2022 春复变函数 B

Contents

1 复数和平面点集、复变数函数

1.1 Cauchy-Riemann 条件

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

等价形式:

$$(1)\, i\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$(2)\, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Rightarrow |f'(z)|^2 = (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2, f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

subsection 二维 Laplace 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

1.2 三角函数相关

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

$$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

$$\Rightarrow \sinh z = -i \sin iz, \cosh z = \cos iz, \tanh z = -i \tan iz$$

$$\begin{cases} \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \\ 1 - \tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z \end{cases} \qquad \begin{cases} |\sinh y| \leqslant |\sin(x+iy)| \leqslant \cosh y \\ |\sinh y| \leqslant |\cos(x+iy)| \leqslant \cosh y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2 \\ \cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2 \end{cases}$$

1.3 对数函数相关

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z$$

$$w = \sqrt{z-a}, |w| = \sqrt{|z-a|}, \arg w = \frac{1}{2}\arg(z-a)$$

$$\arcsin z = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right), \arccos z = \frac{1}{i}\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right), \arctan z = \frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}$$

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}, \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{2k\pi+\theta}{n}} (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

2 解析函数的积分表示

2.1 复积分

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)dt$$
$$\int_C [af(z)+bg(z)]dz = a\int_C f(z)dz + b\int_C g(z)dz$$
$$\int_C f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz, \int_{C=C_1+C_2} f(z)dz = (\int_{C_1} + \int_{C_2})f(z)dz$$

长大不等式

$$|\int_C f(z)dz| \leqslant \int_C |f(z)|dS$$

2.2 Cauchy 积分定理

设 D 为单连通区域，$f(z)$ 在 $D+\partial D$ 上解析，则 $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$
推论：

1. 设 $f(z)$ 在 D 内解析，C 是 D 内任意闭曲线，则 $\int_C f(z)dz = 0$
2. 设 $f(z)$ 在 D 内解析，a, b 是 D 内两点，C 是任意一条分别以 a, b 为起点、终点的简单曲线，则 $\int_C f(z)dz$ 只与起点、终点有关
3. 设 $f(z)$ 在复闭路 $C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$ 及其所围成的多连通区域内解析，则 $\int_{C_0} f(z)dz = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f(z)dz$ 或 $\int_C f(z)dz = 0$

2.3 Cauchy 积分公式

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, n=1 \\ 0, n \neq 1 \end{cases} ,C: z = a + Re^{i\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

设 f(z) 在闭路（或复闭路）C 及其所在区域内解析
(1).a 为 D 内任意一点

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a)$$

(2). 对 D 内任意一点 z

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi$$

$\Rightarrow$ 解析函数无穷次可微，特别地，考虑 n=0 的情况

2.4 一些个定理

(1) 平均值公式

设 f(z) 在闭圆 $|z-a| \leqslant R$ 解析，则 f(z) 在圆心 a 的值等于它在圆周上的算术平均值

$$f(a) = \frac{1}{2\pi R}\int_C f(\xi)dS = \frac{1}{2\pi}\int_C f(\xi)d\theta$$

(2) 最大模原理

设 f(z) 在有界区域 D 内，且 f(z) 不恒等于常数，则 |f(z)| 只能在边界 ∂D 上取到它在有界闭区域 $D+\partial D$ 上的最大值

(3) 柯西不等式

设 f(z) 在区域 D 内解析，以 D 内任意一点 z 为圆心，作一个包含在 D 内的圆周 C:$|\xi - z| = R$, 设 M(R) 是 |f(z)| 在 C 上的最大值，则 $|f^{(n)}(z) \leqslant \frac{n!M(R)}{R^n}$

(4) 刘维尔定理

一个整函数 (在不包括 ∞ 全平面上解析的函数) 如果不是常数。则次整函数在全平面上无界；即整函数在复平面上有界，则 $f = const$

(5) 代数学基本定理

任何复系数多项式 $f(z) = a_0z^n + \cdots + a_n, (n \geqslant 1, a_0 \neq 0)$ 必有零点

(6) 莫雷拉定理

如果函数 f(z) 在区域 D 内连续，并且对 D 中的任何闭曲线 C 有 $\int_C f(z)dz = 0$, 则 f(z) 在 D 内也解析

3 调和函数

3.1 调和函数

如果实函数 $u(x,y)$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 则称 $u(x,y)$ 为调和函数；解析函数的实部和虚部都是调和函数; 如果 f(z) 在区域 D 内解析，称它的实部和虚部为该区域的共轭调和函数

