2.3、 复变函数的导数与解析函数的概念

1.导数的定义(P28):

设$w=f(z)$在z的某个领域U内有定义，$z+\Delta z\in U$.

$$\boxed{\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\ \Delta y}$$

如果 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ 存在, 则称$f(z)$在z可微(或可导).

称此极限值为$f(z)$在z的导数或微商.

记作 $f'(z)=\dfrac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$. 背熟

注1: 若$f(z)$在一点z_0无定义, 在$f(z)$在z_0一定不可微.

例 $w=\dfrac{1}{z}$, 在$z=0$时无意义, 故在$z=0$不可微.

注2: 定义中$\Delta z\to 0$的方式是必须是任意的.

- 若$f(z)$在z可微，则$f(z)$在z连续（P28倒数第三行）.

熟记

证明：若$f(z)$在z可微，令$\alpha = \dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - f'(z)$,

则$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha = 0$, 故$\alpha\Delta z = o\left(|\Delta z|\right)$.

由$f(z+\Delta z)-f(z)-f'(z)\Delta z = \alpha\Delta z$得

$$f(z+\Delta z)-f(z) = f'(z)\Delta z + o\left(|\Delta z|\right),\quad (\Delta)$$

熟记

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left(f(z+\Delta z)-f(z)\right) = 0.$$

故$\lim\limits_{\Delta z\to 0} f(z+\Delta z) = f(z)$,

所以$f(z)$在z连续，证毕. #

解析的定义(P28-29)

- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内每一点 z 可微，
  则称 $f(z)$ 是区域 D 内的**解析函数**.

- 如果 $f(z)$ 在点 z_0 的某个邻域内 $\{z \mid |z-z_0|<\delta\}$ 内可微，
  则称 $f(z)$ 在点 z_0 **解析**.

- 如果 $f(z)$ 在点 z_0 不解析，
  即 $f(z)$ 在 z_0 的任一邻域内都有不可微的点，
  则称 z_0 为 $f(z)$ 的**奇点**.

$\boxed{\text{解析是跟区域联系在一起的概念。}}$

背熟

例1 证明：$f(z)=z^n$是解析函数，n是任意正整数.

证明：$\forall z\in\mathbb{C}$，$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}$

$\boxed{\text{二项式定理}}$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left\{\cancel{z^n}+C_n^1z^{n-1}\Delta z+C_n^2z^{n-2}(\Delta z)^2+\cdots+C_n^n(\Delta z)^n-\cancel{z^n}\right\}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left\{C_n^1z^{n-1}+C_n^2z^{n-2}\Delta z+C_n^3z^{n-3}(\Delta z)^2+\cdots+(\Delta z)^{n-1}\right\}$$

$$=C_n^1z^{n-1}=nz^{n-1}.$$

故 $f(z)=z^n$ 处处可微，且 $(z^n)'=nz^{n-1}$.

故 $f(z)=z^n$在全平面解析.#

$\boxed{\text{记下背熟}}$

例2 设$z = x + \mathrm{i}\, y, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 1$,

则$f(z) = x + \mathrm{i}\lambda y$在$z$平面上处处连续但却处处不可微.

证. (1) 因$f(z) = x + \mathrm{i}\lambda y$的实部和虚部在$z$平面上处处连续,

故$f(z)$在z平面处处连续.

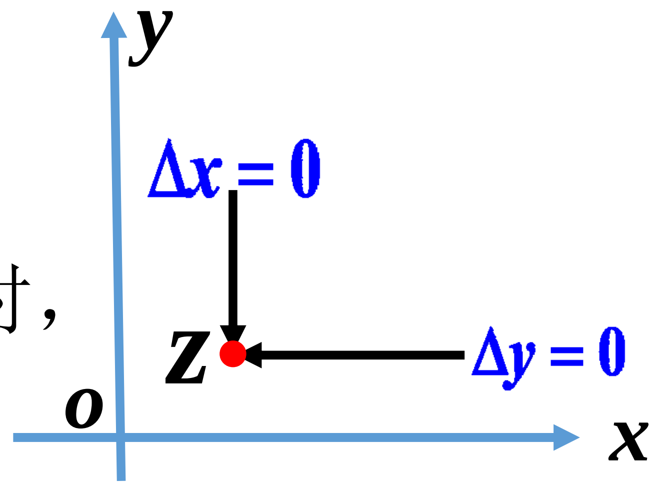
例2 设$z = x + \mathrm{i}\, y, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 1,$

则$f(z) = x + \mathrm{i}\lambda y$在$z$平面上处处连续但却处处不可微.

