与数学分析课里的实值函数一样，在复变函数里，我们要学习复变函数的极限、连续、微分、积分、级数展开等。

第二章 复变函数

2.1、复变函数的概念

- **复变函数的定义:**

设 E 是复平面上的点集,

若 $\forall z = x + \mathrm{i}\, y \in E$, $(x, y \in \mathbb{R})$, 按一定规律,

z与唯一的一个复数 $w = u + \mathrm{i} v$ 对应, $(u, v \in \mathbb{R})$,

则称在E上定义了一个复变单值函数, 称z为自变量,

记作 $w = f(z)$, $z \in E$;

若自变量的一个值z对应两个或以上的复数w,

则称在E上定义了一个复变多值函数,

也记作 $w = f(z)$, $z \in E$.

单值函数 (每个自变量z与唯一的一个复数 $w=u+\mathrm{i}v$ 对应)

如$w=\bar{z}$, $w=z+1+2i$, $w=z^3$, $w=\dfrac{z}{2z+1}\left(z\neq-\frac{1}{2}\right)$,
$w=|z|,\ldots$

多值函数 (一个自变量值z对应两个或以上的复数 w)

如$w=\sqrt[n]{z}, n\geq 2$(n个不同值), $w=\operatorname{Arg} z$(无穷多值),$\cdots$

- **复变函数与自变量之间的关系**

例如，函数 $w=z^2$，设$z=x+\mathrm{i}\,y$，$w=u+\mathrm{i}v$，则

$$w=\underline{u+\mathrm{i}\,v}=(x+\mathrm{i}\,y)^2\ \underline{=x^2-y^2+2xy\,\mathrm{i}},$$ 故

$$u=x^2-y^2,\quad v=2xy,$$

即 $w=z^2$相当于两个实二元函数：$u=x^2-y^2$，$v=2xy$.

设$z=x+\mathrm{i}\,y$，则任一复变函数

$$w=u+\mathrm{i}v=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y),$$

即f相当于两个以 x 和 y 为自变量的实二元函数：

$$u(x,y),\quad v(x,y).$$

z也可用指数表示式，如 若令$z=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，则

$$w=u+\mathrm{i}v=f(z)=f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})=u(r,\varphi)+\mathrm{i}\,v(r,\varphi),$$

