一.基础知识

1. 计算题：1) $3e^{\frac{(2k+1)\pi}{4}i}, k=0,1,2,3$; 2) i.

2. 解方程：$i(\ln)\sqrt{3}+(2k\pm\frac{1}{2})\pi, k\in\mathbb{Z}$.

3. $f'=u_x-iu_y=3x^2y-y^3-i(x^3-3xy^2)=-iz^3$. 所以

$$f(z)=-\frac{iz^4}{4}+C$$

令$z=0$, 得到$C=i$。所以$f=-\frac{iz^4}{4}+i$。

4. 答案：2000 个。

5. 设$\xi=z-i$.

$$\frac{1}{1-z}+e^z=\frac{1}{-1-\xi}+e^{\xi+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{e^2}{n!}-(-1)^n)\xi^n.$$

收敛半径$R=1$.

6.

$$(\ln(2+\frac{1}{z+1}))'=\frac{-\frac{1}{(z+1)^2}}{2+\frac{1}{z+1}}=\frac{1}{z+3/2}-\frac{1}{z+1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}((\frac{3}{2})^{n-1}-1)}{z^n}.$$

所以

$$\ln(2+\frac{1}{z+1})=C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}((\frac{3}{2})^n-1)}{nz^n}.$$

令$z\to\infty$ 得到$C=\ln 2$, 所以洛朗展开为

$$\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}((\frac{3}{2})^n-1)}{nz^n}.$$

二.计算积分：积分每题6分。

(1). $\int_C |z|^2\,dz,$ 其中C是从i到1的有向线段.

$$\int_C |z|^2 dz = \int_0^1 |i+(1-i)t|^2 d(1-i)t = (1-i)\int_0^1 2t^2-2t+1dt = \frac{2}{3}(1-i).$$

(2). $\int_0^\pi z\sin z\,\mathrm{d}z.$

$$\int_0^\pi z\sin z\,\mathrm{d}z = (-z\cos z+\sin z)\Big|_0^\pi = \pi.$$

(3). $\int_{|z|=4}\frac{e^z}{z(z^2+\pi^2)(z^2+4\pi^2)}\mathrm{d}z.$ 三个极点，$0,\pm\pi i$ 一阶；

$$Res[\frac{e^z}{z(z^2+\pi^2)(z^2+4\pi^2)},0] = \frac{1}{4\pi^4}.$$

$$Res[\frac{e^z}{z(z^2+\pi^2)(z^2+4\pi^2)},\pi i] = \frac{1}{6\pi^4}.$$

$$Res[\frac{e^z}{z(z^2+\pi^2)(z^2+4\pi^2)},-\pi i] = \frac{1}{6\pi^4}.$$

答案：$\frac{7i}{6\pi^3}$。

(4). $\int_{|z-3|=2}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{Im}z)}{\mathrm{Re}z}.$

$$\begin{aligned}\int_{|z-3|=2}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{Im}z)}{\mathrm{Re}z} &= \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}(2\sin\theta)}{3+2\cos\theta}\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{2\cos\theta\mathrm{d}(\theta)}{3+2\cos\theta}\\ &= \int_{|z|=1}\frac{z+\frac{1}{z}\mathrm{d}z}{iz(3+z+\frac{1}{z})}\\ &= \int_{|z|=1}\frac{z^2+1\mathrm{d}z}{iz(z^2+3z+1)}\end{aligned}$$

两个一阶极点：$0,-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$。

$$Res[\frac{z^2+1}{iz(z^2+3z+1)},0] = \frac{1}{i}.$$

$$Res[\frac{z^2+1}{iz(z^2+3z+1)},-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}] = -\frac{3}{i\sqrt{5}}.$$

答案：$2\pi-\frac{6\pi}{\sqrt{5}}.$

(5). $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+\cos x}{x^2-2ix-1}\mathrm{d}x.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2-2ix-1}\mathrm{d}x = 0.$$

$$\frac{\cos x}{x^2-2ix-1}=\frac{(x^2-1)\cos x}{(x^2+1)^2}+\frac{2ix\cos x}{(x^2+1)^2}.$$

i 二阶极点

$$Res[\frac{(z^2-1)e^{iz}}{(z^2+1)^2},i]=\frac{ie^{-1}}{2}.$$

答案：$-\frac{\pi}{e}$。

(6) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\pi x)-\cos(\pi x)}{(x^2+1)(4x-1)}dx$. 补上虚部后辅助函数为$\frac{-ie^{i\pi z}-e^{i\pi z}}{(z^2+1)(4z-1)}$. 做大半圆$C_R$（以0为圆心），小半圆$C_r$（以$\frac{1}{4}$ 为圆心）。则积分为

$$\lim_{R\to\infty,r\to 0}\int_C-\int_{C_R}+\int_{C_r}\frac{-ie^{i\pi z}-e^{i\pi z}}{(z^2+1)(4z-1)}dz.$$