证 (2) 关于可微性：$\forall z = x + \mathrm{i}\, y,\ \ x, y \in \mathbb{R},$

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\{x + \Delta x + \mathrm{i}\lambda(y + \Delta y)\} - (x + \mathrm{i}\lambda y)}{\Delta x + \mathrm{i}\,\Delta y}$$

$$= \frac{\Delta x + \mathrm{i}\lambda\Delta y}{\Delta x + \mathrm{i}\,\Delta y} = \begin{cases} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1, & \text{当}\Delta y = 0,\ \Delta x \neq 0\text{时}, \\ \dfrac{\mathrm{i}\lambda\Delta y}{\mathrm{i}\,\Delta y} = \lambda, & \text{当}\Delta x = 0,\ \Delta y \neq 0\text{时}, \\ \cdots\cdots \end{cases}$$



故由可微的定义知，当$\lambda \neq 1$时，

$f(z) = x + \mathrm{i}\lambda y$在$z$平面处处不可微.

特别，$\lambda = -1$时，

$f(z) = \bar{z}$在z平面处处不可微. 记下背熟

由于复函数导数定义与微积分中实函数导数定义类似，故类似地有如下求导法则(P30)：

条件:所有等式两边的导数都存在。

(1) $(c)' = 0$，其中c为复常数.

(2) $(z^n)' = nz^{n-1}$，其中n为正整数.

(3) $[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$.

(4) $[f(z)g(z)]' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

(5) $$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}. \quad (g(z) \neq 0)$$

(6) $\{f(g(z))\}' = f'(w)g'(z)$，其中 $w = g(z)$.

(7) 设$w = f(z)$与$z = \phi(w)$是两个互为反函数的单值函数，$\phi'(w) \neq 0$，

则 $$f'(z) = \frac{1}{\phi'(w)}.$$

由求导法则和z^n在全平面的解析性，可推得：

(1) 多项式

$$w = P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,$$

是全复平面内的解析函数;

$$\boxed{P'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots + n a_n z^{n-1}.}$$

(2) 有理函数 $w = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z)$ 和 $Q(z)$ 都是 z 的多项式，

在全复平面内除使分母$Q(z)$为0的点外, 处处解析.

当$Q(z) \neq 0$时，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{P(z)}{Q(z)}\right) = \dfrac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q^2(z)}.$

背熟

例3 研究函数 $w=\dfrac{1}{z}$ 的解析性.

解 $w=\dfrac{1}{z}$ 在复平面内除 $z=0$ 外，处处可微，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{1}{z^2},$$

故 $w=\dfrac{1}{z}$ 在复平面内除 $z=0$ 外，处处解析，

$z=0$ 是 $\dfrac{1}{z}$ 的唯一奇点.

例4 研究函数 $w=\dfrac{z}{(z+\mathrm{i})(z+3)}$ 的解析性，在可微点求出导数.

解 由 $(z+\mathrm{i})(z+3)=0$ 解得 $z_1=-\mathrm{i},\ z_2=-3.$

故当 $z\neq-\mathrm{i}$ 和 -3 时，$w=\dfrac{z}{(z+\mathrm{i})(z+3)}$ 可微，解析，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{(z+\mathrm{i})(z+3)}\right)=\frac{1\cdot(z+\mathrm{i})(z+3)-z\cdot\left\{1\cdot(z+3)+(z+\mathrm{i})\cdot 1\right\}}{(z+\mathrm{i})^2(z+3)^2}$$

$$=\frac{(z+\mathrm{i})(z+3)-z(2z+3+\mathrm{i})}{(z+\mathrm{i})^2(z+3)^2}=\frac{-z^2+3\mathrm{i}}{(z+\mathrm{i})^2(z+3)^2}.$$

$z_1=-\mathrm{i}$ 和 $z_2=-3$ 是两个奇点.

