- 泰勒展开是*f*(z)在解析点附近的级数展开.
- 是否可以将*f*(z)在奇点附近展开为级数?

4.3 解析函数的洛朗(Laurent)展开 (*f*(z)在奇点附近的展开)

f(z)在奇点 **z=a** 附近，可展开为 如下形式的级数：

$$f(z)=\underline{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}} a_n(z-a)^n=\boxed{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n}+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

(*f* (z)在*a*点奇性引起)

$$=\underline{\sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}(z-a)^{-m}}+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n .$$

这样的双边级数称为洛朗(Laurent)级数，其中

$$\sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}(z-a)^{-m}=\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{a_{-3}}{(z-a)^3}+\cdots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\cdots$$

洛朗(Laurent)级数收敛概念

洛朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ 由两个级数构成：

洛朗级数　　负幂项部分　　正幂项和常数项部分

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n}_{\text{收敛}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}}_{\text{收敛}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n}_{\text{收敛}}$$

定义：若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$，$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ 都收敛，

则称洛朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ 收敛.

洛朗(Laurent)级数 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ 收敛域

$(*)\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$ $\xlongequal{\text{令}\zeta=\frac{1}{z-a}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}\zeta^n$(关于$\zeta$幂级数)

设收敛半径为 $\frac{1}{r}$

$|\zeta|<\frac{1}{r}$时,收敛到一解析函数$f_1(\zeta)=f_1\left(\frac{1}{z-a}\right)$

当$\frac{1}{|z-a|}<\frac{1}{r}$时, (*)收敛到$f_1\left(\frac{1}{z-a}\right)$.

(*)收敛域: $|z-a|>r$.

$(**)\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$

设收敛半径为 R

在$|z-a|<R$ 内收敛到某解析函数$f_2(z)$.

(**)收敛域 $|z-a|<R$.

(1) 若$r<R$: 两收敛域有公共部分 $r<|z-a|<R$. 圆环域

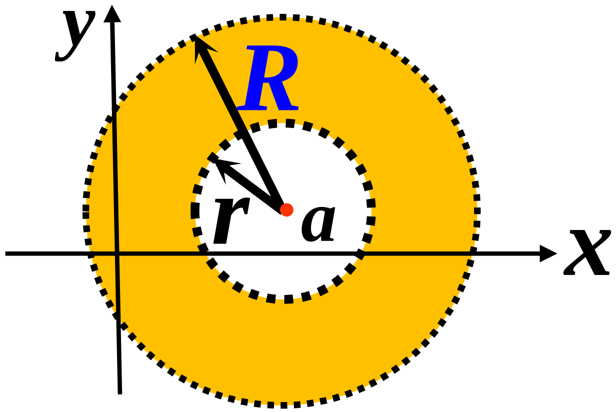
洛朗(Laurent)级数收敛域

(2) 若$r=R$: 洛朗级数至多在$|z-a|=R$上某些点收敛.

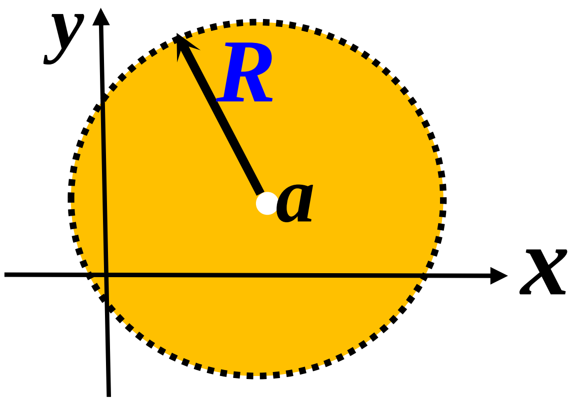
(3) 若$r>R$: 两收敛域无公共部分, 洛朗级数处处发散.

洛朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ 的收敛域为:

圆环域 $r<|z-a|<R$.

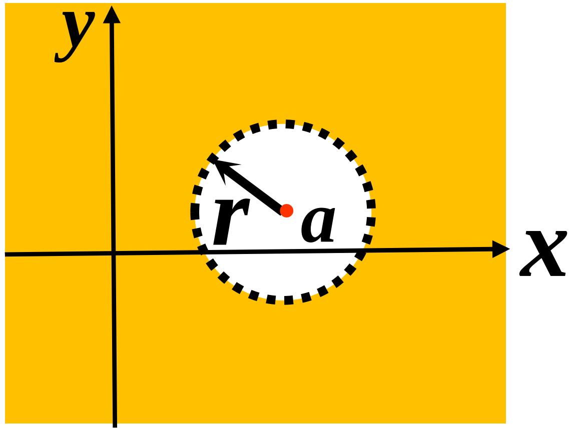


特殊圆环域(也是洛朗级数可能的收敛域):



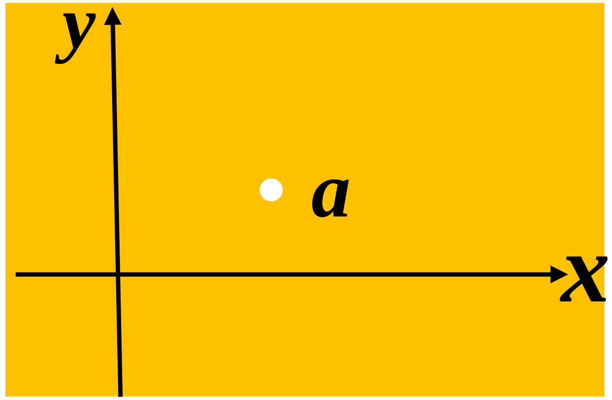
$(r=0)$

$0<|z-a|<R$



$(R=+\infty)$

$|z-a|>r$



$(r=0,\ R=+\infty)$

$|z-a|>0$

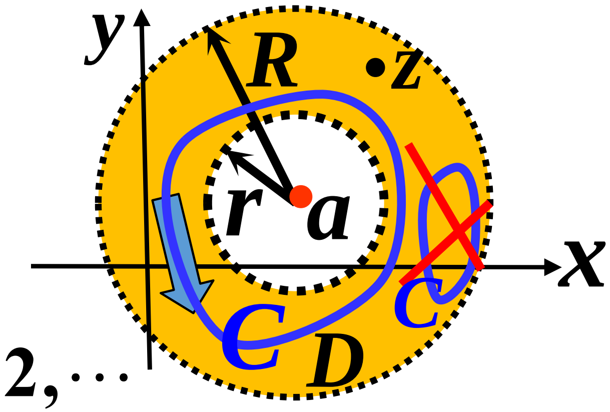
洛朗级数在收敛圆环域内解析.

反之, 在圆环域内解析的函数也必可展成洛朗级数, 即

定理(P 84) 设$f(z)$在圆环域D: $r<|z-a|<R$ 内解析, 则

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n,\quad \forall z\in D,$$

a是圆环域D 的中心.



$$a_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

C 是圆环域D内任一条围绕点a的逆时针简单闭路.

