3.4 原函数与不定积分

定义(P59)(原函数的定义):

如果在区域 D 内 $F'(z)=f(z)$处处成立,

则称 $F(z)$ 为 $f(z)$ 在区域 D 内的一个原函数.

问题：对区域D内的$f(z)$在什么条件下, 存在原函数$F(z)$?

原函数怎么求？

定理1(P59) 如果 $f(z)$ 在单连通区域 D 内连续，

对D内任一闭路C有 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$，

则$\forall z_0\in D$，变上限积分函数$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$在$D$内解析，

且$F'(z)=f(z)\ (z\in D)$.

注：此定理与微积分中积分学基本定理类似.

证明：导数定义+参数法积分+长大不等式.

由解析定义，只需证：$\forall z\in D$，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z).$$

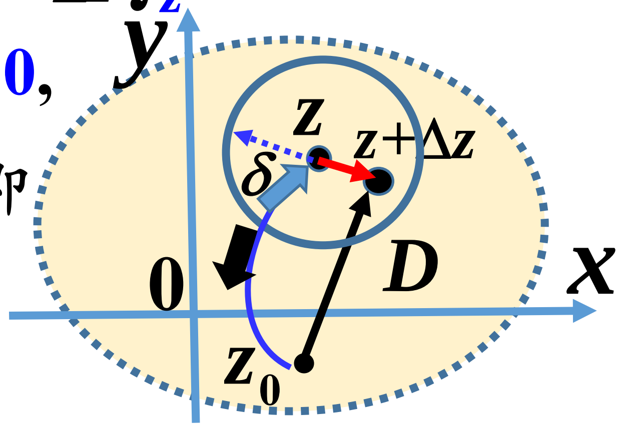
> 定义(P59) 如果在区域 D 内有 $F'(z)=f(z)$，
>
> 则称 $F(z)$ 为 $f(z)$ 在区域 D 内的一个原函数.

$\forall z\in D$(开), 在以z为中心且含于D内的圆内任取点 $z+\Delta z,\ \Delta z\neq 0.$

由条件易知$f(\zeta)$在D内的积分与路径无关,故可取积分路径为起点到终点的直线段，见下图.

$$\therefore \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right]-f(z)$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\,\mathrm{d}\zeta\ \left(\because \text{由参数法有}\ \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\mathrm{d}\zeta=1\right).$$



因$f(\zeta)$在D内连续,故$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0,$

使得当$0<|\Delta z|<\delta$, ζ在z到$z+\Delta z$的直线段上,即

$|\zeta-z|\leq|\Delta z|<\delta$时,满足$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon.$

从而由长大不等式得

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\,\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$<\frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|(z+\Delta z)-z|=\varepsilon\Rightarrow \text{结论}.\#$$

推论1: 如果$f(z)$在单连通区域D内解析，

则 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$在$D$内解析, $F'(z)=f(z)$.

证明: 若$f(z)$在单连通区域D内解析,则由柯西积分定理知

对D内任一闭路C有$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0$, 故由P59定理1得出结论.#

推论2: 如果$f(z)$在单连通区域D内解析，

$H(z)$是$f(z)$的任一原函数，则

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=H(z)-H(z_0).$$ (牛顿-莱布尼兹公式)

证明: 由推论1, $F'(z)=f(z)$. 由条件, $H'(z)=f(z)$.

故$\{F(z)-H(z)\}'=0$. 则$F(z)-H(z)=C$(复常数).

因$F(z_0)=0$, 故$C=F(z_0)-H(z_0)=-H(z_0)$. 证毕.#

例 求 $\int_{i}^{1-i}(z^2+1)dz$ 的值.

解 z^2+1 在全平面解析,

它有一个原函数: $\frac{z^3}{3}+z$, 因为$\left(\frac{z^3}{3}+z\right)'=z^2+1$.

故由推论2(P60)牛顿-莱布尼兹公式得,

$$\int_{i}^{1-i}(z^2+1)dz=\left(\frac{z^3}{3}+z\right)\Bigg|_{i}^{1-i}=\left\{\frac{(1-i)^3}{3}+(1-i)\right\}-\left(\frac{i^3}{3}+i\right)$$

$$=\frac{1^3+3\cdot1^2\cdot(-i)+3\cdot1\cdot(-i)^2+(-i)^3}{3}+1-i-\frac{i^3}{3}-i$$

$$=\frac{1-3i-3-i^3}{3}+1-2i-\frac{i^3}{3}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{7}{3}i.$$

例 求 $\int_0^{i} z\cos z\mathrm{d}z$ 的值.

