Aplicaciones del análisis multivariante con R

Estadística Multivariante - Universidad de Granada

Laura Gómez Garrido
Miguel Lentisco Ballesteros
Antonio Martín Ruiz
Daniel Pozo Escalona
Francisco Javier Sáez Maldonado

22 de enero de 2020

Contenido

¿Qué es R?

R es un entorno y lenguaje de programación enfocados a la computación estadística y de gráficos. Surge como una reimplementación libre del lenguaje y entorno S. Proporciona una amplia variedad de funcionalidades estadísticas y gráficas y es altamente extensible.

¿Qué es R?

R está disponible como software libre bajo los términos de la GNU General Public License de la Free Software Foundation en forma de código fuente. Puede ser compilado y ejecutado en una gran cantidad de plataformas UNIX, Windows y MacOs.

Hola mundo

```
# Esto es un comentario
miString <- "Hola mundo"
print(miString)

[1] "Hola mundo"
```

Tipos

```
v <- TRUE
print(class(v))
v <- 42
print(class(v))
v <- 2L
print(class(v))
v <- 4+2i
print(class(v))
v <- "multivariante"
print(class(v))
v <- charToRaw("multivariante")
print(class(v))
```

Tipos

```
[1] "logical"
[1] "numeric"
[1] "integer"
[1] "complex"
[1] "character"
[1] "raw"
```

Estructuras de datos

```
vector <- c('v1', 'v2', 'v3')
lista <- list(c(1,2,3), 2+3i, "multivariante")
matriz <- matrix(c(1,2,3,4,5,6), nrow = 2, ncol =
    3)
array <- array(c('hola', 'adios'), dim=c(3,2,3))
dataframe <- data.frame(
    nombre = c("A", "B", "C"),
    peso = c(1,2,3),
    cantidad = c(4,5,6)
)
```

Operadores

Aritméticos:

- $+$ Suma
- $-$ Resta
- $*$ Producto
- $/$ División
- %%% Módulo
- %/% División entera
- ^ Potencia

Operadores

Relacionales:

- $<$ Menor que
- $>$ Mayor que
- $==$ Igualdad
- $<=$ Menor o igual
- $>=$ Mayor o igual

Operadores

Lógicos:

- & AND
- | OR
- ! NOT
- && AND entre los primeros elementos de los vectores
- || OR entre los primeros elementos de los vectores

Operadores

Misceláneos:

- $->$, $<-$, $=$ Asignación
- : Crea un vector con todos los valores entre los dados
- %in% Identifica si un elemento está en un vector
- %%*%% Multiplica una matriz con su traspuesta

Estructuras de decisión

```
if (3 > 2) {
    print("3>2")
}
if (2 > 3){
    print("2>3")
}

i = 4
if(i > 5){
    print("i>5")
} else {
    print("i<5")
}
x <- switch(2, "a", "b", "c")
print(x)
```

Bucles

```
i = 0
repeat{
    i = i+1
    if(i > 3){
        break
    }
}
print(i)

i = 0
while(i < 5){
    i = i+1
}
print(i)
```

Bucles

```
v <- 1:4
for (i in v){
    v[i] = i+1
}
print(v)
```

Funciones

```
media <- function(a,b){
    m <- (a+b)/2
    return(m)
}

print(media(1,2))
```

Cómo instalar dependencias

R incluye un gestor de paquetes integrado en el lenguaje, que permite instalar dependencias con la orden `install.packages()`.

```
install.packages("MVA")
install.packages("HSAUR2")
install.packages("car")
install.packages("MASS")
```

Cómo instalar dependencias

Para importar los paquetes para usarlos en un programa:

```
library("MVA")
library("HSAUR2")
library("car")
library("MASS")
```

Librerías y paquetes

R forma parte de un proyecto colaborativo y abierto donde sus propios usuarios pueden publicar paquetes.

Utiliza la forja de desarrollo R-Forge.

En Diciembre de 2019, el repositorio oficial tenía disponibles 15.315 paquetes organizados en vistas o temas.

Algunas vistas

- Bayesian
- ChemPhys
- ClinicalTrials
- Cluster
- Databases
- DiferrentialEquations
- Distribution
- Genetics
- MachineLearning
- Multivariate

Nuestro dataset

Característica del data set	Multivariante	**Nº de Instancias**	178
Características de los atributos	Enteros, Reales	**Nº de Atributos**	13
Área	Física	**Donado**	01/07/1991

Fuente: Machine Learning Repository

Propietarios Originales:

Forina, M. et al, PARVUS -
An Extendible Package for Data Exploration, Classification and Correlation.
Institute of Pharmaceutical and Food Analysis and Technologies, Via Brigata Salerno, 16147 Genoa, Italy.

Lectura

```
wine <- read.table("http://archive.ics.uci.edu/ml
    /machine-learning-databases/wine/wine.data",
    sep=",")
```

```
In [4]: wine
```

A data.frame: 178 × 14

V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V12	V13	V14
<int>	<dbl>	<dbl>	<dbl>	<dbl>	<int>	<dbl>	<dbl>	<dbl>	<dbl>	<dbl>	<dbl>	<dbl>	<int>
1	14.23	1.71	2.43	15.6	127	2.80	3.06	0.28	2.29	5.64	1.04	3.92	1065
1	13.20	1.78	2.14	11.2	100	2.65	2.76	0.26	1.28	4.38	1.05	3.40	1050
1	13.16	2.36	2.67	18.6	101	2.80	3.24	0.30	2.81	5.68	1.03	3.17	1185
1	14.37	1.95	2.50	16.8	113	3.85	3.49	0.24	2.18	7.80	0.86	3.45	1480

- *read.csv* o *read.csv2*
- *read.delim*

Media y desviación típica. Normalización.

