定理5(P 78)

幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$的和函数$f(z)$ 在其收敛圆$|z-a|<R$内解析, 且

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},\ k \geq 0.$$

4.2 解析函数的Taylor(泰勒)展开 ★★★★★

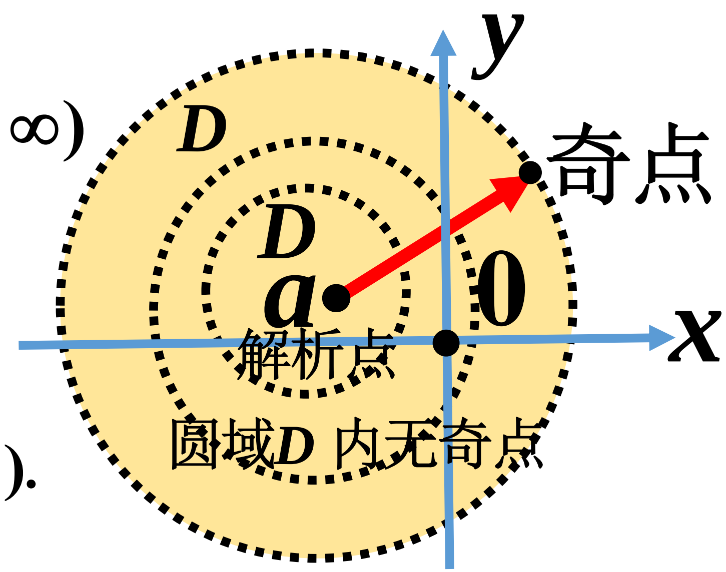
由定理5(P78)知，$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ 在收敛圆$|z-a|<R$ $(R>0$ 时) 内解析.

反之，是否解析函数都可展开成幂级数?

定理1(P78) 设 $f(z)$在点 a 解析，若以 a 为中心作一个圆D，并令圆的半径不断扩大，直至圆周首次碰上$f(z)$的奇点为止，则在此圆域D内，$f(z)$可展开成幂级数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

(若$f(z)$在全面解析，则圆域 D 的半径为$+\infty$)



证明思路：

1) 柯西积分公式；

2) $|z|<1$ 时，$\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n$ (P 75例2).

4.2 解析函数的Taylor(泰勒)展开

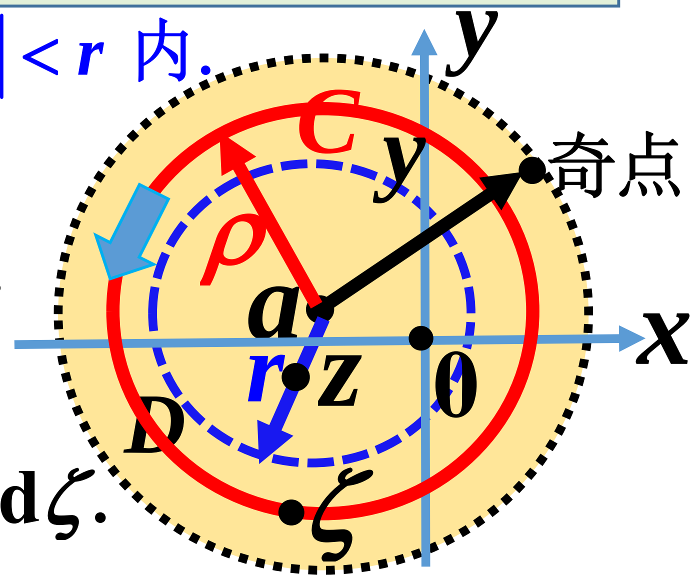
由定理5(P78)知，$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$在收敛圆$|z-a|<R$ ($R>0$ 时) 内解析.★

反之，是否解析函数都可展开成幂级数？

定理1(P78) 设 $f(z)$在点 a 解析，若以 a 为中心作一个圆D，并令圆的半径不断扩大，直至圆周首次碰上 $f(z)$ 的奇点为止，则在此圆域D内，$f(z)$可展开成幂级数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n, \qquad a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n=0,1,2,\cdots.$$

证明：$\forall z\in D$(开), $\exists\rho>\exists r>0$, 使得z在圆$|z-a|<r$ 内，



圆周C: $|z-a|=\rho$ 完全含在D 内，

故$f(z)$在C及其内部解析. 取C为逆时针方向.

