第五章 留数及其应用

留数是复变函数又一重要概念，有着非常广泛的应用.

5.1 留数定理

一 、留数的定义和计算

设 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则$\exists\delta>0$,使得

$f(z)$在K：$0<|z-a|<\delta$解析，$f(z)$在K内可展为洛朗级数：

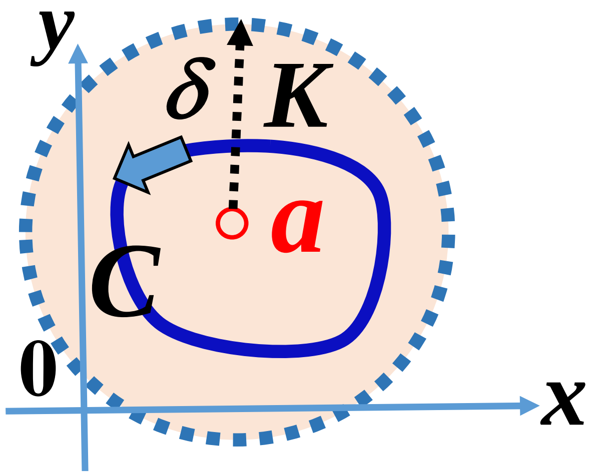
$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n,\qquad a_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ n\in\mathbb{Z},$$

C 是K内任一条围绕点a的正向(逆时针)简单闭路. (定理(P 84))

当$n=-1$时, $a_{-1}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^0}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$ $\left(\frac{1}{z-a}\text{的系数}\right)$

故$\int_C f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\underline{\ 2\pi\mathrm{i}a_{-1}\ }$ (或利用P49例2知对f积分后仅留一项).

称a_{-1}为$f(z)$在a点的留数，记作$\mathrm{Res}[f(z),a]$.



设 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则$\exists\delta>0$,使得

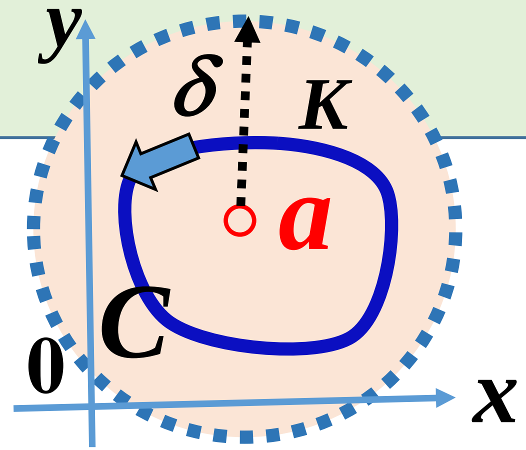
$f(z)$在K：$0<|z-a|<\delta$解析，$f(z)$在K内可展为洛朗级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n,\quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta,\quad n\in\mathbb{Z},$$

C 是K内任一条围绕点a的正向(逆时针)简单闭路. (定理(P 84))

当$n=-1$时, $a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^0}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)d\zeta.$ $\left(\frac{1}{z-a}\text{的系数}\right)$

故$\int_C f(\zeta)d\zeta=2\pi i a_{-1}$.



称a_{-1}为$f(z)$在a点的留数, 记作$\text{Res}[f(z),a]$.

$$\text{Res}[f(z),a]=a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)d\zeta,$$ ★★★★★

它是$f(z)$在a的充分小去心邻域内洛朗展式中$\frac{1}{z-a}$的系数.

故$\int_C f(\zeta)d\zeta=2\pi i\,\text{Res}[f(z),a]$,

C：在a的使$f(z)$解析的去心邻域K内任一条围绕 a 的正向闭路.

$f(z)$在a点的留数：$\mathrm{Res}[f(z),a]=a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\,d\zeta$,

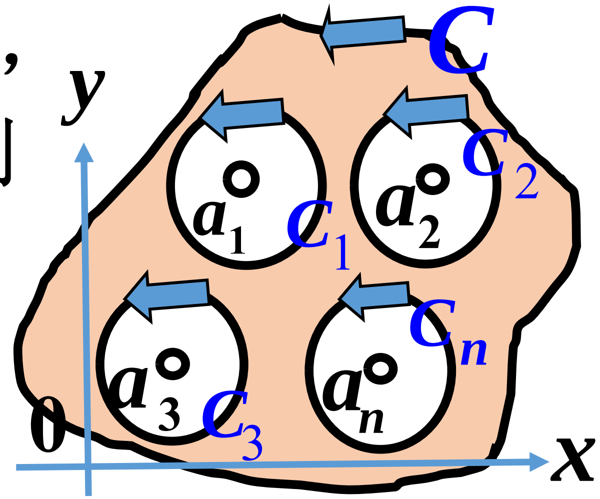
它是$f(z)$在a的充分小去心邻域内洛朗展式中$\frac{1}{z-a}$的系数.