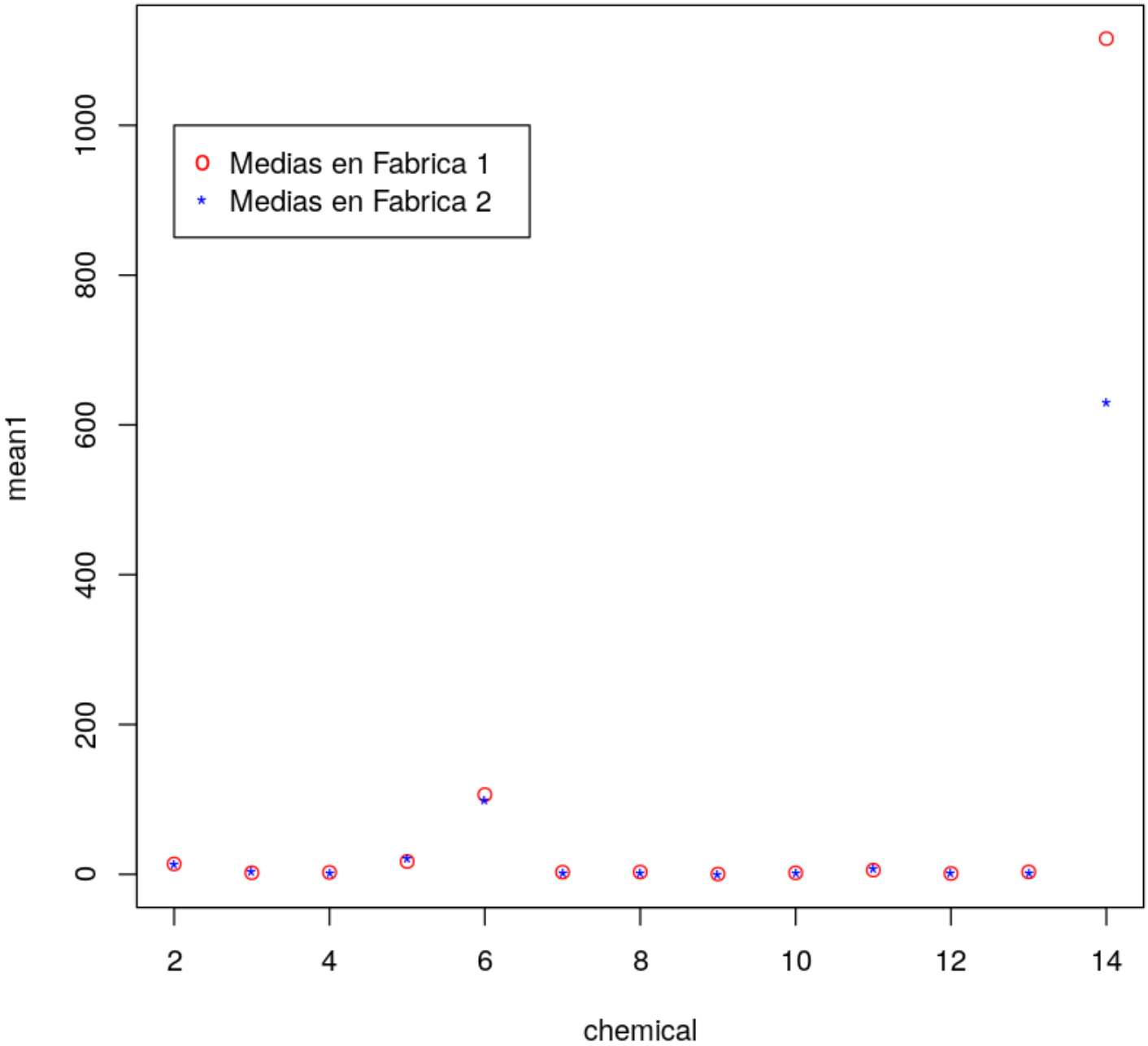
```
sapply(wine[2:14],mean)
V2  13.000617977528
V3  2.33634831460674
...
V13  2.61168539325843
V14  746.893258426966
```

```
sapply(wine[2:14],sd)
V2  0.811826538005857
V3  1.11714609761446
...
V13  0.709990428765 05
V14  314.907474276849
```

```
standardised_wine <- as.data.frame(scale(wine
    [2:14]))
```

Ejemplo de selección de datos

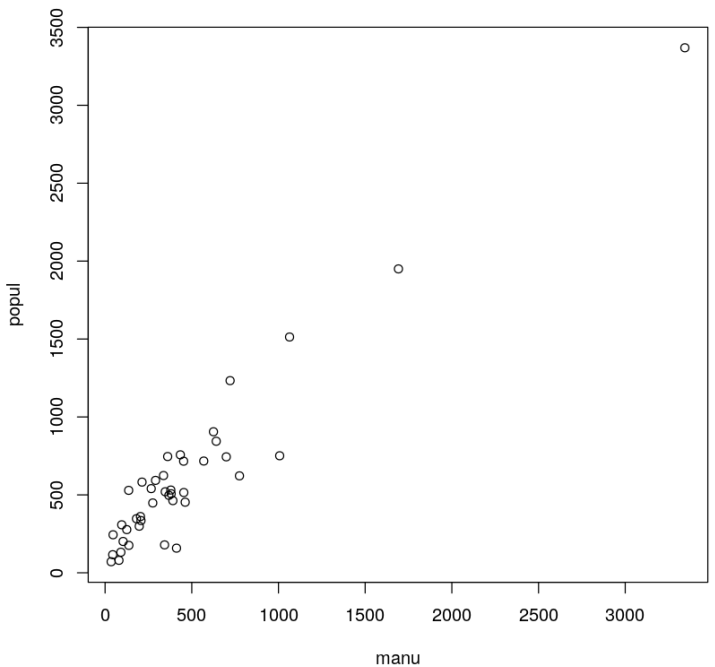
```
selection1 <- wine[wine$V1 == "1",]
selection3 <- wine[wine$V1 == "3",]

mean1 <- sapply(selection1[2:14],mean)
mean2 <- sapply(selection3[2:14],mean)

chemical <- c(2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14)
plot(chemical,mean1,col = "red")
points(chemical, mean2, col="blue", pch="*")
legend(2,1000,legend=c("Medias en Fabrica 1","Medias
    en Fabrica 2"), col=c("red","blue"),
                                        pch=c("o","*"))
```