由$f(z)=x+\mathrm{i}\lambda y(\lambda\neq 1$时$)$,特别是$f(z)=\bar{z}$在全平面处处不可微发现:

$u(x,y)$和$v(x,y)$都在点$\left(x_0,y_0\right)$可微时,

$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$仍有可能在点$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$不可微.

问题:如何直接判断一个复函数在某一点是否可微?(按定义分析有点麻烦)

柯西-黎曼方程

将给出:
直接判断一个复函数在某一点是否可微的具体方法.

2.4 柯西—黎曼方程

定理1(P30) (可微的充要条件) ★★★

设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 定义在区域 D 内，则

$f(z)$在点$z=x+\mathrm{i}\,y\in D$可微的充要条件是:

(1) $u(x,y)$与$v(x,y)$在点(x,y)可微;

(2) $u(x,y)$和$v(x,y)$在点(x,y)满足:

$$\left.\begin{array}{l} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}. \qquad (*) \end{array}\right\}\text{同时成立.}$$

(熟记) ★★★

条件(*)称为柯西—黎曼方程(C—R方程).

定理1(P30) 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 定义在区域 D 内，则 $f(z)$在点$z=x+\mathrm{i}\,y\in D$可微的充要条件是：在点(x,y)，

(1) $u(x,y)$与$v(x,y)$可微，(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$，(称为$C$-$R$方程).

证明 :1) 必要性. 若$f(z)$在z可微，记$f'(z)=a(x,y)+\mathrm{i}\,b(x,y)$，则

$\forall z+\Delta z\in D,\ \Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y,\ |\Delta z|$充分小，由$(\Delta)$有

$$f(z+\Delta z)-f(z)=(a+\mathrm{i}\,b)(\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y)+o(|\Delta z|)$$

$$=a\Delta x-b\Delta y+\mathrm{i}\left(b\Delta x+a\Delta y\right)+o(|\Delta z|).$$

另，$f(z+\Delta z)-f(z)=f(x+\Delta x+\mathrm{i}(y+\Delta y))-f(x+\mathrm{i}\,y)$

$$=\{u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)\}+\mathrm{i}\{v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)\}.$$

故 $$u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)=a\Delta x-b\Delta y+o(|\Delta z|),$$

$$v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)=b\Delta x+a\Delta y+o(|\Delta z|).$$

故在点(x,y)(1) u 与v 可微，(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=a,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-b,\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=b,\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=a.$

故得C-R方程.

2)充分性. 设在点(x,y), u,v可微， 且满足$C-R$方程.

记 $a \triangleq \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $-b \triangleq \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=b$.

$\forall z+\Delta z\in D$, $\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y$, $|\Delta z|$充分小时,

故$f(z+\Delta z)-f(z)=f(x+\Delta x+\mathrm{i}(y+\Delta y))-f(x+\mathrm{i}\,y)$

$$=u\big(x+\Delta x,y+\Delta y\big)-u(x,y)+\mathrm{i}\big\{v\big(x+\Delta x,y+\Delta y\big)-v(x,y)\big\}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)+o\big(|\Delta z|\big)$$

$$=a\Delta x-b\Delta y+\mathrm{i}\big(b\Delta x+a\Delta y\big)+o\big(|\Delta z|\big) \qquad \boxed{-1=\mathrm{i}^2}$$

$$=a\Delta x+\mathrm{i}^2 b\Delta y+\mathrm{i}\,b\Delta x+\mathrm{i}\,a\Delta y+o\big(|\Delta z|\big)$$

$$=\big(a+\mathrm{i}\,b\big)\big(\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y\big)+o\big(|\Delta z|\big)=\big(a+\mathrm{i}\,b\big)\Delta z+o\big(|\Delta z|\big).$$

故$f(z)$在z可微， 且

$$f'(z)=a+\mathrm{i}\,b=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}.\#$$

熟记

P31-32

根据定理1和解析定义，得

定理2(P32) (解析的充要条件)

$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在区域 D 内可微

(即$f(z)$在D内解析)的充要条件是：

(1) $u(x,y)$与$v(x,y)$在 D 内处处可微，

(2) $u(x,y)$与$v(x,y)$在 D 内处处满足C-R方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

根据此定理2(P33)，容易判断函数的可微性和解析性.

