2.5 初等函数★★★

熟记

2.5.1 指数函数

定义 设$z=x+\mathrm{i}y$, $x,y\in\mathbb{R}$, 则定义指数函数为

$$e^{z}=e^{x+\mathrm{i}y}=e^{x}(\cos y+\mathrm{i}\sin y)=e^{x}e^{\mathrm{i}y}$$

例 1) $e^{2+3\mathrm{i}}=e^{2}(\cos 3+\mathrm{i}\sin 3)$ 参见P32例1中的2)

2) $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $e^{\alpha+\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}=e^{\alpha}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)=\mathrm{i}e^{\alpha}$

3) $e^{\pi\mathrm{i}}=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=-1$

4) $e^{-2+\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}=e^{-2}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{1}{e^{2}}\mathrm{i}$

5) $\forall k\in\mathbb{Z}$, $e^{2k\pi\mathrm{i}}=\cos 2k\pi+\mathrm{i}\sin 2k\pi=1$

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x e^{iy},\ \ x, y \in \mathbb{R}.}$$

- $\mathrm{Re}(e^z) = e^x \cos y = e^{\mathrm{Re}\, z} \cos(\mathrm{Im}\, z)$

  $\mathrm{Im}(e^z) = e^x \sin y = e^{\mathrm{Re}\, z} \sin(\mathrm{Im}\, z)$

- $\left| e^z \right| = e^x = e^{\mathrm{Re}\, z} > 0,$ 熟记

  $\mathrm{Arg}\, e^z = y + 2k\pi = \mathrm{Im}\, z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

- $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

证明: $\overline{e^z} = \overline{e^x(\cos y + i\sin y)} = e^x(\cos y - i\sin y)$

$$= e^x\{\cos(-y) + i\sin(-y)\}$$

$$= e^{x-iy} = e^{\bar{z}}\ .\#$$

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x e^{iy},\ \ x, y \in \mathbb{R}.}$$

e^z 是单值函数(根据定义)，且具有如下性质：

(1) $\forall z \in \mathbb{C}$(复数域)，$e^z \neq 0$. 这是因为$\left|e^z\right| = e^{\mathrm{Re}\,z} \neq 0$.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ 不存在，e^{∞} 无意义.

证：

$$\because e^z = \begin{cases} e^x \to +\infty, & \mathrm{Im}\,z = 0,\ z = x \to +\infty\text{时} \\ e^x \to 0, & \mathrm{Im}\,z = 0,\ z = x \to -\infty\text{时} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{cases}$$

$\therefore \lim\limits_{z\to\infty} e^z$ 无意义.

同理，$\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z}{e^z}$ 不存在，因为

$\mathrm{Im}\,z = 0$, $z = x \to +\infty$时，$\dfrac{z}{e^z} \to 0$； $z = x \to -\infty$时，$\dfrac{z}{e^z} \to -\infty$.

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x e^{iy},\ x, y \in \mathbb{R}.}$$

(1) $\forall z \in \mathbb{C}$(复数域), $e^z \neq 0$ $\left(因为\left|e^z\right| = e^{\mathrm{Re}\,z} \neq 0\right)$

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ 不存在， e^{∞} 无意义

(3) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

证: 设 $z_1 = x_1 + i\,y_1$, $z_2 = x_2 + i\,y_2$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= \left(e^{x_1} e^{i y_1}\right) \cdot \left(e^{x_2} e^{i y_2}\right) \\ &= \left(e^{x_1} e^{x_2}\right) e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} \\ &= e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} \\ &= e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x e^{iy},\ \ x, y \in \mathbb{R}.}$$

(1) $\forall z \in \mathbb{C}$，$e^z \neq 0$ $\left(因\left|e^z\right| = e^x \neq 0\right)$

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ 不存在，e^{∞} 无意义. (3) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$，$e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

(4) e^z 是以$2\pi i$为周期的周期函数，即

$$e^{z+2k\pi i} = e^z,\ \forall z \in \mathbb{C},\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

证明：$\forall k \in \mathbb{Z}$，$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1.$

由(3)得，

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z.$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{z}=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^{x}(\cos y+\mathrm{i}\sin y)=\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y},\quad x,y\in\mathbb{R}.}$$

(1) $\forall z\in\mathbb{C}$，$\mathrm{e}^{z}\neq 0$ $\left(因\left|\mathrm{e}^{z}\right|=\mathrm{e}^{x}\neq 0\right)$

(2) $\lim\limits_{z\to\infty}\mathrm{e}^{z}$ 不存在，e^{∞} 无意义. (3) $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$，$\mathrm{e}^{z_1}\cdot\mathrm{e}^{z_2}=\mathrm{e}^{z_1+z_2}$.

(4) e^{z} 以$2\pi\mathrm{i}$为周期, 即 $\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{z}$，$\forall z\in\mathbb{C}$, $\forall k\in\mathbb{Z}$.

(5) $\mathrm{e}^{z_1}=\mathrm{e}^{z_2}\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}$, 使得$z_1=z_2+2k\pi\mathrm{i}$.

证明: 充分性 "$\Leftarrow$". 直接由(4)得出.

必要性 "$\Rightarrow$". 若 $\mathrm{e}^{z_1}=\mathrm{e}^{z_2}$，则由(3)得

$$1=\frac{\mathrm{e}^{z_1}}{\mathrm{e}^{z_2}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-z_2}}{\mathrm{e}^{-z_2}}=\frac{\mathrm{e}^{z_1-z_2}}{\mathrm{e}^{0}}=\mathrm{e}^{x_1-x_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y_1-y_2)}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{x_1-x_2}=1\\ y_1-y_2=2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\ y_1=y_2+2k\pi\end{cases}\Rightarrow z_1=z_2+2k\pi\mathrm{i}.$$

$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y),\ x, y \in \mathbb{R}}$ 性质

(1) $\forall z \in \mathbb{C}$(复数域), $\left|e^z\right| = e^{\operatorname{Re} z} \neq 0$, $e^z \neq 0$.

(2) $\lim\limits_{z\to\infty} e^z$ 不存在, e^∞ 无意义. (3) 加法公式 $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{(z_1+z_2)}$.

