第七章 拉普拉斯变换(简称拉氏变换）

积分变换，广泛应用在物理、力学、工程技术中。

先看傅里叶(Fourier)变换:

Fourier变换的定义与起源：

对$\forall f(\cdot)\in L^1(\mathbb{R}^n)$,定义

$$F[f(x)](\xi)=\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx,\ \xi\in\mathbb{R}^n\ (n=1\text{时常用}\lambda)$$ “Fourier变换”

$$F^{-1}[f(\xi)](x)=\check{f}(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi,\ x\in\mathbb{R}^n$$ “Fourier逆变换”

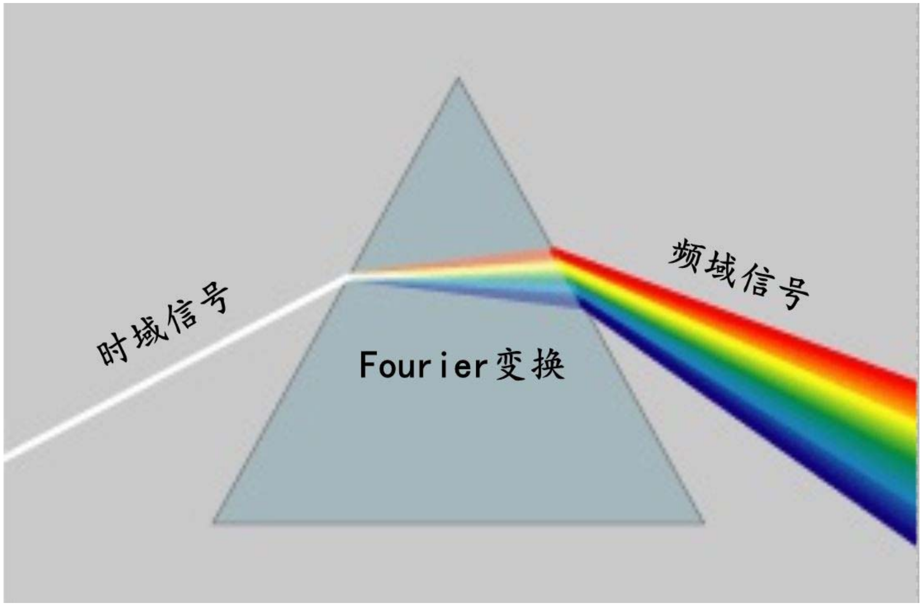
应用：Fourier变换在图像处理、信号处理、量子力学、声学、光学、结构动力学、数论、概率论、统计学、密码学、海洋学、通讯、金融等领域都有着广泛应用，也是小波变换的基础

Fourier变换的真正目的是简化运算！

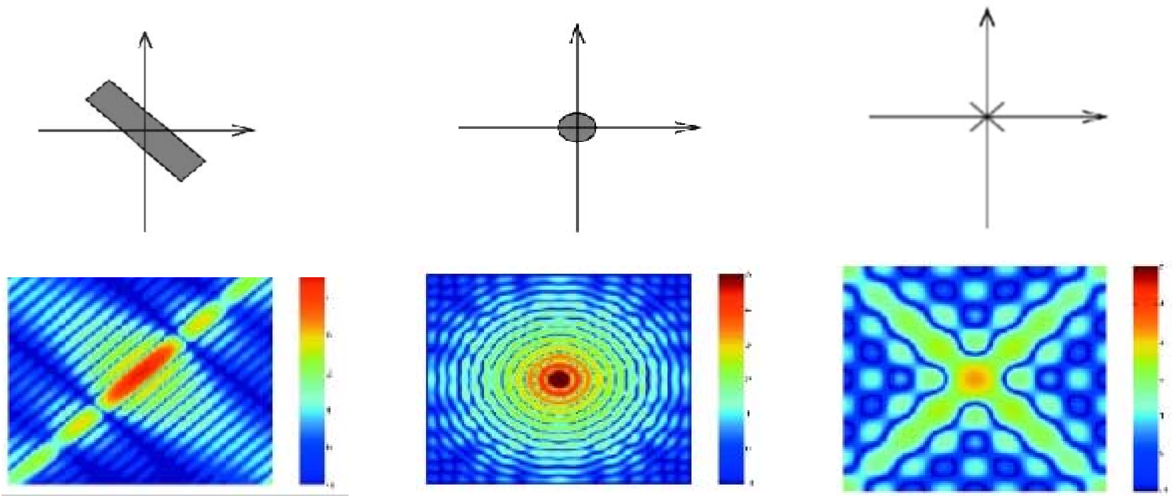
起源：1807年Fourier在向法国科学院提交一篇关于热传导问题的论文中声称任一函数都能够展成三角函数的无穷级数。这篇论文经 Lagrange，Laplace，Legendre等著名数学家审查，但由于Lagrange的强烈反对，该论文未被通过，直到1822年才发表在《热的分析理论》一书中。

Fourier变换的意义：

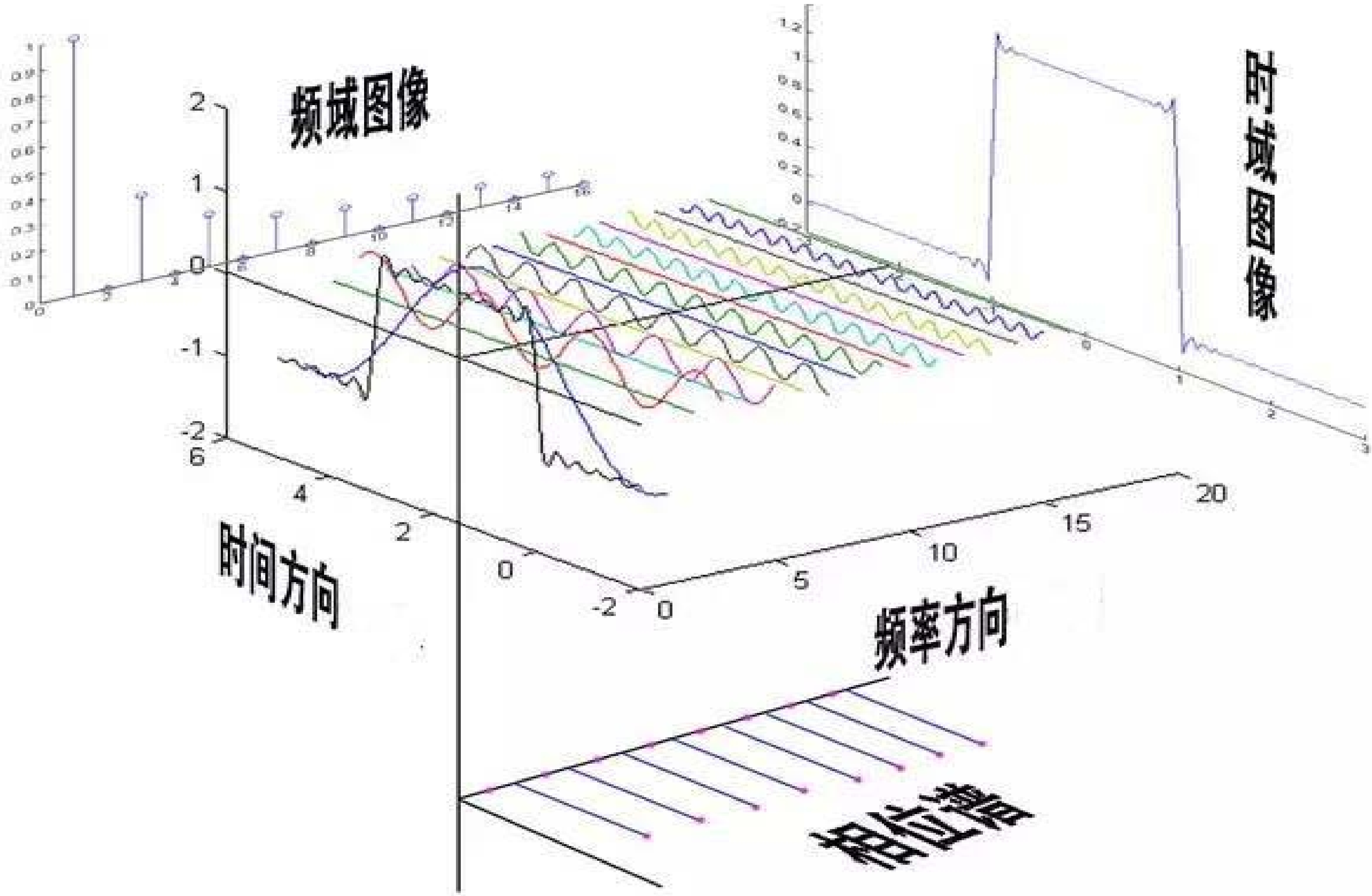
Fourier变换好比一个玻璃棱镜，可以将光分成不同颜色的物理仪器，每个成分的颜色由波长决定。Fourier变换也可看做是“数学中的棱镜”，将函数基于频率分成不同的成分



