Francisco Javier Sáez Maldonado
José Antonio Álvarez Ocete

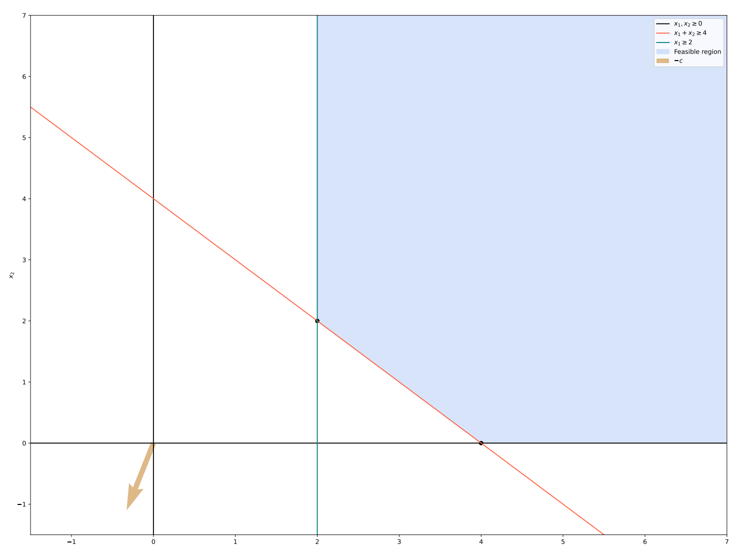
Ejercicios Programación Lineal
Optimización

February 22, 2022

Problema 3.c
Resolver geométricamente el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \min \quad z = 2x_1 + 5x_2 \\ \text{subject to} \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dibujamos la solución en la Figura 1.



Tenemos una región factible no acotada, pero tenemos una solución óptima y única, pues si tomamos la dirección que nos da $-c$, llegamos al punto $(4, 0)$, descartando el otro punto extremo $(2, 2)$ ya que según la dirección de $-c$, la función objetivo decrece más hacia abajo que hacia la izquierda. Por tanto, podemos decir que el mínimo es $f(4, 0) = 8$.

Problema 9.c

Resolver el siguiente problema de P.L. mediante el algoritmo simplex y el mismo algoritmo en formato de tabla.

$$\max z = 2x_1 + 5x_2$$
$$\text{subject to}$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 \geq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problema 10
Dado el siguiente PPL:

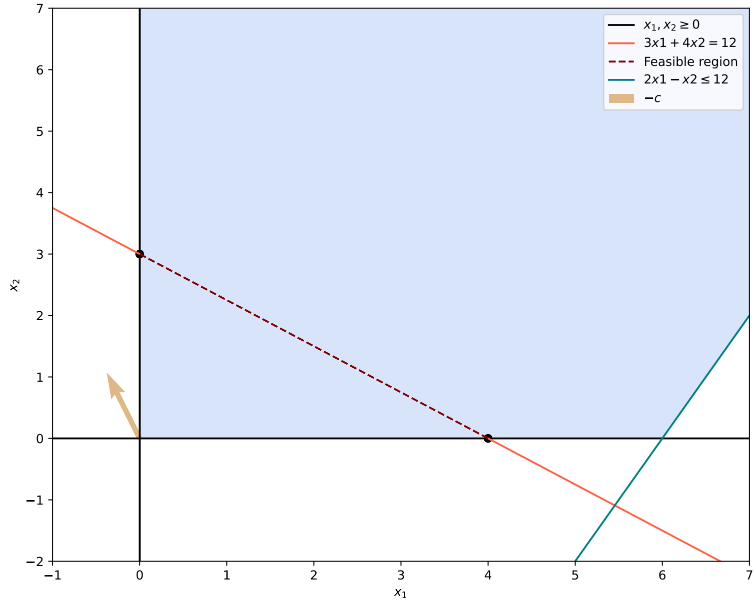
$$\begin{aligned} P: \ \min \ x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} \\ 3x_1 + 4x_2 = 12 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Plantear el PPL en forma estándar
2. Resolver geométricamente. Expresar: (a) la región factible, (b) el vector de costes, (c) la función objetivo, (d) los puntos extremos y sus coordenadas, (e) el punto o puntos solución y el valor objetivo óptimo en el/los mismo/s.
3. Resuélvelo aplicando el algoritmo simples algebraico a la SBF dada por la submatriz básica $B = (a_2\ a_3$. Debes indicar la solución y el valor objetivo óptimo, justificando por qué lo son.

1. Para que este problema esté en forma estándar, todas las restricciones del problema deben ser de igualdad. Es por ello que debemos eliminar la restricción de desigualdad de este caso añadiendo una variable de holgura. El problema quedaría del siguiente modo:

$$\begin{aligned} P: \ \min \ x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} \\ 3x_1 + 4x_2 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

2. Vamos ahora a resolverlo geométricamente. Primero, identificamos los elementos:
   (a) Dibujamos la región factible (que en este caso está sobre la recta definida por una de las restricciones) en la Figura 2.



(b) El vector de costes es el vector c tal que la función a minimizar es $c^T x$, por lo que en este caso $c = (1, -2)$.

(c) La función objetivo es esta función a minimizar, en este caso

$$f(x_1, x_2) = c^T(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2.$$

(d) Los puntos extremos son los que hemos dibujado en la Figura **??**, que son los puntos donde se cortan las restricciones. En este caso, son el $(0, 3)$ y el $4, 0)$

(e) Si utilizamos la dirección del vector $-c$, dibujada también en la figura, vemos que la solución óptima se da en el punto $(0, 3)$ y tiene valor $f(0, 3) = -6$.

3. Vamos ahora a resolverlo aplicando el algoritmo simplex algebraico. Consideramos la SBF inicial dada por la submatriz básica $B = (a_2 \ \ a_3)$ (queda así hecho el **Paso 1**).

Paso 2.
Primero, vemos que nuestra matriz A es :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que, en este caso,

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \implies B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

Y tenemos también que $c_B = (-2, 0)$. Conociendo el vector $b = (12\ 12)^T$, podemos calcular el valor de las variables básicas:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 \end{pmatrix}$$

Calculamos entonces el valor de la función objetivo:

$$z = c_B B^{-1} b = (-2, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} = -6$$

Paso 3.
A continuación, solo tenemos una variable no básica a_1, debemos calcular $z_j - c_j$ para esta variable no básica. Tenemos que:

$$z_j - c_j = c_b B^{-1} a_j - c_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2} < 0$$

Ahora, como $z_1 - c_1 \leq 0$, se verifica el **criterio de optimalidad simplex** (que es que todas las variables no básicas verifiquen esta desigualdad) y por tanto hemos terminado el algoritmo, por lo que nuestra **SBF actual es óptima**.
Para finalizar, sabemos que como x_1 finalizó como variable no básica, su valor es 0, y el valor de x_2 lo encontramos previamente cuando calculamos $x_B = B^-1b$, y vimos que era $x_2 = 3$. Es por ello que nuestra solución óptima de este problema está en el punto $(x_1, x_2) = (0, 3)$ y tiene el valor calculado previamente $z = c_B B^{-1} b = -6$.

Problema 11

Resolver por el método de las dos fases el PPL del ejercicio anterior.