即确定了自变量为 r 和 φ 的两个二元实变函数：

$$u=u(r,\varphi),\qquad v=v(r,\varphi).$$

• 复变函数的几何意义

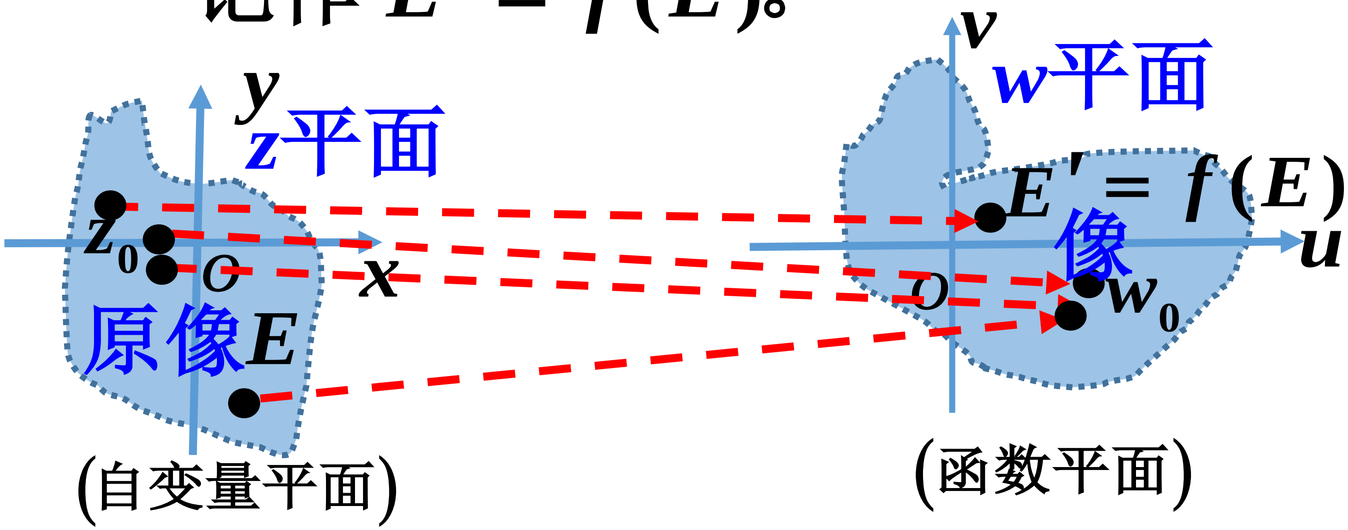
取两个复平面： z 平面 和 w 平面,

分别表示自变量 z 的值和函数 w 的值,

则 $w = f(z)$ 可看作：

把 z 平面上的点集E 变换成 w 平面上的一个点集 E' ,

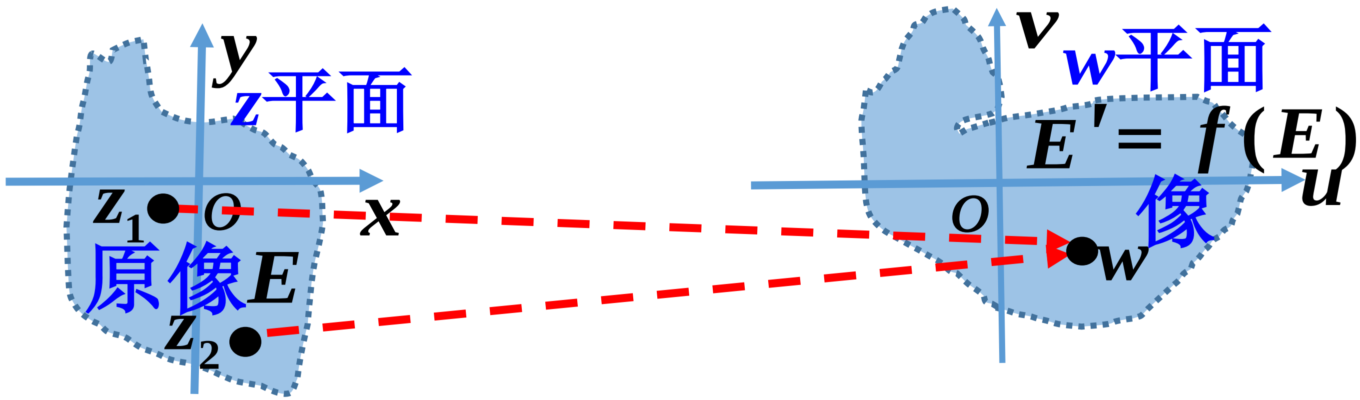
记作 $E' = f(E)$。



若$w_0 = f(z_0)$, 则称w_0为z_0的像, 称z_0为w_0的原像,

$E' = f(E)$, 称E'为E 的像, 称E为E'的原像.

单值函数$w=f(z)$：一个原像点z 只对应一个像点$w=f(z)$，但是每一个像点w 可能是由一个以上的原像点z 对应 .