一些图像的二维Fourier变换：



时域与频域：



傅里叶变换：若$f(x)$在实轴任意有界区间逐段光滑，$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x<+\infty$，

(绝对可积)

则有 傅里叶变换：$G(s)=\mathrm{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xs}\,\mathrm{d}x.$

(Fourier 变换)

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xs}=\cos xs-\mathrm{i}\sin xs$

Fourier 逆变换：$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xs}\,\mathrm{d}s.$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}xs}=\cos xs+\mathrm{i}\sin xs$

当自变量是时间t时，$f(t)$常常只有在$t\geq 0$时才有定义.

为了对$f(t)$作傅氏变换，规定$f(t)=\begin{cases} f(t), & t\geq 0, \\ \underline{0}, & \underline{t<0}. \end{cases}$ ★

记$h(t)=\begin{cases} 1, & t\geq 0, \\ \underline{0}, & \underline{t<0}, \end{cases}$ ★则本章 $f(t)=f(t)h(t).$ ★

称为单位函数.

$F(s)=\int_{\underline{0}}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ts}\,\mathrm{d}t$，变换要求$f(t)$在$[0,+\infty)$绝对可积，

但指数函数、三角函数、幂函数、常值函数等很多不绝对可积.

为了满足在正实轴绝对可积, 考虑含参量积分

$$\int_0^{+\infty} f(t)\underline{e^{-\sigma t}e^{-its}}\,dt \xlongequal{p\triangleq\sigma+is} \int_0^{+\infty} f(t)\underline{e^{-pt}}\,dt.$$

$s\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$, $e^{-\sigma t}$是衰减因子.

定义(P160) 设$f(t)$是实变量t 的实值或复值函数, $f(t)=f(t)h(t)$,

若$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$ 在 $p=\sigma+is$ 的某区域内收敛,

则称$\underline{F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt}$ $\begin{cases}\text{为}f(t)\text{ 的拉普拉斯变换(简称拉氏变换)},\\ \text{也称为}f(t)\text{ 的拉氏变换像函数}.\end{cases}$

简记 $L[f(t)]\equiv\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$, $F(p)=L[f(t)]$.

注: $F(p)=L[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-its}\,dt=F\left[f(t)h(t)e^{-\sigma t}\right]$.

若$f(x)$在实轴任意有界区间逐段光滑, $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx<+\infty$, 有

傅里叶变换: $G(s)=F[f(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixs}\,dx$.

$$h(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ \underline{0}, & \underline{t<0},\end{cases}$$ ★

则本章 $f(t)=f(t)h(t)$. ★

$F(s)=\int_{\underline{0}}^{+\infty} f(t)e^{-its}\,dt$, 要求$f(t)$在$[0,+\infty)$绝对可积.

$$F(p)=\mathrm{L}[f(t)]\triangleq\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-its}\,dt=\mathrm{F}\left[f(t)h(t)e^{-\sigma t}\right].$$

$f(t)$的拉普拉斯变换$F(p)$，是$f(t)h(t)e^{-\sigma t}$的傅里叶变换，$p=\sigma+is$.

$\sigma>0$，$e^{-\sigma t}$是衰减因子.

变换要求 $f(t)e^{-\sigma t}$在$[0,+\infty)$绝对可积，比条件"$f(t)$在$[0,+\infty)$绝对可积"弱.

故拉普拉斯变换比傅里叶变换能适用于更多的函数.

傅氏变换有逆变换，故拉氏变换也有逆变换.

$$f(t)h(t)e^{-\sigma t}=\mathrm{F}^{-1}[F(p)]\overset{p=\sigma+is}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\sigma+is)e^{its}\,ds,$$

$$f(t)=f(t)h(t)=\frac{1}{2\pi}e^{\sigma t}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\sigma+is)e^{its}\,ds=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\sigma+is)e^{(\sigma+is)t}\,ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{pt}\,dp.$$

令$p=\sigma+is$，$ds=\frac{1}{i}dp$

称$f(t)$为$F(p)$的拉氏逆变换或本函数，记为 $f(t)=\mathrm{L}^{-1}[F(p)]$.

定义(P160) 设$f(t)$是实变量t 的实值或复值函数，$f(t)=f(t)h(t)$，

若$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$ 在 $p=\sigma+is$ 的某区域内收敛，

则称$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$ $\begin{cases}\text{为}f(t)\text{ 的拉普拉斯变换(简称拉氏变换)},\\ \text{也称为}f(t)\text{ 的拉氏变换像函数}.\end{cases}$

7.1 拉氏变换的定义

$p=\sigma+\mathrm{i}\,s,\quad F(p)=L[f(t)]\triangleq\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}\,t,$ $\boxed{f(t)\text{的拉普拉斯变换}}$ (P160)

$$f(t)=f(t)h(t)=L^{-1}[F(p)]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}F(p)\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}\,p.$$

问：什么样的函数$f(t)$存在拉氏变换$F(p)=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}\,t$?

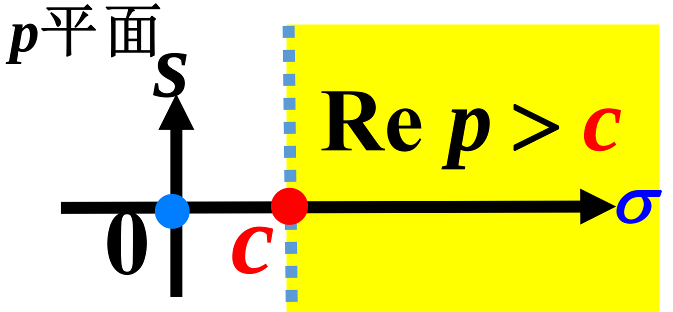
定理1(P162) (1)设$f(t)$在t 轴任意有限区间逐段光滑,

即在t 轴任意有限区间, $f(t)$ 和$f'(t)$ 除有限个第一类简断点外, 处处连续.

(2)设 $f(t)$是指数增长型函数, 即存在常数$K>0$, $c\geq 0$, 使得

$$|f(t)|\leq K\mathrm{e}^{ct},\quad \forall t\in[0,+\infty),\qquad (c:\text{增长指数})$$

则像函数$F(p)=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}\,t$ 在 p 平面的半平面 $\mathrm{Re}\,p>c$



内有意义, 且解析.

定理1 (1)设$f(t)$在t轴任意有限区间逐段光滑,

(2)设$f(t)$:指数增长型, 即$\exists K>0$, $c\ge 0$, 使得$|f(t)|\le K\mathrm{e}^{ct}$, $\forall t\ge 0$,

则像函数$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ 在区域$\mathrm{Re}\,p>c$ 内有意义且解析.