(4) e^z 是以$2\pi i$为周期的周期函数, 即 $e^{z+2k\pi i} = e^z$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

(5) $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$, 使得$z_1 = z_2 + 2k\pi i$.

(6) e^z在全平面解析, 且$\left(e^z\right)' = e^z$.

详细证明见P32例1中的2).

例 设 $z = x + \mathrm{i}\, y$, 求 (1) $\left|e^{\mathrm{i}+z^2}\right|$ (2) $\left(e^{\mathrm{i}+z^2}\right)'$.

解 (1) $e^{\mathrm{i}+z^2} = e^{\mathrm{i}+(x+\mathrm{i}\,y)^2} = e^{x^2-y^2+\mathrm{i}(2xy+1)}$

$$= e^{x^2-y^2}\, e^{\mathrm{i}(2xy+1)}$$

$$\therefore \left|e^{\mathrm{i}+z^2}\right| = e^{x^2-y^2}.$$

(2) 由复合函数求导法则得

$$\left(e^{\mathrm{i}+z^2}\right)' = e^{\mathrm{i}+z^2}\left(\mathrm{i}+z^2\right)' = 2z\, e^{\mathrm{i}+z^2}.$$

2.5.2. 三角函数和双曲函数

$\forall y\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\cos y+\mathrm{i}\sin y$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}=\cos y-\mathrm{i}\sin y$,

将两式相加、相减后，可解出cosy和siny:

$$\cos y=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\right),\quad \sin y=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\right).$$

推广到y取复数的情形，即 $\forall z\in\mathbb{C}$, 定义

余弦函数 $\cos z=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)$

正弦函数 $\sin z=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)$

P 35

余弦函数 $\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$

正弦函数 $\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$

类似地，

$\forall y \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} y = \frac{1}{2}\left(e^{y} + e^{-y}\right)$, $\operatorname{sh} y = \frac{1}{2}\left(e^{y} - e^{-y}\right)$, 对 $\forall z \in \mathbb{C}$, 定义

双曲余弦函数 $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$

双曲正弦函数 $\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$

P35

$\Rightarrow \cos iz = \operatorname{ch} z$, $\sin iz = -\frac{1}{i}\operatorname{sh} z = i\operatorname{sh} z.$

$\operatorname{ch} iz = \cos z$, $\operatorname{sh} iz = i\sin z.$

熟背

余弦 $\cos z = \dfrac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$

正弦 $\sin z = \dfrac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$

双曲余弦 $\operatorname{ch} z = \dfrac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$

双曲正弦 $\operatorname{sh} z = \dfrac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$

- $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$在全平面处处解析,

$$(\cos z)' = -\sin z,\quad (\sin z)' = \cos z,$$

$$(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z,\quad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z.$$

P35 熟记

证: 因e^{z},e^{iz}在全平面解析, 故$\cos z, \sin z, \operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$在全平面解析,

$$(\cos z)' = \frac{1}{2}\left\{\left(e^{iz}\right)' + \left(e^{-iz}\right)'\right\} = \frac{1}{2}\left\{e^{iz}\cdot i + e^{-iz}\cdot(-i)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}i\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\sin z.$$

同理, $(\sin z)' = \cos z$, $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$, $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$.

余弦 $\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$

正弦 $\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$

双曲余弦 $\mathrm{ch}\, z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$

双曲正弦 $\mathrm{sh}\, z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$

1) $\cos z, \sin z$ 以 2π 为周期， $\mathrm{ch}\, z, \mathrm{sh}\, z$ 以 $2\pi i$ 为周期, 即

$$\cos(z+2\pi) = \cos z, \quad \sin(z+2\pi) = \sin z.$$

$$\mathrm{ch}(z+2\pi i) = \mathrm{ch}\, z, \quad \mathrm{sh}(z+2\pi i) = \mathrm{sh}\, z.$$

P 35 熟记

证：因 $e^{z+2k\pi i} = e^{z}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, 故

$$\cos(z+2\pi) = \frac{1}{2}\left\{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}\right\} = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

$$= \cos z.$$

同理可证,

$$\sin(z+2\pi) = \sin z, \quad \mathrm{ch}(z+2\pi i) = \mathrm{ch}\, z, \quad \mathrm{sh}(z+2\pi i) = \mathrm{sh}\, z.$$

余弦 $\cos z=\dfrac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)$	双曲余弦 $\operatorname{ch} z=\dfrac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right)$
正弦 $\sin z=\dfrac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)$	双曲正弦 $\operatorname{sh} z=\dfrac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right)$

2)(零点) (*a*) $\{z \mid \sin z=0\}=\{n\pi, n\in\mathbb{Z}\}=\{0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots\}$

(*b*) $\{z \mid \cos z=0\}=\left\{n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\pm\frac{1}{2}\pi,\pm\frac{3}{2}\pi,,\cdots\right\}$

证: (*b*) $\cos z=0 \Leftrightarrow e^{iz}=-e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz}=-1$

$\Leftrightarrow z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R},\ e^{-2y+2ix}=\underline{e^{-2y}e^{2ix}=e^{\pi i}}$

$\Leftrightarrow z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R},\ \underline{y=0, 2x=\pi+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}}$

$\Leftrightarrow z=n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}$. 故得(*b*). 同理可证(*a*), 以及

(*c*) $\{z \mid \operatorname{ch} z=0\}=\left\{\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)i,\ n\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\pm\frac{1}{2}\pi i,\pm\frac{3}{2}\pi i,\cdots\right\}$

(*d*) $\{z \mid \operatorname{sh} z=0\}=\{n\pi i, n\in\mathbb{Z}\}=\{0,\pm\pi i,\pm 2\pi i,\cdots\}$

余弦 $\cos z=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)$

正弦 $\sin z=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)$

双曲余弦 $\operatorname{ch} z=\frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right)$

双曲正弦 $\operatorname{sh} z=\frac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right)$

2)(零点) (a) $\{z \mid \sin z=0\}=\{n\pi, n\in\mathbb{Z}\}=\{0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots\}$

(b) $\{z \mid \cos z=0\}=\left\{n\pi+\frac{\pi}{2},\ \ n\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\pm\frac{1}{2}\pi,\pm\frac{3}{2}\pi,,\cdots\right\}$

(c) $\{z \mid \operatorname{ch} z=0\}=\left\{\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)i,\ \ n\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\pm\frac{1}{2}\pi i,\pm\frac{3}{2}\pi i,\cdots\right\}$

(d) $\{z \mid \operatorname{sh} z=0\}=\{n\pi i, n\in\mathbb{Z}\}=\{0,\pm\pi i,\pm 2\pi i,\cdots\}$

P 36 熟背 ★★★

$\Rightarrow$ 若 $\operatorname{Im} z\neq 0$, 则 $\cos z\neq 0$, $\sin z\neq 0$.

