3.3 柯西积分公式

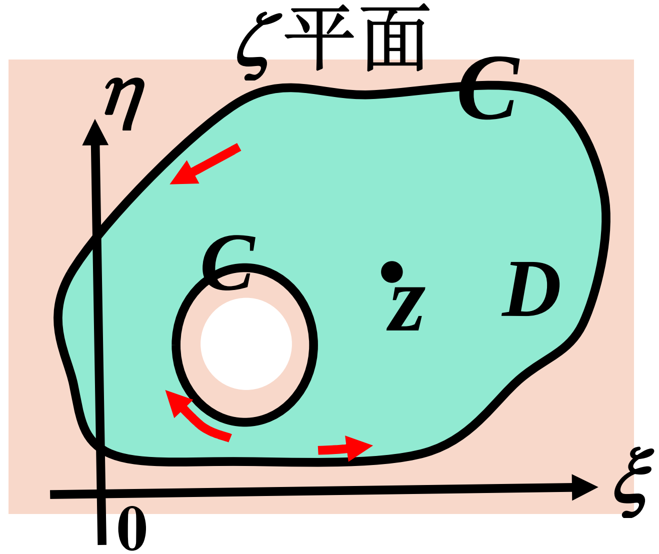
定理1(P54) 如果 $f(z)$ 在闭路(简单闭路或复闭路) C 及其所围区域 D 内处处解析，即 $f(z)$ 在 $\bar{D}=D+C$ 上处处解析，则 $\forall z\in D$，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta .$$

★★★★★

(柯西积分公式)

背熟



注：柯西积分公式，启发了许多方法和定理，

让解析函数理论能够单独脱离于实函数进行分析.

柯西积分公式的意义:

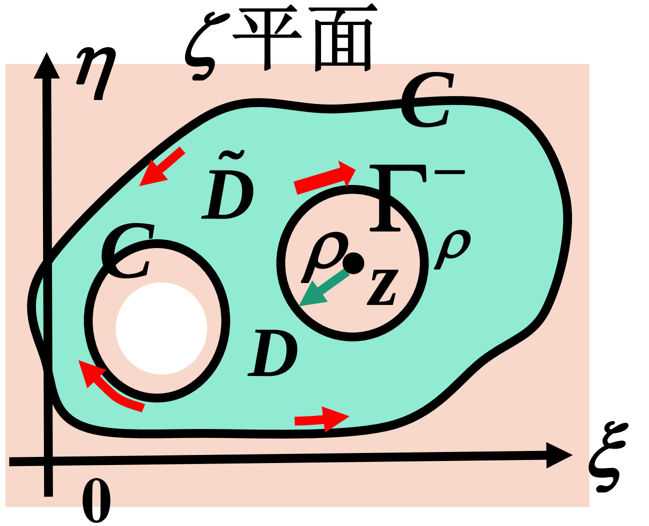
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z.$$

- 函数在区域内部任一点的值可用它在边界上的值表示. 从而解析函数在区域内部任一点的值, 完全可由它在区域边界上的值确定. 如果两解析函数在区域边界上处处相等，则它们在区域内处处相等. (这是解析函数和调和函数的一个重要特征)
- 公式给出了一种表示解析函数的方法,而且给出的是解析函数的一个积分表达式.

  (这是研究解析函数各种性质的有力工具)
- 公式提供了一种计算积分的方法.

定理1(P54) 若 $f(z)$ 在(简单或复) 闭路C及其所围区域 D 内处处解析,

则$\forall z \in D$, $f(z)=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_C \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$. (柯西积分公式)



证明: $\forall z \in D$, $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$关于$\zeta$在$\overline{D}$ 上不解析,

$\zeta = z$是它在$\overline{D}$上的唯一奇点.

因区域D是开集, 故$\forall z \in D$, 可作z 的充分小领域$|\zeta - z| < \rho$,

使其全落在D 内. 记Γ_ρ : $|\zeta - z| = \rho$, 取逆时针方向,

得复闭路$\tilde{C} = C + \Gamma_\rho^-$, $\tilde{C}$ 围成一个多连通区域, 记为$\tilde{D}$.

$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$关于$\zeta$在闭域$\overline{\tilde{D}}$上处处解析.

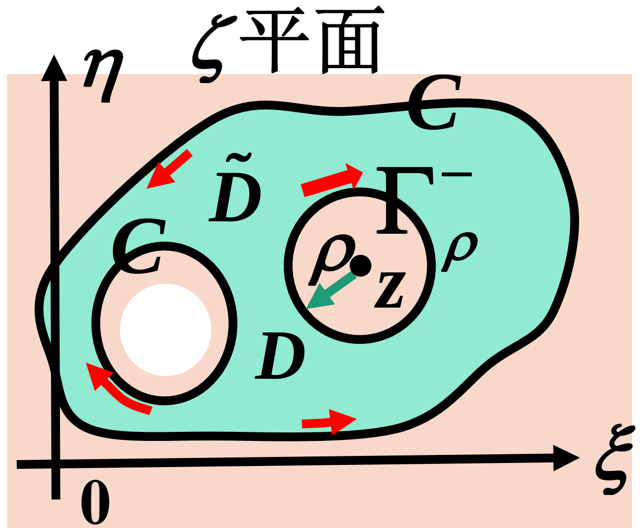
由多连通区域的柯西积分定理得,

$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$关于$\zeta$在闭域$\bar{\tilde{D}}$上处处解析. 由多连通区域柯西定理得,

