复变函数 B 作业 6

2023 年 11 月 20 日

2. 将下列函数在 $z=0$ 处展开成幂级数，并指出其收敛半径:

(1) $\boldsymbol{\frac{1}{1-z}+e^z}$

解：$\dfrac{1}{1-z}+e^z=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1+\frac{1}{n!})z^n$

唯一奇点为 $z=1$, 则收敛半径为 $R=1$

(3) $\boldsymbol{\sin^2 z}$

解：$\sin^2 z=\frac{1-\cos 2z}{2}=\frac{1}{2}(1-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2z)^{2n}}{(2n)!})=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}$

收敛半径 $R=+\infty$

(7) $\boldsymbol{\int_0^z e^{z^2}dz}$

解：$\int_0^z e^{z^2}dz=\int_0^z\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{n!}dz=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\int_0^z z^{2n}dz=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!}$

收敛半径 $R=+\infty$

3. 将下列函数在指定点 z_0 展开成泰勒级数，并指出其收敛半径:

(3) $\boldsymbol{\frac{1}{z^2}, z_0=-1}$

解：令 $w=z+1$, 则 $\frac{1}{z^2}=\frac{1}{(1-w)^2}=(\frac{1}{1-w})'$

$\frac{1}{1-w}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}w^n$，$\therefore \frac{1}{z^2}=(\frac{1}{1-w})'=(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}w^n)'=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}n(z+1)^{n-1}$

收敛圆为 $|z+1|<1\therefore$ 收敛半径 $R=1$

(4) $\boldsymbol{\frac{1}{4-3z}, z_0=1+i}$

解：

$2^{n+2} - 3^{n+2}$

$$\frac{1}{4-3z}=\frac{1}{4-3(z-1-i)-3-3i}$$

$$=\frac{1}{1-3i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1-i}{\left(\frac{1-3i}{3}\right)}}$$

$$=\frac{1}{1-3i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-(1+i))^n}{\left(\frac{1-3i}{3}\right)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{(1-3i)^{n+1}}\cdot(z-(1+i))^n$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^n}{(1-3i)^{n+1}}}{\frac{3^{n+1}}{(1-3i)^{n+2}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\sqrt{1+9}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

6. 设 a 为实数，且 $|a| < 1$, 证明下列等式；

$$(2)\frac{a\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \sin n\theta$$

解：证明(2) $\frac{a\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} \overset{z=e^{i\theta}}{=\!=} \frac{a\cdot\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})}{1-a\cdot(z+\frac{1}{z})+a^2}$

$= \frac{1}{2i}\cdot\frac{az-\frac{a}{z}}{(1-az)(1-\frac{a}{z})}$

$= \frac{1}{2i}\left[\frac{az-1+1-\frac{a}{z}}{(1-az)(1-\frac{a}{z})}\right]$

$= \frac{1}{2i}\left[\frac{-1}{1-\frac{a}{z}} + \frac{1}{1-az}\right] = \frac{1}{2i}\left[-\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{a}{z})^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(az)^n\right]$

$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\cdot\left[-(\frac{1}{z})^n + (z)^n\right] = \frac{1}{2i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\cdot 2i\cdot\sin n\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \sin n\theta$

$$(3)\ln(1-2a\cos\theta+a^2) = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{n}\cos\theta$$

(3) $\ln(1-2a\cos\theta+a^2) \overset{z=e^{i\theta}}{=\!=} \ln[(1-az)(1-a\cdot\frac{1}{z})]$

$= \ln(1-az) + \ln(1-\frac{a}{z})$.

$= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n}(az)^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n}(\frac{a}{z})^n$

$= -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{n}\left[z^n + \frac{1}{z^n}\right] = -2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{n}\cos n\theta$

7. 证明对任意复数 z 有：$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}$

7. 解：证明：由于 $|e^z-1| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}-1$

$\therefore |e^z-1| \leq e^{|z|}-1$ 得证. (☆)

又 $\because e^{|z|}-1 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|z|^n}{n!} = |z|\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|z|^{n-1}}{n!}$

$= |z|\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{|z|^{n-1}}{(n-1)!}$

$\leq |z|\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|z|^{n-1}}{(n-1)!}$

$= |z|\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|z|^n}{n!}$

$= |z|\cdot e^{|z|}$

$\therefore e^{|z|}-1 \leq |z|\cdot e^{|z|}$ 得证. (☆☆)