若 $\operatorname{Re} z\neq 0$, 则 $\operatorname{ch} z\neq 0$, $\operatorname{sh} z\neq 0$.

$$\boxed{\text{余弦}\ \cos z=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right),\ \text{正弦}\ \sin z=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)}$$

实三角函数恒等式在复变数情形仍然成立：

3) $\sin(-z)=-\sin z,\quad \cos(-z)=\cos z,\quad \sin^2 z+\cos^2 z=1,$

$\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\cos z_1\sin z_2,$

$\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2,\cdots$ P 36 熟记

证明：根据定义可以验证. 如

$$\sin z_1\cos z_2=\frac{1}{4i}\left(e^{iz_1}-e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2}+e^{-iz_2}\right)$$

$$=\frac{1}{4i}\left\{e^{i(z_1+z_2)}\underline{+e^{i(z_1-z_2)}}\underline{\underline{-e^{-i(z_1-z_2)}}}-e^{-i(z_1+z_2)}\right\}.$$ 类似地，

$$\cos z_1\sin z_2=\frac{1}{4i}\left\{e^{i(z_2+z_1)}\underline{\underline{+e^{i(z_2-z_1)}}}\underline{-e^{-i(z_2-z_1)}}-e^{-i(z_2+z_1)}\right\}.$$

故 $\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2=\frac{1}{2i}\left\{e^{i(z_2+z_1)}-e^{-i(z_2+z_1)}\right\}=\sin(z_1+z_2).$

例. 求$\cos(3-2\mathrm{i})$.

解 由三角函数公式得

$$\cos(3-2\mathrm{i}) = \cos 3 \cos 2\mathrm{i} + \sin 3 \sin 2\mathrm{i}$$

$$= \cos 3 \operatorname{ch} 2 + \mathrm{i} \sin 3 \operatorname{sh} 2.$$

$\cos \mathrm{i} z = \operatorname{ch} z$, $\sin \mathrm{i} z = \mathrm{i} \operatorname{sh} z$

$\operatorname{ch} \mathrm{i} z = \cos z$, $\operatorname{sh} \mathrm{i} z = \mathrm{i} \sin z$

熟背

$$\boxed{\text{双曲余弦 } \operatorname{ch} z=\frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right),\ \text{双曲正弦 } \operatorname{sh} z=\frac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right)}$$

实双曲函数恒等式在复变数情形仍然成立：

$$\operatorname{sh}(-z)=-\operatorname{sh} z,\quad \operatorname{ch}(-z)=\operatorname{ch} z,\quad \operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1,$$

$$\operatorname{sh}(z_1+z_2)=\operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2+\operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2,\cdots$$

$$\operatorname{sh}(z_1-z_2)=\operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2-\operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2,\cdots$$

P 36　熟记

证明 根据定义.

• 当$z \neq n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$时，

$$\operatorname{ctg} z \triangleq \frac{\cos z}{\sin z}，\ 解析，\ (\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$

证明　首先$\sin z, \cos z$在全平面解析.

当$z \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$时，　$\sin z \neq 0,$

故$\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$解析.

$$且\ (\operatorname{ctg} z)' = \frac{(\cos z)' \sin z - \cos z (\sin z)'}{\sin^2 z}$$

$$= \frac{-\sin^2 z - \cos^2 z}{\sin^2 z} = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$

- 当$z \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$时， $\operatorname{ctg} z \triangleq \dfrac{\cos z}{\sin z}$解析,

$$(\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$

同理可证，

- 当$z \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$时，$\operatorname{tg} z \triangleq \dfrac{\sin z}{\cos z}$, 解析,

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}.$$

- 当$z \neq n\pi \mathrm{i}$, $n \in \mathbb{Z}$时, $\operatorname{cth} z \triangleq \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$解析, $(\operatorname{cth} z)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 z}$.

- 当$z \neq \left(n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{i}$, $n \in \mathbb{Z}$时, $\operatorname{th} z \triangleq \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$解析, $(\operatorname{th} z)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 z}$.

$\operatorname{sh} x$，$\operatorname{ch} x$在$\mathbb{R}$ 中无界，故$\operatorname{sh} z$，$\operatorname{ch} z$在复平面无界.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$, 有界, 但是

$|\sin z|$和$|\cos z|$在复平面无界.

证：当$z = \mathrm{i}\, y$, $y \in \mathbb{R}$时,

$$\cos \mathrm{i}\, y = \operatorname{ch} y,$$

故当$y \to \infty$时, $|\cos \mathrm{i}\, y| = \operatorname{ch} y \to \infty$.

故 $|\cos z|$在复平面无界.

同理 $|\sin z|$在复平面无界.#

例. 求$\sin z$的实部，虚部和模.

解：设$z = x + \mathrm{i}\, y,\ x, y \in \mathbb{R}$，则由三角函数公式得

$$\sin z = \sin\left(x + \mathrm{i}\, y\right) = \sin x \cos\left(\mathrm{i}\, y\right) + \cos x \sin\left(\mathrm{i}\, y\right)$$

$$= \sin x \operatorname{ch} y + \mathrm{i} \operatorname{sh} y \cos x.$$

故 $\operatorname{Re}(\sin z) = \sin x \operatorname{ch} y$，$\operatorname{Im}(\sin z) = \operatorname{sh} y \cos x.$

$$\left|\sin z\right| = \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y \cos^2 x}$$

$$= \sqrt{\left(1 - \cos^2 x\right)\operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y \cos^2 x}$$

$$= \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x\left(\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y\right)} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}.$$

也可以按$\sin z$的定义计算.

2.5.3 对数函数(指数函数的反函数)

定义：设复数$z\neq 0$已知，满足方程 $\mathrm{e}^{w}=z$ 的复数 w，称为 z 的对数函数，记为 $w=\mathrm{Ln}z$.