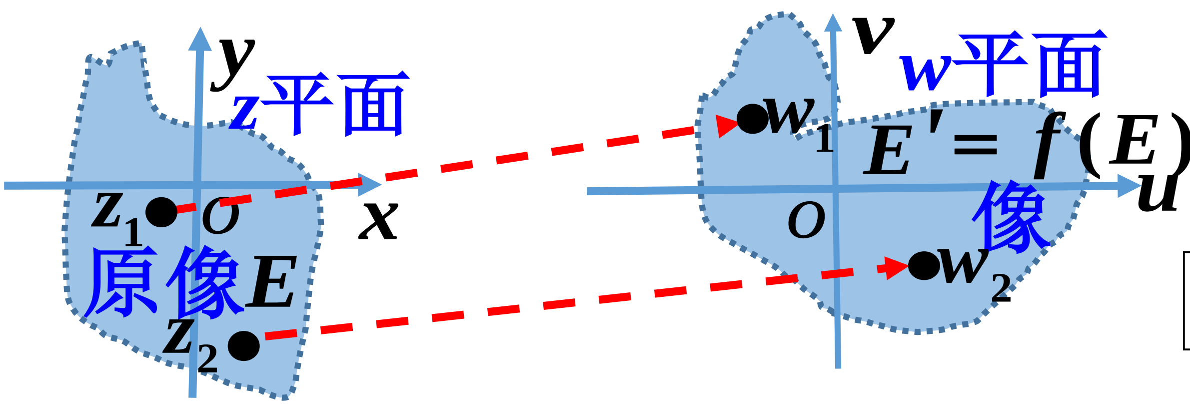


- 一一映照(即双方单值映照)

设$w=f(z)$是E上的单值函数,

如果$\forall z_1, z_2 \in E$, $z_1 \neq z_2$, 有$f(z_1) \neq f(z_2)$,

则称$w=f(z)$是E中的一一映照(或双方单值映照).



函数与映照不加区别

例1 函数 $w=az$,其中$a\neq 0,\infty$,是已知的复常数,

每个z,只对应一个w(单值), 且$z_1\neq z_2$时, $az_1\neq az_2$(一一).

它是z平面到w平面的一一映照.

因$a\cdot\infty=\infty$, 故它也是整个闭z平面到整个闭w平面的一一映照。

设$a=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$, $r>0$,则$w=az=r\{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)z\}$,

是由$\omega=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)z$和$w=r\omega$复合而成的.

把z,ω,w画在同一个平面上，则

$\omega=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)z$是旋转映照 (将向量$z$逆时针旋转$\theta$角),

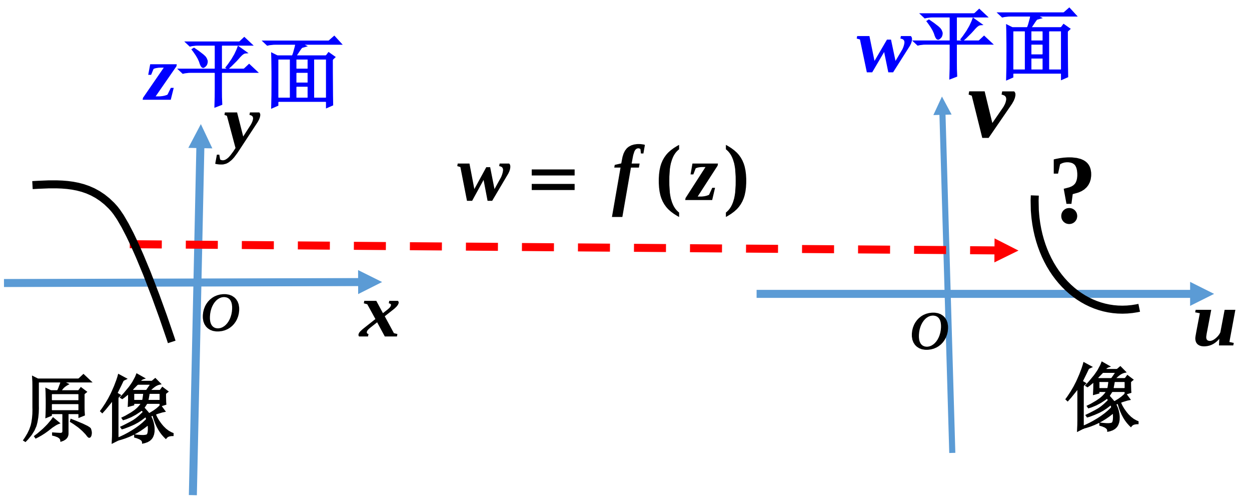
$w=r\omega$是相似映照 (模放大为ω的r 倍),

$w=az$是由旋转映照和相似映照的复合而成.

