复变函数B

Function of Complex Variable B

主讲老师 宁吴庆

教室—3C101

上课时间 星期二第 6、7 节，星期四第1、2节

教师介绍

- 1995-2000 复旦大学数学学院
- 2000-2008 东京大学大学院数理科学研究科
- 2008-至今 中国科学技术大学数学学院

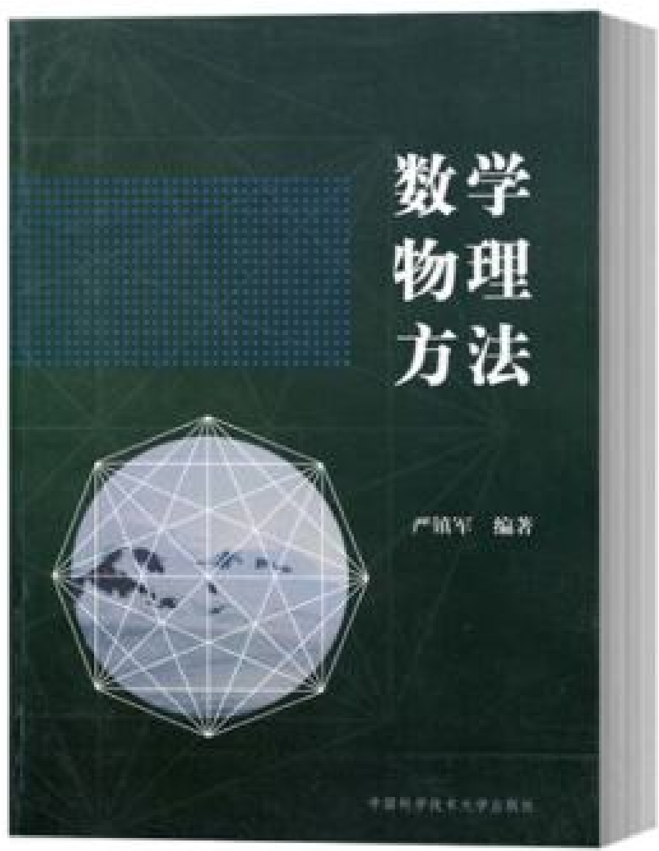
- 研究领域：微分方程，主要方向是反问题（从已知结果来确定未知原因）

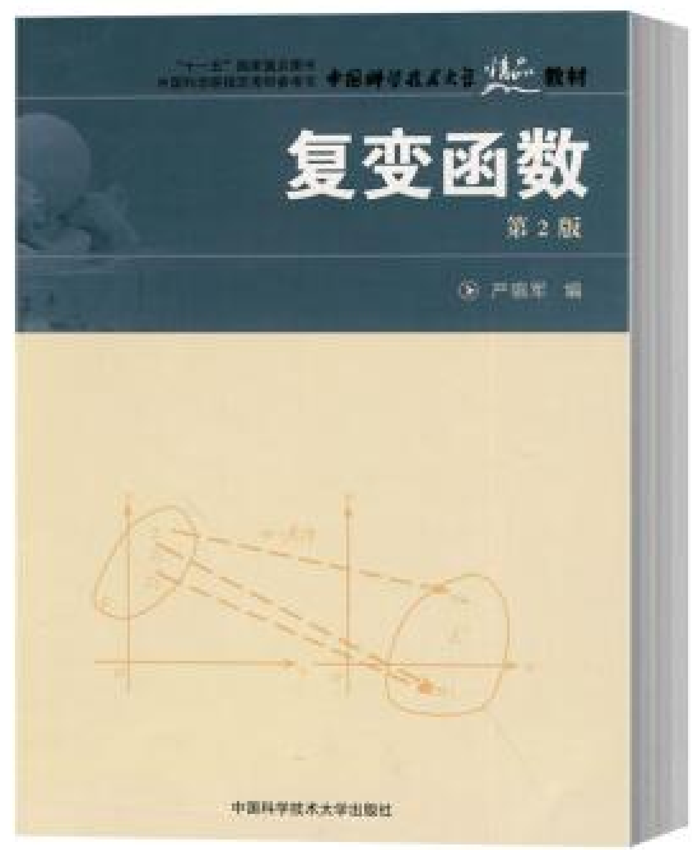
联系方式

主讲教师	助教	助教
办公室：东区管理科研楼1429	李迎 信院2020级电子信息工程专业	张学涵 少院2021级计算机科学与技术专业
电话：15156892839	电话：18226656957	电话：15850321722
邮件：wqning@ustc.edu.cn	邮件：liyingwater@mail.ustc.edu.cn	邮件：fjtcin@mail.ustc.edu.cn

复变函数B学习QQ群(921808361)

教材





参考教材：方企勤，《复变函数教程》，北京大学出版社

为什么需要学习复变函数?