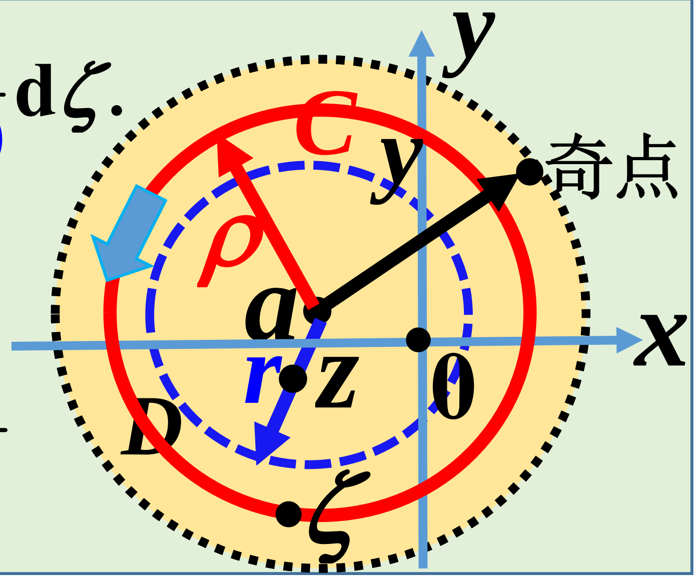
由柯西积分公式，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)-(z-a)}d\zeta.$$

当$\zeta\in C$ 时，$|\zeta-a|=\rho>r>|z-a|$, $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|<1$,

$$\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}=\frac{1}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n=$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)-(z-a)}d\zeta.$$



当$\zeta\in C$时，$|\zeta-a|=\rho>r>|z-a|$，

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|<1,\quad \frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}$$

$$=\frac{1}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}.$$ 故

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^n f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta$$ (可以逐项积分(证略) P 79)

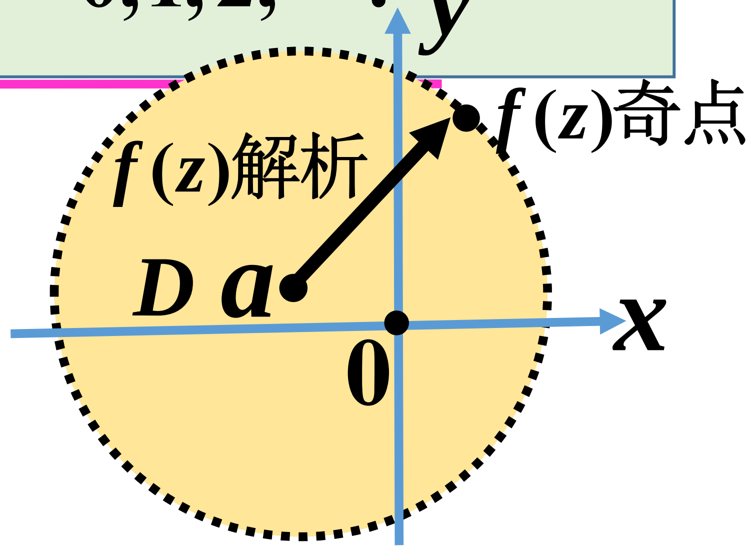
$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_C\frac{(z-a)^n f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right\}(z-a)^n$$

(柯西导数积分公式)

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$ 因z是D内任意一点，故此式在D内处处成立.#

定理1(P78) 设 $f(z)$在点 a 解析, 若以 a 为中心作一个圆D, 并令圆的半径不断扩大, 直至圆周首次碰上 $f(z)$ 的奇点为止, 则在此圆域D内， $f(z)$可展开成幂级数:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\quad n=0,1,2,\cdots.$$



收敛半径$R=\min\limits_{\eta\in\{f(z)\text{的奇点}\}}|\eta-a|$

a到$f(z)$的离a最近的一个奇点的距离.

(若$f(z)$在全平面解析, 则上述幂级数收敛半径$R=+\infty$)

称幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$为$f(z)$在$a$点的泰勒展开,

或者: $f(z)$在圆$|z-a|<R$ 内的泰勒展开.

注意: a是$f(z)$的解析点.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

推论1：$f(z)$在任一解析点 a 的泰勒展式是唯一的.

证明：假设$f(z)$在某个解析点a有两个泰勒展式：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n,\quad f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n(z-a)^n.$$

由定理1(P 78)和定理5(P 78)知，收敛半径相等, 且

$$a_n=b_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\quad n=0,1,2,\cdots.$$ 故两个泰勒展式相同.#

由推论1得

推论2：任一幂级数(若收敛半径$R>0$)是它自身和函数在收敛圆内的泰勒展开.

由定理1(P 78)和定理5(P 78)知，

定理2(P 80)：$f(z)$在区域D内解析的充要条件是：

$f(z)$在D 内任一点a可以展开成$z-a$ 的幂级数.