------(圆环域内解析函数的)洛朗展开定理

定理(P 84) 设 $f(z)$ 在圆环域 D： $r<|z-a|<R$ 内解析，

$\forall z\in D$,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n,\quad a_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

C 是圆环域D内任一条围绕点a的逆时针方向简单闭路.

证明：$\forall z\in D$, 以a为中心作两个逆时针同心圆周：

$C'':|\zeta-a|=\delta''$, $C':|\zeta-a|=\delta'$,

使得C',C'' 都在D 内， C'' 在C' 外侧，

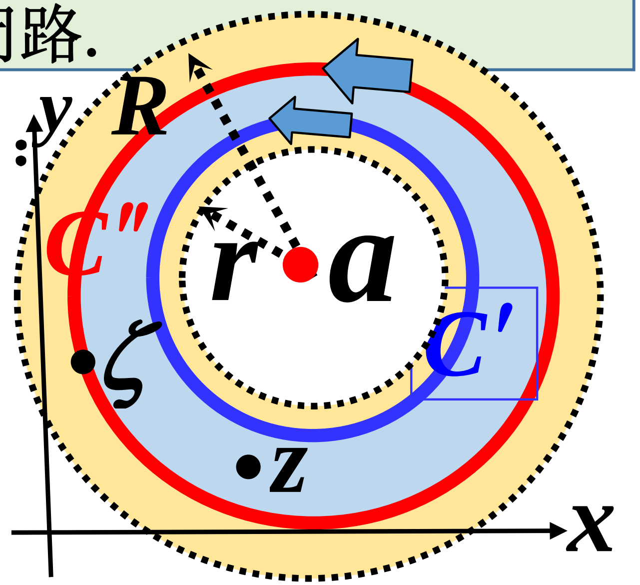
z 夹在C',C'' 之间，即$r<\delta'<|z-a|<\delta''<R$.

$\hat{C}=C''+C'^{-}$构成复闭路，

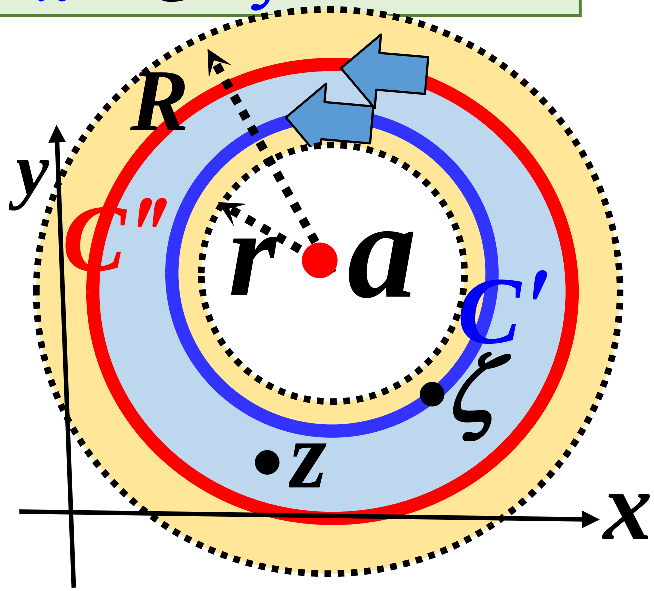
$f(\zeta)$在$\hat{C}$及其所围区域内解析, 故由复闭路柯西积分公式知

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\hat{C}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{C''}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{C'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.$$

正幂项和常数项部分　　负幂项部分



$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\widehat{C}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C''}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.$$



与定理1(P 78)证明完全类似, 可以证明

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C''}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n,$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C''}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad n=0,1,2,\cdots$$

$$\forall\zeta\in C',\quad |\zeta-a|<|z-a|,\quad \left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right|<1,$$

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=-\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}},$$ 故

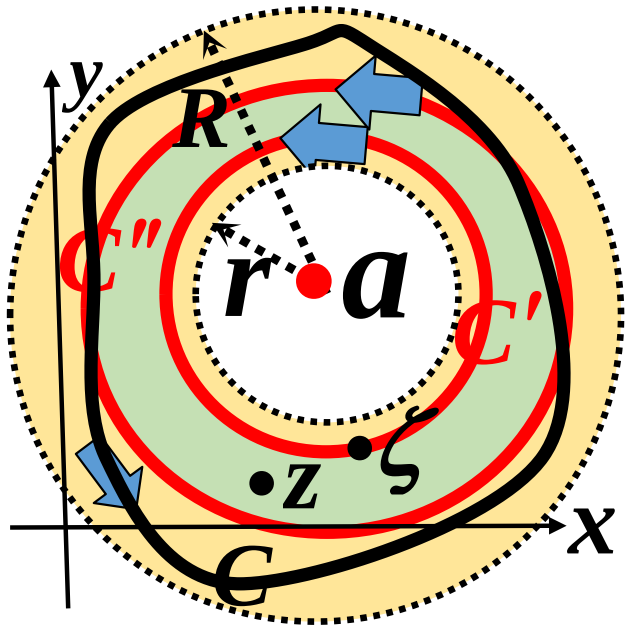
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\int_{C'}f(\zeta)(\zeta-a)^n\mathrm{d}\zeta\right\}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}$$

(令 $n+1=-m$)

$$=\sum_{m=-\infty}^{-1}\left\{\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{m+1}}\mathrm{d}\zeta}_{\triangleq a_m}\right\}(z-a)^m\triangleq\sum_{m=-\infty}^{-1}a_m(z-a)^m.$$

$$\therefore f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C''}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n+\sum_{m=-\infty}^{-1}a_m(z-a)^m=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n,$$



$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C''}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta, & n=0,1,2,\cdots,\\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta, & n=-1,-2,\cdots.\end{cases}$$

对D内任一条围绕点a的逆时针方向简单闭路C,

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}$在由$C$和$C''$所围的区域内部解析,

由多连通区域的柯西积分定理可知,

$$\int_{C''}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=\int_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta.$$

同理$\displaystyle\int_{C'}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=\int_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta.$

$$\therefore a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta,$$

$$n=0,\pm1,\pm2,\cdots.\ \#$$

洛朗展开定理(P 84)的证明思路:

(1) 灵活应用复闭路柯西积分公式,

(2) 当$|z|<1$时,$\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ (P 75例2).

与“圆域内解析函数的幂级数展开是唯一的”类似,

圆环域内解析函数的洛朗级数展开也是唯一的.

设函数 $f(z)$ 在圆环 $D: r<|z-z_0|<R$ 内解析，则在D内 $f(z)$ 的洛朗展开式是唯一的.

证明： 假设在D 内，$f(z)$有两种洛朗展式：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z-a)^n, \quad (\Delta)$$

下面证明$\forall k\in\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，$a_k=b_k$.

