5.2.4 $I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos mx\,\mathrm{d}x$, $I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin mx\,\mathrm{d}x$ 广义积分 (x：实数)

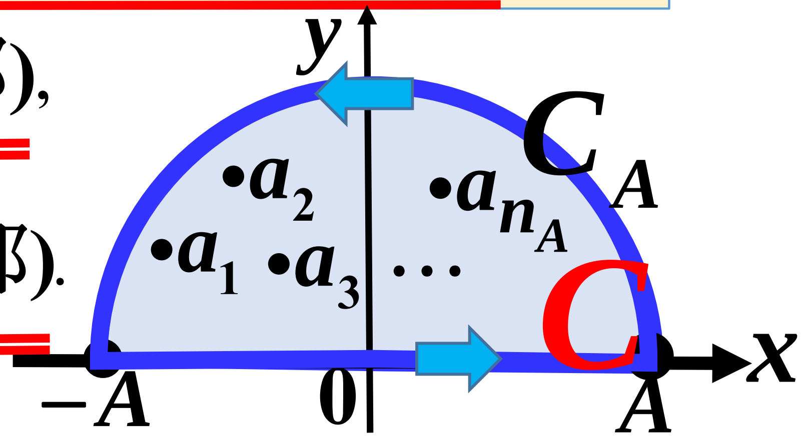
条件：设$m>0$， $P(x),Q(x)$: x 多项式(x：实数)， 且

(1) $Q(x)$比$P(x)$的次数高1次或以上, (2) $\forall x\in\mathbb{R}, Q(x)\neq 0$. (P114)

因$e^{imx}=\cos mx+i\sin mx$, 故先求 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}\,\mathrm{d}x$, 然后

$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos mx\,\mathrm{d}x=\operatorname{Re}I$, ($I$实部),

$I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin mx\,\mathrm{d}x=\operatorname{Im}I$, ($I$虚部).



下面求 I. 取辅助函数 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}$.

添加半圆弧C_A: $z=Ae^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$, 得辅助闭路$C\triangleq C_A+[-A,A]$.

由条件(2), $f(z)$在实轴解析. $f(z)$奇点为$Q(z)$的零点,只有有限个.

故当A充分大时, $f(z)$在C上解析.

设$f(z)$在C内所有奇点为: $a_1,a_2,\cdots,a_{n_A}$, 由留数定理得

条件：设$m>0$，$P(x),Q(x)$: x 的多项式(x : 实数)，且

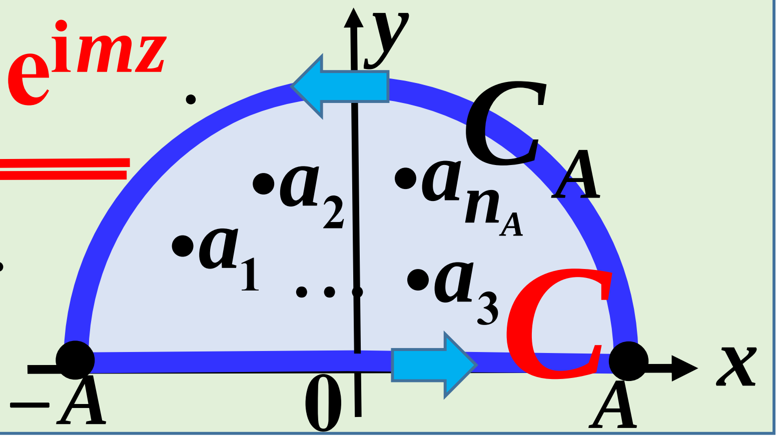
(1) $Q(x)$比$P(x)$的次数高1次或以上，(2) $\forall x\in\mathbb{R}$, $Q(x)\neq 0$. (P114)

求$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}\,dx$.

令$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}$.

故当A充分大时，$f(z)$在辅助闭路C上解析.

设$f(z)$在C内所有奇点为: $a_1,a_2,\cdots,a_{n_A}$,



$$\int_{-A}^{A}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}\,dx+\int_{C_A}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n_A}\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz},a_k\right]\quad(*).$$

由条件(1)，$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{P(z)}{Q(z)}=0$. $m>0$，由若当引理，$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{C_A}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz}\,dz=0$.

故在$(*)$中令$A\to+\infty$，设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是$f(z)$在上半平面的所有奇点, 则

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{imx}\,dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}e^{imz},a_k\right].\qquad\boxed{(**)}$$

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos mx\,dx=\operatorname{Re}I,\quad I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin mx\,dx=\operatorname{Im}I.$$

例4 计算$I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$, $a>0$.

解 被积函数是偶函数，$\cos x=\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$,

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x.$$

$(x^2+a^2)^2$比 1 高1次以上，因$a>0$，故$(x^2+a^2)^2\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

设$f(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+a^2)^2}$.

由$(z^2+a^2)^2=0$，得$f(z)$全部有限奇点$z_1=a\mathrm{i}$，$z_2=-a\mathrm{i}$，2级极点.

因$a>0$，$a\mathrm{i}$在上半平面，$-a\mathrm{i}$不在上半平面. 由公式(**),

$$I=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+a^2)^2},a\mathrm{i}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{2\pi\mathrm{i}\,\frac{1}{1!}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((z-a\mathrm{i})^2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+a^2)^2}\right)\right\}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{2\pi\mathrm{i}\,\frac{1}{1!}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+a\mathrm{i})^2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{i}(z+a\mathrm{i})^2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\cdot 2(z+a\mathrm{i})}{(z+a\mathrm{i})^4}\right\}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}(\mathrm{i}z-a-2)}{(z+a\mathrm{i})^3}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-a}(-a-a-2)}{(2a\mathrm{i})^3}\right\}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{2\pi\frac{2\mathrm{e}^{-a}(a+1)}{8a^3}\right\}=\frac{\mathrm{e}^{-a}\pi(a+1)}{4a^3}.$$

例 计算$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^3\sin mx}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$, $a>0, m>0$.

解: $\frac{x^3\sin mx}{(x^2+a^2)^2}$是偶函数, $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin mx}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$. 因$\sin mx=\mathrm{Im}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}$,

故$I=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$.

$(x^2+a^2)^2$比x^3高1次,

因$a>0$, 故$(x^2+a^2)^2\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

记$f(z)=\frac{z^3}{(z^2+a^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}$.

由$(z^2+a^2)^2=0$,得$f(z)$全部有限奇点

$z_1=a\mathrm{i}$, $z_2=-a\mathrm{i}$, 2级极点.