Medias en Fabrica 1
Medias en Fabrica 2
mean1
0
200
400
600
800
1000
2
4
6
8
10
12
14
chemical

Scatterplots

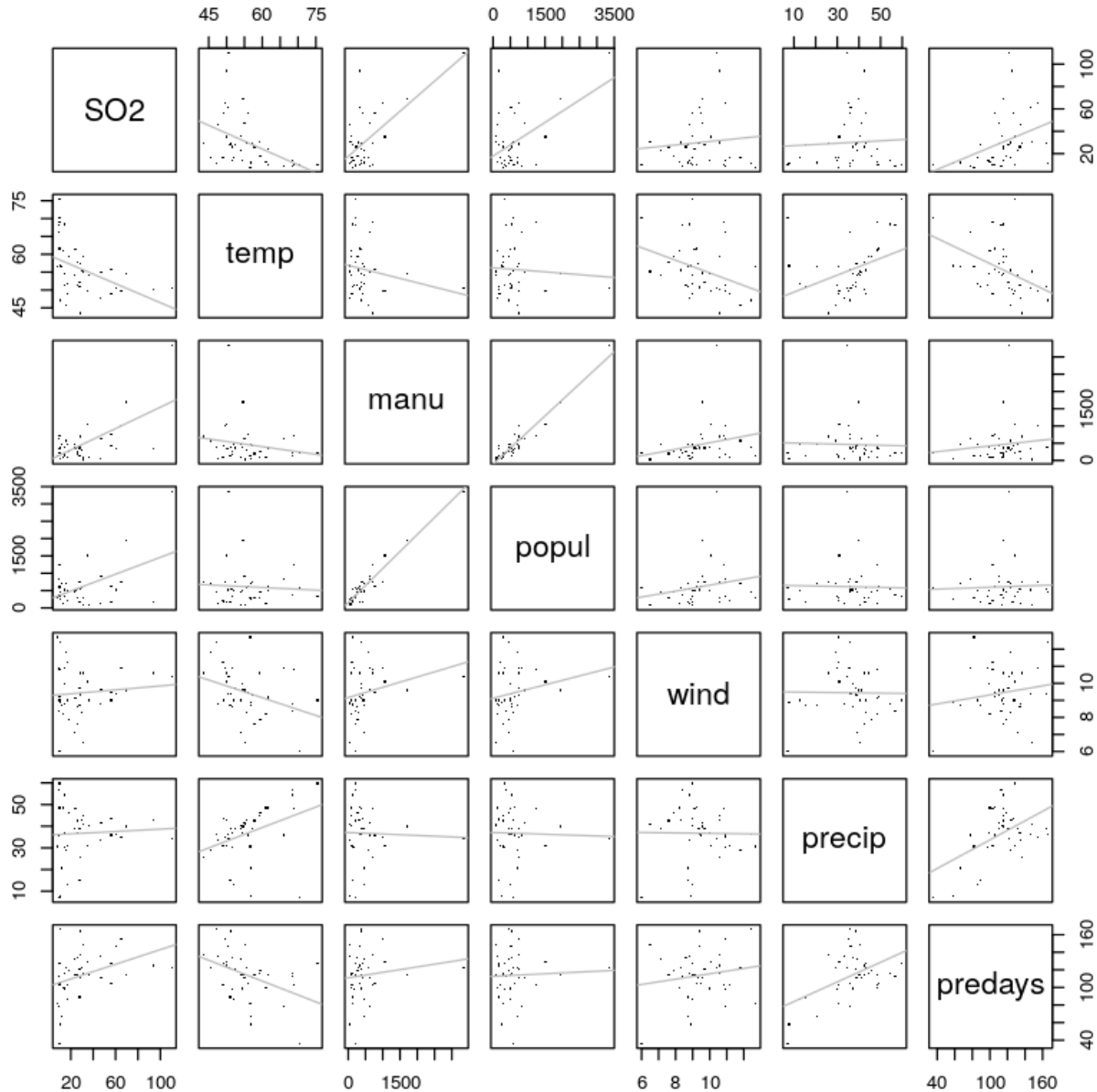
Podemos realizar scatterplots de la siguiente manera

```
plot(popul ~ manu, data = USairpollution)
```



O, dibujar todas las parejas posibles a la vez, y añadir las rectas de regresión

```
pairs(USairpollution,
      panel = function(x, y, ...) {
          points(x, y, ...)
          abline(lm(y ~ x), col = "grey")
      }, pch = ".", cex = 1.5)
```


SO2
temp
manu
popul
wind
precip
predays
45 60 75
0 1500 3500
10 30 50
20 60 100
0 1500
6 8 10
40 100 160

Implementación Teórica de una DNM

```
DNM <- setRefClass("DNM",
                   fields = list(p = "numeric",
                                 media = "matrix"
                                     ,
                                 cov = "matrix"))
```

