指数式乘法：设$z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}, z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$，则 $z_1z_2=r_1r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$. 背熟

证明：$z_1z_2=\left(r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\right)\cdot\left(r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}\right)=r_1r_2\left(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1\right)\left(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2\right)$

$$=r_1r_2\left\{\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right)+\mathrm{i}\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2\right)\right\}$$

$$=r_1r_2\left\{\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+\mathrm{i}\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right\}=r_1r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

$$\Rightarrow\left|z_1z_2\right|=\left|z_1\right|\cdot\left|z_2\right|,$$

$$\operatorname{Arg}\left(z_1z_2\right)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2+2k\pi.$$

除法：$z_2\neq0$时， $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}}{r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}}=\dfrac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}$.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|},\quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2+2k\pi.$$

乘法：设$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$，则 $z_1 z_2 = r_2 r_1 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$.

n 个复数相乘的情况:

设 $z_k = r_k e^{i\varphi_k}, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$

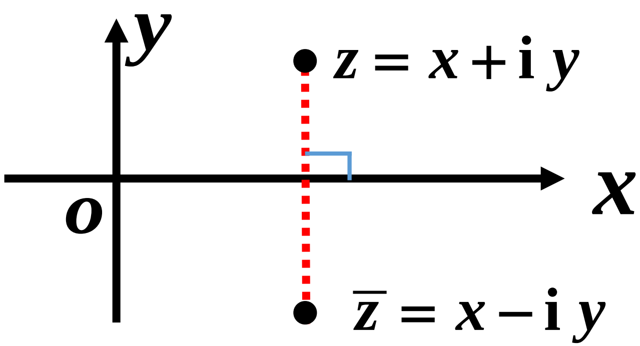
$$z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n)}.$$

背熟

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cdots \cdot |z_n|,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + \cdots + \operatorname{Arg} z_n + 2k\pi,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$



z 和 $\overline{z}$ 关于实轴对称.

★★★

$$|z|=|\overline{z}|,\ \ \arg z=-\arg \overline{z}\ \ (z\neq 0, \arg z\neq \pi).$$

乘法：设$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$，则 $z_1 z_2 = r_2 r_1 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

两复数相乘就是把它们的模相乘, 辐角相加.

记z_1, z_2对应向量分别为$\vec{z}_1, \vec{z}_2$,

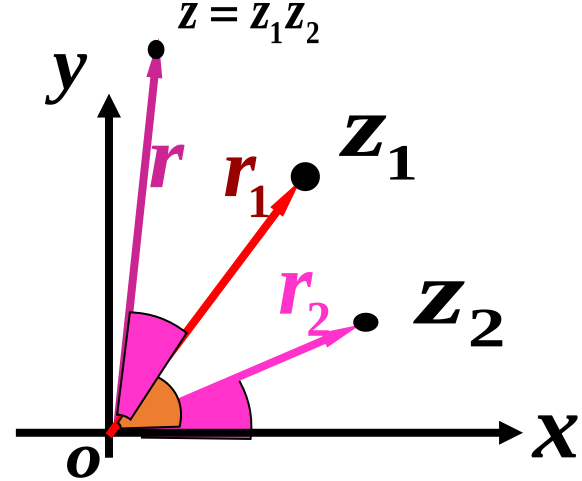
乘积$z_1 z_2$: 先把向量$\vec{z}_1$

按逆时针方向

旋转一个角度φ_2,

再把它的模扩大到 r_2 倍,

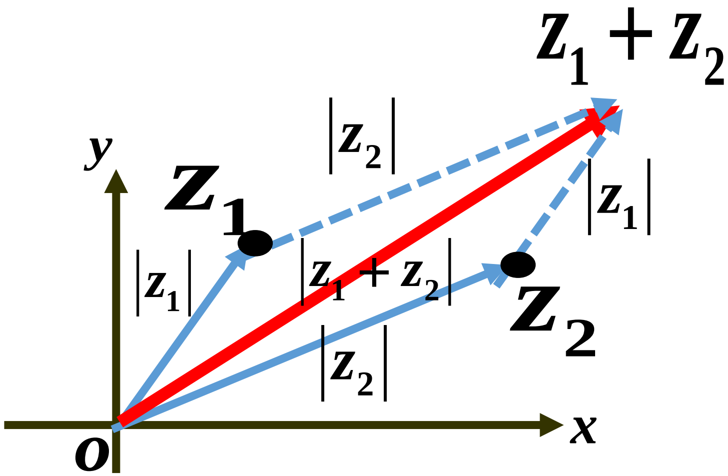
所得向量 $\vec{z}$ 就表示积 $z_1 z_2$。



复数相乘 $\longleftrightarrow$ 向量旋转 + 拉伸

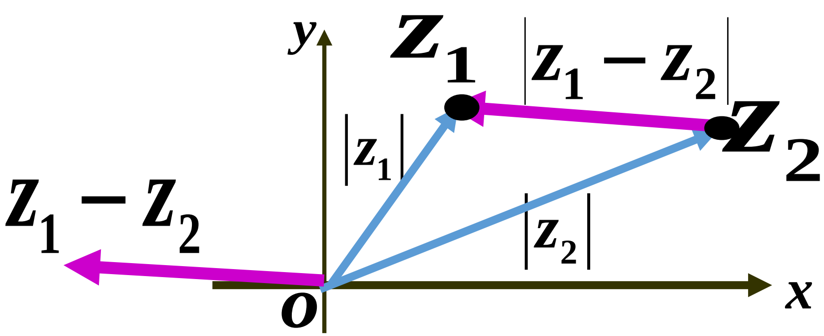
$$z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)}.$$

复数的和差运算的几何意义与向量运算的几何意义一致，见下图



$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + \mathrm{i}\left(y_1 \pm y_2\right),$$
$$\left(x_1, y_1\right) \pm \left(x_2, y_2\right) = \left(x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2\right).$$

平行四边形法则（加法）



三角形法则（减法）

$z_1 - z_2$ 表示 z_2(起点) 指向 z_1(终点) 的向量.