因$a>0$, $a\mathrm{i}$在上半平面, $-a\mathrm{i}$不在上半平面. 由公式(**),

$$I=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[\frac{z^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+a^2)^2}, a\mathrm{i}\right]\right\}=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{1!}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+a\mathrm{i})^2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\frac{(3z^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+z^3\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z})(z+a\mathrm{i})^2-z^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\cdot 2(z+a\mathrm{i})}{(z+a\mathrm{i})^4}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{2\pi\mathrm{i}\frac{\{3(a\mathrm{i})^2+(a\mathrm{i})^3\mathrm{i}\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot a\mathrm{i}}(a\mathrm{i}+a\mathrm{i})-2(a\mathrm{i})^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot a\mathrm{i}}}{(a\mathrm{i}+a\mathrm{i})^3}\right\}=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{\frac{(2-a)\mathrm{e}^{-a}}{2}\pi\mathrm{i}\right\}$$

$$=\frac{(2-a)\pi\mathrm{e}^{-a}}{4}.$$

5.2.5 杂例

继续利用留数定理计算积分$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

关键：选择合适的辅助闭路C和辅助函数$F(z)$.

1)当$z=x$(实数)时，$F(z)=F(x)=f(x)$,

或$\mathrm{Re}\,F(x)=f(x)$，或$\mathrm{Im}\,F(x)=f(x)$.

2)辅助函数$F(z)$在辅助闭路C上不能有奇点，要解析.

3)$F(z)$在添加的路径上的积分能被估算出，

要么等于0，要么能用原积分表示出来.

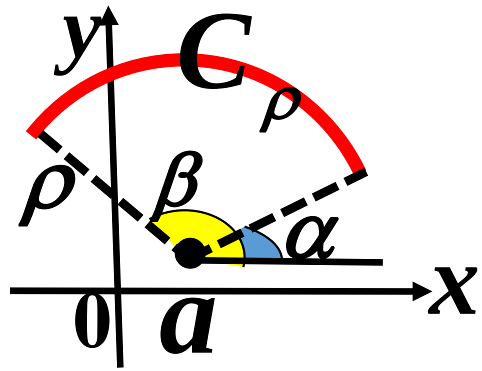
从而能用留数定理算出原定积分.

辅助闭路可以是半圆形，三角形，矩形，四分之一圆形，…

P117例6　P119例7　P133习题7(1)

P133习题7(2)

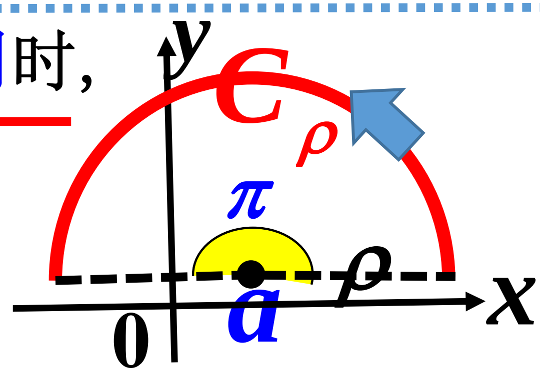
设 C_ρ : $z = a + \rho e^{i\theta}$, $\alpha \le \theta \le \beta$上.



引理2推论(P110): 设a是$f(z)$的1级极点，则

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\,dz = i(\beta-\alpha)\,\mathrm{Res}[f(z),a].$$

特别是, 当C_ρ 是以a为圆心、ρ为半径的上半圆周时,



若a是$f(z)$的1级极点，则

则 $$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\,dz = \pi i\,\mathrm{Res}[f(z),a].$$

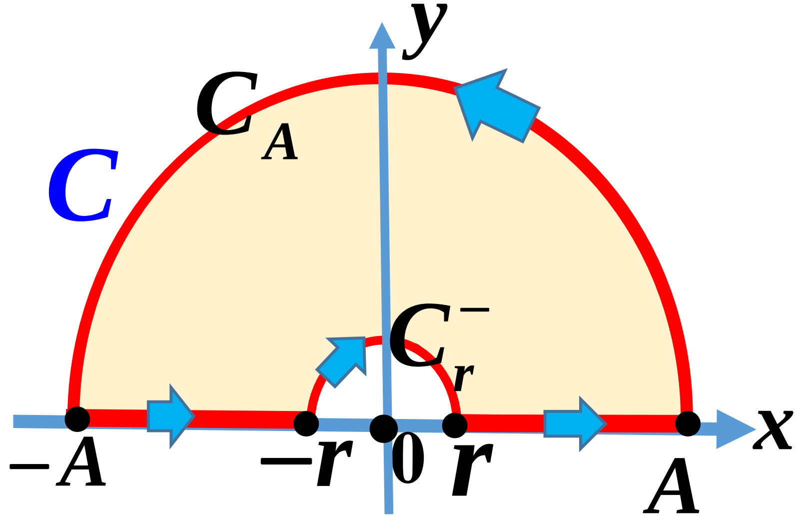
注意: $\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\,dz \ne 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),a].$

证明： C_ρ : $z = a + \rho e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, 即$\alpha = 0$, $\beta = \pi$,

$\beta - \alpha = \pi$, 由引理2推论得

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\,dz = i\cdot \pi\cdot \mathrm{Res}[f(z),a].\#$$

例5 求 $I=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2\mathrm{d}x,\ a>0.$



$A>0$充分大，$r>0$充分小.

解 被积分函数是偶函数，故

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos 2ax}{2x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-e^{2axi}}{2x^2}\mathrm{d}x.$$ 令 $g(z)=\dfrac{1-e^{2aiz}}{2z^2}.$

$g(z)$有唯一的奇点$z=0$. 分析奇点0类型.

$$g(z)=\frac{1-\left\{1+2azi+\frac{(2azi)^2}{2!}+\frac{(2azi)^3}{3!}+\cdots\right\}}{2z^2}=-\frac{ai}{z}+a^2+\frac{2a^3i}{3}z+\cdots,\quad z\neq 0.$$

故0是$g(z)$ 的1级极点，$\mathrm{Res}[g(z),0]=a_{-1}=-a\,i$. 作如图所示的闭路：

$C=[-A,-r]+C_r^-+[r,A]+C_A$. $g(z)$在C 内解析，故$\int_C g(z)\mathrm{d}z=0,$ (柯西积分定理)

即 $\int_{-A}^{-r}g(x)\mathrm{d}x+\int_{C_r^-}g(z)\mathrm{d}z+\int_r^A g(x)\mathrm{d}x+\int_{C_A}g(z)\mathrm{d}z=0.$

$\int_{C_A}g(z)\mathrm{d}z=\int_{C_A}\frac{1}{2z^2}\mathrm{d}z-\int_{C_A}\frac{e^{2azi}}{2z^2}\mathrm{d}z.$ 由引理1得 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{C_A}\frac{1}{2z^2}\mathrm{d}z=0.$

$a>0$, 由若当引理得$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{C_A}\frac{e^{2azi}}{2z^2}\mathrm{d}z=0.$

注：不能直接对$\int_{C_A}g(z)\mathrm{d}z$ 应用引理1或3

$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos 2ax}{2x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{2axi}}{2x^2}\mathrm{d}x$. 令 $g(z)=\frac{1-\mathrm{e}^{2aiz}}{2z^2}$，唯一奇点0.