令$w=u+\mathrm{i}v$，则由 $\mathrm{e}^{w}=z$ 得，

$$\mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v}=\mathrm{e}^{u}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}=z=|z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z}.\ \text{故}\ \mathrm{e}^{u}=|z|\Rightarrow u=\ln|z|,$$

$$v=\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{Ln}\,z&=\ln|z|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z\\&=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi),\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\end{aligned}}$$

P38 熟记

$w=\mathrm{Ln}\,z$是无穷多值函数.每个 k，对应 $\mathrm{Ln}z$ 的一个分支.

$k=0$分支记为：$\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$，称为$\mathrm{Ln}\,z$的主值，

其中$-\pi<\arg z\leq\pi$.

非零复数都有对数.

$$w=\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi),\quad k\in\mathbb{Z}.$$

主值：$\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z,\quad -\pi<\arg z\le\pi.$

P 38　熟记

例　求 $\mathrm{Ln}\,x\ (x>0)$, $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}$及相应主值.

解　(1) $x>0,\ \arg x=0.\quad \mathrm{Ln}\,x=\ln x+2k\pi\,\mathrm{i},\ k\in\mathbb{Z}.$

令$k=0$得 $\mathrm{Ln}\,x$主值$=\ln x.$ 主值与实函数中正数的对数一致.

(2) $$\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\ln|\mathrm{i}|+\mathrm{i}(\arg\mathrm{i}+2k\pi)=\ln 1+\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\pi+2k\pi\right)$$

$$=\mathrm{i}\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

令$k=0$得主值 $\ln\mathrm{i}=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}.$

$$\boxed{\begin{aligned}&w=\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi),\quad k\in\mathbb{Z}.\\&\text{主值：}\ \ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z,\quad -\pi<\arg z\le\pi.\end{aligned}}$$

P 38 熟记

例 求$e^w=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$的全部解.

解 $$w=\mathrm{Ln}\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)=\ln\left|1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right|+\mathrm{i}\left\{\arg(1+\mathrm{i}\sqrt{3})+2k\pi\right\}$$

$$=\ln\left(\sqrt{1+3}\right)+\mathrm{i}\left(\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1}+2k\pi\right)$$

$$=\ln 2+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right),\quad k\in\mathbb{Z}.$$

对数函数的性质 P 38 熟记

(1) $\mathrm{Ln}(z_1\cdot z_2)=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2 \quad (z_1,z_2\neq 0)$

(2) $\mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Ln}z_1-\mathrm{Ln}z_2 \quad (z_1,z_2\neq 0)$, $\mathrm{Ln}\frac{1}{z}=-\mathrm{Ln}z, \quad (z\neq 0)$

证: (1) $\mathrm{Ln}(z_1\cdot z_2)=\ln|z_1\cdot z_2|+i\,\mathrm{Arg}(z_1\cdot z_2)$

$$=\ln(|z_1|\cdot|z_2|)+i(\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2)$$

$$=\ln|z_1|+\ln|z_2|+i(\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2)$$

$$=(\ln|z_1|+i\,\mathrm{Arg}\,z_1)+(\ln|z_2|+i\,\mathrm{Arg}\,z_2)$$

$$=\mathrm{Ln}\,z_1+\mathrm{Ln}\,z_2$$

(2) $\mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2}=\ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right|+i\,\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

$$=\ln|z_1|-\ln|z_2|+i(\mathrm{Arg}\,z_1-\mathrm{Arg}\,z_2)$$

$$=\{\ln|z_1|+i\,\mathrm{Arg}(z_1)\}-\{\ln|z_2|+i\,\mathrm{Arg}(z_2)\}=\mathrm{Ln}z_1-\mathrm{Ln}z_2$$

对数函数主值的连续性和解析性

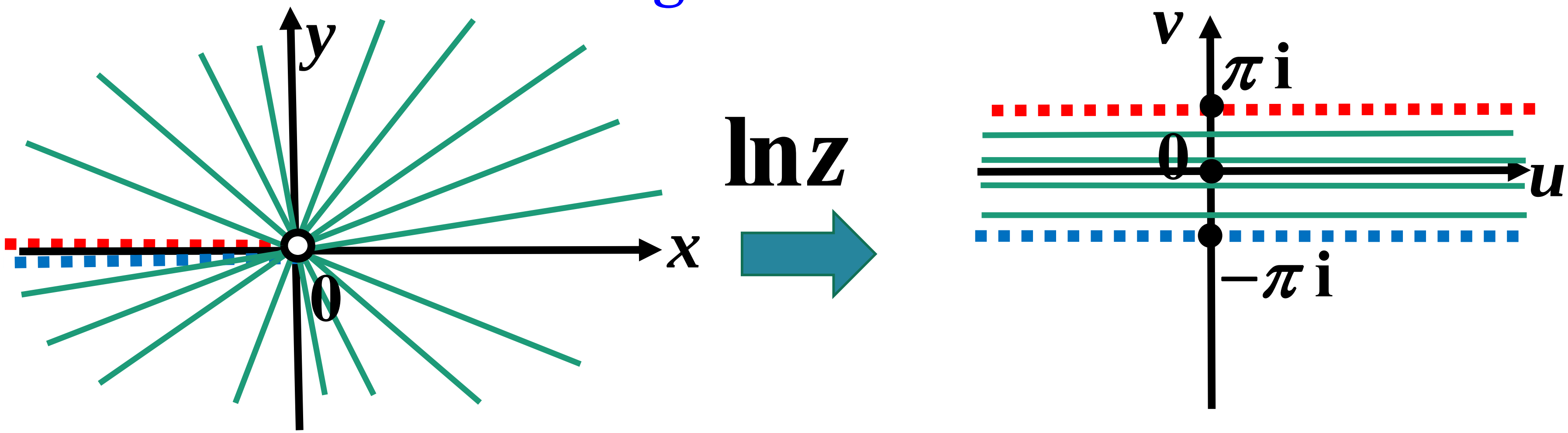
主值：$\ln z = \ln|z| + i\arg z,\quad -\pi < \arg z \le \pi.$

$\ln|z|$在除去$z=0$的复平面连续，

$\arg z$在除去原点和负实轴的复平面D 内连续（见**P**21-17(2)），

$D:\quad -\pi < \arg z < \pi,$

故 $\ln z$在$D:\ -\pi < \arg z < \pi$内连续.



