4.4 孤立奇点的分类 (利用洛朗级数研究)

如果a是$f(z)$的孤立奇点, 则$\exists\rho>0$, 使得$f(z)$在 $D: 0<|z-a|<\rho$ 内解析, 故由P 84洛朗展开定理知, $f(z)$ 在D内可展成洛朗级数:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n(z-a)^n}_{\substack{\text{主要部分}\\ \text{(负幂项)}}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n}_{\substack{\text{正则部分}\\ \text{(幂级数)}}}.$$

根据主要部分(负幂项)，对孤立奇点进行分类.

定义(孤立奇点)(P 87): 如果$f(z)$在点a不解析，即a是$f(z)$的奇点, 但$f(z)$在点a 的某个去心邻域$0<|z-a|<\rho$ 内解析, 则称a是$f(z)$的孤立奇点.

设a是$f(z)$的孤立奇点，

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n, \quad 0<|z-a|<\exists\rho. \quad (1)$$

主要部分　　正则部分

1). 可去奇点P 91：

若 $f(z)$在a点洛朗级数(1)中无主要部分(无负次幂项)

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots, \quad 0<|z-a|<\rho, \quad (2)$$

(即当$n<0$时，$a_n=0$) 则称$z=a$ 是$f(z)$的可去奇点.

• 若定义$f(a)=a_0$，则(2)在$|z-a|<\rho$ 成立，$f(z)$在a 解析，

故可去奇点可当作解析点.

例 $f(z)=\frac{\sin z}{z}$，0是唯一奇点，0是孤立奇点，

在$|z|>0$内，$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots$，

故$z=0$是$\frac{\sin z}{z}$的可去奇点. (无负次幂项)

可定义$f(0)=1$，则$f(z)$是全平面解析函数.

例 $g(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}$，0是唯一奇点，0是孤立奇点，

在$|z|>0$内，$\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\cdot\left\{1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)\right\}=\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\cdots$

故$z=0$是$\frac{1-\cos z}{z^2}$的可去奇点.

若定义$g(0)=\frac{1}{2}$，则$g(z)$是全平面解析函数.

设a是$f(z)$的孤立奇点.

2) 极点P 92：若$f(z)$在a点洛朗级数的主要部分有且只有有限个非零项，

即$\exists m\in\mathbb{Z}^{+}$，使得在$a$ 的某个去心邻域$0<|z-a|<\rho$ 内，

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{a_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n,\quad a_{-m}\neq 0,$$

则称a是$f(z)$的m 阶极点, 或 m 级极点.

例. 在$|z|>0$内, $\frac{\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\cdots$

故0是$\frac{\sin z}{z^2}$的2级极点.

3). 本性奇点：若$f(z)$在a点的洛朗级数主要部分有无限多个非零项，

即$f(z)$在a点某去心邻域里的洛朗级数有无限多个非零负幂次项，

则称 a是$f(z)$的本性奇点.

例. 在$|z|>0$内, $\cos\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n}}$，故0是$\cos\frac{1}{z}$的本性极点.

无限多个负幂次项

可去奇点的判别法

(一)按定义判断：设a是$f(z)$的孤立奇点，则

a是$f(z)$的可去奇点 $\Leftrightarrow$ $f(z)$在a点的洛朗展式不含$z-a$ 的负次幂项；

(二) 定理1(P92) 设a是$f(z)$的孤立奇点，则

a是$f(z)$的可去奇点 $\Leftrightarrow \exists\rho>0$，使得$f(z)$ 在$0<|z-a|<\rho$ 内有界.

证明：必要性. 设a是$f(z)$的可去奇点，

则$\exists\delta>0$，使得在$0<|z-a|<\delta$内，

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots.$$

令$z\to a$得，$\lim\limits_{z\to a} f(z)=a_0$ (有限). $f(z)$在a的某个去心邻域内有界.

充分性. 设$\exists\rho>0$，$\exists M>0$使得在$D:0<|z-a|<\rho$ 内，$|f(z)|\le M$.

a是$f(z)$的孤立奇点，故可取$\rho>0$充分小，使得在D 内，$f(z)$解析，

故在D内可展开为$z-a$的洛朗级数：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n,\quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

可去奇点的判别法

C是D 内任一条围绕a 的逆时针方向简单闭路.

只需证当$n<0$ 时, $a_n=0$.

