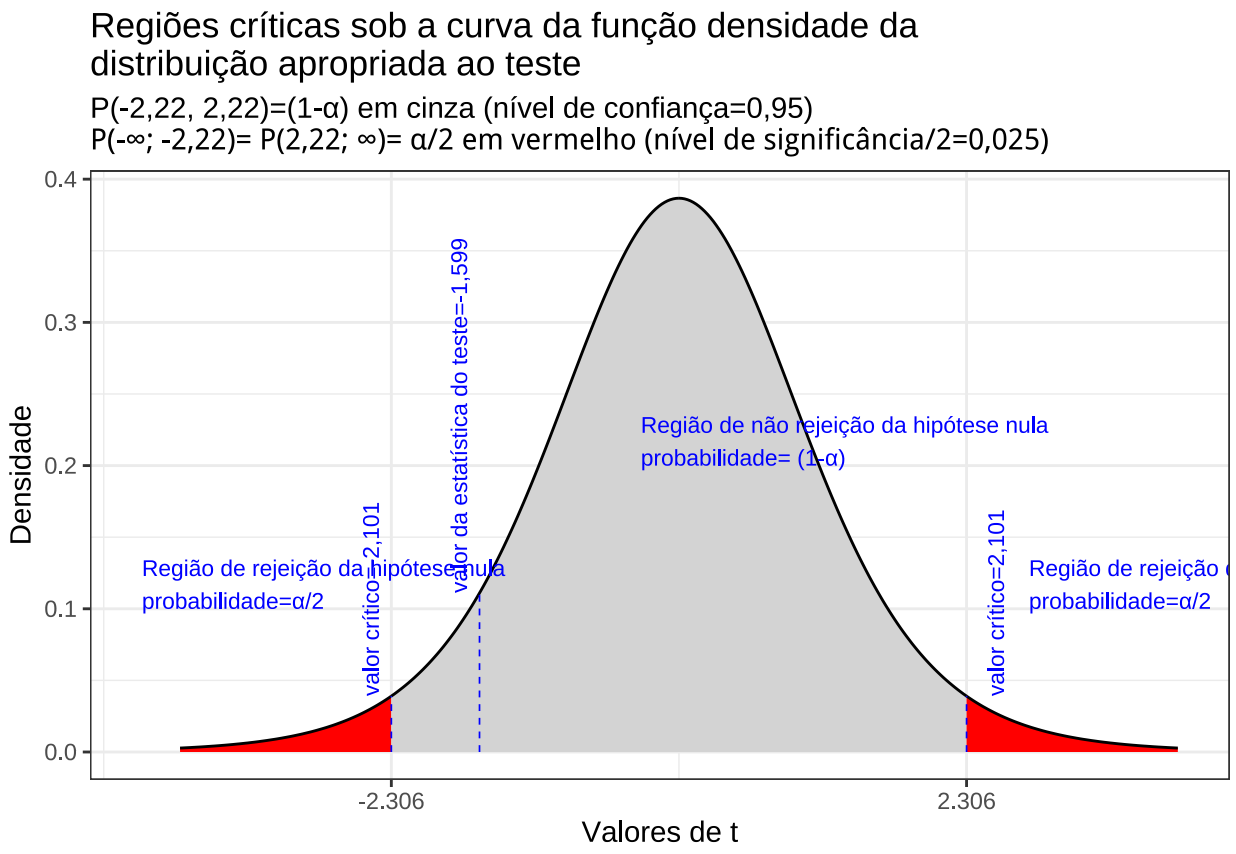


Figure 11.26: Regiões de rejeição da hipótese nula para o teste bilateral (tipo: diferente de) realizado: a região de não rejeição da hipótese nula (região de não significância do teste) está delimitada pelos valores críticos da estatística do teste: $t_{crit} = \pm 2,22$. O valor calculado da estatística ($t_{calc} = -1,599$) não se situa na faixa de significância do teste, não nos permitindo a rejeição da hipótese nula sob aquele nível de confiança

Conclusão: Os resultados obtidos pela análise estatística de comparação de médias das duas amostras colhidas das notas de testes de matemáticas realizados em duas escolas diferentes (1 e 2) não nos permitem rejeitar a hipótese de que suas médias sejam iguais a um nível de confiança de 5% (cf. figura 11.26.

11.10 Teste de uma proporção amostral

A aproximação de uma população sob distribuição Binomial pela distribuição Normal pode ser realizada desde que atendidas às seguintes condições:

- a amostra é colhida de modo aleatório, os ensaios são independentes e com probabilidade de "sucesso'' constante;
- se a amostra é colhida sem reposição, o tamanho da população deve ser ao menos 10 (20) vezes o tamanho da amostra ($N \geq 10, 20 \cdot n$);
- tamanho de amostra deve ser de ao menos 30 ($n \geq 30$);
- a proporção populacional não extrema (próxima a 0 ou 1);
- o número de "sucessos'' deve ser de ao menos 5 ($n \cdot \pi_0 \geq 5$); e,
- o número de "fracassos'' deve ser de ao menos 5 ($n \cdot (1 - \pi_0) \geq 5$).

11.10.1 Estruturas possíveis para as hipóteses

Teste bilateral (tipo: diferente de)

$$\begin{cases} H_0 : \pi = \pi_0 \\ H_1 : \pi \neq \pi_0 \end{cases}$$

Teste unilateral à esquerda (tipo: menor que)

$$\begin{cases} H_0 : \pi \geq \pi_0 \\ H_1 : \pi < \pi_0 \end{cases}$$

Teste unilateral à direita (tipo: maior que)

$$\begin{cases} H_0 : \pi \leq \pi_0 \\ H_1 : \pi > \pi_0 \end{cases}$$

Estatística do teste:

$$Z = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0))}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

em que:

onde:

- p é a proporção observada na amostra, uma estimativa da proporção populacional π;
- π_0 o valor (desconhecido) inferido à proporção populacional, a ser testado frente à proporção amostral; e,
- n: é o tamanho da amostra.

11.10.2 Probabilidade dos intervalos de confiança para os testes de hipóteses com o uso da estatística Z ($Z \sim \mathcal{N}(0,1)$):

- Teste de hipóteses bilateral (tipo: diferente de):

$$P[|Z_{calc}| \leq Z_{tab(\frac{\alpha}{2})}|\pi = \pi_0] = (1-\alpha)$$
$$P(-Z_{tab(\frac{\alpha}{2})} \leq Z_{calc} \leq Z_{tab(\frac{\alpha}{2})}) = (1-\alpha)$$

- Teste de hipóteses unilateral à esquerda (tipo: menor que):

$$P[Z_{calc} \geq Z_{tab(\alpha)} | \pi \geq \pi_0] = (1 - \alpha)$$
$$P(Z_{calc} \geq Z_{tab(\alpha)}) = (1 - \alpha)$$

- Teste de hipóteses unilateral à direita (tipo maior que):

$$P[Z_{calc} \leq Z_{tab(\alpha)} | \pi \leq \pi_0] = (1 - \alpha)$$
$$P(Z_{calc} \leq Z_{tab(\alpha)}) = (1 - \alpha)$$

Nas figuras 11.8, 11.9 e 11.10 observam-se:

- as regiões de rejeição da hipótese nula (subdivididas nos dois ou em apenas um dos lados) sob a curva da função densidade de probabilidade da distribuição adequada ao teste com probabilidades iguais ao nível de significância α ;
- a região de não rejeição da hipótese nula (delimitada à esquerda e à direita ou apenas em um dos lados) com probabilidade igual ao nível de confiança $(1 - \alpha)$; e,
- os valores críticos da estatística do teste.

Exemplo: Um relatório de uma companhia afirma que 40% de toda a água obtida a partir de poços artesianos no nordeste é salobra. Há muita controvérsia sobre essa informação, alguns dizem que a proporção é maior, outros que é menor. Para dirimir essa dúvida, 400 poços foram sorteados e observou-se em 120 deles que a água era salobra. Qual seria a conclusão a um nível de significância de 3%?

O problema nos pede um teste bilateral (tipo: diferente de):

$$\begin{cases} H_0 : \pi = 0,40 \\ H_1 : \pi \neq 0,40 \end{cases}$$

Iremos verificar se a informação amostral obtida nos permite rejeitar a hipótese nula que afirma ser a proporção dos poços com água salobra é de 40%, fazendo então valer a hipótese alternativa que afirma ser **diferente de** 40%.

Verificação das condições:

- nada se afirmou sobre o tamanho da população para se verificar: $Nge10n$);
- tamanho de amostra $n \geq 30$: nossa amostra é de 400 poços;
- proporção populacional não extrema (próxima a 0 ou 1): a afirmação é de que $\pi = 0,40$; e,
- $(n \cdot \pi)$ e $(n \cdot (1 - \pi)$ são maiores que 5 (160 e 240, respectivamente).

Assim, a estatística do teste fica definida como sendo:

$$Z = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0))}{n}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

em que:

- $p = 0,30$ é a proporção amostral, uma estimativa da proporção populaciona π;
- $\pi_0 = 0,40$ é o valor (desconhecido) inferido à proporção populacional, a ser testado frente à proporção amostral; e,
- $n = 400$: é o tamanho da amostra.

Da tabela da distribuição Normal padronizada obtemos o valor crítico bicaudal: $|Z_{tab(\frac{\alpha}{2})}| = 2,17$. Pelo cálculo, a estatística do teste é $z_{calc} = -4,082$.

```
alfa=0.03

prob_desejada1=alfa/2
z_desejado1=round(qnorm(prob_desejada1),4)
d_desejada1=dnorm(z_desejado1, 0, 1)

prob_desejada2=1-alfa/2
z_desejado2=round(qnorm(prob_desejada2),4)
d_desejada2=dnorm(z_desejado2, 0, 1)

z_calculado=-4.082
d_calculado=dnorm(z_calculado, 0, 1)


ggplot(NULL, aes(c(-5,5))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(-5, z_desejado1),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(z_desejado1,0),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(0, z_desejado2),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(z_desejado2,5),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores de z", breaks = c(z_desejado1,z_desejado2))  +
  labs(title=
         "Regiões críticas sob a curva da função densidade da \ndistribuição apropriada ao
          ↪  teste",
       subtitle = "P(-2,17, 2,17)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança=0,97) \nP(-\U221e;
        ↪  -2,17)= P(2,17; \U221e)= \u03b1/2 em vermelho (nível de significância/2=0,015)
        ↪  ")+
  geom_segment(aes(x = z_desejado1, y = 0, xend = z_desejado1, yend = d_desejada1),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  geom_segment(aes(x = z_desejado2, y = 0, xend = z_desejado2, yend = d_desejada2),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado1-0.1, y=d_desejada1, label="valor crítico=-2,17",
   ↪  angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado2+0.3, y=d_desejada2, label="valor crítico=2,17",
   ↪  angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado1-1.5, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
   ↪  \nprobabilidade=\u03b1/2", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=z_desejado2+0.5, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
   ↪  \nprobabilidade=\u03b1/2", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
```

```
annotate(geom="text", x=z_desejado1+1.3, y=0.2, label="Região de não rejeição da hipótese
 ↪  nula \nprobabilidade= (1-\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
geom_segment(aes(x = z_calculado, y = 0, xend = z_calculado, yend = d_calculado),
 ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=z_calculado-0.1, y=d_calculado, label="valor da estatística do
 ↪  teste=-4,082", angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
theme_bw()
```