证明 ❶设$p=\sigma+\mathrm{i}s$, $\sigma>c$, 则由条件(2)得, $t\ge 0$时,

$$\left|f(t)\mathrm{e}^{-pt}\right|=|f(t)|\left|\mathrm{e}^{-\sigma t-\mathrm{i}st}\right|\overset{(2)}{\le} K\mathrm{e}^{ct}\cdot\mathrm{e}^{-\sigma t}=K\mathrm{e}^{-(\sigma-c)t}.$$

因$\sigma>c$, 故 $K\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\sigma-c)t}\,\mathrm{d}t=K\cdot\left.\dfrac{\mathrm{e}^{-(\sigma-c)t}}{-(\sigma-c)}\right|_{t=0}^{t=+\infty}=\dfrac{K}{\sigma-c}<+\infty.$

故 $F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ 在$\mathrm{Re}\,p>c$ 内绝对收敛, $|F(p)|\le\dfrac{K}{\sigma-c}<+\infty.$

❷ 下证 $F(p)$在$\mathrm{Re}\,p>c$ 内解析. 首先$\forall\sigma_1>c$, 在$\sigma=\mathrm{Re}\,p\ge\sigma_1$上,

$$\left|f(t)\mathrm{e}^{-pt}\right|=|f(t)|\mathrm{e}^{-\sigma t}\le K\mathrm{e}^{ct}\cdot\mathrm{e}^{-\sigma_1 t}=K\mathrm{e}^{-(\sigma_1-c)t}\ (\text{与}p\text{无关}),$$

$\int_0^{+\infty}K\mathrm{e}^{-(\sigma_1-c)t}\,\mathrm{d}t=\dfrac{K}{\sigma_1-c}<+\infty$. 故 $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$在$\mathrm{Re}\,p\ge\sigma_1$上一致收敛,

$f(t)\mathrm{e}^{-pt}$关于p解析. 故能推出$F(p)$在$\mathrm{Re}\,p>\sigma_1$ 内解析.

由σ_1任意性得$F(p)$在$\mathrm{Re}\,p>c$内解析.#

例 求$L\left[e^{at}\right]$，其中a为任意实常数或复常数.

解 $\left|e^{at}\right|=e^{(\mathrm{Re}\,a)t}$. 在$\mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\,a$内，$L\left[e^{at}\right]$有意义，解析，

$$L\left[e^{at}\right]=\int_0^{+\infty}e^{at}\cdot e^{-pt}\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-(p-a)t}\,dt=\frac{1}{p-a},$$

故$L\left[e^{at}\right]=L\left[e^{at}h(t)\right]\overset{\bigstar}{=}\frac{1}{p-a}$. $\Rightarrow$ $L^{-1}\left[\frac{1}{p-a}\right]\overset{\bigstar}{=}e^{at}h(t)$.

P162 – 163

注：$L\left[e^{at}\right]$可唯一解析开拓为全p平面除$p=a$外解析的函数$\frac{1}{p-a}$.

特别是$a=0$时，$e^{at}=e^{0}=1$，故

$L[1]=L[h(t)]\overset{\bigstar}{=}\frac{1}{p}$. $\Rightarrow$ $L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]\overset{\bigstar}{=}h(t)$. P163

$$\boxed{F(p)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}\,dt.}$$

$$\boxed{h(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}}$$

7.2 拉氏变换的基本运算法则

7.2.1 线性性质

由拉氏变换定义 $L[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t,$ 得

$$\underline{\underline{L[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha L[f(t)]+\beta L[g(t)]}},$$ ★

其中α,β是任意复数，$f(t),g(t)$是任意的可作拉氏变换的函数.

由上式得

$$L^{-1}\left[\alpha \underbrace{L[f(t)]}_{\triangleq F(p)}+\beta \underbrace{L[g(t)]}_{\triangleq G(p)}\right]=\alpha \underbrace{f(t)}_{=L^{-1}[F(p)]}+\beta \underbrace{g(t)}_{=L^{-1}[G(p)]}.$$

$$L^{-1}[\alpha F(p)+\beta G(p)]=\alpha L^{-1}[F(p)]+\beta L^{-1}[G(p)].$$ ★

故拉氏变换和拉氏逆变换都是线性的.

例 $L[\cos\omega t]=L\left[\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\right]=\frac{1}{2}\left(L\left[e^{i\omega t}\right]+L\left[e^{-i\omega t}\right]\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(p+i\omega)+(p-i\omega)}{(p-i\omega)(p+i\omega)}=\frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

同理 $L[\sin\omega t]=L\left[\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\right]=\frac{1}{2i}\left(L\left[e^{i\omega t}\right]-L\left[e^{-i\omega t}\right]\right)$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

$$L[\cos\omega t]\stackrel{\star}{=}\frac{p}{p^2+\omega^2}.\qquad L[\sin\omega t]\stackrel{\star}{=}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

$$L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+\omega^2}\right]\stackrel{\star}{=}h(t)\cos\omega t,\qquad L^{-1}\left[\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right]\stackrel{\star}{=}h(t)\sin\omega t.$$

$$L\left[e^{at}\right]=\frac{1}{p-a}.\ \star\qquad L^{-1}\left[\frac{1}{p-a}\right]\stackrel{\star}{=}e^{at}h(t).\qquad L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]\stackrel{\star}{=}h(t).$$

$$L[1]=L[h(t)]=\frac{1}{p}.\ \star$$

类似地，

$$L[\mathrm{ch}\,\omega t]=L\left[\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\right]=\frac{1}{2}\left(L\left[e^{\omega t}\right]+L\left[e^{-\omega t}\right]\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}+\frac{1}{p+\omega}\right)=\frac{p}{p^2-\omega^2}.$$

$$L[\mathrm{sh}\,\omega t]=L\left[\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\right]=\frac{1}{2}\left(L\left[e^{\omega t}\right]-L\left[e^{-\omega t}\right]\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}-\frac{1}{p+\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}.$$

$$L[\mathrm{ch}\,\omega t]=\frac{p}{p^2-\omega^2},\qquad L[\mathrm{sh}\,\omega t]=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}.\ \bigstar$$

$$L^{-1}\left[\frac{p}{p^2-\omega^2}\right]=h(t)\,\mathrm{ch}\,\omega t,\qquad L^{-1}\left[\frac{\omega}{p^2-\omega^2}\right]=h(t)\,\mathrm{sh}\,\omega t.\ \bigstar$$

$$L[\cos\omega t]\bigstar=\frac{p}{p^2+\omega^2}.\qquad L[\sin\omega t]\bigstar=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

$$\boxed{L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+\omega^2}\right]\bigstar=h(t)\cos\omega t,}\qquad \boxed{L^{-1}\left[\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right]\bigstar=h(t)\sin\omega t,}$$

例 求 $I=L[\sin^2 t]$.

$$\boxed{L[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha L[f(t)]+\beta L[g(t)].}$$

解 $I=L\left[\frac{1-\cos 2t}{2}\right]=\frac{1}{2}L[1]-\frac{1}{2}L[\cos 2t]$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+2^2}=\frac{2}{p(p^2+4)}.$$

$$\boxed{L[1]=L[h(t)]=\frac{1}{p}.}$$

$$\boxed{L[\cos\omega t]=\frac{p}{p^2+\omega^2}.}$$

例 求 $J=L^{-1}\left[\frac{p^3+5p+4}{(p^2+1)(p^2+5)}\right]$.

解 (1)分解为简单有理真分式之和. ★★

设 $\frac{p^3+5p+4}{(p^2+1)(p^2+5)}=\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{Cp+D}{p^2+5}=\frac{(Ap+B)(p^2+5)+(p^2+1)(Cp+D)}{(p^2+1)(p^2+5)}$.

故 $p^3+5p+4=(Ap+B)(p^2+5)+(p^2+1)(Cp+D)$.

比较系数得 $A+C=1$, $B+D=0$, $5A+C=5$, $5B+D=4$.

$\Rightarrow A=1,\ C=0,$
$B=1,\ D=-1.$

$$\frac{p^3+5p+4}{(p^2+1)(p^2+5)}=\frac{p+1}{p^2+1}-\frac{1}{p^2+5}.$$

例 求 $J=L^{-1}\left[\dfrac{p^3+5p+4}{(p^2+1)(p^2+5)}\right]$.