$\forall k\in\mathbb{Z}$, 在等式(Δ)两边乘以$(z-a)^{-k-1}$并在C上积分得

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\int_C (z-a)^{n-k-1}\,\mathrm{d}z=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n\int_C (z-a)^{n-k-1}\,\mathrm{d}z, \quad (\Delta\Delta)$$

利用P 49例2, $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-a)^{-n+k+1}}\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & -n+k+1=1,\\ 0, & -n+k+1\neq 1.\end{cases}$

由$-n+k+1=1$, 解得$n=k$. 故

$(\Delta\Delta)$左边 $=2\pi\mathrm{i}\,a_k=(\Delta\Delta)$右边$=2\pi\mathrm{i}\,b_k$，故$a_k=b_k$.

由k的任意性得结论. 证毕.#

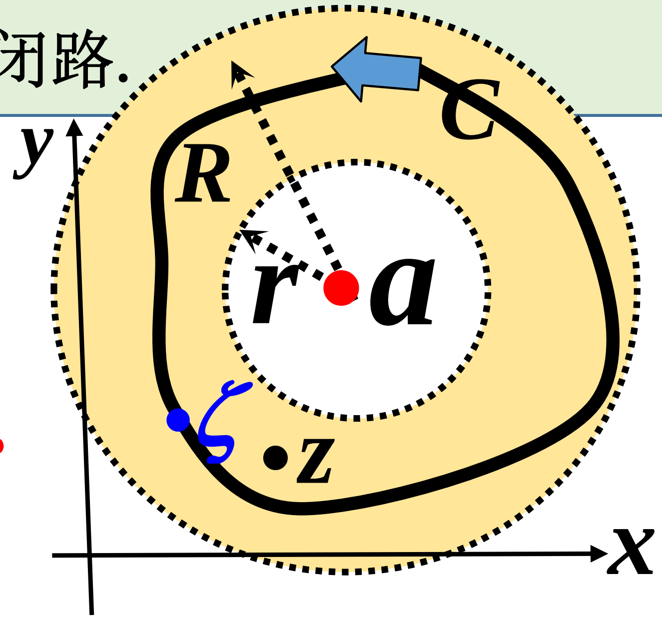
圆环域内解析函数的洛朗展开定理

定理(P 84) 设$f(z)$在圆环域D：$r<|z-a|<R$ 内解析，

$\forall z\in D$,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n,\quad a_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

C 是环域D内任一条围绕点 a 的逆时针方向简单闭路.



- 设$f(z)$在 D：$r<|z-a|<R$ 内解析，

  则 $f(z)$ 在D内的洛朗展式是唯一的.

即同一函数在同一圆环域内洛朗展开式唯一。

注：因$z=a$可能是$f(z)$的奇点，

故$f(z)$在$z=a$可能不解析或无意义，

从而不能在洛朗展式及对其逐项求导所得等式两边取$z=a$,

或者求出所有a_n推出唯一性.

解析函数在孤立奇点的洛朗展开

定义(孤立奇点)(P 87): 如果$f(z)$在点a不解析，即a是$f(z)$的奇点，

但$f(z)$在点a 的某个去心邻域$0<|z-a|<\rho$ 内解析，

则称a是$f(z)$的孤立奇点.

例1. $\dfrac{1}{1+z^2}$ 有奇点 $z_1=\mathrm{i}$ 和 $z_2=-\mathrm{i}$，都是孤立奇点.

例2. $\dfrac{1}{\sin z}$，由$\sin z=0$解得奇点$z_n=n\pi$，$n\in\mathbb{Z}$，孤立奇点.

例3. $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$，奇点：$z_0=0$，$z_n=\dfrac{1}{n\pi}$，$n=\pm1,\pm2,\cdots$.

对每个非0整数n，z_n是孤立奇点.

因 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$，故在0的任一去心邻域内有无穷多奇点，

故0不是孤立奇点.

解析: 如果$f(z)$在a 的某个邻域内可微，则称$f(z)$ 在a 解析.
奇点: 如果$f(z)$在a不解析，则称a 是$f(z)$ 的奇点.

1) 设a 是$f(z)$的孤立奇点，记$R=\min\limits_{\eta\in\{f(z)\text{的奇点}\}\setminus\{a\}}|\eta-a|$,

则$f(z)$在$D: 0<|z-a|<R$ 内解析，可展为$z-a$ 的洛朗级数(P 84 定理)，

它也称为$f(z)$在奇点$z=a$的洛朗展开；

2) $\forall a\in\mathbb{C}$，将$f(z)$的所有奇点$\{z_n\}$按与a 距离的远近排列：

$$|z_1-a|\le|z_2-a|\le\cdots\le|z_n-a|.$$

• 若$|z_k-a|<|z_{k+1}-a|$, 则

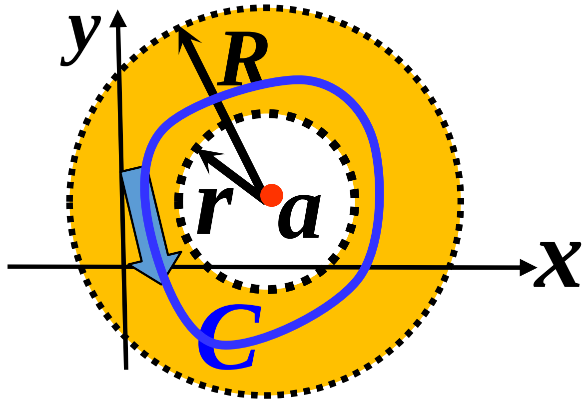
$f(z)$在环域$|z_k-a|<|z-a|<|z_{k+1}-a|$内解析，可展为$z-a$的洛朗级数.

• 若$z_n(\ne\infty)$是$f(z)$的离a最远的奇点，则

$f(z)$在环域$|z-a|>|z_n-a|$内解析，可展为$z-a$的洛朗级数.

★★★

求圆环域内解析函数的洛朗展开式



(1) 直接展开法

设 $f(z)$ 在圆环域$D: r<|z-a|<R$ 内解析，

直接利用定理(P84)中的公式计算系数a_n：

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots\qquad (\#)$$

C 是圆环域D内任一条围绕点a的逆时针方向简单闭路，

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n.$$

此方法计算复杂

(2) 间接展开法 ★★★★★

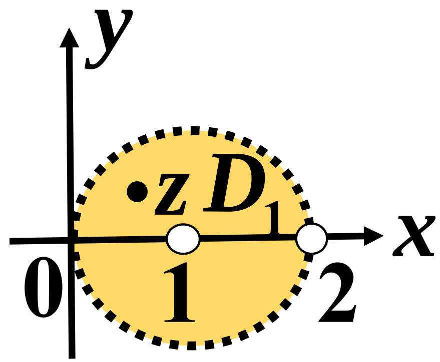
在4.2节中求圆域内解析函数的幂级数展开方法和技巧，在求圆环域内解析函数的洛朗展开时同样适用.

- 灵活利用e^z，$\cos z$，$\sin z$在$z=0$ 的泰勒展式；
- 灵活应用：当$|z|<1$ 时，$\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n$，$\dfrac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n$.

例1 求 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ $\begin{cases}1)\text{在点}z=1\text{的洛朗展开；}\\2)\text{在}D:2<|z|<+\infty\text{的洛朗展开.}\end{cases}$

解 用间接法.