综上：$|e^z-1| \leq e^{|z|}-1 \leq |z|e^{|z|}$

9. 设 z_0 是函数 $f(z)$ 的 m 级零点，又是 $g(z)$ 的 n 级零点 $(m \geq n)$，问下列函数在 z_0 处具有何种性质：

(1) $f(z)g(z)$

由题：$f(z)=(z-z_0)^m\cdot f_m(z)$ $g(z)=(z-z_0)^n\cdot g_n(z)$

$\therefore f(z)g(z)=(z-z_0)^{m+n}f_m(z)g_n(z)$

由于 $f_m(z_0)\neq 0$. $g_n(z_0)\neq 0 \Rightarrow f_m(z_0)\cdot g_n(z_0)\neq 0$

$\therefore z_0$ 是 $f(z)g(z)$ 的 $(m+n)$ 级零点。

10. 将下列函数在指定的区域内展开为洛朗级数：

(1)$\frac{1}{z^2(1-z)}$, 在区域 $0<|z|<1$ 内；(2)$z^2\exp\frac{1}{z}$, 在区域 $0<|z|<\infty$ 内;

解：(1) $\frac{1}{z^2(1-z)}=\frac{1}{z^2}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}z^k=\sum_{n=-2}^{+\infty}z^n$

(2) $z^2e^{\frac{1}{z}}=z^2\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot z^{-n}$

$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^{-n+2}=\sum_{n=-\infty}^{2}\frac{z^n}{(2-n)!}$

11. 设 $0<|a|<|b|$，把函数 $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ 按下列要求展开：

(1) 在 $0\leq|z|<|a|$ 上；

(1) $0\leq|z|<|a|$ 上：$f(z)=\left(\frac{1}{z-b}-\frac{1}{z-a}\right)\cdot\frac{1}{b-a}$

$=\left[\frac{1}{1-\frac{z}{b}}\left(-\frac{1}{b}\right)-\frac{1}{1-\frac{z}{a}}\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)\right]\frac{1}{b-a}$

$=\left[-\frac{1}{b}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^n+\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n\right]\frac{1}{b-a}$

$=\frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{a^{n+1}}-\frac{1}{b^{n+1}}\right)\cdot z^n$

(2) 在 $|a|<|z|<|b|$ 上；

$|a|<|z|<|b|$: $f(z)=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)$

$=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{z}}\cdot\frac{1}{z}-\frac{1}{1-\frac{z}{b}}\cdot\left(-\frac{1}{b}\right)\right)$

$=\frac{1}{a-b}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n\cdot\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^n\cdot\frac{1}{b}\right]$

$=\frac{1}{a-b}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}}\right]$

$=\frac{1}{a-b}\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^{n-1}}{z^n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}}\right]$

(3) 在 $|b| < |z| < +\infty$ 上；

$|b|<|z|<+\infty$；

$$f(z)=\frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)$$

$$=\frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{1-\frac{a}{z}}\cdot\frac{1}{z}-\frac{1}{1-\frac{b}{z}}\cdot\frac{1}{z}\right]$$

$$=\frac{1}{a-b}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b^n}{z^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{a-b}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{z^n}$$

(4) 在 $0 < |z-a| < |b-a|$ 上；

$0<|z-a|<|b-a|$ 上；

$$f(z)=\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{z-a-(b-a)}$$

$$=\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{b-a}}\cdot\frac{1}{a-b}$$

$$=\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{a-b}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^{n-1}}{(b-a)^{n+1}}$$

$$=-\sum_{n=-1}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+2}}$$

(5) 在 $|b-a| < |z-a| < +\infty$ 上；

$|b-a|<|z-a|<+\infty$ 上：

$$f(z)=\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{z-a-(b-a)}$$

$$=\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{b-a}{z-a}}\cdot\frac{1}{z-a}$$

$$=\frac{1}{(z-a)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{b-a}{z-a}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(b-a)^n}{(z-a)^{n+2}}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-2}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+2}}$$

(6) 在 $0 < |z-b| < |a-b|$ 上；

$0<|z-b|<|a-b|$：

$$f(z)=\frac{1}{z-b}\cdot\frac{1}{z-b-(a-b)}$$

$$=\frac{1}{z-b}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-b}{a-b}}\cdot\frac{1}{b-a}$$

$$=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-b)^{n-1}}{(a-b)^{n+1}}=-\sum_{n=-1}^{+\infty}\frac{(z-b)^n}{(a-b)^{n+2}}$$

(7) 在 $|a-b| < |z-b| < +\infty$ 上；

$|a-b| < |z-b| < +\infty$ 上:

$$f(z) = \frac{1}{z-b} \cdot \frac{1}{z-b-(a-b)}$$ Date.

$$= \frac{1}{z-b} \cdot \frac{1}{1-\frac{a-b}{z-b}} \cdot \frac{1}{z-b}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a-b)^n}{(z-b)^{n+2}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{(z-b)^n}{(a-b)^{n+2}}$$