1. 在学习过程中会复习到《数学分析》和《线性代数》的知识巩固所学，增长数学修养

- 可应用于计算一些复杂的广义积分

如 $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax\,\mathrm{d}x}{x^2+b^2}$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x+x^2+1}{(x^2+2)^2}\mathrm{d}x$, $\int_0^{\pi}\frac{\cos 2x}{3-2\cos x}\mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x$, ...

2. 会涉及到后续课程(如《数理方程》)的一些内容，为后继学习做好准备

3. 在科学研究和各行各业中有广泛的实际应用，如

- 空气动力学
- 流体力学
- 电磁场理论
- 热学
- 地球物理学
- ……

复变函数B的主要学习内容

1 复数和平面点集

2 复变数函数及其解析性质

3 解析函数的积分表示和调和函数

4 解析函数的级数表示

5 留数及应用

6 Laplace变换

重点和难点

重点：

1 Cauchy积分理论及其应用

2 级数理论，包括Taylor展开和Laurent展开及应用

3 Laplace变换

难点：

1 解析函数的积分表示和应用

2 级数展开的熟练掌握以及留数定理

3 Laplace变换的应用

第一章 复数和平面点集

1.1 复数

- 复数的定义

虚单位 $\mathbf{i}=\sqrt{-1}$ ， $\mathbf{i}^2=-1.$ ★★★

$\boxed{x^2+1=0\text{有两个解：}x_1=\mathrm{i},\ x_2=-\mathrm{i}.}$ ★★

- 任意由有序实数对(x,y)确定的数 $z=x+\mathrm{i}\,y$, 称为复数, $x,y\in\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$: 实数域.

x: 实部
记作： $x=\mathrm{Re}\,z$

y: 虚部
记作： $y=\mathrm{Im}\,z$

- 当 $x=\mathrm{Re}\,z=0$, $y=\mathrm{Im}\,z\neq 0$ 时， $z=\mathrm{i}\,y$ 称为纯虚数;
- 当 $y=\mathrm{Im}\,z=0$ 时， $z=x=\mathrm{Re}\,z$ 是实数.

今后记$z = x + \mathrm{i}\, y,\ z_1 = x_1 + \mathrm{i}\, y_1,\ z_2 = x_2 + \mathrm{i}\, y_2$，

$x, y, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$.

- 复数相等：

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} x_1 = x_2, & \text{实部与实部相等} \\ y_1 = y_2, & \text{虚部与虚部相等} \end{cases} \quad \text{同时成立}$$

- 共轭：$z = x + \mathrm{i}\, y$ 与 $\overline{z} = x - \mathrm{i}\, y$ 相互共轭.

共轭复数：实部相同，虚部绝对值相等符号相反.

复数的四则运算

$z_1 = x_1 + \mathrm{i}\, y_1,\ z_2 = x_2 + \mathrm{i}\, y_2,\quad \left(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2 \in \mathbb{R}\right).$

- 和：$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2),$

  差：$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2).$

- 积：$\boxed{z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_2 y_1 + x_1 y_2)}$ 建议记住

推导：$z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}\, y_1)(x_2 + \mathrm{i}\, y_2)$

$= x_1 x_2 + \mathrm{i}\, x_1 y_2 + \mathrm{i}\, y_1 x_2 + \mathrm{i}^2\, y_1 y_2$ 利用$\mathbf{i}^2 = -1$

$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2).$ #

★★★
★★

注意：一般情形下(如$y_1 y_2 \neq 0$ 时)，$z_1 z_2 \neq x_1 x_2 + \mathrm{i}\, y_1 y_2.$

- 积：$\boxed{z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2)}$

特别地，$z\bar{z}=(x+\mathrm{i}\,y)(x-\mathrm{i}\,y)=x^2-\mathrm{i}^2\,y^2=x^2+y^2.$

$\boxed{\mathrm{i}^2=-1}$

记：$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$，称为z的**模**，

$$\boxed{z\bar{z}=|z|^2=x^2+y^2.}$$ ★★★★★

由$|x|\le\sqrt{x^2+y^2}$，$|y|\le\sqrt{x^2+y^2}$知

$$\boxed{|\mathrm{Re}\,z|\le|z|,\quad|\mathrm{Im}\,z|\le|z|}$$ ★★★★★

背熟

$\boxed{i^2=-1}$ 设$z_1=x_1+\mathrm{i}\,y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}\,y_2$，$(x_1, y_1, x_2, y_2\in\mathbb{R})$.