$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, 只有两奇点 $\begin{cases}z_1=1,\\z_2=2.\end{cases}$



1)求在$z=1$的洛朗展开, 取 $R=|2-1|=1$.

在 $0<|z-1|<1$ 内, $f(z)$解析, 故可展为$z-1$ 的洛朗级数,

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{(z-1)-1}=\frac{1}{z-1}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{1-(z-1)}$$

$$=-\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1}=-\sum_{m=-1}^{+\infty}(z-1)^m,\quad 0<|z-1|<1.$$

令$m=n-1$,

则$n=0$时, $m=-1$.

注意：当 $|z|<1$ 时，$\dfrac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$， $\dfrac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n$.

但是，当 $1<|z|<+\infty$时，$\dfrac{1}{1-z}\neq\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

当 $1<|z|<+\infty$时，$0<\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$，故

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{-z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

$$=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{z^m},\quad 1<|z|<+\infty.$$

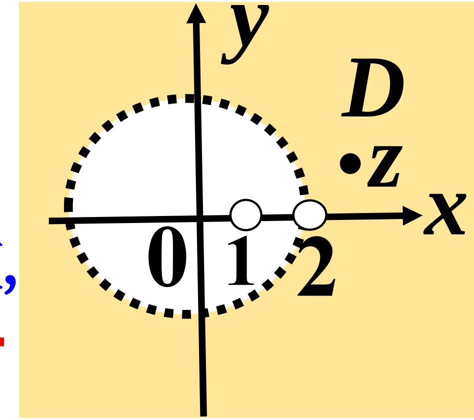
令$m=n+1$,

则$n=0$时， $m=1$.

例1 求 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ $\begin{cases}1)\text{在点}z=1\text{的洛朗展开;}\\ 2)\text{在}D:2<|z|<+\infty\text{的洛朗展开.}\end{cases}$

解 用间接法.

$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, 只有两奇点 $\begin{cases}z_1=1,\\ z_2=2.\end{cases}$



2) 在 $D: 2<|z|<\infty$ 内, $f(z)$ 解析可展为 z 的洛朗级数,

$0<\left|\dfrac{2}{z}\right|<1,\ 0<\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$, 故

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}}=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{2^{m-1}-1}{z^m}=\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{2^{m-1}-1}{z^m},$$

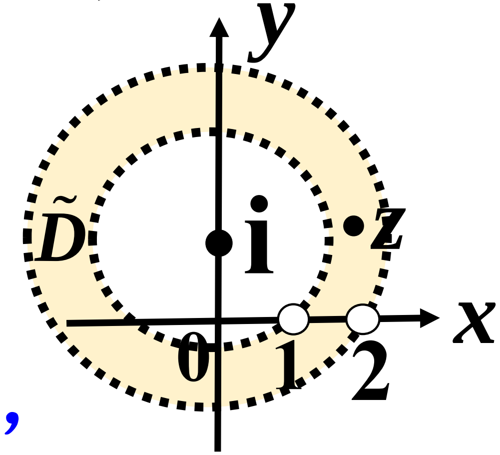
$2<|z|<+\infty.$

令 $m=n+1$,

则 $n=0$ 时, $m=1.$

$(m=1\text{时}2^{m-1}-1=0)$

例1 求 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ 3)在$\tilde{D}:(\sqrt{2})<|z-i|<(\sqrt{5})$的洛朗展开.



解 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, 只有两奇点 $\begin{cases} z_1=1, \\ z_2=2. \end{cases}$

3) $|1-i|=(\sqrt{2})$, $|2-i|=(\sqrt{5})$,

在$\tilde{D}:(\sqrt{2})<|z-i|<(\sqrt{5})$内, $|1-i|<|z-i|<|2-i|$,

$f(z)$解析可展为$z-i$的洛朗级数, $0<\left|\dfrac{z-i}{2-i}\right|<1$, $0<\left|\dfrac{1-i}{z-i}\right|<1$.

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-i)-(2-i)}-\frac{1}{(z-i)-(1-i)}$$

$$=-\frac{1}{2-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-i}{2-i}}-\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{1-i}{z-i}}=-\frac{1}{2-i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-i}{2-i}\right)^n-\frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1-i}{z-i}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1-i)^n}{(z-i)^{n+1}}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}-\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(1-i)^{m-1}}{(z-i)^m},$$

令$m=n+1$, 则$n=0$时, $m=1$.

$(\sqrt{2})<|z-i|<(\sqrt{5})$.

例 将$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)^2}$ $\begin{cases} 1)\ \text{在环域}D_1:0<|z-1|<1\ \text{内展成洛朗级数;} \\ 2)\text{在环域}\ D_2:2<|z-3|<3\ \text{内展成洛朗级数。} \end{cases}$

解 $f(z)$只有两个奇点0和1.

1) $|0-1|=1$， $f(z)$在圆环域 D_1 内解析，可展成$z-1$的罗朗级数，

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{(z-1)+1}=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1-[-(z-1)]}$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^{n-2}$$

(令$m=n-2$)

$$=\sum_{m=-2}^{+\infty}(-1)^{m+2}(z-1)^m=\sum_{m=-2}^{+\infty}(-1)^m(z-1)^m,\quad 0<|z-1|<1.$$

2) $|0-3|=3$, $|1-3|=2$,

$f(z)$在D_2: $2<|z-3|<3$内解析，可展成$z-3$的洛朗级数.

例 将$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)^2}$ $\begin{cases}1) \text{在环域} D_1: 0<|z-1|<1 \text{ 内展成洛朗级数;}\\ 2) \text{在环域 } D_2: 2<|z-3|<3 \text{ 内展成洛朗级数.}\end{cases}$

解 $f(z)$只有两个奇点0和1. 2) $|0-3|=3$, $|1-3|=2$,

故 $f(z)$在D_2: $2<|z-3|<3$内解析，可展成$z-3$的洛朗级数.

设$f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}=\dfrac{a}{z}+\dfrac{b}{z-1}+\dfrac{c}{(z-1)^2}=\dfrac{a(z-1)^2+bz(z-1)+cz}{z(z-1)^2}$,

故 $a(z-1)^2+bz(z-1)+cz=1$. 取$z=1$得，$c=1$.

取$z=0$得 $a=1$. 取$z=2$得 $a+2b+2c=1$.

解得$b=\dfrac{1-a-2c}{2}=-1$. 故$f(z)=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{(z-1)^2}$.

在D_2: $2<|z-3|<3$内，

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-3+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-3}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z-3}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^n}{3^{n+1}},$$

故$f(z)=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{(z-1)^2}$. 在$D_2$: $2<|z-3|<3$内,

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-3)+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-3}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z-3}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^n}{3^{n+1}},$$

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z-3)+2}=\frac{1}{z-3}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z-3}}=\frac{1}{z-3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n2^n}{(z-3)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n2^n}{(z-3)^{n+1}},$$

$$\left(\frac{1}{z-1}\right)'=-\frac{1}{(z-1)^2},$$

$$故\frac{1}{(z-1)^2}=-\left(\frac{1}{z-1}\right)'=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n2^n\cdot(-1)(n+1)}{(z-3)^{n+1+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n2^n(n+1)}{(z-3)^{n+2}}.$$

例 将$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)^2}$ $\begin{cases}1)\ 在环域\ D_1: 0<|z-1|<1\ 内展成洛朗级数;\\ 2)在环域\ D_2: 2<|z-3|<3\ 内展成洛朗级数.\end{cases}$

解 $f(z)$只有两个奇点0和1. 2) $|0-3|=3$, $|1-3|=2$,

故 $f(z)$在D_2: $2<|z-3|<3$内解析, 可展成$z-3$的洛朗级数.

