复变函数 B 作业 7

张学涵 (xxhzhang@mail.ustc.edu.cn)

2023 年 11 月 22 日

第 四 章

Question 12

(1) 若 a 为可去奇点, 展开式为 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n, |z-a|<r$;

若 a 为 m 级极点, 展开式为 $\sum_{n=-m}^{+\infty} c_n(z-a)^n, c_{-m}\neq 0, 0<|z-a|<r$;

若 a 为本性奇点, 展开式为 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n, 0<|z-a|<r$, 其中 $c_{-n}(n>0)$ 中有无穷多个不为 0.

以上 r 为 a 与其他 3 个奇点距离之最小值.

(2) $f(z)$ 可展开为 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n, |z-a|<R, R=\min\{|a-a_1|,|a-a_2|,|a-a_3|\}$.

Question 13

(3) 奇点 $z=1, z=\infty$.

$z=1$ 为本性奇点, 因为 $\lim_{z\to 1}\sin\frac{1}{1-z}$ 不存在.

$z=\infty$ 为可去奇点, 因为 $\lim_{z\to\infty}\sin\frac{1}{1-z}=0$.

(6) 奇点 $z=0, z=1, z=2k\pi i, k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

$z=0$ 为可去奇点, 因为 $\lim_{z\to 0}\frac{ze^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}=\frac{1}{e}\lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1}=\frac{1}{e}\lim_{z\to 0}\frac{z}{z+o(z)}=\frac{1}{e}\lim_{z\to 0}\frac{1}{1+\frac{o(z)}{z}}=\frac{1}{e}$.

$z=1$ 为本性奇点, 因为 $\lim_{z\to 1}\frac{ze^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$ 不存在. z 在实轴上时, $\lim_{z\to 1^+}\frac{ze^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}=+\infty, \lim_{z\to 1^-}\frac{ze^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}=0$.

$z=2k\pi i, k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 为 1 级极点. 令 $g(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{e^z-1}{ze^{\frac{1}{z-1}}}$. 则 $g'(z)=\frac{e^z ze^{\frac{1}{z-1}}-(e^z-1)(ze^{\frac{1}{z-1}})'}{(ze^{\frac{1}{z-1}})^2}\neq 0$.

注释: $z=\infty$ 并非孤立奇点, 因为 $f(z)$ 在 ∞ 点的邻域恒有不解析点 $2k\pi i$.

(9) 奇点 $z=1, z=\infty$.

$\frac{1-\cos z}{z^n}=\frac{\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}}{z^n}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k-n}$.

当 $n>2$ 时, $z=0$ 为 $n-2$ 级极点; 当 $n\leq 2$ 时, $z=0$ 为可去奇点.

$z=\infty$ 为本性奇点, 证明见 14(4).

Question 14

(3) $\lim_{z\to\infty}\frac{z^2+4}{e^z}=0$, 可去奇点.

(4) $\lim_{z\to\infty}\frac{1-\cos z}{z^n}$ 不存在, 本性奇点.

也可通过展开得到, $\frac{1-\cos z}{z^n}=\frac{1}{z^n}-\frac{1}{z^n}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!}$, 有无穷个正次幂.

(7) $\lim_{z\to\infty}\sin\frac{1}{z}=0$, 可去奇点.

第 五 章

Question 1

(2) $1+z^{2n}=0$ 得极点 $z_k=\exp(\frac{i(2k+1)\pi}{2n}), k=0,1,\ldots,2n-1$.

$\text{Res}[\frac{z^{2n}}{1+z^{2n}},z_k]=\frac{z_k^{2n}}{2nz_k^{2n-1}}=\frac{z_k}{2n}=\frac{1}{2n}\exp(\frac{i(2k+1)\pi}{2n})$.

(4) 极点 $z=0$, $\frac{1-e^{2z}}{z^4}=\frac{-1}{z^4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2z)^n}{n!}$.

$\frac{1}{z}$ 项的系数是 $-\frac{4}{3}$, 故 $\text{Res}[\frac{1-e^{2z}}{z^4},0]=-\frac{4}{3}$.

(8) 设 $f(z)=\frac{1}{z}(\frac{1}{z+1}+\cdots+\frac{1}{(z+1)^n})$, 极点 $z=0,z=1$.

由于 $z=0$ 是一级极点, 故 $\text{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}zf(z)=n$.

另一方面, $f(z)=-\frac{1}{1-(z+1)}(\frac{1}{z+1}+\cdots+\frac{1}{(z+1)^n})=-(\sum_{k=0}^{+\infty}(z+1)^k)(\frac{1}{z+1}+\cdots+\frac{1}{(z+1)^n})$, $\frac{1}{z+1}$ 的系数为 $-n$, 故 $\text{Res}[f(z),-1]=-n$.