取$0<\rho_0<\rho$, $C: |z-a|=\rho_0$, 则$\forall\zeta\in C$, $|f(\zeta)|\le M$, $|\zeta-a|=\rho_0$,

(长大不等式) $|a_n|\le\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{M}{\rho_0^{n+1}}\cdot 2\pi\rho_0=M\rho_0^{-n}$. 故当$n<0$时,

$-n>0$, 令$\rho_0\to 0$得, $a_n=0$. 故a是$f(z)$的可去奇点.#

(三) 推论(P 93): 设a是$f(z)$的孤立奇点, 则

a是$f(z)$的可去奇点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to a}f(z)=a_0$(存在有限).

证明: 充分性. 若 $\lim\limits_{z\to a}f(z)=a_0$(存在有限),

则$\exists\rho>0$, 使得在$0<|z-a|<\rho$ 内$f(z)$有界.

由定理1(P92), a是$f(z)$的可去奇点.

必要性. 定理1(P92)的证明中已经证过.#

极点的判别法

(一) 按定义：设a是$f(z)$的孤立奇点, $m\in\mathbb{Z}^+$, 则

a是$f(z)$的m级极点 $\Leftrightarrow$ $f(z)=\sum\limits_{n=-m}^{+\infty}a_n(z-a)^n$, $0<|z-a|<{}^{\exists}\rho$, $a_{-m}\neq 0$.

(二) 定理2(P93)之1)：设a是$f(z)$的孤立奇点, $m\in\mathbb{Z}^+$, 则

a是$f(z)$的m级极点的充要条件是

在$0<|z-a|<{}^{\exists}\rho$ 内, $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$, $\varphi(z)$在a解析, $\varphi(a)\neq 0$.

证明：必要性. 设a是$f(z)$的m级极点, 则$\exists m\in\mathbb{Z}^+$, $a_{-m}\neq 0$,

使得在$0<|z-a|<{}^{\exists}\rho$内,

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{a_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n,$$

$$=\frac{1}{(z-a)^m}\underbrace{\left\{a_{-m}+a_{-(m-1)}(z-a)+\cdots+a_{-1}(z-a)^{m-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^{n+m}\right\}}_{\triangleq\,\varphi(z)}.$$

$\varphi(z)$是在点a的幂级数, 在点a解析, $\boxed{\text{(P 78)定理5}}$ $\varphi(a)=a_{-m}\neq 0$.

证明：充分性. 设在$0<|z-a|<^{\exists}\rho$内，

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},\quad \varphi(z)\text{在}a\text{解析},\quad \varphi(a)\neq 0.$$

则由(P 78)定理1，$\exists 0<\rho_0<\rho$, 使得在$|z-a|<\rho_0$ 内，

$$\varphi(z)=b_0+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\cdots,$$ 故

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}=\frac{b_0}{(z-a)^m}+\frac{b_1}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{b_{m-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{+\infty}b_{m+n}(z-a)^n,$$

$b_0=\varphi(a)\neq 0$. 因此 a是$f(z)$的m级极点.#

(三) 定理2(P93)之2)：设a是$f(z)$的孤立奇点，$m\in\mathbb{Z}^+$，则

a是$f(z)$的m级极点 $\Leftrightarrow$ a是$\dfrac{1}{f(z)}$的m 级零点.

证明：必要性. 设a是$f(z)$的m 级极点，则由定理2(P93)之1)知，

在$0<|z-a|<{}^{\exists}\rho$ 内，$f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$，$\varphi(z)$在$a$解析，$\varphi(a)\neq 0$.

则$\exists 0<\rho_0<\rho$，使得在$|z-a|<\rho_0$ 内，$\varphi(z)$处处解析且$\varphi(z)\neq 0$ ，

故在$0<|z-a|<\rho_0$ 内，$\dfrac{1}{\varphi(z)}$解析，

$$g(z)\triangleq\frac{1}{f(z)}=(z-a)^m\cdot\frac{1}{\varphi(z)},\quad \frac{1}{\varphi(a)}\neq 0.$$

a是$g(z)$的可去奇点，若定义$g(a)=0$，则a是$g(z)$ 的解析点.

而且根据(P 82-83)定理3知，a 是$g(z)$ 的m 级零点.