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

$$= \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z) + f(z)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

$$= \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta + f(z)\int_{\Gamma_\rho} \frac{1}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$



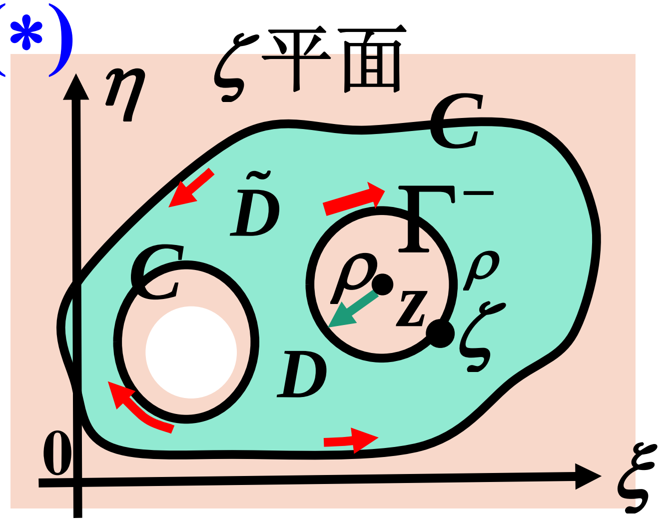
P 49例2

$$= \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta + 2\pi i f(z).$$

故 $\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - 2\pi i f(z) = \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$ (*)

目标：证明 $\displaystyle f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$ (柯西积分公式)

故$\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - 2\pi\mathrm{i}\, f(z) = \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$ (*)



由于$f(z)$在 z 解析从而连续,

故对任给$\varepsilon>0$, 存在$\delta(\varepsilon)>0$, 使得当

$|\zeta - z| < \delta$时， $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon.$

取$0<\rho<\delta$, 从而$\forall \zeta \in \Gamma_\rho$, $|\zeta - z| = \rho < \delta$, $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$，故

$$\left|\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\right| = \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} < \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

由长大不等式推论得

$$\left|\int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta\right| < \frac{\varepsilon}{\rho}\cdot(\Gamma_\rho\text{周长}) = \frac{\varepsilon}{\rho}\cdot 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$$

代入(*)，得

$$\left|\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - 2\pi\mathrm{i}\, f(z)\right| \le 2\pi\varepsilon.$$

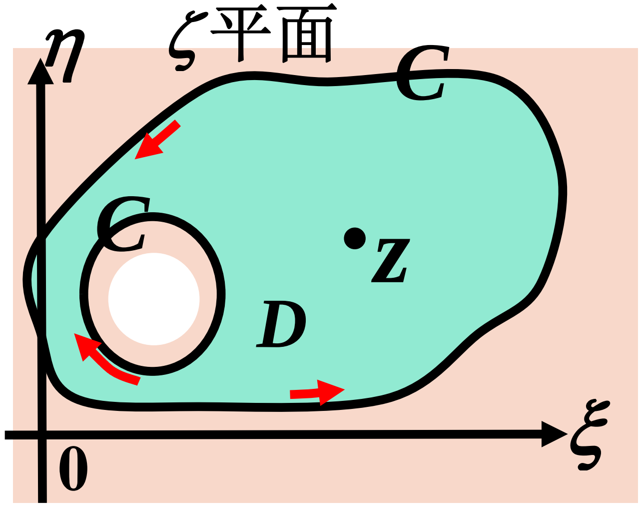
左端不依赖于ε.

令$\varepsilon \to 0$, 得左端等于0 ,故得$f(z) = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$, 证毕.#

定理1(P54) 若 $f(z)$ 在(简单或复) 闭路C及其所围区域 D 内处处解析,

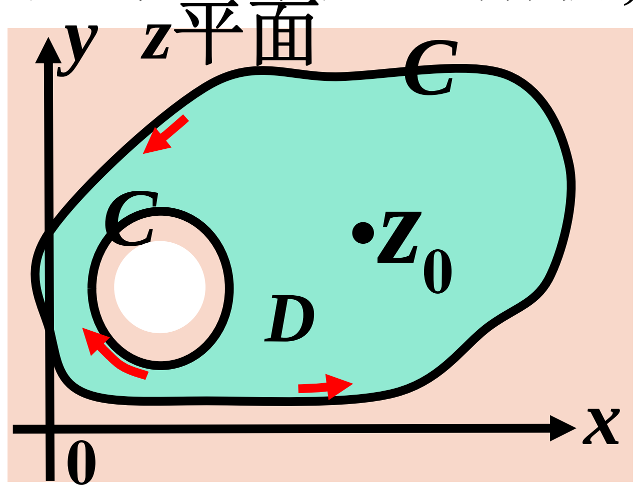
则$\forall z \in D$, $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$$

(柯西积分公式)



定理1(P54) 若 $f(z)$ 在(简单或复) 闭路C及其所围区域 D 内处处解析,

则$\forall z_0 \in D$, $$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z,$$



且$\forall a,b \in \mathbb{C}$, 若$a \neq 0$且$\frac{b}{a} \in D$,有

$$\int_C \frac{f(z)}{az-b}\mathrm{d}z=\frac{1}{a}\int_C \frac{f(z)}{z-\frac{b}{a}}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{a}f\left(\frac{b}{a}\right).$$