Ejemplo de creación de una DNM

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)^T \sim N_3 \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

```
means <- matrix(c(2,3,-1), nrow = 3, ncol = 1)

cov <- matrix(c(1, 0, 1, 0, 5, -2, 1, -2, 2),
    nrow = 3, ncol = 3)

X <- DNM$new(p = 3, media = means, cov = cov); X
```

Función de densidad

```
    # Pre: X es DNM, x matriz
funcion_densidad <- function(X, x) {
    if (dim(x)[1] != X$p)
        stop("Filas de x no coinciden con dimension de
            X")
    if (dim(x)[2] != 1)
        stop("x no es vector columna")
    if (det(X$cov) <= 0)
        stop("Matriz de covarianzas no es definida
            positiva")
    # f_X(x)
    exp(-0.5 * as.numeric(t(x - X$media) %*% solve(X$
        cov) %*% (x - X$media))) / ((2 * pi)^(X$p / 2)
        * sqrt(det(X$cov)))
}
```

Función característica

```
# Pre: X es DNM, t es matriz
funcion_caracteristica <- function(X, t) {
    # Comprobacion de rango
    if (dim(t)[1] != X$p)
        stop("Filas de t no coinciden con
            dimension de X")
    if (dim(t)[2] != 1)
        stop("t no es vector columna")
    # psi_X(t)
    exp(as.complex(1i * t(t) %*% X$media - 0.5 *
        t(t) %*% X$cov %*% t))
}
```

Teorema de la transformación lineal

Necesita como argumentos una DNM $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, una matriz $B \in \mathcal{M}_{qxp}$ $(q \leq p)$ y un vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^q$. Entonces devuelve la DNM definida como $\boldsymbol{Y} = B\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b}$, entonces $\boldsymbol{Y} \sim N_q(B\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{b}, B\Sigma B^T)$, con $B\Sigma B^T > 0$.

```
transformacion_lineal <- function(X, B, b) {
    # Comprobaciones de rango
    # Nueva DNM
    media_y = matrix(B %*% X$media + b, ncol = 1)
    cov_y = matrix(B %*% X$cov %*% t(B), nrow =
       dim(B)[1])
    DNM\$new(p = dim(B)[1], media = media_y, cov
       = cov_y)
}
```

Ejemplo

Ejemplo con la $\boldsymbol{X}$ anterior, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$:

```
B = matrix(c(1, 1, 0), nrow = 1, ncol = 3)
b = matrix(0, nrow = 1, ncol = 1)
Y <- transformacion_lineal(X, B, b); Y
---
Reference class object of class "DNM"
Field "p":
[1] 1
Field "media":
     [,1]
[1,]    5
Field "cov":
     [,1]
[1,]    6
```

Marginalización

Dada una DNM $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_p)^T \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, que consiste en tomar el subvector $\boldsymbol{X_r} = (X_{r_1}, \ldots, X_{r_q})^T$ con
$\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_q)^T, r_1, \ldots, r_q \in \{1, \ldots, q\}, q \leq p$; obteniendo
$\boldsymbol{X_r} \sim N_q(\boldsymbol{\mu_r}, \Sigma_{\boldsymbol{r}})$ donde: - $\boldsymbol{\mu_r}$ es el subvector de $\boldsymbol{\mu}$ correspondiente a $\boldsymbol{r}$. - $\Sigma_{\boldsymbol{r}}$ es la submatriz de Σ definida por las filas y columnas correspondientes a $\boldsymbol{r}$.

```r
# Pre: X es DNM, r es matriz
marginalizar <- function(X, r) {
    # Comprobar rangos
    # mu_r
    media_r <- matrix(X$media[r, ], ncol = 1)
    # sigma_r
    cov_r <- matrix(X$cov[r, r], nrow = dim(r)
        [1])
    # X_r
    DNM$new(p = dim(r)[1], media = media_r, cov =
        cov_r)
}
```

Particionamiento independiente de una DNM

Dada una DNM $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_p)^T \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ con $p > 1$ y $\Sigma > 0$ podemos realizar una partición de $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_{(1)}^T, \boldsymbol{X}_{(2)}^T)^T$ con $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_{(1)}^T, \boldsymbol{\mu}_{(2)}^T)^T$ y $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{(11)} & \Sigma_{(12)} \\ \Sigma_{(21)} & \Sigma_{(22)} \end{pmatrix}$ de manera que $\boldsymbol{X}_{(1)} = (X_1, \ldots, X_q)^T$, y $\boldsymbol{X}_{(2)} = (X_{q+1}, \ldots, X_p)$ $(1 \leq q < p)$.

```r
particiones_independientes <- function(X, q) {
    media_1 = matrix(X$media[1:q], ncol = 1)
    cov_11 = matrix(X$cov[1:q,1:q], nrow = q)
    X_1 <- DNM$new(p = q, media = media_1, cov = cov_11)
    # X_2 - cov_21 * cov_11^-1 * cov_12
    media_2 = matrix(X$media[(q+1):X$p], ncol=1)
    cov_22 = matrix(X$cov[(q+1):X$p, (q+1):X$p], nrow = X$p - q)
    cov_12 = matrix(X$cov[1:q, (q+1):X$p],nrow=q)
    cov_21 = matrix(X$cov[(q+1):X$p, 1:q],ncol=q)
    X_2 <- DNM$new(p = X$p - q,
                   media = media_2 - cov_21 %*% solve(cov_11) %*%
                       media_1,
                   cov = cov_22 - cov_21 %*% solve(cov_11) %*% cov_
                       12)
    # Devolvemos
    c(X_1, X_2)
}
```