(二) 定理2(P93)之1)：设a是$f(z)$的孤立奇点，$m\in\mathbb{Z}^+$，则

a是$f(z)$的m级极点的充要条件是

在$0<|z-a|<{}^{\exists}\rho$ 内，$f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$，$\varphi(z)$在$a$解析，$\varphi(a)\neq 0$.

(三) 定理2(P93)之2)：设a是$f(z)$的孤立奇点，$m\in\mathbb{Z}^+$，则

a是$f(z)$的m级极点 $\Leftrightarrow$ a是$\dfrac{1}{f(z)}$的m级零点.

证明：充分性. 若a是$g(z)\triangleq\dfrac{1}{f(z)}$的$m$级零点，

由(P 82-83)定理3得,则$\exists$充分小的$\rho>0$，使得在$|z-a|<\rho$ 内，

$$g(z)\triangleq\frac{1}{f(z)}=(z-a)^m\lambda(z),\ \lambda(z)\text{在}a\text{点解析},\ \lambda(a)\neq 0.$$

则$\exists 0<\rho_0<\rho$，使得在$|z-a|<\rho_0$ 内，$\lambda(z)$处处解析且$\lambda(z)\neq 0$.

故在$0<|z-a|<\rho_0$ 内，$f(z)=\dfrac{1}{(z-a)^m}\cdot\dfrac{1}{\lambda(z)}$，其中$\dfrac{1}{\lambda(z)}$解析，

$\dfrac{1}{\lambda(a)}\neq 0$，由定理2(P93)之1知 a是 $f(z)$的m 级极点. #

(四) 推论(P94)：设a是$f(z)$的孤立奇点，则

a是$f(z)$的极点 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$(即$\lim\limits_{z\to a}|f(z)|=+\infty$).

证明 由(三)得a是$f(z)$极点 $\Leftrightarrow$ a是$\dfrac{1}{f(z)}$零点$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$. #

本性奇点的判别方法

(一). 按定义：设a是$f(z)$的孤立奇点，则

a是$f(z)$的本性奇点$\Leftrightarrow$

$f(z)$在a点某去心邻域内的洛朗级数有无限多个非零负幂次项.

(二)定理3(P94) 设a是$f(z)$的孤立奇点，则

a是$f(z)$的本性奇点$\Leftrightarrow$不存在有限或无限的极限$\lim\limits_{z\to a} f(z)$.

证明 必要性. 若a是$f(z)$的本性奇点，则由定义知，

a不是$f(z)$的可去奇点，故$\lim\limits_{z\to a} f(z)$不等于有限的数.

a也不是$f(z)$的极点，故$\lim\limits_{z\to a} f(z)$也不等于$\infty$.

充分性. 若$\lim\limits_{z\to a} f(z)$既无有限也无无限的极限,

则由P93推论知, a不是$f(z)$的可去奇点,

另外由P94推论知, a也不是$f(z)$的极点.

因此根据本性奇点的定义知, a必是$f(z)$的本性奇点. #

(一). 按定义：设a是$f(z)$的孤立奇点，则

a是$f(z)$的本性奇点$\Leftrightarrow$

$f(z)$在a点某去心邻域内的洛朗展式有无限多个非零负幂次项.

(二)定理3(P 94) 设a是$f(z)$的孤立奇点，则

a是$f(z)$的本性奇点$\Leftrightarrow$不存在有限或无限的极限$\lim\limits_{z\to a} f(z)$.

例 $z=\underline{\ 1\ }$是$e^{\frac{1}{z-1}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!(z-1)^n}$的<u>本性奇点</u>，而$\lim\limits_{z\to 1} e^{\frac{1}{z-1}}$不存在.

因为$\left|e^{\frac{1}{z-1}}\right|=e^{\mathrm{Re}\frac{1}{z-1}}$，$\mathrm{Re}\frac{1}{z-1}=\mathrm{Re}\frac{1}{|z-1|e^{i\arg(z-1)}}=\mathrm{Re}\frac{e^{-i\arg(z-1)}}{|z-1|}=\frac{\cos\arg(z-1)}{|z-1|}$.

当$\mathrm{Re}\, z<1$且$z\to 1$时，$\mathrm{Re}\frac{1}{z-1}=\frac{\cos\arg(z-1)}{|z-1|}\to-\infty$，$e^{\frac{1}{z-1}}\to 0$.★

当$\mathrm{Re}\, z>1$且$z\to 1$时，$\mathrm{Re}\frac{1}{z-1}=\frac{\cos\arg(z-1)}{|z-1|}\to+\infty$，$e^{\frac{1}{z-1}}\to\infty$.