解 因$z\cos z$在全平面解析，故

$$\int_0^{i} z\cos z\mathrm{d}z = \int_0^{i} z\mathrm{d}(\sin z) = (z\sin z)\Big|_0^{i} - \int_0^{i} \sin z\mathrm{d}z$$

$$= (z\sin z)\Big|_0^{i} + \cos z\Big|_0^{i} = i\sin i - 0 + \cos i - \cos 0$$

$$= i\cdot i\,\mathrm{sh}\,1 + \mathrm{ch}\,1 - 1 = -\mathrm{sh}\,1 + \mathrm{ch}\,1 - 1$$

$$= -\frac{e - e^{-1}}{2} + \frac{e + e^{-1}}{2} - 1$$

$$= e^{-1} - 1.$$

莫雷拉(Morera)定理(柯西积分定理的逆定理)

定理2(P61) 若$f(z)$在单连通区域D中连续,

对D内任一闭路C, $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, 则$f(z)$在$D$ 内解析.

证明: 由P59 定理1, $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ 在D 内解析, $F'(z) = f(z)$.

再由柯西积分公式知,

在D 内$F(z)$有任意阶导数, $F^{(n)}(z)$在D 内解析, $n = 0,1,2,\cdots$

故 $f(z) = F'(z)$在D 内解析.#

综合莫雷拉(Morera)定理和柯西积分定理得:

定理 $f(z)$在单连通区域D内解析的充要条件是:

$f(z)$在单连通区域D内连续, 且对D内任一闭路C, 有

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

3.5 解析函数与调和函数的关系

定义(P61)：如果实函数$u=u(x,y)$在区域D内有二阶连续偏导数，且在D内满足Laplace方程或调和方程

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$ ★★★

则称 $u(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数.

例 a, $ax+by$, (a,b为任意实常数), $2xy$ 都是调和函数，

x^2-y^2, $e^x\cos y$, $e^x\sin y$, …也都是调和函数.

而 x^2, y^2, x^2+y^2, e^{x+y}, 等都不是调和函数.

例 $e^{ax}\sin by$ 在什么条件下是调和函数？其中a,b 为实常数.

解：记$u(x,y)=e^{ax}\sin by$, 有二阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a\,e^{ax}\sin by,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\,e^{ax}\sin by,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=b\,e^{ax}\cos by,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-b^2\,e^{ax}\sin by.$$

故 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\underline{(a^2-b^2)}e^{ax}\underline{\sin by.}$

$\therefore$ 当$a^2-b^2=0$或$\sin by=0$, $\forall y\in\mathbb{R}$时，$u(x,y)$是调和函数.

即当$a=\pm b$或$b=0$时, $u(x,y)$是调和函数.

定义：若$u=u(x,y)$在区域D内有二阶连续偏导数，

且在D内满足Laplace方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ (也记作$\Delta u=0$),

则称 $u(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数.

定理1(P 61): 设$z=x+\mathrm{i}\,y\in D$, $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 在 D 内解析,

则$f(z)$的实部$u(x, y)$和虚部$v(x, y)$都是D 内的调和函数.

证明: 需证明$\Delta u=0, \Delta v=0$. 因$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$ 在 D 内解析,

故u与 v在D内可微, 满足柯西-黎曼(简称$C-R$)方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由于解析函数具有任意阶导数, 故u 与 v也有任意阶连续偏导数.

对$C-R$方程第一式关于x、第二式关于y求偏导得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\Rightarrow u\text{调和.}$$

对$C-R$方程第一式关于y、第二式关于x求偏导得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\Rightarrow v\text{调和. 证毕.\#}$$

定义. 若 $u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 D 内解析，

则称虚部v是实部u 的共轭调和函数.

例 因$z^2=(x+\mathrm{i}y)^2=(x^2-y^2)+2xy\mathrm{i}$，解析,

由定理1(P61)得，x^2-y^2，$2xy$ 都是调和函数，

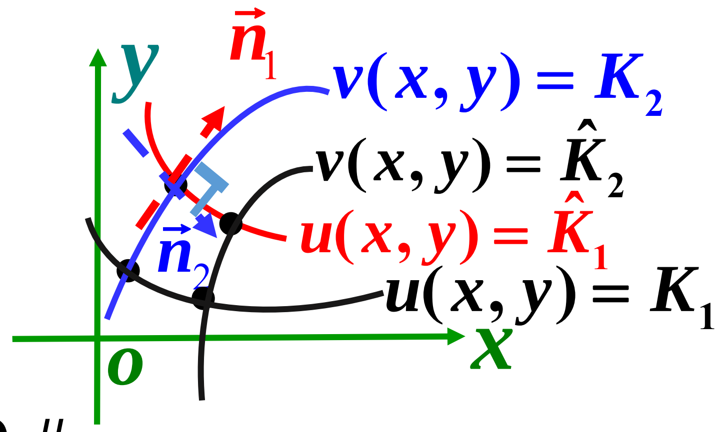
$2xy$ 是 x^2-y^2 的共轭调和函数.