推论1：$f(z)$在任一解析点 a 的泰勒展式是唯一的.

推论2：任一幂级数(若收敛半径$R>0$)是它自身和函数在收敛圆内的泰勒展开.

定理1(P 78) ⇒ 若$f(z)$在点a解析，取$R=\min\limits_{\eta\in\{f(z)\text{的奇点}\}}|\eta-a|$，

则$f(z)$在a或收敛圆$|z-a|<R$内的泰勒展开为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n,\quad a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

上述展开公式与实函数的泰勒展开公式完全类似，因此类似地可得

$e^z,\cos z,\sin z$ 在$z=0$ 的泰勒展开为

$$e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots,$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots,$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots.$$

(P 80)

熟记

$e^z,\cos z,\sin z$在全平面解析，故它们收敛半径$R=+\infty$.

当$|z|<1$时，$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$，是$\frac{1}{1-z}$在$z=0$的泰勒展开.

特别重要

熟记

$z=1$是$\frac{1}{1-z}$的唯一奇点，故$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$的收敛半径$R=|1-0|=1$.

当$|z|<1$时，$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n=1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+\cdots$.

$$e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots,$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots,$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots.$$

(P 80)

熟记

$e^z,\cos z,\sin z$在全平面解析，故它们收敛半径$R=+\infty$.

例1. 求$f(z)=\dfrac{1}{1-z}$在$z=\mathrm{i}$的泰勒展开.

当$|z|<1$时,

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n.$$

解 $z=1$是$\dfrac{1}{1-z}$的唯一奇点，故

收敛半径$R=|1-\mathrm{i}|=\sqrt{2}$.

收敛半径$=|$离展开点最近奇点$-$展开点$|$

收敛圆：$|z-$展开点$|<$收敛半径.

在收敛圆$|z-\mathrm{i}|<\sqrt{2}$ 内，$|z-\mathrm{i}|<|1-\mathrm{i}|$,

令$w=z-\mathrm{i}$,则$z=w+\mathrm{i}$, $|w|<|1-\mathrm{i}|$, $\left|\dfrac{w}{1-\mathrm{i}}\right|<1$,

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(1-\mathrm{i})-w}=\frac{1}{1-\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{w}{1-\mathrm{i}}}$$

$$=\frac{1}{1-\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{w}{1-\mathrm{i}}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-\mathrm{i})^n}{(1-\mathrm{i})^{n+1}},\ |z-\mathrm{i}|<\sqrt{2}.$$

例. 求$f(z)=\dfrac{1}{2+2z+z^2}$在$z=2\mathrm{i}$的泰勒展开. $\boxed{\text{展开点是}2\mathrm{i}}$

解 由$2+2z+z^2=0$解得$f(z)$奇点 $z_1=-1+\mathrm{i},\ \ z_2=-1-\mathrm{i}$.

$R=\min\{|2\mathrm{i}-(-1+\mathrm{i})|,\ |2\mathrm{i}-(-1-\mathrm{i})|\}=\min\{|\mathrm{i}+1|,\ |3\mathrm{i}+1|\}=\sqrt{2}$.

令 $w=z-2\mathrm{i}$, 则当$|z-2\mathrm{i}|<\sqrt{2}$ 时, $|w|<\min\{|\mathrm{i}+1|,\ |3\mathrm{i}+1|\}$,

$$f(z)=\frac{1}{(z+1-\mathrm{i})(z+1+\mathrm{i})}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}+z}-\frac{1}{1+\mathrm{i}+z}\right)$$

$\boxed{\text{代入 } z=w+2\mathrm{i}}$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left\{\frac{1}{(1+\mathrm{i})+w}-\frac{1}{(1+3\mathrm{i})+w}\right\}=\frac{1}{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}\cdot\frac{1}{1+\frac{w}{1+\mathrm{i}}}-\frac{1}{2\mathrm{i}(1+3\mathrm{i})}\cdot\frac{1}{1+\frac{w}{1+3\mathrm{i}}}$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}\cdot\frac{1}{1-\frac{w}{-1-\mathrm{i}}}-\frac{1}{2\mathrm{i}(1+3\mathrm{i})}\cdot\frac{1}{1-\frac{w}{-1-3\mathrm{i}}}\qquad\left(\left|\frac{w}{-\mathrm{i}-1}\right|<1,\ \ \left|\frac{w}{-1-3\mathrm{i}}\right|<1\right)$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{w}{-1-\mathrm{i}}\right)^n-\frac{1}{2\mathrm{i}(1+3\mathrm{i})}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{w}{-1-3\mathrm{i}}\right)^n\quad\text{(整理合并)}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{-\frac{1}{2\mathrm{i}(-1-\mathrm{i})^{n+1}}+\frac{1}{2\mathrm{i}(-1-3\mathrm{i})^{n+1}}\right\}(z-2\mathrm{i})^n.$$

对有理函数, 先分解为
简单有理真分式(及多项式)
之和，再泰勒展开.