解 (1)分解为简单有理真分式之和. ★★

$$\frac{p^3+5p+4}{(p^2+1)(p^2+5)}=\frac{p+1}{p^2+1}-\frac{1}{p^2+5}=\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{p^2+5}.$$

(2) $J=L^{-1}\left[\dfrac{p}{p^2+1}\right]+L^{-1}\left[\dfrac{1}{p^2+1}\right]-L^{-1}\left[\dfrac{1}{p^2+5}\right]$

$$=h(t)\left\{\cos t+\sin t-\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{(\sqrt{5})}\cdot\frac{(\sqrt{5})}{p^2+(\sqrt{5})^2}\right]\right\}$$

$$=h(t)\left(\cos t+\sin t-\frac{1}{(\sqrt{5})}\sin(\sqrt{5})t\right).$$

$L^{-1}\left[\dfrac{p}{p^2+\omega^2}\right]=h(t)\cos\omega t$, $L^{-1}\left[\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\right]=h(t)\sin\omega t$,

$L^{-1}\left[\alpha F(p)+\beta G(p)\right]=\alpha L^{-1}\left[F(p)\right]+\beta L^{-1}\left[G(p)\right]$.

7.2.2 相似定理

设$L[f(t)]=F(p)$，则对任意正实常数$\alpha>0$，

$$L[f(\alpha t)]=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right),\ \mathrm{Re}\,p>\alpha c,\ c\text{是}f(t)\text{的增长指数.}$$

证：$L[f(\alpha t)]=\int_0^{+\infty}f(\alpha t)e^{-pt}\,dt$ (定义) $\left(\text{令}\xi=\alpha t,\ t=\frac{\xi}{\alpha}\right)$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}f(\xi)e^{-\frac{p}{\alpha}\xi}\,d\xi$$

$\left(\begin{array}{c}\alpha>0,\text{故}t\in(0,+\infty)\text{时},\\ \xi=\alpha t\in(0,+\infty).\end{array}\right)$

$$=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).\ (\text{由定义})\#$$

$$\beta>0,\ L\left[f\left(\frac{t}{\beta}\right)\right]=\beta F(\beta p),\ \mathrm{Re}\,p>\frac{c}{\beta},\ c\text{是}f(t)\text{的增长指数.}$$

$$\left(\alpha=\frac{1}{\beta}\right)$$

7.2.3 位移定理

设$F(p)=\mathrm{L}[f(t)]$，则$\mathrm{L}\left[\mathrm{e}^{\lambda t} f(t)\right]=F(p-\lambda)$. ★★

证明 由定义，$\mathrm{L}\left[\mathrm{e}^{\lambda t} f(t)\right]=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(p-\lambda)t}\,\mathrm{d}t=F(p-\lambda).\#$$

$$\mathrm{L}[\cos\omega t]=\frac{p}{p^2+\omega^2} \Rightarrow \mathrm{L}\left[\mathrm{e}^{\lambda t}\cos\omega t\right]=\frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}.$$

$$\mathrm{L}[\sin\omega t]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \Rightarrow \mathrm{L}\left[\mathrm{e}^{\lambda t}\sin\omega t\right]=\frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}.$$

P186习题1(7)(9)(11)(12)(13)等可用位移定理。

位移定理：设$F(p)=\mathrm{L}[f(t)]$，则$\mathrm{L}\left[e^{\lambda t} f(t)\right]=F(p-\lambda)$.

例 求$L\left[e^{at}\sin(\omega t+\varphi)\right]$.

解 $L\left[\sin(\omega t+\varphi)\right]=L\left[\cos\varphi\sin\omega t+\sin\varphi\cos\omega t\right]$

$=\cos\varphi L\left[\sin\omega t\right]+\sin\varphi L\left[\cos\omega t\right]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cos\varphi+\frac{p}{p^2+\omega^2}\sin\varphi.$

故 $L\left[e^{at}\sin(\omega t+\varphi)\right]=\frac{\omega\cos\varphi}{(p-a)^2+\omega^2}+\frac{(\sin\varphi)(p-a)}{(p-a)^2+\omega^2}.$

P187习题5 设$F(p)=\mathrm{L}[f(t)]$，证明$\mathrm{L}[f(t)\sin\omega t]=\frac{1}{2i}[F(p-i\omega)-F(p+i\omega)]$.

证明 $\mathrm{L}[f(t)\sin\omega t]=\mathrm{L}\left[f(t)\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\right]$

$=\frac{1}{2i}\left\{\mathrm{L}\left[f(t)e^{i\omega t}\right]-\mathrm{L}\left[f(t)e^{-i\omega t}\right]\right\}$

$=\frac{1}{2i}\left\{F(p-i\omega)-F(p+i\omega)\right\}$.#

位移定理：设$F(p)=\mathrm{L}[f(t)]$，则$\mathrm{L}\left[e^{\lambda t}f(t)\right]=F(p-\lambda)$.

$$\Rightarrow \mathrm{L}^{-1}[F(p-\lambda)]=e^{\lambda t}\mathrm{L}^{-1}[F(p)].$$ ★★

例 $$L^{-1}\left[\frac{2p+1}{p^2+4p+8}\right]=L^{-1}\left[\frac{2(p+2)-4+1}{(p+2)^2+4}\right]$$ ★★

$$=e^{-2t}L^{-1}\left[\frac{2p-3}{p^2+4}\right]$$

$$=e^{-2t}\left\{2L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+2^2}\right]-\frac{3}{2}L^{-1}\left[\frac{2}{p^2+2^2}\right]\right\}$$

$$=e^{-2t}\left(2\cos 2t-\frac{3}{2}\sin 2t\right).$$

P188习题6(3)(14)(16)类似.

7.2.4 像函数的微分法：

若$f(t)$满足定理1 中的条件(1)和(2), 设$F(p)=L[f(t)]$, 则在$\mathrm{Re}\,p>c$内，

$$F'(p)=L[-t f(t)]. \quad (*)$$

证明：由条件得 $F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ 在$\mathrm{Re}\,p>c$内可微, 且

$$F'(p)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left\{f(t)\mathrm{e}^{-pt}\right\}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\left\{-t f(t)\mathrm{e}^{-pt}\right\}\mathrm{d}t=L[-t f(t)].\#$$

一般地，$F^{(n)}(p)=L\left[(-t)^n f(t)\right]$.

$$(*)\Rightarrow L[t f(t)]=-F'(p)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}L[f(t)],$$

$$L\left[t^2 f(t)\right]=(-1)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}L[f(t)],\cdots,$$

$$L\left[t^n f(t)\right]=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}L[f(t)].$$

$$\boxed{L\left[t^n f(t)\right]=(-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}L[f(t)],\quad \forall n\in\mathbb{N}.}$$

例 $L[t\sin\omega t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}L[\sin\omega t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)=\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}.$

例 $L\left[t^2\cos^2 t\right]=(-1)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}L\left[\cos^2 t\right]=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}L\left[\frac{1+\cos 2t}{2}\right]$

$$=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\left(\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2+2^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(-\frac{1}{p^2}+\frac{4-p^2}{(p^2+4)^2}\right)=\frac{1}{p^3}+\frac{p^3-12p}{(p^2+4)^3}.$$

$$\boxed{L\left[t^n f(t)\right]=(-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}L[f(t)]}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{L^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}F(p)\right]=(-1)^n t^n L^{-1}[F(p)].}$$

$$\boxed{L\left[t^n f(t)\right]=(-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n} L[f(t)]} \Rightarrow \boxed{L^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}F(p)\right]=(-1)^n t^n L^{-1}[F(p)].}$$

例1. 求 $I=L^{-1}\left[\dfrac{2(p+1)}{(p^2+2p+4)^2}\right]$. ★★

解 $$I=L^{-1}\left[\frac{2(p+1)}{\{(p+1)^2+3\}^2}\right]=\mathrm{e}^{-t}L^{-1}\left[\frac{2p}{(p^2+3)^2}\right].$$

$$\left(\frac{1}{p^2+3}\right)'=-\frac{(p^2+3)'}{(p^2+3)^2}=-\frac{2p}{(p^2+3)^2}.$$