Distribución condicionada

En las condiciones del apartado anterior, tenemos que la distribución condicionada de $\boldsymbol{X}_{(2)}$ dado $\boldsymbol{X}_{(1)} = \boldsymbol{x}_{(1)}$ es una DNM con
$\boldsymbol{X}_{(2)} \sim N_{p-q}(\boldsymbol{\mu}_{(2)} + \Sigma_{(21)}\Sigma_{(11)}^{-1}(\boldsymbol{x}_{(1)} - \boldsymbol{\mu}_{(1)}), \Sigma_{(22)} - \Sigma_{(21)}\Sigma_{(11)}^{-1}\Sigma_{(12)})$.

```r
particion_condicionada <- function(X, q, x, dado_x2) {
    media_1 = matrix(X$media[1:q], ncol = 1)
    media_2 = matrix(X$media[(q+1):X$p], ncol = 1)
    cov_11 = matrix(X$cov[1:q,1:q], nrow = q)
    cov_22 = matrix(X$cov[(q+1):X$p, (q+1):X$p], nrow = X$p - q)
    cov_12 = matrix(X$cov[1:q, (q+1):X$p], nrow = q)
    cov_21 = matrix(X$cov[(q+1):X$p, 1:q], ncol = q)
    # DNM condicionada
    if (dado_x2) {
        p_cond = q
        media_cond = media_1 + cov_12 %*% solve(cov_22) %*% (x -
            media_2)
        cov_cond = cov_11 - cov_12 %*% solve(cov_22) %*% cov_21
    } else {
        p_cond = X$p - q
        media_cond = media_2 + cov_21 %*% solve(cov_11) %*% (x -
            media_1)
        cov_cond = cov_22 - cov_21 %*% solve(cov_11) %*% cov_12
    }
    DNM$new(p = p_cond, media = media_cond, cov = cov_cond)
}
```

Notacion

Con $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_p)^T \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, $\Sigma > 0$, consideramos una muestra aleatoria simple dada por $X = (\boldsymbol{X}_1^T, \ldots, \boldsymbol{X}_N^T)^T$, donde N es el tamaño muestral; de manera que cada observación se representa con $\boldsymbol{X}_\alpha, \alpha \in \{1, \ldots, N\}$.
Veremos como hacer inferencia sobre la DNM que determina X.

Muestra aleatoria simple

Dada $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma), \Sigma > 0$, podemos generar una muestra aleatoria simple de $\boldsymbol{X}$ de tamaño N, mediante la siguiente función:

```
muestra_aleatoria <- function(N, media, cov) {
    mvrnorm(N, media, cov)
}

muestra_aleatoria_EMV <- function(N, X) {
    mvrnorm(N, X$media, X$cov)
}
```

Muestra aleatoria simple

Ejemplo de la m.a.s. de tamaño 14 de la DNM

$$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)^T \sim N_3\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -0{,}5 \\ 1 & -0{,}5 & 2 \end{pmatrix}\right):$$

```
X_DNM <- DNM$new(p = 3,
                 media = matrix(c(2,3,-1), ncol = 1),
                 cov = matrix(c(1,0,1,0,1,-0.5,1,-0.5,
                    2), ncol = 3, nrow = 3))
X <- muestra_aleatoria_EMV(20, X_DNM); X[1:10,]
```

Muestra aleatoria simple

A matrix: 10 × 3 of type dbl

2.4044045	3.758882	0.4791484
1.9707922	2.475678	0.7559109
1.1323421	1.754754	-0.3500211
0.9028611	4.558904	-2.6476227
3.1241580	3.700116	-0.3400015
2.2546504	3.728964	-2.3389588
2.1142132	2.730817	-1.1191378
0.9457807	3.874198	-1.8523743
2.8161923	2.932069	0.2482438
2.8143862	1.730912	1.2577925

Media muestral

Implementamos la media muestral $\bar{\boldsymbol{X}} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{X}_\alpha = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{pmatrix}$

Además este es el estimador máximo verosímil ($\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\boldsymbol{X}}$).

```
media_muestral <- function(X) {
    matrix(colMeans(X), ncol = 1)
}
```

Media muestral

Ejemplo con X anterior:

```
media_muestral(X)
```

A matrix: 3 × 1 of type dbl

2.2408009
3.1898752
-0.7302118

Matrices muestrales

Implementamos las siguientes matrices:

- Matriz de dispersiones muestral: $A = \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{X}_\alpha - \bar{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_\alpha - \bar{\boldsymbol{X}})^T$
- Matriz de covarianzas muestral: $S_N = \frac{1}{N} A$
- Matriz de cuasi-covarianzas muestral: $S_{N+1} = \frac{1}{N-1} A$ (también llamada matriz de covarianzas muestral)
- Matriz de correlaciones muestral: $R = D^{1/2} S_N D^{-1/2}$, donde D es la diagonal de S_N

Sabemos que $\hat{\Sigma} = S_N$, $T = S_{N+1}$ es estimador eficiente de Σ, y $\hat{p} = R$ (coeficientes de correlacion lineal de Pearson).

Matrices muestrales

```
disp_muestral <- function(X) {
    cov(X) * (nrow(X) - 1)
}

cov_muestral <- function(X) {
    disp_muestral(X) / nrow(X)
}

cuasicov_muestral <- function(X) {
    disp_muestral(X) / (nrow(X)-1)
}

cor_muestral <- function(X) {
    cor(X)
}
```