故$\int_C f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),a]$,

C：在a的使$f(z)$解析的去心邻域K内任一条围绕 a 的正向闭路.

留数定理(P103定理1): 设$f(z)$在闭路C上解析，在C内部除n个孤立奇点$a_1,a_2,\cdots,a_n$外解析, 则

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),a_k].$$



证明: $\forall k=1,2,\cdots n$, 以a_k为圆心作充分小的圆周C_k,

使得$C_1,C_2,\cdots,C_n$都在C 的内部, 且它们彼此完全分离(如图).

由多连通区域柯西积分定理和留数定义得

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),a_k].\#$$

留数的常用计算方法(设$a\neq\infty$) ★★★★★

(1)(由留数定义) 设$f(z)$在D：$0<|z-a|<\delta(\delta>0$充分小$)$内的洛朗展式为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n,\text{ 则 }\mathrm{Res}[f(z),a]=a_{-1},\ \left(a_{-1}:\ \frac{1}{z-a}\text{的系数}\right).$$

对可去奇点，本性奇点，极点都适用.

例 求$f(z)=\mathrm{e}^{\frac{z}{1-z}}$在它的孤立奇点处的留数.

解 $z=1$是$f(z)=\mathrm{e}^{\frac{z}{1-z}}$唯一奇点，孤立奇点，在$|z-1|>0$内，

$$f(z)=\mathrm{e}^{-\frac{z-1+1}{z-1}}=\mathrm{e}^{-1-\frac{1}{z-1}}=\mathrm{e}^{-1}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{z-1}}=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n}.$$

(1是$f(z)$的本性奇点)

故$\mathrm{Res}[f(z),1]=a_{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot\frac{-1}{1!}=-\frac{1}{\mathrm{e}}.$

留数定理：设$f(z)$在闭路C上解析，在C的内部区域除去n个孤立奇点$a_1,\cdots,a_n$外也解析，则$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),a_k]$.

例 求 $f(z)=e^{\frac{z}{1-z}}$ 在它的孤立奇点处的留数.

解 $z=1$ 是 $f(z)=e^{\frac{z}{1-z}}$ 唯一奇点，孤立奇点，在 $|z-1|>0$ 内，

$$f(z)=e^{\frac{z-1+1}{-(z-1)}}=e^{-1-\frac{1}{z-1}}=e^{-1}\cdot e^{-\frac{1}{z-1}}=\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z-1)^n}.$$

(1是 $f(z)$ 的本性奇点)

故 $\mathrm{Res}[f(z),1]=a_{-1}=\frac{1}{e}\cdot\frac{-1}{1!}=-\frac{1}{e}.$

由留数定理得

$$\int_{|z|=2}e^{\frac{z}{1-z}}\,dz=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),1]=-\frac{2\pi}{e}i.$$

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}}e^{\frac{z}{1-z}}\,dz=0.$$

留数定理：设 $f(z)$ 在闭路 C 上解析，在 C 的内部区域除去 n 个孤立奇点 $a_1,\cdots,a_n$ 外也解析，则 $\int_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),a_k].$

(2)(定理2 P104) 设a是$f(z)$的m级极点，则 ★★★★★

$$\operatorname{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-a)^m f(z)\}.$$

(注意：只适用于a是$f(z)$的极点的情形, 本性奇点不适用)

证明：设a是$f(z)$的m级极点, 则$\exists\delta>0$,使得在U: $0<|z-a|<\delta$内，

$f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$， $\varphi(z)$在U内解析, $\varphi(a)\neq 0$. (P93定理3之1))

由P78定理1,

在$|z-a|<\delta$内, $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n(z-a)^n$， $b_n=\dfrac{\varphi^{(n)}(a)}{n!}$， $n\in\mathbb{N}$, 则

$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n(z-a)^{n-m}$， 令$n-m=-1$, 得$n=m-1$,由留数定义得

$$\operatorname{Res}[f(z),a]=b_{m-1}=\frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-a)^m f(z)\}.\#$$

$$\boxed{\varphi(z)=(z-a)^m f(z)}$$

(2)(定理2 P104) 设a 是$f(z)$ 的m 级极点，则 ★★★★★

$$\operatorname{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left\{(z-a)^m f(z)\right\}.$$

若a是$f(z)$ 的1级极点, 则 $\operatorname{Res}[f(z),a]=\lim\limits_{z\to a}\{(z-a)f(z)\}$. $(m=1)$

(3) 设 $f(z)$在a 点解析, 则$\operatorname{Res}[f(z),a]=0$.