故 $$L^{-1}\left[\frac{2p}{(p^2+3)^2}\right]=-L^{-1}\left[\left(\frac{1}{p^2+3}\right)'\right]=-(-1)tL^{-1}\left[\frac{1}{p^2+3}\right]$$

$$=\frac{t}{(\sqrt{3})}L^{-1}\left[\frac{(\sqrt{3})}{p^2+(\sqrt{3})^2}\right]=\frac{t}{(\sqrt{3})}h(t)\sin\left(\sqrt{3}\right)t.$$

故 $$I=\frac{t}{(\sqrt{3})}h(t)\mathrm{e}^{-t}\sin\left(\sqrt{3}\right)t.$$

$$L\left[t^n f(t)\right]=(-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,p^n} L\left[f(t)\right]$$

特别是，$f(t)\equiv 1$时，$L[t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,p}L[1]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,p}\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p^2}$，

$$L\left[t^2\right]=(-1)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,p^2}L\left[1\right]=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,p^2}\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{(-1)(-2)}{p^3}=\frac{2!}{p^3},$$

$$L\left[t^3\right]=(-1)^3\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\,p^3}\left(\frac{1}{p}\right)=(-1)^3\frac{(-1)(-2)(-3)}{p^4}=\frac{3!}{p^4},$$

……

$$L\left[t^n\right]\overset{\bigstar}{=}\frac{n!}{p^{n+1}}.$$

(P165)

$$\Rightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{p^{n+1}}\right]=\frac{t^n}{n!},\quad L^{-1}\left[\frac{1}{p^m}\right]\overset{\bigstar}{=}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}.$$

例 $$L^{-1}\left[\frac{1}{(p-2)^4}\right]=\mathrm{e}^{2t}L^{-1}\left[\frac{1}{p^4}\right]=\mathrm{e}^{2t}\cdot\frac{t^3}{3\,!}=\frac{\mathrm{e}^{2t}t^3}{6}.$$

$$L^{-1}\left[F(p-\lambda)\right]=\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{L}^{-1}\left[F(p)\right].$$

$$\mathrm{L}\left[\mathrm{e}^{\lambda t}t^n\right]=\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}},\quad n\in\mathbb{N}.$$

7.2.5 本函数微分公式 (c是$f(t)$的增长指数)

设$f(t)$, $f'(t)$满足定理1中条件(1)和(2) ,则当$\operatorname{Re} p > c$ 时,

$$L[f'(t)] = pL[f(t)] - f(+0), \quad f(+0) = \lim_{t\to 0^+} f(t).$$ ★★★

证: $$\underline{L[f'(t)]} = \int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}f(t)$$

$$\stackrel{\text{分部积分}}{=} \underline{\mathrm{e}^{-pt} f(t)\Big|_0^{+\infty} - (-p)\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t}.$$

由定理1条件(2)得, $\left|\mathrm{e}^{-pt} f(t)\right| \le K\mathrm{e}^{-(\operatorname{Re} p - c)t}$.

当$\operatorname{Re} p > c$ 时, $\lim\limits_{t\to+\infty} K\mathrm{e}^{-(\operatorname{Re} p - c)t} = 0$, $\underline{\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t) = 0}$.

$\underline{\lim\limits_{t\to 0^+} \mathrm{e}^{-pt} f(t) = f(+0)}$. 故

$$L[f'(t)] = 0 - f(+0) + pL[f(t)] = pL[f(t)] - f(+0). \#$$

设$f(t)$, $f'(t)$满足定理1中条件(1)和(2)，则当$\operatorname{Re} p > c$ 时，

$$L[f'(t)] = pL[f(t)] - f(+0), \quad f(+0) = \lim_{t\to 0^+} f(t). \ (\Delta)$$

推论. 若$f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$满足定理1中条件(1)和(2), 则当$\operatorname{Re} p > c$ 时，由(Δ),

$$\mathrm{L}[f''(t)] = p\underline{\mathrm{L}[f'(t)]} - f'(+0) \quad = p\{\underline{p\mathrm{L}[f(t)] - f(+0)}\} - f'(+0)$$

$$= p^2\mathrm{L}[f(t)] - pf(+0) - f'(+0),$$

故$\mathrm{L}[f''(t)] = p^2\mathrm{L}[f(t)] - pf(+0) - f'(+0)$, $f'(+0) = \lim\limits_{t\to 0^+} f'(t)$.#

依次类推，用归纳法可证明： ★★★★★

推论. 若$f(t)$, $f'(t)$,$\cdots$, $f^{(n)}(t)$满足定理1中条件(1)和(2), 则当$\operatorname{Re} p > c$ 时，

$$\mathrm{L}[f^{(n)}(t)] = p^n\mathrm{L}[f(t)] - p^{n-1}f(+0) - p^{n-2}f'(+0)$$

$$- p^{n-3}f''(+0) - \cdots - pf^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0).$$

例2(P167) 求解初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}+2y=e^{-t}, \\ y|_{t=0}=0. \end{cases}$ ★★ ★

$\boxed{L[e^{at}]=\frac{1}{p-a}.}$

解 (1)设$L[y(t)]=Y(p)$，对方程两边作拉氏变换得，

$$L\left[\frac{dy}{dt}(t)+2y(t)\right]=L[e^{-t}].\ \text{右边}=L[e^{-t}]=\frac{1}{p+1}.$$

$$\text{左边}=L\left[\frac{dy}{dt}(t)\right]+2L[y(t)]=\{pL[y(t)]-\underbrace{y(+0)}_{=0}\}+2L[y(t)]$$

★

$$=(p+2)Y(p).$$

因此得 $(p+2)Y(p)=\frac{1}{p+1}$. 解得 $Y(p)=\frac{1}{(p+1)(p+2)}$.

$$(2)\ y(t)=L^{-1}[Y(p)]=L^{-1}\left[\frac{1}{(p+1)(p+2)}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{P+1}-\frac{1}{p+2}\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{p+2}\right]=e^{-t}-e^{-2t}$$，故解$y(t)=e^{-t}-e^{-2t}$.

$\boxed{L[f'(t)]=pL[f(t)]-f(+0).}$

$\boxed{L^{-1}\left[\frac{1}{p-a}\right]=e^{at}.}$

例 求解初值问题 $\begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dt^2} + 3y = t\,e^{2t}, \\ y|_{t=0} = \dfrac{1}{2}, \quad y'|_{t=0} = 0. \end{cases}$ ★★★

$$L\left[e^{\lambda t} f(t)\right] = F(p-\lambda).$$

$$L\left[t^n\right] = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

解 (1)设 $L[y(t)] = Y(p)$, 则由方程得 $L\left[\dfrac{d^2 y}{dt^2} + 3y\right] = L\left[t\,e^{2t}\right]$. (积化和差)

$$\text{左边} = L\left[\frac{d^2 y}{dt^2}(t)\right] + 3L[y(t)] = \left\{p^2 L[y(t)] - p y(+0) - \frac{dy}{dt}(+0)\right\} + 3L[y(t)]$$

$$= \left\{p^2 Y(p) - p\cdot\frac{1}{2} - 0\right\} + 3Y(p) = \left(p^2+3\right)Y(p) - \frac{p}{2}.$$

$$\text{右边} = L\left[t\,e^{2t}\right] = \frac{1}{(p-2)^2}.$$ 因此 $\left(p^2+3\right)Y(p) - \dfrac{p}{2} = \dfrac{1}{(p-2)^2}$.

(2) 解得 $Y(p) = \dfrac{1}{(p-2)^2(p^2+3)} + \dfrac{p}{2(p^2+3)}$.

设 $\dfrac{1}{(p-2)^2(p^2+3)} = \dfrac{A}{p-2} + \dfrac{B}{(p-2)^2} + \dfrac{Cp+D}{p^2+3}$, 则

$$1 = A(p-2)\left(p^2+3\right) + B\left(p^2+3\right) + (Cp+D)(p-2)^2.$$ 解得

$$A = -\frac{4}{49}, \quad B = \frac{1}{7}, \quad C = \frac{4}{49}, \quad D = \frac{1}{49}.$$

(2) 解得 $Y(p)=\dfrac{1}{(p-2)^2(p^2+3)}+\dfrac{p}{2(p^2+3)}$.