$g(z)=-\frac{a\mathrm{i}}{z}+a^2+\frac{2a^3\mathrm{i}}{3}z+\cdots,\quad z\neq 0$. 0是1级极点，$\mathrm{Res}[g(z),0]=a_{-1}=-a\mathrm{i}$.

$C=[-A,-r]+C_r^-+[r,A]+C_A$. $g(z)$在C 内解析，故$\int_C g(z)\mathrm{d}z=0$，

即 $\int_{-A}^{-r}g(x)\mathrm{d}x+\int_{C_r^-}g(z)\mathrm{d}z+\int_r^A g(x)\mathrm{d}x+\int_{C_A}g(z)\mathrm{d}z=0$.

$\int_{C_A}g(z)\mathrm{d}z=\int_{C_A}\frac{1}{2z^2}\mathrm{d}z-\int_{C_A}\frac{\mathrm{e}^{2azi}}{2z^2}\mathrm{d}z\to 0,\quad A\to+\infty$.

C_r^- : $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$\theta$从$\pi$变到0. 0是1级极点，由引理2推论得

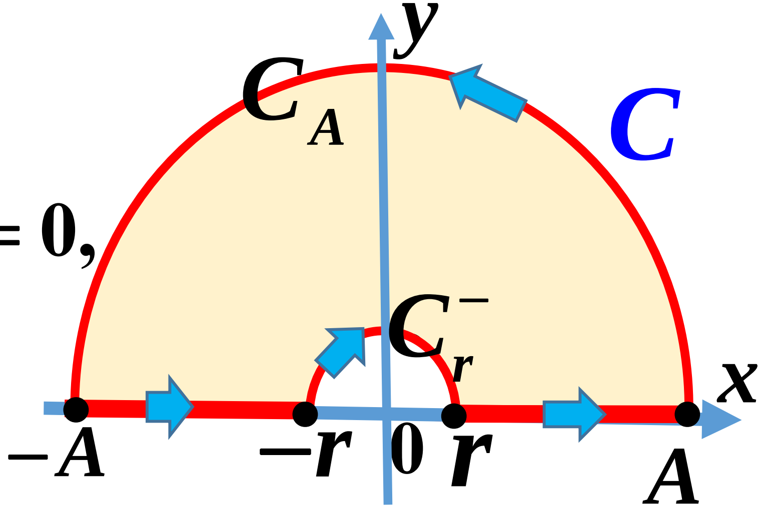
$$\lim_{r\to 0^+}\int_{C_r^-}g(z)\mathrm{d}z=-\lim_{r\to 0^+}\int_{C_r}g(z)\mathrm{d}z=-\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[g(z),0].$$

令 $A\to+\infty$，$r\to 0^+$ 得

$$\int_{-\infty}^{0}g(x)\mathrm{d}x-\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[g(z),0]+\int_0^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x+0=0,$$

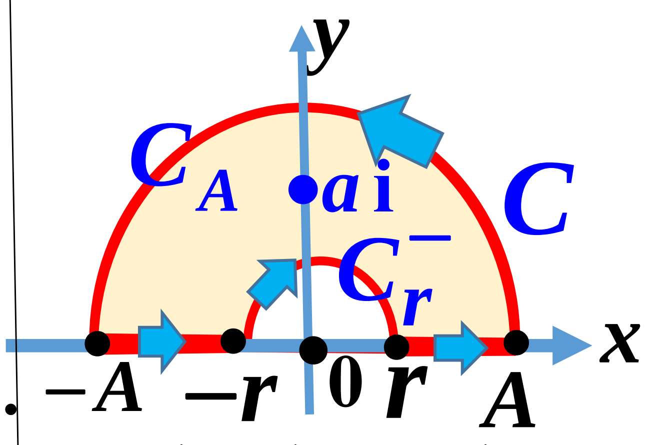
$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[g(z),0]=\pi\mathrm{i}(-a\mathrm{i})=a\pi.$$

$$\therefore I=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a\pi.$$



$A>0$充分大，$r>0$充分小.

例 计算$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x,\ a>0.$



解: 首先 $\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)^2}$是偶函数，故

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}x}}{x(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x.$$

记 $g(z)=\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z(z^2+a^2)^2}$. 先求奇点. 由 $z(z^2+a^2)^2=0$解得

$g(z)$有三奇点: $0,\ a\mathrm{i},\ -a\mathrm{i}$. 0是$g(z)$的1级极点, 在实轴上;

$a\mathrm{i}$是$g(z)$的2级极点, 在上半平面; $-a\mathrm{i}$是$g(z)$的2级极点, 在下半平面.

作如图所示的闭路: $C=[-A,\ -r]+C_r^-+[r,\ A]+C_A$.

$A>0$充分大时, $a\mathrm{i}$在C内部. 由留数定理得

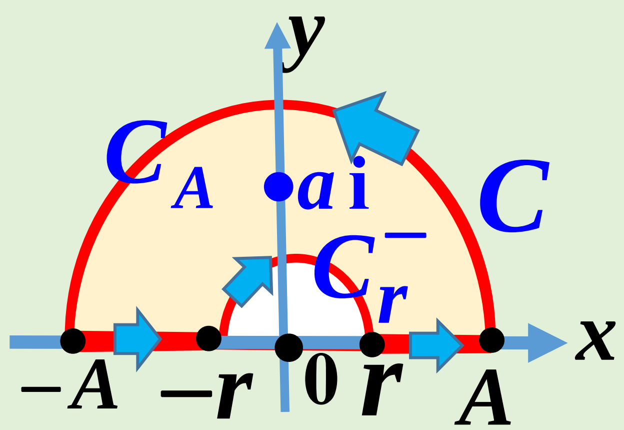
$$\int_{-A}^{-r}g(x)\mathrm{d}x+\int_{C_r^-}g(z)\mathrm{d}z+\int_r^A g(x)\mathrm{d}x+\int_{C_A}g(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[g(z),a\mathrm{i}].$$

若当引理 $\Rightarrow\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{C_A}g(z)\mathrm{d}z=0.$ 引理2 $\Rightarrow\lim\limits_{r\to0^+}\int_{C_r^-}g(z)\mathrm{d}z=-\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[g(z),\ 0].$

$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}}{x(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}\,x.$

记 $g(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(z^2+a^2)^2}$，有三奇点：$0$, $a\,\mathrm{i}$, $-a\,\mathrm{i}$.