例 求e^z在$z=a$的泰勒展式. (a为任一复数)

解 $$e^z = e^{z-a+a} = e^a e^{z-a} = e^a \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^a}{n!}(z-a)^n, \quad |z-a| < +\infty. \quad \#$$

e^z 在$z=0$的泰勒展式为

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots,$$

e^z 在全平面解析，故它们收敛半径$R = +\infty$.

例2(P 81). 将 $e^z\cos z, e^z\sin z$ 展为 z 的幂级数 (在 $z=0$ 展开).

解 因 $e^z\cos z + i e^z\sin z = e^z\cdot e^{iz} = e^{(1+i)z} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n z^n}{n!}$,

$$e^z\cos z - i e^z\sin z = e^z\cdot e^{-iz} = e^{(1-i)z} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1-i)^n z^n}{n!}.$$

两式相加除以2得,

$$e^z\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n+(1-i)^n}{2(n!)}z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\{(\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}\}^n+\{(\sqrt{2})e^{-i\frac{\pi}{4}}\}^n}{2(n!)}z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{i\frac{n\pi}{4}}+e^{-i\frac{n\pi}{4}}}{2(n!)}\left(\sqrt{2}\right)^n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\left(\cos\frac{n\pi}{4}\right)z^n.$$

类似地, 两式相减除以2i 得

$$e^z\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{2i(n!)}z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\left(\sin\frac{n\pi}{4}\right)z^n.$$

复合函数泰勒展开

例. 将$\cos z^3$展为z 的幂级数.

解 $\cos z^3 = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(z^3)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{6n}.$

例 求 $\frac{1}{1+z^4}$ 在 $z=0$ 的泰勒展式.

解 当$|z|<1$时,

$$\frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{1-(-z^4)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-z^4\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{4n}.$$

例. 将$(z^2+z)\sin z$展为z 的幂级数 (在$z=0$ 泰勒展开).

解 $$(z^2+z)\sin z=(z^2+z)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+3}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+2}\quad\text{(合并整理)}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+2)\frac{-\sin\frac{2n+3}{2}\pi}{(2n+2)!}z^{2n+3}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-\cos\frac{2n+2}{2}\pi}{(2n+1)!}z^{2n+2}$$

m是偶数时, $\sin\frac{m}{2}\pi=0$

m是奇数时, $\cos\frac{m}{2}\pi=0$

$$=\sum_{m=2}^{+\infty}(m-1)\frac{-\sin\frac{m}{2}\pi}{(m-1)!}z^m+\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{-\cos\frac{m}{2}\pi}{(m-1)!}z^m$$

$$=-\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{(m-1)\sin\frac{m}{2}\pi+\cos\frac{m}{2}\pi}{(m-1)!}z^m.$$

(习题98页2(2)可仿照此例)

例. 将$\int_0^z \frac{\cos^2 z-1}{z^2}\,\mathrm{d}z$展为$z$ 的幂级数 (习题98页2(7)(8)可仿照此例)

解 先将被积函数展开，再逐项积分.

$$\frac{\cos^2 z-1}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(\frac{1+\cos 2z}{2}-1\right)=\frac{1}{2z^2}(\cos 2z-1)$$

$$=\frac{1}{2z^2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n-2}.$$

$$\int_0^z \frac{\cos^2 z-1}{z^2}\,\mathrm{d}z=\int_0^z\left\{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n-2}\right\}\mathrm{d}z$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}\int_0^z z^{2n-2}\,\mathrm{d}z=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!(2n-1)}z^{2n-1}.$$

例. 将$\dfrac{z}{(1+z^2)^2}$在$z=0$展开为幂级数.

解 由$(1+z^2)^2=0$解得奇点 $z=\pm i$. 故$R=\left|\pm i-0\right|=1$.

(1)因$\left(\dfrac{1}{1+z^2}\right)'=-\dfrac{2z}{(1+z^2)^2}$, 故$\dfrac{z}{(1+z^2)^2}=-\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{1+z^2}\right)'$.

在收敛圆$|z|<1$内,

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{1-(-z^2)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z^2)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n}.$$

逐项求导得

$$\left(\frac{1}{1+z^2}\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d}{dz}\left\{(-1)^n z^{2n}\right\}=2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n z^{2n-1}.$$

$$故\frac{z}{(1+z^2)^2}=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1+z^2}\right)'=-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n z^{2n-1}.$$

例. 将 $\dfrac{1}{(3+iz)^2}$ 在 $z=1$ 展开为幂级数.