Matrices muestrales

Ejemplo con la X anterior:

```
print(disp_muestral(X))
print(cov_muestral(X))
print(cuasicov_muestral(X))
print(cor_muestral(X))
```

```
           [,1]       [,2]       [,3]
[1,] 21.479470 -1.012076 22.441216
[2,] -1.012076 18.552064 -9.202547
[3,] 22.441216 -9.202547 39.923667
             [,1]        [,2]        [,3]
[1,]  1.0739735 -0.0506038  1.1220608
[2,] -0.0506038  0.9276032 -0.4601274
[3,]  1.1220608 -0.4601274  1.9961834
              [,1]         [,2]        [,3]
[1,]  1.13049840 -0.05326715  1.1811166
[2,] -0.05326715  0.97642444 -0.4843446
[3,]  1.18111663 -0.48434460  2.1012456
              [,1]         [,2]       [,3]
[1,]  1.00000000 -0.05069968  0.7663363
[2,] -0.05069968  1.00000000 -0.3381401
[3,]  0.76633630 -0.33814014  1.0000000
```

Contraste sobre $\boldsymbol{\mu}$

Sobre $\boldsymbol{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, $\Sigma > 0$ y $\{\boldsymbol{X}_\alpha : \alpha = 1, \ldots, N\}$, con $N > p$ una m.a.s de $\boldsymbol{X}$ nos planteamos el problema de contrastre

$$\begin{cases} H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \\ H_1 : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0 \end{cases} , \boldsymbol{\mu}_0 \in \mathbb{R}^p \text{ dado.}$$

Σ conocida

Usamos estadístico de Wishart $W = N(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \Sigma^{-1} (\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)$ sigue una $\chi^2_p(\delta)$ con $\delta = N(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)$, y la función test para el problema es:

$$\Phi(X) = \begin{cases} 1 \text{ si } W > \chi^2_{p;\alpha} \\ 0 \text{ si } W \leq \chi^2_{p;\alpha} \end{cases},$$

donde $\chi^2_{p;\alpha}$ representa el valor de una distribución χ^2_p que deja a su derecha una probabilidad α.
En nuestro caso si no proporcionamos la probabilidad α nos devolverá el p-value, que es la probabilidad que deja W a su derecha.

Σ conocida

```
media_test_sigma <- function(X, media_0, cov,
    alpha = NA) {
     N <- nrow(X)
     p <- ncol(X)
     media <- media_muestral(X)
     W <- N * (t(media - media_0) %*% solve(cov) %
        *% (media - media_0))
     p_value <- 1 - pchisq(W, p)
     if (!is.na(alpha))
          cat("\nResultado␣del␣test:␣", as.logical(
             p_value < alpha))
     else
          cat("\np-value:␣", p_value)
}
```

Σ conocida

Probamos el test con el X anterior:

```
print(X_DNM$media)
print(media_muestral(X))
media_test_sigma(X, X_DNM$media, X_DNM$cov)
media_test_sigma(X, media_muestral(X), X_DNM$cov)
media_test_sigma(X, c(2.5, 3.5, -1.2), X_DNM$cov)
media_test_sigma(X, X_DNM$media, X_DNM$cov, alpha = 0.05)
```

```
     [,1]
[1,]    2
[2,]    3
[3,]   -1
            [,1]
[1,]  2.2408009
[2,]  3.1898752
[3,] -0.7302118

p-value:  0.5143849
p-value:  1
p-value:  0.007210622
Resultado del test:  FALSE
```

Σ desconocida

Usamos el estadístico de T^2 de Hotelling, con $T^2 = N(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T S_{N-1}^{-1}(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)$, donde $\frac{T^2}{N-1}\frac{N-p}{p} \sim F_{p;N-p}(\delta)$ con $\delta = N(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)$, y entonces la función test para el problema es:

$$\Phi(X) = \begin{cases} 1 \text{ si } (N-p)T^2 > (N-1)pF_{p;N-p;\alpha} \\ 0 \text{ si } (N-p)T^2 \leq (N-1)pF_{p;N-p;\alpha} \end{cases},$$

donde $F_{p;N-p;\alpha}$ representa el valor de una distribución $F_{p;N-p}$ que deja a su derecha una probabilidad α.

Σ desconocida

```
media_test <- function(X, media_0, alpha = NA) {
    N <- nrow(X)
    p <- ncol(X)
    media <- media_muestral(X)
    S <- cuasicov_muestral(X)
    T <- N * (t(media - media_0) %*% solve(S) %*%
        (media - media_0))
    T_val <- T * (N - p) / (p * (N - 1))
    p_value <- 1 - pf(T_val, p, N - p)
    if (!is.na(alpha))
        cat("\nResultado del test: ", as.logical(
            p_value < alpha))
    else
        cat("\np-value: ", p_value)
}
```

Σ desconocida

Probamos con X:

```
print(X_DNM$media)
print(media_muestral(X))
media_test(X, X_DNM$media)
media_test(X, media_muestral(X))
media_test(X, c(2.1, 3.1, -1.2))
media_test(X, c(3, 0, 0), alpha = 0.05)
```

```
     [,1]
[1,]    2
[2,]    3
[3,]   -1
            [,1]
[1,]  2.2408009
[2,]  3.1898752
[3,] -0.7302118

p-value:  0.5912787
p-value:  1
p-value:  0.2963594
Resultado del test:  TRUE
```

Superficies de confianza

Ahora nos planteamos como representar las superficies de confianza de μ, es decir, dada X_i, X_j de $\boldsymbol{X}$ la región de $\mathbb{R}^2$ donde se pueda encontrar μ con cierta probabilidad $1 - \alpha$.

Σ conocida

Para formar las regiones de confianza para el vector de medias $\boldsymbol{\mu}$ consideramos que:

$$P[W \leq \chi^2_{p;\alpha}] = 1 - \alpha,$$

donde W era el estadístico de Wishart definido en el test de contraste. Tenemos entonces que la región de confianza al $100(1-\alpha)\,\%$ del vector de medias $\boldsymbol{\mu}$ está definida por todos los $\boldsymbol{\mu}_0 \in \mathbb{R}^p$ tales que cumplen:

$$N(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \Sigma^{-1} (\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}_0) \leq \chi^2_{p;\alpha}$$

Se representa como elipse, con Σ y $\sqrt{\frac{1}{N}\chi^2_{p;\alpha}}$.

