第三章 解析函数的积分表示

复积分是分析解析函数的重要工具，

许多极其重要的复函数性质都是在此基础上展开的.

实积分定义：将在 x 轴上的某个积分区间

分割、取函数近似值、作和、取极限；

类似地，

复积分定义：将复平面一条有向连续曲线

分割、取近似值、作和、取极限.

3.1 复变函数的积分

定义：设 C是z平面上的一条逐段光滑的有向曲线，

起点是 z_0，终点是Z，

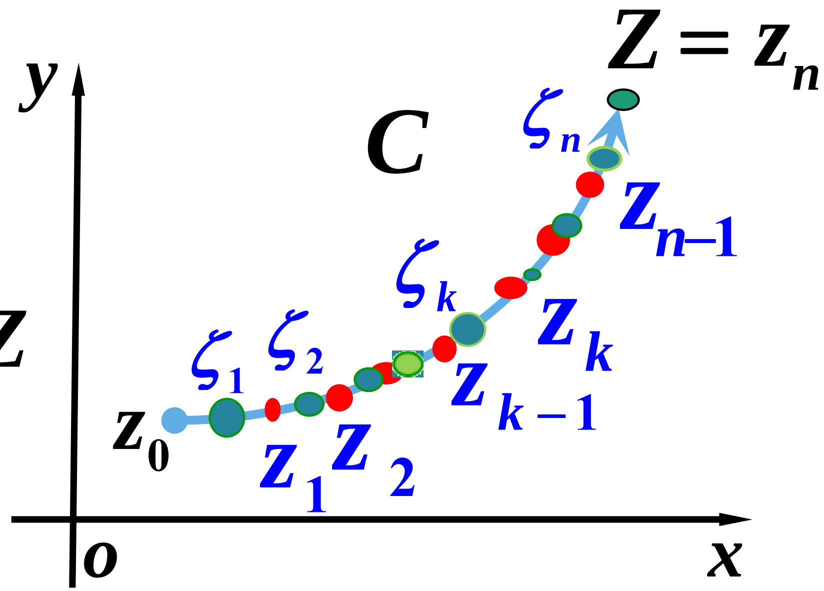
设 $w = f(z)$ $(z \in C)$是C上的单值连续复函数.

(1) 分割

在 C 中任意插入$n-1$个分点，

连同z_0和Z，依次记为

$z_0, z_1, \cdots, z_{k-1}, z_k, \cdots, z_{n-1}, z_n = Z$



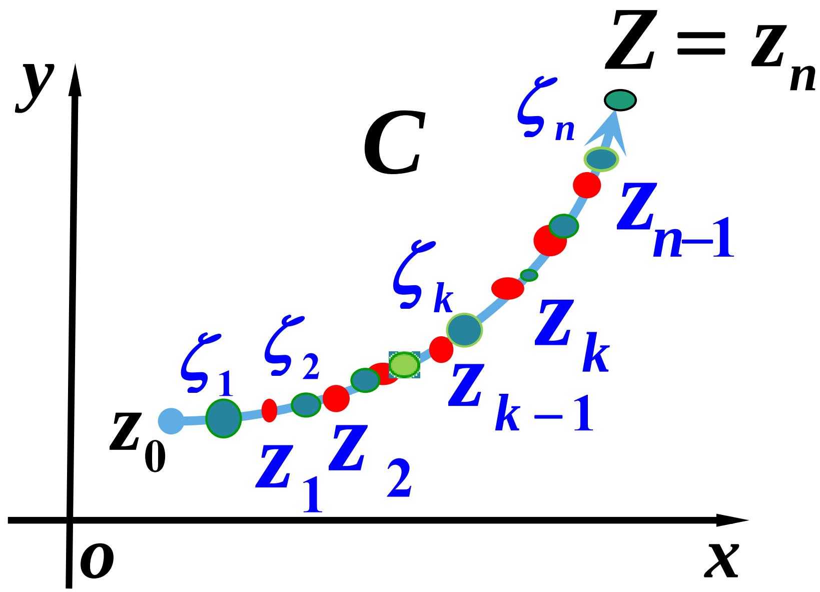
(2)取近似值

在每个弧段 $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ 上任取一点 ζ_k，　$k = 1, 2, \cdots, n$，

用$f(\zeta_k)$近似$f(z)$在弧段$\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$上每一点的值；

(3)作和 记$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$，

作和$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k.$



(4)求极限 记 $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n}\{|\Delta z_k|\}$.

如果当 $n \to +\infty$， $\lambda \to 0$ 时，

$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$ 的极限存在，且与C的分法和ζ_k的取法无关，

则称$f(z)$在曲线C上可积，

称此极限值为$f(z)$沿曲线C自z_0到Z的(复)积分，

记作 $\int_C f(z)\mathrm{d}z = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k.$

$$\boxed{\int_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k}$$

设$z = x + \mathrm{i}\,y$, $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$在$C$上连续, 求$\int_C f(z)\mathrm{d}z$.

设$z_k = x_k + \mathrm{i}\,y_k$, $\zeta_k = \xi_k + \mathrm{i}\,\eta_k$,则 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1} = \Delta x_k + \mathrm{i}\,\Delta y_k$,

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}\left\{u(\xi_k,\eta_k) + \mathrm{i}\,v(\xi_k,\eta_k)\right\}(\Delta x_k + \mathrm{i}\,\Delta y_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right\} + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\left\{v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right\}.$$

令$\lambda \to 0$, 由第二型曲线积分定义知

$f(z)$在C上可积, 且

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y.$$ 故证得

定理(P47) 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在逐段光滑曲线 C 上连续,

则 复积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 存在，且

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y \quad (1)$$

$$=\int_C (u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y).$$ (方便记忆)

设 C: $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$, $a\le t\le b$, 简单光滑曲线,

起点 $z_0=z(a)=x(a)+\mathrm{i}\,y(a)$, 终点 $Z=z(b)=x(b)+\mathrm{i}\,y(b)$,

则 $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y$

$$\boxed{\begin{aligned}u(t)&=u\big(x(t),y(t)\big)\\ v(t)&=v\big(x(t),y(t)\big)\end{aligned}}$$

$$=\int_a^b\Big\{\big(u(t)x'(t)-v(t)y'(t)\big)+\mathrm{i}\big(v(t)x'(t)+u(t)y'(t)\big)\Big\}\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b\{u(t)+\mathrm{i}v(t)\}\{x'(t)+\mathrm{i}\,y'(t)\}\mathrm{d}t=\int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)\mathrm{d}t.$$

$$\boxed{z'(t)=x'(t)+\mathrm{i}\,y'(t)}$$

背熟 ★★★

设$z(t)=x(t)+\mathrm{i}\,y(t)$, $a\le t\le b$,简单光滑, 则$z'(t)=x'(t)+\mathrm{i}\,y'(t)$,

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)\mathrm{d}t \quad (2) \qquad (P48)$$ 背熟 ★★★

例 计算 $\int_C x\mathrm{d}z$, C 为从原点到点$1+\mathrm{i}$的直线段.

解 因C是直线段, 故设$z(t)=z_0+z_1t$, $0\le t\le 1$,

起点: $t=0$, $z(0)=z_0=0$; 终点: $t=1$, $z(1)=0+z_1=1+\mathrm{i}$.