解 由 $(3+iz)^2=0$ 解得奇点 $z=-\dfrac{3}{i}=3i$，故 $R=|3i-1|=(\sqrt{10})$.

(1)因 $\left(\dfrac{1}{3+iz}\right)'=-\dfrac{i}{(3+iz)^2}$， 故 $\dfrac{1}{(3+iz)^2}=i\cdot\left(\dfrac{1}{3+iz}\right)'$.

在收敛圆 $|z-1|<(\sqrt{10})$ 内，令 $w=z-1$，则 $z=w+1$，

$$\frac{1}{3+iz}=\frac{1}{3+i+iw}=\frac{1}{3+i}\cdot\frac{1}{1+\frac{iw}{3+i}}=\frac{1}{3+i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n i^n w^n}{(3+i)^n}.$$

$$\left|\frac{iw}{3+i}\right|=\frac{|z-1|}{(\sqrt{10})}<1$$

逐项求导得

$$\left(\frac{1}{3+iz}\right)'=\frac{1}{3+i}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n i^n n w^{n-1}}{(3+i)^n}\cdot\frac{dw}{dz}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-i)^n}{(3+i)^{n+1}}nw^{n-1}.$$

(1)因$\left(\dfrac{1}{3+\mathrm{i}z}\right)' = -\dfrac{1}{(3+\mathrm{i}z)^2}\cdot\mathrm{i}$，故$\dfrac{1}{(3+\mathrm{i}z)^2} = \mathrm{i}\cdot\left(\dfrac{1}{3+\mathrm{i}z}\right)'$.

在收敛圆$|z-1|<(\sqrt{10})$内，令$w=z-1$,则 $z=w+1$,

$$\frac{1}{3+\mathrm{i}z}=\frac{1}{3+\mathrm{i}+\mathrm{i}w}=\frac{1}{3+\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{1+\frac{\mathrm{i}w}{3+\mathrm{i}}}=\frac{1}{3+\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{i}^n w^n}{(3+\mathrm{i})^n}.$$ 求导得

$$\left(\frac{1}{3+\mathrm{i}z}\right)'=\frac{1}{3+\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\frac{(-1)^n\mathrm{i}^n w^n}{(3+\mathrm{i})^n}\right\}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\mathrm{i})^n}{(3+\mathrm{i})^{n+1}}nw^{n-1}.$$

(2) $$\frac{1}{(3+\mathrm{i}z)^2}=\mathrm{i}\cdot\left(\frac{1}{3+\mathrm{i}z}\right)'=\mathrm{i}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(-\mathrm{i})^n}{(3+\mathrm{i})^{n+1}}w^{n-1}$$

$\boxed{令n=m+1}$

$$=\mathrm{i}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(m+1)(-\mathrm{i})^{m+1}}{(3+\mathrm{i})^{m+2}}w^m=-\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(\frac{-\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}\right)^{n+2}w^n$$

$\boxed{w=z-1}$

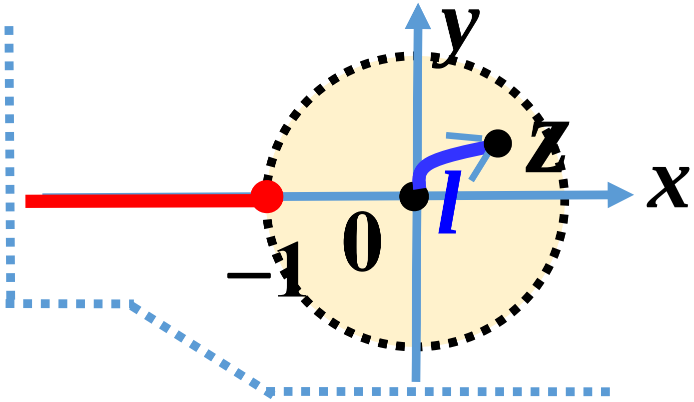
$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(-\frac{1}{10}-\frac{3}{10}\mathrm{i}\right)^{n+2}(z-1)^n,\quad |z-1|<(\sqrt{10}).$$

例. 求 $\ln(1+z) = \ln|1+z| + \mathrm{i}\arg(z+1)$, $(-\pi < \arg(z+1) < \pi)$

在 $z=0$ 的泰勒展开.

解 因 $-\pi < \arg(z+1) < \pi$, 由 $z+1 \le 0$ 对应的 $z \le -1$ 都是奇点.