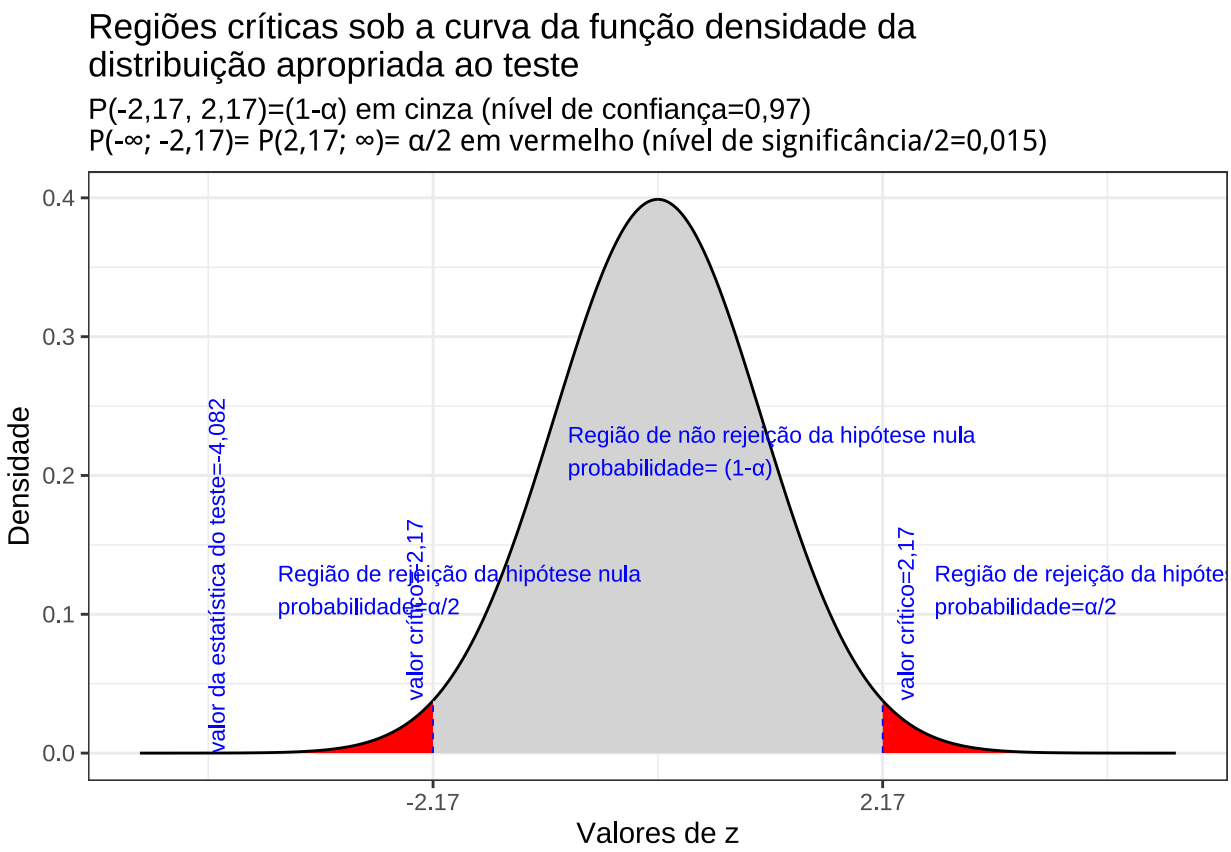


Figure 11.27: Regiões de rejeição da hipótese nula para o teste bilateral (tipo: diferente de) realizado: a região de não rejeição da hipótese nula (região de não significância do teste) está delimitada pelos valores críticos da estatística do teste: $z_{crit} = \pm 2,17$. O valor calculado da estatística ($z_{calc} = -4,082$) situa-se na faixa de significância do teste, possibilitando a rejeição da hipótese nula sob aquele nível de confiança

Conclusão: Os resultados obtidos na análise estatística realizada nos permitem rejeitar a hipótese de que a proporção de poços com água salobra é de 40% sob um nível de confiança de 97%. A proporção de poços com água salobra no Nordeste é **diferente** de 40% (Figura 11.25).

Teste unilateral à esquerda (tipo: menor que)

$$\begin{cases} H_0 : \pi \geq 0,40 \\ H_1 : \pi < 0,40 \end{cases}$$

Iremos verificar se a informação amostral obtida nos permite rejeitar a hipótese nula que afirma ser a proporção igual ou maior a 40%, fazendo então valer a hipótese alternativa que afirma ser a proporção **menor que** 40%.

Da tabela obtemos o valor crítico monocaudal: $Z_{tab(\alpha)} = -1,88$. Pelo cálculo, a estatística do teste é $Z_{calc} = -4,082$.

```
alfa=0.03
prob_desejada=alfa
z_desejado=round(qnorm(prob_desejada),4)
d_desejada=dnorm(z_desejado, 0, 1)

z_calculado=-4.082
d_calculado=dnorm(z_calculado, 0, 1)




ggplot(NULL, aes(c(-5,5))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(-5, z_desejado),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(z_desejado,0),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(0, z_desejado),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(z_desejado,5),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores de z", breaks = c(z_desejado))  +
  labs(title=
         "Região crítica sob a curva da função densidade da \ndistribuição apropriada ao
          ↪  teste",
       subtitle = "P( -1,88,\U221e,)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança=0,97)
        ↪  \nP(-\U221e; -1,88)=\u03b1 em vermelho (nível de significância=0,03) ")+
geom_segment(aes(x = z_desejado, y = 0, xend = z_desejado, yend = d_desejada), color="blue",
 ↪  lty=2, lwd=0.3)+
```

```
annotate(geom="text", x=z_desejado-0.1, y=d_desejada, label="valor crítico=-1,88", angle=90,
 ↪  vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado-2, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
 ↪  \nprobabilidade=\u03b1", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado+1, y=0.2, label="Região de não rejeição da hipótese nula
 ↪  \nprobabilidade= (1-\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  geom_segment(aes(x = z_calculado, y = 0, xend = z_calculado, yend = d_calculado),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=z_calculado-0.1, y=d_calculado, label="valor da estatística do
   ↪  teste=-4,082", angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  theme_bw()
```

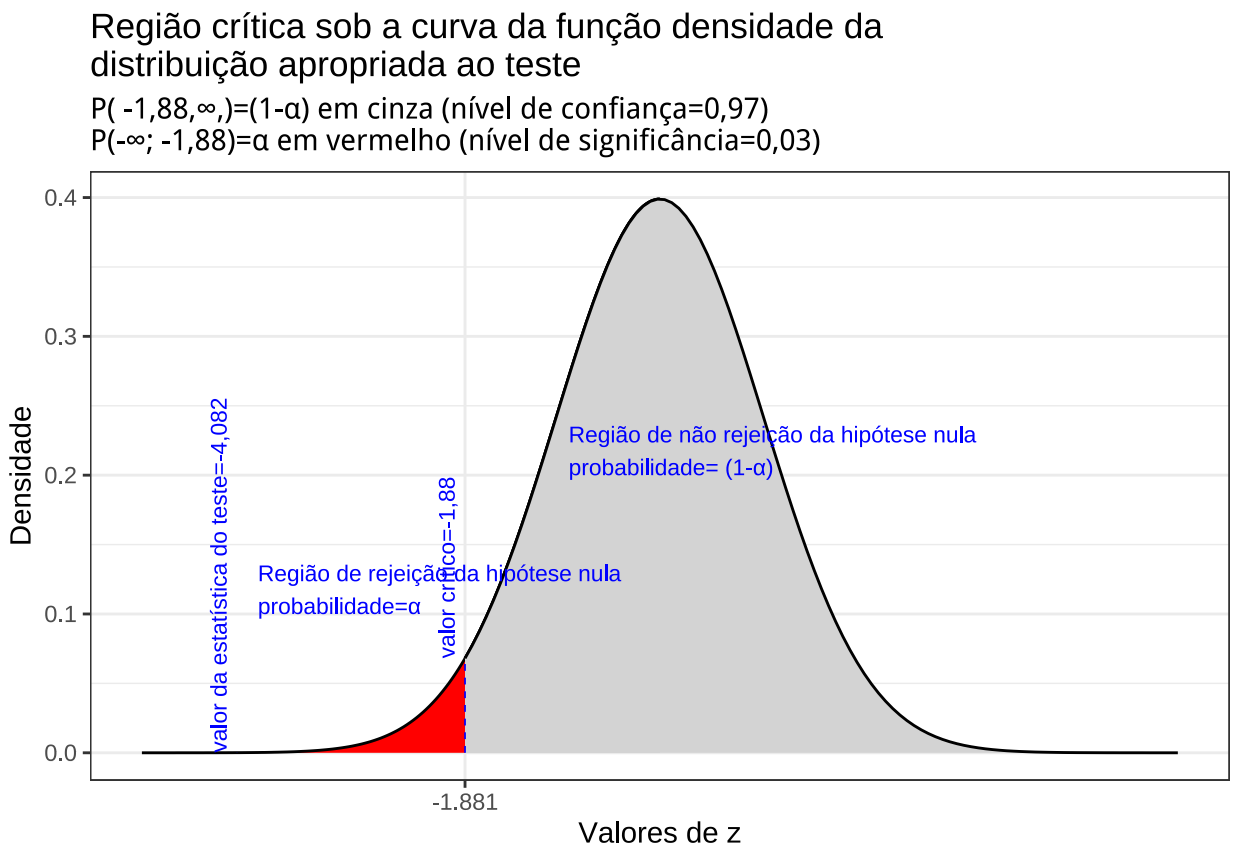


Figure 11.28: Regiões de rejeição da hipótese nula para o teste unilateral à esquerda (tipo: menor que) realizado: a região de não rejeição da hipótese nula (região de não significância do teste) está delimitada pelos valor crítico da estatística do teste: $z_{crit} = -1,88$. O valor calculado da estatística ($z_{calc} = -4,082$) situa-se na faixa de significância do teste, o que nos permite a rejeição da hipótese nula sob aquele nível de confiança

Conclusão: Os resultados obtidos na análise estatística realizada nos permitem rejeitar a hipótese de que a proporção de poços com água salobra é de 40% sob um nível de confiança de 97%. A proporção de poços com água salobra no Nordeste é **menor que** de 40% (Figura 11.26.

Teste unilateral à direita (tipo: maior que)

$$\begin{cases} H_0 : \pi \leq 0,40 \\ H_1 : \pi > 0,40 \end{cases}$$

Iremos verificar se a informação amostral obtida nos permite rejeitar a hipótese nula que afirma ser a proporção igual ou meor a 40%, fazendo então valer a hipótese alternativa que afirma ser a proporção **maior que** 40%.