Σ conocida

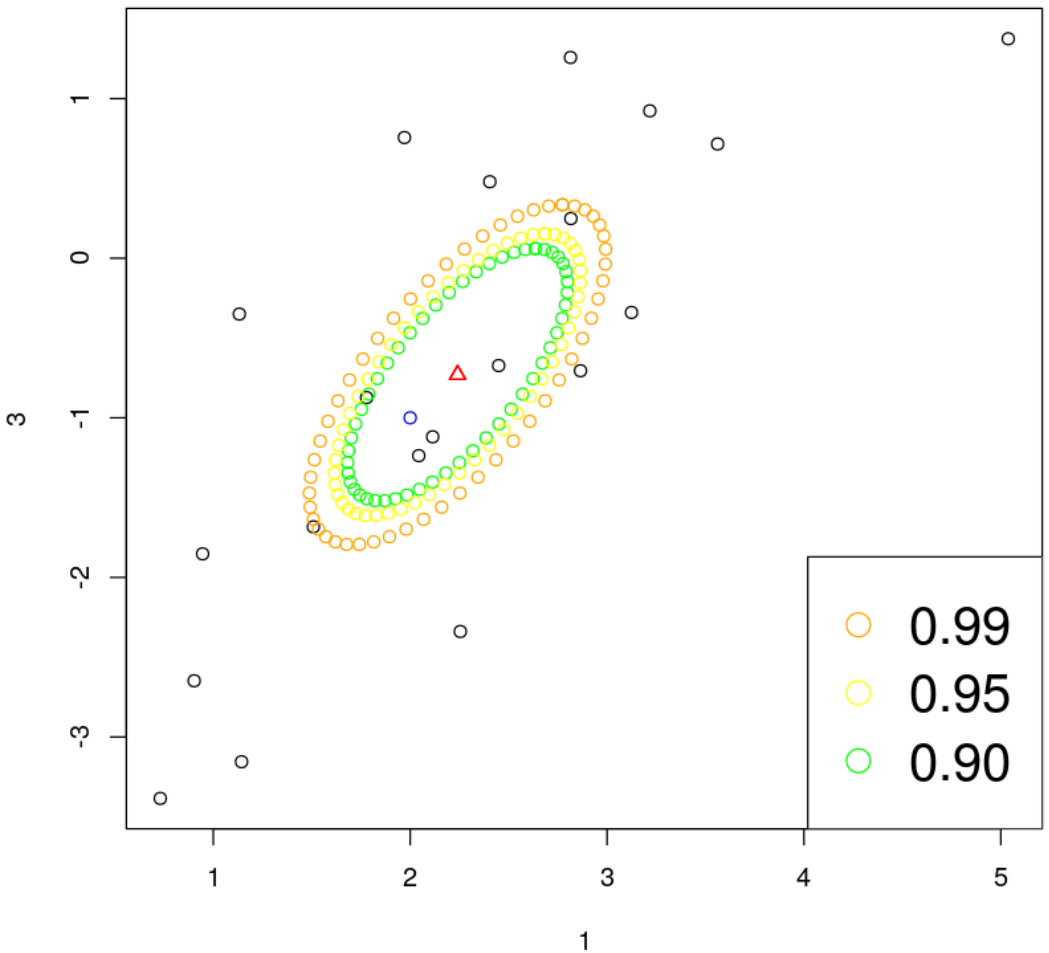
```
elipse_medias_sigma <- function(X, id, cov, alpha
    , col = "black", pch = 1, draw = FALSE) {
     p <- ncol(X)
     N <- nrow(X)
     media <- media_muestral(X)
     radio <- sqrt(qchisq(alpha,p) / N)
     elipse <- ellipse(center = media[id], shape =
          cov[id,id], radius = radio, draw = FALSE,
          pch = pch, col = col)
     if (!draw)
          plot(elipse, pch = pch, col = col)
     else
          points(elipse, pch = pch, col = col)
     points(matrix(media[id], ncol = 2), pch = 2,
        col = "red")
}
```

Σ conocida

Ejemplo con X con $\alpha = 0{,}99, 0{,}95, 0{,}90$:

```
plot(X[, c(1,3)], xlab = "1", ylab = "3")
elipse_medias_sigma (X, c(1,3), X_DNM$cov, 0.99,
    col = "orange", draw = TRUE)
points(matrix(X_DNM$media[c(1,3)], ncol=2), pch =
     1, col = "blue")
elipse_medias_sigma (X, c(1,3), X_DNM$cov, 0.90,
    col = "green", pch = 1, draw = TRUE)
elipse_medias_sigma (X, c(1,3), X_DNM$cov, 0.95,
    col = "yellow", pch = 1, draw = TRUE)
```

Σ desconocida



Σ desconocida

Para formar las regiones de confianza para el vector de medias $\boldsymbol{\mu}$ consideramos que:

$$P\left[T^2 \leq \frac{p(N-1)}{N-p} F_{p;N-p;\alpha}\right] = 1-\alpha,$$

donde T^2 era el estadístico de Hotelling definido en el test de contraste. Tenemos entonces que la región de confianza al $100(1-\alpha)\,\%$ del vector de medias $\boldsymbol{\mu}$ está definida por todos los $\boldsymbol{\mu}_0 \in \mathbb{R}^p$ tales que cumplen:

$$N(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T S_{N-1}^{-1} (\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}_0) \leq \frac{p(N-1)}{N-p} F_{p;N-p;\alpha}$$

Se representa como elipse, usando S_{N-1} y $\sqrt{\frac{p(N-1)}{N(N-p)} F_{p;N-p;\alpha}}$.