离展开点 $z=0$ 最近的奇点是 $z=-1$.



故收敛半径 $R = |-1-0| = 1.$

在收敛圆 $|z|<1$ 内, $\ln(1+z)$ 解析,

$$\{\ln(1+z)\}' = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n.$$

对 $|z|<1$ 内任一点 z, 取一个从0到 z 的光滑曲线 l.

沿 l 两边积分, 得

$$\ln(1+z) - \ln 1 = \int_0^z \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \zeta^n\right) \mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^z \zeta^n \,\mathrm{d}\zeta$$

例. 求 $\ln(1+z) = \ln|1+z| + i\arg(z+1), \quad (-\pi < \arg(z+1) < \pi)$

在 $z=0$ 的泰勒展开.

解 因 $-\pi < \arg(z+1) < \pi$, 由 $z+1 \le 0$ 对应的 $z \le -1$ 都是奇点.

离 $z=0$ 最近奇点是 $z=-1$. 故收敛半径 $R = |-1-0| = 0.$

在收敛圆 $|z|<1$ 内, $\ln(1+z)$ 解析,

$$\{\ln(1+z)\}' = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n.$$

在 $|z|<1$ 内, 取一个从0到z的光滑曲线 l. 沿 l 两边积分, 得

$$\ln(1+z) - \ln 1 = \int_0^z \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \zeta^n\right) d\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^z \zeta^n d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1} = \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m} z^m.$$ 因 $\arg 1 = 0$, 故 $\ln 1 = 0$,

故 $$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \quad |z|<1.$$

总结：求解析函数$f(z)$在$z=a$的泰勒展开方法

- 令$w=z-a$，则$f(z)=f(w+a)$，

然后利用e^w，$\cos w$，$\sin w$，$\frac{1}{1-w}$在$w=0$的泰勒展式;

(1)当$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$为有理分式时，$P(z)$和$Q(z)$为z的多项式，

先求解分母等于0的根，得奇点，据此求收敛半径R和收敛圆;

然后与实函数类似，对有理式进行分解，再求泰勒展开.

(2) 对于$f(z)=C(z-a)^m\psi(z)$，C是非零复常数，$(m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$:

先将$\psi(z)$在$z=a$展开，最后两边再乘以$C(z-a)^m$.

(3) 在收敛圆内，$f(z)=\int_{z_0}^{z}f'(z)\,\mathrm{d}z+f(z_0)$，

将$f'(z)$在$z-a$泰勒展开，再逐项关于z求积分;

(4) 若 $f(z)=C(z-a)^m g'(z)$，C是非零复常数，$(m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$，则

先将$g(z)$在$z=a$泰勒展开，再关于z逐项求导，最后乘以$C(z-a)^m$.

由定理1(P 78)和定理5(P 78)知，

定理2(P 80)：$f(z)$在区域D内解析的充要条件是：

$f(z)$在D内任一点a可以展开成$z-a$的幂级数.

以下命题**等价**

(1) $f(z)$在区域D内解析；

(2)(定义P 25) $f(z)$在区域D内的每一点z可微；

(3) $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$, u,v在D内每一点可微且满足C-R方程；

(4) $f(z)$在D内任一点a可以展开成$z-a$的幂级数.

此外，(5) $f(z)$在单连通区域D内解析等价于

$f(z)$在单连通区域D内连续且对D内任一闭路C上有$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$.

推论1：$f(z)$在任一解析点a的泰勒展式是唯一的.

推论2：任一幂级数(若收敛半径$R>0$)是它自身和函数在收敛圆内的泰勒展开.

例 求$\dfrac{ze^{z^2}}{\cos z}$在$z=0$的泰勒展式(到第四项). (展开点是0) (展开到z^3 项)

解 记 $f(z)=\dfrac{ze^{z^2}}{\cos z}$. 由$\cos z=0$解得 $f(z)$奇点 $z=\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$

离$z=0$最近的奇点为$\pm\dfrac{\pi}{2}$, 故$R=\left|0\mp\dfrac{\pi}{2}\right|=\dfrac{\pi}{2}$. 故 $f(z)$在$|z|<\dfrac{\pi}{2}$ 内解析.

(2) 设 $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots,\ |z|<\dfrac{\pi}{2},$ a_n 待定.