故$\lim\limits_{z\to 1} e^{\frac{1}{z-1}}$不存在.

例1 求函数 $f(z)=\dfrac{(z-5)\sin z}{(z-1)^2 z^2 (z+1)^{30}}$ 的奇点，并确定奇点的类型.

解 由分母 $(z-1)^2 z^2 (z+1)^{30}=0$, 解得 $z_1=1$，$z_2=0$，$z_3=-1$.

它们都是 $f(z)$ 的孤立奇点.

(1). 先分析 $z_1=1$. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2}\cdot\dfrac{(z-5)\sin z}{z^2(z+1)^{30}}\triangleq\dfrac{\varphi_1(z)}{(z-1)^2}$, $\varphi_1(z)$ 在 $z=1$ 解析,

且 $\varphi_1(1)=\dfrac{-4\sin 1}{2^{30}}\neq 0$. 由P93定理2知, $z=1$ 是 $f(z)$ 的 2 级极点.

(2). 同理，$z=-1$ 是 $f(z)$ 的 30 级极点.

(3). 关于 $z=0$: 因 $\sin 0=0$, 故 $z=0$ 不是 $f(z)$ 的 2 级极点. ★★★

$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1\neq 0$(记住)， $f(z)=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{(z-5)\dfrac{\sin z}{z}}{(z-1)^2(z+1)^{30}}\triangleq\dfrac{\varphi_2(z)}{z}$,

$\lim\limits_{z\to 0}\varphi_2(z)=\dfrac{(0-5)\cdot 1}{(0-1)^2(0+1)^{30}}=-5\neq 0\Rightarrow z=0$ 是 $\varphi_2(z)$ 的可去奇点.

定义 $\varphi_2(0)=-5$, 则 $\varphi_2(z)$ 在点 $z=0$ 解析. 故 $z=0$ 是 $f(z)$ 的1级极点.

例2 求函数 $f(z)=\cos\frac{1}{z+i}$ 的奇点，并确定奇点的类型.

解 $z=-i$ 是 $\cos\frac{1}{z+i}$ 的唯一奇点，故 $-i$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点.

当 $|z+i|>0$ 时，

$$\cos\frac{1}{z+i}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{1}{z+i}\right)^{2n},$$

有无穷多 $z+i$ 的负幂次项，

故 $z=-i$ 是 $\cos\frac{1}{z+i}$ 的本性奇点.

类似地可得，

1) $z=$ __0__ 是 $e^{\frac{1}{2z}}$ 的 __本性__ 奇点.

2) $z=$ __-5__ 是 $(z+5)^2\sin\frac{1}{z+5}$ 的 __本性__ 奇点.

例 求函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{e^z+i}$ 的奇点，并确定奇点的类型.

解 求奇点. 由 $e^z+i=0$, 解得 $e^z=-i$， 得

$$z_k=\big(\mathrm{Ln}(-i)\big)_k=\ln|-i|+i\{\arg(-i)+2k\pi\}=i\left(2k-\tfrac{1}{2}\right)\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

它们都是 $f(z)$ 的孤立奇点. 设 $g(z)=e^z+i$， 则 $g'(z)=e^z$.

对任意固定的 $k\in\mathbb{Z}$， $g(z_k)=0$， $g'(z_k)=e^{z_k}=-i\neq 0.$

由P 82－83定理3之2)， z_k 是 $g(z)$ 的1级零点. 再由P 82 - 83定理3之1),

$g(z)=(z-z_k)\varphi(z)$， $\varphi(z)$ 在点 z_k 解析, 且 $\varphi(z_k)\neq 0.$

$f(z)=\dfrac{z^2}{g(z)}=\dfrac{1}{z-z_k}\cdot\dfrac{z^2}{\varphi(z)}$， $\dfrac{z^2}{\varphi(z)}$ 在点 z_k 解析, 且 $\dfrac{z_k^2}{\varphi(z_k)}\neq 0.$

由P 93定理2， $\forall k\in\mathbb{Z}$， $z=z_k$ 是 $\dfrac{z^2}{e^z+i}$ 的1级极点.