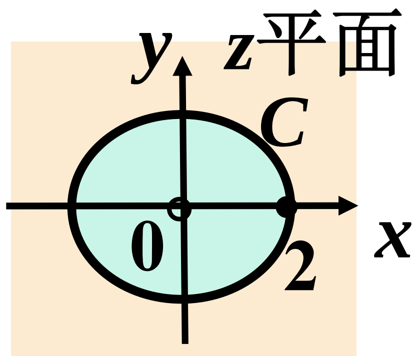
★★★★★ 记下背熟

定理1(P54) 若 $f(z)$ 在(简单或复) 闭路C及其所围区域 D 内处处解析,

则 $\forall z_0 \in D$, $\boxed{f(z_0)} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$. (柯西积分公式)

例. 求 (1)$\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z}\,dz$ (2)$\displaystyle\int_{|z-2|=1} \frac{\sin z}{z}\,dz$.

解. (1)奇点 $z=0$在圆域$|z|<2$内,

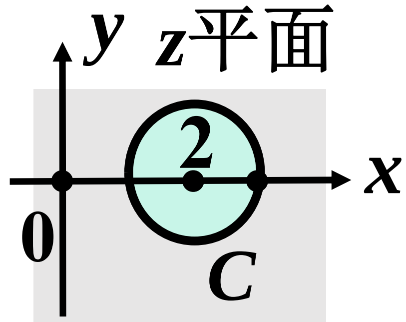


$f(z)=\sin z$处处解析, 故由柯西积分公式得

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z}\,dz = 2\pi i \cdot \boxed{\sin z\big|_{z=0}} = 0.$$

(2) 唯一的奇点 $z=0$不在圆$|z-2|\le 1$上, 故

由$\dfrac{\sin z}{z}$在$|z-2|\le 1$上解析和柯西积分定理知

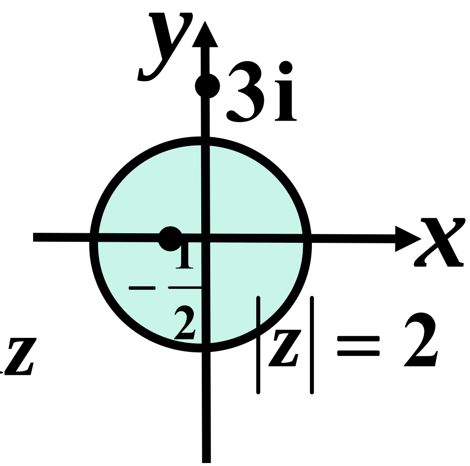


$$\int_{|z-2|=1} \frac{\sin z}{z}\,dz = 0.$$

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz.$

解：由$(2z+1)(3i-z)=0$，得被积函数奇点$z_1=-\frac{1}{2}$，$z_2=3i$.

$-\frac{1}{2}$在$|z|<2$ 内，$3i$不在$|z|\le 2$ 上.



故由柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=2}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz=\oint_{|z|=2}\frac{(3z-2)e^{2z}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\cdot 2(3i-z)}dz$$

$$=2\pi i\cdot\left.\frac{(3z-2)e^{2z}}{2(3i-z)}\right|_{z=-\frac{1}{2}}=\pi i\cdot\frac{\left(-\frac{3}{2}-2\right)e^{-1}}{3i-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=-\frac{7e^{-1}\pi i}{6i+1}\cdot\frac{1-6i}{1-6i}=-\frac{7}{37e}\pi(6+i).$$

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z|=3.5}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz.$

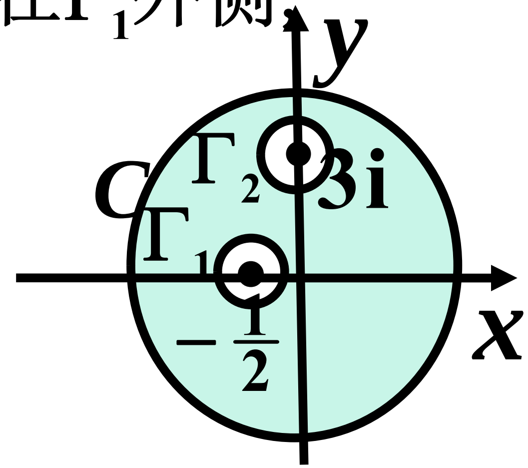
解：由$(2z+1)(3i-z)=0$，得被积函数奇点 $z_1=-\frac{1}{2}$，$z_2=3i$.

奇点$-\frac{1}{2}$, $3i$都在$C:|z|=3.5$所围区域内部.

作圆周 Γ_1: $\left|z+\frac{1}{2}\right|=\rho$， Γ_2: $|z-3i|=\rho$,取$\rho>0$充分小使得

Γ_1, Γ_2都在$|z|=3.5$ 内部, Γ_1在Γ_2外侧, Γ_2在Γ_1外侧,

则得复闭路 $\tilde{C}=C+\Gamma_1^-+\Gamma_2^-$.