$|z_1 - z_2|$ 表示 z_1 和 z_2 之间的距离. ★★★

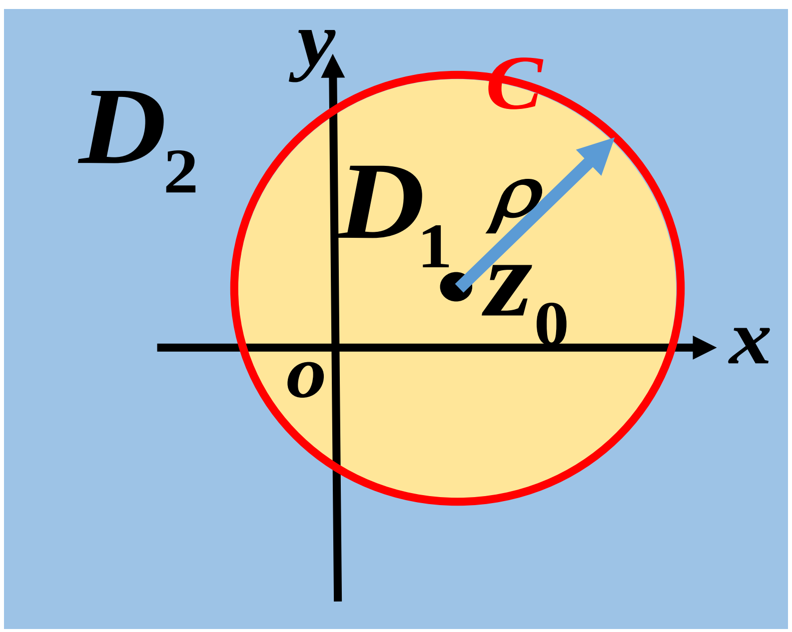
$|z_1 - z_2|$ 表示 z_1 和 z_2 之间的距离.

特殊图形的复数表示

$|z - z_0| = \rho$ 表示以 z_0为中心、ρ为半径的圆周。

$D_1 = \{z \,|\, |z - z_0| < \rho\}$ 表示以 z_0为中心、ρ为半径的圆的内部。

$D_2 = \{z \,|\, |z - z_0| > \rho\}$ 表示以 z_0为中心、ρ为半径的圆的外部。



称$D_1 = \{z \,|\, |z - z_0| < \rho\}$ 为z_0的ρ邻域，

称$\{z \,|\, 0 < |z - z_0| < \rho\}$ 为z_0的去心ρ邻域。

$$z = x + \mathrm{i}\,y, \quad \boxed{x = \frac{z+\bar{z}}{2}}, \quad \boxed{y = \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}}, \quad \boxed{x^2 + y^2 = z\bar{z}.}$$ 背熟

平面曲线$F(x,y)=0$可表示为复数形式 $F\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\right)=0.$

例 写出$x^2+2x+y^2+4y=1$的复数形式。

解 记$z=x+\mathrm{i}\,y$，则

$$x^2+2x+y^2+4y = z\bar{z} + 2\cdot\frac{z+\bar{z}}{2} + 4\cdot\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{i}} = \frac{-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}^2} = -\mathrm{i}}$$

$$= z\bar{z} + (z+\bar{z}) - 2\mathrm{i}(z-\bar{z}) = z\bar{z} + (1-2\mathrm{i})z + (1+2\mathrm{i})\bar{z}$$

$$= \{z+(1+2\mathrm{i})\}\{\bar{z}+(1-2\mathrm{i})\} - (1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})$$

$$= |z+(1+2\mathrm{i})|^2 - 5 = 1. \quad \text{故} \ |z+(1+2\mathrm{i})| = \sqrt{6}.$$

它表示以 $-(1+2\mathrm{i})$为中心、$\sqrt{6}$为半径的圆。

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)}.$$

复数的乘方

设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \neq 0$, 则

$$z^n = \left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = r^n\left(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi\right).$$

特别是 $\underline{\left(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\right)^n} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^n$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = \underline{\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi.}$$ 棣莫佛公式

$$z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \left(r^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right)^n = r^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\varphi}$$

$$= r^{-n}\left\{\cos(-n\varphi) + \mathrm{i}\sin(-n\varphi)\right\}.$$

复数的开方

设$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ $(r>0)$ 已知, 则称方程$w^n = z$ 的所有解为z 的n 次方根,

记作 $\sqrt[n]{z}$.　　下面求 $\sqrt[n]{z}$.

令$w = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \rho > 0$,代入方程得 $\rho^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 故

$$\rho^n = r, n\theta = \varphi + 2k\pi,\quad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots,$$ 从而

$$\rho = \left(\sqrt[n]{r}\right) > 0,\ \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$ $\left(\sqrt[n]{r}\right)$表示r 的n 次非负实方根.

故 $$\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{r}\right)\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, 2, \cdots, n-1。$$

($\sqrt[n]{z}$ 有且只有n个不同的值。)

背熟

$$z = r\,e^{i\varphi},$$

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{r}\right)\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.}$$ 背熟

例. 求 $\sqrt[3]{-i}$.