类似地 $\dfrac{1}{\cos(z-a)}$, $\dfrac{1}{\sin(z-a)}$ 的各自所有奇点都是1级极点.

不是本性奇点

例 求函数 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3+1}$的奇点，并确定奇点的类型.

$$\boxed{\arg(-1)=\pi}$$

解 由分母$z^3+1=0$得，$z^3=-1$, 得

$$z=\sqrt[3]{-1}=\left(\sqrt[3]{|-1|}\right)\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\arg(-1)+2k\pi}{3}\right)=\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\pi+2k\pi}{3}\right),\quad k=0,1,2.$$

$$\text{故得}f(z)\text{的三个奇点}:\begin{cases} z_0=\exp\left(\mathrm{i}\,\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},, & k=0,\\ z_1=\exp(\mathrm{i}\,\pi)=-1, & k=1,\\ z_2=\exp\left(\mathrm{i}\,\dfrac{5\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},, & k=2,\end{cases}$$

z_0, z_1, z_2是$f(z)$仅有的三个孤立奇点.

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^3+1}=\frac{\sin z}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)}\triangleq\frac{\varphi_0(z)}{z-z_0},\quad \varphi_0(z)=\frac{\sin z}{(z-z_1)(z-z_2)},$$

故$\varphi_0(z)$在z_0解析，$\varphi_0(z_0)=\dfrac{\sin z_0}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)}\neq 0$. 由P93定理2,

故z_0 是$f(z)$的1级极点. 同理, z_1, z_2也是$f(z)$的1级极点.

例3 设a是$f(z)$的解析点(或极点)，a是$g(z)$的本性奇点，则a是$f(z)\pm g(z)$, $f(z)g(z)$, $\dfrac{1}{g(z)}$, $\dfrac{f(z)}{g(z)}$, $\dfrac{g(z)}{f(z)}$的本性奇点，

证明：用反证法 证明a不是$F_1(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$的本性奇点. 其他类似.

假设a不是$F_1(z)$的本性奇点，则 $\lim\limits_{z\to a} F_1(z)=B$(有限或$\infty$).

因a是$f(z)$的解析点(或极点)，记 $\lim\limits_{z\to a} f(z)=A$ (有限或∞).

考虑$g(z)=\dfrac{f(z)}{F_1(z)}$. 若$B\neq\infty$和0，则 $\lim\limits_{z\to a} g(z)=\dfrac{A}{B}$ 有限(或∞)；

若$B=0$, $A\neq 0$，则 $\lim\limits_{z\to a} g(z)=\infty$；若$B=\infty$, A有限，则 $\lim\limits_{z\to a} g(z)=0$；

若A, B同为0(或∞)，$F_1(z)=(z-a)^{\pm n}\varphi_1(z)$, $f(z)=(z-a)^{\pm m}\psi_1(z)$,

$\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$都在a 点解析，$\varphi_1(a)\neq 0$, $\psi_1(a)\neq 0$, 则a是$g(z)$的解析点($m\geq n$)，极点($m<n$)(或解析点($n\geq m$)，极点($n<m$))，均与a是$g(z)$的本性奇点矛盾. 因此a是$\dfrac{f(z)}{g(z)}$的本性奇点.#

例3 设a是$f(z)$的解析点(或极点)，a是$g(z)$的本性奇点，则a是$f(z)\pm g(z)$, $f(z)g(z)$, $\frac{1}{g(z)}$, $\frac{f(z)}{g(z)}$, $\frac{g(z)}{f(z)}$的本性奇点.

例. 因为$z=1$是$\cos\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}}$的本性奇点(根据定义)，故

$z=1$是 $(z-1)^2\cos\frac{1}{z-1}$, $\quad \frac{1}{z(z-1)^2}\cos\frac{1}{z-1}$, $\quad \frac{1}{z(z-1)^2}+\cos\frac{1}{z-1}$,

$\frac{1}{\cos\frac{1}{z-1}}$, $\quad \frac{\frac{1}{z-1}}{\cos\frac{1}{z-1}}$, $\quad \frac{z-1}{\cos\frac{1}{z-1}}$的<u>本性奇点</u>.

注意：$\frac{1}{\cos(z-1)}$所有奇点$z_k=$ <u>$1+n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}$</u> 都是<u>1级极点</u>.

例 求 $\dfrac{z^2\exp\left(\frac{1}{z+2}\right)}{z+i}$ 的奇点，并确定奇点的类型.