由多连通区域的柯西积分定理和

柯西积分公式知

$$\oint_{|z|=3.5}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz=\oint_{\left|z+\frac{1}{2}\right|=\rho}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz+\oint_{|z-3i|=\rho}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(3i-z)}dz$$

$$=\frac{1}{2}\oint_{\left|z+\frac{1}{2}\right|=\rho}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(z+\frac{1}{2})(3i-z)}dz+(-1)\oint_{|z-3i|=\rho}\frac{(3z-2)e^{2z}}{(2z+1)(z-3i)}dz$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left.\frac{(3z-2)e^{2z}}{3i-z}\right|_{z=-\frac{1}{2}}-2\pi i\cdot\left.\frac{(3z-2)e^{2z}}{2z+1}\right|_{z=3i}$$

$$=2\pi i\left\{\frac{-7e^{-1}}{12i+2}-\frac{(9i-2)e^{6i}}{6i+1}\right\}=2\pi i\frac{-7e^{-1}-(18i-4)(\cos 6+i\sin 6)}{12i+2}$$

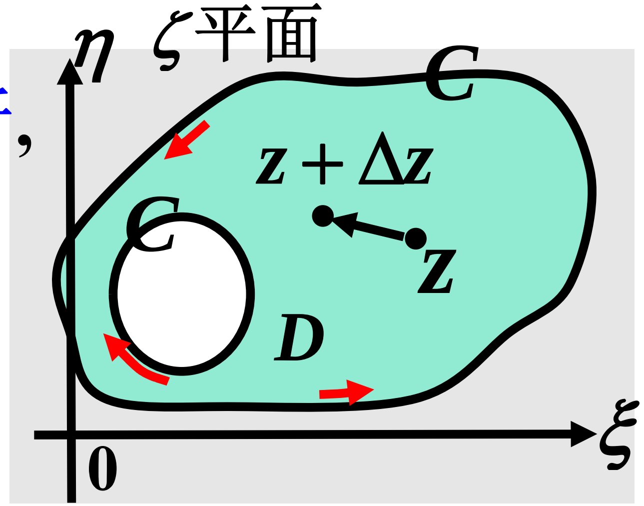
$$=\pi\frac{(18\cos 6+4\sin 6)+i(-7e^{-1}+4\cos 6+18\sin 6)}{6i+1}\cdot\frac{-6i+1}{-6i+1}$$

$$=\frac{\pi(42\cos 6+112\sin 6)-42\pi e^{-1}}{37}-i\frac{\pi\left(104\cos 6+6\sin 6+7e^{-1}\right)}{37}.$$

解析函数的高阶导数积分公式(柯西积分公式)

定理2(P56) 在定理1(P54)的条件下，即设 $f(z)$ 在(简单或复)闭路C及其所围区域D 内处处解析，则 $\forall z\in D$，$f(z)$ 有任意阶导数，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad n=1,2,\ldots$$



证明：归纳法. 1) $n=1$时，需证 $f'(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta.$ (a)

由柯西积分公式得$f(z)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$. 据此用导数定义证明$(a)$.

因D开，故$\forall z\in D$，存在充分小的$\delta>0$，使得当$|\Delta z|<\delta$时，$z+\Delta z\in D$.

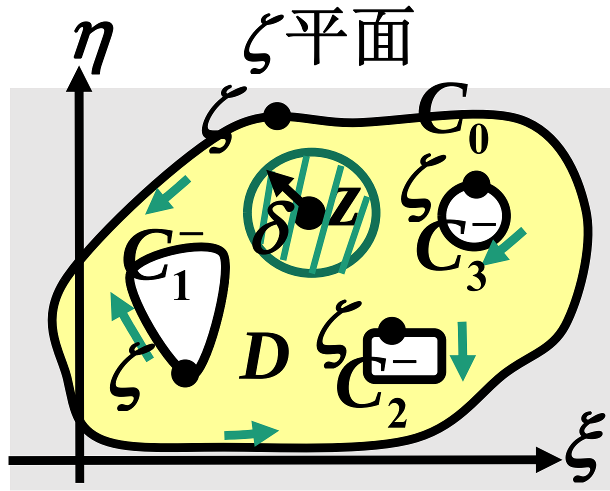
$$\therefore\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\left\{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-(z+\Delta z)}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\Delta z}\left(\frac{1}{\zeta-z-\Delta z}-\frac{1}{\zeta-z}\right)\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta.(b)$$

为了证明(a)，考虑(b)两端跟(a)右端项的差：

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\left(\frac{1}{\zeta-z-\Delta z}-\frac{1}{\zeta-z}\right)\mathrm{d}\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{\Delta z\, f(\zeta)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-\Delta z)}\mathrm{d}\zeta. \quad (c)$$



为证(a), 只需证当$\Delta z \to 0$ 时, (c)右端趋于0.

因为当$|\Delta z|<\delta$ 时, $z+\Delta z\in D$, 故$\forall \zeta\in C$,

$|\zeta-z|\ge\delta$, $|\zeta-z-\Delta z|\ge|\zeta-z|-|\Delta z|\ge\delta-|\Delta z|$,

$$\therefore \left|\frac{\Delta z\, f(\zeta)}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-\Delta z)}\right|\le\frac{|\Delta z||f(\zeta)|}{\delta^2\left(\delta-|\Delta z|\right)}.$$

因$f(\zeta)$在C上连续, 故存在与Δz无关的常数$M>0$, $|f(\zeta)|\le M, \forall \zeta\in C$.

设C的长度为l(与Δz无关), 则由(c)和长大不等式得

$$\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta\right|\le\frac{|\Delta z|\cdot M}{2\pi\delta^2\left(\delta-|\Delta z|\right)}l\to 0\ (|\Delta z|\to 0).$$

$\therefore f(z)$可导, 且$f'(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta$. 故$n=1$时柯西积分公式成立.