设$f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}=\dfrac{a}{z}+\dfrac{b}{z-1}+\dfrac{c}{(z-1)^2}$ $\Rightarrow$ $a=1$, $c=1$, $b=-1$.

$$\text{故} f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(z-3)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n(n+1)}{(z-3)^{n+2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^n}{3^{n+1}}-\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m-1}2^{m-1}}{(z-3)^m}+\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{m-2}2^{m-2}(m-1)}{(z-3)^m}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^n}{3^{n+1}}+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m 2^{m-2}(m+1)}{(z-3)^m},\quad 2<|z-3|<3.$$

$$\text{故} f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}.\quad \text{在} D_2: 2<|z-3|<3\text{内},$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-3+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-3}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z-3}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^n}{3^{n+1}},$$

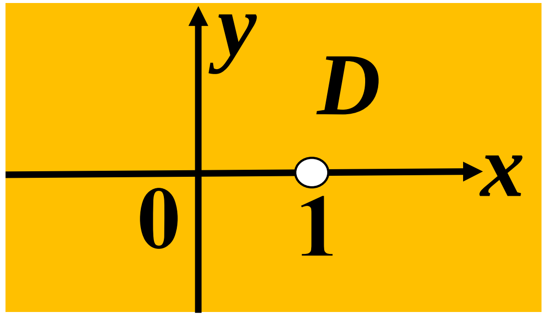
$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-3+2}=\frac{1}{z-3}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z-3}}=\frac{1}{z-3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(z-3)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(z-3)^{n+1}},$$

$$\text{故}\frac{1}{(z-1)^2}=-\left(\frac{1}{z-1}\right)'=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n\cdot(-1)(n+1)}{(z-3)^{n+1+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^n(n+1)}{(z-3)^{n+2}}.$$

例2(P88) 求函数 $f(z)=\sin\frac{z}{z-1}$ 在 $z=1$ 的洛朗展开.

解 $z=1$ 是 $f(z)$ 的唯一奇点，$f(z)$ 在环域 $D:|z-1|>0$ 内解析，

故 $f(z)$ 在 D 内可展成 $z-1$ 的洛朗级数.



$$f(z)=\sin\frac{(z-1)+1}{z-1}=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)$$

$$=\sin 1\cos\left(\frac{1}{z-1}\right)+\cos 1\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

(用 $\sin z,\cos z$ 在 $z=0$ 的泰勒展开)

$$=\sin 1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^{2n}+\cos 1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^{2n+1},\quad |z-1|>0.$$

例 求函数$f(z)=(z-1)^4 e^{\frac{2z-3}{z-1}}$ 在环域:$|z-1|>0$ 内的洛朗展开.

解 $z=1$是$f(z)$的唯一奇点. $f(z)$ 在环域$D:\underline{|z-1|>0}$ 内解析,

故$f(z)$在环域D 内可展开为 $z-1$ 的洛朗级数.

令 $w=z-1$, 则 $z=w+1$, 在D 内, $\underline{|w|>0}$,

$$f(z)=\underbrace{w^4}_{(保留)} e^{\frac{2(w+1)-3}{w+1-1}}=w^4 e^{\frac{2w-1}{w}}=\underline{w^4 e^{2-\frac{1}{w}}=e^2 w^4 e^{-\frac{1}{w}}}$$

$$=e^2 w^4 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{w}\right)^n=e^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!\underline{w^{n-4}}}$$

$$\left(\begin{array}{l}令\ m=n-4,\\ 则 n=m+4,\\ n=0时,\ m=-4\end{array}\right)$$

$$=\sum_{m=-4}^{+\infty}\frac{e^2(-1)^{m+4}}{(m+4)!w^m}=\sum_{m=-4}^{+\infty}\frac{e^2(-1)^m}{(m+4)!(z-1)^m},\quad |z-1|>0.$$

例 求$f(z)=\dfrac{(z-4)^3}{(z-5)^2}$在$|z-4|>1$内的洛朗展式.

解 $f(z)$只有奇点5. $|5-4|=1$，故$f(z)$在$D:\ |z-4|>1$内解析，

由定理(P 84)知在$D:\ |z-4|>1$内$f(z)$可展开为 $z-4$的洛朗级数.

令 $w=z-4$，则 $z=w+4$，$f(z)=\dfrac{w^3}{(w-1)^2}$.

$$\left(\frac{1}{w-1}\right)'=-\frac{1}{(w-1)^2},\quad f(z)=-w^3\left(\frac{1}{w-1}\right)'.$$

在D 内，$|w|>1$，$\left|\dfrac{1}{w}\right|<1$，

$$\frac{1}{w-1}=\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{w}}=\frac{1}{w}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{w}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}w^{-(n+1)}.$$

$$\left(\frac{1}{w-1}\right)'=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{w^{n+2}}.$$

$$f(z)=w^3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{w^{n+2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{w^{n-1}}=\sum_{m=-1}^{+\infty}\frac{m+2}{w^m}=\sum_{n=-1}^{+\infty}\frac{n+2}{(z-4)^n},$$

$$|z-4|>1.$$

例 求$f(z)=\dfrac{(z-4)^3}{(z-5)^2}$在$|z-4|>1$内的洛朗展式.

解 $f(z)$只有奇点5. $|5-4|=1$, 故$f(z)$在$D: |z-4|>1$内解析,

由定理(P 84)知在$D: |z-4|>1$内$f(z)$可展开为 $z-4$的洛朗级数.

令 $w=z-4$, 则 $z=w+4$, $f(z)=\dfrac{w^3}{(w-1)^2}=-w^3\left(\dfrac{1}{w-1}\right)'$.

在D 内, $|w|>1$, $\left|\dfrac{1}{w}\right|<1$,

$$\frac{1}{w-1}=\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{w}}=\frac{1}{w}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{w}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}w^{-(n+1)}.$$

$$\left(\frac{1}{w-1}\right)'=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{w^{n+2}}.$$

例3(89) 设t为实参数，求$f(z)=\exp\left[\frac{t}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]$在$0<|z|<+\infty$内的洛朗展开.

解法一(直接法) $z=0$是$f(z)$的唯一奇点, $f(z)$在环域$D:0<|z|<+\infty$内解析,

由(P84)定理, $f(z)$在D 内可展成z的洛朗级数$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, 其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-0)^{n+1}}d\zeta,$$ C为D内任一围绕0的逆时针方向简单闭曲线.