z平面的一条给定的曲线

$$\Downarrow w = f(z)$$

w平面的什么图形呢？



例2 求下列曲线在映照 $w=z^2$ 下的像:

1) 平行于虚轴的直线 $x=C$; 2) $x^2-y^2=c_1$ 和 $2xy=c_2$; $\cdots$

求解思路:

(I) 先求映照 $w=u+\mathrm{i}v=f(z)$ 确定的两个二元实值函数

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y);\qquad (\Delta)$$

(II) 将原像曲线方程与 (Δ) 联立, 消 x,y,

得出关于 u,v 的方程, 即所求的像曲线方程.

解 令 $z=x+\mathrm{i}\,y, w=u+\mathrm{i}v,\ x,y,u,v\in\mathbb{R}$, 则

$$w=z^2=(x+\mathrm{i}\,y)^2=(x^2-y^2)+2xy\,\mathrm{i}.$$ 故

$$u=x^2-y^2,\qquad v=2xy.\qquad (*)$$

例2. 求下列曲线在映照 $w=z^2$ 下的像：1) $x=C$;

解 令$z=x+\mathrm{i}\,y, w=u+\mathrm{i}\,v,\ x,y,u,v\in\mathbb{R}$, 则

$$w=z^2=(x+\mathrm{i}\,y)^2=(x^2-y^2)+2xy\,\mathrm{i}.$$ 故

$$u=x^2-y^2,\qquad v=2xy. \qquad (*)$$

1) 将 $x=c$与(*)联立消x,y.

将$x=c$ 代入$(*)$，得$u=c^2-y^2$，$v=2cy$. 再消去y.

a). 当$c\neq 0$时， $y=\dfrac{v}{2c}$，再代入$u=c^2-y^2$ 得

$$u=c^2-\frac{v^2}{4c^2},$$ 是w平面的一族抛物线.

b). 当$c=0$时，$v=0$, $u=-y^2\leq 0$, 是w 平面含原点的负半实轴.

例2. 求下列曲线在映照 $w=z^2$ 下的像：2) $x^2-y^2=c_1$ 和$2xy=c_2$；

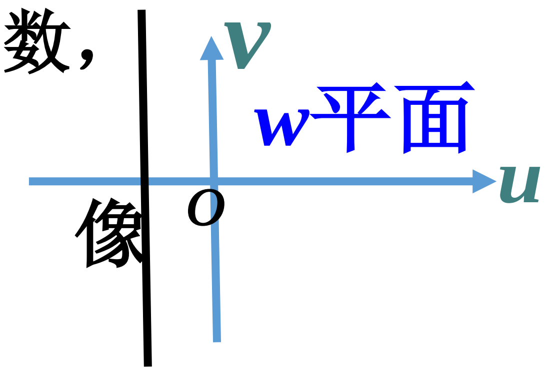
$$w=z^2=(x+\mathrm{i}\,y)^2=(x^2-y^2)+2xy\,\mathrm{i}，\text{故}$$

$$u=x^2-y^2,\qquad v=2xy. \qquad (*)$$

2) (1).先求$x^2-y^2=c_1$的像. 将$x^2-y^2=c_1$代入$(*)$得，

$u=c_1$, $v=2xy$ 可取到任意实数，

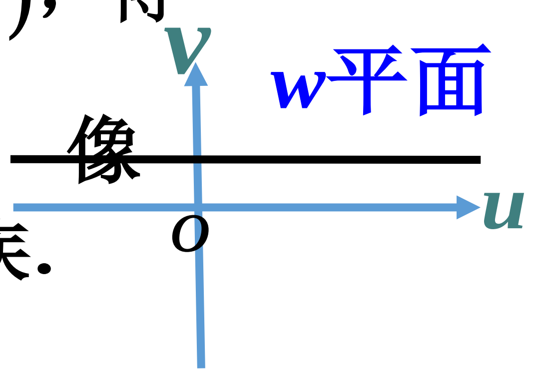
是w平面平行于V轴的直线族.