定理2(P 62)：设$f(z)=u+\mathrm{i}v$解析，且$f'(z)\neq 0$,则等值曲线族

$u(x,y)=K_1, v(x,y)=K_2$在其公共点上永远正交，K_1,K_2：常数.

证明 两族曲线的法向量为

$$\vec{n}_1=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right),\vec{n}_2=\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$



则在交点上由$C-R$方程有

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=0.\#$$

注：对区域 D 内的任意两个调和函数 $u(x,y)$和$v(x,y)$,

$u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 D 内不一定解析.

例 $f(z)=(x^2-y^2)+6\mathrm{i}$, 实部和虚部都是调和函数,

但除点(0,0)外, 实部和虚部不满足柯西–黎曼方程, 故 $f(z)$处处不解析.

问题：已知 $u(x, y)$是区域D内的调和函数,那么是否存在 $v(x, y)$,

使得 $u(x, y)+\mathrm{i}\,v(x, y)$在$D$内解析？

答案是肯定的，见下面的定理3.

定理3(P63) 已知(实部)$u(x, y)$是单连通域D内的调和函数,则D内线积分

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C \quad (*)$$

利用C-R
方程熟记

所确定的函数$v(x, y)$使得$f(z)=u(x, y)+\mathrm{i}\,v(x, y)$在$D$内解析,

其中(x_0,y_0)是D内任意一点，C是任意实常数.

解析函数实部 $\Rightarrow$ 虚部

证明 设 $P=-\frac{\partial u}{\partial y}$, $Q=\frac{\partial u}{\partial x}$.

因u是调和函数, 故 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

故由Green公式知, $(*)$右边线积分值与积分路径无关.

从 $(*)$ 和微积分知识知, $v(x,y)$可微, 且

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

$\therefore u, v$满足C-R方程,故$f(z)=u+\mathrm{i}\,v$解析.#

定理3'(P64) 已知(虚部)$v(x, y)$是单连通域D内的调和函数,则D内线积分

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x-\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y+C$$

★★★

利用C-R方程熟记

使得 $f(z)=u(x, y)+\mathrm{i}\,v(x, y)$ 在D内解析,

$\boxed{\text{解析函数虚部}\Rightarrow\text{实部}}$

其中C是任意实常数,(x_0,y_0)是D内任意一点.

注:定理3'的证明与定理3的证明类似.

例(P64) 求解析函数$f(z)$, 使其虚部$v(x,y)=2x^2-2y^2+x$, 且满足$f(0)=1$.

解 首先验证$v(x,y)$是调和函数.

$$\frac{\partial v}{\partial x}=4x+1,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=4,\frac{\partial v}{\partial y}=-4y,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-4,\text{故}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

故v 全平面调和. 故可以找到以v为虚部的解析函数$f(z)$.

求$f(z)$实部u. 方法1. 利用定理3′中线积分(P 64)计算.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$,取$(x_0,y_0)=(0,0)$.

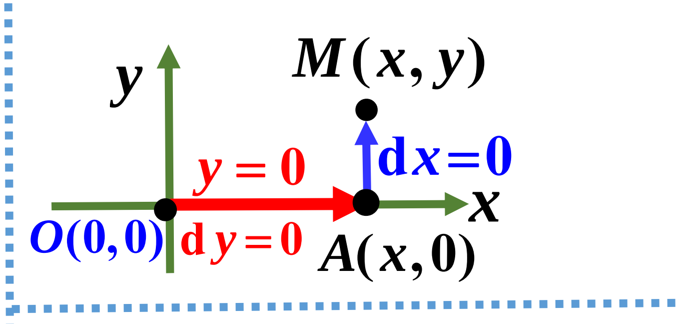
取如下图所示的分段平行于坐标轴的积分路径，有

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x-\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-4y\,\mathrm{d}x-(4x+1)\,\mathrm{d}y+C$$

$$=\underbrace{\int_0^x -4\cdot 0\,\mathrm{d}x}_{OA段}-\underbrace{\int_0^y (4x+1)\,\mathrm{d}y}_{AM段}+C$$

$$=0-4xy-y+C.$$



$$\therefore\ f(z)=u+\mathrm{i}v=(-4xy-y+C)+\mathrm{i}(2x^2-2y^2+x)$$

$$=2\mathrm{i}(x^2-y^2+\mathrm{i}\,2xy)+\mathrm{i}(x+\mathrm{i}\,y)+C=2\mathrm{i}z^2+\mathrm{i}z+C$$

$$\overset{f(0)=1}{\Rightarrow}\ C=1\Rightarrow f(z)=2\mathrm{i}z^2+\mathrm{i}z+1.$$ （须写成z的函数）

例(P64) 求解析函数$f(z)$, 使其虚部$v(x,y)=2x^2-2y^2+x$, 且满足$f(0)=1$.