3.2 已知调和函数 v(x,y) 充当解析函数 f(z) 虚部求其实部

法 1.$du=u_x dx+u_y dy \Rightarrow u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v_y dx-v_x dy+C$

法 2. 由 $u_x=v_y$ 积分得 $u=\int v_y dx+\varphi(y)$，再代入 $u_y=-v_x$ 得到 $\varphi(y)$

法 3. 由 $f'(z)=u_x+iv_x$ 对 z 积分

定理: 若 $f(z)$ 解析且 $f'(z)\neq 0$, 那么 $u(x,y)=C_1, v(x,y)=C_2$ 在公共点正交

3.3 相关定理

(1) 平均值定理

设 u(z) 是闭圆 $D:|z-z_0|<R$ 上调和函数，则 $u(z_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_{\partial D} u(z)dS$

(2) 极值原理

设 u(z) 是闭圆 $D:|z-z_0|<R$ 上调和函数, 且在有界闭域 $D+\partial D$ 上连续，且 u 不恒等于常数, 则 u(z) 只能在边界 ∂D 上取得最大值和最小值

(3) 泊松公式

设 u(z) 是闭圆 $D:|z-z_0|<R$ 上调和函数, 则对该圆内任意一点 $z=z_0+re^{i\varphi}(r<R)$，有 $u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\theta)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta$, 式中 $u(r,\varphi)=u(z_0+re^{i\varphi}), u(R,\varphi)=u(z_0+Re^{i\theta})$

(4) 狄利克雷问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0, z\in R\\ u(z)|_C=u(\xi)\end{cases}$$

此问题的解唯一且稳定

(5) 定理：设 u_1,u_2 在有界区域 D 内调和，在有界闭域 $D+\partial D$ 上连续，且 u_1,u_2 在边界 ∂D 上相差不超过 ε，即当 $\xi\in\partial D$ 时，$|u_1(z)-u_2(z)|\leqslant\varepsilon$, 在 $D+\partial D$ 上也有 $|u_1(z)-u_2(z)|\leqslant\varepsilon$

4 解析函数的级数展开

4.1 复级数

(1)$S_n = z_1 + \cdots + z_n$, 如果 $n \to \infty$ 时有 $S_n \to S$(S 为有限复数)，则称 $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 收敛于 S

(2)Cauchy 收敛准则:$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 收敛 $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in N^*, s.t. n > N$ 时有 $\forall p \in N^*, |z_{n+1} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon$

(3) 绝对收敛: 如果 $\sum_{k=1}^{+\inf} |z_k|$ 收敛，则称 $\sum_{k=1}^{+\inf} z_k$ 绝对收敛

4.2 复变函数项级数

(1) 如果 $\sum_{k=1}^{+\infty} f(z_0)$ 收敛，则称函数项级数在 z_0 收敛，如果在 E 上任意一点都收敛，则称级数在 E 上收敛

(2) 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 与 z 无关的 $N(\varepsilon) \in N^*, s.t. n > N(\varepsilon)$ 时，$\forall z \in E$ 有 $|S_n(z) - S_(z)| < \varepsilon$，则称 $\sum_{k=1}^{+\infty} f(z_0)$ 在 E 上一致收敛于 $S(z)$

(3)$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$ 一致收敛 $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in N^*, s.t. \forall n > N(\varepsilon), \forall p \in N^*, \forall z \in E, |f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon$

(4) 比较判别法: 若 $\forall z \in E$ 有 $|f_k(z)| \leqslant M_k$。若正项级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} M_k$ 收敛，则 $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$ 在 E 上绝对收敛且一致收敛

性质:

(1) 如果 $f_k(z)$ 是区域 D 内连续函数，级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$ 在 D 内一致收敛于 $f(z)$, 则有:

a.$f(z)$ 在 D 内也连续； b.$\int_C f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_C f_k(z) dz$

(2) 设 $f_k(z)$ 在区域内解析且级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}$ 在 D 内一致收敛于 $f(z)$ 且可以逐项求导到任意多阶, 既有 $f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k^{(n)}(z)$

