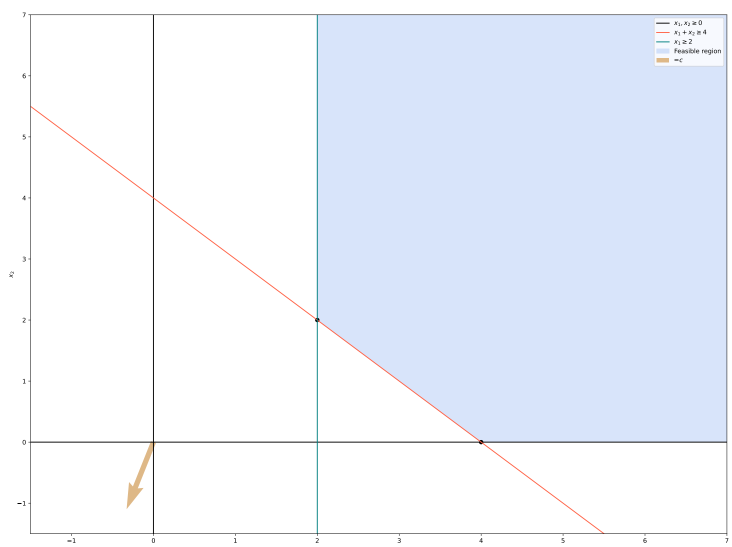
Problema 3.c

Resolver geométricamente el siguiente problema de programación lineal:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = 2x_1 + 5x_2 \\
& \text{subject to} \\
& x_1 + x_2 \geq 4 \\
& x_1 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Ejercicio realizado por: José Antonio Álvarez Ocete

Dibujamos la solución en la Figura 1.



Tenemos una región factible no acotada, pero tenemos una solución óptima y única, pues si tomamos la dirección que nos da $-c$, llegamos al punto $(4,0)$, descartando el otro punto extremo $(2,2)$ ya que según la dirección de $-c$, la función objetivo decrece más hacia abajo que hacia la izquierda. Por tanto, podemos decir que el mínimo es $f(4,0) = 8$.

Problema 9.c

Resolver el siguiente problema de P.L. mediante el algoritmo simplex y el mismo algoritmo en formato de tabla.

$$\begin{aligned}\max z &= 2x_1 + 5x_2 \\ \text{subject to} & \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Ejercicio realizado por: Francisco Javier Sáez Maldonado.

Primero, expresamos el problema añadiendo variables de holgura:

$$\begin{aligned}\max z = 2x_1 + 5x_2 \\ \text{subject to} \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_4 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\end{aligned}$$

Además, vamos a resolver el problema de minimización, que tiene el signo opuesto. Es decir, encontraremos

$$\min z = -2x_1 - 5x_2,$$

Vamos a resolverlo ahora por los dos métodos mencionados.

Método Algebraico.

Tenemos los siguientes elementos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} T$$

Ahora, vamos a escribir $A = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix}$. Seleccionamos como B la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora, tenemos que

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

y que, el valor de la función objetivo es:

$$z = c_B B^{-1} b = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 14.$$

Tenemos que calcular para todas las variables no básicas los valores

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j.$$

Los valores obtenidos son:

$$z_3 - c_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -5$$

$$z_4 - c_4 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = 3$$

Ahora, tomamos el mínimo de estos, pues estamos en un problema de **maximización**, que es $z_3 - c_3 = -5$. Como no se cumple que sea mayor que 0, la variable x_3 entra en la base. Escribimos entonces $x_B = \bar{b} - \bar{y}x_k$, con $\bar{b} = B^{-1}b$ y $\bar{y} = B^{-1}a_k$. En este caso:

$$x_3 = B^{-1}b - B^{-1}a_3x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} x_3.$$

Ahora, tenemos que **usar el criterio de la razón mínima** para elegir un $\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$ que sea el mínimo de todos los cocientes, pero ese **no existe** pues estamos dividiendo tanto por 0 como por -1, así que podemos decir que el problema **tiene solución no acotada**.

Método usando TABLAS.

Podemos ver primero que nuestra matriz A escrita anteriormente **no tiene** una submatriz identidad, por lo que añadimos **variables artificiales** para generarla, y utilizaremos por tanto el **método de las dos fases**. Entonces, la tabla inicial usando estas variables artificiales es la siguiente:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	0	0	0	0	-1	-1	0
x_5	1	1	-1	0	1	0	4
x_6	1	0	0	-1	0	1	2

Tenemos que eliminar primero estas variables artificiales. Sumamos Para ello las filas x_5, x_6 a la fila z para hacer ceros sobre esta fila en estas variables. El resultado es el siguiente:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	2	1	-1	-1	0	0	6
x_5	1	1	-1	0	1	0	4
x_6	1	0	0	-1	0	1	2

