装订线 答题时不要超过此线

中国科学技术大学数学科学学院
2017—2018 学年第一学期考试试卷

■A 卷　　　　□B 卷

课程名称 复变函数 (B)　　课程编号 001548

考试时间 2017 年 11 月　　考试形式 闭卷

姓名________　　学号________　　学院________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一 基础知识 (**共** 30 **分**)

1. 求解以下复方程:

$$1)\ e^{iz} = 2017, \qquad 2)\ (z-3)^4 = 1.$$

2. 已知调和函数 $v(x,y) = 4x^2 + ay^2 + x$, 求常数 a 并求出以 $v(x,y)$ 为虚部且满足 $f(0) = 1$ 的解析函数 $f(z)$.

3. 已知幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nz^{n-1}}{2^n}$, 求收敛半径 R 并在收敛域内求出此幂级数的和函数。

4. 已知 $f(z) = z^3 \exp\{\frac{1}{z}\}$, 把 $f(z)$ 在区域 $0 < |z| < +\infty$ 展成洛朗级数。

5. 求 $z^5 + 5z^2 + 2z + 1 = 0$ 在 $1 < |z| < 2$ 的根的个数，并说明理由。

二 计算以下复积分 (共 30 分)

$$(1) \int_0^{1+i} (2z + 3z^2)\, dz\,, \qquad (2) \oint_{|z|=3} \frac{e^{iz}}{z-2i}\, dz\,,$$

$$(3) \oint_{|z|=4} \frac{\sin 5z}{z^2}\, dz, \qquad (4) \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin(\frac{1}{1-z})}{z^4}\, dz,$$

$$(5) \oint_{|z-3|=2} \frac{e^z}{|z|^2} |dz|\,.$$

三 计算以下定积分 (共 14 分)

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-2\cos\theta)^2}, \qquad (2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 4x}{x(x^4+1)} dx$$

四 (10 分) 利用拉普拉斯变换解微分方程初值问题：

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = te^{3t}, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2017. \end{cases}$$

五 (6 分) 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在围道 C 及其内部解析, $g(z)$ 在围道 C 上没有零点,在 C 内 $g(z)$ 有唯一零点 a, 已知 $f(a) = p_1 \neq 0, f'(a) = p_2, f''(a) = p_3$, 而 $g'(a) = 0,\ g''(a) = q_1 \neq 0, g'''(a) = q_2, g''''(a) = q_3$.
计算积分： $\oint_C \frac{f(z)}{g(z)} dz$

六 (共 10 分) 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n (a_0 \neq 0)$ 的收敛半径 $R > 0$,

(1) 记 $M(r) = \max_{|z| \le r} |f(z)|\ (r < R)$, 利用柯西积分公式证明： $|f^{(n)}(0)| \le \frac{n! M(r)}{r^n}$

(2) 证明：在圆 $|z| < \frac{|a_0|\, r}{|a_0| + M(r)}$ 内 $f(z)$ 无零点。 (其中 $r < R$)