Da tabela obtemos o valor crítico monocaudal: $Z_{tab(\alpha)} = 1,88$. Pelo cálculo, a estatística do teste é $Z_{calc} = -4,082$.

```
alfa=0.97
prob_desejada=alfa
z_desejado=round(qnorm(prob_desejada),4)
d_desejada=dnorm(z_desejado, 0, 1)

z_calculado=-4.082
d_calculado=dnorm(z_calculado, 0, 1)




ggplot(NULL, aes(c(-5,5))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(-5, z_desejado),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dnorm,
            fill = "red",
            xlim = c(z_desejado,5),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores de z", breaks = c(z_desejado))  +
  labs(title=
         "Região crítica sob a curva da função densidade da \ndistribuição apropriada ao
          ↪  teste",
       subtitle = "P( -\U221e; 1,88)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança=0,97) \nP(1,88;
        ↪  \U221e)=\u03b1 em vermelho (nível de significância=0,03) ")+
geom_segment(aes(x = z_desejado, y = 0, xend = z_desejado, yend = d_desejada), color="blue",
 ↪  lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado-0.1, y=d_desejada, label="valor crítico=-1,88", angle=90,
 ↪  vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado+1, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
 ↪  \nprobabilidade=\u03b1", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
annotate(geom="text", x=z_desejado-2.5, y=0.2, label="Região de não rejeição da hipótese
 ↪  nula  \nprobabilidade= (1-\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
```

```
geom_segment(aes(x = z_calculado, y = 0, xend = z_calculado, yend = d_calculado),
 ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
annotate(geom="text", x=z_calculado-0.1, y=d_calculado, label="valor da estatística do
 ↪  teste=-4,082", angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
theme_bw()
```

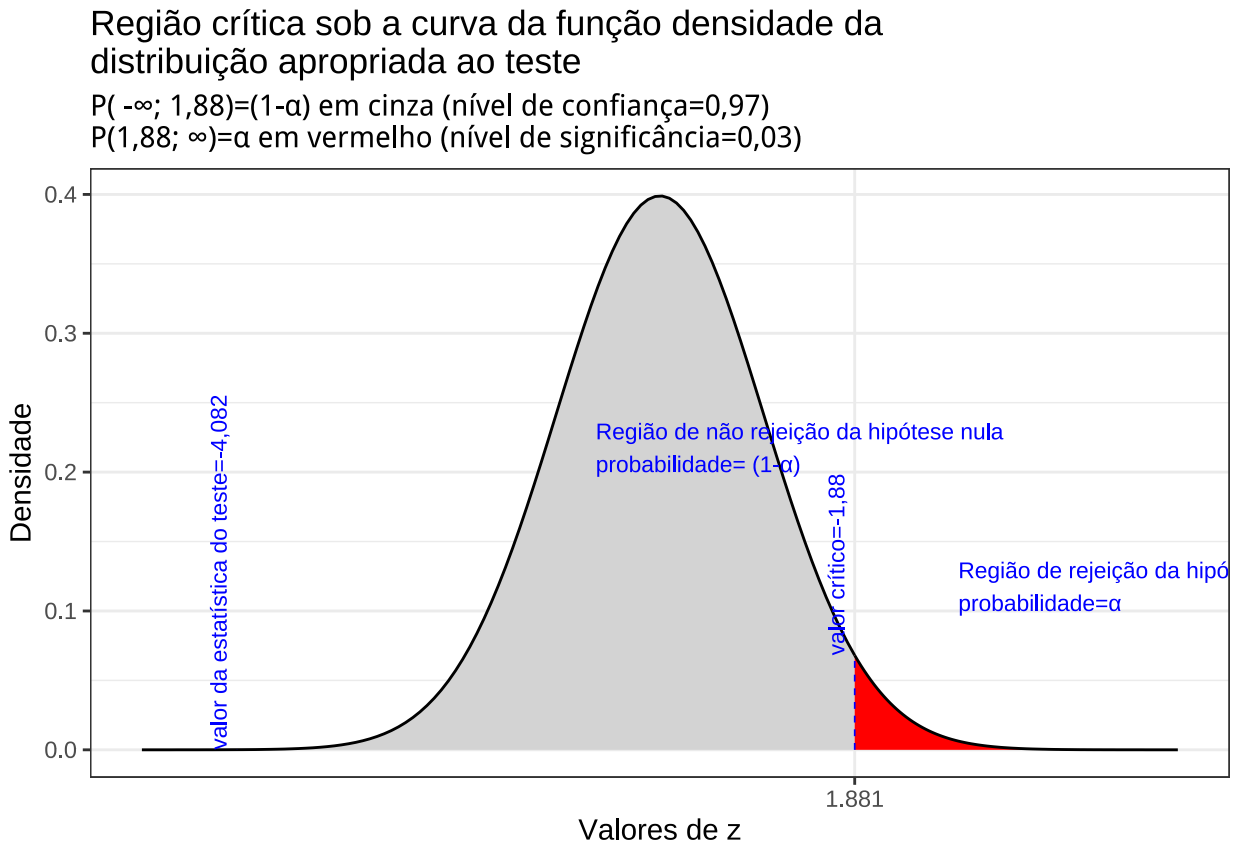


Figure 11.29: Região de rejeição da hipótese nula para o teste unilateral à direita (tipo: maior que) realizado: a região de não rejeição da hipótese nula (região de não significância do teste) está delimitada pelo valor crítico da estatística do teste: $z_{crit} = 1,88$. O valor calculado da estatística ($z_{calc} = -4,082$) situa-se na faixa de não significância do teste, não possibilitando a rejeição da hipótese nula sob aquele nível de confiança

Conclusão: Os resultados obtidos na análise estatística realizada não nos permitem rejeitar a hipótese de que a proporção de poços com água salobra seja menor ou igual a 40% sob um nível de confiança de 97%. (cf. Figura 11.27).

11.11 Testes não paramétricos

Um teste não paramétrico (às vezes chamado de teste livre de distribuição) não assume nada sobre a distribuição subjacente (por exemplo, que os dados vêm de uma distribuição Normal). Isso não equivale a dizer que não se saiba nada sobre a população de origem. Geralmente significa que se sabe que os dados populacionais não são de uma distribuição Normal .

Tipos de testes não paramétricos

- Teste de sinal;
- Teste de Sinal de Wilcoxon;
- Teste de Friedman;
- Teste de Mann-Whitney;
- Teste de Kruskal Wallis; e,

- Teste qui-quadrado.

Há um conjunto importante de testes de hipóteses que possibilita a análise de frequências que ocorrem nas classes de um fator.

Esses testes de hipóteses são muitas vezes referenciados como testes qui-quadrado porque a estatística do teste possui, de modo assintótico, distribuição qui-quadrado.

Embora esses testes se enquadrem em categorias distintas, compartilham algumas características comuns:

- Em cada situação considera-se a amostra aleatória, gerada por um ou mais experimentos multinomiais, independentes, de uma ou mais populações multinomiais. Obviamente, a população Bernoulli e a população binomial são casos particulares.

- A amostra aleatória é formada pelas frequências observadas nas classes, definidas pela classificação de cada uma das unidades de observação de acordo com um ou mais critérios de interesse. Em todas as situações, a estatística do teste envolve a comparação entre **frequências observadas** e **frequências esperadas**, obtidas sob a hipótese de nulidade. Na essência, o teste qui-quadrado verifica hipóteses sobre as probabilidades e utiliza a **discrepância** existente entre as **frequências observadas** e as **frequências esperadas** para concluir sobre elas. Basicamente, dispõe-se de observações (contidas na amostra) sobre uma ou mais populações e busca-se determinar de qual população multinomial essa amostra veio. A hipótese de nulidade especifica a população de interesse.
- Se as probabilidades não forem completamente especificadas, algumas probabilidades (e, consequentemente, frequências esperadas) deverão ser estimadas pelos dados, reduzindo os graus de liberdade da distribuição limite.

- Como mencionado, a distribuição limite da estatística do teste é a distribuição qui-quadrado. Uma regra usualmente exigida para uma boa aproximação da distribuição qui-quadrado é que a **frequência esperada seja maior ou igual a 5**. Evidentemente, quanto maiores forem as frequências esperadas, melhor será a aproximação.

Testes paramétricos exigem que a variável seja numérica e várias hipóteses relativas aos parâmetros sejam satisfeitas, tais como que os dados tenham uma distribuição Normal (ou a sigam assintoticamente) ou ainda,

em alguns casos que, suas variâncias sejam homogêneas (homocedasticidade) e as amostras tenham um certo tamanho ou frequência observada mínimos.

Testes não paramétricos não assumem nenhum tipo de distribuição e são menos **exigentes**, podendo também trabalhar com variáveis não numéricas. Como regra geral, opta-se por testes não paramétricos quando:

- os valores observados forem extraídos de populações que não possuem uma aproximação com a distribuição Normal;
- as populações de origem não possuem homogeneidade de variâncias (heterocedasticidade); e,
- as variáveis em estudo não apresentem medidas intervalares que possibilitem o cálculo de estatísticas tais como a média e desvios.

11.11.1 Teste Qui-quadrado para verificação da independência (homogeneidade)

O Teste Qui-quadrado de homogeneidade (ou independência) é um teste estatístico aplicado a dados categóricos para avaliar quão provável é que qualquer diferença observada nas proporções observadas entre os vários níveis de uma variável categórica em populações diferentes (ou níveis de uma segunda variável categórica) seja simples decorrência do acaso; ou seja, o teste Qui-quadrado é geralmente usado verificar quão homogêneas são entre si as frequências observadas não havendo, portanto, diferença estatisticamente significativa entre as populações (ou variáveis).

Diferenças entre o teste Qui-quadrado de homogeneidade e de independência:

- **Teste Qui-quadrado de homogeneidade**: selecionamos uma amostra de elementos de cada uma das populações e distribuímos os elementos de cada uma dessas amostras segundo as categorias da variável estudada; e,
- **Teste Qui-quadrado de independência**: distribuímos uma amostra de n elementos de apenas uma população segundo as categorias da primeira variável categórica A e as da segunda variável categórica B.

Esse tipo de investigação equivale à realização de Teste de Hipóteses onde a hipótese nula que pressupõe que exista homogeneidade (independência) na distribuição das contagens observadas em cada uma das categorias da variável nas populações amostradas (ou níveis da outra variável, no teste Qui-quadrado de Independência) será confrontada com a hipótese alternativa, de que não são homogêneas (dependência) e as flutuações não são podem ser atribuídas ao acaso.

Desse modo o foco será buscar evidência estatística robusta o suficiente que confirmem que as frequências observadas entre as diferentes populações (ou níveis da outra variável, no teste Qui-quadrado de Independência) podem ser consideradas homogêneas (independentes) sob um dado nível de significância α.

Consideremos para isso a tabela genérica para a realização do Teste Qui-quadrado onde em cada célula (habitualmente chamada de *casela*) temos uma frequência (uma quantidade) observada na Tabela a seguir.

Table 11.6: Tabela $(r \times s)$ de frequências observadas

Populações (ou uma segunda variável categórica) Variável categórica	B_1	B_2	...	Bs	Total
A_1	$n_{(1,1)}$	$n_{(1,2)}$	...	$n_{(1,s)}$	$n_{(1,.)}$
A_2	$n_{(2,1)}$	$n_{(2,2)}$	...	$n_{(2,s)}$	$n_{(2,.)}$
...	...	...	...	...	...
A_r	$n_{(r,1)}$	$n_{(r,2)}$	...	$n_{(r,s)}$	$n_{(r,.)}$
Totais	$n_{(.,1)}$	$n_{(.,2)}$	...	$n_{(.,s)}$	$n_{(.,.)}$

Notação utilizada na tabela:

- r é o número de linhas da tabela;
- s é o número de colunas da tabela;
- i indexa a *i-ésima* linha da tabela;
- j indexa a *j-ésima* coluna da tabela;
- $n_{i,j}$ indica o elemento localizado na casela situada na *i-ésima* linha e *j-ésima* coluna;
- $n_{(1,.)}$ indica o último elemento da primeira linha;
- $n_{(.,1)}$ indica o último elemento da primeira coluna;e,
- $n_{(.,.)}$ indica o último elemento simultaneamente das linhas e colunas da tabela.

Quantas observações devemos ter em cada casela da tabela acima para que as proporções observadas de A e B sejam consideradas estatisticamente homogêneas (independentes)?

Se A e B forem independentes então $P(A_i \cap B_j) = P(A_i) \times P(B_j)$.

O número esperado de observações com as características (A_i e B_j) entre as $n_{..}$ observações - **sob a hipótese de homogeneidade (independência) da distribuição das contagens observadas entre das variáveis (ou da variável nas populações)** - em cada casela deverá ser:

$$\begin{aligned} E_{(i,j)} &= n_{(.,.)} \times p_{(i,j)} \\ &= n_{(.,.)} \times p_{(i,.)} \times p_{(.,j)} \\ &= n_{(.,.)} \times \frac{n_{(i,.)}}{n_{(.,.)}} \times \frac{n_{(.,j)}}{n_{(.,.)}} \end{aligned}$$

Assim, o valor esperado - **sob a hipótese de homogeneidade (independência) da distribuição das contagens observadas entre as variáveis (ou da variável nas populações)** A e B - em cada célula deverá ser:

$$E_{(i,j)} = \frac{n_{(i,.)} \times n_{(.,j)}}{n_{(.,.)}}$$

Em que:

- $E_{(i,j)}$ é o valor esperado na casela (i, j);
- $n_{(i,.)}$ é o total observado na linha i;
- $n_{(.,j)}$ é o total observado na coluna j; e,
- $n_{(.,.)}$ é o total geral observado.