Ahora, como estamos buscando un mínimo, usamos que el mayor valor está en la columna de x_1. Procedemos a pivotar sobre el valor que está coloreado, obteniendo la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	0	1	-1	1	0	-2	2
x_5	0	1	-2	1	1	-1	2
x_6	1	0	0	-1	0	1	2

En este caso, teníamos dos columnas que podíamos elegir como mayor valor, pero hemos escogido la columna de x_2 pues es la que más rápido nos hace terminar el problema. Pivotamos ahora sobre la celda coloreada, y el resultado es el siguiente:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	0	0	0	0	-1	-1	0
x_5	0	1	-1	1	1	-1	2
x_6	1	0	0	-1	0	1	2

Hemos llegado al punto en el que no tenemos más elementos positivos en la fila de z, por lo que hemos terminado esta fase del algoritmo, pasamos a la segunda fase.

En esta, eliminamos las variables artificiales e incluimos la función objetivo inicial. La tabla resultante es la siguiente:

	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	2	5	0	0	0
x_2	0	1	-1	1	2
x_1	1	0	0	-1	2

Teniendo esta tabla, tenemos que hacer que $z_j - c_j$ sea cero. Al transformar la tabla obtenemos el siguiente resultado:

	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
z	0	0	5	-3	-14
x_2	0	1	-1	1	2
x_1	1	0	0	-1	2

Llegados a este punto, no tenemos elementos positivos en la base en la fila z, por lo que el algoritmo ha terminado. Además, tenemos que en este caso tenemos una **no tiene una solución acotada**.

Problema 10
Dado el siguiente PPL:

$$\begin{aligned} P:\ \min\ & x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} & \\ 3x_1 + 4x_2 &= 12 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Plantear el PPL en forma estándar
2. Resolver geométricamente. Expresar: (a) la región factible, (b) el vector de costes, (c) la función objetivo, (d) los puntos extremos y sus coordenadas, (e) el punto o puntos solución y el valor objetivo óptimo en el/los mismo/s.

3. Resuélvelo aplicando el algoritmo simples algebraico a la SBF dada por la submatriz básica $B = (a_2\ a_3$. Debes indicar la solución y el valor objetivo óptimo, justificando por qué lo son.

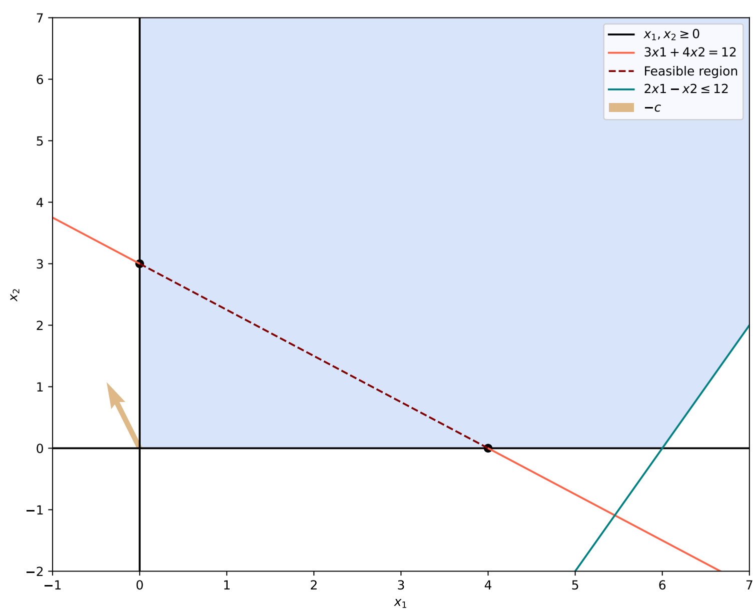
Ejercicio realizado por: Francisco Javier Sáez Maldonado.

1. Para que este problema esté en forma estándar, todas las restricciones del problema deben ser de igualdad. Es por ello que debemos eliminar la restricción de desigualdad de este caso añadiendo una variable de holgura. El problema quedaría del siguiente modo:

$$\begin{aligned} P:\ \min\ x_1 - 2x_2 \\ \text{subject to} \\ 3x_1 + 4x_2 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

2. Vamos ahora a resolverlo geométricamente. Primero, identificamos los elementos:

   (a) Dibujamos la región factible (que en este caso está sobre la recta definida por una de las restricciones) en la Figura 2.



   (b) El vector de costes es el vector c tal que la función a minimizar es $c^T x$, por lo que en este caso $c = (1, -2)$.

   (c) La función objetivo es esta función a minimizar, en este caso

$$f(x_1, x_2) = c^T(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2.$$

(d) Los puntos extremos son los que hemos dibujado en la Figura 2, que son los puntos donde se cortan las restricciones. En este caso, son el $(0,3)$ y el $4,0)$

(e) Si utilizamos la dirección del vector $-c$, dibujada también en la figura, vemos que la solución óptima se da en el punto $(0,3)$ y tiene valor $f(0,3) = -6$.