设 $f^{(n-1)}(z)=\dfrac{(n-1)!}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^n}d\zeta$，类似于$n=1$ 的情形，灵活运用

$$\frac{1}{(\zeta-z-\Delta z)^m}-\frac{1}{(\zeta-z)^m}=\left(\frac{1}{\zeta-z-\Delta z}-\frac{1}{\zeta-z}\right)\left(\frac{1}{(\zeta-z-\Delta z)^{m-1}}+\frac{1}{(\zeta-z-\Delta z)^{m-2}(\zeta-z)}+\cdots+\frac{1}{(\zeta-z)^{m-1}}\right)$$

$$=\frac{\Delta z}{\zeta-z}\left\{\frac{1}{(\zeta-z-\Delta z)^m}+\frac{1}{(\zeta-z-\Delta z)^{m-1}(\zeta-z)}+\cdots+\frac{1}{(\zeta-z-\Delta z)(\zeta-z)^{m-1}}\right\}$$，可以证明

$$\left|\frac{f^{(n-1)}(z+\Delta z)-f^{(n-1)}(z)}{\Delta z}-\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\right|\to 0\ (|\Delta z|\to 0).$$

故 $f^{(n-1)}(z)$可导，且$f^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta.$

由归纳法，对于一般的n 结论成立. 证毕.#

柯西积分公式 设 $f(z)$ 在(简单或复)闭路C 及其所围区域D 内处处解析，则 $\forall z\in D$，$f(z)$ 有任意阶导数，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,\quad n=0,1,2,\cdots$$

柯西积分公式设 $f(z)$ 在(简单或复)闭路 C 及其所围区域 D 内处处解析，则 $\forall z \in D$，$f(z)$ 有任意阶导数，且

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta,\quad n = 0,1,2,\cdots$$

柯西积分公式设 $f(z)$ 在(简单或复)闭路 C 及其所围区域 D 内处处解析，则 $\forall z_0 \in D$，$f(z)$ 有任意阶导数，且

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,d z,\quad n = 0,1,2,\cdots$$

在同样条件下，$\forall a,b \in \mathbb{C}$，$a \neq 0$，若 $\frac{b}{a} \in D$，则

$$\int_C \frac{f(z)}{(az - b)^n}\,d z = \frac{1}{a^n}\int_C \frac{f(z)}{\left(z - \frac{b}{a}\right)^n}\,d z = \frac{2\pi i}{a^n(n-1)!} f^{(n-1)}\left(\tfrac{b}{a}\right).$$

★★★ 熟背

例 计算积分 $\mathrm{I}=\int_C\left[\dfrac{e^z}{z(z-2i)}+\dfrac{\cos z}{(2z-2i)^3}\right]dz,\ C:|z-3i|=r\ (r\neq 1,2,3)$.

解 由 $z(z-2i)=0$ 解得奇点 $z_1=0$，$z_2=2i$.

由 $(2z-2i)^3=0$ 解得奇点 $z_3=i$. 它们与圆心的距离分别为:

$|0-3i|=3$，$|2i-3i|=1$，$|i-3i|=2$.

需根据r的大小讨论这些奇点是否在积分闭路的内区域.

(1) 当 $0<r<1$ 时, 没有奇点在 $|z-3i|<r$ 内，从而被积函数在C围成的闭域上解析，故 $\mathrm{I}=0$.

(2) 当 $1<r<2$ 时, 只有奇点 $2i$ 在 $|z-3i|<r$ 内, 故

$$\mathrm{I}=\int_C\frac{e^z}{z(z-2i)}dz+\int_C\frac{\cos z}{(2z-2i)^3}dz=2\pi i\cdot\left.\frac{e^z}{z}\right|_{z=2i}+0$$

$$=2\pi i\frac{e^{2i}}{2i}=\pi e^{2i}.$$

(3) 当$2<r<3$时, 只有奇点$2\mathrm{i}$和i在$|z-3\mathrm{i}|<r$ 内, 故

$$I=\int_C \frac{e^z}{z(z-2\mathrm{i})}dz+\frac{1}{8}\int_C \frac{\cos z}{(z-\mathrm{i})^3}dz=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{e^z}{z}\bigg|_{z=2\mathrm{i}}+\frac{2\pi\mathrm{i}}{8(3-1)!}\cdot\frac{d^{3-1}\cos z}{dz^{3-1}}\bigg|_{z=\mathrm{i}}$$

$$=\pi e^{2\mathrm{i}}+\frac{\pi\mathrm{i}}{8}\cdot\frac{d^2\cos z}{dz^2}\bigg|_{z=\mathrm{i}}=\pi e^{2\mathrm{i}}-\frac{1}{8}\pi\mathrm{i}\cos\mathrm{i}$$

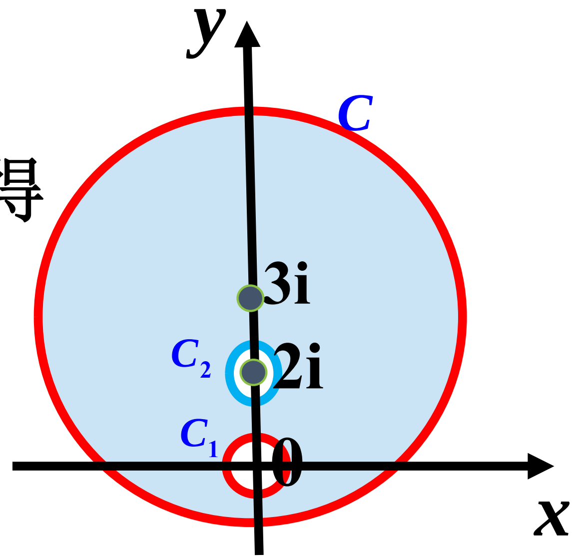
$$=\pi\cos 2+\mathrm{i}\pi\sin 2-\frac{1}{8}\pi\mathrm{i}\,\mathrm{ch}1=\pi\cos 2+\mathrm{i}\pi\left(\sin 2-\frac{1}{8}\mathrm{ch}1\right).$$