4.3 幂级数

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$, 通项 $f_n(z) = a_n (z-a)^n$ 为全平面解析

(1) 若幂级数在 $z_0 \neq a$ 收敛，则它在 $|z-a| < |z_0 - a|$ 内一致收敛 $\Rightarrow$ 若幂级数在某点 $z_0 \neq a$ 发散，那么它在 $|z_0 - a| < |z - a|$ 也发散

(2) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n$ 的收敛半径为 R, 则 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ 的收敛半径也为 R; 若 $\lim_{n \to +\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1/R$ 或 $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/R$, 则 R 为收敛半径

(3) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ 的收敛半径为 $R \neq 0$, $\forall r < R, \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ 在 $|z-a| < r_0$ 内一致收敛; $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ 收敛道德核函数 $f(z)$ 解析，$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-a)^{n-k}$

4.4 泰勒展开

(1) 设 $f(z)$ 在 a 点解析，R 是 a 点和 $f(z)$ 所有奇点的最短距离，则在 $|z-a| < R, f(z)$ 可以展开为 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$, 其中 $a_n = f^{(n)}(a)/(n!)$

(2) 定义: 若 $f(z_0) = 0$ 且 $f(z)$ 在 z_0 解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的零点; 在 z_0 的邻域 u 内，$f(z) = a_1(z-z_0) + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$，若在 u 内,$f(z)$ 不恒为 0，则 $\exists m, s.t. a_m \neq 0$ 且 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0$, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点；特别地,m=1 时称为 $f(z)$ 的单零点

(3) 孤立零点原理: 设 $f(z)$ 在 z_0 解析，且 z_0 是它的一个零点，则要么有 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内恒等于 0，要呢 $f(z)$ 在 z_0 的一邻域内唯一零点为 z_0

4.5 罗朗级数

形如下式的级数称为罗朗级数, 右式前一项为主要部分，后一项为正则 (解析) 部分

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

(1) 收敛于环形区域 $r < |z-a| < R$; 其中 R 为 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ 的收敛半径;$r = 1/H$,H 为 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\xi^k$ 的收敛半径
(2) 设 $f(z)$ 在圆环区域 D:$r < |z-a| < R$ 内解析，则 $f(z)$ 一定能在这个圆环内展开为罗朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n \, with \, a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi, n = 0, \pm 1, \pm\cdots$$

C 为包围 a 的任意闭路；特别地，如果 C 是围绕 $f(z)$ 的孤立奇点 a 的环路，则求 $f(z)$ 在 C 上积分问题可以转化为求 a_{-1} 的问题 $\int_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1}$

4.6 孤立奇点

(1) 定义：a 为 $f(z)$ 的一个奇点，若 $\forall a$ 的邻域 $u : |z-a| < \rho$ 内除了 a 点外都是解析的，则称 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点，且 $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$
a. 罗朗展开式不含主要部分，称 a 为可去奇点
b. 罗朗展开式只含有有限多项主要部分，称 a 为极点

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_k(z-a)^k, (a_{-m} \neq 0)$$

则称 $z = a$ 为 m 级极点
c. 罗朗展开式含无穷多项主要部分, 称 a 为本性奇点

(2) 奇点类型的判断
a. 孤立奇点 a 为可去奇点 $\Leftrightarrow \exists\rho > 0, s.t.$ 在 $0 < |z-a| < \rho$ 内 $f(z)$ 有界
b. 孤立奇点 a 为 m 级极点 $\Leftrightarrow f(z)$ 在 a 为中心某环域 $0 < |z-a| < \rho$ 内可表示为 $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$,$\varphi(z) \neq 0$ 且 $\varphi(z)$ 在 z=a 解析
c. 孤立奇点 a 为极点 $\Leftrightarrow \lim_{z\to a} f(z) = \infty$
d. 孤立奇点 a 为本性奇点 $\Leftrightarrow$ 不存在有限或无限的 $\lim_{z\to a} f(z)$