$z(t)=(1+\mathrm{i})t$, $0\le t\le 1$, $z'(t)=1+\mathrm{i}$. $x(t)=\mathrm{Re}\,z(t)=t \Rightarrow$

$$\int_C x\mathrm{d}z=\int_0^1 x(t)z'(t)\mathrm{d}t=\left(1+\mathrm{i}\right)\int_0^1 t\mathrm{d}t$$

$$=\left(1+\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{2}t^2\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}(1+\mathrm{i}).$$

复积分有与实定积分类似的性质:

(1) $\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$, k为复常数;

(2) $\int_C \{f(z) \pm g(z)\} dz = \int_C f(z)dz \pm \int_C g(z)dz$;

被积函数的线性可加性

(3) $\int_C f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz$, C与C^-:曲线相同,方向相反;

(4) 设C由C_1, C_2, $C_3,\cdots,C_n$依次连接组成,

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz.$$

积分路径的可加性

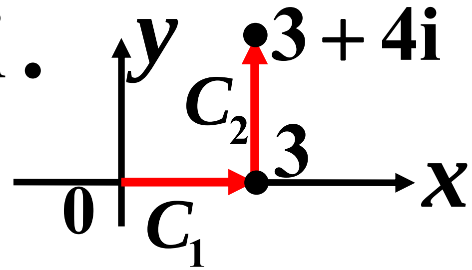
(1)−(4) 可直接由复积分定义或P47定理1推得.

例 计算 $\int_C \mathrm{i}\,\bar{z}\,\mathrm{d}z$, C 为从原点到点3再到点$3+4\mathrm{i}$的折线段.

解 $C=C_1+C_2$, C_1是从0到3的直线段, C_2是从3到$3+4\mathrm{i}$的直线段,

在C_1上, $y=0$, $0<x<3$, 故 $C_1: z=t$, $0<t<3$, $z'(t)=1$,

$$\int_{C_1} \mathrm{i}\,\bar{z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_0^3 \overline{z(t)}\,z'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_0^3 t\,\mathrm{d}t = \frac{9}{2}\mathrm{i}.$$



在C_2上, $x=3$, $0<y<4$,

故 $C_2: z=3+\mathrm{i}t$, $0<t<4$, $z'(t)=0+\mathrm{i}=\mathrm{i}$,

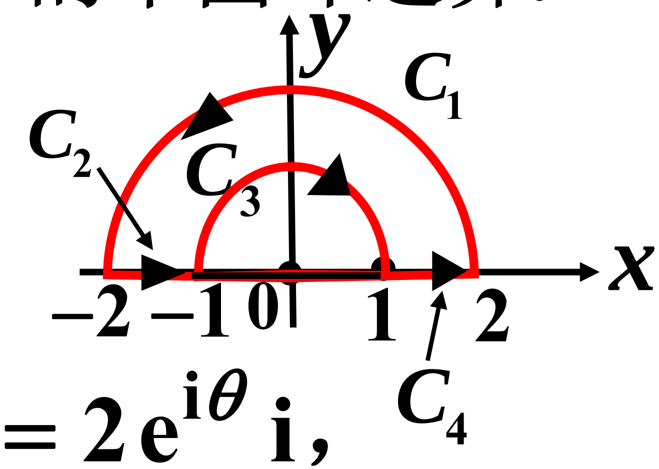
$$\int_{C_2} \mathrm{i}\,\bar{z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_0^4 \overline{z(t)}\,z'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_0^4 (3-\mathrm{i}t)\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}t = -\int_0^4 (3-\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t$$

$$= -\left(3t-\frac{1}{2}t^2\mathrm{i}\right)\Big|_0^4 = -12+8\mathrm{i}.$$

$$\boxed{z'(t)=x'(t)+\mathrm{i}\,y'(t)}$$

$$\text{故}\int_C \mathrm{i}\,\bar{z}\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} \mathrm{i}\,\bar{z}\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} \mathrm{i}\,\bar{z}\,\mathrm{d}z = \frac{9}{2}\mathrm{i} + (-12+8\mathrm{i}) = -12+\frac{25}{2}\mathrm{i}.$$

例1 计算 $I=\int_C \frac{z}{\bar{z}}dz$, C 为如图所示的半圆环边界.



解 $C=C_1+C_2+C_3+C_4$.

在C_1上, 模$r=2$, 辐角$\theta\in(0,\pi)$,

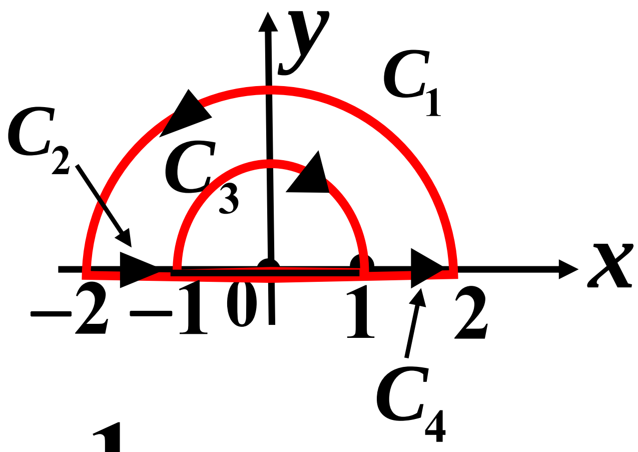
故C_1: $z=2e^{i\theta}$, $0<\theta<\pi, z'(\theta)=2e^{i\theta}i$,

$$\int_{C_1}\frac{z}{\bar{z}}dz=\int_0^{\pi}\frac{z(\theta)}{\overline{z(\theta)}}z'(\theta)d\theta=\int_0^{\pi}\frac{2e^{i\theta}}{2e^{-i\theta}}\left(2e^{i\theta}i\right)d\theta$$

$$=2i\int_0^{\pi}e^{3i\theta}d\theta=\frac{2i}{3i}e^{3i\theta}\Big|_0^{\pi}$$

同理, 在C_3上, $z=e^{i\theta}$, θ从π到0, $z'(\theta)=e^{i\theta}i$,

$$\int_{C_3}\frac{z}{\bar{z}}dz=\int_{\pi}^{0}\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}\left(e^{i\theta}i\right)d\theta=-i\int_0^{\pi}e^{3i\theta}d\theta=-\frac{i}{3i}e^{3i\theta}\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{3}.$$



在C_2上，$z=t$，$-2<t<-1$，$z'(t)=1$，

$$\int_{C_2}\frac{z}{\bar{z}}dz=\int_{-2}^{-1}\frac{t}{t}\cdot 1dt=\int_{-2}^{-1}1dt=1.$$