参数法求a_n. 取 $C:|\zeta|=1$, C在D 内，参数方程为

C: $\zeta=e^{i\theta}$, $0\le\theta<2\pi$, $\zeta'(\theta)=ie^{i\theta}$,

$$a_n=\frac{1}{2\pi \cancel{i}}\int_0^{2\pi}\frac{\exp\left[\frac{t}{2}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right]}{e^{i(n+1)\theta}}\cancel{i}\cancel{e}^{i\theta}d\theta$$ $\boxed{e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta}$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left[i(t\sin\theta-n\theta)\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta)d\theta+i\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(t\sin\theta-n\theta)d\theta\right\}, n\in\mathbb{Z}.$$

下证$\operatorname{Im} a_n=0$.

$$\boxed{a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta)\,\mathrm{d}\theta+\mathrm{i}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(t\sin\theta-n\theta)\,\mathrm{d}\theta\right\},\ n\in\mathbb{Z}.}$$

下证 $\mathrm{Im}\,a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(t\sin\theta-n\theta)\,\mathrm{d}\theta=0$. 作代换 $\underline{\varphi=\theta-\pi}$, 则

$$\int_0^{2\pi}\sin(t\sin\theta-n\theta)\,\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\sin\{t\sin(\varphi+\pi)-n(\varphi+\pi)\}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sin\{-(t\sin\varphi+n\varphi)-n\pi\}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=(-1)^{n+1}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\sin(t\sin\varphi+n\varphi)}_{\varphi\text{的奇函数}}\,\mathrm{d}\varphi=0,$$

因此 $\mathrm{Im}\,a_n=0$. 故 $a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta)\,\mathrm{d}\theta.$

故 $f(z)=\exp\left[\frac{t}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta)\,\mathrm{d}\theta\right\}z^n,$

$$0<|z|<+\infty.$$

故 $f(z)=\exp\left[\frac{t}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta)\,\mathrm{d}\theta\right\}z^n,\quad 0<|z|<+\infty.$

解法二(间接法) 当 $0<|z|<+\infty$ 时，

$$f(z)=\exp\left(\frac{tz}{2}\right)\exp\left(-\frac{t}{2z}\right)=\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k z^k}{k!2^k}\right\}\left\{\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^l t^l}{l!2^l z^l}\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^l}{k!l!}\left(\frac{t}{2}\right)^{k+l}z^{k-l}$$

令 $n=k-l$, (留 n,l)
则 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$,
$k=n+l\geq 0,\ l\geq 0,\Rightarrow$
$l\geq\max\{-n,0\}$.

两个级数绝对收敛时，
可以相乘，
并可以任何方式合并.

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^l}{(n+l)!l!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2l}\right\}z^n+\sum_{n=-\infty}^{-1}\left\{\sum_{l=-n}^{+\infty}\frac{(-1)^l}{(n+l)!l!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2l}\right\}z^n$$

$n\geq 0$时，$\max\{-n,0\}=0$,
故$0\leq l\leq+\infty$.

$n<0$时，$\max\{-n,0\}=-n$,
故$-n\leq l<+\infty$.

$$\triangleq\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(t)z^n.$$

故 $f(z)=\exp\left[\frac{t}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta)\,\mathrm{d}\theta\right\}z^n,\quad 0<|z|<+\infty.$

解法二(间接法) 当 $0<|z|<+\infty$ 时，

$$f(z)=\exp\left(\frac{tz}{2}\right)\exp\left(-\frac{t}{2z}\right)=\left\{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^kz^k}{k!2^k}\right\}\left\{\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^lt^l}{l!2^lz^l}\right\}=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^l}{k!l!}\left(\frac{t}{2}\right)^{k+l}z^{k-l}$$

(令 $k=n+l$, 则 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots,\ l\geq\max\{-n,0\}$)

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^l}{(n+l)!l!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2l}\right\}z^n+\sum_{n=-\infty}^{-1}\left\{\sum_{l=-n}^{+\infty}\frac{(-1)^l}{(n+l)!l!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2l}\right\}z^n\triangleq\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(t)z^n.$$

当 $n\geq0$ 时，$J_n(t)=\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^l}{(n+l)!l!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2l}$

当 $n\leq-1$ 时，$J_n(t)=\sum_{l=-n}^{+\infty}\frac{(-1)^l}{(n+l)!l!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2l}$

称 $J_n(t)(n\in\mathbb{Z})$ 为整数阶的**Bessel函数**，(关于 t)收敛半径是 $+\infty$.

下证 $J_{-n}(t)=(-1)^nJ_n(t),\quad n\in\mathbb{N}.$

$$\exp\left[\frac{t}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta)\,\mathrm{d}\theta\right\}z^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(t)z^n,\quad 0<|z|<+\infty.$$

当$n\geq 0$时，$J_n(t)=\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^l}{(n+l)!\,l!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2l}$

当$n\leq -1$时，$J_n(t)=\sum_{l=-n}^{+\infty}\frac{(-1)^l}{(n+l)!\,l!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2l}$

称 $J_n(t)(n\in\mathbb{Z})$为整数阶的**Bessel函数**，(关于t)收敛半径是$+\infty$.

下证 $J_{-m}(t)=(-1)^m J_m(t),\ m\in\mathbb{N}.$

$\forall m\in\mathbb{N}$，$J_{-m}(t)=\sum_{l=m}^{+\infty}\frac{(-1)^l}{(l-m)!\,l!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2l-m}$ (令$l=m+k$，则当$l=m$时，$k=0$)

$$=(-1)^m\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(m+k)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{m+2k}=(-1)^m J_m(t).\#$$

称$\exp\left[\frac{t}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]$为整数阶Bessel函数$J_n(t)(n\in\mathbb{Z})$的**母函数**.

由洛朗展开唯一性知，$J_n(t)=\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta)\,\mathrm{d}\theta}_{n\text{阶 Bessel函数的积分表示}},\ n\in\mathbb{Z}.$

作业

P100

10,11

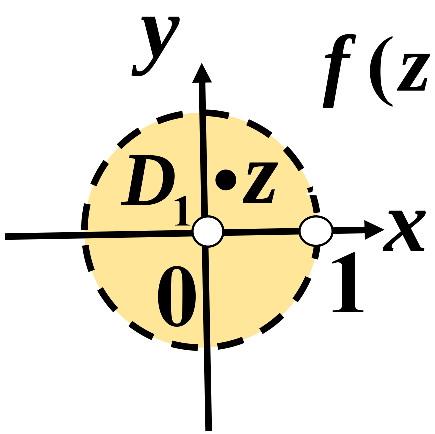
例 将$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$在圆环域 1) $0<|z|<1$; 2) $1<|z|<+\infty$;

3) $0<|z-1|<1$; 4) $1<|z-1|<+\infty$;

5) $|z-4|<3$; 6) $3<|z-4|<4$; 7) $4<|z-4|<+\infty$ 内展成级数.

解 $f(z)$只有两个奇点0和1. 1)在圆环域D_1: $0<|z|<1$内解析,

故由定理P84, $f(z)$在D_1内可展成形如$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$的洛朗级数.