3. Vamos ahora a resolverlo aplicando el algoritmo simplex algebraico. Consideramos la SBF inicial dada por la submatriz básica $B = (a_2 \ \ a_3)$ (queda así hecho el **Paso 1**).

Paso 2.
Primero, vemos que nuestra matriz A es :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que, en este caso,

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \implies B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

Y tenemos también que $c_B = (-2, 0)$. Conociendo el vector $b = (12 \ 12)^T$, podemos calcular el valor de las variables básicas:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 \end{pmatrix}$$

Calculamos entonces el valor de la función objetivo:

$$z = c_B B^{-1} b = (-2, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} = -6$$

Paso 3.
A continuación, solo tenemos una variable no básica a_1, debemos calcular $z_j - c_j$ para esta variable no básica. Tenemos que:

$$z_j - c_j = c_b B^{-1} a_j - c_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2} < 0$$

Ahora, como $z_1 - c_1 \leq 0$, se verifica el **criterio de optimalidad simplex** (que es que todas las variables no básicas verifiquen esta desigualdad) y por tanto hemos terminado el algoritmo, por lo que nuestra **SBF actual es óptima**.

Para finalizar, sabemos que como x_1 finalizó como variable no básica, su valor es 0, y el valor de x_2 lo encontramos previamente cuando calculamos $x_B = B^-1b$, y vimos que era $x_2 = 3$. Es por ello que nuestra solución óptima de este problema está en el punto $(x_1, x_2) = (0,3)$ y tiene el valor calculado previamente $z = c_B B^{-1} b = -6$.

Problema 11
Resolver por el método de las dos fases el PPL del ejercicio anterior.

Ejercicio realizado por: José Antonio Álvarez Ocete

El objetivo de la primera fase será obtener una SBF inicial. Para ello buscamos que aparezca en la parte superior de la tabla una matriz identidad. La variable de holgura x_3 nos proporciona la segunda columna de dicha matriz. Para obtener la primera añadimos una variable artificial adicional, x_4. Obtenemos el siguiente problema de minimización:

$$\begin{aligned} P:\ \min\ z = x_4 \\ \text{subject to} \\ 3x_1 + 4x_2 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

La matriz A tendrá la siguiente expresión:

$$A = (a_1\ a_2\ a_3\ a_4) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A continuación mostramos la tabla correspondiente a este problema, partiendo de la SBF inicial dada por $B = (a_4\ a_3)$, con $B^{-1} = I$. Además de la fila inicial con los valores de la fase I, añadimos una fila con los valores de la fase II para ir computándolos directamente. Así cuando cambiémos de fase bastará con eliminar la fila correspondiente a la fase I y las columnas correspondientes a las variables artificiales (únciamente x_4 en nuestro caso):

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
I	1	0	0	0	-1	0
II	1	-1	2	0	0	0
x_4	0	3	4	0	1	12
x_3	0	2	-1	1	0	12

En primer lugar, hacemos ceros en las variables básicas de la primera fila. Para ello, sumamos la fila correspondiente a x_4 la primera fila:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
I	1	3	4	0	0	12
II	1	-1	2	0	0	0
x_4	0	3	4	0	1	12
x_3	0	2	-1	1	0	12

Puesto que el elemento 4 es máximo en la primera fila, la variable x_2 entrará en la base. Para decidir qué variable sale de la base tomaríamos el mínimo entre los cocientes de la columna LD y la correspondiente a la variable que entra en la base, x_2, sin incluir los valores no positivos. Por lo tanto, la variable que sale en la base es x_4. Obtenemos:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	LD
I	1	0	0	0	-1	0
II	1	-5/2	0	0	-1/2	-6
x_2	0	3/4	1	0	1/4	3
x_3	0	11/4	0	1	1/4	15

Como no quedan elementos positivos en la primera fila, hemos concluido la fase I. A continuación revisamos si las variables artificales valen 0. Como la variable x_4 no está en la base, toma valor nulo y podemos eliminarla de la tabla para proseguir con la fase II con la SBF inicial encontrada $(x_1, x_2) = (0, 3)$, asociada a la matriz básica $B = (a_2\ a_3)$:

	z	x_1	x_2	x_3	z
II	1	-5/2	0	0	-6
x_2	0	3/4	1	0	3
x_3	0	11/4	0	1	15

De nuevo, hemos de hacer operaciones para que queden valores positivos en la primera fila. Sin embargo, ya que no quedan valores positivos en dicha fila podemos concluir que hemos terminado de ejecutar el algorimto. La solución óptima será $(x_1, x_2) = (0, 3)$ ya que al no ser x_1 una variable básica toma valor nulo. Dicha solución tiene valor óptimo de la función de coste $z = -6$. Esto coincide con la solución obtenida por el método algebraico utilizado en el problema anterior, como cabría esperar.