沿负半实轴割开的z平面
$D: -\pi < \arg z < \pi.$

$\ln z$

条形域：$-\pi < \operatorname{Im} w < \pi$

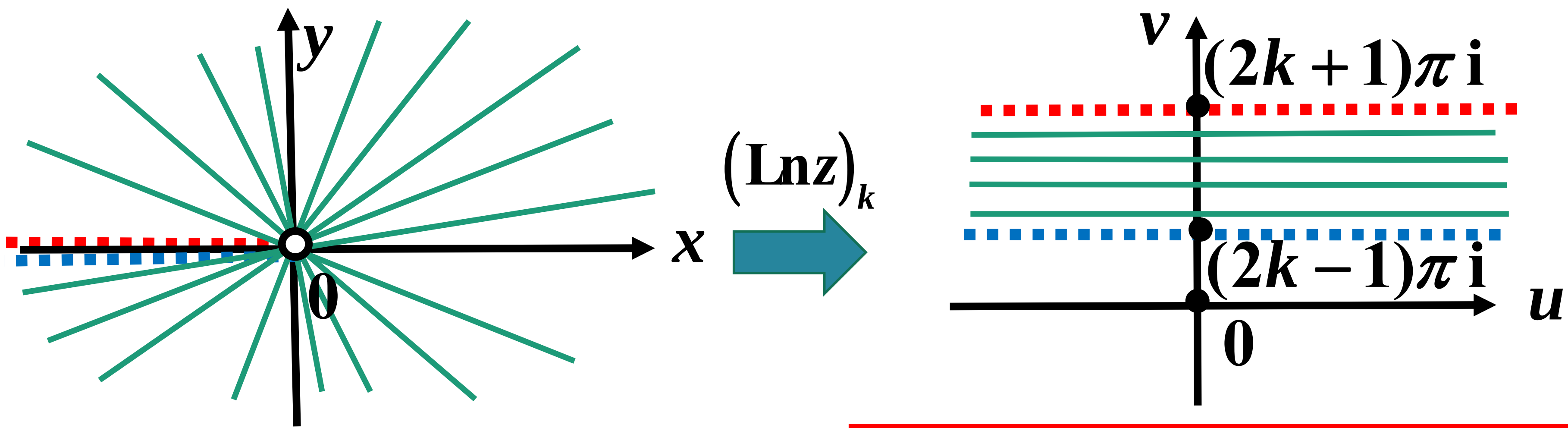
对数函数其他分支的连续性和解析性

$$\forall k\in\mathbb{Z},\text{记}\, w_k=(\mathrm{Ln}z)_k=\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi),$$

其中 $-\pi<\arg z<\pi.$

在除去原点和负实轴的复平面 D：$-\pi<\arg z<\pi,$

$$w_k=(\mathrm{Ln}\,z)_k\ \text{连续.}$$



沿负半实轴割开的 z 平面

D: $-\pi<\arg z<\pi.$

$\xrightarrow{(\mathrm{Ln}z)_k}$

条形域：

$(2k-1)\pi<\operatorname{Im}w<(2k+1)\pi$

根据反函数理论，因指数函数处处解析，故

在除去原点和负实轴的复平面D：$-\pi < \arg z < \pi$ 内，

$\mathrm{Ln}\,z$的主值分支$\ln z$、其它各分支$(\mathrm{Ln}\,z)_k$解析，且

• 对于$w_0 = \ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$，有 $z = \mathrm{e}^{w_0}$，故

$(\ln z)' = \frac{1}{(\mathrm{e}^{w_0})'} = \frac{1}{\mathrm{e}^{w_0}} = \frac{1}{z}$，故 $(\ln z)' = \frac{1}{z}$.

• 对于$w_k = (\mathrm{Ln}\,z)_k = \ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi)$，$k \in \mathbb{Z}$，

有$z = \mathrm{e}^{w_k}$，故

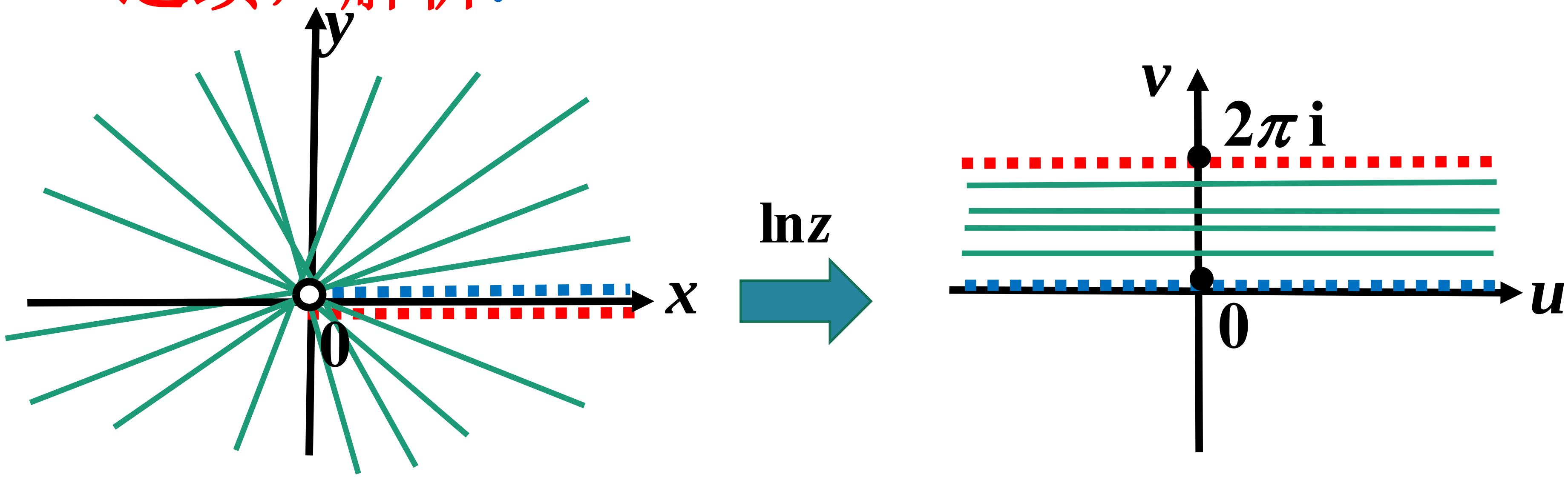
$((\mathrm{Ln}\,z)_k)' = \frac{1}{(\mathrm{e}^{w_k})'} = \frac{1}{\mathrm{e}^{w_k}} = \frac{1}{z}$，故$((\mathrm{Ln}\,z)_k)' = \frac{1}{z}$.