设 $\dfrac{1}{(p-2)^2(p^2+3)}=\dfrac{A}{p-2}+\dfrac{B}{(p-2)^2}+\dfrac{Cp+D}{p^2+3}$， 则

$1=A(p-2)\left(p^2+3\right)+B\left(p^2+3\right)+(Cp+D)(p-2)^2$. 解得

$A=-\dfrac{4}{49}$， $B=\dfrac{1}{7}$， $C=\dfrac{4}{49}$， $D=\dfrac{1}{49}$.

故 $Y(p)=-\dfrac{4}{49}\cdot\dfrac{1}{p-2}+\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{1}{(p-2)^2}+\dfrac{\frac{4}{49}p+\frac{1}{49}}{p^2+3}+\dfrac{p}{2(p^2+3)}$.

(3) $y(t)=L^{-1}\left[Y(p)\right]$

$$=-\frac{4}{49}L^{-1}\left[\frac{1}{p-2}\right]+\frac{1}{7}L^{-1}\left[\frac{1}{(p-2)^2}\right]+\left(\frac{4}{49}+\frac{1}{2}\right)L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+3}\right]+\frac{1}{49}L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+3}\right]$$

$$=\left\{-\frac{4}{49}e^{2t}+\frac{1}{7}e^{2t}L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right]+\frac{57}{98}\cos\left(\sqrt{3}\right)t+\frac{1}{49(\sqrt{3})}\sin(\sqrt{3})t\right\}h(t)$$

$$=\left\{-\frac{4}{49}e^{2t}+\frac{1}{7}e^{2t}t+\frac{57}{98}\cos\left(\sqrt{3}\right)t+\frac{1}{49(\sqrt{3})}\sin(\sqrt{3})t\right\}h(t).$$

$$\boxed{L^{-1}\left[F(p-\lambda)\right]=e^{\lambda t}L^{-1}\left[F(p)\right].}$$

$$\boxed{L^{-1}\left[\frac{1}{p^n}\right]=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.}$$

利用拉氏变换可求解微分方程初值问题，求解步骤：

(1)对方程两边作拉氏变换，

应用拉氏变换微分公式和方程初值条件，得关于$Y(p)$ ，p 的代数方程；

(2)求解所得关于$Y(p), p$ 的代数方程，解出$Y(p)$；

(3) $y(t)=L^{-1}\left[Y(p)\right]=\cdots.$ ★★★★★

若$f(t), f'(t),\cdots, f^{(n)}(t)$满足定理1中条件(1)和(2)，则当$\operatorname{Re} p>c$ 时，

$$L\left[f'(t)\right]=pL\left[f(t)\right]-f(+0),\quad f(+0)=\lim_{t\to 0^+} f(t).$$

$$L\left[f''(t)\right]=p^2L\left[f(t)\right]-pf(+0)-f'(+0),\quad f'(+0)=\lim_{t\to 0^+} f'(t).$$

$$L\left[f^{(n)}(t)\right]=p^nL\left[f(t)\right]-p^{n-1}f(+0)-p^{n-2}f'(+0)$$
$$-p^{n-3}f''(+0)-\cdots-pf^{(n-2)}(+0)-f^{(n-1)}(+0).$$

$$L\left[e^{at}\right]=\frac{1}{p-a},\quad p\neq a.\qquad L[1]=L[h(t)]=\frac{1}{p}.$$

★

$$L[\cos\omega t]=\frac{p}{p^2+\omega^2},\qquad L[\sin\omega t]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

$$L[\operatorname{ch}\omega t]=\frac{p}{p^2-\omega^2},\qquad L[\operatorname{sh}\omega t]=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}.$$

$$L[t\sin\omega t]=\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

$$L[t]=L[t\,h(t)]=\frac{1}{p^2}.$$

$$L\left[t^n\right]=\frac{n!}{p^{n+1}},\quad n\in\mathbb{N}.$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p-a}\right]=h(t)e^{at},\qquad L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]=h(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0,\\ 0, & t=0.\end{cases}$$

★

$$L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+\omega^2}\right]=h(t)\cos\omega t,\qquad L^{-1}\left[\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right]=h(t)\sin\omega t,$$

$$L^{-1}\left[\frac{p}{p^2-\omega^2}\right]=h(t)\operatorname{ch}\omega t,\qquad L^{-1}\left[\frac{\omega}{p^2-\omega^2}\right]=h(t)\operatorname{sh}\omega t.$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right]=t\,h(t).\qquad L^{-1}\left[\frac{1}{p^m}\right]=\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}h(t),\ \forall m\in\mathbb{Z}^+.$$

$$L^{-1}\left[\frac{p}{(p^2+\omega^2)^2}\right]=\frac{t}{2\omega}\sin\omega t.$$

P 181 - 182

例 求 $I = L\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(e^{2it}+i\sin 3t\right)\right]$.

解 $I = p^2 L\left[e^{2it}+i\sin 3t\right] - p\lim\limits_{t\to 0^+}\left(e^{2it}+i\sin 3t\right) - \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{d}{dt}\left(e^{2it}+i\sin 3t\right)$

$= p^2\left(L\left[e^{2it}\right]+i\,L\left[\sin 3t\right]\right) - p(1+0) - \lim\limits_{t\to 0^+}\left(2i\,e^{2it}+3i\cos 3t\right)$

$= p^2\left(\frac{1}{p-2i}+i\cdot\frac{3}{p^2+3^2}\right) - p - 5i = \cdots$(化简整理).

$\boxed{L\left[e^{at}\right] = \frac{1}{p-a}}$ $\boxed{L\left[\sin\omega t\right] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}}$

若$f(t), f'(t), \cdots, f^{(n)}(t)$满足定理1中条件(1)和(2), 则当$\mathrm{Re}\,p > c$ 时,

$L\left[f'(t)\right] = p\,L\left[f(t)\right] - f(+0)$, $f(+0) = \lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$.

$L\left[f''(t)\right] = p^2 L\left[f(t)\right] - pf(+0) - f'(+0)$, $f'(+0) = \lim\limits_{t\to 0^+} f'(t)$.

$L\left[f^{(n)}(t)\right] = p^n L\left[f(t)\right] - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0)$.

作业

P186　1(9)(12)(14)

P188　6(4)(6)(8)

例 求解初值问题 $\begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dt^2} - 4y = 2\sin 2t\cos 3t, \\ y\big|_{t=0} = \dfrac{1}{2},\ \ y'\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$

$$L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

解 (1)设 $L[y(t)] = Y(p)$, 则由方程得 $L\left[\dfrac{d^2 y}{dt^2}(t) - 4y(t)\right] = L[2\sin 2t\cos 3t]$.

右边 $= L[2\sin 2t\cos 3t] = L[\sin 5t - \sin t]$ (积化和差)

$$= L[\sin 5t] - L[\sin t] = \frac{5}{p^2+5^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

左边 $= L\left[\dfrac{d^2 y}{dt^2}(t)\right] - 4L[y(t)] = \left\{p^2 L[y(t)] - py(+0) - \dfrac{dy}{dt}(+0)\right\} - 4L[y(t)]$

$$= \left\{p^2 Y(p) - p\cdot\frac{1}{2} - 0\right\} - 4Y(p) = (p^2-4)Y(p) - \frac{1}{2}p.$$

$$L[f''(t)] = p^2 L[f(t)] - pf(+0) - f'(+0)$$

因此 $(p^2-4)Y(p) - \dfrac{1}{2}p = \dfrac{5}{p^2+5^2} - \dfrac{1}{p^2+1}$.