例5 1)判断：$f(z)=x^3-y^3+2\mathrm{i}\,x^2y^2$的可微性和解析性，

并在可微点求出导数.

解 $u(x,y)=x^3-y^3$， $v(x,y)=2x^2y^2$，u,v在全平面可微.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2=\frac{\partial v}{\partial y}=4x^2y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-3y^2=-\frac{\partial v}{\partial x}=-4xy^2.$$

它的C-R方程 $\Leftrightarrow$ $3x^2=4x^2y,\ -3y^2=-4xy^2.$

解得 $x_1=0$，$y_1=0$ 和 $y_2=\frac{3}{4},\ x_2=\frac{3}{4}.$

故$f(z)$在$z_1=0$和$z_2=\frac{3}{4}+\mathrm{i}\frac{3}{4}$可微,在其他点都不可微不解析,

在z_1(或z_2)的任一邻域内都有不可微的点，故在z_1和z_2不解析.

故$f(z)$处处不解析。$f'(0)=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right|_{(0,0)}=0.$

$$f'\left(\frac{3}{4}+\mathrm{i}\frac{3}{4}\right)=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right|_{\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)}=\left.\left(3x^2+4\mathrm{i}\,xy^2\right)\right|_{\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)}=\frac{27}{16}(1+\mathrm{i}).$$

例5 2)试证：$f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$在全平面解析，且$f'(z)=f(z)$.

$$(2.5.1)\quad \triangleq e^z=e^{x+iy}=e^x e^{iy}.$$

$(e^z)'=e^z$ 熟记

证明 $u(x,y)=e^x\cos y,\ v(x,y)=e^x\sin y$, u,v在全平面可微.

下面验证 u,v 满足C-R方程.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y.$$

因此 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y,\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-e^x\sin y$, 处处成立.

故$f(z)$在全平面内处处可微，即在全平面解析.

且 $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=e^x(\cos y+i\sin y)=f(z)$. 证毕. #

与微积分中 $(e^x)'=e^x$ 类似.

例6 判定下列函数在何处可导，在何处解析:

(1) $w = z\,\mathrm{Re}(z)$; (2) $w = |z|$.

解 (1) $w = z\,\mathrm{Re}(z) = x^2 + \mathrm{i}\,xy$, $u = x^2$, $v = xy$, 处处可微,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x. \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \text{因此}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow 2x = x, \ 0 = -y \Leftrightarrow x = 0, \ y = 0.$$

故 $w = z\,\mathrm{Re}(z)$ 在 $z = 0$ 处可微，在其余点不可微不解析.

在 $z = 0$ 的任一邻域中有不可微的点，故在$z = 0$不解析.

因此 $z\,\mathrm{Re}(z)$在复平面处处不解析.

$$f'(0) = \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right|_{(0,0)} = \left.(2x + \mathrm{i}\,y)\right|_{(0,0)} = 0.$$

(2) $w=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, $u=\sqrt{x^2+y^2}$, $v=0$.

1). 当$(x,y)\neq(0,0)$时u,v可微, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

故当$(x,y)\neq(0,0)$时, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$不可能同时成立.

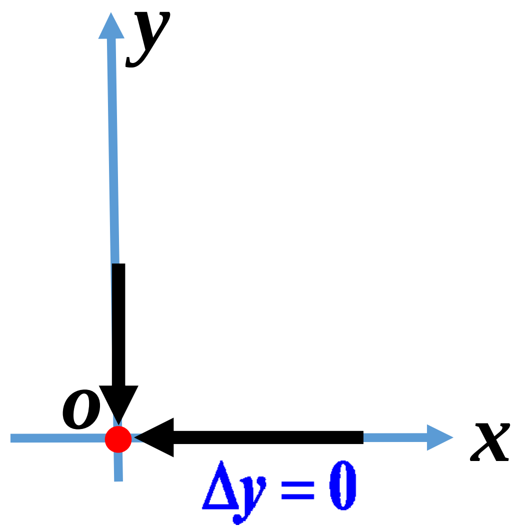
故当$z\neq 0$时，$w=|z|$不可微不解析.