积：$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2)$

- 商：分子分母同时乘以分母的共轭. 记住

$$z_2\neq 0\text{时，}\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{(x_1+\mathrm{i}\,y_1)(x_2-\mathrm{i}\,y_2)}{|z_2|^2}$$

★★★★★

$$=\frac{\{x_1x_2-y_1(-y_2)\}+\mathrm{i}\{x_2y_1+x_1(-y_2)\}}{|x_2+\mathrm{i}\,y_2|^2}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.\quad \#$$

例 设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i,$ 求 $\dfrac{z_1}{z_2}$.

解 $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}$$

$\boxed{\text{利用 } i^2 = -1}$

$$= \frac{(-15-20)+i(-20+15)}{(-3)^2+4^2} = \frac{-35-5i}{25}$$

$$= -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i.$$

复数的运算性质P4 熟背

(1)交换律：$z_1+z_2=z_2+z_1$， $z_1z_2=z_2z_1$;

(2)结合律：$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$,

$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$;

(3)乘法分配律：$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

- 实数可以比较大小，但是复数不能比较大小.

- $z_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$或$z_2 = 0.$ ★★★★★

证明：1) $\Leftarrow$ 不妨设$z_1 = 0$，则$z_1 z_2 = (0 + \mathrm{i}\,0)(x_2 + \mathrm{i}\,y_2) = 0.$

2). $\Rightarrow$. 若$z_1 z_2 = 0$, 且$z_2 \neq 0$，由1)知 $z_1 z_2 \cdot z_2^{-1} = 0 \cdot z_2^{-1} = 0.$

又，$z_1 z_2 \cdot z_2^{-1} = z_1 \left(z_2 \cdot z_2^{-1} \right) = z_1 \cdot 1 = z_1.$

故 $z_1 z_2 \cdot z_2^{-1} = z_1 = 0.$

同理，若$z_1 z_2 = 0$，$z_1 \neq 0$，则 $z_1 z_2 \cdot z_1^{-1} = z_2 = 0.$ #

1.1.2 共轭复数

$\boxed{z = x + \mathrm{i}\,y \text{ 与 } \bar{z} = x - \mathrm{i}\,y \text{ 相互共轭.}}$

运算性质P4-5: 熟背

1) $\bar{\bar{z}} = z$; $\boxed{z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}}$;

2) $z + \bar{z} = 2x = 2\operatorname{Re} z$, $z - \bar{z} = 2y\mathrm{i} = 2\mathrm{i}\operatorname{Im} z$,

$$\boxed{x = \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}};}$$

3) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$;

4) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

5) $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$, $|z| = |\bar{z}|$;

5) $z\overline{z}=|z|^2=x^2+y^2=(\operatorname{Re}z)^2+(\operatorname{Im}z)^2$,

6)(例2的1)) $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$， 特别, $\forall a\in\mathbb{R}$, $|az|=|a|\cdot|z|$;

证明: $|z_1z_2|^2=z_1z_2\cdot\overline{z_1z_2}=\left(z_1\overline{z_1}\right)\left(z_2\overline{z_2}\right)=|z_1|^2\,|z_2|^2$.

两边开方得结论. #

7) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$;

8)(例2的2)) $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)$;

熟背

7)和8)的证明思路与6)类似.