Para a aplicação do teste $\chi 2$ exige-se que:

- preferencialmente as amostras sejam grandes ($n \geq 30$);

- no máximo 20% das caselas tenham uma frequência esperada **menor** que 5; e,
- em nenhuma casela a frequência esperada pode ser menor que **1**.

A estatística (X) do Teste Qui-quadrado de homogeneidade (independência) baseia-se na diferença (dsitância) entre as contagens observados e as contagens esperadas sob a suposição de homogeneidade (independência) pode ser definida da seguinte maneira:

$$X = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(O_{(i,j)} - E_{(i,j)})^2}{E_{(i,j)}} \sim \chi^2_{((r-1)\times(s-1))}$$

e sua correspondente distribuição:

$$X \sim \chi^2_{((r-1)\times(s-1))}$$

A **hipótese nula** postula que não há associação: as variáveis são independentes. A flutuação observada nas contagens é devida apenas a fatores puramente aleatórios.

A **hipótese alternativa** a contradiz, afirmando existir algum fator não aleatório (alguma forma de associação) que resulta na distribuição não homogênea entre as contagens observadas: há dependência entre as variáveis.

$$\begin{cases} H_0: & \text{as variáveis são independentes (a flutuação nas contagens é aleatória)} \\ H_1: & \text{as variáveis não são independentes (há alguma associação)} \end{cases}$$

A distribuição de referência que permite julgar se um determinado valor da estatística X pode ser considerado grande o suficiente para rejeitar H_0 em favor de H_1 é a chamada distribuição Qui-quadrado: χ^2.

Formulação do teste:

- teste de hipóteses unilateral à direita (tipo: maior que):

$$P[X_{calc} \leq \chi^2{}_{tab(\alpha;(r-1)\times(s-1))}|IND] = (1-\alpha)$$
$$P(X_{calc} \leq \chi^2_{tab(\alpha;(r-1)\times(s-1))}) = (1-\alpha)$$

A região de não rejeição da hipótese nula pode ser vista na Figura 11.30.

```
prob_desejada=0.95
r=4
s=3
df=(r-1)*(s-1)

q_desejado=round(qchisq(prob_desejada,df), 4)
d_desejada=dchisq(q_desejado,df)



ggplot(data.frame(x = c(0, 30)), aes(x)) +
  stat_function(fun = dchisq,
                geom = "area",
                fill = "lightgrey",
                xlim = c(0,q_desejado),
                colour="black",
                args=list(df=df) )+
  stat_function(fun = dchisq,
                geom = "area",
                fill = "red",
                xlim = c(q_desejado,30),
                colour="black",
                args = list(df = df))+
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  #scale_x_continuous(name="Valores score (f)", breaks = c(f_desejado1, f_desejado2))+
  scale_x_continuous(name="Valores score (X)")+
  labs(title="Curva da função densidade \nDistribuição Qui-quadrado",
  subtitle = "P(0; x crítico)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança) \nP(x crítico ;
   ↪  \U221e)= \u03b1 em vermelho (nível de significância) ")+
  geom_segment(aes(x = q_desejado, y = 0, xend = q_desejado, yend = d_desejada),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=q_desejado+0.5, y=d_desejada, label="x crítico", angle=90,
   ↪  vjust=0, hjust=0, color="blue",size=4)+
 annotate(geom="text", x=q_desejado+5, y=d_desejada, label="Zona de rejeição \n(para x
 ↪  calculado)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=q_desejado-5, y=d_desejada, label="Zona de não rejeição  \n(para x
   ↪  calculado)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  theme_bw()
```

Exemplo: verifique a independência (homogeneidade) nas contagens da intenção de voto de quatro

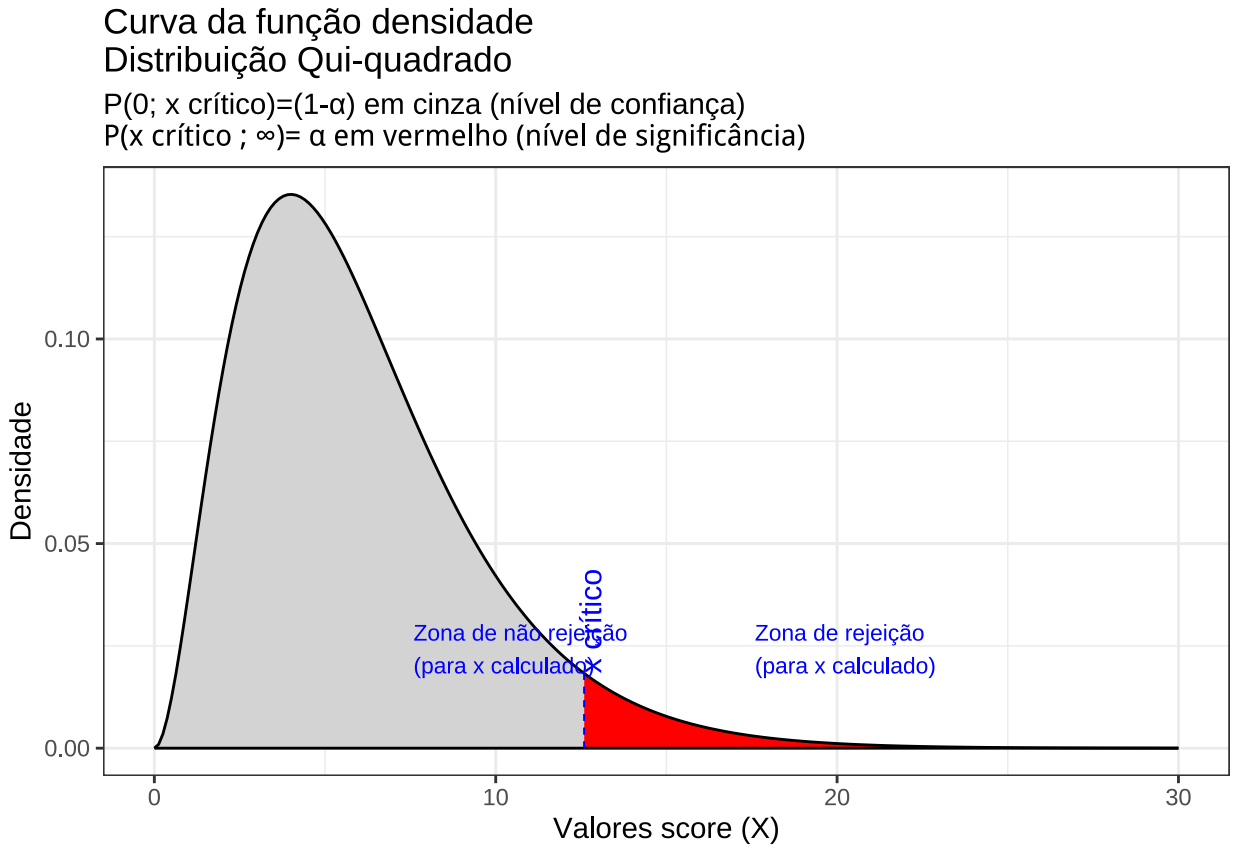


Figure 11.30: Região de rejeição da hipótese nula para o teste uniletaral à direita (tipo: menor que): a região de não rejeição da hipótese nula (região de não significância do teste) está delimitada pelo valor crítico da estatística do teste: x_{crit} para o nível de significância pretendido (α em uma cauda) e (df) graus de liberdade.

candidatos distintos em amostras de três diferentes bairros, partindo das informações consolidadas na tabela abaixo.

Table 11.7: Pesquisa sobre intenção de votos nos bairros "A", "B" e "C"

Candidato	Bairros			Total
	"A"	"B"	"C"	
Candidato "A"	70	44	86	200
Candidato "B"	50	30	45	125
Candidato "C"	10	6	34	50
Candidato "D"	20	20	85	125
Totais	150	100	250	500

estrutura das hipóteses para o teste a um nível de significância: 0,05

$$\begin{cases} H_0 : \text{as contagens são homogêneas} \\ H_1 : \text{as contagens não são homogêneas} \end{cases}$$

Equivale dizer que há independência entre a escolha de um ou outro candidato e o bairro em questão (não há relação entre um determinado bairro e um determinado candidato)

Estatística do teste e sua distribuição:

$$X = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(O_{(i,j)} - E_{(i,j)})^2}{E_{(i,j)}} \sim \chi^2_{((r-1)\times(s-1))}$$

Cálculo da frequência esperada em cada casela ($E_{(i,j)}$):

$$E_{(i,j)} = \frac{n_{(i,.)} \times n_{(.,j)}}{n_{(.,.)}}$$

$$\frac{\text{soma da linha i} \times \text{soma da coluna j}}{\text{total de observações}}$$

As frequências esperadas em cada casela (i, j) serão calculadas pela fórmula acima seguir e estão apresentadas na tabela a segui, em conjunto com as frequências observadas.

Table 11.8: Pesquisa sobre intenção de voto nos bairros "A", "B" e "C": frequências observadas (e entre parênteses e negrito as frequências esperadas)

Candidato	Bairros			Total
	"A"	"B"	"C"	
Candidato "A"	70 **(60)**	44 **(40)**	86 **(100)**	200
Candidato "B"	50 **(37,5)**	30 **(25)**	45 **(62,5)**	125
Candidato "C"	10 **(15)**	6 **(10)**	34 **(25)**	50
Candidato "D"	20 **(37,5)**	20 **(25)**	85 **(62,5)**	125
Totais	150	100	250	500

Nenhuma casela teve frequência esperada menor que 1 nem tampouco observou-se casela com frequência inferior a 5.

Cálculo da estatística do teste:

$$X = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} \frac{(O_{(i,j)} - E_{(i,j)})^2}{E_{(i,j)}} = 37,88$$

Da tabela χ^2 para o total de graus de liberdade $((r-1) \times (s-1)) = (4-1) \times (3-1) = 6$ obtemos o valor crítico da estatística do teste $(\chi^2_{crit(6)} = 12,60)$.

```
prob_desejada=0.95
r=4
s=3
df=(r-1)*(s-1)

q_desejado=round(qchisq(prob_desejada,df), 4)
d_desejada=dchisq(q_desejado,df)


q_calculado=37.88
d_calculado=dchisq(q_calculado,df)
```

```
ggplot(data.frame(x = c(0, 50)), aes(x)) +
  stat_function(fun = dchisq,
                geom = "area",
                fill = "lightgrey",
                xlim = c(0,q_desejado),
                colour="black",
                args=list(df=df) )+
  stat_function(fun = dchisq,
                geom = "area",
                fill = "red",
                xlim = c(q_desejado,40),
                colour="black",
                args = list(df = df))+
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  #scale_x_continuous(name="Valores score (f)", breaks = c(f_desejado1, f_desejado2))+
  scale_x_continuous(name="Valores score (X)")+
  labs(title="Curva da função densidade \nDistribuição Qui-quadrado",
  subtitle = "P(0; 12,60)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança) \nP(12,60 ; \U221e)=
   ↪  \u03b1 em vermelho (nível de significância) ")+
  geom_segment(aes(x = q_desejado, y = 0, xend = q_desejado, yend = d_desejada),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=q_desejado+0.5, y=d_desejada, label="x crítico=12,60", angle=90,
   ↪  vjust=0, hjust=0, color="blue",size=4)+
 annotate(geom="text", x=q_desejado+5, y=d_desejada, label="Zona de rejeição \n(para x
 ↪  calculado)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=q_desejado-5, y=d_desejada, label="Zona de não rejeição  \n(para x
   ↪  calculado)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
   geom_segment(aes(x = q_calculado, y = 0, xend = q_calculado, yend = d_calculado),
    ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=q_calculado+0.5, y=d_calculado, label="x calculado=37,88",
   ↪  angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=4)+
  theme_bw()
```

Conclusão: face aos dados trazidos à análise rejeitamos a proposição de que a preferência por um determinado candidato não esteja de algum modo associada ao bairro pesquisado sob um nível de significância de 5% (a probabilidade de cometimento de um erro tipo I. Há alguma relação entre a preferência por um ou outro candidato e os bairros (Figura 11.31). .