解 $\underline{\underline{\underline{-i = e^{-\frac{\pi}{2}i}}}}$, 则 $\sqrt[3]{-i} = \cos\left(\dfrac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right), k = 0, 1, 2,$

即 $$\sqrt[3]{-i} = \begin{cases} \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i, & k = 0, \\ \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} = i, & k = 1, \\ \cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i, & k = 2. \end{cases}$$

小结

复数的加减宜用 $z = x+\mathrm{i}y$ 形式，

复数的乘除、乘方、开方宜用指数形式 $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

1.2 复数列极限

定义：设$z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n, \cdots$是一个有序复数列，

z_0 是一个给定的复数，如果

$$\lim_{n\to+\infty}|z_n - z_0| = 0,$$

则称 z_0 是复数列 $\{z_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z_0$.

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}|z_n - z_0| = 0.$$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 使得当$n > N$时，

$$|z_n - z_0| < \varepsilon,$$

即当$n > N$时，z_n全部落在以z_0为中心、ε为半径的圆内

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0 \overset{\text{定义}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to+\infty} |z_n - z_0| = 0.$$

定理1 设$z_0 = x_0 + \mathrm{i}\, y_0, z_n = x_n + \mathrm{i}\, y_n$, $(x_0, y_0, x_n, y_n\text{是实数}), n \in \mathbb{Z}^+$, 则

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0\text{和} \lim_{n\to+\infty} y_n = y_0\text{同时成立}.$$

证明: 1). "$\Rightarrow$"(必要性). 利用

$$|x_n - x_0| \le |z_n - z_0|, \qquad |y_n - y_0| \le |z_n - z_0|.$$

2. "$\Leftarrow$"(充分性). 利用$|z_n - z_0| \le |x_n - x_0| + |y_n - y_0|$. #

由定理1， $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{Re}\, z_n) + \mathrm{i} \lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{Im}\, z_n)$.

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (\mathrm{Re}\, z_n) = \lim_{n\to+\infty} (\mathrm{Im}\, z_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |z_n| = 0.$$

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \text{和} \lim_{n\to+\infty} y_n = y_0 \text{同时成立}.$$

例 复数列 1, i, −1, −i, 1, i, −1, −i, 1, ... 是否收敛?

$$\left.\begin{array}{l}\text{实部数列}\{1,0,-1,0,1,0,-1,0,\ldots\}\\ \text{或 虚部数列}\{0,1,0,-1,0,1,0,-1\ \ldots\}\end{array}\right\}\text{不收敛,}$$

故原复数列不收敛，无极限.

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |z_n| = 0.$$

例 $1, \frac{i}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{i}{6}, \frac{1}{8}, \frac{i}{10}, -\frac{1}{12}, -\frac{i}{14}, \ldots,$

此复数列的模收敛于0,

故此复数列收敛到0, 极限值等于0.

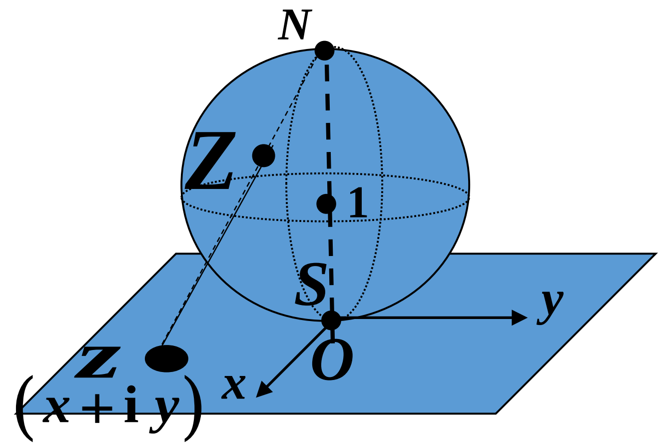
扩充复平面与复球面

取一个与复平面切于原点 $z=0$ 的单位球面(半径为1),

球面上一点 S 与原点重合(如图),

通过 S 作垂直于复平面的

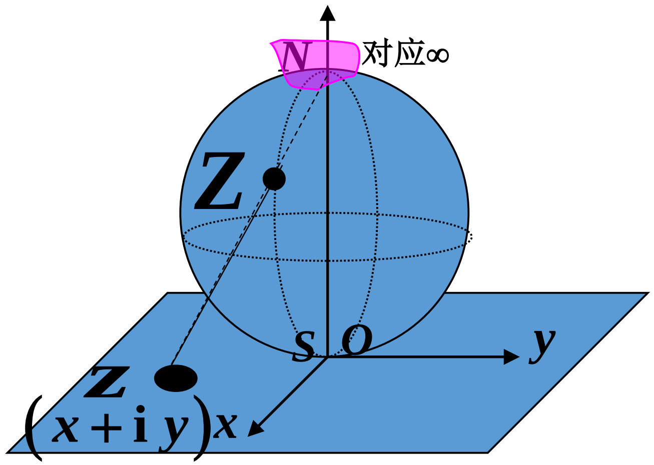
直线与球面相交于另一点 N,



称 N 为北极, S 为南极.

复平面任一点$z=x+\mathrm{i}\,y$与N的连线与球面交于一点,

记为Z. z与Z一一对应.



球面上的北极 N 不能对应复平面上的定点，

但球面上的点离北极 N 越近，

它所表示的复数的模越大.

约定: 在复平面引进一个理想点，称为“无穷远点”，使它

与球面上的北极N相对应,记作∞。

扩充复平面: 增加了无穷远点 ∞ 的复平面.

扩充复平面也可称为 闭复平面.