(2) 再求$2xy=c_2$的像. 将$2xy=c_2$代入$(*)$，得

$v=c_2$，$u=x^2-y^2$可取到任意实数，

是w平面的平行于u轴的直线族.



例2. 求下列曲线在 $w=z^2$ 下的像：3) $1<|z|<2,\ 0<\arg z<\pi$.

解 3) 因曲线由模和辐角的表达式给出，故用指数式.

设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，则 $\underline{1<r<2,\quad 0<\theta<\pi,}$

$$w=z^2 \Rightarrow \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta},$$ 故

$$\rho=r^2\in(1,4),\quad \varphi=2\theta\in(0,2\pi).$$

即 $1<|w|<4,\ 0<\arg w<2\pi$,

是被割开的圆环，割线是正半实轴与圆环相交的部分，

即沿正半实轴上线段[1,4]割开的圆环.

例3. 求直线$x=2$在映照 $w=\dfrac{1}{z}$ 下的像.

解 令$z=x+\mathrm{i}\,y, w=u+\mathrm{i}\,v$, 则$w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\dfrac{y}{x^2+y^2}$,

故$u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$. (#) 将$x=2$与之联立消去x, y.

将$x=2$代入(#)得 $\underline{u=\dfrac{2}{4+y^2}, v=-\dfrac{y}{4+y^2}}$. 下消$y$.

$$u^2+v^2=\frac{4+y^2}{\left(4+y^2\right)^2}=\frac{1}{4+y^2}=\frac{u}{2},$$ 故得$u^2+v^2-\dfrac{u}{2}=0$,

$$w\bar{w}-\frac{w+\bar{w}}{4}=0, \quad \left(w-\frac{1}{4}\right)\left(\bar{w}-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{16}=0,$$

$\left|w-\dfrac{1}{4}\right|=\dfrac{1}{4}$, 以点$\dfrac{1}{4}$为中心、以$\dfrac{1}{4}$为半径的圆周.

例4. 求直线圆周$x^2+(y-2)^2=2$在映照 $w=\dfrac{1}{z}$ 下的像.

解 令$z=x+\mathrm{i}\,y, w=u+\mathrm{i}\,v$, 则$w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\dfrac{y}{x^2+y^2}$,

故$u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$. (#)

由 $x^2+(y-2)^2=2$得$x^2+y^2=4y-2$,代入(#)得

$u=\dfrac{x}{4y-2}$, $v=\dfrac{y}{2-4y}$. 由第二式解得$y=\dfrac{2v}{4v+1}$, 由第一式得

$x=u(4y-2)=u\left(\dfrac{8v}{4v+1}-2\right)=-\dfrac{2u}{4v+1}$. 再代入$x^2+(y-2)^2=2$得

$\dfrac{4u^2}{(4v+1)^2}+\left(\dfrac{2v}{4v+1}-2\right)^2=2$, 整理得 $u^2+(v+1)^2=\dfrac{1}{2}$,

这是w平面以点$(0,-1)$为中心、以$\frac{\sqrt{2}}{2}$为半径的圆周.

注:在题中圆周上$2-\sqrt{2}\le y\le 2+\sqrt{2}$, 故可推得$v\neq-\dfrac{1}{4}$.

2.2、函数极限和连续性

函数极限的定义(P26定义1):

设$w = f(z)$ 在 $0 < |z - z_0| < \rho$ 内有定义，如果

$$\lim_{z \to z_0} |f(z) - w_0| = 0,$$

即$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \rho)$, 使得当 $0 < |z - z_0| < \delta$时，有

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon,$$

则称当 z 趋向于 z_0 时，$f(z)$的极限值为w_0 ，

记作 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ (或 $f(z) \xrightarrow{z \to z_0} w_0$).

几何意义： 当z 无论以什么方式或路径

进入 z_0 的一个充分小的去心δ 邻域时，

它们的像点都相应地落入w_0 的一个给定的ε 邻域内.