0是$g(z)$的1级极点, 在实轴上; $a\,\mathrm{i}$是$g(z)$的2级极点, 在上半平面; $-a\,\mathrm{i}$是$g(z)$的2级极点, 在下半平面. 作如图所示的闭路:



$A>0$充分大, $r>0$充分小.

$C=[-A,\ -r]+C_r^-+[r,\ A]+C_A$. $A>0$充分大时, $a\,\mathrm{i}$在C内部. 由留数定理得

$$\int_{-A}^{-r}g(x)\mathrm{d}\,x+\int_{C_r^-}g(z)\mathrm{d}\,z+\int_r^A g(x)\mathrm{d}\,x+\int_{C_A}g(z)\mathrm{d}\,z=2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[g(z),a\,\mathrm{i}].$$

令 $A\to+\infty$, $r\to0^+$ 得

$$\int_{-\infty}^{0}g(x)\mathrm{d}\,x-\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[g(z),\ 0]+\int_0^{+\infty}g(x)\mathrm{d}\,x+0=2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[g(z),a\,\mathrm{i}].$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}\,x=\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[g(z),\ 0]+2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[g(z),a\,\mathrm{i}].$$

求出$\mathrm{Res}[g(z),\ 0]$, $\mathrm{Res}[g(z),a\,\mathrm{i}]$, 代入上式得 $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}\,x$.

最后$I=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}\,x$.

记 $g(z)=\dfrac{e^{iz}}{z(z^2+a^2)^2}$， $I=\dfrac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}\,x$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}\,x=\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[g(z),\ 0]+2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[g(z),a\,\mathrm{i}].$$

1) 0是$g(z)$的1级极点, 故

$$1)\ \mathrm{Res}[g(z),0]=\lim_{z\to 0}zg(z)=\lim_{z\to 0}\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^4}.$$

2) $a\,\mathrm{i}$是$g(z)$的2级极点, 故

$$\mathrm{Res}[g(z),\ a\,\mathrm{i}]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to ai}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-a\,\mathrm{i})^2g(z)\right]=\lim_{z\to ai}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{e^{iz}}{z(z+ai)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to ai}\frac{ie^{iz}\cdot z(z+ai)^2-e^{iz}\left[(z+ai)^2+z\cdot 2(z+ai)\right]}{z^2(z+ai)^4}=\lim_{z\to ai}\frac{ie^{iz}z(z+ai)-e^{iz}\left[(z+ai)+2z\right]}{z^2(z+ai)^3}$$

$$=\frac{ie^{-a}ai(2ai)-e^{-a}(2ai+2ai)}{(ai)^2(2ai)^3}=-\frac{a+2}{4a^4}e^{-a}.$$ 故得

$$I=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{\pi\,\mathrm{i}\cdot\frac{1}{a^4}+2\pi\,\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{a+2}{4a^4}e^{-a}\right)\right\}=\frac{\pi}{4a^4}\left\{2-(a+2)e^{-a}\right\}.$$

P133习题6(2)--(4)类似地求解. 注意6(4)：$\dfrac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}=\mathrm{Re}\dfrac{e^{2axi}-e^{2bxi}}{x^2}$.

例 计算$I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4(x^2+1)}\mathrm{d}x.$

解 被积函数是偶函数, 故 $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4(x^2+1)}\mathrm{d}x.$ 令 $f(z)=\frac{e^{iz}-1+\frac{z^2}{2}}{z^4(z^2+1)}.$

$f(z)$ 有奇点0(在实轴), i(1级极点, 在上半平面), $-$i(在下半平面).

先求奇点0的类型.

$$因\ f(z)=\frac{\left\{1+iz+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\cdots\right\}-1+\frac{z^2}{2}}{z^4(z^2+1)}=\frac{iz+\frac{(iz)^3}{3!}+\cdots}{z^4(z^2+1)}=\frac{1}{z^3}\cdot\frac{i+\frac{i^3}{3!}z^2+\cdots}{z^2+1}$$

故0是$f(z)$的3级极点, 不是1级.

(被积函数在实轴上奇点要凑成1级极点, 才能用引理2推论)

令$F(z)=\frac{e^{iz}-1+\frac{z^2}{2}-iz}{z^4(z^2+1)}$, 则0是$F(z)$的1级极点.

例 计算$I=\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4(x^2+1)}\mathrm{d}x.$

解 被积函数是偶函数, 故 $I=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4(x^2+1)}\mathrm{d}x.$ 令$F(z)=\dfrac{e^{iz}-1+\frac{z^2}{2}-iz}{z^4(z^2+1)}.$

因 $F(z)=\dfrac{\left\{1+iz+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\frac{(iz)^4}{4!}\cdots\right\}-1+\frac{z^2}{2}-iz}{z^4(z^2+1)}=\dfrac{\frac{(iz)^3}{3!}+\frac{(iz)^4}{4!}\cdots}{z^4(z^2+1)}=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{\frac{i^3}{3!}+\frac{i^4}{4!}z\cdots}{z^2+1},$

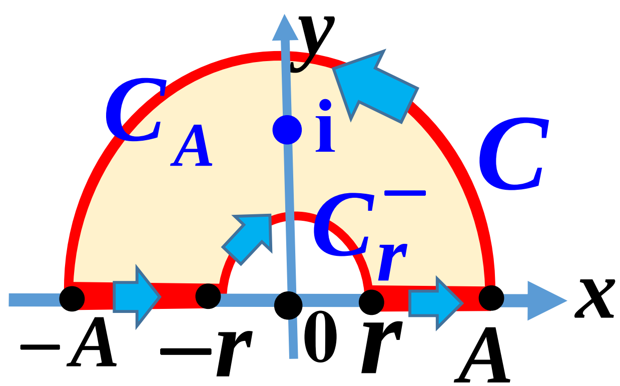
故0是$F(z)$的1级极点. $\operatorname{Re}F(x)=\operatorname{Re}\dfrac{e^{ix}-1+\frac{x^2}{2}-ix}{x^4(x^2+1)}=\dfrac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4(x^2+1)},$