不含无穷远点∞ 的复平面称为开复平面，简称复平面。

与扩充复平面对应的整个球面称为复数球面或黎曼球面 .

关于无穷远点 ∞，有如下约定(P16)

1. ∞的实部、虚部及复角都无意义, $|\infty| = +\infty$;

2. 若$a \neq 0$, 则$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$, $\dfrac{a}{0} = \infty$;

3. 若$a \neq \infty$, 则$a \pm \infty = \infty \pm a = \infty$, $\dfrac{a}{\infty} = 0$; $\dfrac{\infty}{a} = \infty$;

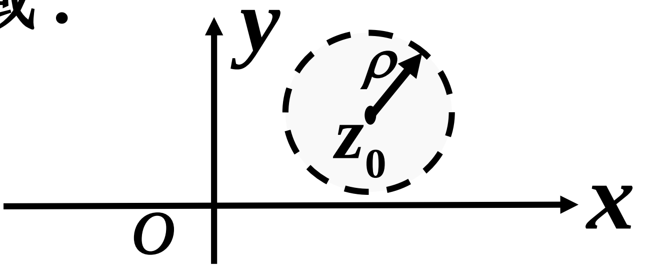
4. 称$\{z \mid |z| > R\}$为无穷远点∞的邻域.

1.3 平面点集

1.3.1 平面点集

(1) 邻域

$\{z \mid |z-z_0|<\rho\}$ 称为 z_0 的ρ邻域.

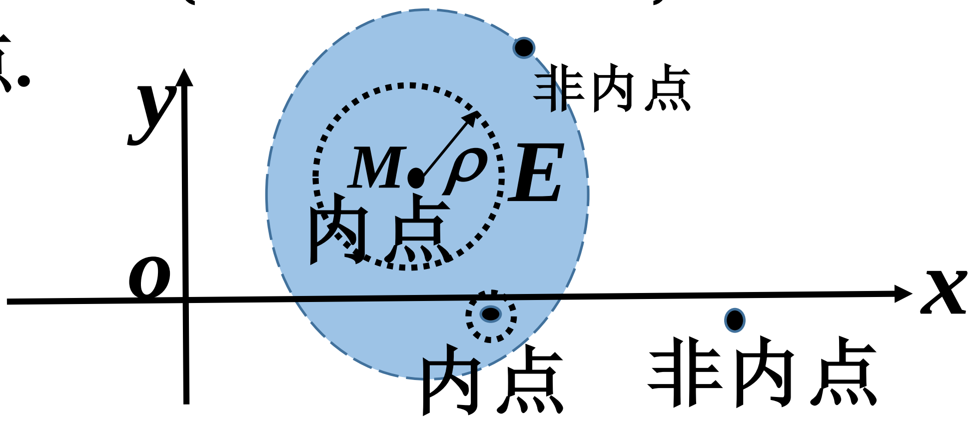


(2) 内点

设 E 为复平面上的某个点集, M 为 复平面上一点.

如果存在M的一个ρ邻域$\{z \mid |z-M|<\rho\}$完全属于E,

则称M为 E 的内点.

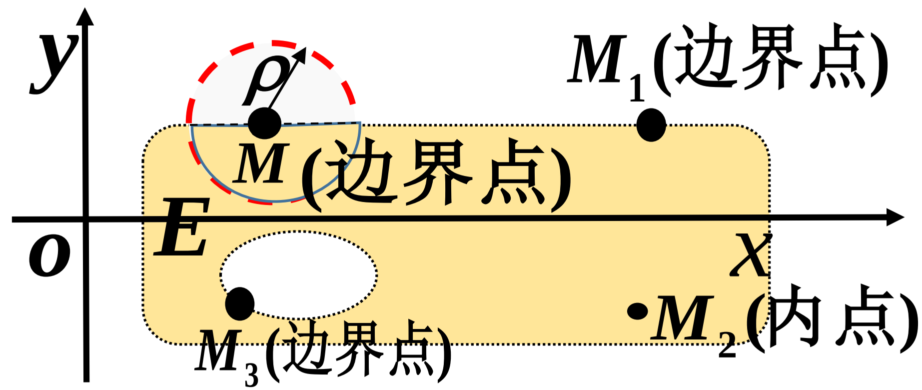


设 E为复平面上的某个点集, M为 复平面上一点.

(3) 边界点

如果M 的任一ρ 邻域内既有集E 的点, 也有非E 的点,

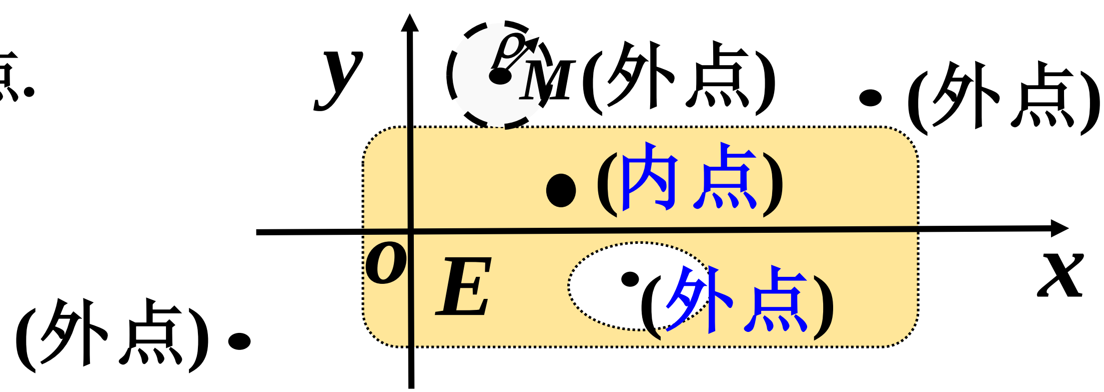
则称M为 E 的边界点.