例1. 设 $z = x + \mathrm{i}\, y,\ y \neq 0,\ z \neq \pm \mathrm{i}.$

证明：当且仅当 $x^2 + y^2 = 1$ 时，$\dfrac{z}{1+z^2} \in \mathbb{R}.$

证：$z \neq \pm \mathrm{i} \Rightarrow 1 + z^2 \neq 0.$

$$\frac{z}{1+z^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar z}{1+\bar z^2} \Leftrightarrow z\left(1+\bar z^2\right) = \left(1+z^2\right)\bar z$$

★★

$$\Leftrightarrow z + z\bar z^2 - \bar z - z^2 \bar z = 0 \quad \text{(左端因式分解)}$$

★★

$$\Leftrightarrow \left(z - \bar z\right)\left(1 - z\bar z\right) = 0 \Leftrightarrow (2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, z)\left(1 - |z|^2\right) = 0.$$

因 $\mathrm{Im}\, z = y \neq 0,$

故当且仅当 $1 - |z|^2 = 0$ 即 $x^2 + y^2 = 1$ 时，$\dfrac{z}{1+z^2} \in \mathbb{R}.$ #

例3. 实系数的多项式的根共轭存在.

证明：设 $P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$,

$a_j\in\mathbb{R},\ j=1,2,\cdots n.$

设z_0是$P(z)$的一个根，则$P(z_0)=0,$

下面只需证明$P(\overline{z_0})=0.$

因$a_j\in\mathbb{R}$，故$a_j=\overline{a_j}$，$j=1,2,\cdots n.$

故$P(\overline{z_0})=\overline{z_0}^{\,n}+a_1\overline{z_0}^{\,n-1}+a_2\overline{z_0}^{\,n-2}+\cdots+a_{n-1}\overline{z_0}+a_n$

$=\overline{z_0}^{\,n}+\overline{a_1}\,\overline{z_0}^{\,n-1}+\overline{a_2}\,\overline{z_0}^{\,n-2}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\,\overline{z_0}+\overline{a_n}$

$=\overline{z_0^n+a_1z_0^{n-1}+a_2z_0^{n-2}+\cdots+a_{n-1}z_0+a_n}=\overline{P(z_0)}=0.$ #

1.1.3 关于复数模的不等式

1)设$z = x + \mathrm{i}\, y$，$x, y \in \mathbb{R}$，则

$|x| \le |z|$，$|y| \le |z|$，$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \le |x| + |y|$；(两边平方, 即可证明)

2) $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

证明：$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2})$ 见例2中2)

$\le |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \overline{z_2}| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = \left(|z_1| + |z_2|\right)^2$.

故$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$，$|z_1 - z_2| \le |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$.

$|z_1| = |(z_1 \pm z_2) \mp z_2| \le |z_1 \pm z_2| + |z_2|$，故$|z_1| - |z_2| \le |z_1 \pm z_2|$.

同理$|z_2| - |z_1| \le |z_1 \pm z_2|$. 因此 $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 \pm z_2|$.

2) $\big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1|+|z_2|.$

3) $|z_1+z_2+\cdots+z_n| \le |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|.$

4) $|z_1|-|z_2|-\cdots-|z_n| \le |z_1+z_2+\cdots+z_n|.$

证明：$|z_1| = \left|(z_1+z_2+\cdots+z_n)-z_2-\cdots-z_n\right|$

$\le |z_1+z_2+\cdots+z_n|+|z_2|+\cdots+|z_n|.$ #

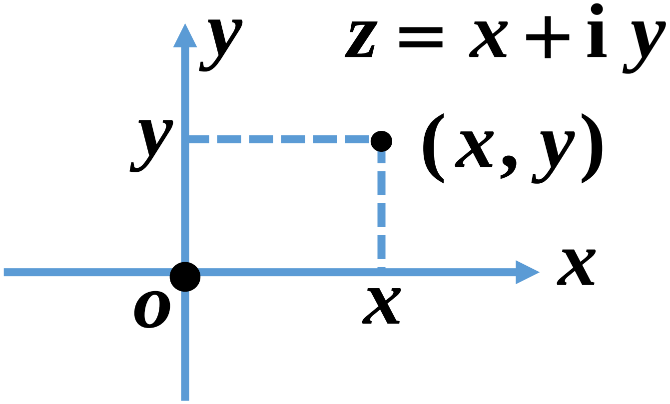
1.1.4 复数的几何表示

复数$z=x+\mathrm{i}\,y\,(x,y\in\mathbb{R})$与有序实数对$(x,y)$一一对应。

任一复数$z=x+\mathrm{i}\,y\;(x,y\in\mathbb{R})$，可用

平面上在直角坐标系Oxy下坐标为(x,y)的点与之对应，

对应是一对一的.