$I=\dfrac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x.$ $F(z)$在上半平面只有奇点i, 1级极点. 由留数定理得

$$\int_{-A}^{-r}F(x)\mathrm{d}x+\int_{C_r^-}F(z)\mathrm{d}z+\int_r^A F(x)\mathrm{d}x+\int_{C_A}F(z)\mathrm{d}z=2\pi i\operatorname{Res}[F(z),\ i].$$

因0是$F(z)$的1级极点, 故由引理2推论得

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{C_r^-}F(z)\mathrm{d}z=-\pi i\operatorname{Res}[F(z),\ 0].$$



$A>0$充分大, $r>0$充分小。

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4(x^2+1)}\mathrm{d}x.\ \text{令}F(z)=\frac{e^{iz}-1+\frac{z^2}{2}-iz}{z^4(z^2+1)}.\qquad I=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x.$$

0是$F(z)$的1级极点. $F(z)$在上半平面只有奇点i，1级极点. 由留数定理得

$$\int_{-A}^{-r}F(x)\mathrm{d}x+\int_{C_r^-}F(z)\mathrm{d}z+\int_r^A F(x)\mathrm{d}x+\int_{C_A}F(z)\mathrm{d}z=2\pi i\,\mathrm{Res}[F(z),\ i].$$

因0是$F(z)$的1级极点，故由引理2推论得

$$\lim_{r\to0^+}\int_{C_r^-}F(z)\mathrm{d}z=-\pi i\,\mathrm{Res}[F(z),\ 0].$$

由引理1和若当引理，

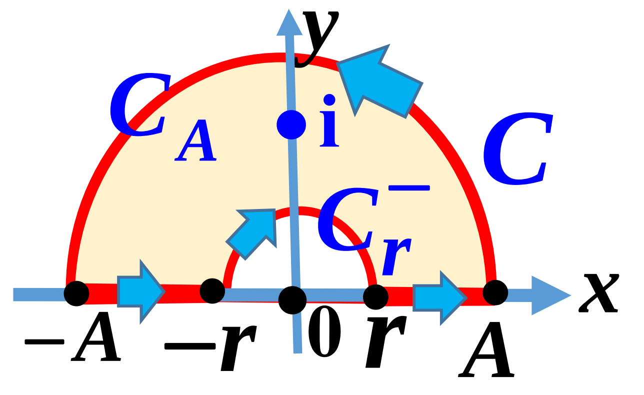
$$\lim_{A\to+\infty}\int_{C_A}F(z)\mathrm{d}z=\lim_{A\to+\infty}\int_{C_A}\frac{e^{iz}}{z^4(z^2+1)}\mathrm{d}z+\lim_{A\to+\infty}\int_{C_A}\frac{-1+\frac{z^2}{2}-iz}{z^4(z^2+1)}\mathrm{d}z=0.$$

令 $A\to+\infty,\ r\to0^+$ 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x=\pi i\,\mathrm{Res}[F(z),\ 0]+2\pi i\,\mathrm{Res}[F(z),i]$$

$$=\pi i\lim_{z\to0}zF(z)+2\pi i\lim_{z\to i}(z-i)F(z)$$

$$=\pi i\lim_{z\to0}\frac{\frac{i^3}{3!}+\frac{i^4}{4!}z\cdots}{z^2+1}+2\pi i\lim_{z\to i}\frac{e^{iz}-1+\frac{z^2}{2}-iz}{z^4(z+i)}$$



$A>0$充分大, $r>0$充分小.

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4\left(x^2+1\right)}\mathrm{d}x.\ \text{令}F(z)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1+\frac{z^2}{2}-\mathrm{i}z}{z^4\left(z^2+1\right)}.\quad I=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[F(z),\ 0\right]+2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[F(z),\mathrm{i}\right]$$

$$=\pi\mathrm{i}\lim_{z\to0}zF(z)+2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})F(z)$$

$$=\pi\mathrm{i}\lim_{z\to0}\frac{\frac{\mathrm{i}^3}{3!}+\frac{\mathrm{i}^4}{4!}z\cdots}{z^2+1}+2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1+\frac{z^2}{2}-\mathrm{i}z}{z^4\left(z+\mathrm{i}\right)}$$

$$=\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{i}^3}{3!}+2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-1}-1+\frac{-1}{2}-(-1)}{2\mathrm{i}}=\frac{\pi}{6}+\pi\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}\right)=\pi\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{1}{3}\right).$$

$$\text{故}I=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{1}{3}\right).$$

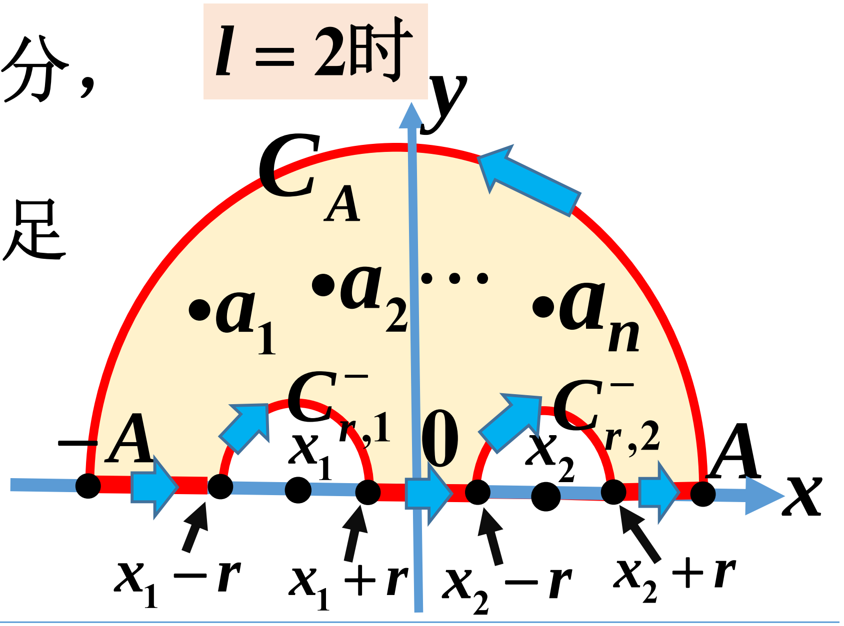
类似地可以求解 $\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\,\mathrm{d}x$ 型积分，

其中 $m>0$, $P(x)$, $Q(x)$ 均是 x 的多项式, 满足

(1) 分母 $Q(x)$ 次数比分子 $P(x)$ 的次数高1次或以上,

(2) $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}$ 在实轴上除有限个互不相同的

1级极点 x_1, $x_2,\cdots,x_l$ 外处处解析. 设 $m>0$.



$$\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\,\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\cdot\sum_{k=1}^{l}\mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},\,x_k\right]+2\pi\mathrm{i}\cdot\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz},\,a_k\right],$$

其中 x_1, x_2, $\cdots$, x_l 是 $f(z)$ 在实轴上所有(1级) 极点;

(虚部等于0 的奇点)

$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $f(z)$ 在整个上半平面的所有奇点(非∞).