方法2. 也可直接由$C-R$方程求u. 对 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=-4y$积分有,

$$u(x,y)=\int(-4y)\,\mathrm{d}x=-4xy+\varphi(y),\ \varphi:\text{待定可微函数}.$$

则 $\frac{\partial u}{\partial y}=-4x+\varphi'(y)=-\frac{\partial v}{\partial x}=-(4x+1)\Rightarrow\varphi(y)=-y+C.$

$\therefore\ u=-4xy-y+C$. 然后依照方法1的后半段求$f(z)$即可.

注: 将$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$写成$z$ 的函数时, 可灵活运用

$$z=x+\mathrm{i}y,\quad z^2=(x+\mathrm{i}y)^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i},$$

$$z^3=(x+\mathrm{i}y)^3=x^3+3x^2\mathrm{i}y+3x\mathrm{i}^2y^2+\mathrm{i}^3y^3=x^3-3xy^2+\mathrm{i}(3x^2y-y^3),$$

$$e^z=e^xe^{\mathrm{i}y}=e^x\cos y+\mathrm{i}e^x\sin y,\ \ldots\ldots$$

也可以将$x=\frac{1}{2}(z+\overline{z}), y=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z})$代入$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$.

例. 证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y+x$ 为全平面上的调和函数，

并求一解析函数$f(z)$使得$f'(z)$的实部为u，且$f(0)=0$.

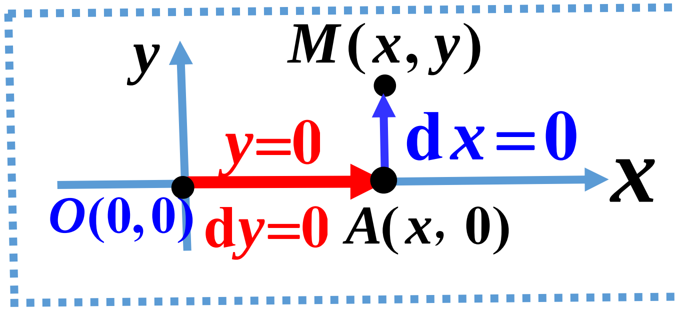
1)证明: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-6xy+1,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6y,\dfrac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3x^2,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y,$

故 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, u(x,y)$ 为全平面调和函数.

2)解. 设$f'(z)=u+\mathrm{i}v$解析. 方法1. 用定理3(P63).

取$(x_0,y_0)=(0,0)$，取如下图积分路径 (分段平行于坐标轴),

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y+C$$



$$=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(-3y^2+3x^2)\mathrm{d}x+(-6xy+1)\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_0^x(-3\cdot 0^2+3x^2)\mathrm{d}x+\int_0^y(-6xy+1)\mathrm{d}y+C$$

$$=x^3+\left(-3xy^2+y\right)+C.$$

$$f'(z)=u+\mathrm{i}v=(y^3-3x^2y+x)+\mathrm{i}(x^3-3xy^2+y+C).\quad(\Delta)$$

须先将$f'(z)$写成 z 的函数, 再求$f(z)$.

将$f'(z)$写成如下形式

$$f'(z) = \mathrm{i}C + (x + \mathrm{i}\,y) + \mathrm{i}\left\{x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}(3x^2y - y^3)\right\}$$

$$= \mathrm{i}C + z + \mathrm{i}\,z^3.$$

积分得$f(z) = \mathrm{i}Cz + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}\mathrm{i}\,z^4 + \tilde{C}$, $f(0) = \tilde{C} = 0.$

$\therefore\ f(z) = \mathrm{i}Cz + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4}\mathrm{i}\,z^4$ 即为所求.

注：本例中，观察到$f'(z)$ 中不含关于x, y 的次数为2的多项式，可令$f'(z) = \mathrm{i}C + a_1 z + a_3 z^3$，将$z = x + \mathrm{i}y$代入上式后与$(\Delta)$比较，容易得到$a_1 = 1$，$a_3 = \mathrm{i}$, 从而得到$f'(z) = \mathrm{i}C + z + \mathrm{i}\,z^3$，解析.

$$\boxed{f'(z) = u + \mathrm{i}v = (y^3 - 3x^2y + x) + \mathrm{i}(x^3 - 3xy^2 + y + C). \quad (\Delta)}$$

例. 证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y+x$ 为全平面上的调和函数，求一解析函数$f(z)$使得$f'(z)$的实部为u，且$f(0)=0$.