$\boxed{\text{用来表示复数的平面叫复平面，}}$

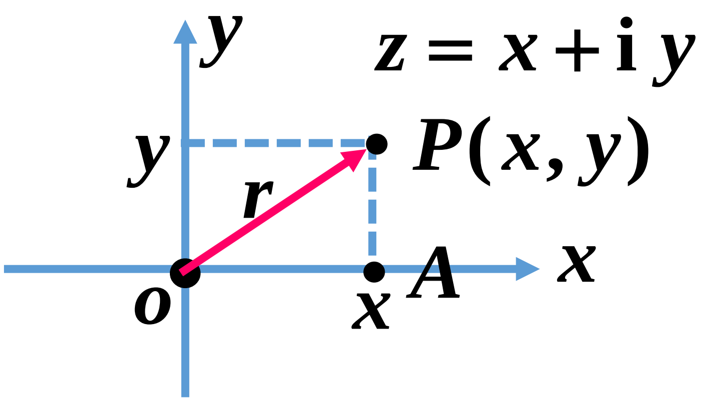
称横轴叫实轴或x轴，纵轴叫虚轴或y轴.

复数的向量表示

复数 $z = x + \mathrm{i}\,y\,(x, y \in \mathbb{R})$可用复平面($xy$平面)上的向量$\overrightarrow{OP}$表示，

向量$\overrightarrow{OP}$: 由原点指向点(x, y) 的向量. ★★★

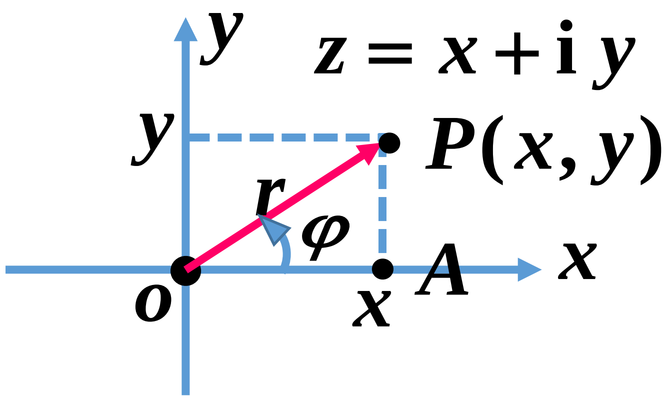
$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$



复数辐角的定义

当$z \neq 0$时，$z = x + \mathrm{i}\,y$在直角坐标下对应的点(x, y)，也可用极坐标(r, φ)表示.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|, \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}.$$



φ是正向x轴到向量$\overrightarrow{OP}$的夹角.

称 φ 是 $z = x + \mathrm{i}\,y$ 的辐角，

记作$\varphi = \mathrm{Arg}\,z$.

- 任一复数 z 的辐角无穷多.

若用$\arg z$表示辐角$\mathrm{Arg}\,z$的某个特定值，则

$$\mathrm{Arg}\,z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

注意： 当$z = 0$时，辐角无意义.

辐角主值

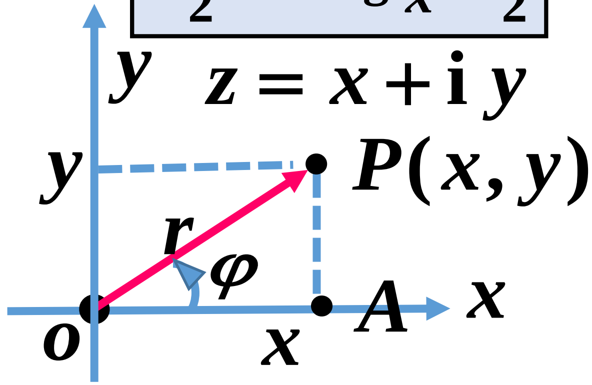
当$z\neq 0$时，把满足$-\pi<\varphi\leq\pi$ 的辐角值φ,称为z的辐角主值, 也记作$\arg z$.

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

当$z\neq 0$时，辐角主值$\arg z$ 由z 唯一确定.