(2) 解得 $Y(p) = \dfrac{p}{2(p^2-4)} + \dfrac{5}{(p^2+25)(p^2-4)} - \dfrac{1}{(p^2+1)(p^2-4)}$

分解为简单
有理真分式之和

$$= \frac{p}{2(p^2-4)} + \frac{5}{29}\left(\frac{1}{p^2-4} - \frac{1}{p^2+25}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{p^2-4} - \frac{1}{p^2+1}\right).$$

$$(3)\ Y(p)=\frac{p}{2(p^2-4)}+\frac{5}{29}\left(\frac{1}{p^2-4}-\frac{1}{p^2+25}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{p^2-4}-\frac{1}{p^2+1}\right)$$

$$=\frac{p}{2(p^2-4)}-\frac{4}{145}\cdot\frac{1}{p^2-4}-\frac{5}{29}\cdot\frac{1}{p^2+25}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

$$y(t)=L^{-1}[Y(p)]=\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{p}{p^2-4}\right]-\frac{4}{145}L^{-1}\left[\frac{1}{p^2-4}\right]-\frac{5}{29}L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+25}\right]+\frac{1}{5}L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{p}{p^2-2^2}\right]-\frac{2}{145}L^{-1}\left[\frac{2}{p^2-2^2}\right]-\frac{1}{29}L^{-1}\left[\frac{5}{p^2+5^2}\right]+\frac{1}{5}L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+1}\right]$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\operatorname{ch}2t-\frac{2}{145}\operatorname{sh}2t-\frac{1}{29}\sin 5t+\frac{1}{5}\sin t\right\}h(t).$$

最后可代入方程和条件验算.

例 求解初值问题 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-4y=2\sin 2t\cos 3t,\quad y\big|_{t=0}=\frac{1}{2},\ \ y'\big|_{t=0}=0.$

解 (1)设 $L[y(t)]=Y(p)$, 则由方程得 $L\left[\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t)-4y(t)\right]=L[2\sin 2t\cos 3t]$.

由拉氏变换微分公式和题中初值条件等推得

$$(p^2-4)Y(p)-\frac{1}{2}p=\frac{5}{p^2+5^2}-\frac{1}{p^2+1}.$$

分解为简单
有理真分式之和

$$(2)\ 解得\ Y(p)=\frac{p}{2(p^2-4)}+\frac{5}{(p^2+25)(p^2-4)}-\frac{1}{(p^2+1)(p^2-4)}.$$

定理1 (1)设$f(t)$在t轴任意有限区间逐段光滑,

(2)设$f(t)$:指数增长型, 即$\exists K>0$, $c\geq 0$, 使得$|f(t)|\leq K\mathrm{e}^{ct}$, $\forall t\geq 0$,

则像函数$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ 在区域$\mathrm{Re}\,p>c$ 内有意义且解析.

在定理1条件下,

当$\sigma=\mathrm{Re}\,p\to+\infty$时, $|F(p)|\leq\dfrac{K}{\sigma-c}\to 0.$

- a, e^{at}, $t^n(n\in\mathbb{N})$, $\cos at$, $\sin at$, $\mathrm{ch}\,at$, $\mathrm{sh}\,at$ (a为任意实或复常数),

  满足定理1中条件(1),(2), 故都存在拉氏变换.

- e^{t^2}, $\mathrm{e}^{t\ln t}$ 等不满足定理1条件(2).

$$\boxed{L\left[t^{n} f(t)\right]=(-1)^{n} \frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d} p^{n}} L[f(t)], \quad \forall n \in \mathbb{N}.}$$

$$L[t \cos \omega t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} p} L[\cos \omega t]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} p}\left(\frac{p}{p^{2}+\omega^{2}}\right)=\frac{p^{2}-\omega^{2}}{\left(p^{2}+\omega^{2}\right)^{2}}.$$

$$\boxed{L\left[t^n f(t)\right]=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}L\left[f(t)\right]} \Rightarrow \boxed{L^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}F(p)\right]=(-1)^n t^n L^{-1}\left[F(p)\right].}$$

例2. 求$L^{-1}\left[\dfrac{p^2-1}{(p^2+3)^3}\right]$.

解 $$\left(\frac{1}{p^2+3}\right)'=-\frac{(p^2+3)'}{(p^2+3)^2}=-\frac{2p}{(p^2+3)^2}.$$

$$\left(\frac{1}{p^2+3}\right)''=-\left(\frac{2p}{(p^2+3)^2}\right)'=-\frac{2(p^2+3)^2-2p\cdot 2(p^2+3)\cdot 2p}{(p^2+3)^4}=\frac{6(p^2-1)}{(p^2+3)^3}.$$

故$$L^{-1}\left[\frac{p^2-1}{(p^2+3)^3}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{1}{p^2+3}\right)''\right]=\frac{1}{6}(-1)^2t^2L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+3}\right]$$

$$=\frac{t^2}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}L^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}}{p^2+(\sqrt{3})^2}\right]=\frac{t^2}{6\sqrt{3}}h(t)\sin\sqrt{3}\,t.$$

例 求$L\left[\sin^2 t\right]$, $L\left[t^2+2t-e^{(2+3i)t}\right]$.

解 $L\left[\sin^2 t\right]=L\left[\frac{1-\cos 2t}{2}\right]=\frac{1}{2}\left\{L[1]-L[\cos 2t]\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+2^2}\right)=\frac{2}{p\left(p^2+4\right)}.$$

$$L\left[t^2+2t-e^{(2+3i)t}\right]=L\left[t^2\right]+2L[t]-L\left[e^{(2+3i)t}\right]$$

$$=\frac{2}{p^3}+\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p-2-3i}.$$

$$\boxed{L\left[t^n\right]=\frac{n!}{p^{n+1}},\quad n=0,1,2,\cdots,}$$

$$\boxed{L\left[e^{at}\right]=\frac{1}{p-a},\quad p\neq a.}$$

例 求 $I = L\left[\sin^2 t + \sin 2t - e^{(2+3i)t}\right]$.

解 $I = L\left[\frac{1-\cos 2t}{2} + \sin 2t - e^{(2+3i)t}\right]$

$$= \frac{1}{2}L[1] - \frac{1}{2}L[\cos 2t] + L[\sin 2t] - L\left[e^{(2+3i)t}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+2^2} + \frac{2}{p^2+2^2} - \frac{1}{p-(2+3i)}$$

$$= -\frac{p^3-2p^2+6(1+i)p+4+6i}{p\left(p^2+4\right)(p-2-3i)}.$$

$\boxed{L[\cos \omega t] = \frac{p}{p^2+\omega^2}.}$

$\boxed{L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.}$

$\boxed{L[1] = L[h(t)] = \frac{1}{p}.}$

$\boxed{L\left[e^{at}\right] = \frac{1}{p-a}.}$

$\boxed{L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha L[f(t)] + \beta L[g(t)].}$

例 求 $J = L^{-1}\left[\dfrac{1}{(p^2+1)(p^2+5)}\right].$

解 (1)分解为简单有理真分式之和.★★

$$\frac{1}{(p^2+1)(p^2+5)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+5}\right).$$

(2) $J = \dfrac{1}{4}\left(L^{-1}\left[\dfrac{1}{p^2+1}\right] - L^{-1}\left[\dfrac{1}{p^2+5}\right]\right)$

$$= \frac{1}{4}\left(h(t)\sin t - L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{p^2+(\sqrt{5})^2}\right]\right) = \frac{1}{4}\left(h(t)\sin t - \frac{1}{\sqrt{5}} L^{-1}\left[\frac{\sqrt{5}}{p^2+(\sqrt{5})^2}\right]\right)$$

★ ★ ★

$$= \frac{1}{4} h(t)\left(\sin t - \frac{\sqrt{5}}{5}\sin\sqrt{5}\,t\right).$$ ★

$$L^{-1}\left[\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right] = h(t)\sin\omega t,$$

$$L^{-1}[\alpha F(p) + \beta G(p)] = \alpha L^{-1}[F(p)] + \beta L^{-1}[G(p)].$$

例 求$L\left[t^{\alpha}\right]$，其中α为复常数，$\mathrm{Re}\,\alpha > -1$，

这里 $t^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \ln t}$ 取使$1^{\alpha} = 1$的分支.

解 直接由定义1求解，没法用定理1. 先分析$\int_0^{+\infty} t^{\alpha}\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ 收敛性和解析性.