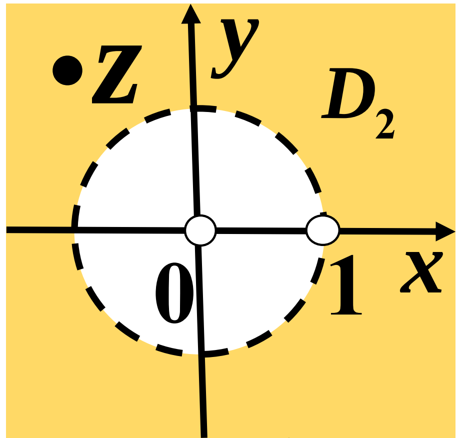
$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} z^n=\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n-1}$$

$$=\sum_{m=-1}^{+\infty} z^m,\quad 0<|z|<1.\begin{pmatrix} m=n-1, \\ n=0\text{时}, m=-1. \end{pmatrix}$$

例 将$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$在圆环域1) $0<|z|<1$; 2) $1<|z|<+\infty$; 内展成级数.

解 $f(z)$只有两个奇点0和1. 2) $f(z)$在圆环域$D_2: 1<|z|<+\infty$内解析,

故由定理P84, $f(z)$ 在D_2 内可展成形如 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ 的洛朗级数.

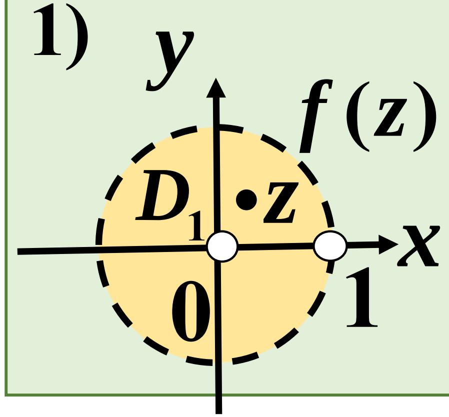


$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}\cdot\left(-\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+2}}=-\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{1}{z^m},\quad 1<|z|<+\infty.$$

$$\left(\begin{array}{l} m=n+2, \\ n=0\text{时}, \quad m=2. \end{array}\right)$$

1)



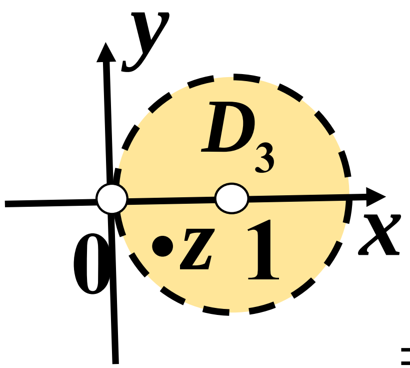
$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}z^{n-1}=\sum_{m=-1}^{+\infty}z^m,\quad 0<|z|<1.$$

$$(m=n-1,\ \ n=0\text{时},\ m=-1.)$$

$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$， 3) $0<|z-1|<1$； 4) $1<|z-1|<+\infty$；$\cdots$ 内展成级数.

解 $f(z)$只有两个奇点0和1. 3)在圆环域D_3： $0<|z-1|<1$内解析，

故由定理P84, $f(z)$在D_3 内可展成形如 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-1)^n$ 的洛朗级数.



$$f(z)=-\frac{1}{z-1}\bullet\frac{1}{z-1+1}=-\frac{1}{z-1}\bullet\frac{1}{1-\{-(z-1)\}}$$

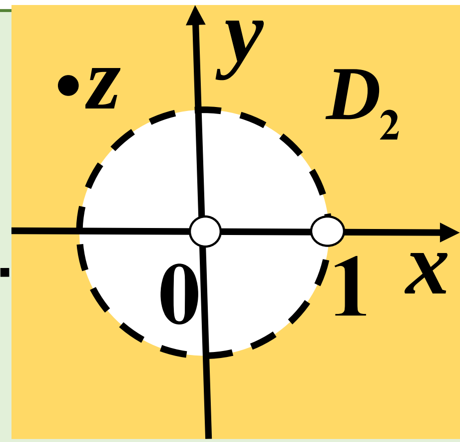
$$=\frac{1}{-(z-1)}\sum_{n=0}^{+\infty}\{-(z-1)\}^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}(z-1)^{n-1}$$

$$=\sum_{m=-1}^{+\infty}(-1)^m(z-1)^m,\quad 0<|z-1|<1.\quad \left(\begin{array}{l} m=n-1, \\ n=0\text{时}, m=-1. \end{array}\right)$$

2)

$$f(z)=\frac{1}{z}\bullet\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}\bullet\left(-\frac{1}{z}\right)\bullet\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

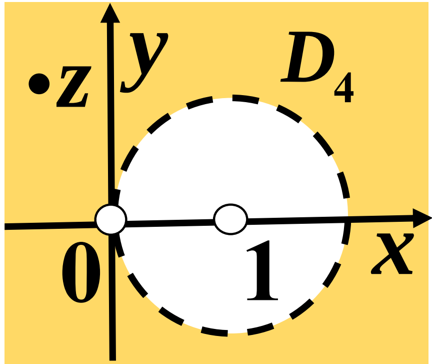
$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+2}}=-\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{1}{z^m},\quad 1<|z|<+\infty.\quad \left(\begin{array}{l} m=n+2, \\ n=0\text{时}，\ m=2. \end{array}\right)$$



$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$, 3) $0<|z-1|<1$; 4) $1<|z-1|<+\infty$;$\cdots$ 内展成级数.

解 $f(z)$只有两个奇点0和1. 4) 在圆环域D_4：$1<|z-1|<+\infty$内解析，

故由定理P84, $f(z)$在D_4 内可展成形如$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-1)^n$ 的洛朗级数.

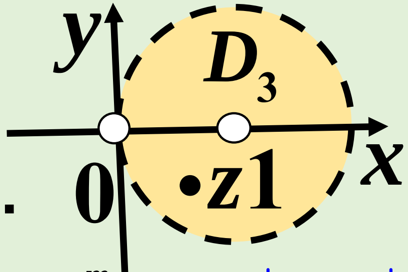


$$f(z)=-\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{(z-1)+1}=-\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-1}}$$

$$=-\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{z-1}\right)}=-\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{-\frac{1}{z-1}\right\}^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(z-1)^{n+2}}=\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{(z-1)^m},$$

$(m=n+2,\ \ n=0$时, $m=2,)$ $1<|z-1|<+\infty$.

3) $$f(z)=-\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z-1+1}=-\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\{-(z-1)\}}$$



$$=\frac{1}{-(z-1)}\sum_{n=0}^{+\infty}\{-(z-1)\}^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}(z-1)^{n-1}=\sum_{m=-1}^{+\infty}(-1)^m(z-1)^m,$$ $0<|z-1|<1$.