其中

$$\lim_{R\to\infty,r\to 0}\int_C=2\pi iRes[\frac{-ie^{i\pi z}-e^{i\pi z}}{(z^2+1)(4z-1)},i]=\frac{\pi e^{-\pi}(-3+5i)}{17}.$$

$$\lim_{R\to\infty,r\to 0}\int_{C_R}=0.$$

$$\lim_{R\to\infty,r\to 0}\int_{C_r}=\pi i\lim_{z\to\frac{1}{4}}\frac{-ie^{i\pi z}-e^{i\pi z}}{(z^2+1)(4z-1)}(z-\frac{1}{4})=\frac{4\sqrt{2}\pi}{17}.$$

所以对照的，答案为$-\frac{3\pi e^{-\pi}}{17}+\frac{4\sqrt{2}\pi}{17}$.

(7) $\int_{|z|=2}\frac{z}{(1-z)(1-\overline{\cos z})}\mathrm{d}z$. 仅需求该积分的共轭为：

$$\int_{|z|=2}\frac{\bar{z}}{(1-\bar{z})(1-\cos z)}\mathrm{d}\bar{z}.$$

即求

$$\int_{|z|=2}\frac{4}{z(1-4/z)(1-\cos z)}(-\frac{4}{z^2})\mathrm{d}z.$$

即求

$$\int_{|z|=2}\frac{4}{z^2(1-z/4)(1-\cos z)}\mathrm{d}z.$$

注意到

$$\frac{4}{z^2(1-z/4)(1-\cos z)}=\frac{8}{z^4(1-z/4)(1-\frac{z^2}{12}+\cdots)}=\frac{8}{z^4}(1+\frac{z}{4}+\frac{z^2}{16}+\frac{z^3}{64}+\frac{z^4}{256}+\cdots)(1+\frac{z^2}{12}+\cdots).$$

负一项系数为：$8\times(\frac{1}{48}+\frac{1}{64})=\frac{7}{24}$. 共轭后答案：$-\frac{7}{12}\pi i$.

三。

(1) $L[f]=-\frac{1}{p^2}+e^{-p}\left(\frac{2}{p^3}+\frac{3}{p^2}+\frac{2}{p}\right).$

(2) 设$A=L[y]$, 则

$$\frac{A}{p}+pA-1+A=\frac{1}{p^2}.$$

解得

$$A=\frac{p^2+1}{p(p^2+p+1)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2+p+1}.$$

逆变换得，

$$y=1-\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

四。证明：对于$R>2024$, 做大半圆$C_R:|z|=R,\mathrm{Re}z\geq 0$, L_R 为从Ri 到$-Ri$ 的有向线段。则有

$$f(2024)=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_R\cup C_R}\frac{f(z)}{z-2024}dz.$$

$$0=f(2023)=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_R\cup C_R}\frac{f(z)}{z-2023}dz.$$

做差得到

$$f(2024)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{L_R\cup C_R}\frac{f(z)}{z-2024}-\frac{f(z)}{z-2023}dz=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_R\cup C_R}\frac{f(z)}{(z-2023)(z-2024)}dz.$$

注意到$\lim_{z\to\infty}z\frac{f(z)}{(z-2023)(z-2024)}=0$，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{f(z)}{(z-2023)(z-2024)}dz=0.$$

从而

$$f(2024)=\frac{1}{2\pi i}\int_{+\infty i}^{-\infty i}\frac{f(z)}{(z-2023)(z-2024)}dz.$$

从而

$$\begin{aligned}|f(2024)|&\leq\frac{1}{2\pi}\int_{+\infty i}^{-\infty i}\frac{|f(z)|}{|z-2023||z-2024|}|dz|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(s^2+2023^2)(s^2+2024^2)}}ds\\&\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{s^2+2023^2}ds.\end{aligned}$$

所以$|f(2024)|\leq|Res[\frac{1}{z^2+2},2023i]|=\frac{1}{2\times 2023}$。