$f(z)$是奇函数, 即根据$f(z)=-f(-z)$,可以证明

$$a_0=a_2=\cdots=a_{2n}=\cdots=0,$$

故 $f(z)=a_1z+a_3z^3+\cdots=z(a_1+a_3z^2+\cdots)$ (只剩奇次项)

$$=\frac{ze^{z^2}}{\cos z}=\frac{z\left\{1+z^2+\frac{1}{2!}\left(z^2\right)^2+\cdots\right\}}{1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\cdots},\ 故$$

故 $z\left\{1+z^2+\frac{1}{2!}\left(z^2\right)^2+\cdots\right\}=z(a_1+a_3z^2+\cdots)\left(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\cdots\right).$

故 $\cancel{z}\left\{1+z^2+\frac{1}{2!}(z^2)^2+\cdots\right\}=\cancel{z}(a_1+a_3z^2+\cdots)\left(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\cdots\right).$

$$\underline{1+z^2+\cdots}=a_1+\left(-\frac{1}{2!}a_1z^2+a_3z^2\right)+\cdots=\underline{a_1+\left(a_3-\frac{a_1}{2}\right)z^2+\cdots}.$$

比较两边系数得

$$\begin{cases}a_1=1,\\ a_3-\dfrac{a_1}{2}=1.\end{cases}\quad \text{解之得}\quad \begin{cases}a_1=1,\\ a_3=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

用此方法可以求解P 98的2(5)

故 $f(z)=z+\frac{3}{2}z^3+\cdots,\quad |z|<\frac{\pi}{2}.$

例 求 $\frac{ze^{z^2}}{\cos z}$ 在 $z=0$ 的泰勒展开(到第四项).

故 $f(z)=\underline{a_1z+a_3z^3+\cdots}=z(a_1+a_3z^2+\cdots)$ (只剩奇次项)

$$=\frac{z\,e^{z^2}}{\cos z}=\underline{\frac{z\left\{1+z^2+\frac{1}{2!}(z^2)^2+\cdots\right\}}{1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\cdots}},\ \text{故}$$

故 $z\left\{1+z^2+\frac{1}{2!}(z^2)^2+\cdots\right\}=z(a_1+a_3z^2+\cdots)\left(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\cdots\right).$

P 99的第4题:

设 $\dfrac{1}{1-z-z^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}C_n z^n$，证明： $C_{n+2}=C_{n+1}+C_n$， $n\geq 0$.

证明思路：1) 根据分母等于0，求出所有奇点.

收敛半径 $R=\min\limits_{\eta\in\{奇点\}}|\eta-0|$.

2) 由 $\dfrac{1}{1-z-z^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}C_n z^n$，得

$$1=(1-z-z^2)\sum_{n=0}^{+\infty}C_n z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n z^n-\sum_{n=0}^{+\infty}C_n z^{n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}C_n z^{n+2}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n z^n-\sum_{m=1}^{+\infty}C_{m-1}z^m-\sum_{m=2}^{+\infty}C_{m-2}z^m$$

合并整理，比较两边系数,……

解析函数的零点 (用在z=0的泰勒展开研究)

定义　设 $f(z)$ 在 z_0 点解析，若 $f(z_0)=0$，则称 z_0 是 $f(z)$ 的零点.

设 z_0 是 $f(z)$ 的零点，

并且设 $f(z)$ 在 z_0 的某个邻域 $U: |z-z_0|<\rho$ 内不恒为零且解析，则由(P 78)定理1,

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots,$$

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\quad n\geq 0.$$

因设 z_0 是 $f(z)$ 的零点，故 $a_0=f(z_0)=0$，故在 U 内，

$$f(z)=a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots.$$

又因 $f(z_0)$ 在 U 内不恒等于0，故 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 不全为0.

设 z_0是$f(z)$ 的零点，

并且设$f(z)$ 在z_0的某个邻域$U: |z-z_0|<\rho$ 内不恒为零且解析，则

$$f(z)=a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots.$$

且 $a_1,a_2,a_3,\cdots$不全为0.

因此存在$m\in\mathbb{Z}^+$，使得 $a_1=a_2=\cdots=a_{m-1}=0$,

但是$a_m\neq 0$, 即在 z_0 邻域U 内,

$$f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots+a_{m+p}(z-z_0)^{m+p}+\cdots.$$

这时，称z_0 是$f(z)$ 的m 级零点.

例 $z=0$是 $f(z)=z-\sin z$ 的几级零点？

解 在 $z=0$的任一邻域内, $f(z)$ 的泰勒展式:

$$f(z)=z-\sin z=z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)=\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\cdots,$$

故$z=0$是$z-\sin z$的三级零点.