若取$0<\arg z<2\pi$,则

在除去原点和正实轴的复平面D：$0<\arg z<2\pi$ 内，

$\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z$，$0<\arg z<2\pi$,

连续，解析.



$\boxed{\text{沿正半实轴割开的}z\text{平面 } 0<\arg z<2\pi} \xrightarrow{\ln z} \boxed{\text{条形域：}0<\operatorname{Im} w<2\pi}$

2.5.4 一般幂函数

设 $z\in\mathbb{C}$，$z\neq 0$，α 为任意一个复数，定义幂函数

$$z^{\alpha}=e^{\alpha \mathrm{Ln}\, z}=e^{\alpha\{\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)\}},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

背熟

(1) 当 $\alpha\in\mathbb{Z}^{+}$(正整数)时，与普通幂函数 z^{n} 一致，因为

$$z^{n}=e^{n\mathrm{Ln}\, z}=e^{n\ln|z|+i n\arg z+2nk\pi i}\qquad \boxed{e^{2kn\pi i}=1}$$

$$=e^{\ln|z|^{n}}e^{i n\arg z}=|z|^{n}e^{i n\arg z}.$$

2.5.1小节

z^{n}：单值函数，处处解析，$(z^{n})'=nz^{n-1}$.

(2)当$\alpha=\dfrac{1}{n}$，n是正整数时，$z^{\frac{1}{n}}$与根式函数 $\sqrt[n]{z}$ 一致，因为

$$z^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln}\,z}=e^{\frac{1}{n}\left\{\ln|z|+i\left(\arg z+2k\pi\right)\right\}}=e^{\frac{1}{n}\ln|z|}e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}}$$

$$=\left(\sqrt[n]{|z|}\right)\exp\left\{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right\},\ k\in 0,1,2,\cdots,n-1.$$

故$z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}$，是 n 值函数.

在除去原点和负实轴的复平面D：$-\pi<\arg z<\pi$ 内，

$\forall k=0,1,2,\cdots,n-1,$

$$w_k\triangleq\left(z^{\frac{1}{n}}\right)_k=\left(\sqrt[n]{|z|}\right)\exp\left\{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right\},\ -\pi<\arg z<\pi.$$

连续，解析，

$$w_k{}'=\left(z^{\frac{1}{n}}\right)_k{}'=\left(e^{\frac{1}{n}(\mathrm{Ln}\,z)_k}\right)'=e^{\frac{1}{n}(\mathrm{Ln}\,z)_k}\cdot\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{nz}\left(z^{\frac{1}{n}}\right)_k.$$

(3) 当α是有理数，即$\alpha=\frac{m}{n}$(既约)，$m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}^{+}$ 时，

$$z^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{z^m}=\sqrt[n]{|z|^m\exp\{\mathrm{i}m\arg z\}}$$

$$=\left(\sqrt[n]{|z|^m}\right)\exp\left\{\mathrm{i}\frac{m\arg z+2k\pi}{n}\right\},\quad k=0,1,2,\cdots n-1.$$

$z^{\frac{m}{n}}$是 n 值函数。

(4) 当 α 是无理数或一般复数 $(\mathrm{Im}\,\alpha\neq 0)$时，

$$z^{\alpha}=\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{Ln}\,z}=\mathrm{e}^{\alpha\{\ln|z|+\mathrm{i}(\arg z+2k\pi)\}},\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

因当α是无理数或$\mathrm{Im}\,\alpha\neq 0$时，$\forall k\in\mathbb{Z}$, $k\alpha$ 不是整数, $\mathrm{e}^{2k\alpha\pi\mathrm{i}}\neq 1$,

故 z^{α} 是无穷多值函数.

(4) 当 α 是无理数或一般复数 ($\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$) 时，

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \mathrm{Ln}\, z} = e^{\alpha\{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)\}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

因当 α 是无理数或 $\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$ 时，$\forall k \in \mathbb{Z}$, $k\alpha$ 不是整数, $e^{2k\alpha\pi i} \neq 1$,

故 z^{α} 是无穷多值函数.

例 $$i^{i} = e^{i\,\mathrm{Ln}\, i} = e^{i\{\ln|i| + i(\arg i + 2k\pi)\}}$$

$$= e^{i\left\{0 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right\}} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

i^{i} 是无穷多值函数.

(4) 当α是无理数或一般复数($\operatorname{Im}\alpha \neq 0$)时，

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} = e^{\alpha\{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)\}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

是无穷多值函数。

例 $$(-2)^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\operatorname{Ln}(-2)}$$

$$\boxed{\arg(-2) = \pi}$$

$$= e^{\sqrt{3}\{\ln 2 + i(\pi + 2k\pi)\}}$$

$$= e^{\sqrt{3}\ln 2}\, e^{i\sqrt{3}(2k+1)\pi}$$

$$= e^{\sqrt{3}\ln 2}\left\{\cos\sqrt{3}(2k+1)\pi + i\sin\sqrt{3}(2k+1)\pi\right\},$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

是无穷多值函数。

(4) 当α是无理数或一般复数($\operatorname{Im}\alpha \neq 0$)时，

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} = e^{\alpha\{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)\}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

例 $(-1-2i)^{2-3i} = e^{(2-3i)\operatorname{Ln}(-1-2i)}$

$$= e^{(2-3i)\{\ln|-1-2i| + i\{\arg(-1-2i) + 2k\pi\}\}}$$

$$= e^{(2-3i)\left\{\ln\sqrt{5} + i\left(-\pi + \operatorname{arctg}\frac{-2}{-1} + 2k\pi\right)\right\}} = e^{(2-3i)\left\{\frac{1}{2}\ln 5 + i\{\operatorname{arctg} 2 + (2k-1)\pi\}\right\}}$$

$$= e^{\ln 5 + 3\operatorname{arctg} 2 + 3(2k-1)\pi + i\left\{2\operatorname{arctg} 2 + \underline{2(2k-1)\pi} - \frac{3}{2}\ln 5\right\}}$$

$$\boxed{e^{2(2k-1)\pi i} = 1.}$$

$$= 5e^{3\operatorname{arctg} 2 + 3(2k-1)\pi}\, e^{i\left\{2\operatorname{arctg} 2 - \frac{3}{2}\ln 5\right\}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

它是无穷多值函数.