(虚部大于0 的奇点)

例 求$I=\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x.$

注意：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$ 不收敛.

解 设$f(z)=\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2-5z+6}$，　故$I=\mathrm{Re}\left(\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right).$

因$f(z)=\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z-2)(z-3)}$，故$f(z)$有且只有两个奇点2,3,

2,3都在实轴上，都是1级极点，故

$$\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\cdot\left\{\mathrm{Res}[f(z),2]+\mathrm{Res}[f(z),3]\right\}+2\pi\mathrm{i}\cdot 0$$

$$\mathrm{Res}[f(z),2]=\lim_{z\to 2}[(z-2)f(z)]=\lim_{z\to 2}\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z-3}=-2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}.$$

$$\mathrm{Res}[f(z),3]=\lim_{z\to 3}[(z-3)f(z)]=\lim_{z\to 3}\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z-2}=3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}}.$$

$$故I=\mathrm{Re}\left(\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right)=\mathrm{Re}\left\{\pi\mathrm{i}\cdot\left(-2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}+3\mathrm{e}^{3\mathrm{i}}\right)\right\}$$

$$=\mathrm{Re}\{-\pi(-2\sin 2+3\sin 3)+\pi\mathrm{i}(-2\cos 2+3\cos 3)\}$$

$$=\pi(2\sin 2-3\sin 3).$$

作业

P132-133

6,7

例 求 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^2-4}{x^2+6}\cdot\frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}\,x,\ a>0.$

解 被积函数是偶函数，

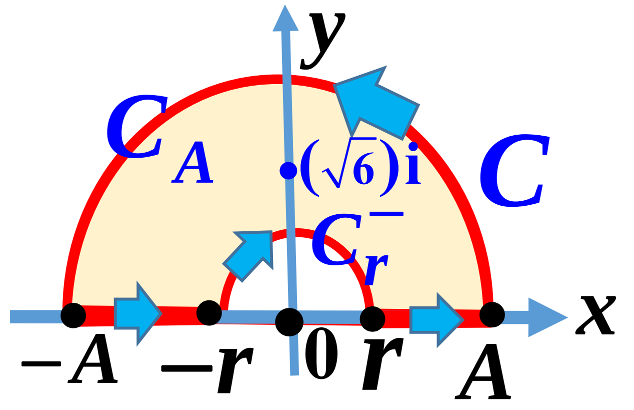
$$\text{故}I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-4}{x^2+6}\cdot\frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-4}{(x^2+6)x}e^{\mathrm{i}ax}\,\mathrm{d}\,x.$$

设 $f(z)=\frac{z^2-4}{z(z^2+6)}e^{\mathrm{i}az}$，有奇点 $\begin{cases}0\text{(1级极点, 在实轴)},\\(\sqrt{6})\mathrm{i}\ \text{(1级极点, 在上半平面)},\\-(\sqrt{6})\mathrm{i}\ \text{(1级极点, 在下半平面)}.\end{cases}$

$$\text{故 } I=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[f(z),\ 0\right]+2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[f(z),\ (\sqrt{6})\mathrm{i}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{\pi\mathrm{i}\cdot\lim_{z\to0}zf(z)+2\pi\mathrm{i}\cdot\lim_{z\to(\sqrt{6})\mathrm{i}}\left[z-(\sqrt{6})\mathrm{i}\right]f(z)\right\}$$

$=\cdots$



$A>0$充分大, $r>0$充分小.

例 计算$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x,\ a>0.$

解：首先 $\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)^2}$是偶函数，故

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x,$$

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)^2}=\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left\{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{(x^2+a^2)^2}\right\}=\frac{1}{a^4}$, 有限;

(2) $|x|>R$, R充分大时, x 实数, $\left|\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)^2}\right|\le\frac{1}{x(x^2+a^2)^2}$, 故

$\int_{-\infty}^{-R}\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$和$\int_R^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$ 收敛. 故 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$ 收敛.

记 $f(z)=\frac{e^{iz}}{z(z^2+a^2)^2}$. 先求奇点…

例 求$I=\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x.$

注意：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$ 不收敛.

解 设$f(z)=\frac{z e^{iz}}{z^2-5z+6}$， 故$I=\mathrm{Im}\left(\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right).$

因$f(z)=\frac{z e^{iz}}{(z-2)(z-3)}$， 故$f(z)$有且只有两个奇点2, 3,

2, 3都在实轴上，都是1级极点，故

$$\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\pi i\cdot\{\mathrm{Res}[f(z),2]+\mathrm{Res}[f(z),3]\}+2\pi i\cdot 0$$

$$\mathrm{Res}[f(z),2]=\lim_{z\to 2}[(z-2)f(z)]=\lim_{z\to 2}\frac{z e^{iz}}{z-3}=-2e^{2i}.$$

$$\mathrm{Res}[f(z),3]=\lim_{z\to 3}[(z-3)f(z)]=\lim_{z\to 3}\frac{z e^{iz}}{z-2}=3e^{3i}.$$

$$\text{故}I=\mathrm{Im}\left(\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right)=\mathrm{Im}\left\{\pi i\cdot\left(-2e^{2i}+3e^{3i}\right)\right\}$$

$$=\mathrm{Im}\{-\pi(-2\sin 2+3\sin 3)+\pi i(-2\cos 2+3\cos 3)\}$$

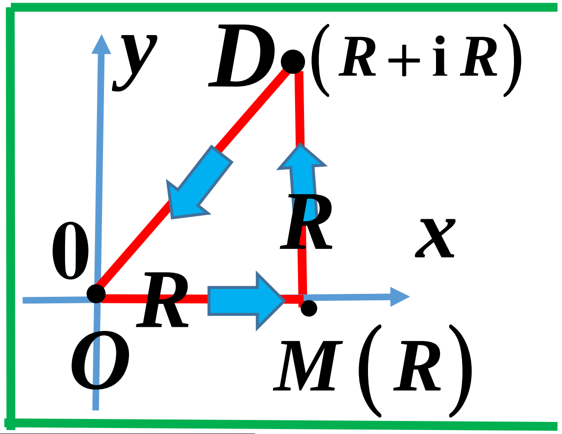
$$=\pi(-2\cos 2+3\cos 3).$$

例 求Fresnel积分 $I_1=\int_0^{+\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x$ 和 $I_2=\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x$.