解 $F(z)=\dfrac{z^2\exp\left(\frac{1}{z+2}\right)}{z+i}$ 仅有两个孤立奇点 $z_1=-2, z_2=-i$.

1) $z=-2$ 是 $\exp\left(\dfrac{1}{z+2}\right)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!(z+2)^n}$ 的本性奇点，

$\dfrac{z^2}{z+i}$ 在 $z=-2$ 解析，故 $z=-2$ 是 $F(z)$ 的本性奇点.

2) $z=-i$. $F(z)=\dfrac{\varphi_1(z)}{z+i}$, $\varphi_1(z)=z^2\exp\left(\dfrac{1}{z+2}\right)$.

$\varphi_1(z)$ 在 $z=-i$ 解析, 且

$\varphi_1(-i)=-\exp\left(\dfrac{1}{-i+2}\right)=-\exp\left(\dfrac{2+i}{5}\right)=-e^{\frac{2}{5}}\left(\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)\neq 0$.

由P93定理2得, $z=-i$ 是 $F(z)$ 的1级极点.

解析函数的∞孤立奇点

$\forall R>0$,称圆外域$R<|z|<+\infty$为∞点的一个邻域.

定义：如果$f(z)$在某个∞邻域D：$R<|z|<+\infty$内解析，

则称∞是$f(z)$的孤立奇点.

例. ∞是e^z，$\sin z$，$\cos z$，z^2，$\frac{1}{1-z}$，$\frac{1}{(z-1)(z-2)}$，$\cos\frac{1}{1-z}$的孤立奇点.

∞不是$\frac{z^3}{\cos z}$的孤立奇点. 因为$\forall k\in\mathbb{Z}$，$z_k=k\pi+\frac{\pi}{2}$，

都是$\frac{z^3}{\cos z}$的奇点，

根据P 82-83定理3之2)，z_k是$\cos z$的1级零点，

故由P 93定理2得，z_k是$\frac{z^3}{\cos z}$的1级极点.

$\lim\limits_{k\to\infty}|z_k|=\left|k\pi+\frac{\pi}{2}\right|=+\infty$，故$\infty$不是$\frac{z^3}{\cos z}$的孤立奇点.

如果$f(z)$在∞点的某个邻域$R<|z|<+\infty$内解析，则称∞是$f(z)$的孤立奇点.

解析函数的∞孤立奇点的分类

设∞是$f(z)$的孤立奇点，作变换$z=\dfrac{1}{\zeta}$，则得$\varphi(\zeta)=f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$.

$$R<|z|<+\infty \xLeftrightarrow[\text{1对1}]{z=\frac{1}{\zeta},\ \zeta=\frac{1}{z}} 0<|\zeta|<\frac{1}{R}.$$

$f(z)$在$R<|z|<+\infty$内解析 $\Leftrightarrow$ $\varphi(\zeta)=f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$在$0<|\zeta|<\dfrac{1}{R}$内解析.

$\Downarrow$

∞是$f(z)$的孤立奇点 $\Leftrightarrow$ 0是$\varphi(\zeta)$的孤立奇点.

$\Downarrow$

定义：若0是$\varphi(\zeta)$的可去奇点，则称∞是$f(z)$的可去奇点；

若0是$\varphi(\zeta)$的m级极点，则称∞是$f(z)$的m级极点；

若0是$\varphi(\zeta)$的本性奇点，则称∞是$f(z)$的本性奇点.

$$f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{-n}}{z^n}+a_0+\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}a_n z^n}_{\text{主要部分}},\quad R<|z|<+\infty,$$

$$\zeta=\frac{1}{z}\Downarrow$$

$$\varphi(\zeta)=f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_{-n}\zeta^n+a_0+\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{\zeta^n}}_{\text{主要部分}},\quad 0<|\zeta|<\frac{1}{R},$$

(1) ∞是$f(z)$的可去奇点 $\Leftrightarrow$ $f(z)$在$R<|z|<+\infty$内洛朗级数不含z的正幂项;

例 ∞是$1+\frac{1}{z}$, $e^{\frac{1}{z}}$, $\cos\frac{1}{2z}$, $\sin\frac{1}{iz}$的可去奇点.