作业

P44-45

11 (2),(3)(提示：与相关实函数类似地分析即可)

13 (1)(3)

14(1)(3)

(先求使分母等于0的点, 当分母$\neq$0时, 可微, 利用商的求导公式求导)

16

17 (2)

e^z 单叶性区域

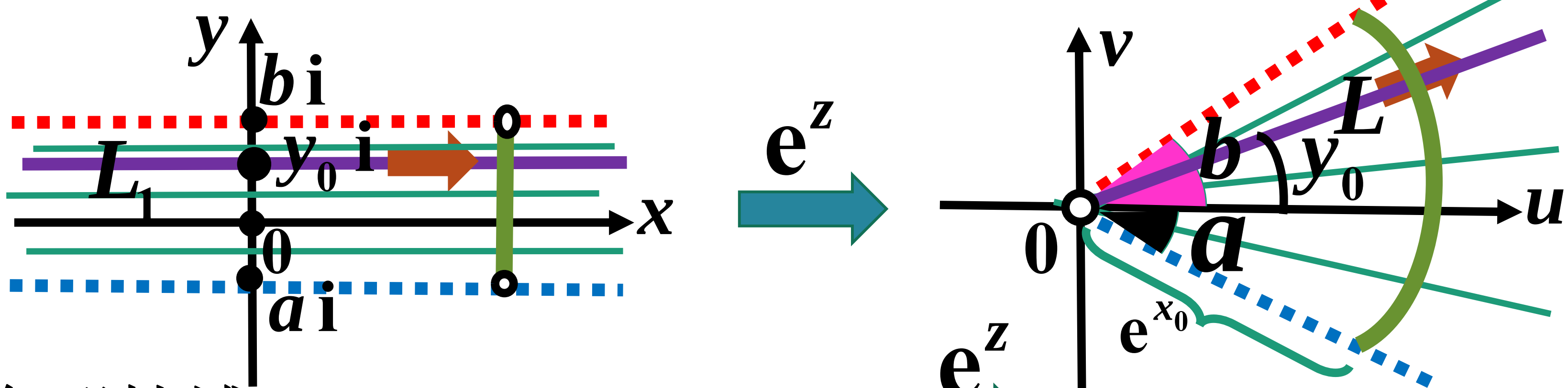
e^z：单值函数

(5) $e^{z_1}=e^{z_2}\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}$，使得$z_1=z_2+2k\pi i$.

(7) e^z在全平面解析.

D是e^z单叶性区域$\Leftrightarrow\begin{cases}\text{不存在不同的}z_1,\ z_2\in D,\text{满足:}\\ z_1=z_2+2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$

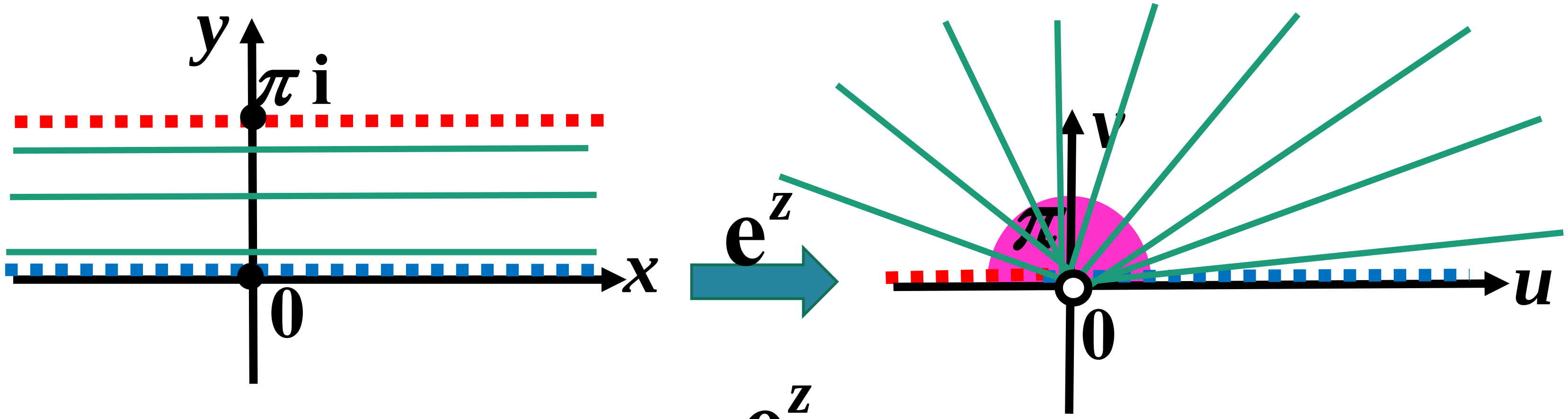
条形性域$a<\operatorname{Im}z<b$，$b-a\le 2\pi$ 是e^z的单叶性区域.