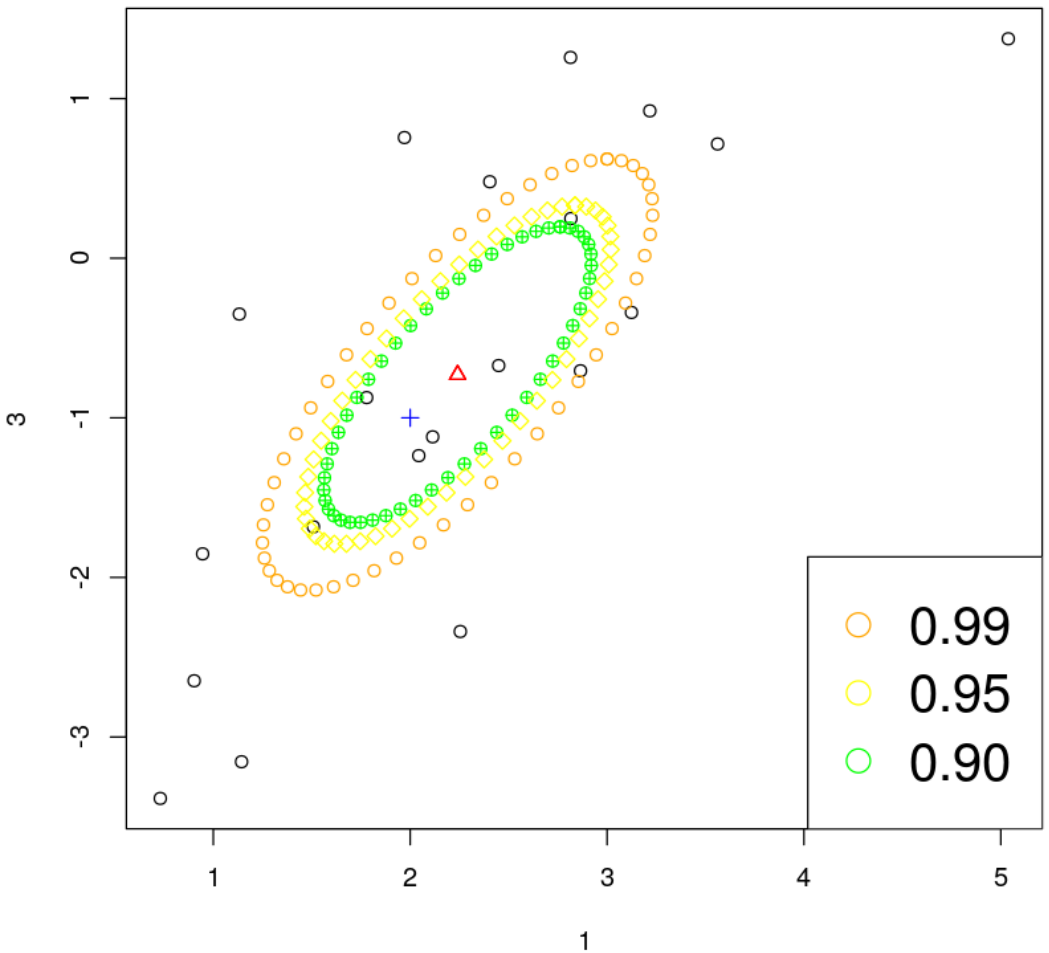
Σ desconocida

```
elipse_medias <- function(X, id, alpha, col, pch,
    draw) {
    p <- ncol(X)
    N <- nrow(X)
    media <- media_muestral(X)
    S <- cuasicov_muestral(X)
    radio <- sqrt(p*(N-1)*qf(alpha,p,N-p)/(N*(N-p
       )))
    elipse <- ellipse(center = media[id],
      shape = S[id,id], radius = radio, draw =
         FALSE, pch = pch, col = col)
    plot(elipse)
    points(matrix(media[id], ncol = 2), pch = 2,
       col = "red")
}
```

Σ desconocida

```
plot(X[, c(1,3)], xlab = "1", ylab = "3")
elipse_medias(X, c(1,3), 0.99, col = "orange",
    draw = TRUE)
points(matrix(X_DNM$media[c(1,3)], ncol=2), pch =
     3, col = "blue")
elipse_medias(X, c(1,3), 0.90, col = "green", pch
     = 10, draw = TRUE)
elipse_medias(X, c(1,3), 0.95, col = "yellow",
    pch = 5, draw = TRUE)
```

Σ desconocida



Bibliografía

Using R for Data Analysis and Graphics. Introduction, Code and Commentary J.H. Maindonald (2004)

Applied Predictive Modeling Max Kuhn & Kjell Johnson (2013)

An Introduction to Statistical Learning with Applications in R Gareth James, Daniela Witten, Trevor Hastie & Robert Tibshirani (6th printing 2015)

The Elements of Statistical Learnig. Data Mining, Inference, and Prediction. Trevor Hastie, Robert Tibshirani & Jerome Friedman (2nd edition 2001)

An Introduction to Applied Multivariate Analysis with R. Brian Everitt & Torsten Hothorn (2011)

Biliografía

R-Forge (Consultado 21/01/2020)
`http://r-forge.r-project.org/`

Cran R Contributed Packages (Consultado 21/01/2020)
`https://cran.r-project.org/web/packages/`

Cran R Contributed Packages Captura Diciembre 2019
`https://web.archive.org/web/20191210081209/http://cran.r-project.org/web/packages`

Cran R Task Views (Consultado 21/01/2020)
`https://cran.r-project.org/web/views/`

Tutorialspoint (Consultado 21/01/2020)
`https://www.tutorialspoint.com/r/index.htm`