方法2求$f'(z)$的虚部v. 用柯西–黎曼方程.

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-(3y^2-3x^2),$$

对x积分有$v=-\int(3y^2-3x^2)\mathrm{d}x=-3xy^2+x^3+\varphi(y)$,

其中$\varphi(y)$是待定可微函数. 上式两边关于y求偏导得

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-6xy+\varphi'(y)=\frac{\partial u}{\partial x}=-6xy+1\Rightarrow\varphi'(y)=1\Rightarrow\varphi(y)=y+C.$$

故$v=-3xy^2+x^3+y+C$.

$$\boxed{f'(z)=u+\mathrm{i}v=(y^3-3x^2y+x)+\mathrm{i}(x^3-3xy^2+y+C).\quad(\Delta)}$$

然后跟方法1后半段一样处理，把$f'(z)$写成z 的函数, 积分得$f(z)$.

最后利用$f(0)=0$求出积分常数即得同样结论.

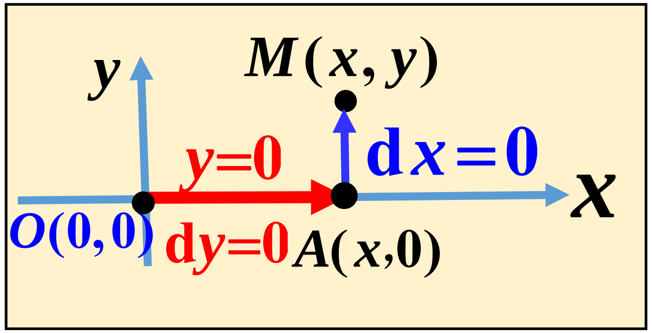
例. 求解析函数$f(z)$使得它的实部和虚部之和为$xy+x-y$,且$f(1)=\mathrm{i}$.

解. 设$f(z)=u+\mathrm{i}v$, 则$u+v=xy+x-y$.

上式分别关于x,y求偏导得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=y+1,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=x-1.$

联立C-R方程$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$解得$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{2}(x+y),\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{2}(x-y-2).$

$$\therefore u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+C$$



$$=\frac{1}{2}\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x+y)\mathrm{d}x+(x-y-2)\mathrm{d}y+C$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x(x+0)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^y(x-y-2)\mathrm{d}y+C$$

$$=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}xy-\frac{1}{4}y^2-y+C$$

$$\Rightarrow v=xy+x-y-u=\frac{1}{2}xy-\frac{1}{4}(x^2-y^2)+x-C$$

$$\therefore f(z)=u+\mathrm{i}v=C(1-\mathrm{i})-y+\mathrm{i}x+\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})xy+\frac{1}{4}(1-\mathrm{i})(x^2-y^2)$$

$$=C(1-\mathrm{i})+\mathrm{i}z+\frac{1}{4}(1-\mathrm{i})z^2\Rightarrow C=-\frac{1}{4}\Rightarrow f(z)=-\frac{1}{4}(1-\mathrm{i})+\mathrm{i}z+\frac{1}{4}(1-\mathrm{i})z^2.$$

P72习题18(1) 设$f(z)$是解析函数, $f(z)\neq 0$, 证明$\ln|f(z)|$ 是调和函数.

证明：设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$. 因为$f(z)$是解析函数,

故u，v是调和函数, 即 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$.

记$w(x,y)=\ln|f(z)|$, 则$w(x,y)=\ln\sqrt{u^2+v^2}=\dfrac{1}{2}\ln\left(u^2+v^2\right)$.

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}}{2\left(u^2+v^2\right)}=\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}}{u^2+v^2},\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\left\{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+v\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}\left(u^2+v^2\right)-2\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2}{\left(u^2+v^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{2u\dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\dfrac{\partial v}{\partial y}}{2\left(u^2+v^2\right)}=\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}}{u^2+v^2},\quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\left\{\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2+v\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right\}\left(u^2+v^2\right)-2\left(u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2}{\left(u^2+v^2\right)^2}.$$

利用u,v为调和函数和C-R方程，得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{2\left\{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}\left(u^2+v^2\right)-2\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x}-v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2\left(u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}{\left(u^2+v^2\right)^2}=0\Rightarrow w\text{调和}.\#$$

作业

P71 – 73

6(2),17,18(2),19, 20(2)(3)