José Antonio Álvarez Ocete

Take home exam - part I
Optimización

March 6, 2022

Cuestión 1
¿Cuáles son los criterios de parada del algoritmo simplex algebraico? Expón todas las alternativas posibles y las soluciones a que dan lugar.

Nos remitimos al algoritmo de Simplex expuesto en clase para la resolución de esta cuestión. El algoritmo de Simplex tiene dos criterios de parada:

1. Si durante el paso 3 se verifica
$$z_k - c_k = \max_{j \in I_n} \{z_j - c_j\} \leq 0 \tag{1}$$
entonces se verifica el **criterio de optimalidad simplex** y el algoritmo termina. En este caso podemos encontrarnos dos alternativas:
   - Si en (1) se verifica la igualdad, hay infinitas soluciones óptimas y la SBF actual es una de ellas.
   - Si en (1) no se verifica la igualdad, la solución óptima es única, y coincide con la SBF actual.
2. Si durante el paso 4 se verifica que el valor
$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{i \in \{1,\ldots,m\}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$
no existe, entonces el problema tiene solución no acotada y el algoritmo termina.

Cuestión 2
Una forma alternativa de definición de problemas de programación lineal viene dada por el modelo dual. En esta cuestión se pide que definas cuál es el Problema Dual de un Problema Primal.

1. ¿Qué relación existe entre ambos en términos de las soluciones posibles?
2. ¿Ofrece alguna ventaja la formulación dual respecto de la primal?

Para la respuesta de esta cuestión nos referimos al primer libro proporcionado como posible bibliografía para este *take home exam*: Bazaraa, Mokhtar S, Jarvis, John J, & Sherali, Hanif D. (2011). Linear programming and network flows (4th ed.). Somerset: Wiley. Los resultados teóricos mencionados son todos de esta fuente.

Asociado a un problema de programación lineal primal P expresado en forma canónica:

$$\begin{aligned} \min\ & \mathbf{cx} \\ \text{s.t. } & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

El problema de programación lineal dual D asociado se define por:

$$\begin{aligned} \max\ & \mathbf{wb} \\ \text{s.t. } & \mathbf{wA} \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{w} \geq 0. \end{aligned}$$

Un detalle especialmente relevante a tener en cuenta es que hay exactamente una variable dual para cada restricción primal y una variable primal para cada restricción dual. Es decir, hemos intercambiado el número total de variables por el número de restricciones. Utilizaremos este resultado más adelante.

El **Lema 1** estipula que el problema dual del dual es el primal. Esto nos permitirá ir y volver entre problemas indistintamente.

El primer resultado clave en el ámbito de los problemas es el **Teorema Fundamental de la Dualidad**: dado un problema de programación lineal primal y su dual, exactamente uno de los siguientes enunciados es cierto:

- Ambos poseen soluciones óptimas, $\mathbf{x}^*$ y $\mathbf{w}^*$, con $\mathbf{cx}^* = \mathbf{w}^*\mathbf{b}$.
- Si un problema tiene solución óptima no acotada, entonces el otro problema no es factible.
- Ambos problemas son no factibles.

Esto nos permite resolver el problema dual para resolver el primal original. Puesto que intercambiamos el número de variables por el número de restricciones, podemos utilizar este hecho y el teorema anterior para facilitar la resolución de los problemas. Veremos un ejemplo de esto en el Problema 2 de este examen.

Finalmente, como ventaja adicional de la formulación dual respecto a la primal cabe destacar que las variables duales cobran sentido en el ámbito económico (como comenta el capítulo 6.3 de nuestro referencia).

Problema 1
Demostrar que:

Sea $f : S \to \mathbb{R}, S \subseteq \mathbb{R}^n, S$ no vacío y convexo. entonces f es cuasiconvexa si y sólo si el conjunto S_α es convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$S_\alpha = \{x \in S : f(x) \leq \alpha\}$$

En primer lugar, recordemos la definición de función real cuasiconvexa. Sea $f : \emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que f es cuasiconvexa si para todo $x_1, x_2 \in S$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$ se cumple

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

Demostremos cada implicación por separado.

$\Longrightarrow)$

Hemos de probar que S_α es convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Fijamos $\alpha \in \mathbb{R}$, dos puntos del conjunto $x_1, x_2 \in S_\alpha$ y un valor de $\lambda \in [0,1]$. Si probamos que $x_3 \equiv \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ está en S_α, habremos probado que S_α es convexo, concluyendo esta implicación.