11.11.2 Correção de continuidade em tabelas 2x2

Em tabelas de dimensão 2x2, especialmente quando as amostras não forem muito grandes, recomenda-se aplicar a chamada correção de continuidade de Yates, que consiste em reduzir 0,5 unidade nas diferenças absolutas entre as frequências observadas e esperadas:

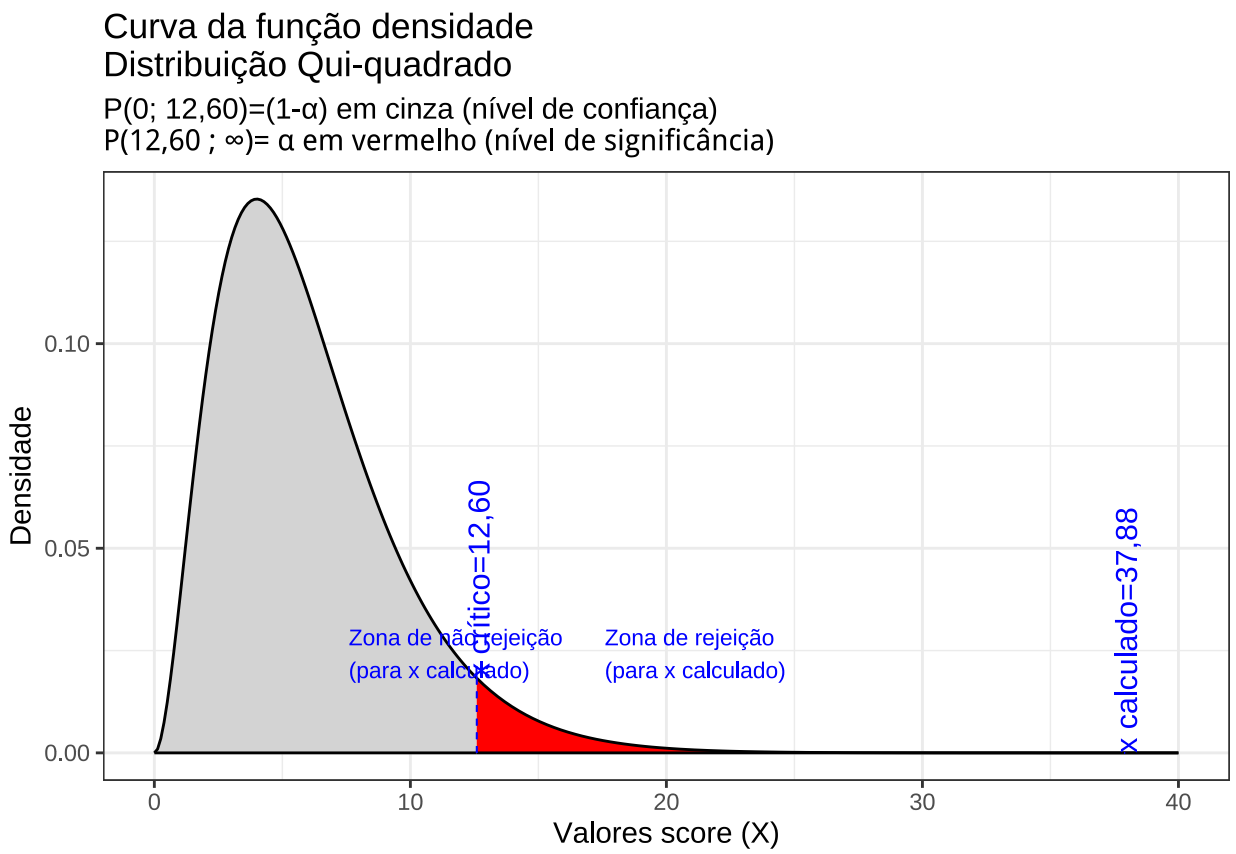


Figure 11.31: Região de rejeição da hipótese nula para o teste uniletaral à direita (tipo: menor que): a região de não rejeição da hipótese nula (região de não significância do teste) está delimitada pelo valor crítico da estatística do teste: $x_{crit} = 12,60$ para o nível de significância pretendido ($\alpha = 0,05$ em uma cauda) e ($df = 6$) graus de liberdade.

$$X = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(|O_{(i,j)} - E_{(i,j)}| - 0,5)^2}{E_{(i,j)}}$$

Ou seja, em cada casela, depois de calculada a diferença entre a frequência observada e a frequência esperada, tomamos o módulo dessa operação (isto é, despreza-se o sinal $\pm$) e reduz-se esse valor em 0,5 unidade para, em seguida, elevamos ao quadrado e então dividir-se pela frequência esperada da célula.

11.11.3 Coeficiente de contingência de Pearson (modificado: C^*) }

Como vimos, a aplicação do teste qui-quadrado permite verificar se existe associação entre duas variáveis, com base em um conjunto de observações. A intensidade dessa associação pode ser quantificada por coeficientes que têm por objetivo medir a força da associação entre duas variáveis categorizadas. Um deles é o chamado coeficiente de contingência de Pearson modificado (uma correção em razão da dimensão da tabela).

Um coeficiente de associação, aplicado a uma tabela de contingência, produz um valor numérico que descreve se os dados se aproximam mais de uma situação de independência ($C^* = 0$) ou de uma situação de associação ou dependência perfeita ($C^* = 1$).

$$C^* = \sqrt{\frac{k \times X^2}{(k-1) \times (n + X^2)}}$$

em que:

- k é o menor valor entre o número de linhas (l) e de colunas (c) da tabela;
- n é o número de elementos da tabela; e,
- $X2$: valor calculado da estatística do teste qui-quadrado.

Exemplo: no exercício resolvido anteriormente ($X^2 = 37,88$ e uma tabela 3×4 com 500 observaçoes) teremos o seguinte valor para o coeficiente de contingência modificado (C^*:)

$$
\begin{aligned}
C^* &= \sqrt{\frac{k \times X^2}{(k-1) \times (n + X^2)}} \\
&= \sqrt{\frac{3 \times 37,88}{(3-1) \times (500 + 37,88)}} \\
&= \sqrt{\frac{113,64}{(2) \times (537,88)}} \\
&= \sqrt{0,105637} \\
&= 0,325
\end{aligned}
$$

11.11.4 Teste Qui-quadrado para verificação da qualidade do ajuste a uma distribuição teórica de probabilidade

O teste de ajuste de qui-quadrado é um teste não paramétrico usado para descobrir como o valor observado de um dado fenômeno é significativamente diferente do valor esperado.

No teste de ajuste do qui-quadrado, o termo qualidade de ajuste (*goodness-of-fit*) é usado para comparar a distribuição da amostra observada com uma distribuição teórica de probabilidade esperada. O teste de ajuste do qui-quadrado determina quão bem a distribuição teórica (como Normal, binomial ou Poisson) se encaixa na distribuição empírica.

No teste de ajuste do qui-quadrado, os dados da amostra são divididos em intervalos. Em seguida, os números de pontos que se enquadram no intervalo são comparados, com o número esperado de pontos em cada intervalo. Considere-se a seguinte tabela com as observações agrupadas em classes.

Table 11.9: Dados observados agrupados em classes

ID	Classes	Frequência observada (f_{obs_i})	Frequência teórica esperada (f_{esp_i})	$\frac{(f_{obs_i} - f_{esp_i})^2}{f_{esp_i}}$
1	$lim_{inf} \vdash lim_{sup}$	f_{obs_1}	f_{esp_1}	.....
2	$lim_{inf} \vdash lim_{sup}$	f_{obs_2}	f_{esp_2}	.....
...	...	...	....	....
k	$lim_{inf} \vdash lim_{sup}$	f_{obs_k}	f_{esp_k}	
Totais	-	$\sum_{i=1}^{k} f_{obs_i}$	-	$X_{calc} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_{obs_i} - f_{esp_i})^2}{f_{esp_i}}$

A frequência esperada em cada classe, sob a suposição de que os dados seguem uma distribuição Normal: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ é dada por:

$$\begin{aligned} f_{esp_i} &= P[lim_{inf_i} \leq X \leq lim_{sup_i}] \times \sum_{i=1}^{k} f_{obs_i} \\ &= P[\frac{(lim_{inf_i} - \mu)}{\sigma} \leq Z \leq \frac{(lim_{sup_i} - \mu)}{\sigma}] \times \sum_{i=1}^{k} f_{obs_i} \end{aligned}$$

Há de se considerar duas situações: μ e σ conhecidos, ou estimados a partir dos dados da amostra.

Caso sejam conhecidos, demonstra-se que $X_{calc} \sim \chi^2_{(k-1)}$; na outra situação, se forem estimados a partir da amostra (usando-se $\bar{x}$ e s) então, igualmente, tem-se que $X_{calc} \sim \chi^2_{(k-1-2)}$, apenas com a perda de dois graus de liberdade pelas estimações feitas.

A estatística do teste qui-quadrado de qualidade de ajuste baseia-se na distância entre as frequências observadas e as frequências esperados sob a distribuição de probabilidade considerada e pode então ser definida, bem como o teste de hipóteses, da seguinte maneira:

$$X_{calc} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_{obs_i} - f_{esp_i})^2}{f_{esp_i}}$$

Demonstra-se que para uma amostra grande e com classes com frequências esperadas ($f_{esp_i} \geq 5$) que $X_{calc} \sim \chi^2(k-1)$ e o correspondente teste de hipóteses assume a estrutura seguinte:

$$\begin{cases} H_0 : \text{X segue o modelo teórico proposto} \\ H_1 : \text{X não segue o modelo proposto} \end{cases}$$

Formulação do teste:

- Teste de hipóteses unilateral à direita (tipo: maior que):

$$P[X_{calc} \leq \chi^2{}_{tab(\alpha;(k-1))}|X \sim \mathcal{N}] = (1-\alpha)$$
$$P(X_{calc} \leq \chi^2_{tab(\alpha;(k-1))}) = (1-\alpha)$$

```
prob_desejada=0.95
r=4
s=3
df=(r-1)*(s-1)

q_desejado=round(qchisq(prob_desejada,df), 4)
d_desejada=dchisq(q_desejado,df)



ggplot(data.frame(x = c(0, 30)), aes(x)) +
  stat_function(fun = dchisq,
                geom = "area",
                fill = "lightgrey",
                xlim = c(0,q_desejado),
                colour="black",
                args=list(df=df) )+
  stat_function(fun = dchisq,
                geom = "area",
                fill = "red",
                xlim = c(q_desejado,30),
                colour="black",
                args = list(df = df))+
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  #scale_x_continuous(name="Valores score (f)", breaks = c(f_desejado1, f_desejado2))+
  scale_x_continuous(name="Valores score (X)")+
  labs(title="Curva da função densidade \nDistribuição Qui-quadrado",
  subtitle = "P(0; x crítico)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança) \nP(x crítico ;
   ↪  \U221e)= \u03b1 em vermelho (nível de significância) ")+
  geom_segment(aes(x = q_desejado, y = 0, xend = q_desejado, yend = d_desejada),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=q_desejado+0.5, y=d_desejada, label="x crítico", angle=90,
   ↪  vjust=0, hjust=0, color="blue",size=4)+
 annotate(geom="text", x=q_desejado+5, y=d_desejada, label="Zona de rejeição \n(para x
 ↪  calculado)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=q_desejado-8, y=d_desejada, label="Zona de não rejeição  \n(para x
   ↪  calculado)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  theme_bw()
```