$(m=n-1,\ n=0$时, $m=-1.)$

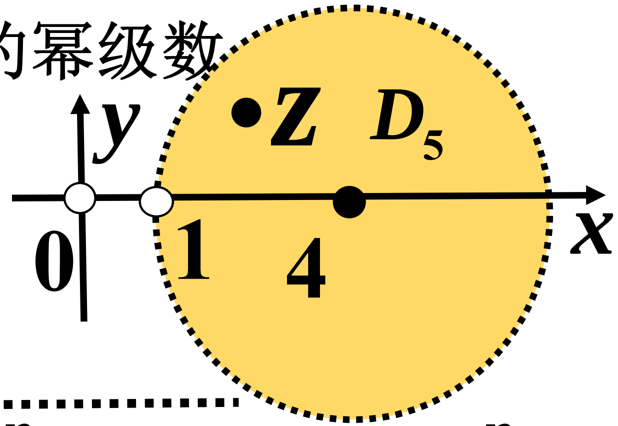
例 将$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ 在圆环域

5) $0\le|z-4|<3$; 6) $3<|z-4|<4$; 7) $4<|z-4|<+\infty$ 内展成级数.

解 $f(z)$只有两个奇点0和1. 5) $|0-4|=4$, $|1-4|=3$,

故 $f(z)$在 $D_5: 0\le|z-4|<3$ 内解析,

由定理1P78知, f 在D_5 内可展为形如$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(z-4)^n$ 的幂级数



$$f(z)=\underbrace{\frac{1}{1-z}+\frac{1}{z}}_{\text{分解}}=\frac{1}{(1-4)-(z-4)}+\frac{1}{4+(z-4)}$$

$$=\frac{1}{-3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-4}{-3}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z-4}{4}\right)}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{z-4}{3}\right)^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{z-4}{4}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(-\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}\right)(z-4)^n,\quad 0\le|z-4|<3.$$

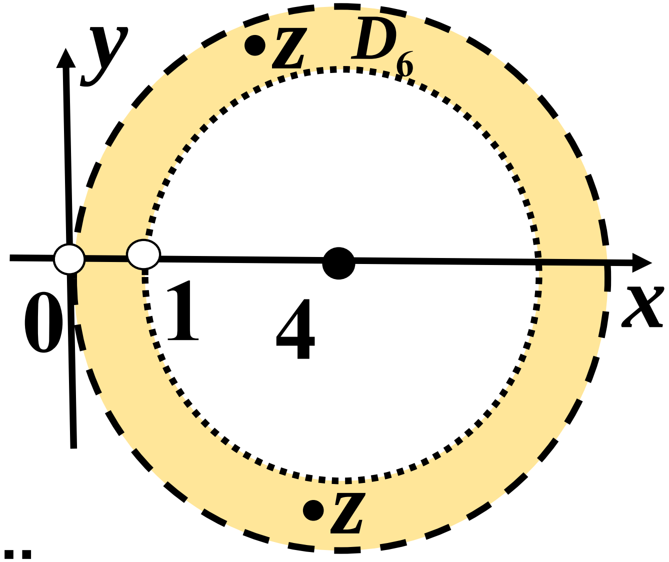
例 将$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$在圆环域 6) $3<|z-4|<4$; 内展成级数.

解 $f(z)$只有两个奇点0和1. 6) $|0-4|=4$, $|1-4|=3$,

故$f(z)$在 $D_6: 3<|z-4|<4$ 内解析,

由定理P84, 在D_6 内可展为形如 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-4)^n$ 的洛朗级数. 在D_6 内,

$$f(z)=\underbrace{\frac{1}{1-z}+\frac{1}{z}}_{\text{分解}}=\frac{1}{(1-4)-(z-4)}+\frac{1}{4+(z-4)}$$



$$=\frac{1}{-(z-4)}\cdot\frac{1}{\dfrac{3}{z-4}+1}\qquad+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-4}{4}}$$

$$=-\frac{1}{z-4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{3}{z-4}\right)^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{z-4}{4}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^n}{(z-4)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-4)^n}{4^{n+1}}$$

例 将$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$在圆环域6) $3<|z-4|<4$内展成洛朗级数.

$$f(z)=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{z}=\frac{1}{(1-4)-(z-4)}+\frac{1}{4+(z-4)}=-\frac{1}{z-4}\cdot\frac{1}{\frac{3}{z-4}+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-4}{4}}$$

$$=-\frac{1}{z-4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{3}{z-4}\right)^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{z-4}{4}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^n}{(z-4)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-4)^n}{4^{n+1}}\quad(\text{第一项，令}n+1=m)$$

$$=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m3^{m-1}}{(z-4)^m}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-4)^n}{4^{n+1}}\quad(\text{第一项，}m\Rightarrow-n)$$

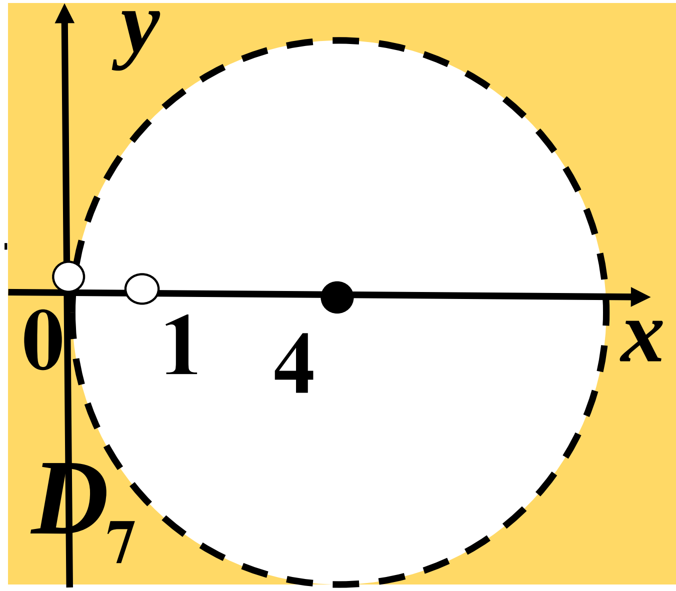
$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-4)^n}{(-1)^n3^{n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-4)^n}{4^{n+1}},\quad 3<|z-4|<4.$$

例 将$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$在圆环域 7) $4<|z-4|<+\infty$ 内展成级数.

解 $f(z)$只有两个奇点0和1. 7) $|0-4|=4$, $|1-4|=3$,

故 $f(z)$在 $D_7: 4<|z-4|<+\infty$ 内解析,

由定理P84, 在D_7 内可展为形如 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z-4)^n$ 的洛朗级数. 在D_7 内,



$$f(z)=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{z}=\frac{1}{(1-4)-(z-4)}+\frac{1}{4+(z-4)}$$

分解

$$=\frac{1}{-(z-4)}\cdot\frac{1}{\frac{3}{z-4}+1}+\frac{1}{z-4}\cdot\frac{1}{\frac{4}{z-4}+1}$$

$$=-\frac{1}{z-4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{3}{z-4}\right)^n+\frac{1}{z-4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{4}{z-4}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(-3^n+4^n)}{(z-4)^{n+1}}=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m-1}(-3^{m-1}+4^{m-1})}{(z-4)^m},\quad 4<|z-4|<+\infty.$$