

中国科学技术大学数学科学学院
2016—2017 学年第一学期考试试卷

■ A 卷

□ B 卷

课程名称 复变函数 (B) 课程编号 001548
考试时间 2016 年 11 月 考试形式 闭卷
姓名 学号 学院

| | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|----|
| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 总分 |
| 得分 | | | | | | |

一 基础知识 (共 36 分)

1) 求下列各值

(1) $(1+i)(3+4i)$, (2) $\sin(2+i)$

2) 解下面方程

(1) $z^3 - 27 = 0$, (2) $\cos z = 3$

3) 设 $f(z) = \frac{z^2}{1-2z}$, 把 $f(z)$ 在 $z=0$ 处展成幂级数, 并指出收敛半径.

4) 设 $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z-2)}$, 把 $f(z)$ 在 $|1+i| < |z-i| < |2-i|$ 处展成罗朗级数.

5) 判断方程 $z^5 + 6z + 2 = 0$ 在 $1 < |z| < 2$ 的根的个数, 并说明理由.

6) 已知解析函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 满足 $u + v = (x + y)(2x - 2y + 1)$, $f(1) = 2 + i$, 求函数 $f(z)$.

二 计算积分 (共 42 分)

(1) $\int_0^i (z^2 + \cos 2z) dz$, (2) $\int_{|z|=5} \frac{e^{iz}}{z^2 + 4} dz$,

(3) $\int_{|z|=3} \frac{|dz|}{9 + |z-1|^2}$, (4) $\int_{|z-i|=3} \frac{dz}{z(e^{2z} - 1)}$,

(5) $\int_{|z|=1} \left(\frac{3}{z^2} + 2z^2 \right) e^{\frac{1}{z-1}} dz$, (6) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{8 - 2\cos \theta}$,

(7) $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2(x^2 + 9)} dx$

三(10 分) 利用拉普拉斯变换解微分方程:

$$\begin{cases} y'' + 3y = 13t, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases}$$

四(6 分) 设 $f(z)$ 在 $z = 0$ 解析, $f(0) = 1, f'(0) = 5$, 求

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{|z|=\rho} \frac{z}{(f(z) - 1)^2} dz$$

五(6 分) 已知 $f(z)$ 在不包含无穷远点的复平面上处处解析, 并且成立: $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^{2016}} = 0$,
求证: $f^{(2016)}(z) = 0$.