(4) 外点

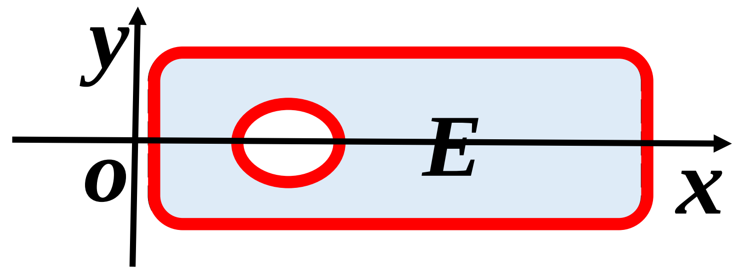
如果 M 有一个ρ 邻域完全不属于集 E,

则称M为 E 的外点.



(5) 边界

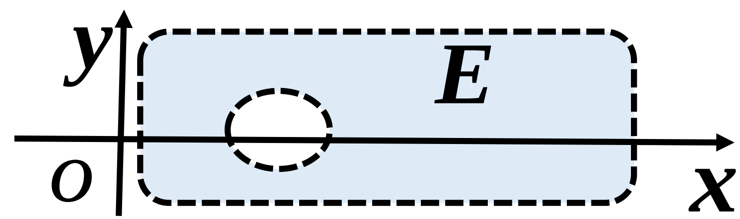
E的全部边界点组成的集合，称为E的边界。



(6) 开集

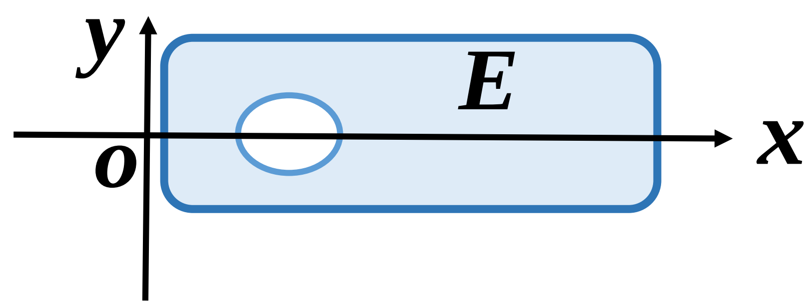
如果集E 的点全部是E的内点, 则称E 为开集.

开集E的所有边界点都不属于E.