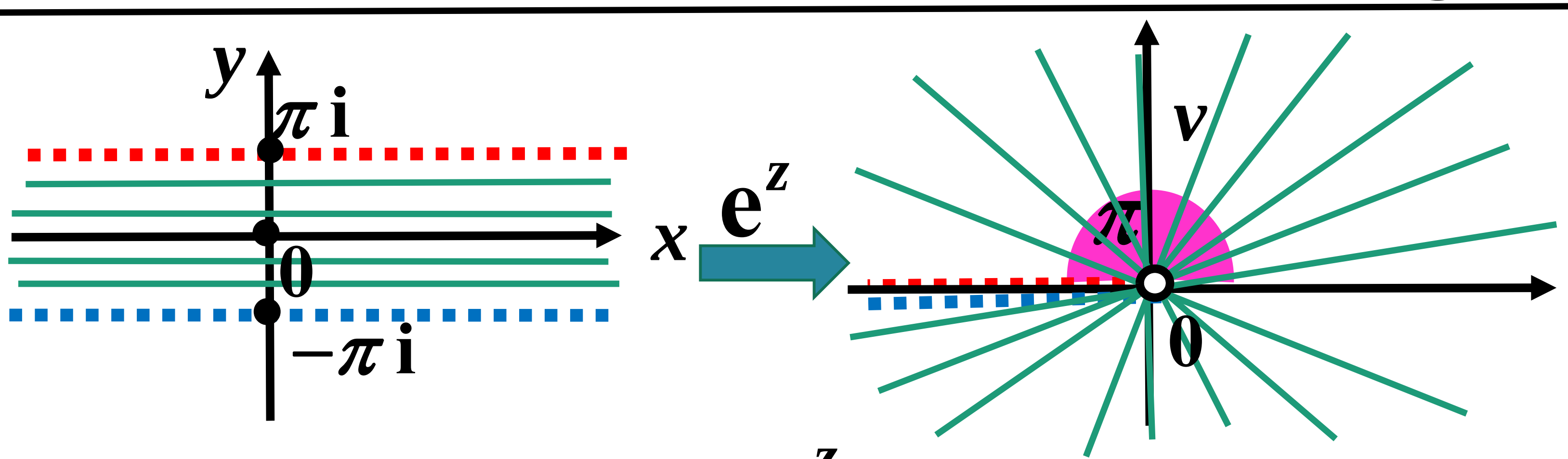
条形性域$a<\operatorname{Im}z<b$，$b-a\le 2\pi$ $\xrightarrow{e^z}$ 角域$a<\arg w<b$.

直线$L_1:\operatorname{Im}z=y_0$，$a<y_0<b$ $\xrightarrow{e^z}$ 不含原点的射线L：$\arg w=y_0$.

线段：$\operatorname{Re}z=x_0$，$a<\operatorname{Im}z<b$ $\xrightarrow{e^z}$ 圆弧$|w|=e^{x_0}$，$a<\arg w<b$.



条形性域 $0<\mathrm{Im}\,z<\pi$ $\xrightarrow{e^z}$ 上半w平面 $0<\arg w<\pi$



条形性域 $-\pi<\mathrm{Im}\,z<\pi$ $\xrightarrow{e^z}$ 割去负半实轴和原点的w平面

$-\pi<\arg w<\pi$

条形性域

$(2k-1)\pi<\mathrm{Im}\,z<(2k+1)\pi$

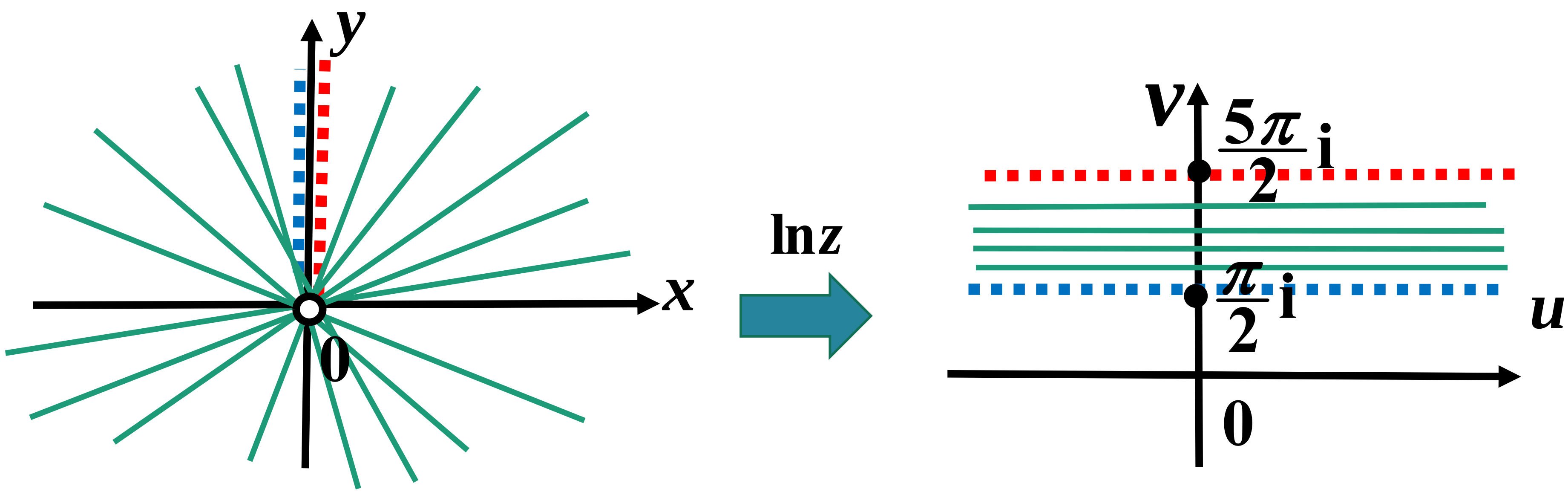
$\xrightarrow{e^z}$

割去负半实轴和原点的w平面

$(2k-1)\pi<\arg w<(2k+1)\pi$

在除去原点和上半虚轴的复平面取 $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2}$ 内，则得连续的函数

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z, \quad \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2}.$$



沿上半虚轴割开的z平面 $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2}$ $\xrightarrow{\ln z}$ 条形域：$\frac{\pi}{2} < \mathrm{Im}\, w < \frac{5\pi}{2}$

- $\mathbf{tg}\, z$, $\mathbf{ctg}\, z$ 以π为周期, 即

$$\mathbf{tg}(z+\pi)=\mathbf{tg}\, z, \quad \mathbf{ctg}(z+\pi)=\mathbf{ctg}\, z.$$

- $\mathbf{th}\, z$, $\mathbf{cth}\, z$ 以$\pi\,\mathrm{i}$为周期, 即

$$\mathbf{th}(z+\pi\,\mathrm{i})=\mathbf{tg}\, z, \quad \mathbf{cth}(z+\pi\,\mathrm{i})=\mathbf{ctg}\, z.$$