定理3(P 82) z_0 是解析函数$f(z)$(不恒为0)的m 级零点的充要条件是:

1)在z_0某个邻域U内 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$,

$g(z)$在z_0 解析且 $g(z_0)\neq 0$; 熟记

2) $f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,\quad f^{(m)}(z_0)\neq 0.$

证明 1)必要性. 设 z_0 是解析函数$f(z)$ 的m 级零点, 则在z_0 某个邻域U 内,

$$f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+a_{m+1}(z-z_0)^{m+2}+\cdots,$$

$$=(z-z_0)^m\{a_m+a_{m+1}(z-z_0)+a_{m+2}(z-z_0)^2+\cdots\},\quad a_m\neq 0.$$

$$\triangleq g(z)\qquad g(z_0)=a_m\neq 0$$

由P 77收敛半径计算公式得$g(z)$和$f(z)$在z_0有相同收敛半径,故$g(z)$在z_0 解析.#

若存在$m\in\mathbb{Z}^+$, 使得 $a_1=a_2=\cdots=a_{m-1}=0$,

但是$a_m\neq 0$, 即在 z_0 邻域U 内,

$$f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots+a_{m+p}(z-z_0)^{m+p}+\cdots,$$

则称z_0 是 $f(z)$ 的m 级零点.

定理3(P 82) z_0 是解析函数$f(z)$(不恒为0)的m 级零点的充要条件是：

1)在z_0某个邻域U内 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$在z_0 解析且 $g(z_0)\neq 0$;

2) $f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0$, $f^{(m)}(z_0)\neq 0$.

熟记

证明 1)的必要性. 设 z_0 是$f(z)$(解析)的m 级零点, 则在z_0 某个邻域U 内，

$$f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+a_{m+1}(z-z_0)^{m+2}+\cdots,$$

$$=(z-z_0)^m\{\underbrace{a_m+a_{m+1}(z-z_0)+a_{m+2}(z-z_0)^2+\cdots}_{\triangleq g(z)}\},\quad a_m\neq 0.$$

$$g(z_0)=a_m\neq 0$$

由P 77收敛半径计算法得$g(z)$, $f(z)$在z_0收敛半径相同，故$g(z)$在z_0 解析.

1)的充分性. 设在z_0某个邻域U内 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$在z_0 解析, $g(z_0)\neq 0$.

将 $g(z)$在解析点z_0泰勒展开，$g(z)=b_0+b_1(z-z_0)+b_2(z-z_0)^2+\cdots$,

则$f(z)=b_0(z-z_0)^m+b_1(z-z_0)^{m+1}+\cdots$, 且$b_0=g(z_0)\neq 0$.

故 z_0 是$f(z)$ 的m 级零点.

2)的充要性, 由在z_0某邻域U内, $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$得到.#

定理3(P 82) z_0 是解析函数$f(z)$(不恒为0)的m 级零点的充要条件是:

1)在z_0某个邻域U内 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$在z_0 解析且 $g(z_0)\neq 0$;

2) $f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,\ f^{(m)}(z_0)\neq 0.$

熟记

由定理3(P 82)的2)和定理1(P 78)得

若z_0 是解析函数$f(z)$(不恒为0)的n 级零点, 则 $f^{(n)}(z_0)\neq 0,$

$$f(z)=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z-z_0)^{n+1}+\cdots,$$

$\Downarrow$

若z_0为解析函数$f(z)$的至少n 级零点，为$g(z)$ 的n 级零点，

则 $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)}$， 此即P 100的第8题.

利用定理3(P 82)的1)，可以求解 P 100 的第9题.

例. 设 z_0是$f(z)$的m级零点，又是$g(z)$的 n 级零点$(m \ge n)$，

问$\dfrac{f(z)}{g(z)}$在点 z_0 具有何种性质？(P100的9(3))

解 由定理3(P82)的1)，存在z_0的某个邻域U，使得在U 内，

$$f(z) = (z - z_0)^m u(z),\quad u(z)\text{解析且}u(z_0) \ne 0,$$

$$g(z) = (z - z_0)^n v(z),\quad v(z)\text{解析且}v(z_0) \ne 0。$$

因在U内$u(z)$,$v(z)$连续，

故可取U的半径充分小，使得在U内，$u(z) \ne 0$, $v(z) \ne 0$,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{m-n}\frac{u(z)}{v(z)},\qquad \frac{u(z)}{v(z)}\text{解析},\quad \frac{u(z_0)}{v(z_0)} \ne 0.$$

故当$m - n > 0$，即$m > n$时 z_0是$\dfrac{f(z)}{g(z)}$的$m - n$ 级零点；

当$m = n$时，$\dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{u(z)}{v(z)}$，故 z_0 不是$\dfrac{f(z)}{g(z)}$的零点.

作业

P 98-P100

2(1)(3)(7), 3(3)(4), 6(2)(3)

7 (利用 $e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$ **和** $e^{|z|}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|z|^n}{n!}$**)**

9(1)