Exemplo: deseja-se verificar a afirmação de que a porcentagem de cinzas (material estranh ao produtoo) contidas em café torrado e moído produzido por certa empresa de torrefação segue uma

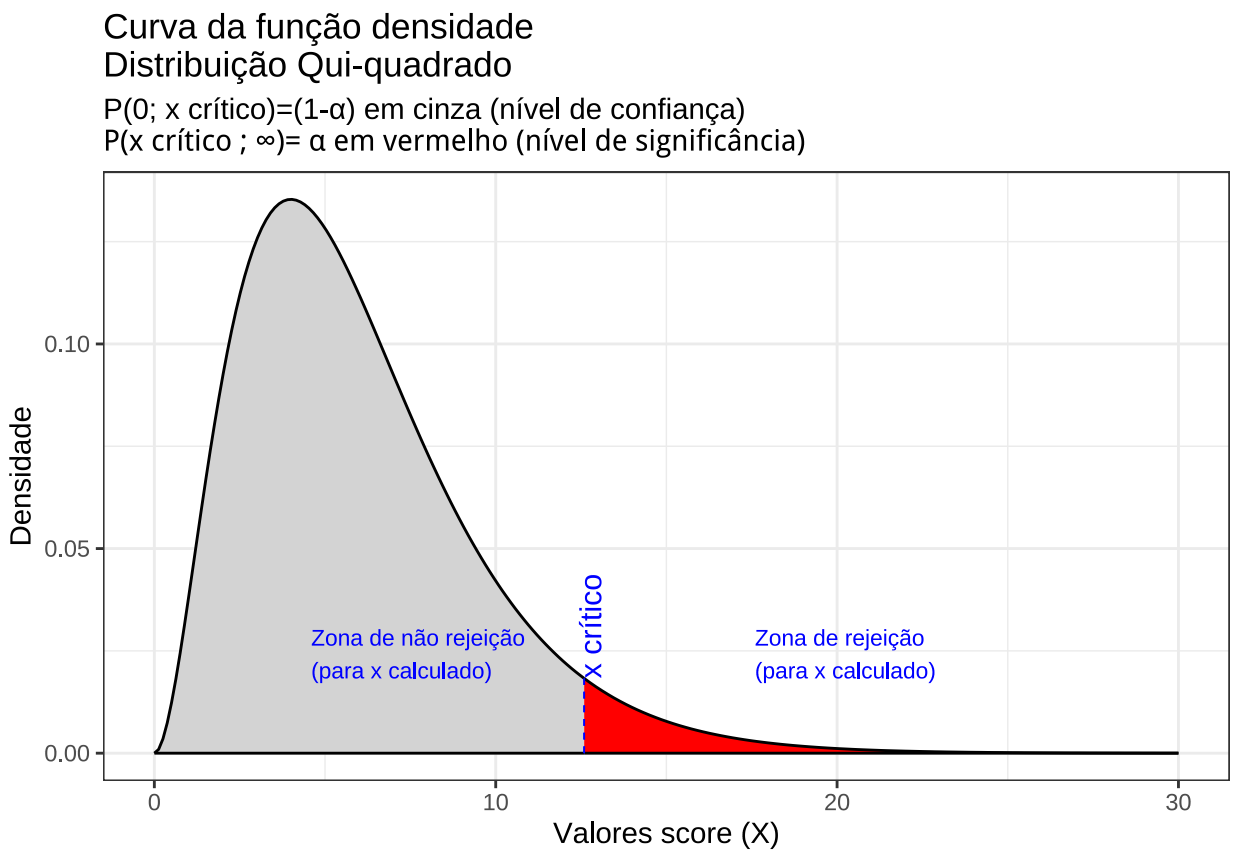


Figure 11.32: Região de rejeição da hipótese nula para o teste uniletaral à direita (tipo: menor que): a região de não rejeição da hipótese nula (região de não significância do teste) está delimitada pelo valor crítico da estatística do teste: x_{crit} para o nível de significância pretendido (α em uma cauda) e (df) graus de liberdade.

distribuição Normal. Os dados abaixo representam a quantidade percentual desse material encontradas em 250 amostras analisadas em laboratório. Faça um teste qui-quadrado de adequação das frequências observadas a essa distribuição com um nível de significância $\alpha = 0.04$.

Table 11.10: Análise da presença de cinzas em café torrado e moído

ID (k)	Cinzas de material estranho (%)	Frequência observada (f_{obs_i})
1	$9,50 \vdash 10,50$	2
2	$10,50 \vdash 11,50$	5
3	$11,50 \vdash 12,50$	16
4	$12,50 \vdash 13,50$	42
5	$13,50 \vdash 14,50$	69
6	$14,50 \vdash 15,50$	51
7	$15,50 \vdash 16,50$	32
8	$16,50 \vdash 17,50$	23
9	$17,50 \vdash 18,50$	9
10	$18,50 \vdash 19,50$	1
Totais		250

Análise do problema: verificar se as frequências observadas nas classes diferem das que seriam esperadas se a distribuição dessa variável seguisse uma distribuição Normal com parâmetros μ e σ (não informados pelo enunciado do problema).

Essa omissão nos força a utilizar a média e o desvio padrão amostrais ($\bar{x}$ e S) como suas estimativas.

Isso irá nos impor a perda adicional de mais dois graus de liberdade na estatística do teste: $\chi^2_{(k-1-2)}$.

Para dados agrupados em classes a média e a variância são calculados por:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\bar{x_i} \cdot f_{obs_i}}{n} = 14,512$$

e

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (\bar{x_i} - \bar{x})^2 \times f_{obs_i}}{n-1} = 2,701$$

Na sequência, calculam-se as frequências esperadas para cada classe sob a premissa de Normalidade. Abaixo mostramos o cálculo para a primeira classe:

$$
\begin{aligned}
f_{esp_i} &= P[lim_{inf_i} \leq X \leq lim_{sup_i}].\sum_{i=1}^{k} f_{obs_i} \\
&= P[9,50 \leq X \leq 10,50] \times 250 \\
&= P[\frac{(lim_{inf_i} - \mu)}{\sigma} \leq Z \leq \frac{(lim_{sup_i} - \mu)}{\sigma}] \times \sum_{i=1}^{k} f_{obs_i} \\
&= P[\frac{(9,50 - 14,512)}{\sqrt{2,701}} \leq Z \leq \frac{(10,50 - 14,512)}{\sqrt{2,701}}] \times 250 \\
&= P[\frac{(9,50 - 14,512)}{\sqrt{2,701}} \leq Z \leq \frac{(10,50 - 14,512)}{\sqrt{2,701}}] \times 250 \\
&= P[-3,0496 \leq Z \leq -2,4412] \times 250 \\
&= (0,4989 - 0,4927) \times 250 \\
&= (0,0062) \times 250 \\
&= 1,55
\end{aligned}
$$

Table 11.11: Análise da presença de cinzas em café torrado e moído

ID (k)	Cinzas de material estranho (%)	Frequência observada (f_{obs_i})	Frequência teórica esperada (f_{esp_i})	$\frac{(f_{obs_i} - f_{esp_i})^2}{f_{esp_i}}$
1	$9,50 \vdash 10,50$	2	1,543559	
2	$10,50 \vdash 11,50$	5	6,525845	
3	$11,50 \vdash 12,50$	16	19,25203	
4	$12,50 \vdash 13,50$	42	39,648	
5	$13,50 \vdash 14,50$	69	57,01595	
6	$14,50 \vdash 15,50$	51	57,26207	
7	$15,50 \vdash 16,50$	32	40,16374	
8	$16,50 \vdash 17,50$	23	19,67134	
9	$17,50 \vdash 18,50$	9	6,725776	
10	$18,50 \vdash 19,50$	1	1,604656	
Totais		250	-	-

As frequências esperadas para as classes 1 e 10 são menores que 5 ($f_{esp_i} \geq 5$) impondo que essas duas classes sejam agrupadas às classes imediatamente adjacentes.

Table 11.12: Análise da presença de cinzas em café torrado e moído

ID (k)	Cinzas de material estranho (%)	Frequência observada (f_{obs_i})	Frequência teórica esperada (f_{esp_i})	$\frac{(f_{obs_i}-f_{esp_i})^2}{f_{esp_i}}$
1-2	$9,50 \vdash 11,50$	7	8,069404	0,141724
3	$11,50 \vdash 12,50$	16	19,25203	0,549329
4	$12,50 \vdash 13,50$	42	39,648	0,139525
5	$13,50 \vdash 14,50$	69	57,01595	2,518900
6	$14,50 \vdash 15,50$	51	57,26207	0,684808
7	$15,50 \vdash 16,50$	32	40,16374	1,659374
8	$16,50 \vdash 17,50$	23	19,67134	0,563255
9-10	$17,50 \vdash 19,50$	10	8,330432	0,334611
Totais		250	-	6,591525

Estrutura do teste: teste de hipóteses unilateral à direita (tipo: maior que):

$$\begin{cases} H_0 : X \sim \mathcal{N}(\bar{x}, S) \\ H_1 : \text{X não segue o modelo proposto} \end{cases}$$

A hipótese nula postula que a variável X segue a distribuição Normal ($X \sim \mathcal{N}(\bar{x}, S)$)

Estatística do teste:

$$x_{calc} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_{obs_i} - f_{esp_i})^2}{f_{esp_i}} = 6,59$$

Valor crítico da estatística de teste $\chi^2_{(\alpha),(k-1-2)}$:

$$\chi^2_{(0,04),(8-1-2)} = 11,64$$

```
prob_desejada=0.96
df=5

q_desejado=round(qchisq(prob_desejada,df), 4)
d_desejada=dchisq(q_desejado,df)


q_calculado=round(6.59, 4)
d_calculada=dchisq(q_calculado,df)
```

```
ggplot(data.frame(x = c(0, 30)), aes(x)) +
  stat_function(fun = dchisq,
                geom = "area",
                fill = "lightgrey",
                xlim = c(0,q_desejado),
                colour="black",
                args=list(df=df) )+
  stat_function(fun = dchisq,
                geom = "area",
                fill = "red",
                xlim = c(q_desejado,30),
                colour="black",
                args = list(df = df))+
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  #scale_x_continuous(name="Valores score (f)", breaks = c(f_desejado1, f_desejado2))+
  scale_x_continuous(name="Valores score (X)")+
  labs(title="Curva da função densidade \nDistribuição Qui-quadrado",
  subtitle = "P(0; 11,64)=0,96 em cinza (nível de confiança) \nP(11,64 ; \U221e)= 0,04 em
   ↪  vermelho (nível de significância) ")+
  geom_segment(aes(x = q_desejado, y = 0, xend = q_desejado, yend = d_desejada),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=q_desejado+0.5, y=d_desejada, label="x crítico=11,64", angle=90,
   ↪  vjust=0, hjust=0, color="blue",size=4)+
 annotate(geom="text", x=q_desejado+5, y=d_desejada, label="Zona de rejeição \n(para x
 ↪  calculado)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=q_desejado-8, y=d_desejada, label="Zona de não rejeição  \n(para x
   ↪  calculado)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
   geom_segment(aes(x = q_calculado, y = 0, xend = q_calculado, yend = d_calculada),
    ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
  annotate(geom="text", x=q_calculado+0.5, y=d_calculada, label="x calculado=6,59",
   ↪  angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=4)+
  theme_bw()
```

Conclusão:

O resultado do teste de hipóteses realizado com as amostras trazidas à análise não nos permite rejeitar a afirmação de que os seus valores procedem de uma distribuição Normal ($X \sim \mathcal{N}(\bar{x}= 14,512, S = 1,6435)$) a um nível de significância de 4% (Figura 11.33).