函数的连续性定义

定义： 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, 那么称 $f(z)$ 在 z_0 **连续**. $\boxed{\text{熟记}}$

- $f(z)$ 在 z_0 连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} \left| f(z) - f(z_0) \right| = 0.$

连续的三要素:

（1） $f(z)$在z_0处有定义;

（2） $f(z)$在z_0处有极限;

（3） $f(z)$在z_0处的极限值等于$f(z)$在z_0处的函数值.

定义： 如果 $f(z)$ 在 区域D 中的每点都连续，
则称$f(z)$在 区域D 中连续。
记为: $f(z) \in C(D)$.

连续的充要条件

定理1. 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$, $z_0=x_0+\mathrm{i}\,y_0$, 则

$f(z)$在z_0连续的充要条件是$u(x,y)$,$v(x,y)$在点(x_0,y_0)连续, 即

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u(x_0,y_0)$和$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v(x_0,y_0)$同时成立.

证明： $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$, $f(z_0)=u(x_0,y_0)+\mathrm{i}\,v(x_0,y_0)$.

$$\left|u(x,y)-u(x_0,y_0)\right|\left(\text{或}\left|v(x,y)-v(x_0,y_0)\right|\right)\le\left|f(z)-f(z_0)\right|,$$

$$\left|f(z)-f(z_0)\right|\le\left|u(x,y)-u(x_0,y_0)\right|+\left|v(x,y)-v(x_0,y_0)\right|.$$

因此

$f(z)$在z_0连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u(x_0,y_0)$和$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v(x_0,y_0)$同时成立.

$\Leftrightarrow u(x,y)$和$v(x,y)$在点(x_0,y_0)都连续，证毕. #

定理1. 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$, $z_0=x_0+\mathrm{i}\,y_0$, 则

$f(z)$在z_0连续 $\Leftrightarrow$ $u(x,y)$和$v(x,y)$在点(x_0,y_0)连续.

例如, $f(z)=\dfrac{1}{x^2+y^2}+\mathrm{i}(x^2-y^2)$,

$u(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 在xy平面内除原点$(0,0)$外处处连续,

$v(x,y)=x^2-y^2$ 在xy平面内处处连续,

则由定理1得 $f(z)$ 除$z\neq 0$外处处连续.

由定理1得

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{(x,\ y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)+\mathrm{i}\lim_{(x,\ y)\to(x_0,y_0)} v(x,y).$$

熟记

因为复变函数极限和连续的定义与实变数函数极限和连续的定义在形式上完全相同，因此与实变函数类似，

连续的复变函数的和差积商及复合函数仍然连续.

连续的复变函数的和差积商及复合函数仍然连续.

定理： (1) 设复变函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 z_0 连续，则它们的和、差、积在 z_0 处连续，

若 $g(z_0)\neq 0$(分母 $\neq 0$)时，$\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 在 z_0 处连续；

(2) 如果复函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续，

复函数 $f(h)$ 在 $h_0 \triangleq g(z_0)$ 连续，

则复合函数 $f\left(g(z)\right)$ 在 z_0 处连续.

熟记

连续的复变函数的和差积商及复合函数仍然连续.

1) 当n为正整数时，$w = z^n$在复平面处处连续.(P 27)

2) 多项式

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

在复平面处处连续，$a_0, a_1, \cdots, a_n$是任意给定的复数.(P 28)

3) 有理函数

$R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$，其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是多项式，

在复平面内除去使分母Q(z)=0的点外，处处连续.(P28)

熟记

函数极限运算法则

定理 设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在，$\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$ 存在，则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\pm\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)g(z)]=\left(\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\right)\left(\lim\limits_{z\to z_0} g(z)\right)$;

(3) 当$\lim\limits_{z\to z_0} g(z)\neq 0$时，$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}$.

$\boxed{\text{熟记}}$

特殊函数的连续性

例5. 证明 $f(z)=\dfrac{z}{\overline{z}}\ (z\neq 0)$ 当 $z\to 0$ 时的极限不存在.