在C_4上，$z=t$，$1<t<2$，$z'(t)=1$，

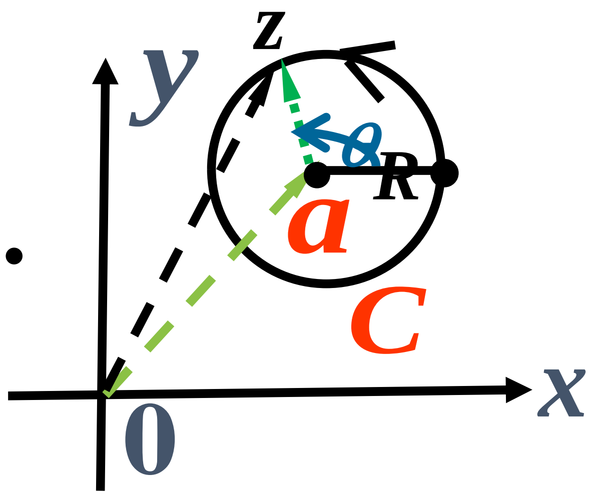
$$\int_{C_4}\frac{z}{\bar{z}}dz=\int_{1}^{2}1dt=1.$$

$$故\ I=\int_{C_1}\frac{z}{\bar{z}}dz+\int_{C_2}\frac{z}{\bar{z}}dz+\int_{C_3}\frac{z}{\bar{z}}dz+\int_{C_4}\frac{z}{\bar{z}}dz=-\frac{4}{3}+1+\frac{2}{3}+1=\frac{4}{3}.$$

例2 求 $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}$, C 为以复常数a为中心、R 为半径的圆周,

逆时针方向(正向), n 为整数, $R>0$.

解 C: $|z-a|=R$, 故 $z-a=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,



故$C: z=a+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0\le\theta<2\pi$.

则$z'(\theta)=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{i}$,

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\mathrm{i}\,R^{1-n}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

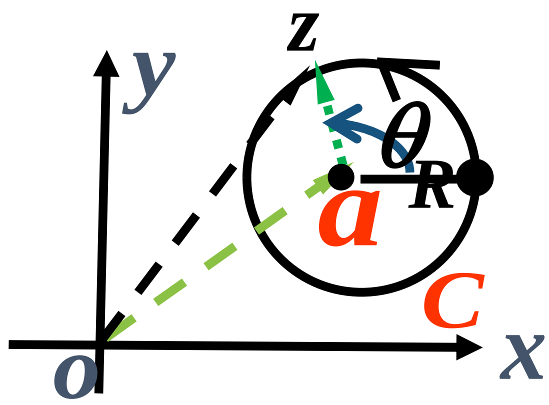
- 若$z(t)=x(t)+\mathrm{i}\,y(t), a\le t\le b$, 则$z'(t)=x'(t)+\mathrm{i}\,y'(t)$,

  $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)\mathrm{d}t$.

$C: z = a + Re^{i\theta}, \quad 0 \le \theta < 2\pi.$

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(Re^{i\theta})^n} Re^{i\theta}\, i\, d\theta = iR^{1-n}\int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta}\, d\theta$$

$$= \begin{cases} iR^{1-n} \cdot \dfrac{1}{i(1-n)} e^{i(1-n)\theta}\Big|_0^{2\pi} = 0, & n \neq 1\text{且}n\text{为整数时}, \\ i\displaystyle\int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2\pi i, & n = 1\text{时}, \end{cases}$$



即 $$\oint_{|z-a|=R} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i;$$

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^2} = \int_C \frac{dz}{(z-a)^3} = \cdots = \int_C (z-a)\, dz = \int_C (z-a)^2\, dz = \cdots = 0.$$

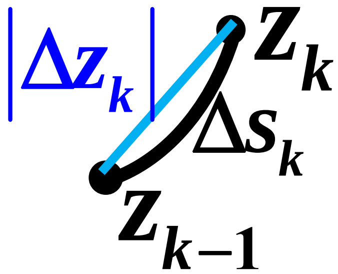
背熟此结论！！！

长大不等式:

设$f(z)$在曲线C上连续,则 $\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s$ (P50).

证明 在复积分定义中,

$|\Delta z_k| = |z_k - z_{k-1}| \le \Delta s_k\left(\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}\text{的弧长}\right)$, 故



$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\Delta s_k,$$

两边取极限得长大不等式，证毕.#

若$C: z(t) = x(t) + \mathrm{i}\,y(t),\ a \le t \le b,\ z'(t) = x'(t) + \mathrm{i}\,y'(t)$,

$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t = |z'(t)|\,\mathrm{d}t \triangleq |\mathrm{d}z|$, 故长大不等式为

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s = \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| = \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

设$f(z)$在曲线C上连续,则 $\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s$ (3) (P50)

第一型曲线积分

若$C: z(t)=x(t)+\mathrm{i}\,y(t),\ a\le t\le b,$

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s = \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| = \int_a^b |f(z(t))|\cdot|z'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

长大不等式推论: 设曲线 C 的长度为 L,

在 C 上$|f(z)|\le A$, 则 $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le AL.$

证明: $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \le A\int_C 1\mathrm{d}s = AL.$#

例 设 C 为从原点到点 $3+4\mathrm{i}$ 的直线段，试求积分 $\int_C \frac{e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,z}}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z$ 模的一个上界.

1). 先写 C 参数方程.
2). 在 C 上估算被积函数模.
3). 利用长大不等式或其推论。

解 设直线 $C: z(t)=z_1+z_2 t,\quad 0\le t\le 1$，起点 $z(0)=z_1=0$，终点 $z(1)=0+z_2=3+4\mathrm{i}$. 故 $C: z(t)=(3+4\mathrm{i})t,\quad 0\le t\le 1.$

在 C 上，
$$\left|\frac{e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,z}}{z-\mathrm{i}}\right|=\frac{\left|e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,z}\right|}{|3t+(4t-1)\mathrm{i}|}=\frac{1}{\sqrt{(3t)^2+(4t-1)^2}}$$

$$\boxed{\left|e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,z}\right|=1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{25t^2-8t+1}}=\frac{1}{\sqrt{25\left(t-\frac{4}{25}\right)^2+\frac{9}{25}}}\le\frac{5}{3}\quad\left(t=\frac{4}{25}\text{时的值}\right).$$

故得
$$\left|\int_C \frac{e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,z}}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z\right|\le\frac{5}{3}\cdot|0-(3+4\mathrm{i})|=\frac{5}{3}|3+4\mathrm{i}|=\frac{25}{3}.$$

$$\boxed{\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\le AL}$$

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s = \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| = \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\,\mathrm{d}t \quad (3)$$

例 证明: $\left|\int_1^{1+\mathrm{i}}\left(x^2+2\mathrm{i}\,y^2\right)\mathrm{d}z\right| \le \sqrt{5}$, 积分路径是直线段.

证明 积分路径C平行于虚轴, 在C上, 实部$\equiv 1$,

故C: $z(t)=1+t\mathrm{i},\quad 0\le t\le 1,\quad z'(t)=\mathrm{i}$.