(3)∞ 孤立奇点：作变换 $\xi = 1/z$ 得 $\varphi(\xi) = f(1/\xi)$，则函数 $\varphi(\xi)$ 在 $\xi = 0$ 的奇点类型就是 $f(z)$ 的孤立奇点 $z = \infty$ 的奇点类型
$\varphi(\xi)$ 在 $0 < |\xi| < 1/R$ 的罗朗展开式为 $\varphi(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\xi^n \Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n}z^n \quad (*)$
a.$z = \infty$ 是 $f(z)$ 可去奇点 $\Rightarrow$ (*) 不含 z 的正次项
b.$z = \infty$ 是 $f(z)$ 极点 $\Rightarrow$ (*) 只含有有限多项 z 的正次幂，如果 z 的最高次幂为 z^m, 则为 m 级极点
c.$z = \infty$ 是 $f(z)$ 本性奇点 $\Rightarrow$ (*) 含有无穷多项 z 的正次幂

5 留数定理

5.1 定义

(1) 留数：设 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点，C 是 a 充分小邻域内把 a 包含在内的一个闭路，则称 $\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$ 为 $f(z)$ 在 a 的留数，记为 $Res[f(z),a]$

(2) 留数定理：设 $f(z)$ 在闭路 C 上解析，在 C 内除了 n 个孤立奇点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 外都解析，则

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res[f(z),a_k]$$

(3) 留数的计算方法

a. 若 a 为 $f(z)$ 可去奇点，$Res[f(z),a]=0$

b. 若 a 为 f(z) 极点：(i) 用罗朗展开得出 a_{-1}, 有 $a_{-1}=Res[f(z),a]$;(ii)a 为 $f(z)$m 级极点，则

$$Res[f(z),a]=a_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]$$

c. 若 a 为 $f(z)$ 本性奇点，系统的方法就是用罗朗展开得到 a_{-1}

(4) 推论: 设 $P(z),Q(z)$ 在 a 解析，且 $P(a)\neq 0, Q(a)=0, Q'(a)\neq 0$, 则 $Res[\frac{P(z)}{Q(Z)},a]=\frac{P(a)}{Q'(a)}$

5.2 在实积分的应用

(1) 引理

(i) 如果当 R 充分大时，$f(z)$ 在圆弧 $C_R: z=Re^{i\theta},\alpha<\theta<\beta$ 上连续且 $\lim_{z\to\infty} zf(z)=0$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz=0$$

(ii) 如果当 ρ 充分小时，$f(z)$ 在圆弧 $C_\rho: z=a+\rho e^{i\theta},\alpha<\theta<\beta$ 上连续且 $\lim_{z\to a}(z-a)f(a)=k$, 则

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)dz = i(\beta-\alpha)k$$

推论: 设 a 为 $f(z)$ 的一级极点，则 $\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)dz = i(\beta-\alpha)Res[f(z),a]$

(iii) 约当引理：如果当 R 充分大时，$g(z)$ 在圆弧 $C_R: |z|=R, Imz>-\alpha,(\alpha>0)$ 上连续且 $\lim_{z\to\infty} g(z)=0$, 则

$$\forall\lambda>0, \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} g(z)e^{i\lambda z}dz=0$$

(2) 计算

(i)$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)$ 型

$$z=e^{i\theta}\Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}),\sin\theta=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}),d\theta=\frac{1}{iz}dz$$

(ii)$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$, 这里 $R(x)=P(x)/Q(x)$ 为有理函数，并假定 $Q(x)$ 在实轴上五菱嗲，且分母 $Q(x)$ 至少比 $Q(x)$ 高两次, $a_j, j=1,2,\cdots,n$ 为 $R(z)$ 在上半平面的所有奇点

$$\Rightarrow R(x)dx = 2\pi i\sum_{j=1}^{n} Res[R(z),a_j]$$

(iii)$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos mx\,dx, \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin mx\,dx$, 这里 $R(x) = P(x)/Q(x)$ 为有理函数，$R(x)$ 在实轴上除了有限个单极点 $x_1, x_2, \cdots, x_l$ 都解析且 $Q(x)$ 至少比 $P(x)$ 高一次，$m > 0$;$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 $R(z)$ 在上半平面的所有奇点

令 $I = I_1 + I_2, I = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos mx\,dx, I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin mx\,dx$, 则

$$I = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res[R(z), a_k] + \pi i\sum_{k=1}^{l} Res[R(z)e^{imz}, x_k]$$

