第六次作业解答.

第四章. 2. 解 (5): $f(x)=\operatorname{tg} z$. $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 z}$ $f''(x)=\frac{2\sin z}{\cos^3 z}$. $f'''(x)=\frac{6\sin^2 z+2\cos^2 z}{\cos^4 z}$

$\therefore f(0)=0.\quad f'(0)=1\quad f''(0)=0\quad f'''(0)=2.$

$\therefore \operatorname{tg} z=0+z+0+2\cdot\frac{z^3}{3!}+\cdots=z+\frac{1}{3}z^3+\cdots$

由于最近的奇点为 $z=\pm\frac{\pi}{2}$. $\therefore R=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \operatorname{tg} z=z+\frac{1}{3}z^3+\cdots\quad |z|<\frac{\pi}{2}.$

(7) $\int_0^z e^{z^2}dz=\int_0^z\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{n!}dz=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\int_0^z z^{2n}dz=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!}$

$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=+\infty.$

3. 解; (2) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{2}{z+2}-\frac{1}{z+1}$

$=\frac{2}{z-2+4}-\frac{1}{z-2+3}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2}{3}}$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{z-2}{3}\right)^n$

$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right](z-2)^n.$

$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{3^{n+2}}}=3$

(4). $\frac{1}{4-3z}=\frac{1}{4-3(z-1-i)-3-3i}$

$=\frac{1}{1-3i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1-i}{\left(\frac{1-3i}{3}\right)}}$

$=\frac{1}{1-3i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-(1+i))^n}{\left(\frac{1-3i}{3}\right)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{(1-3i)^{n+1}}\cdot(z-(1+i))^n$

$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^n}{(1-3i)^{n+1}}}{\frac{3^{n+1}}{(1-3i)^{n+2}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\sqrt{1+9}=\frac{\sqrt{10}}{3}$

6. 解：证明：(2) $\dfrac{a\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} \xlongequal{z=e^{i\theta}} \dfrac{a\cdot\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})}{1-a\cdot(z+\frac{1}{z})+a^2}$

$= \dfrac{1}{2i}\cdot\dfrac{az-\frac{a}{z}}{(1-az)(1-\frac{a}{z})}$

$= \dfrac{1}{2i}\left[\dfrac{az-1+1-\frac{a}{z}}{(1-az)(1-\frac{a}{z})}\right]$

$= \dfrac{1}{2i}\left[\dfrac{-1}{1-\frac{a}{z}}+\dfrac{1}{1-az}\right] = \dfrac{1}{2i}\left[-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(az)^n\right]$

$= \dfrac{1}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty}a^n\cdot\left[-\left(\frac{1}{z}\right)^n+(z)^n\right] = \dfrac{1}{2i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}a^n\cdot 2i\cdot\sin n\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}a^n\sin n\theta$

(3) $\ln(1-2a\cos\theta+a^2) \xlongequal{z=e^{i\theta}} \ln\left[(1-az)(1-a\cdot\frac{1}{z})\right]$

$= \ln(1-az)+\ln(1-\frac{a}{z})$.

$= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n}(az)^n-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{z}\right)^n$

$= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{n}\left[z^n+\frac{1}{z^n}\right] = -2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{n}\cos n\theta$

7. 解：证明：由于 $|e^z-1| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\right| \le \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}-1$

$\therefore |e^z-1| \le e^{|z|}-1$ 得证. (☆)

又$\because$ $e^{|z|}-1 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|z|^n}{n!} = |z|\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|z|^{n-1}}{n!}$

$= |z|\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{|z|^{n-1}}{(n-1)!}$

$\le |z|\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|z|^{n-1}}{(n-1)!}$

$= |z|\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|z|^n}{n!}$

$= |z|\cdot e^{|z|}$

$\therefore e^{|z|}-1 \le |z|\cdot e^{|z|}$ 得证. (☆☆)

综上：$|e^z-1| \le e^{|z|}-1 \le |z|e^{|z|}$

9. 解: (1) 由题: $f(z) = (z-z_0)^m \cdot f_m(z) \quad g(z) = (z-z_0)^n \cdot g_n(z)$ No.

$\therefore f(z)g(z) = (z-z_0)^{m+n} f_m(z) g_n(z)$

由于 $f_m(z_0) \neq 0.\ g_n(z_0) \neq 0 \Rightarrow f_m(z_0) \cdot g_n(z_0) \neq 0$

$\therefore$ z_0 是 $f(z)g(z)$ 的 $(m+n)$ 级零点.

