习题课讲义:

牢记.

第一章: 复数基本知识.

(1) 表示方法: $\begin{cases} x+iy \\ Re^{i\theta} \\ R(\cos\theta+i\sin\theta) \end{cases}$ $\theta = \arg z + 2k\pi$ $\rightarrow \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & 一,四 \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\pi & 二 \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\pi & 三 \end{cases}$

注意点: ① $z=0$. θ 无意义.

② 三角式标准形式. eg: $z=1-\cos\theta+i\sin\theta$.

③ $+,- \Rightarrow x+iy$. $\times,\div \Rightarrow Re^{i\theta}$. 证明 $\begin{cases} \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$

④ 共轭: a. 牢记基本公式. 如 $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$.

在某些证明或计算中可以试一用共轭.

b. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$. $|z_1\pm z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\pm 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

c. 实系数多项式根共轭存在. (P6)

(2) 模: $\sqrt{x^2+y^2}=R\geq 0$.

三角不等式: $\big||z_1|-|z_2|\big| \leq |z_1\pm z_2| \leq |z_1|+|z_2|$. 证明常用

(3) 乘/开方: $z^n=r^n\cdot e^{in\theta}$.

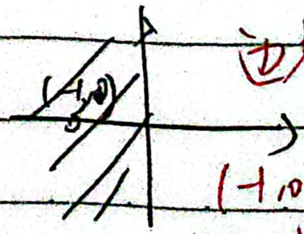
☆ $z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{i\frac{\theta}{n}}$ $\left.\begin{matrix} \theta=\arg z+2k\pi \\ k=0,1,\cdots,n-1 \end{matrix}\right\}$ n个值.

(4) 复数列极限: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{cases}$

特别地: $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$.

(5) 区域: 分清边界点. 内点. 外点. 区域的定义.

eg: $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<1$



边界为: $(-1,0)\cup\{y轴\}$.

分母 $\neq 0 \Rightarrow z\neq -1$.

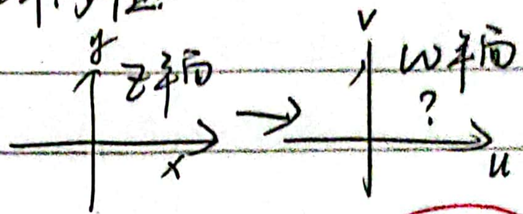
多连通开区域.

第二章 函数. No.

(1). 区分单值、多值：$\begin{cases} z \to w. & 单值 \\ z \to 多个w. & 多值, \end{cases}$

学会区分初等函数中的单、多值

(2). $w=f(z)$. 找曲线的像.



两种可能：①给出 x.y 方程：则代入 $w=f(z)$. $(z=x+iy)$

联立消 x.y 即可.

②给出 R.θ 关系：则代入 $Re^{i\theta}$.

eg：$w=\frac{1}{z}$. $(x-1)^2+y^2=5$.

可写成 $|z-1|=\sqrt{5}$. $\Rightarrow \left|\frac{1}{w}-1\right| = \left|\frac{1-w}{w}\right|=\sqrt{5}$

$\left(\frac{1-w}{w}\right)\cdot\left(\frac{1-\bar{w}}{\bar{w}}\right)=5$. 即可解得 u.v 方程.

(3). 连续：f(z)在 z_0 处连续 $\begin{cases} z_0处有定义 \\ z_0处有极限 \\ \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0) \end{cases}$ $\Rightarrow$ f(z)在 z_0 处连续

☆ 连续函数及复合函数的 +、−、×、÷. 复合均连续.

(4) 极限：主要用于：$\begin{cases} 证明该处不存在极限. 不同路径得不同值 \\ 用于后续的可微. \end{cases}$

☆ 牢记：$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\cdots$ 几种形式

(5) 可微：$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ 存在，具体例题 P110.T ☆

× ↕

若 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ 则 $Q(z)\neq 0$ 即可

解析：区域概念，一个点解析 ⇒ 点邻域解析。

若 $f(z)$ 解析，求 $f'(z)$ 直接对 z 使用求导法则即可。

↕

☆ C-R 方程：$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}$ + u, v 可微.

① 一定要记住微此的定义、C-R 方程的使用.

② 解析区域的求解一定要关注边界点，☆ 讨论.

③ 解析是一个区域的概念.

~~(6) 初等函数：注意区分单、多值函数的不同之处.~~

单 ① e^z，满足 $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$.

单 ② $\sin z$. $\cos z$. $\operatorname{sh} z$. $\operatorname{ch} z$. 均满足实数域的恒等式.

注意：$\sin z$. $\cos z$ 无界. eg: $\sin z=2$ 有解且无穷多.

多 ③ $\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)$.

满足 $\operatorname{Ln}(z_1z_2)=\operatorname{Ln} z_1+\operatorname{Ln} z_2$.

$\operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Ln} z_1-\operatorname{Ln} z_2$.