根据长大不等式得

$$\left|\int_1^{1+\mathrm{i}}\left(x^2+2\mathrm{i}\,y^2\right)\mathrm{d}z\right| \le \int_0^1 \left|1^2+2\mathrm{i}\,t^2\right||\mathrm{i}|\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1\left(\sqrt{1+4t^4}\right)\mathrm{d}t$$

$$\le\int_0^1\left(\sqrt{1+4}\right)\mathrm{d}t$$

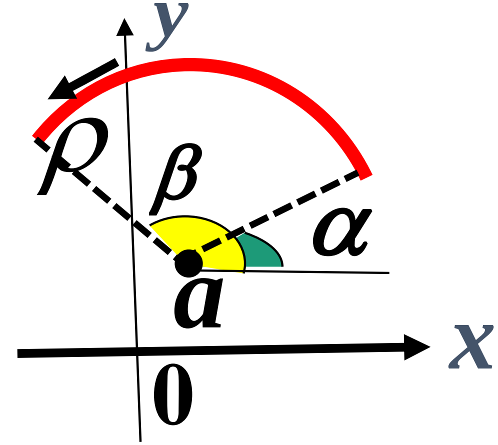
$$=\sqrt{5}.\ \#$$

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,ds = \int_C |f(z)||dz| = \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|\,dt \quad (3)$$

例3 设$\rho>0$充分小，$f(z)$在C_ρ：$z=a+\rho e^{i\theta},\alpha\le\theta\le\beta$上连续，

(P50-51) 且$\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$, 则

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\,dz = \mathrm{i}(\beta-\alpha)k. \qquad (6)$$

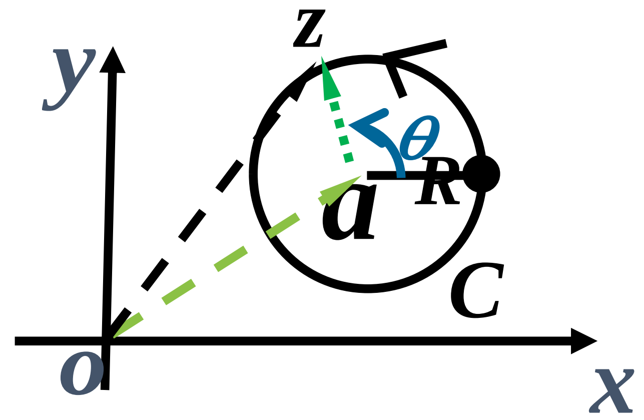


思路：先把右端与f无关的部分$\mathrm{i}(\beta-\alpha)$表示成某函数沿C_ρ的积分值.

若C是以a为中心, R为半径的逆时针方向圆周, n为整数, 则

由P49例2得 $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi\mathrm{i}$.

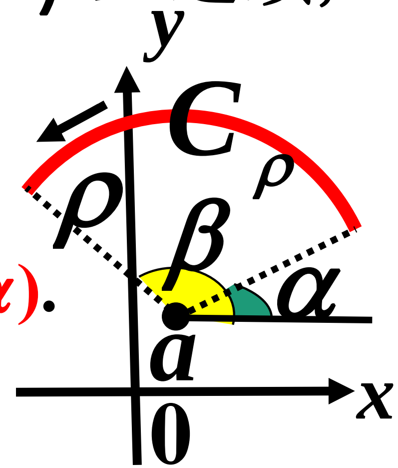
故猜测: $\displaystyle\int_{C_\rho} \frac{dz}{z-a} = \mathrm{i}(\beta-\alpha)$.



首先证明此猜测.

例3. 设$\rho>0$充分小，$f(z)$在C_ρ： $z=a+\rho e^{i\theta},\alpha\le\theta\le\beta$上连续,

$\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$, 则$\lim\limits_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\,dz=i(\beta-\alpha)k$.



证明: $\int_{C_\rho}\frac{dz}{z-a}=\int_\alpha^\beta\frac{1}{\rho e^{i\theta}}\left(\rho e^{i\theta}i\right)d\theta=i\int_\alpha^\beta 1\,d\theta=i(\beta-\alpha)$.

故$\left|\int_{C_\rho} f(z)\,dz-i(\beta-\alpha)k\right|=\left|\int_{C_\rho} f(z)\,dz-\int_{C_\rho}\frac{k}{z-a}dz\right|$

$=\left|\int_{C_\rho}\frac{(z-a)f(z)-k}{z-a}dz\right|\le\int_\alpha^\beta\frac{\left|(z(\theta)-a)f(z(\theta))-k\right|}{\cancel{\left|\rho e^{i\theta}\right|}}\cancel{\left|\rho e^{i\theta}i\right|}d\theta$

$=\int_\alpha^\beta\left|(z(\theta)-a)f(z(\theta))-k\right|d\theta.(*)$

P71. 7
仿照此例证明

由条件知, $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当$\rho=|z-a|<\delta$时,

$\left|(z-a)f(z)-k\right|\le\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$, 故(*)右边$\le\varepsilon$. 故结论成立.#

熟记本题及 P71.7的结论

在第五章需要用到这些结论

3.2 柯西积分定理

定理1(P51) 柯西积分定理

设 D 是由简单闭曲线(简称闭路) C 围成的单连通区域，$f(z)$ 在闭域 $\bar{D}=D+C$ 上解析，则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0,\ \text{也记作} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

注：$f(z)$ 在 $\bar{D}=D+C$ 上解析是指：

$f(z)$ 在包含 $\bar{D}$ 的某个更大的开区域 G 内处处解析，

这意味着 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上的所有内点和边界点都解析.

证明思路：P47定理中的积分公式(1)

+ Green 定理(改进型)

+ 柯西-黎曼方程.

首先回顾Green定理:

设单连通区域D由分段光滑曲线L(逆时针方向) 围成,

$P(x,y),Q(x,y)\in C^1(D)$, 则

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

改进的Green定理: (Gaursat 1925)

设单连通区域D由分段光滑曲线L(逆时针方向) 围成,

$P(x,y),Q(x,y)$在D上有偏导数$\dfrac{\partial P}{\partial y},\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,

且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}$在$D$上连续, 则

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

定理1(P51)

柯西积分定理：设 D 是由简单闭曲线(简称闭路)C围成的单连通区域，

$f(z)$在闭域$\overline{D}=D+C$上解析，则$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$. ★★★ 熟记结论

证明：设$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$，由条件知$f$在$\overline{D}$上连续，故

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y\ . \quad (1)$$ (P47的定理)

因 $f(z)$在$\overline{D}$解析，故u,v在$\overline{D}$上可微，且满足$C-R$方程，

故
$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0,\qquad -\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=-\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0.$$

从而由改进的Green公式得

$$\left.\begin{aligned}&\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y=\iint_D\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0\\&\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0\end{aligned}\right\}$$

代入(1)，得

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0.\#$$

柯西积分定理: 设 D 是由简单闭曲线(简称闭路)C围成的单连通区域, $f(z)$ 在闭域 $\overline{D}=D+C$ 上解析, 则 $\int_C f(z)\,dz=0$.

例. 求(1) $\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{z-3}\,dz$;　(2) $\int\limits_{|z-3|=1}\frac{1}{z-3}\,dz$.

解. (1) $\frac{1}{z-3}$ 除 $z=3$ 外处处解析, 故 $\frac{1}{z-3}$ 在 $|z|\le 1$ 上解析.

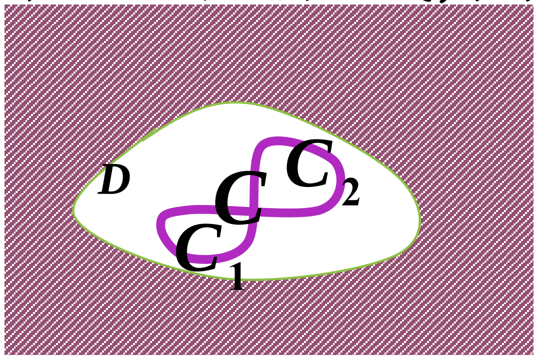
故由柯西积分定理得 $\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{z-3}\,dz=0$.