证明：令 $z=x+\mathrm{i}\,y$，$f(z)=u+\mathrm{i}v=\dfrac{z^2}{|z|^2}=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$，

则 $u(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$，　$v(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

当 z 沿直线 $y=kx$ 趋于零，即 $y=kx$，$x\to 0$时，

$$v(x,y)=\frac{2x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\frac{2k}{1+k^2}\to\frac{2k}{1+k^2}$$，随 k 的变化而变化，

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y)$ 不存在，故当$z\to 0$时，$f(z)$的极限不存在.

$\Rightarrow f(z)$在 $z=0$ 时不连续.

当$(x,y)\neq(0,0)$时，$u(x,y),v(x,y)$连续，故当$z\neq 0$时，$f(z)$连续. #

例6. 设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$, $n\geq 1$, $a_0\neq 0$,

则 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$ (P43习题4).

证明: 当$|z|>1$时, $$|f(z)|=|z|^n\left|a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{z^{n-1}}+\frac{a_n}{z^n}\right|$$

$$\geq |z|^n\left\{|a_0|-\left|\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{z^{n-1}}+\frac{a_n}{z^n}\right|\right\}\geq |z|^n\left\{|a_0|-\left(\frac{|a_1|}{|z|}+\frac{|a_2|}{|z|^2}+\cdots+\frac{|a_{n-1}|}{|z|^{n-1}}+\frac{|a_n|}{|z|^n}\right)\right\}$$

$\geq |z|^n\left\{|a_0|-n\dfrac{A}{|z|}\right\}$, 其中$A=\max\limits_{1\leq j\leq n}\{|a_j|\}$。 由$|a_0|-n\dfrac{A}{|z|}>\dfrac{|a_0|}{2}$,可解得$|z|>\dfrac{2nA}{|a_0|}$.

故当$|z|>\max\left\{1,\dfrac{2nA}{|a_0|}\right\}$时, $|f(z)|>\dfrac{|a_0|}{2}|z|^n$.

又$\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{|a_0|}{2}|z|^n=\infty$, 故$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$.#

作业

P42-43

1(3)(4)(5)，

2, 3

例. 研究辐角主值函数

$$f(z)=\begin{cases}\arg z, & z\neq 0,\ -\pi<\arg z\leq\pi \\ 0, & z=0\end{cases}$$ 在各点的连续性.

解 1) 若$z_0=0$, $f(z_0)=0$, 但是当 z 沿直线$\arg z=\theta_0$ $(-\pi<\theta_0\leq\pi)$趋于原点0时, $f(z)=\theta_0\to\theta_0$.

故$f(z)$沿不同的直线趋于0时, 极限也不一样。

所以 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)$ 不存在, 故$f(z)$在$z=0$处不连续.

2) 若$z_0=x_0<0$,

当 z 从上半平面 趋于点z_0时, $f(z)$趋于π;

当 z 从下半平面 趋于点z_0时, $f(z)$趋于$-\pi$.

故当$x<0$时, $\lim\limits_{z\to x}f(z)$ 不存在, 故$f(z)$在负实半轴处处不连续.

例. 研究辐角主值函数

$$f(z)=\begin{cases}\arg z, & z\neq 0,\ -\pi<\arg z\leq\pi\\ 0, & z=0\end{cases}$$ 在各点的连续性.

3) 对于其他点 z_0，即 z_0 既不是负半实轴的点，也不是原点，

$$f(z_0)=\arg z_0.$$

$\forall\varepsilon>0$, 作一个以 z_0 为中心、$\delta\left(0<\delta\leq|z_0|\sin\varepsilon\right)$ 为半径的圆，

只要 $\delta>0$ 充分小，此圆就与负实轴和原点都不相交.

从原点向此圆引两条切线, 两条切线夹角 $\leq 2\varepsilon$，

当 z 落入此圆中, 即 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，

$$\left|f(z)-f(z_0)\right|=\left|\arg z-\arg(z_0)\right|<\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$.

故 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处连续.