常用于幂式的计算，$z^u=e^{u\operatorname{Ln} z}=e^{u[\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)]}$

④ z^α. $\alpha=\begin{cases}n. & 单值.\\ \frac{p}{q}. & q值，可理解为 \sqrt[q]{z^p}.\\ 无理数或复数. & 无穷多值，引入 \operatorname{Ln} z.\end{cases}$

tips：$f(z)=e^z$，$g(z)=z^{1+i}$. ⇒ $f(1+i)\neq g(e)$ ☆

第二章 积分. No.

(1) 基本性质及计算方法.

① 线性: $\int_C af+bg\,dz = a\int_C f\,dz + b\int_C g\,dz$.

② $\int_C f\,dz = -\int_{C^-} f\,dz$.

③ $\int_C f(z)\,dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt$ 常用 $Re^{i\theta}$

(2) 重要积分: $I = \int_{|z-a|=R} \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & n=1 \\ 0 & n\neq 1 \end{cases}$

(3) ① 长大不等式: $\begin{cases} \left|\int_C f\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,ds \\ \left|\int_C f\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz| \\ \left|\int_C f\,dz\right| \le \max\limits_C |f(z)|\cdot L \end{cases}$ ⇒ 常用于证明.

↓

证明题用

② 柯西积分定理. 用于证明或求解难积分.

若用于求解难积分, 需掌握如何构建积分路径.

常用的n种如附加页中所示

③ 柯西积分公式: 用于计算.

注意使用形式. 一定是 $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$.

一定要写成 $z-z_0$ 才可使用.

注意 $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}\,dz$.

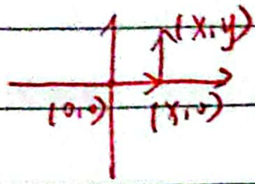
(4) 原函数：主要考点在于求解，

如课后习题一样，给 $u(x,y)$ 和 $f(z_1)=a$，求 $f(z)$。"

这一类型的题目。

① $f(z)$ 解析 $\Rightarrow$ 实、虚部调和，故先证 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

② 线积分 $v(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C$.



积分路径的选取.

③ 代入 $f(z_1)=a$，求解 C 的值.

④ 令 $x=z$，$y=0$，得 $f(z)$.

补充题：

① $f(z)=\arg z$ 不可微 $\Rightarrow$ 写成 $\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\pi\\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\pi\end{cases}$ 运用C-R方程即可.

② $\int_{|z|=1}\frac{|dz|}{|z-a|^2}$.

解：$z=e^{i\theta}$，$dz=ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow |dz|=d\theta=\frac{dz}{iz}$. 牢记，会推导

$\therefore$ 原式 $=\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)(\bar z-\bar a)iz}$

$=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)(z\cdot\bar z-\bar a z)}$ $(z\cdot\bar z=1)$

$=\frac{-1}{i\bar a}\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)(z-\frac{1}{\bar a})}$

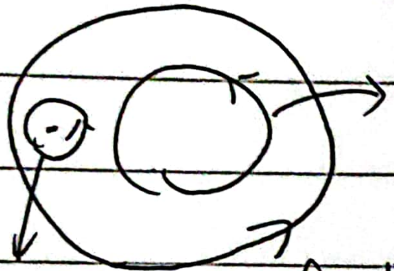
柯西积分公式 $=\left.\begin{cases}|a|>1. & \frac{-1}{i\bar a}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{a-\frac{1}{\bar a}}=\frac{2\pi}{|a|^2-1}\\ 0<|a|<1. & \frac{-1}{i\bar a}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{\frac{1}{\bar a}-a}=\frac{2\pi}{1-|a|^2}\end{cases}\right\}\Rightarrow\left|\frac{2\pi}{|a|^2-1}\right|$

扫描全能王 创建

③ $\oint_{|z|=2} \frac{1}{(z^3-1)(z+4)} dz$. 此题运用柯西积分定理进行简便运算.

若考虑 $|z|<2$. 有许奇点. 不好算.

考虑 $2<|z|<R$. 一个奇点.



由于 $\left|\oint_{C_3} f(z)dz\right| \le \frac{1}{R^4}\cdot 2\pi R$

∴ $R\to+\infty$ 时. $\left|\oint_{C_3} f(z)dz\right| \to 0$.

∴ 原积分 $= \oint_{|z|=R} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz$

$= -2\pi i \cdot \frac{1}{z^3-1}\Big|_{z=-4} = \frac{2\pi i}{65}$. 方便.

设 $n \geq 2$,

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0,$$

$$Q(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_0.$$

若 $Q(z)$ 的所有零点都落在闭路 C 内, 求

$$\int_C \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z.$$

解. 设

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad g(z) = \frac{z + a_{n-1}}{z + b_{n-1}},$$

则

$$f(z) - g(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad \deg p(z) \leq n - 1, \deg q(z) = n + 1.$$

因此由长大不等式或习题 3.8,

$$\int_C (f - g)(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

于是

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C g(z)\,\mathrm{d}z = (a_{n-1} - b_{n-1})2\pi\mathrm{i}.$$