(2) $\frac{1}{z-3}$ 在 $|z-3|\le 1$ 上有非解析点 $z=3$, 柯西积分定理不成立.

故该用参数法. 根据P49例2知, $\int\limits_{|z-3|=1}\frac{1}{z-3}\,dz=2\pi i$.

推论1: 设$f(z)$在单连通区域D 内解析,C是D内的任意封闭曲线, 则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$



证明：(1)若C是简单闭曲线，

由柯西积分定理知 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$

(2) 如果C不是简单闭曲线，

则可设C由n条简单闭曲线$C_1, C_2, \cdots, C_n$依次连接组成，

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= 0 + 0 + \cdots + 0 = 0.$$

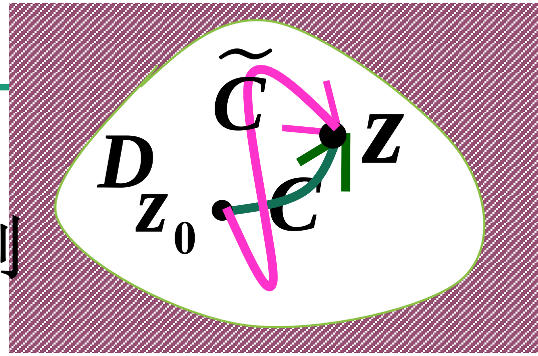
例 求$\mathrm{I} = \displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{(z - \mathrm{i}\,1.5)(z+30)}\,\mathrm{d}z$和 $J = \displaystyle\int_{|z|=3} \mathrm{e}^{3z^2} \sin^3 z \,\,\mathrm{d}z.$

解 I的被积分函数除$z_1 = \mathrm{i}\,1.5$和$z_2 = -30$外处处解析, 故在$|z| \le 1$上解析.

故由柯西积分定理得 $\mathrm{I} = 0.$ 同理得， $J = 0.$

推论1: 设$f(z)$在单连通区域D内解析, C是D内的任意封闭曲线, 则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$



推论2: 设$f(z)$在单连通区域D内解析,

C是D内任一条起于点z_0终于z的简单曲线, 则

$$\int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \begin{cases} \text{值不依赖于}C, \\ \text{只由起点}z_0\text{和终点}z\text{确定, 可记作}\displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta. \end{cases}$$

证明: 设$\widetilde{C}$是D内任意的不同于C的起于z_0终于z的简单曲线,

C与$\widetilde{C}^{-}$连接组成D内一条封闭曲线. 由推论1得

$$\int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \int_{\widetilde{C}^{-}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0. \quad \text{因此}$$

$$\int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = -\int_{\widetilde{C}^{-}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\widetilde{C}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

由C, $\widetilde{C}$任意性知结论成立.#

多连通区域的柯西定理(P53定理2)

设 $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为 $n+1$ 条简单闭曲线，满足

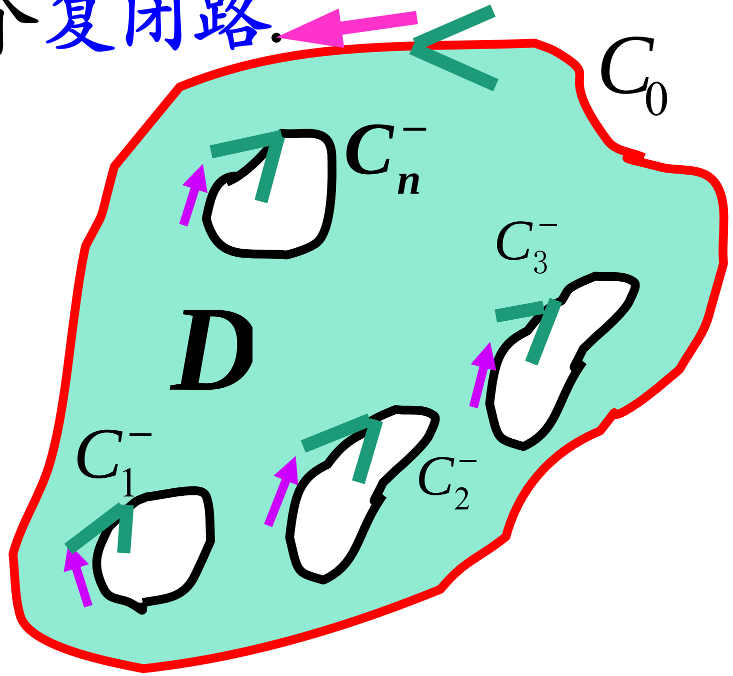
1) $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 都在 C_0 的内部，

2) $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 中每一条在所有其余各条的外部，

则 $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 围成一个多连通区域 D，

$\left(D\text{在}C_0\text{内部，在}C_1, C_2, \cdots, C_n\text{的外部}\right)$，

这种多连通区域 D 的全部边界 C 称为一个复闭路.



- 复闭路 C 的正向：

人在 C 上行进时，

D 的内部总在此人左边的方向，

称为 C 的正向.

记 $C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$.

今后复积分中复闭路的方向默认为正向.

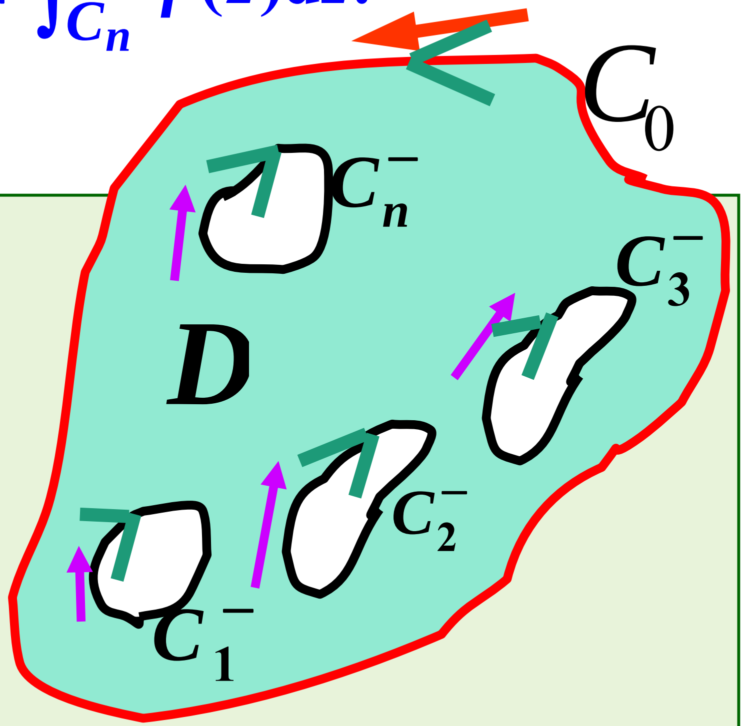
多连通区域的柯西定理(P53定理2)

定理2(P53) 设$f(z)$在复闭路$C=C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots C_n^-$及其围成的多连通区域$D$ 内解析, 即$f(z)$ 在$\bar{D}$上解析，则

$$\int_C f(z)dz=0,$$

★★★ 熟记结论

即 $\int_{C_0} f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz+\cdots+\int_{C_n} f(z)dz.$



复闭路C 由闭曲线$C_0,C_1,C_2,\cdots,C_n$组成.