(4) 当$r>3$时, 奇点$0,2\mathrm{i},\mathrm{i}$全在 $|z-3\mathrm{i}|<r$ 内, 故

取ρ充分小, 使得 $C_1:|z|=\rho$和$C_2:|z-2\mathrm{i}|=\rho$都在C内,

C_1在C_2的外侧, C_2在C_1的外侧,

则由多连通区域的柯西积分定理和柯西积分公式得



$$\mathrm{I}=\int_C \frac{\mathrm{e}^z}{z(z-2\mathrm{i})}\mathrm{d}z+\int_C \frac{\cos z}{(2z-2\mathrm{i})^3}\mathrm{d}z$$

$$=\int_{|z|=\rho} \frac{\mathrm{e}^z}{z(z-2\mathrm{i})}\mathrm{d}z+\int_{|z-2\mathrm{i}|=\rho} \frac{\mathrm{e}^z}{z(z-2\mathrm{i})}\mathrm{d}z+\frac{1}{8}\int_C \frac{\cos z}{(z-\mathrm{i})^3}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\mathrm{i}\cdot\left.\frac{\mathrm{e}^z}{z-2\mathrm{i}}\right|_{z=0}+2\pi\mathrm{i}\cdot\left.\frac{\mathrm{e}^z}{z}\right|_{z=2\mathrm{i}}+\frac{2\pi\mathrm{i}}{8(3-1)!}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}^{3-1}\cos z}{\mathrm{d}z^{3-1}}\right|_{z=\mathrm{i}}$$

$$=-\pi+\pi\cos 2+\mathrm{i}\pi\left(\sin 2-\frac{1}{8}\operatorname{ch}1\right).$$

平均值公式： 设$f(z)$在闭圆$|z-a|\le R$上解析,则

$$f(a)=\frac{1}{2\pi R}\int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}s,$$

其中$C:|\zeta-a|=R,\ \zeta=a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$0\le\theta<2\pi,\ \zeta'(\theta)=R\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,

$\mathrm{d}s=C$上的弧长微分$=|\zeta'(\theta)|\,\mathrm{d}\theta=R\,\mathrm{d}\theta$,

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

证明 由柯西积分公式得

$$\begin{aligned}
f(a)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\,\mathrm{d}\zeta\\
&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}R\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi R}\int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

例. 求 $\displaystyle\oint_{|z-2i|=1}\frac{e^z}{z(z^2+4)}dz.$

解 首先求积分路径及其所围区域内的所有奇点.

由$z(z^2+4)=0$得 $z_1=0$, $z_2=\left(\sqrt{-4}\right)_0=2i$, $z_3=\left(\sqrt{-4}\right)_1=-2i$.

$2i$在$|z-2i|<1$内, 0和$-2i$都不在闭圆$|z-2i|\le 1$上.

e^z 处处解析. 故由柯西积分公式得

$$\oint_{|z-2i|=1}\frac{e^z}{z(z^2+4)}dz=\oint_{|z-2i|=1}\frac{e^z}{z(z+2i)(z-2i)}dz$$

$$=2\pi i\cdot\left.\frac{e^z}{z(z+2i)}\right|_{z=2i}=2\pi i\cdot\frac{e^{2i}}{2i(2i+2i)}$$

$$=-\frac{\pi}{4}i(\cos 2+i\sin 2)=\frac{\pi}{4}(\sin 2-i\cos 2).$$

例 计算积分 $I=\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz,\quad C:|z|=r\,(r\neq 1,2).$

解：需根据 r 的大小讨论. 由 $z(z+1)(z-2)^2=0$ 解得奇点 $0,-1,2$.

(1) 当 $0<r<1$ 时, 由柯西积分公式有

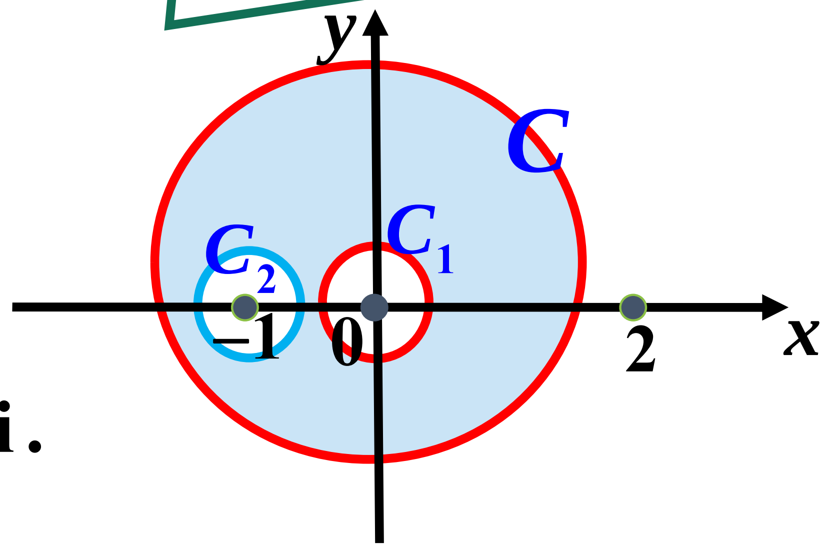
$$I=\oint_{C_1}\frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz=2\pi i\cdot\left.\frac{e^z}{(z+1)(z-2)^2}\right|_{z=0}=\frac{1}{2}\pi i.$$