(1) ∞是$f(z)$的可去奇点 $\Leftrightarrow$ $f(z)$在$R<|z|<+\infty$内洛朗级数不含z的正幂项;

例 ∞是$1+\frac{1}{z}$, $e^{\frac{1}{z}}$, $\cos\frac{1}{2z}$, $\sin\frac{1}{iz}$的可去奇点.

(2) ∞是$f(z)$的m级极点 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \exists m>0, 在^{\exists}R<|z|<+\infty内, f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{m} a_m z^m,\ a_m \neq 0 \\ 即洛朗级数有且只有有限的z正幂项; \end{cases}$

例 ∞是$\frac{1}{z^3}+z+iz^6+\underline{z^8}$的__8级极点__.

(3) ∞是$f(z)$的本性奇点 $\Leftrightarrow$ $f(z)$在$R<|z|<+\infty$洛朗级数有无限多个z的正幂项.

例 因e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\frac{1}{e^z}=e^{-z}$ 在$R<|z|<+\infty$

洛朗级数都含无穷多项正幂项，故∞是它们的__本性奇点__.

∞是$f(z)$的可去奇点 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=a_0$(有限值).

∞是$f(z)$的极点 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$.

∞是$f(z)$的本性奇点 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$既无有限也无无限的极限.

(1) ∞是$f(z)$的可去奇点 $\Leftrightarrow$ $f(z)$在$R<|z|<+\infty$内洛朗展式不含z 的正幂项；

∞是$f(z)$的可去奇点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to\infty} f(z)=a_0$(有限值).

例. 设$f(z)$是全平面解析函数，$\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{f(z)}{z^{100}}=2$，求$\displaystyle\int_{|z|=100}\frac{f(z)}{z^{101}}\,dz$.

解 $f(z)$是全平面解析函数，故 在全平面可展开为幂级数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n,\ z\in\mathbb{Z},\qquad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

$\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{f(z)}{z^{100}}=2$，$\infty$是$\dfrac{f(z)}{z^{100}}$的可去奇点，故$\dfrac{f(z)}{z^{100}}=2+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{z^n}$.

即$f(z)=2z^{100}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}b_nz^{100-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$. 比较系数得

$a_{100}=2$， 当$n>100$时，$a_n=0$， $b_n=0$.

$$\therefore\int_{|z|=100}\frac{f(z)}{z^{101}}\,dz=\frac{2\pi i}{100!}f^{(100)}(0)=2\pi i\,a_{100}=4\pi i.$$

作业

P100-101

12

13(3)(6)(9)

14(3)(4)(7)

洛朗级数在求积分中的应用

$f(z)$在以0为中心的某个圆环域D 中解析，则

$f(z)$在D 内可展开为z 的洛朗级数 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$,

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta,\quad n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,$$

C为D内任一围绕中心a 的简单闭曲线.

当$n=-1$时：$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)d\zeta$.

$\oint_C f(\zeta)d\zeta=2\pi i a_{-1}$,

a_{-1}是$f(z)$在含C的以0为中心的解析圆环域中的洛朗展式中$\frac{1}{z}$的系数.

例 求积分 $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z e^{\frac{1}{z}}}{1-z} \mathrm{d}z$ $\left(\begin{array}{l}\text{因为} z e^{\frac{1}{z}} \text{在} |z|=2 \text{内部不解析,}\\ \text{故无法直接用柯西积分公式.}\end{array}\right)$

解 $f(z)=\frac{z e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ 有两个奇点 $z=0$ 和 $z=1$.

$f(z)$ 在 D_1：$0<|z|<1$ 内解析, $f(z)$ 在 D_2：$|z|>1$ 内解析.

$|z|=2$ 在 D_2：$|z|>1$ 内.

由P84定理, $f(z)$ 在 D_2：$|z|>1$ 内可展开为 z 的洛朗级数：

$$\frac{z e^{\frac{1}{z}}}{1-z}=\cancel{z}\, e^{\frac{1}{z}} \cdot\left(-\frac{1}{\cancel{z}}\right) \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2! z^{2}}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^{2}}+\cdots\right)$$

$$=-1-(1+1) \frac{1}{z}+\cdots=-1-\frac{2}{z}+\cdots . \quad \text{故 } a_{-1}=-2.$$

因此 $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z e^{\frac{1}{z}}}{1-z} \mathrm{d}z=2 \pi \mathrm{i} a_{-1}=-4 \pi \mathrm{i}.$