(7) 闭集

如果E的边界全部属于E, 则称E为闭集。

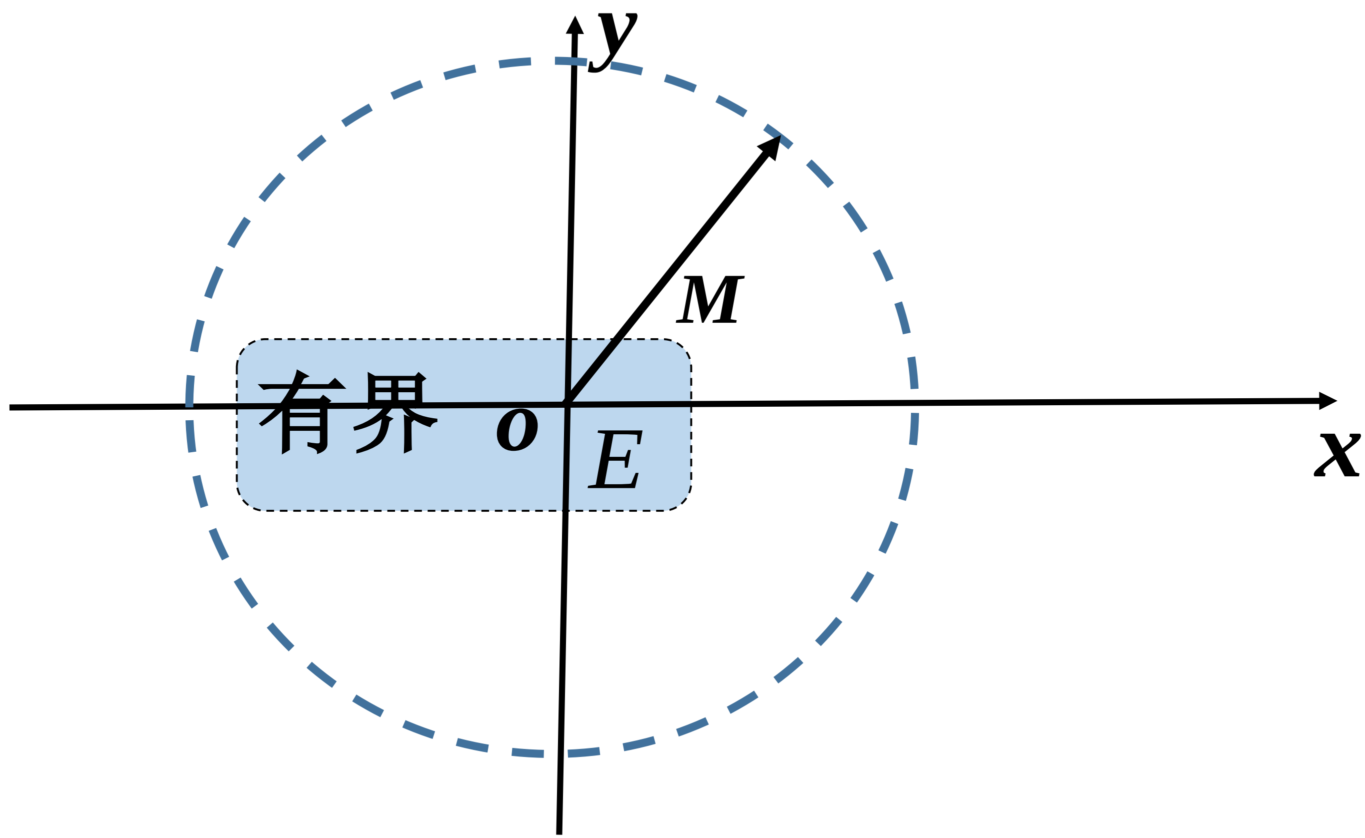


(8) 有界集和无界集

如果集 E 可以被包含在原点的某个领域内,

即存在 $M>0$, 使得$E\subseteq\{z \mid |z|<M\}$, 则称$E$为有界集,

否则称E为无界集.



1.3.2 区域和曲线

连通的非空开集D称为区域. 区域D满足:

1) D是一个非空开集; $\boxed{D\text{的所有边界点都不属于}D.}$

2) D具有连通性,

即D 中任两点可用一条完全属于D中的折线连结起来.

例如，圆环域$\left\{z \,\middle|\, \frac{1}{2} < |z+2| < 1\right\}$ 是区域.

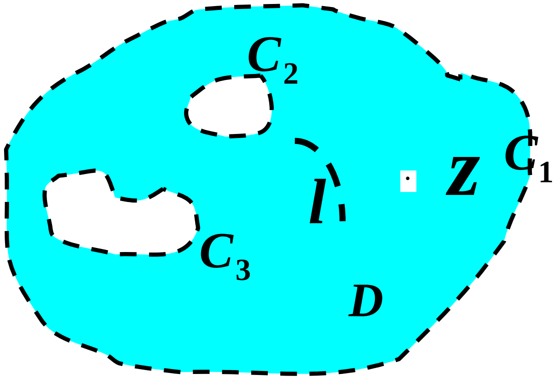
又如，不相交的两个圆的并集

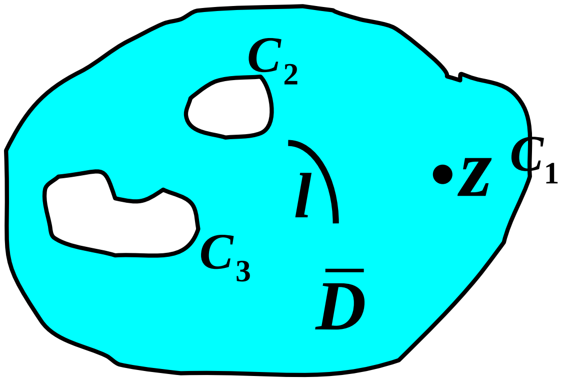
$\{z \,\|z+2| < 1\} \cup \{z \,\|z-100| < 1\}$ 不是区域, 因为它不连通.

注意： 区域的边界可能是：

由一条或几条曲线、一些割痕、孤立的点所组成的

- 区域D加上它的边界C一起称为**闭域**，记为$\overline{D}=C+D$.





(1) 连续曲线

如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是 $[\alpha, \ \beta]$ 上的连续实值函数,

则由 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$ 决定的点集 l,

称为复平面上的一条连续曲线.

l 也可记成 $z(t) = x(t) + \mathrm{i}\, y(t), \ \ \alpha \le t \le \beta.$

例 求 $z(t) = t + t^2 \mathrm{i}, \ \ -\infty < t < \infty$ 所给出的曲线.

解 $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases}$ 消去 t, 得 $y = x^2$,

它是 (x, y) 平面一条抛物线.

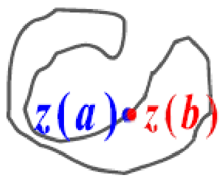
chóng

(2) 约当曲线，即简单曲线(无重点)

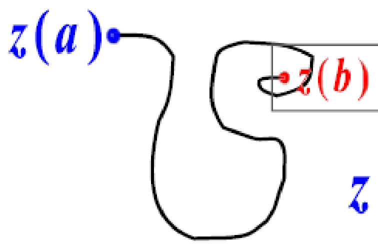
- 设$l: z(t)=x(t)+\mathrm{i}\,y(t)(\alpha \le t \le \beta)$ 为一条连续曲线，
  如果l满足：$\forall t_1,t_2 \in [\alpha,\beta]$，若 $\underline{\underline{t_1 \ne t_2}}$，
  且t_1,t_2不同时是$[\alpha,\beta]$的端点，则 $\underline{z(t_1) \ne z(t_2)}$.
  则称l为若尔当曲线，也称为简单曲线。

- 设$l: z(t)=x(t)+iy(t)\underline{(\alpha \le t \le \beta)}$ 为一条约当曲线，
  如果 $\underline{z(\alpha)=z(\beta)}$，则称$l$为若尔当闭曲线或简单闭曲线.

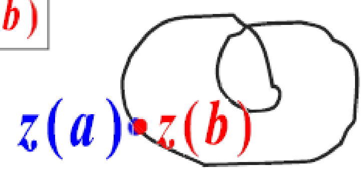
下列曲线l：$z = z(t)(a \le t \le b)$是否为简单曲线?是否闭?