(2) 当 $1<r<2$ 时, 由多连通区域的柯西积分定理和柯西积分公式,

$$I=\oint_{|z|=\rho}\frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz+\oint_{|z+1|=\rho}\frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz\ (\rho>0\text{充分小})$$

$$=\frac{1}{2}\pi i+2\pi i\cdot\left.\frac{e^z}{z(z-2)^2}\right|_{z=-1}$$

$$=\frac{1}{2}\pi i+2\pi i\cdot\frac{1}{-9e}=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{9e}\right)\pi i.$$



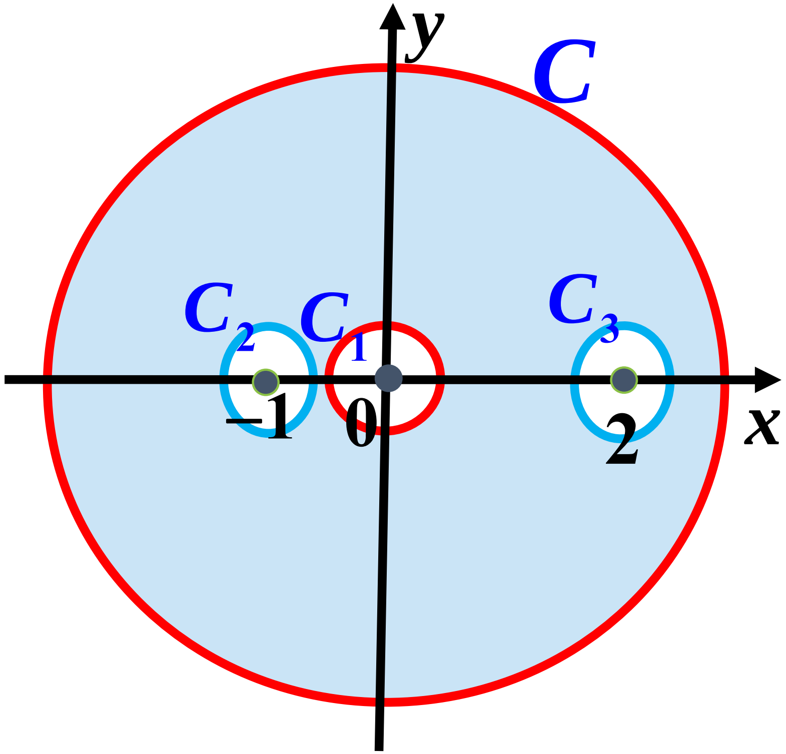
(3) 当$r>2$时, 由多连通区域的柯西积分定理和柯西积分公式,

$$\mathrm{I}=\left(\oint_{|z|=\rho}+\oint_{|z+1|=\rho}\right)\frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz+\oint_{|z-2|=\rho}\frac{e^z}{z(z+1)(z-2)^2}dz$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{9e}\right)\pi i+\frac{2\pi i}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left\{\frac{e^z}{z(z+1)}\right\}\Bigg|_{z=2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{9e}\right)\pi i+2\pi i\frac{e^z z(z+1)-e^z(2z+1)}{z^2(z+1)^2}\Bigg|_{z=2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{9e}+\frac{e^2}{18}\right)\pi i.$$

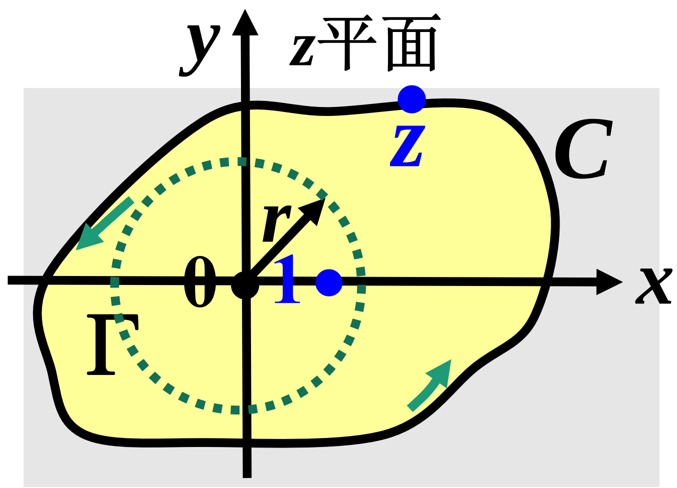


例 C 为包含正向圆周Γ：$|z| = r > 1$ 的任意简单封闭曲线, 计算下列积分.

(1) $\oint_C \dfrac{\cos \pi z}{(z-1)^3} dz$;　　(2) $\oint_C \dfrac{e^z}{(z^2+1)^2} dz$.