Question 3

(2) $z^4+1=0$ 得极点 $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i), z_4=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, 其中 z_1,z_4 在 C 内.

$\text{Res}[\frac{1}{1+z^4},z_1]=\frac{1}{4z_1^3}=\frac{\sqrt{2}}{8}(-1-i)$,

$\text{Res}[\frac{1}{1+z^4},z_4]=\frac{1}{4z_2^3}=\frac{\sqrt{2}}{8}(-1+i)$.

故 $\int_C\frac{dz}{1+z^4}=2\pi i(\text{Res}[\frac{1}{1+z^4},z_1]+\text{Res}[\frac{1}{1+z^4},z_4])=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i$.

(3) 设 $f(z)=\frac{1}{(z^2-1)(z^3+1)}=\frac{1}{(z-1)(z+1)^2(z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)(z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)}$, 其有 1 级极点 $z=1, z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 2 级极点 $z=-1$.

若 $r<1$, 则没有极点在 C 内, $\int_C f(z)\,dz=0$.

若 $r>1$, 则所有极点都在 C 内,

$\text{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\frac{1}{4}$,

$\text{Res}[f(z),\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i]=\lim_{z\to\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}(z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)f(z)=\frac{i}{3\sqrt{3}}$,

$\text{Res}[f(z),\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i]=\lim_{z\to\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}(z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)f(z)=-\frac{i}{3\sqrt{3}}$,

$\text{Res}[f(z),-1]=\lim_{z\to -1}((z+1)^2f(z))'=-\frac{1}{4}$.

故 $\int_C f(z)\,dz = 2\pi i(\mathrm{Res}[f(z),1] + \mathrm{Res}[f(z),\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i] + \mathrm{Res}[f(z),\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i] + \mathrm{Res}[f(z),-1]) = 0$.

综上, $\int_C \frac{dz}{(z^2-1)(z^3+1)} = 0$.

(5) 修正 $C : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$.

设 $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$, 有 2 级极点 $z = \pm 1, z = 3$.

$\mathrm{Res}[f(z),1] = \lim_{z\to 1}((z-1)^2 f(z))' = 0$,

$\mathrm{Res}[f(z),-1] = \lim_{z\to -1}((z+1)^2 f(z))' = \frac{3}{128}$,

$\mathrm{Res}[f(z),3] = \lim_{z\to 3}((z-3)^2 f(z))' = -\frac{3}{128}$.

故 $\int_C f(z)\,dz = 2\pi i(\mathrm{Res}[f(z),1] + \mathrm{Res}[f(z),-1] + \mathrm{Res}[f(z),3]) = 0$.

附 加

Question 1

求 $\int_{|z|=3} \frac{z^{2022}-1}{z^{2023}-1}\,dz$.

设 $f(z) = \frac{z^{2022}-1}{z^{2023}-1}$, 其有 1 级极点 $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{2023}}, k = 0, 1, \ldots, 2022$.

方法1. $\mathrm{Res}[f(z), z_k] = \frac{z_k^{2022}-1}{2023 z_k^{2022}} = \frac{z_k^{2022}-1}{\frac{2023}{z_k}} = \frac{1-z_k}{2023}$. (反复利用 $z_k^{2023} = 1$.)

故 $\int_{|z|=3} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{2022} \frac{1-z_k}{2023} = 2\pi i \sum_{k=0}^{2022} \frac{1}{2023} = 2\pi i$.

方法2. 由 $\sum_{k=0}^{2022} \mathrm{Res}[f(z), z_k] + \mathrm{Res}[f(z), \infty] = 0$, 得 $\sum_{k=0}^{2022} \mathrm{Res}[f(z), z_k] = -\mathrm{Res}[f(z), \infty]$.

$f(z) = (\frac{1}{z} - \frac{1}{z^{2023}})\frac{1}{1-\frac{1}{z^{2023}}} = (\frac{1}{z} - \frac{1}{z^{2023}})\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{z^{2023}})^n$, 所以 $\mathrm{Res}[f(z),\infty] = -a_{-1} = -1$, 其中 a_{-1} 为 $\frac{1}{z}$ 项的系数.

故 $\sum_{k=0}^{2022} \mathrm{Res}[f(z), z_k] = 1$, 即 $\int_{|z|=3} f(z)\,dz = 2\pi i$.

Question 2

求 $\int_{|z|=3} e^{\frac{2023}{z}}\,dz$.

设 $f(z) = e^{\frac{2023}{z}}$, 有极点 $z = 0$.

$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\frac{2023}{z})^n}{n!} = 1 + \frac{2023}{z} + \cdots$.

故 $\mathrm{Res}[f(z), 0] = 2023$, 即 $\int_{|z|=3} f(z)\,dz = 4046\pi i$.