2) $w=|z|$在$z=0$不可微. 这可以由定义判断.

2) $w=|z|$在$z=0$不可微. 这可以由定义判断.

因为$\dfrac{|0+\Delta z|-|0|}{\Delta z}=\dfrac{|\Delta z|}{\Delta z}=\dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y}$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=1, & \text{当}\Delta x>0,\ \Delta y=0\text{时},\\[2ex] \dfrac{\sqrt{(\Delta y)^2}}{\mathrm{i}\,\Delta y}=\dfrac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}\neq 1, & \text{当}\Delta x=0,\ \Delta y>0\text{时},\\ \cdots\cdots \end{cases}$$



故$w=|z|$在$z=0$不可微.

因此$w=|z|$在复平面处处不可微,处处不解析.

例7 证明区域D内满足$|f(z)|=$常数的解析函数$f(z)$必为常数.

证 设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$, $|f(z)|=c$(非负常数).

为了证明$f(z)$为常数, 只需证明$\dfrac{\partial u}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial u}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial v}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial v}{\partial y}\equiv 0$。

因$f(z)$解析，故满足C-R方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}。$$

对$u^2+v^2=c^2$ 两边分别关于x,y求偏导得

$$2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0,\ 2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$ 用C-R方程代入得

$$u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}=0,\qquad u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$ 解得

$u=v=0$, 或 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$, 再代入$C$-$R$方程得 $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=0.$

故u,v是常数，故$f(z)$必为常数(P43, 8(5)). #

作业 P43-44

5 (2)(先用C-R方程法),

(3)$\left(z \neq 0\right.$时,用C-R方程法；$z = 0$时, 函数无定义, 故不可导)

6 (2)$\left(\begin{array}{l}\text{先用C-R方程法分别判断} 0 < |z| < 1 \text{ 和 } |z| > 1 \text{ 的可导性，} \\ z = 0 \text{时用定义判断, 然后根据解析定义判断各点解析性}\end{array}\right)$

7(2), 8(4)(6), 10

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$意味着：

$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0,$

使得当Δz落在以原点为中心、δ为半径的去心邻域内，

即$0<|\Delta z|<\delta$时， $\left|\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z)\right|<\varepsilon.$

$f(z)$在z可微 $\Leftrightarrow$ $z+\Delta z$在z邻域内以任意方式趋于z时，

$\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$都趋于同一个复数.

例 研究函数 $w=\dfrac{z}{(z-\mathrm{i})^2}$ 的解析性.

解 由 $(z-\mathrm{i})^2=0$ 解得 $z=\mathrm{i}$, 故

$\dfrac{z}{(z-\mathrm{i})^2}$ 在复平面内除 $z=\mathrm{i}$ 外，处处可微, 且

故 $w=\dfrac{z}{(z-\mathrm{i})^2}$ 在复平面内除 $z=\mathrm{i}$ 外, 处处解析。

$z=\mathrm{i}$ 为它的唯一奇点 .

当 $z\neq\mathrm{i}$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\frac{z}{(z-\mathrm{i})^2}\right\}=\frac{1\cdot(z-\mathrm{i})^2-z\cdot 2(z-\mathrm{i})}{(z-\mathrm{i})^4}=-\frac{z+\mathrm{i}}{(z-\mathrm{i})^3}.$$

(2) $w=|z|^2=x^2+y^2$,

$u=x^2+y^2$, $v=0$, 都在全平面可微, 且

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2y$, $\frac{\partial v}{\partial x}=0$, $\frac{\partial v}{\partial y}=0$. 因此

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Leftrightarrow 2x=0,\ 2y=0 \Leftrightarrow x=0,\ y=0$.

即当且仅当 $x=y=0$ 时, $u(x,y),v(x,y)$ 满足柯西一黎曼方程

故$w=|z|^2$ 在 $z=0$ 处可微,在其他的点不可微不解析。

因 $w=|z|^2$ 在 $z=0$ 的任一邻域中有不可微的点,

故它在 $z=0$ 不解析, 从而它在复平面内处处不解析.