解 (1) $\dfrac{\cos \pi z}{(z-1)^3}$ 在 C 内 $z=1$ 处不解析, $\cos \pi z$处处解析,

故由柯西积分公式得



$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^3} dz$$

$$= \frac{2\pi i}{(3-1)!} (\cos \pi z)^{(3-1)} \Big|_{z=1}$$

$$= \frac{2\pi i}{2!} \cdot (\cos \pi z)'' \Big|_{z=1}$$

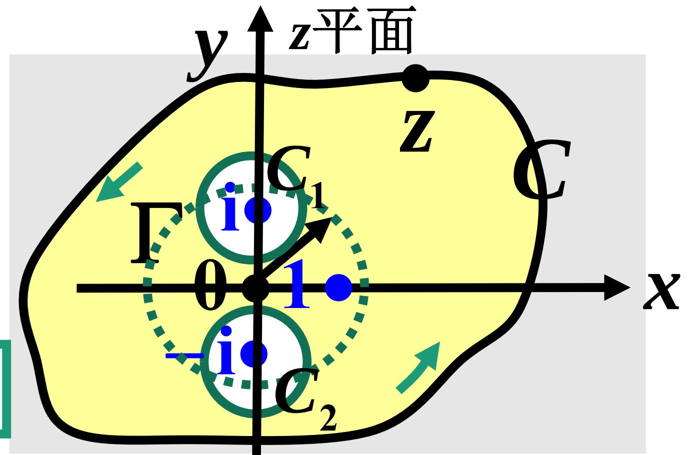
$$= \pi i (-\pi^2 \cos \pi z) \Big|_{z=1}$$

$$= \pi^3 i.$$

(2) 函数 $\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 $z=\pm i$ 处不解析, i 和 $-i$ 都在 Γ 内, 故都在 C 内,

分别以 i 和 $-i$ 为中心作半径充分小的正向圆周 C_1 和 C_2,

使得 C_1 和 C_2 都在 C 内. $\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在由 $C+C_1^-+C_2^-$ 围成的多连通区域内解析,



由多连通区域的柯西积分定理得

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz=\oint_{C_1}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz+\oint_{C_2}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz.$$

由柯西积分公式得

在 C_1 及其内部解析

$$\oint_{C_1}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz=\oint_{C_1}\frac{\frac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}dz=\frac{2\pi i}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left\{\frac{e^z}{(z+i)^2}\right\}\Bigg|_{z=i}$$

$$=2\pi i\frac{e^z(z+i-2)}{(z+i)^3}\Bigg|_{z=i}=2\pi i\frac{e^i(2i-2)}{8i^3}=\frac{1}{2}\pi e^i(1-i).$$

同理可得 $\displaystyle\oint_{C_2}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz=\oint_{C_2}\frac{\frac{e^z}{(z-i)^2}}{(z+i)^2}dz=-\frac{1}{2}\pi e^{-i}(1+i).$

$$\therefore \oint_C\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz=\frac{1}{2}\pi\left\{e^i(1-i)-e^{-i}(1+i)\right\}=\pi(\sin 1-\cos 1)i.$$

例 设$f(z)$在闭圆$|z|\le 1$内解析，且$f(0)=1$, $C:|z|=1$, 正向.

(1)证明：$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \left\{2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\} f(z)\frac{\mathrm{d}z}{z}=2\pm f'(0).$$

(2)证明：$$\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\pi+\frac{\pi}{2}f'(0),$$

$$\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\pi-\frac{\pi}{2}f'(0).$$

思路：1)用柯西积分公式或柯西积分定理

先求出复积分，证明相关等式；

2)利用积分路径的参数方程求复积分(P48)；

3)两种积分方法的结果应该相等，比较它们得出结论.

例 设$f(z)$在闭圆$|z|\leq 1$内解析，且$f(0)=1$, $C:|z|=1$, 正向.

(1)证明：$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C\left\{2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}f(z)\frac{dz}{z}=2\pm f'(0).$

证明: (1) 由柯西积分定理和柯西积分公式知

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\left\{2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}f(z)\frac{dz}{z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{2f(z)}{z}dz\pm\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz\pm\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z^2}dz$$

$$=2f(z)\Big|_{z=0}\pm 0\pm\frac{1}{(2-1)!}f'(0)\Big|_{z=0}$$

$$=2f(0)\pm f'(0)\overset{\text{条件}}{=}2\pm f'(0).$$

例 设$f(z)$在闭圆$|z| \le 1$内解析，且$f(0)=1$, $C:|z|=1$, 正向.

(2)证明: $\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = \pi + \frac{\pi}{2}f'(0)$, $\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = \pi - \frac{\pi}{2}f'(0)$.

证明: (2) C的参数方程为$z=e^{i\theta}, 0\le\theta<2\pi$, $z'(\theta)=ie^{i\theta}$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \left\{2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\} f(z)\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\left\{2\pm\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right\} f(e^{i\theta})\frac{ie^{i\theta}\,d\theta}{e^{i\theta}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{2\pm 2\cos\theta\}\, f(e^{i\theta})\,d\theta$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}\,d\theta \overset{(1)}{=} 2+f'(0), \\ \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta \overset{(1)}{=} 2-f'(0),\end{cases}$$

$$\boxed{1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2},}$$

$$\boxed{1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}.}$$

故最后的等式两边乘以$\frac{\pi}{2}$得到(2) 的结论.

作业

P 71-72

9(先用柯西积分公式求积分，再用参数法求它)

10(2),11,13,14,15