- 复闭路C 的正向:

- 外边界C_0 : 逆时针方向;
- 内边界$C_1,C_2,\cdots,C_n$: 顺时针方向.

复闭路$C=C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$.

复积分中复闭路默认为正向.

定理2(P53) 设$f(z)$在复闭路$C=C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots C_n^-$及其所围成多连通区域$D$ 内解析，即$f(z)$ 在$\bar{D}$上解析，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0, \text{ 即 } \int_{C_0} f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

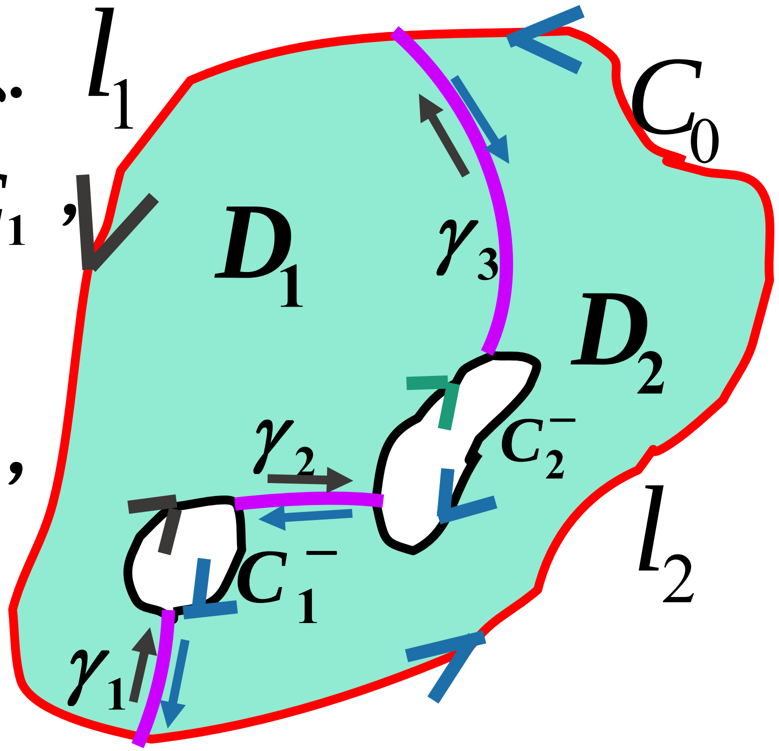
证明: 只证$n=2$ 的情形, 其余类似.

在D内, 用简单曲线γ_1 连接 C_0 和C_1 ,

γ_2连接C_1和C_2, γ_3连接C_2和C_0.

D被分成两个单连通区域D_1 和D_2 ,

用l_1记D_1的边界，用l_2记D_2的边界,



l_1,l_2都取正向. 由柯西积分定理(P 51定理1)得

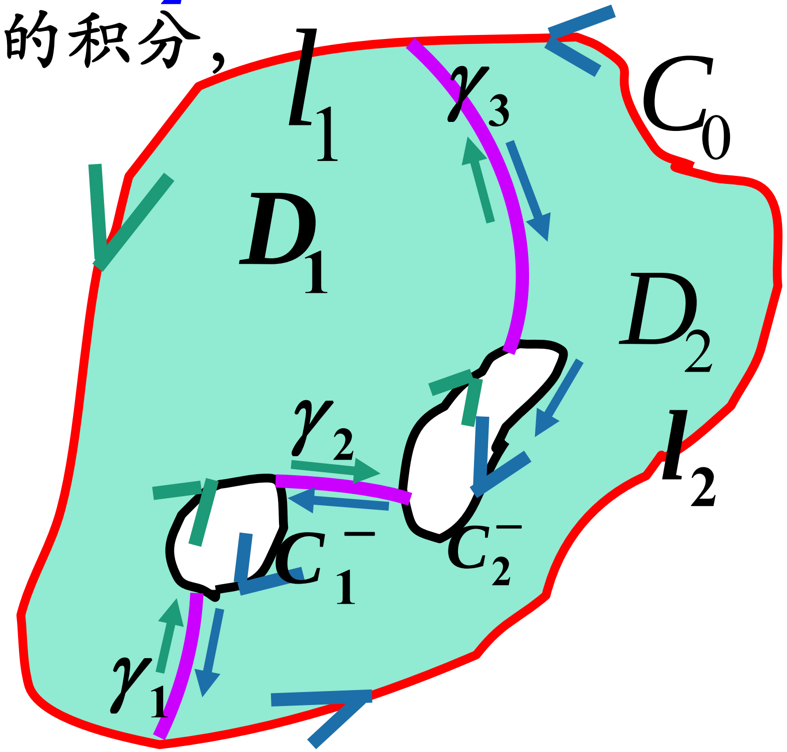
$$\int_{l_1} f(z)\mathrm{d}z=0,\ \int_{l_2} f(z)\mathrm{d}z=0,\ \text{故}\int_{l_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{l_2} f(z)\mathrm{d}z=0.$$

由柯西积分定理(P 51定理1)得 $\int_{l_1} f(z)dz+\int_{l_2} f(z)dz=0+0=0.$

(1) 在$\int_{l_1} f(z)dz+\int_{l_2} f(z)dz$ 中沿γ_1，γ_2，γ_3的积分，

沿不同方向各取了一次，

相加后正好相互抵消.



(2) C_0，C_1，C_2都被分成两段弧，

分别出现在l_1和l_2中.

$\int_{l_1} f(z)dz$和$\int_{l_2} f(z)dz$ 相加后，

可把沿C_0,C_1,C_2各自两弧段上的积分合并起来. 故得

$$0=\int_{l_1} f(z)dz+\int_{l_2} f(z)dz=\int_{C_0} f(z)dz+\int_{C_1^-} f(z)dz+\int_{C_2^-} f(z)dz$$

$$=\int_{C} f(z)dz=\int_{C_0} f(z)dz-\int_{C_1} f(z)dz-\int_{C_2} f(z)dz.$$

故$\int_{\underset{\text{沿外边}}{C_0}} f(z)dz=\int_{\underset{\text{沿内边}}{C_1}} f(z)dz+\int_{\underset{\text{沿内边}}{C_2}} f(z)dz$，证毕.#

例4 设a是任一简单闭曲线C 的内部区域的任一内点，则

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n=1, \\ 0, & n \neq 1 \text{且} n \text{是整数}. \end{cases}$$

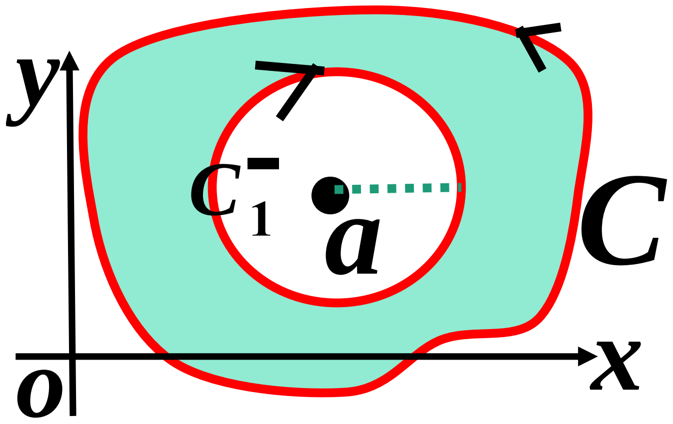
C是包含点 a 的任意简单闭曲线.