El punto x_3 estará en S_α si cumple $f(x_3) \leq \alpha$, pero

$$f(x_3) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\} \leq \alpha$$

donde en la primera igualdad hemos usado que f es cuasiconvexa, y en la segunda que $x_1, x_2 \in S_\alpha$, luego $f(x_1), f(x_2) \leq \alpha$. Esto concluye la primera implicación.

$\Longleftarrow)$

Hemos de probar que f es cuasiconvexa. Fijamos dos puntos $x_1, x_2 \in S$ y $\lambda \in [0,1]$. Si se verifica

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$$

entonces f será cuasiconvexa y habremos terminado.

Sea $\alpha = \max\{f(x_1), f(x_2)\} \in \mathbb{R}$. Por hipótesis, el conjunto S_α será convexo para el α fijado. En particular, la combinación lineal $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ estará en S_α, pero esto implica por la definición de S_α que

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \alpha = \max\{f(x_1), f(x_2)\},$$

luego f es cuasiconvexa. $\square$

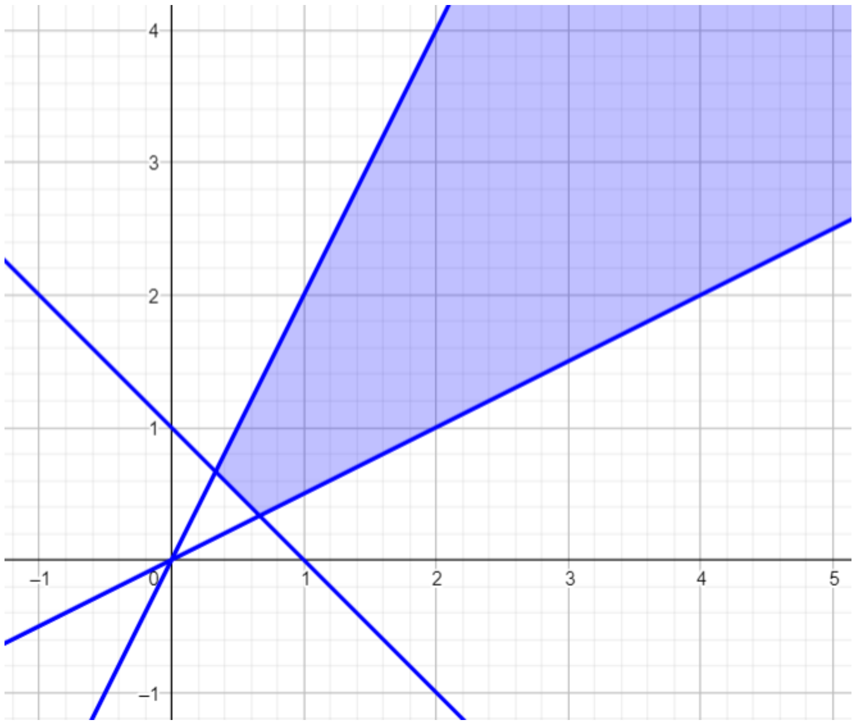
Problema 2
Haciendo uso de la cuestión 2, demostrar que el siguiente problema carece de solución.

$$\begin{aligned}
&\max x_3 \\
&2x_1 - x_2 + x_3 \leq -1 \\
&-x_1 + 2x_2 + x_3 \leq -1 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Empezamos definiendo el problema dual al anterior. El cómputo es directo utilizando la definición:

$$\begin{aligned}
&\min -w_1 - w_2 \\
&2w_1 - w_2 \geq 0 \\
&-w_1 + 2w_2 \geq 0 \\
&w_1 + w_2 \geq 1 \\
&w_1, w_2 \geq 0
\end{aligned}$$

A continuación dibujamos la región factible utilizando Geogebra. El resultado puede verse en la figura 1.



La función objetivo a minimizar en el problema dual es $-w_1 - w_2$, equivalente a maximizar $w_1 + w_2$. Es obvio que la región factible contiene soluciones óptimas no acotadas para esta función objetivo.

Haciendo uso del Teorema 1, como el problema dual tiene solución óptima no acotada, el problema primal no es factible.