10. 解: (1) $\frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \sum_{n=-2}^{+\infty} z^n$

(2) $z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^{-n}$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^{-n+2} = \sum_{n=-\infty}^{2} \frac{z^n}{(2-n)!}$

11. 解: $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$

(1) $0 \leq |z| < |a|$ 时: $f(z) = \left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}\right) \cdot \frac{1}{b-a}$

$= \left[\frac{1}{1-\frac{z}{b}}\left(-\frac{1}{b}\right) - \frac{1}{1-\frac{z}{a}} \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)\right] \frac{1}{b-a}$

$= \left[-\frac{1}{b} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{b}\right)^n + \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n\right] \frac{1}{b-a}$

$= \frac{1}{b-a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right) \cdot z^n$

(2) $|a| < |z| < |b|$: $f(z) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$

$= \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{z}} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{1-\frac{z}{b}} \cdot \left(-\frac{1}{b}\right)\right)$

$= \frac{1}{a-b}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n \cdot \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{b}\right)^n \cdot \frac{1}{b}\right]$

$= \frac{1}{a-b}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}}\right]$

$= \frac{1}{a-b}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}}\right]$

13) $|b|<|z|<+\infty$; $f(z)=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)$

$$=\frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{1-\frac{a}{z}}\cdot\frac{1}{z}-\frac{1}{1-\frac{b}{z}}\cdot\frac{1}{z}\right]$$

$$=\frac{1}{a-b}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b^n}{z^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{a-b}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{z^n}$$

14) $0<|z-a|<|b-a|$ 时; $f(z)=\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{z-a-(b-a)}$

$$=\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{b-a}}\cdot\frac{1}{a-b}$$

$$=\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{a-b}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^{n-1}}{(b-a)^{n+1}}$$

$$=-\sum_{n=-1}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+2}}$$

15) $|b-a|<|z-a|<+\infty$ 时: $f(z)=\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{z-a-(b-a)}$

$$=\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{b-a}{z-a}}\cdot\frac{1}{z-a}$$

$$=\frac{1}{(z-a)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{b-a}{z-a}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(b-a)^n}{(z-a)^{n+2}}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-2}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+2}}$$

16) $0<|z-b|<|a-b|$: $f(z)=\frac{1}{z-b}\cdot\frac{1}{z-b-(a-b)}$

$$=\frac{1}{z-b}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-b}{a-b}}\cdot\frac{1}{b-a}$$

$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-b)^{n-1}}{(a-b)^{n+1}}=-\sum_{n=-1}^{+\infty}\frac{(z-b)^n}{(a-b)^{n+2}}$$

(7) $|a-b|<|z-b|<+\infty$ 时：$f(z)=\frac{1}{z-b}\cdot\frac{1}{z-b-(a-b)}$ Date. No.

$$=\frac{1}{z-b}\cdot\frac{1}{1-\frac{a-b}{z-b}}\cdot\frac{1}{z-b}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(a-b)^n}{(z-b)^{n+2}}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-2}\frac{(z-b)^n}{(a-b)^{n+2}}$$

12. 解：(1) 不妨设 $a=a_1$，则有：

① 若 a_1 为可去奇点，则 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n\cdot(z-a_1)^n$．$|z-a_1|<r$．

② 若 a_1 为 m 级极点，则 $f(z)=\sum_{n=-m}^{+\infty}C_n(z-a_1)^n$．$C_{-m}\neq0$．$0<|z-a_1|<r$．

③ 若 a_1 为本性奇点．则 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z-a)^n$．$C_{-n}$ 有无穷个 $\neq0$ $(n>0)$．$0<|z-a_1|<r$

以上的 $r=\min\{|a_1-a_2|,|a_1-a_3|\}$

(2) 此时：$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$．$R=\min\{|a-a_1|,|a-a_2|,|a-a_3|\}$．

13. 解：(2) $\cos z=0$ 时：$z=(n+\frac{1}{2})\pi$．$(n=0,\pm1,\cdots)$

由于 $(\cos z)'=-\sin z\xlongequal{z=(n+\frac{1}{2})\pi}(-1)^{n+1}\neq0$

∴ $z=(n+\frac{1}{2})\pi$ 均为 $\cos z$ 的一级零点．

∴ $z=(n+\frac{1}{2})\pi$ 为 $\frac{1}{\cos z}$ 的一级极点．

(6) $f(z)=\frac{ze^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$．　$z-1=0\Rightarrow z=1$

$e^z-1=0\Rightarrow z=i\cdot2k\pi$ $(k=0,\pm1,\cdots)$

由于 $\lim_{z\to1}f(z)=\begin{cases}\lim_{z\to1^+}f(z)=\infty\\ \lim_{z\to1^-}f(z)=0\end{cases}\Rightarrow\lim_{z\to1}f(z)$ 不存在

∴ $z=1$ 为本性奇点．

又∵ $f(z)=\frac{ze^{\frac{1}{z-1}}}{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}-1}=\frac{ze^{\frac{1}{z-1}}}{z+\frac{z^2}{2!}+\cdots}=\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{1+\frac{z}{2!}+\cdots}$ ∴ $z=0$ 为可去奇点

又∵ $\left(\frac{e^z-1}{z\cdot e^{\frac{1}{z-1}}}\right)' = \frac{e^z\cdot(z\cdot e^{\frac{1}{z-1}}) - (e^z-1)\cdot(e^{\frac{1}{z-1}} + z\cdot\frac{-1}{(z-1)^2}e^{\frac{1}{z-1}})}{(z\cdot e^{\frac{1}{z-1}})^2}$

代入 $2k\pi i\ (k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 时上式不为0

∴ $2k\pi i\ (k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为 $f(z)$ 的一级极点.

(9) $\frac{1-\cos z}{z^n} = \frac{\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\cdot\frac{z^{2k}}{(2k)!}}{z^n} = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}\cdot z^{2k-n}$.

∴若 $n>2$，则0为 $n-2$ 级极点、

若 $n\le2$，则0为可去奇点.