解：(1)若 C 是以 a 为中心的圆周，则由 P 49例 2 知结论成立.

(2)若C不是以a为中心的圆周， 则在C 内作以a 为中心、半径充分小的圆周C_1(含在C 内部)，$C + C_1^-$ 构成复闭路.

在$C + C_1^-$ 及其内部，$z \neq a$，

故$\dfrac{1}{(z-a)^n}$在$C+C_1^-$及其内部解析，



从而由多连通区域的柯西定理得，

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_{C_1} \frac{dz}{(z-a)^n} dz \overset{\text{P49 例2}}{=} \begin{cases} 2\pi i, & n=1, \\ 0, & n \neq 1 \text{且} n \text{是整数}. \end{cases}$$

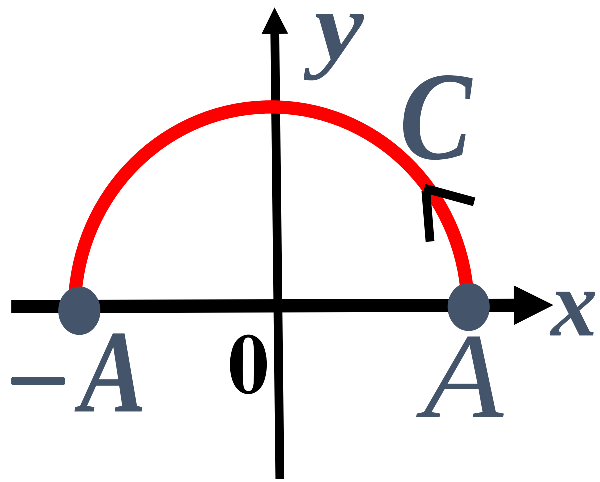
#

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta |f(z(t))|\cdot|z'(t)|\mathrm{d}t \quad (3)$$

例5 证明 : $\left|\int_C e^{iz}\,\mathrm{d}z\right| < \pi$, 设 C 为 $|z| = A$ 上半圆周从 A 到 $-A$.

证 C的参数方程为 $z = Ae^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$. 在 C 上,

$$\left|e^{iz}\right| = e^{\mathrm{Re}(iz)} = e^{-\mathrm{Im}\,z} = e^{-\mathrm{Im}\left(Ae^{i\theta}\right)}$$



$|z'(\theta)| = \left|iAe^{i\theta}\right| = A$. 根据 (3)知

$$\left|\int_C e^{iz}\,\mathrm{d}z\right| \le A\int_0^\pi e^{-A\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

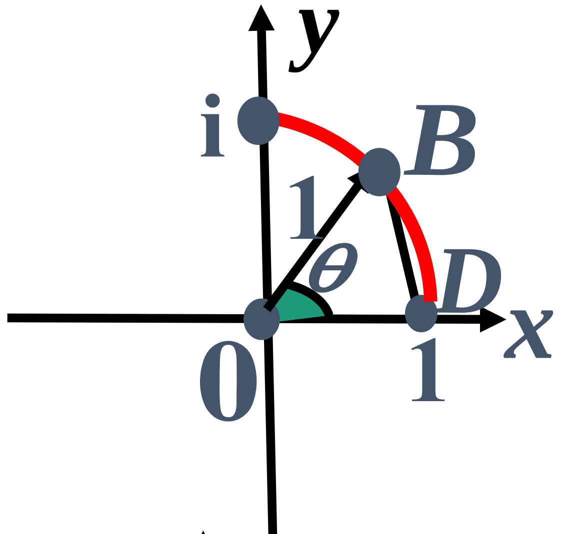
$$= A\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-A\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\right) \quad \left(\begin{array}{l}\text{对第二项积分}\\ \text{令}\tilde{\theta}=\pi-\theta\end{array}\right)$$

$$= A\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-A\sin\tilde{\theta}}\,\mathrm{d}\tilde{\theta}\right) = 2A\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

下面估算 $\sin\theta$.

$$\left|\int_C e^{iz}\,dz\right| \le A\int_0^{\pi} e^{-A\sin\theta}\,d\theta = 2A\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A\sin\theta}\,d\theta.$$

当$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$时， $\dfrac{2}{\pi}\theta\le\sin\theta\le\theta.$ 这是因为



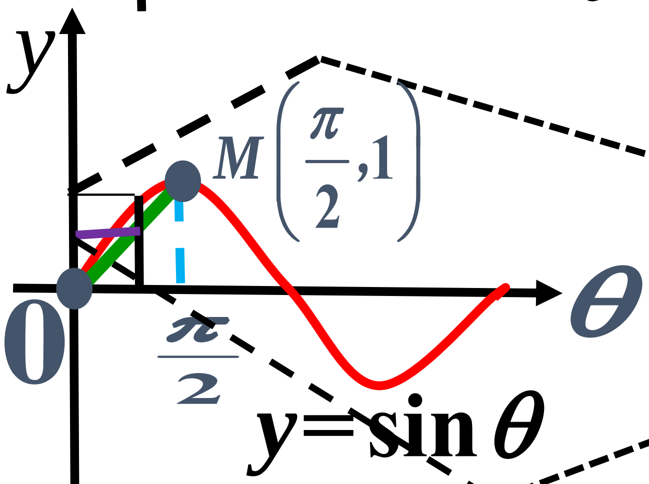
ΔOBD的面积$\le$扇形OBD的面积，

$$\frac{1}{2}\sin\theta\le\frac{1}{2}\theta,$$

即$\sin\theta\le\theta$， $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$， $\sin''\theta=-\sin\theta\le 0$，

$\Rightarrow$ 在$[0,\pi/2]$，$\sin\theta$ 凹，故



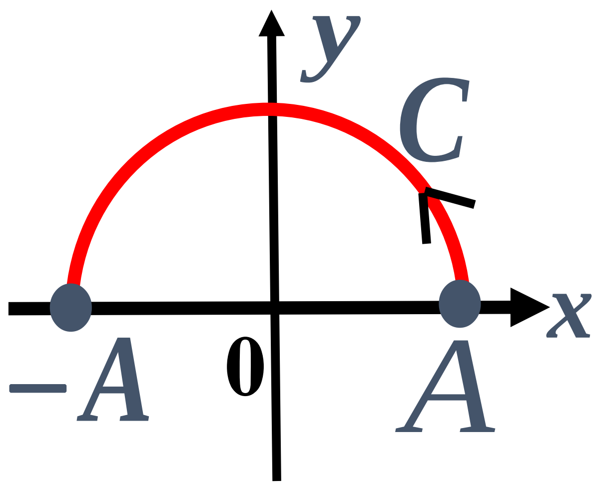
$$\frac{2}{\pi}\theta\le\sin\theta.$$

$$\left|\int_C e^{iz}\,dz\right| \le A\int_0^{\pi} e^{-A\sin\theta}\,d\theta = 2A\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-A\sin\theta}\,d\theta.$$ 下面估算$\sin\theta$.