解 作辅助函数$F(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$, 则$F(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}$, $\operatorname{Re}F(x)=\cos x^2$,

$\operatorname{Im}F(x)=\sin x^2$. $F(z)$全平解析. (对$F(z)$没法用约当引理, 不能选圆弧辅路C_R).

选如图等腰直角三角辅助闭路: $C=\overline{OM}+\overline{MD}+\overline{DO}$. 由留数定理得,



$$\int_0^R F(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\overline{MD}}F(z)\,\mathrm{d}z+\int_{\overline{DO}}F(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

(1) $\overline{MD}: z=R+\mathrm{i}y,\ 0\le y\le R,\quad \mathrm{d}z=\mathrm{i}\,\mathrm{d}y,$

$$\left|\int_{\overline{MD}}F(z)\,\mathrm{d}z\right|=\left|\int_0^R \mathrm{e}^{\mathrm{i}(R+\mathrm{i}y)^2}\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}y\right|$$

$\boxed{(R+\mathrm{i}y)^2=R^2-y^2+2\mathrm{i}Ry}$

$$\le\int_0^R\left|\mathrm{e}^{-2Ry+\left(R^2-y^2\right)\mathrm{i}}\right|\mathrm{d}y=\int_0^R \mathrm{e}^{-2Ry}\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{2R}\left(\mathrm{e}^{-2R^2}-1\right)\xrightarrow{R\to+\infty}0.$$

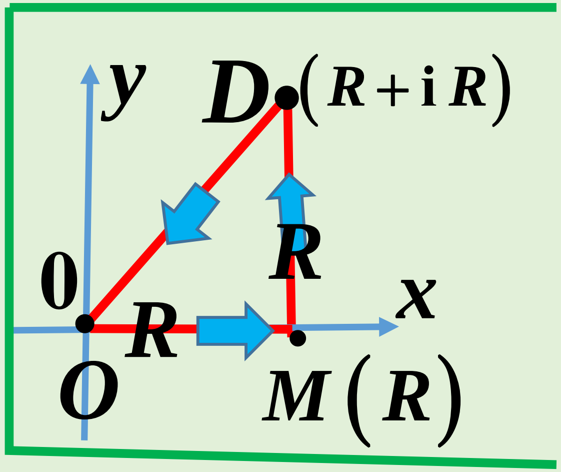
(2) $\overline{DO}: z=x+\mathrm{i}x=(1+\mathrm{i})x$, x从R到0, $\mathrm{i}z^2=\mathrm{i}(1+\mathrm{i})^2x^2=-2x^2$,

$$\int_{\overline{DO}}F(z)\,\mathrm{d}z=(1+\mathrm{i})\int_R^0\mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x$$

$I_1=\int_0^{+\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x$ 和 $I_2=\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x$. 令$F(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$,

$F(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}$, $\operatorname{Re}F(x)=\cos x^2$, $\operatorname{Im}F(x)=\sin x^2$.

$$\int_0^R F(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\overline{MD}}F(z)\,\mathrm{d}z+\int_{\overline{DO}}F(z)\,\mathrm{d}z=0.$$



(1) $\overline{MD}: z=R+\mathrm{i}y,\ 0\le y\le R$, $\mathrm{d}z=\mathrm{i}\,\mathrm{d}y$,

$$\left|\int_{\overline{MD}}F(z)\,\mathrm{d}z\right|=\left|\int_0^R \mathrm{e}^{\mathrm{i}(R+\mathrm{i}y)^2}\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}y\right|\le\int_0^R \mathrm{e}^{-2Ry}\,\mathrm{d}y\le-\frac{1}{2R}\left(\mathrm{e}^{-2Ry}-1\right)\xrightarrow{R\to+\infty}0.$$

(2) $\overline{DO}: z=x+\mathrm{i}x=(1+\mathrm{i})x$, x从R到0, $\mathrm{i}z^2=\mathrm{i}(1+\mathrm{i})^2x^2=-2x^2$,

$$\int_{\overline{DO}}F(z)\,\mathrm{d}z=(1+\mathrm{i})\int_R^0 \mathrm{e}^{-2x^2}\,\mathrm{d}x\ \overset{(y=\sqrt{2}x)}{=\!=}\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})\int_{\sqrt{2}R}^0 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y,$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\overline{DO}}F(z)\,\mathrm{d}z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\int_{+\infty}^0 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(3) 令$R\to+\infty$, 得 $\int_0^{+\infty}F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+\mathrm{i})$,

$$I_1=\operatorname{Re}\int_0^{+\infty}F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sqrt{2\pi},\quad I_2=\operatorname{Im}\int_0^{+\infty}F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sqrt{2\pi}.$$

例 求$I=\int_0^{+\infty}\exp\left(-ax^2\right)\cos bx\,\mathrm{d}\,x,\ \ a>0.$

在数学物理方程里, 求Fourier逆变换时会出现此积分.

解 $I=\int_0^{+\infty}\exp\left(-ax^2\right)\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bx}}{2}\mathrm{d}\,x$ $\left(因\cos bx=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bx}}{2}\right)$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\exp\left(-ax^2+\mathrm{i}\,bx\right)\mathrm{d}\,x}_{(令y=-x)}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\exp\left(-ax^2-\mathrm{i}\,bx\right)\mathrm{d}\,x$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{-\infty}\exp\left(-ay^2-\mathrm{i}\,by\right)\mathrm{d}\,y+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\exp\left(-ax^2-\mathrm{i}\,bx\right)\mathrm{d}\,x$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-ax^2-\mathrm{i}\,bx\right)\mathrm{d}\,x$$

例 求 $I=\int_0^{+\infty}\exp\left(-ax^2\right)\cos bx\,\mathrm{d}\,x,\ \ a>0.$

解 $I=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-ax^2-\mathrm{i}\,bx\right)\mathrm{d}\,x=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-a\left(x+\dfrac{\mathrm{i}\,b}{2a}\right)^2+a\left(\dfrac{\mathrm{i}\,b}{2a}\right)^2\right\}\mathrm{d}\,x$