11.11.5 Teste de significância para as médias de duas populações dependentes

O Teste "t'' emparelhado é usado quando dados das duas amostras são colhidas de um mesmo indivíduo (ensaio clínico) ou em uma mesma unidade experimental (experimento agronômico) havendo, portanto, dependência

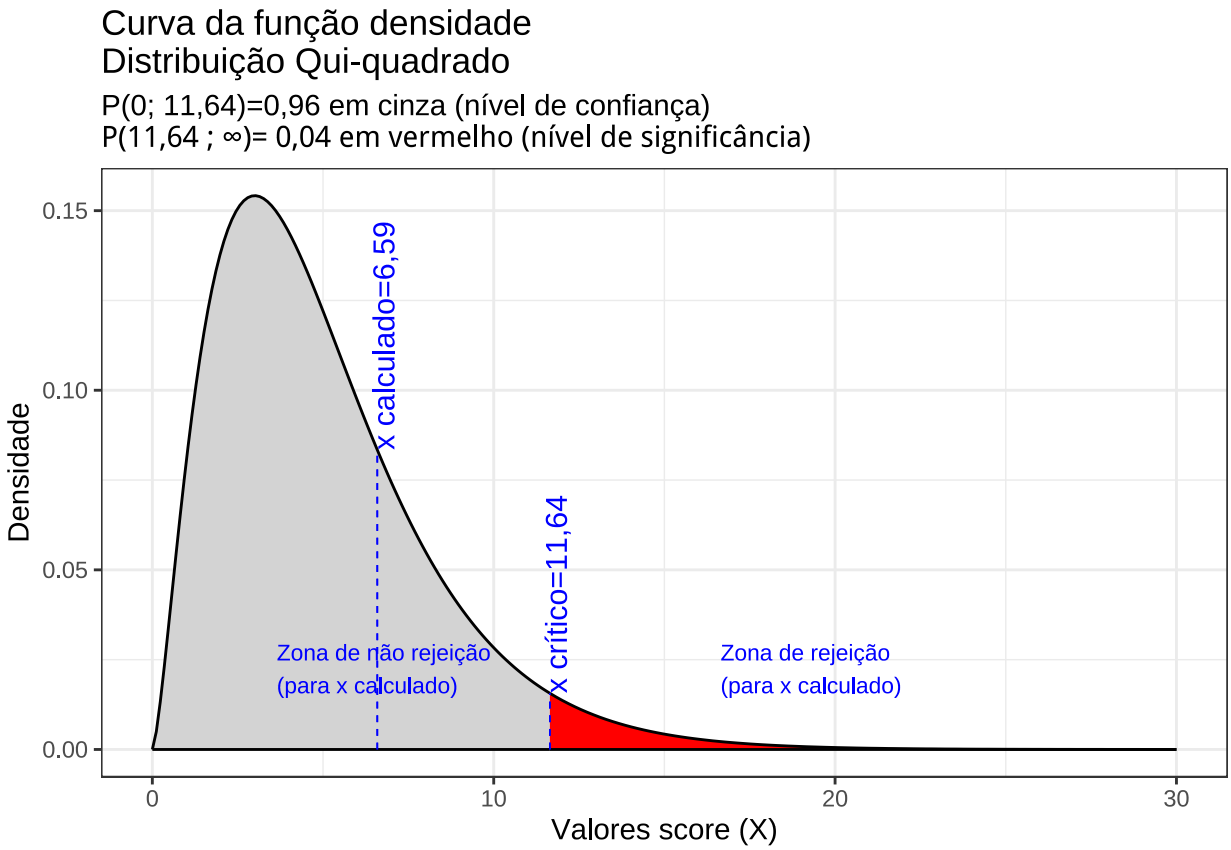


Figure 11.33: Região de rejeição da hipótese nula para o teste uniletaral à direita (tipo: menor que): a região de não rejeição da hipótese nula (região de não significância do teste) está delimitada pelo valor crítico da estatística do teste: $x_{crit} = 11,64$ para o nível de significância pretendido (α em uma cauda) e (df) graus de liberdade.

entre os valores observados.

As possívies estruturas dos testes de hipóteses para duas médias dependentes (amostras emparelhadas) são:

- Teste de hipóteses bilateral (tipo: diferente de):

$$\begin{cases} H_0 : \mu_{\text{dif}} = \Delta_0 \\ H_1 : \mu_{\text{dif}} \neq \Delta_0 \end{cases}$$

- Teste de hipóteses unilateral à esquerda (tipo: menor que):

$$\begin{cases} H_0 : \mu_{\text{dif}} \geq \Delta_0 \\ H_1 : \mu_{\text{dif}} < \Delta_0 \end{cases}$$

- Teste de hipóteses unilateral à direita (tipo: maior que):

$$\begin{cases} H_0 : \mu_{\text{dif}} \leq \Delta_0 \\ H_1 : \mu_{\text{dif}} > \Delta_0 \end{cases}$$

em que:

- Δ_0 é, usualmente, 0 (as médias são iguais); e,
- $\mu_{\text{dif}} = \mu_1 - \mu_2$ é a diferença entre os pares de observaçõe.;

Estatística do teste para amostras Normais (n_1 e n_2 quaisquer) ou amostras de outras distribuições, mas desde que n_1 e n_2 \$ 30\$:

- $t_{cal} = \frac{\sqrt{n}\cdot(\bar{x}_{dif}-\Delta_0)}{S_{dif}}$
- $\bar{x}_{dif}$: valor médio das diferenças entre as observações (amostra)
- S_{dif}: desvio padrão das diferenças entre as observações (amostra)
- $t_{tab(\frac{\alpha}{2};n-1)}$ ou $t_{tab(\alpha;n-1)}$: o quantil associado na distribuição "t'' de *Student* ao nível de significância pretendido no teste, com $(n-1)$ graus de liberdade.

Formulação dos testes com a estatística T ($T \sim t_{(n-1)}$):

- Teste de hipóteses bilateral (tipo: diferente de):

$$P[|t_{calc}| \geq t_{tab(\frac{\alpha}{2};n-1)}|\mu_{\text{dif}} = 0] = (1-\alpha)$$
$$P(-t_{tab(\frac{\alpha}{2};n-1)} \leq t_{calc} \leq t_{tab(\frac{\alpha}{2};n-1)}) = (1-\alpha)$$

As regiões de rejeição (regiões críticas) da hipótese nula podem ser vistas na Figura 11.14.

- Teste de hipóteses unilateral à esquerda (tipo: menor que):

$$P[t_{calc} \geq t_{tab(\alpha;n-1)}|\mu_{\text{dif}} = 0] = (1-\alpha)$$
$$P(t_{calc} \geq t_{tab(\alpha;n-1)}) = (1-\alpha)$$

A região de rejeição (região crítica) da hipótese nula pode ser vista na Figura 11.15.

- Teste de hipóteses unilateral à direita (tipo: maior que):

$$P[t_{calc} \leq t_{tab(\alpha;n-1)}|\mu_{\text{dif}} = 0] = (1-\alpha)$$
$$P(t_{calc} \leq t_{tab(\alpha;n-1)}) = (1-\alpha)$$

A região de rejeição (região crítica) da hipótese nula pode ser vista na Figura 11.16.

Exemplo: Uma empresa precisa tomar a decisão de adquirir uma nova máquinas de usinagem. Contudo, o fornecedor apresentou dois modelos (A e B) de preços diferentes. Para tomar a decisão, convocou 5 de seus funcionários mais experientes e os despachou para a fábrica, que os treinou a executar a mesma tarefa em ambas as máquinas. A tabela abaixo apresenta os tempos gastos pelos funcionários em ambas as máquinas (cf. tabela **??**). No nível de significância de 10% podemos afirmar que a tarefa realizada na máquina A demora mais que na máquina B?

Table 11.13: Tempo necessário para usinagem de uma mesma peça em duas máquinas diferentes, por 5 operadores diferentes

Funcionário	Máquina A (h)	Máquina B (h)
A	80	75
B	72	70
C	65	60
D	78	72
E	85	78

O enunciado do problema deixa bastante claro que as medidas, os tempos gastos para a realização da tarefa nas máquinas A e B foram tomados no mesmo grupo de funcionários, de tal sorte que não nos é possível afirmar que há independência. O Teste "t'' é usado quando dados das duas amostras são colhidas de um mesmo sujeito, havendo, portanto dependência entre as amostras. A tabela a seguir apresenta as diferenças de tempo de usinagem entre as máquinas, para cada operador.

Estrutura do teste: teste de hipóteses unilateral à direita (tipo: maior que):

$$\begin{cases} H_0 : \mu_{\text{dif}}(\mu_A - \mu_B) \leq 0 \\ H_1 : \mu_{\text{dif}}(\mu_A - \mu_B) > 0 \end{cases}$$

Table 11.14: Diferenças nos tempos de usinagem

Funcionário	Diferença: A-B (h)
A	5
B	2
C	5
D	6
E	7
Média	5,00
Desvio padrão	1,8708

A hipótese nula afirma que o tempo médio μ_A é igual ou menor que o tempo médio μ_B; já a hipótese alternativa, contrariamente, afirma que o tempo médio μ_A é maior que o tempo médio μ_B. Estatística do teste:

$$t_{cal} = \frac{\sqrt{n} \times \left(\bar{x}_{dif}\right)}{S_{dif}}$$

$$t_{calc} > t_{tab(\alpha;(n-1))}$$

em que:

- $n = 5$;
- $t_{tab(0,10;(5-1))} = 1,533$ é o quantil associado na distribuição "t'' de *Student* no nível de significância pretendido no teste e com $(n-1)$ graus de liberdade (valor crítico monocaudal);
- $t_{cal} = \frac{\sqrt{n} \cdot \left(\bar{x}_{dif}\right)}{S_{dif}} = 5,97$;
- $\bar{x}_{dif}$= $5,00$ é o valor médio das diferenças entre as observações amostrais;
- $S_{dif} = 1,87$: desvio padrão das diferenças entre as observações amostrais.

```
alfa=0.90
prob_desejada=alfa
df=4
t_desejado=round(qt(prob_desejada,df ),4)
d_desejada=dt(t_desejado,df)

t_calculado=5.97
d_calculado=dt(t_calculado,df)
```

```
ggplot(NULL, aes(c(-7,7))) +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "lightgrey",
            xlim = c(-7, t_desejado),
            colour="black") +
  geom_area(stat = "function",
            fun = dt,
            args=list(df),
            fill = "red",
            xlim = c(t_desejado,7),
            colour="black") +
  scale_y_continuous(name="Densidade") +
  scale_x_continuous(name="Valores de t", breaks = c(t_desejado))  +
  labs(title=
         "Regiões críticas sob a curva da função densidade da \ndistribuição apropriada ao
          ↪  teste",
       subtitle = "P(-\U221e; 1,53)=(1-\u03b1) em cinza (nível de confiança=0,90) \nP(1,53;
        ↪  \U221e)= \u03b1 em vermelho (nível de significância=0,10) ")+
  geom_segment(aes(x = t_desejado, y = 0, xend = t_desejado, yend = d_desejada),
   ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
   annotate(geom="text", x=t_desejado-0.1, y=d_desejada, label="Valor crítico da estatística
    ↪  do teste=1,53", angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  annotate(geom="text", x=t_desejado-3, y=0.1, label="Região de não rejeição da hipótese
   ↪  nula \nprobabilidade=\u03b1", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
 annotate(geom="text", x=t_desejado+1, y=0.1, label="Região de rejeição da hipótese nula
  ↪  \nprobabilidade= (1-\u03b1)", angle=0, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
 geom_segment(aes(x = t_calculado, y = 0, xend = t_calculado, yend = d_calculado),
  ↪  color="blue", lty=2, lwd=0.3)+
 annotate(geom="text", x=t_calculado-0.1, y=d_calculado, label="Valor da estatística do
  ↪  teste=5,97", angle=90, vjust=0, hjust=0, color="blue",size=3)+
  theme_bw()
```

Conclusão:

O resultado do teste de hipóteses realizado com as amostras trazidas à análise não nos permite suportar a afirmação de que o tempo médio para a realização da tarefa na máquina A seja menor ou igual ao tempo médio gasto na máquina B a um nível de significância de 10%. O tempo médio na máquina A é maior (Figura 11.34).