$\forall t \geq 0$, $\forall c > 0$, 当$\mathrm{Re}\,p \geq c$, 时， $\ln t \in \mathbb{R}$，

$$\left|t^{\alpha}\,\mathrm{e}^{-pt}\right| = \left|\mathrm{e}^{\alpha \ln t}\right| \cdot \left|t^{\alpha}\,\mathrm{e}^{-pt}\right| = \mathrm{e}^{(\mathrm{Re}\,\alpha)\ln t} \cdot \mathrm{e}^{-(\mathrm{Re}\,p)t} \leq t^{\mathrm{Re}\,\alpha}\,\mathrm{e}^{-ct}.$$

$t^{\mathrm{Re}\,\alpha}\,\mathrm{e}^{-c\cdot t}$ 不依赖于p. 由$\mathrm{Re}\,\alpha > -1$, $\int_0^{+\infty} t^{\mathrm{Re}\,\alpha}\,\mathrm{e}^{-ct}\,\mathrm{d}t$ 收敛.

由比较判别法知，$\int_0^{+\infty} t^{\alpha}\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ 在$\mathrm{Re}\,p \geq c$ 一致收敛.

同理$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left\{t^{\alpha}\,\mathrm{e}^{-pt}\right\}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left\{-t^{\alpha+1}\,\mathrm{e}^{-pt}\right\}\mathrm{d}t$ 在$\mathrm{Re}\,p \geq c$ 也一致收敛.

故$F(p) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha}\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ 在$\mathrm{Re}\,p \geq c$ 解析.

由c任意性知，$F(p) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha}\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ 在$\mathrm{Re}\,p > 0$解析.

为了求$L\left[t^{\alpha}\right]=\int_{0}^{+\infty} t^{\alpha} e^{-pt} \mathrm{d} t$，回忆一下Γ 函数.

$x>0$时, 实Γ函数$\Gamma(x) \triangleq \int_{0}^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d} t$.

1). $\Gamma(1)=\int_{0}^{+\infty} e^{-t} \mathrm{d} t=-e^{-t}\Big|_{0}^{+\infty}=1$, 即$\Gamma(1)=1$.

2) $\forall x>0$, $\Gamma(x)=\int_{0}^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d} t=\frac{1}{x} \int_{0}^{+\infty} e^{-t} \mathrm{d} t^{x}$ (分部积分)

$=\frac{1}{x} e^{-t} t^{x}\Big|_{0}^{+\infty}+\frac{1}{x} \int_{0}^{+\infty} e^{-t} t^{x} \mathrm{d} t=\frac{1}{x} \int_{0}^{+\infty} e^{-t} t^{x+1-1} \mathrm{d} t=\frac{1}{x} \Gamma(x+1)$,

故 $\forall x>0$, $\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}$, 即$\Gamma(x+1)=x \Gamma(x)$.

故$\forall n \in \mathbb{Z}^{+}$, $\Gamma(n)=(n-1) \Gamma(n-1)=(n-1)(n-2) \Gamma(n-2)$

$=\cdots=(n-1)!\Gamma(1)=(n-1)!$.

即 $\forall n \in \mathbb{Z}^{+}$, $\Gamma(n)=(n-1)!$.

$x>0$时, 实Γ函数$\Gamma(x)\triangleq\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}\,dt$.

1) $\Gamma(1)=1$. $\forall n\in\mathbb{Z}^+$, $\Gamma(n)=(n-1)!$.

2) $\forall x>0$, $\Gamma(x)=\dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$. (*)

$\int_1^{+\infty}e^{-t}t^{z-1}\,dt$ 是z 的整函数, t^{z-1} 取主值$e^{(z-1)\ln t}$.

$\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\,dt$ 在z平面右半平面$\operatorname{Re}z>0$ 解析.

故 $\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{z-1}dt$ 在$\operatorname{Re}z>0$内有意义且解析.

定义 $\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{z-1}dt$.

$\Gamma(z)$在$\operatorname{Re}z>0$ 内解析. $\forall c>0$, $\Gamma(z)$在$\operatorname{Re}z\geq c$ 内一致收敛.

$\Gamma(z)$是实Γ函数$\Gamma(x)$在右半平面$\operatorname{Re}z>0$ 内的解析开拓.

在$\operatorname{Re}z>0$内, $\Gamma(z)=\dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$, (根据(*)和唯一性定理的推论1).

例 求$L\left[t^{\alpha}\right]$, 其中α为复常数, $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$.

$\left(t^{\alpha}\text{取使}1^{\alpha}=1\text{的分支}\right)$

解 $F(p)=\int_0^{+\infty} t^{\alpha}\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ 在$\mathrm{Re}\,p > 0$解析. 当$p=\sigma>0$ 时,

$$F(\sigma)=\int_0^{+\infty} t^{\alpha}\,\mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}t \overset{x=\sigma t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{\sigma^{\alpha}}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sigma}\right)$$

$$=\frac{1}{\sigma^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty} x^{(\alpha+1)-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sigma^{\alpha+1}},$$ $\Gamma(\alpha+1)$是与σ无关的常数.

$F(\sigma)=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\sigma^{\alpha+1}}$关于$\sigma$可唯一解析开拓为在$\mathrm{Re}\,p>0$ 解析的函数:

$F(p)=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$. 因此 $L\left[t^{\alpha}\right]=L\left[t^{\alpha}h(t)\right]=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$. ★

$$\boxed{\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,t^{z-1}\mathrm{d}t.}$$

$$\boxed{h(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}}$$

$$\underline{\underline{L\left[t^{\alpha}\right]=L\left[t^{\alpha}h(t)\right]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}}},$$ 其中α为复常数, $\mathrm{Re}\,\alpha>-1.$

当$\alpha=n$, $n=0,1,2,\cdots$时,

$$\underline{\underline{L\left[t^{n}\right]=}}\frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}=\frac{n!}{p^{n+1}}.$$

$$\underline{\underline{L\left[t^{\alpha}\right]=L\left[t^{\alpha}h(t)\right]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}}},\quad \text{其中}\alpha\text{为复常数}, \mathrm{Re}\,\alpha>-1.$$

此外，当$0<x<1$时，$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin\pi x}$，(余元公式).

当$x=\frac{1}{2}$时，$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}}\right)=\left(\sqrt{\pi}\right)$.

- 当$\alpha=\dfrac{1}{2}$时，$\underline{\underline{L\left[\left(\sqrt{t}\right)\right]}}=\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{p^{\frac{1}{2}+1}}=\dfrac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{p^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\left(\sqrt{\pi}\right)}{2\left(\sqrt{p^{3}}\right)}$.

- 当$\alpha=-\dfrac{1}{2}$时，$\underline{\underline{L\left[\dfrac{1}{\left(\sqrt{t}\right)}\right]}}=\dfrac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{p^{-\frac{1}{2}+1}}=\dfrac{\left(\sqrt{\pi}\right)}{\left(\sqrt{p}\right)}$.

$$L\left[\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\right]=\frac{1}{p}L[f(t)].$$ $$\boxed{L[1]=L[h(t)]=\frac{1}{p}.}$$

例 1) $L[t]=L\left[\int_0^t 1\,\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{p}L[1]=\frac{1}{p^2}$, 故得 $L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\right]=t\,h(t).$

2) $L\left[t^2\right]=2L\left[\int_0^t s\,\mathrm{d}s\right]=\frac{2}{p}L[t]=\frac{2}{p}\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{2}{p^3}$,

3) $L\left[t^3\right]=3L\left[\int_0^t s^2\,\mathrm{d}s\right]=\frac{3}{p}L\left[t^2\right]=\frac{3}{p}\cdot\frac{2}{p^3}=\frac{3!}{p^4}.$

依次类推, 由归纳法可得

$$L\left[t^n\right]=\frac{n!}{p^{n+1}},\quad n\in\mathbb{N}. \Rightarrow L^{-1}\left[\frac{1}{p^m}\right]=\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}h(t),\ \forall m\in\mathbb{Z}^+.$$

$$L\left[t^n\right]=\frac{n!}{p^{n+1}}\ (n=\mathbb{N}) \Longrightarrow L\left[\mathrm{e}^{\lambda t}t^n\right]=\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}\ (n\in\mathbb{N}).$$

积分公式: $L\left[\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\right]=\frac{1}{p}L[f(t)].$