当$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$时，$\dfrac{2}{\pi}\theta\le\sin\theta\le\theta$. 故 $e^{-A\sin\theta}\le e^{-A\frac{2}{\pi}\theta}$.

$$\therefore\ \left|\int_C e^{iz}\,dz\right| \le 2A\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2A}{\pi}\theta}\,d\theta$$

$$\le -\pi e^{-\frac{2A}{\pi}\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\left(1-e^{-A}\right) < \pi.\#$$



作业

P70-71

1(2),2(2),3(2) ,4

7（与**P50-51**例3的证明类似，首先证明$\displaystyle\int_{C_R}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}\alpha$）

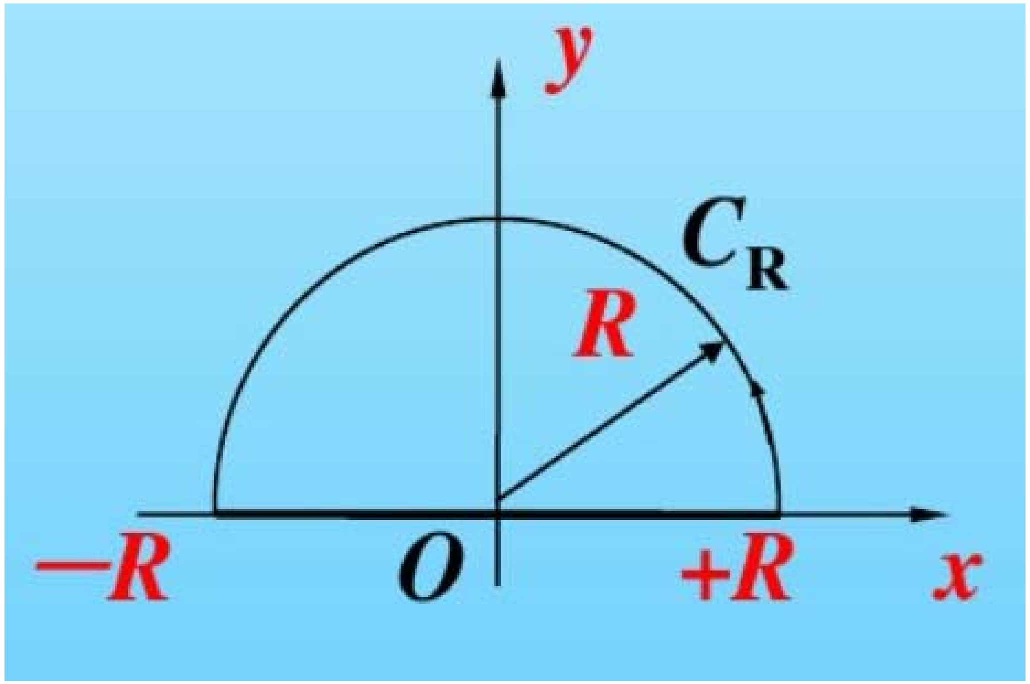
8 $\left(\text{由条件得}\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{zP(z)}{Q(z)}=0\text{, 然后应用第7 题的结论即可}\right)$

附加作业

1. 证明Jordan引理：令C_R为圆周$|z|=R$的上半部分，$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0, 0\le \arg z\le \pi$，则对$\forall m>0$，成立

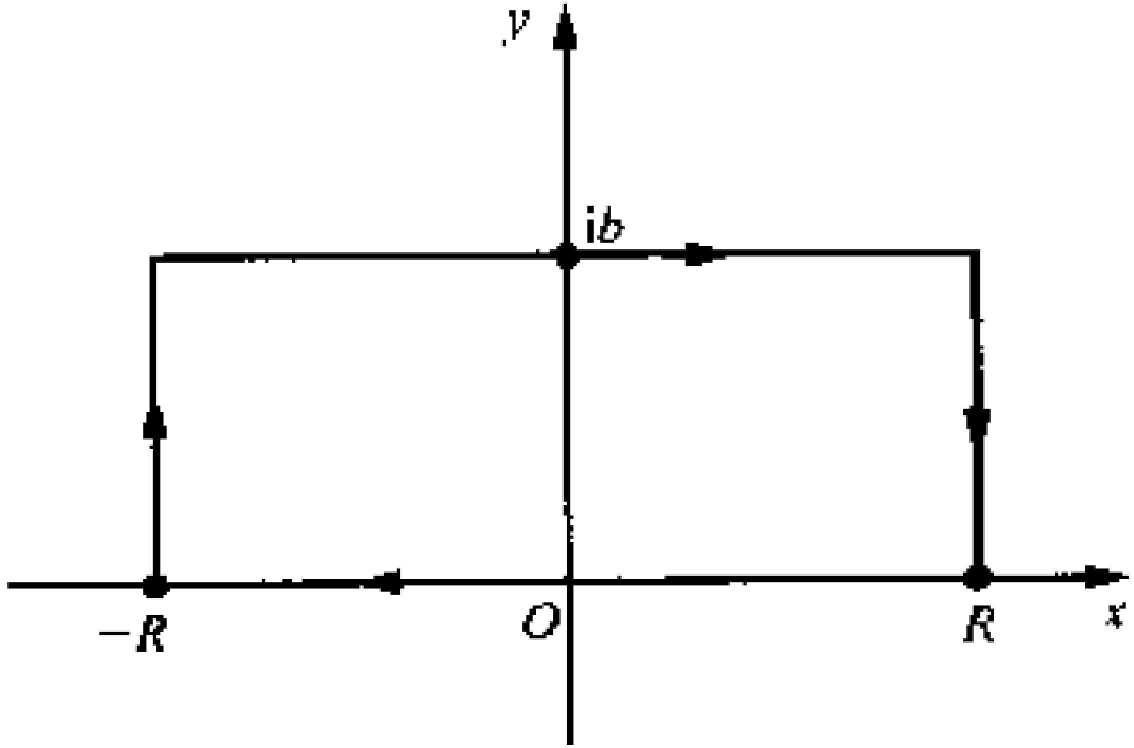
$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)e^{imz}\mathrm{d}z=0.$$

(提示：利用长大不等式和例5的结果)



2. 计算复积分$\int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} e^{-az^2}\mathrm{d}z$, 其中实数$a,b>0$.

(提示：对$f(z)=e^{-az^2}$考虑下图闭路积分后再令$R\to\infty$)



3. 令$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t$, 实数$s>0$.

利用柯西积分定理证明：当$0<s<1$时， 成立

(1) $\int_0^{+\infty} t^{s-1}\cos t\mathrm{d}t=\Gamma(s)\cos\dfrac{\pi s}{2}$;

(2) $\int_0^{+\infty} t^{s-1}\sin t\mathrm{d}t=\Gamma(s)\sin\dfrac{\pi s}{2}$.

(提示：对$f(z)=z^{s-1}e^{-z}$考虑下图闭路积分后

再令$\varepsilon\to 0,\ R\to\infty$)