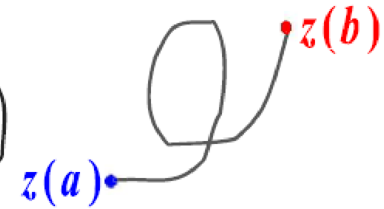
简单 闭



简单 不闭



不简单 闭



不简单 不闭

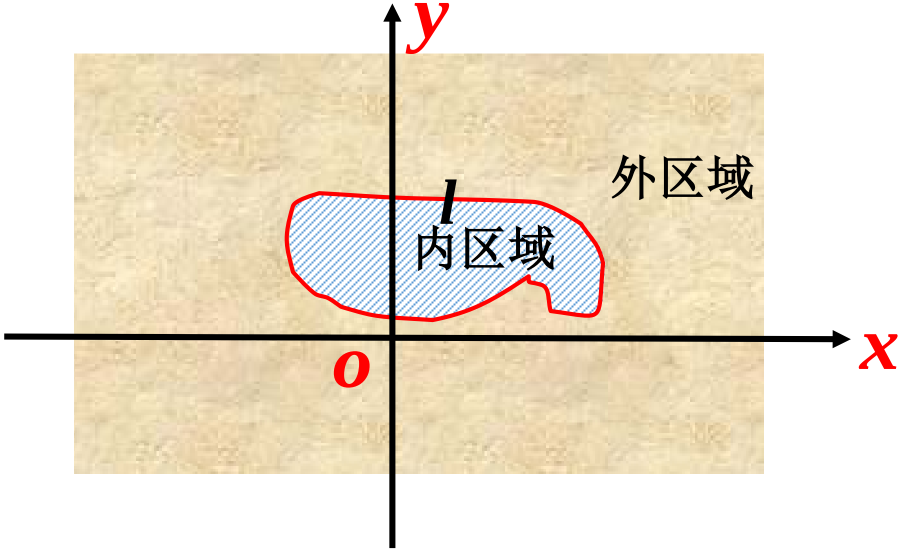
约当曲线的性质

任意一条简单闭曲线 l 将整个复平面唯一地分成两个没有公共点的区域，

其中一个有界，称为l的内区域，

另一个无界，称为l的外区域。

内区域和外区域的边界都是l.

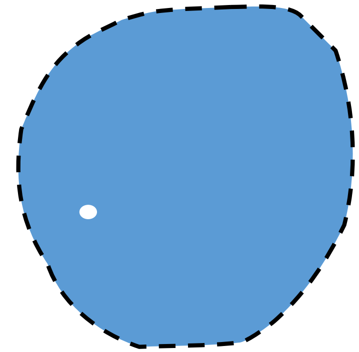


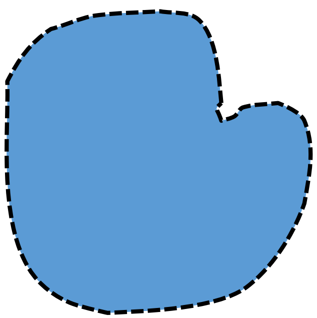
(3) 单连通区域与多连通区域

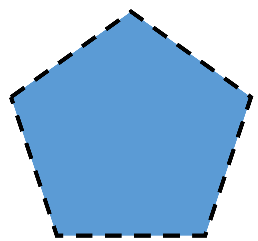
复平面上的一个区域D，如果在D中任作一条简单闭曲线l，l的内区域中每一点都属于D，

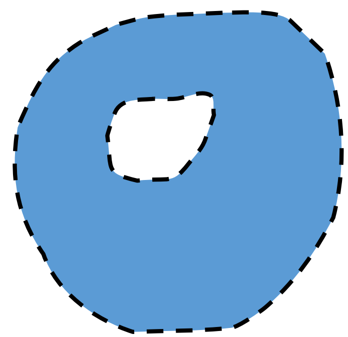
就称D为单连通区域.

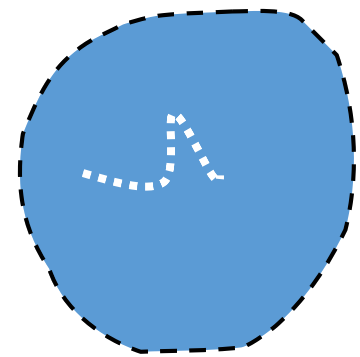
- 一个区域如果不是单连通区域，就称为多连通区域.


多连通区域


单连通区域

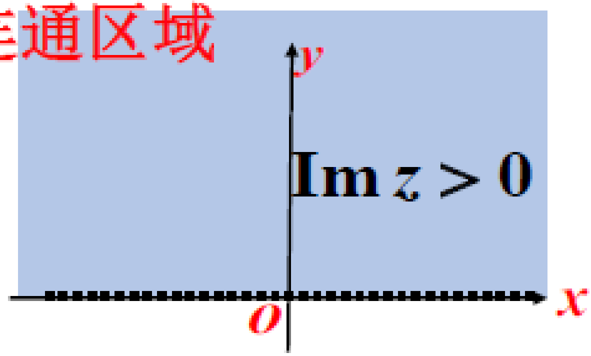

单连通区域


多连通区域


多连通区域

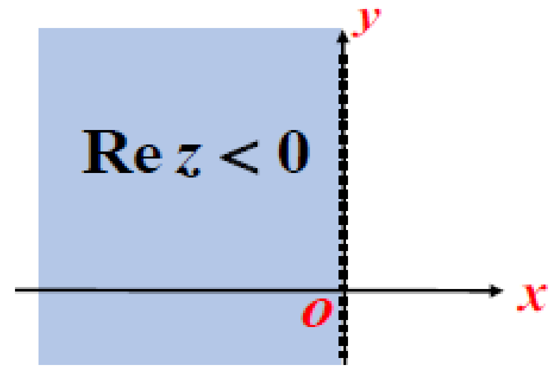
- 任意一条约当闭曲线的内区域是单连通区域.