5.3 幅角原理

(1) 引理

设 a,b 分别为函数 $f(z)$ 的 m 级零点和 n 级极点，则 a、b 都为 $f'(z)/f(z)$ 的一级极点，且 $Res[f'(z)/f(z), a] = m, Res[f'(z)/f(z), b] = -n$;

(2) 引理

设 $f(z)$ 在闭路 C 内可能有有限多个极点，除去这些极点外，$f(z)$ 在 C 以及其内部解析且在 C 上无零点，则 $\int_C f'(z)/f(z)dz = 2\pi(N-P)i$;(这里 N 和 P 分别表示 $f(z)$ 内零点和极点总数，约定每个 k 级零点或极点算 k 个零点或极点)

(3) 幅角原理

设 $f(z)$ 在闭路 C 内可能有有限多个极点，除去这些极点外，$f(z)$ 在闭路 C 以及其内部解析且在 C 上无零点，则 $\Delta_C \arg f(z) = 2\pi(N-P)$;

(4) 儒歇定理

设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在闭路 C 及其内部解析，且在 C 上有 $|f(z)| > |g(z)|$, 则在 C 内部 $f(z) + g(z)$ 与 $f(z)$ 的零点个数相等

5.4 ∞ 点

$$Res[f(z), \infty] + \sum_{k=1}^{n} Res[f(z), a_k] = 0$$
$$Res[f(z), \infty] = Res[f(\frac{1}{t}) \cdot \frac{1}{t^2}, 0]$$
$$Res[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-} f(z)dz,\ \Gamma : |z| = \rho > r, 0 \le R < \rho < +\infty$$

设多项式 $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ 在虚轴上无零点，当 z 自下而上沿虚轴从 $-\infty$ 走向 $+\infty$ 的过程中 $p(z)$ 绕原点转了 k 圈，即 $\Delta \arg p(iy) = 2k\pi$, 则 $p(z)$ 在左平面共有 $k + \frac{n}{2}$ 个零点

6 Laplace 变换

6.1 定义

(1) 设 $f(t)$ 是实变量 t 的函数，当 $t<0$ 时，$f(t)=0$；如果含复参数 p 的积分在 p 的某个区域内收敛，则由此积分所确定的函数 $F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ 称为 $f(t)$ 的 Laplace 变换或像函数，简记为 $F(p)=L[f(t)]$；而 $f(t)$ 称为 $F(p)$ 的 Laplace 逆变换或本函数，记为 $f(t)=L^{-1}[F(p)]$

(2) 条件：a.$f(t)$ 光滑，即在 t 轴上任何右线区间内,$f(t)$ 和 $f'(t)$ 除有限个第一类间断点外处处连续；b.$f(t)$ 是指数增长型的，即存在两常数 $k>0, c\geq 0$,s.t.$\forall t\geq 0$ 有 $|f(t)|\leq ke^{ct}$, 称 c 为 $f(t)$ 的增长指数

若 $f(t)$ 满足条件 a、b, 则 $F(p)$ 在半平面 $Re\ p>c$ 上有意义且解析；

6.2 性质

$$L[af(t)+bg(t)]=aL[f(t)]+bL[g(t)]$$
$$L[f(\alpha t)]=\frac{1}{\alpha}F(\frac{p}{\alpha})$$
$$L[f'(t)]=pF(p)-f(0^+)\Rightarrow L[f^n(t)]=p^nL[f(t)]-p^{n-1}f(0^+)-p^{n-2}f'(0^+)-\cdots-f^{n-1}(0^+)$$
$$L[\int_0^t f(\xi)d\xi]=\frac{F(p)}{p}$$
$$F'(p)=L[-tf(t)]\Rightarrow F^{(n)}(p)=L[(-t)^nf(t)]$$
$$L[\frac{f(t)}{t}]=\int_0^\infty F(p)dp$$
$$L[f(t-\tau)]=e^{-p\tau}F(p)$$
$$L[e^{\lambda t}f(t)]=F(p-t)$$
$$L[f(t)]=\frac{1}{1-e^{pt}}\int_0^T f(t)e^{-pt}dt, f(t)=f(T+t)$$
$$L[f*g]=L[f]\cdot L[g]$$

6.3 常用

书 P181Laplace 变换表，1-8, 请自行补充

利用上述性质与常用变换，可求解 ode