$z=x+\mathrm{i}\,y\neq 0$的辐角主值

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}$$

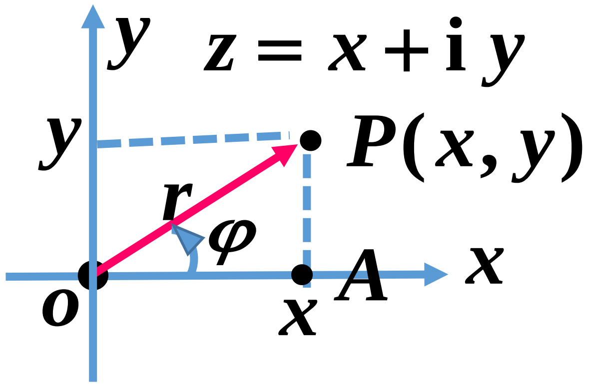


$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x>0, \quad \text{(一、四象限)}\\[2ex] \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x<0, y>0, \quad \text{(二象限)}\\[2ex] -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x<0, y<0, \quad \text{(三象限)}\\[2ex] \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y>0, \quad \text{(上半虚轴)}\\[2ex] \pi, & x<0,\ y=0, \quad \text{(负实轴)}\\[2ex] -\dfrac{\pi}{2}, & x=0, y<0. \quad \text{(下半虚轴)}\end{cases}$$

★★★★★

复数的三角表示法

$$r=|z|,\ \varphi=\operatorname{Arg} z,$$



利用直角坐标与极坐标的关系

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi, \end{cases}$$

得 $z=x+\mathrm{i}\,y=\underbrace{r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)}_{\text{复数的三角表示法}},\quad r>0.$

$$z = x + \mathrm{i}\, y = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),\quad r > 0.$$

复数的指数表示法

定义复指数：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, ★★★★★

P 9 称为Euler公式 背熟

则 $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\ r > 0.$

复数的指数表示法

★★★★★

$$z=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\ r>0.$$

例　将下列复数化为三角表示式与指数表示式:

(1) $z=-3-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$;　　(2) $z=\sin\alpha+\mathrm{i}\cos\alpha$;

解　(1) $r=|z|=\sqrt{3^2+3}=2\sqrt{3}$。因 z 在第三象限，故

$$\arg z=-\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{-3}\right)=-\pi+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{5}{6}\pi.$$

故 $z=2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]$ (三角式)

$=2\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}}.$　　(指数式)

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \quad r \geq 0.$$

(2) $z = \sin\alpha + \mathrm{i}\cos\alpha$ (不是三角式)

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \text{ (三角式)}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}. \quad \text{(指数式)}$$

注: $z = \cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha$ (不是三角式)

$$= \cos(-\alpha) + \mathrm{i}\sin(-\alpha) \text{ (三角式)}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}. \quad \text{(指数式)}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}.}$ ★★★★★

- 设$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $r_1 > 0$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, $r_1 > 0$, 则

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2, \text{且} \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

★★★★★

作业

P19-20

1(2),(3)

2(3),(4)

3(3)

7(提示：利用$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+\cdots+\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta}=\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta+\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$,

左边利用等比数列求和公式)

8(利用公式$|z|^2=z\bar{z}$)

9

10(利用公式$|z|^2=z\bar{z}$, (2)需灵活应用因式分解)

6)(例2的1)) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$，特别是, $\forall a \in \mathbb{R}$, $|az| = |a| \cdot |z|$;

证明 $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = (z_1 \overline{z}_1)(z_2 \overline{z}_2) = |z_1|^2 \, |z_2|^2$.

两边开方得结论. #

7) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$;

证明 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|^2 = \dfrac{z_1}{z_2} \cdot \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{z_1}{z_2} \cdot \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = \dfrac{|z_1|^2}{|z_2|^2}$. 两边开方得结论. #

8)(例2的2)) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z}_2)$;

证明 $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2)$

$= z_1 \overline{z}_1 + z_1 \overline{z}_2 + z_2 \overline{z}_1 + z_2 \overline{z}_2 = |z_1|^2 + \left(z_1 \overline{z}_2 + \overline{\overline{z}_2 z_1}\right) + |z_2|^2$

$= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z}_2) + |z_2|^2$. #

熟背

$$z=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$

注：$z=\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha$，　(不是三角式)

$=\cos(-\alpha)+\mathrm{i}\sin(-\alpha)$　(三角式)

$=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$。　(指数式)

$\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$。

此外，$z=-\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha=\cos(\pi+\alpha)+\mathrm{i}\sin(\pi+\alpha)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+\alpha)}$；

$z=-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha=\cos(\pi-\alpha)+\mathrm{i}\sin(\pi-\alpha)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\alpha)}$；

$z=\sin\alpha-\mathrm{i}\cos\alpha=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$；

……