单连通区域



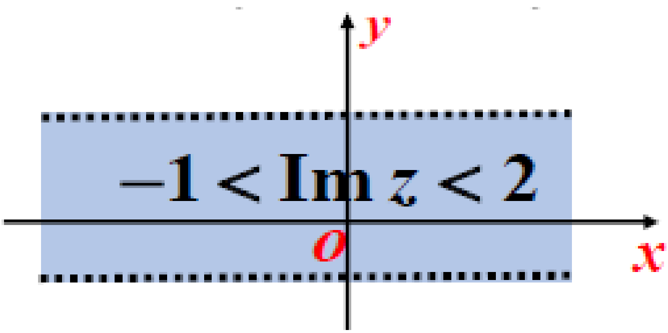
单连通，无界区域

边界：$\{z \mid \operatorname{Im} z = 0\}$



单连通，无界区域

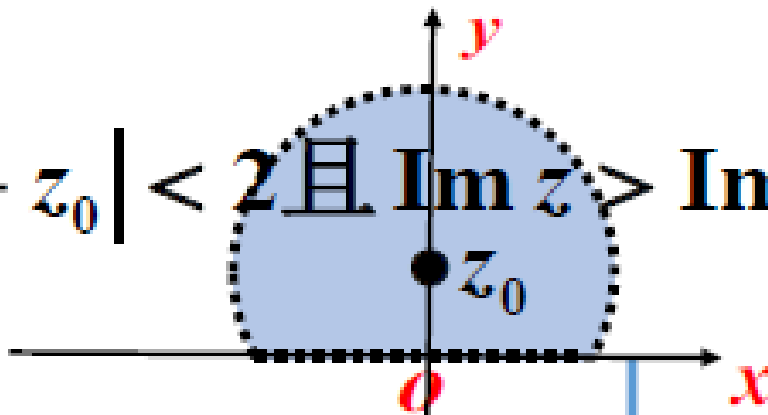
边界：$\{z \mid \operatorname{Re} z = 0\}$



单连通，无界区域

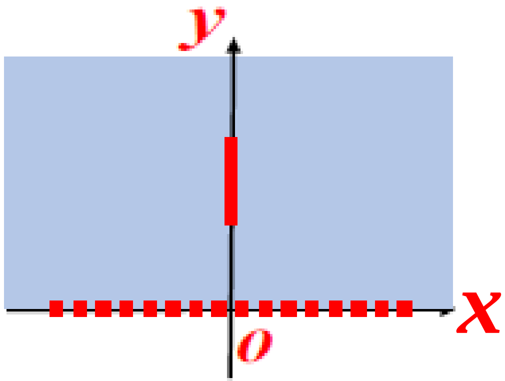
边界：$\{z \mid \operatorname{Im} z = -1\} \cup \{z \mid \operatorname{Im} z = 2\}$

$$|z-z_0|<2 \text{且} \operatorname{Im} z > \operatorname{Im} z_0 - 1$$



单连通，有界区域

$$\text{边界:}\{z \mid |z-z_0|=2 \text{且} \operatorname{Im} z \ge \operatorname{Im} z_0 - 1\} \cup \{z \mid \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_0 - 1 \text{且} |z-z_0|<2\}$$

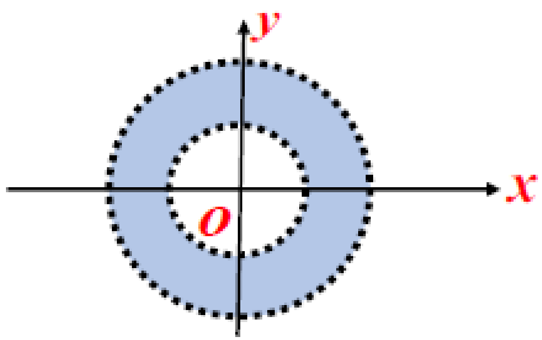


多连通区域

$$\{z|\operatorname{Im} z>0\}\setminus\{z|\operatorname{Re} z=0,1\le \operatorname{Im} z\le 2\}$$

$\operatorname{Im} z>0$去掉虚轴上线段$1<\operatorname{Im} z<2$

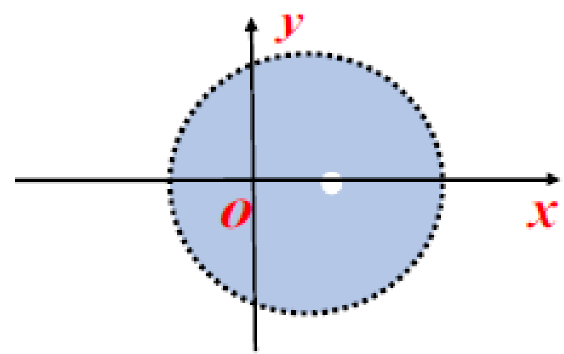
边界:$\{z|\operatorname{Im} z=0\}\cup\{z|\operatorname{Re} z=0,1\le \operatorname{Im} z\le 2\}$



$$1<|z|<2$$

多连通区域

边界:$\{z||z|=1\}\cup\{z||z|=2\}$



$$0<|z-1|<2$$

多连通区域

边界:$\{1\}\cup\{z||z-1|=2\}$

作业

P19-22

4(2)(3),6,

16(2),18(3)(5),

19(6)(10),

21(3),22