11.12 Fluxograma auxiliar para escolha da estatística do teste de hipóteses

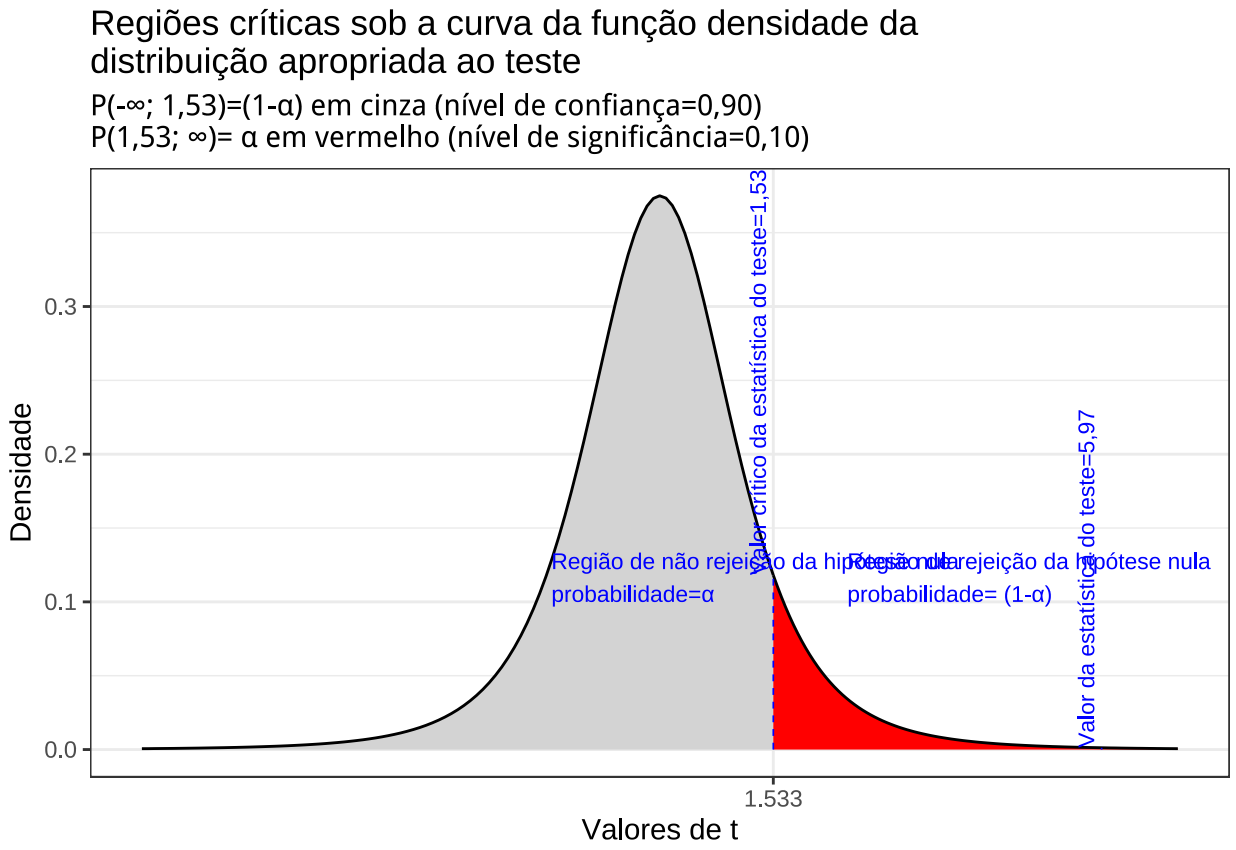


Figure 11.34: Região de rejeição da hipótese nula para o teste unilateral à direita (tipo: maior que) realizado: a região de não rejeição da hipótese nula (região de não significância do teste) está delimitada pelo valor crítico da estatística do teste: $t_{crit} = 1,53$. O valor calculado da estatística ($t_{calc} = 5,97$) situa-se na faixa de significância do teste, não possibilitando a rejeição da hipótese nula sob aquele nível de confiança

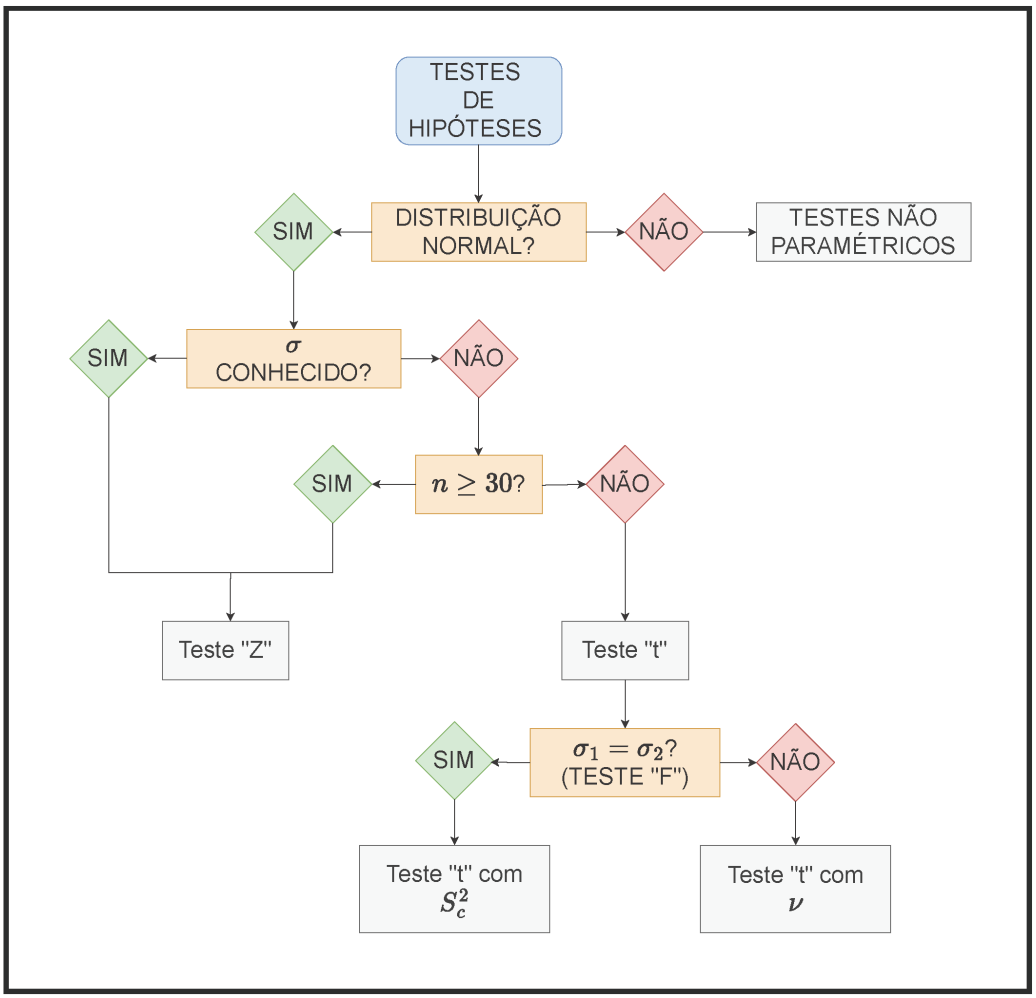
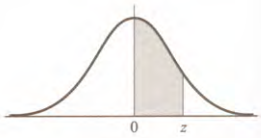


Figure 11.35: Fluxograma auxiliar para escolha da estatística do teste de hipóteses

11.13 Tabelas

Áreas sob a Curva Normal Padrão de 0 a *z*



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Figure 11.36: Tabela Normal padronizada

\begin{figure}

Tabela 2
Distribuição t-Student

Valores de t, segundo os graus de liberdade (ϕ) e o valor de α

Monocaudal, α	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
Bicaudal, α	0,50	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
ϕ						
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Figure 11.37: Tabela da distribuição t de Student

Tabela 4
Tabela F – 0,05

Valores de F para $\alpha = 5\%$, segundo o número de graus de liberdade do numerador (ϕ_1) e do denominador (ϕ_2)

ϕ_2 \ ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91
∞	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88

{

}

\caption{Tabela da distribuição F de Fisher-Snedecor (5%)} \end{figure}

TABELA IV

Distribuição do Qui-Quadrado - χ^2_n

Os valores tabelados correspondem aos pontos x tais que: $P(\chi^2_n \leq x)$

	$P(\chi^2_n \leq x)$													
n	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,25	0,5	0,75	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	
1	3,93E-05	0,000157	0,000982	0,003932	0,016	0,102	0,455	1,323	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	1
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	0,575	1,386	2,773	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	2
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	1,213	2,366	4,108	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,923	3,357	5,385	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	4
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	2,675	4,351	6,626	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750	5
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,455	5,348	7,841	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548	6
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	4,255	6,346	9,037	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278	7
8	1,344	1,647	2,180	2,733	3,490	5,071	7,344	10,219	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955	8
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,899	8,343	11,389	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589	9
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,737	9,342	12,549	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188	10
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	7,584	10,341	13,701	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757	11
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	8,438	11,340	14,845	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300	12
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	9,299	12,340	15,984	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819	13
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	10,165	13,339	17,117	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319	14
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	11,037	14,339	18,245	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801	15
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,912	15,338	19,369	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267	16
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	12,792	16,338	20,489	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718	17
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	13,675	17,338	21,605	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156	18
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	14,562	18,338	22,718	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582	19
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	15,452	19,337	23,828	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997	20
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	16,344	20,337	24,935	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401	21
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	17,240	21,337	26,039	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796	22
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	18,137	22,337	27,141	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181	23
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	19,037	23,337	28,241	33,196	36,415	39,364	42,980	45,558	24
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	19,939	24,337	29,339	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928	25
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	20,843	25,336	30,435	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290	26
27	11,808	12,878	14,573	16,151	18,114	21,749	26,336	31,528	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645	27
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	22,657	27,336	32,620	37,916	41,337	44,461	48,278	50,994	28
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	23,567	28,336	33,711	39,087	42,557	45,722	49,588	52,335	29
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	24,478	29,336	34,800	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672	30
40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	33,660	39,335	45,616	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766	40
50	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	42,942	49,335	56,334	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490	50
60	35,534	37,485	40,482	43,188	46,459	52,294	59,335	66,981	74,397	79,082	83,298	88,379	91,952	60
70	43,275	45,442	48,758	51,739	55,329	61,698	69,334	77,577	85,527	90,531	95,023	100,425	104,215	70
80	51,172	53,540	57,153	60,391	64,278	71,145	79,334	88,130	96,578	101,879	106,629	112,329	116,321	80
90	59,196	61,754	65,647	69,126	73,291	80,625	89,334	98,650	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299	90
100	67,328	70,065	74,222	77,929	82,358	90,133	99,334	109,141	118,498	124,342	129,561	135,807	140,170	100

Figure 11.38: Tabela da distribuição Qui-quadrado

ALFABETO GREGO

	SÍMBOLOS	
NOME DA LETRA	MAIÚSCULA	MINÚSCULA
Alfa	A	α
Beta	B	β
Gama	Γ	g
Delta	Δ	d
Épsilon	E	ε
Zeta	Z	ζ
Eta	H	h
Téta	Θ	θ
Iota	I	ι
Capa	K	κ
Lambda	Λ	λ
Mu(mi)	M	μ
Nu(ni)	N	ν
Csi	X	ξ
Omicron	O	o
Pi	P	p
Ró	P	ρ
Sigma	S	s
Tau	T	t
Upsilon(ipsilon)	Y	u
Fi	F	j
Chi(qui)	X	χ
Psi	Ψ	ψ
Omega	W	ω

Figure 11.39: Alfabeto grego