$=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-a\left(x+\dfrac{\mathrm{i}\,b}{2a}\right)^2\right\}\mathrm{d}\,x.$ 作变换 $z=x+\dfrac{\mathrm{i}\,b}{2a}$, $\mathrm{d}\,z=\mathrm{d}\,x$,

当$-\infty<x<+\infty$时, $z=x+\dfrac{\mathrm{i}\,b}{2a}$表示虚部恒等于$\dfrac{b}{2a}$直线,方向从左到右,

记此直线为l. $\boxed{I=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}\int_l\exp\left\{-az^2\right\}\mathrm{d}\,z.}$ $\boxed{\text{不是}\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-az^2\right\}\mathrm{d}\,z.}$

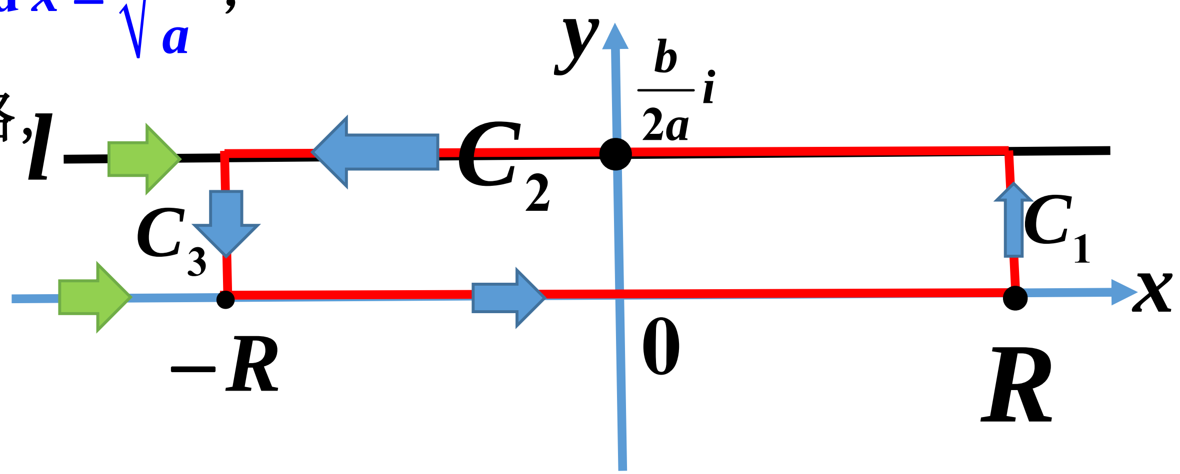
记 $f(z)=\exp\left\{-az^2\right\}$, 它解析. 需作辅助闭路. $\boxed{\text{因}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^2\right)\mathrm{d}\,x=\sqrt{\pi},}$

故 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-ax^2\right)\mathrm{d}\,x=\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$,

故考虑由l 和实轴围起的闭路,

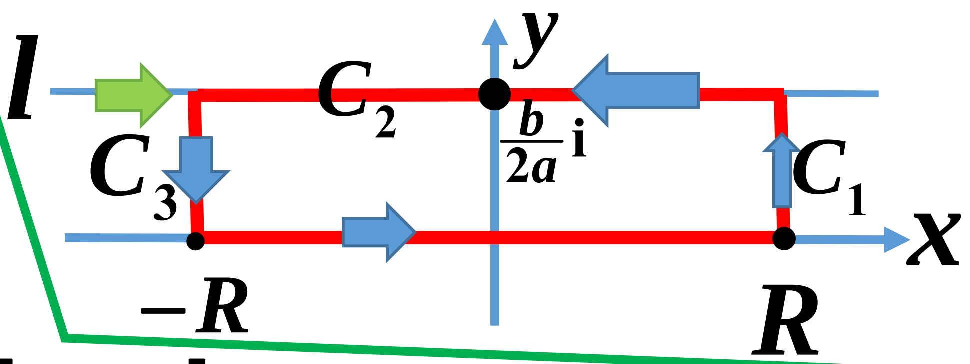
即考虑如图所示矩形闭路:

$C=[-R,R]+C_1+C_2+C_3,$



$$I=\frac{1}{2}e^{-\frac{b^2}{4a}}\underline{\underline{\int_l \exp\left\{-az^2\right\}\mathrm{d}\,z}},$$

$$l:\ z=x+\frac{\mathrm{i}\,b}{2a},\quad -\infty<x<+\infty.$$



记 $f(z)=\exp\left\{-az^2\right\}$, 解析. $C=\left[-R,R\right]+C_1+C_2+C_3$, 由留数定理得

$$\underline{\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}\,x}+\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z+\underline{\underline{\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}\,z}}+\int_{C_3} f(z)\,\mathrm{d}\,z=0.\qquad (*)$$

(1) $\underline{\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}\,x}=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-ax^2\right\}\mathrm{d}\,x=\underline{\sqrt{\frac{\pi}{a}}}$.

(2) $\underline{\lim_{R\to+\infty}\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}\,z=-\int_l f(z)\,\mathrm{d}\,z}$.

(3) 在 C_1 上,

$$z=R+\mathrm{i}\,y,\ 0\le y\le\frac{b}{2a},$$

$$\underline{\left|\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|}=\left|\int_0^{\frac{b}{2a}}\exp\left\{-a\left(R+\mathrm{i}\,y\right)^2\right\}\mathrm{d}\left(\mathrm{i}\,y\right)\right|\le\int_0^{\frac{b}{2a}}\left|\exp\left\{-a\left(R^2-y^2\right)-2aRy\,\mathrm{i}\right\}\right|\mathrm{d}\,y$$

$$=\int_0^{\frac{b}{2a}}\exp\left\{-a\left(R^2-y^2\right)\right\}\mathrm{d}\,y=e^{-aR^2}\underbrace{\int_0^{\frac{b}{2a}}\exp\left\{ay^2\right\}\mathrm{d}\,y}_{\text{与}R\text{无关, 有界常数}}\xrightarrow{R\to+\infty}0.$$

(4) 同理 $\underline{\left|\int_{C_3} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right|\xrightarrow{R\to+\infty}0}$.

$$\boxed{a>0\text{时},\ \lim_{R\to+\infty}e^{-aR^2}=0.}$$

在(*)两边令$R\to+\infty$, 并利用(1)—(4)的结论, 得

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}}+0-\int_l f(z)\,\mathrm{d}z+0=0,\text{ 故 } I=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}\underline{\underline{\int_l f(z)\,\mathrm{d}z}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

即 $$\int_0^{+\infty}\exp\left(-ax^2\right)\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}},\quad a>0.$$