例1 求$f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}+\dfrac{e^z}{z-1}$在它的孤立奇点处的留数.

解 由分母等于0解得$f(z)$有且只有两个孤立奇点 $z_1=-1$, $z_2=1$.

-1是 3 级极点，1是1级极点. 故由定理2得,

$$\operatorname{Res}[f(z),-1]=\operatorname{Res}\left[\frac{\sin 2z}{(z+1)^3},-1\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z-1},-1\right]$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}\left\{(z+1)^3\cdot\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}\right\}+0=\lim_{z\to -1}(-2\sin 2z)=2\sin 2.$$

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\{(z-1)f(z)\}=\lim_{z\to 1}\left\{\frac{(z-1)\sin 2z}{(z+1)^3}+e^z\right\}=e.$$

(4)(P105推论) 设 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都在a 点解析,

$P(a)\neq 0,\quad Q(a)=0,\ Q'(a)\neq 0,$ 则 a是$\dfrac{P(z)}{Q(z)}$的1级极点

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},\ a\right]=\frac{P(a)}{\lim\limits_{z\to a}\dfrac{\mathrm{d}Q(z)}{\mathrm{d}z}}.$$

证明: 因a是$Q(z)$的1级零点, $P(a)\neq 0$, 故a是$\dfrac{P(z)}{Q(z)}$的1级极点,

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},a\right]=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$=\lim_{z\to a}\frac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(a)}{z-a}}=\frac{P(a)}{\lim\limits_{z\to a}\dfrac{\mathrm{d}Q(z)}{\mathrm{d}z}}.\#$$

$Q(a)=0$

(4)(P105推论) 设 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都在a 点解析，$P(a)\neq 0$,

$Q(a)=0$, $Q'(a)\neq 0$, 则 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{P(z)}{Q(z)},a\right]=\dfrac{P(a)}{\lim\limits_{z\to a}\dfrac{dQ(z)}{dz}}$. a是$\dfrac{P(z)}{Q(z)}$的1级极点。

例 求$f(z)=\dfrac{z^2}{e^z+1}$在它的孤立奇点处的留数.

解 由$e^z+1=0$, 得$z_k=(\mathrm{Ln}(-1))_k=i\{\arg(-1)+2k\pi\}=i(2k+1)\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

$\forall k\in\mathbb{Z}$, e^z+1, z^2 在点z_k 解析，$z_k^2=-(2k+1)^2\pi^2\neq 0$,

$e^{z_k}+1=0$, $(e^z+1)'\big|_{z=z_k}=e^{z_k}=-1\neq 0$, ($z_k$是$e^z+1$的1级零点)

z_k都是 $f(z)$的1级极点.

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{e^z+1},z_k\right]=\frac{z_k^2}{\dfrac{d}{dz}(e^z+1)\Big|_{z=z_k}}=\frac{z_k^2}{e^{z_k}}=(2k+1)^2\pi^2.$$

类似地可求$\dfrac{z}{\cos(z+a)}$, $\dfrac{z^2+1}{\sin z}$, $\dfrac{z^{n-1}}{z^n+a}$, $\dfrac{z^n}{z^n+a}$, $\operatorname{tg}z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$等孤立奇点处的留数.

例 $\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{1}{z^4-1}\mathrm{d}z.$

解 记 $g(z)=\dfrac{1}{z^4-1}$，由$z^4-1=0$解得$f(z)$的所有(非∞)奇点为

$$z_k=\exp\left(\mathrm{i}\frac{\arg 1+2k\pi}{4}\right)=\exp\left(\frac{k\pi}{2}\mathrm{i}\right),\quad k=0,1,2,3.$$

$|z_k|=1$，故z_k都在$|z|=3$ 内部，且都是1级极点. 故由留数定理得

$$\int_{|z|=3}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=0}^{3}\mathrm{Res}\left[f(z),z_k\right]=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^4-1)\Big|_{z=z_k}}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{4z_k^3}=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=0}^{3}\frac{z_k}{4z_k^4}=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=0}^{3}\frac{z_k}{4}$$

$$=\frac{\pi}{2}\mathrm{i}(1+\mathrm{i}-1-\mathrm{i})=0.$$

例2 求$\int_C \operatorname{tg}\pi z\,dz$,其中$C$分别是$|z|=\frac{1}{3}$和 $|z|=n$, n为正整数.

解 第1步 因$\operatorname{tg}\pi z=\frac{\sin\pi z}{\cos\pi z}$, 由$\cos\pi z=0$解得奇点

$z_k=k+\frac{1}{2}$, $(k\in\mathbb{Z})$, 是$\operatorname{tg}\pi z$的(除∞外)所有孤立奇点, 都是1级极点.

$\forall k\in\mathbb{Z}$, $\cos\pi z$, $\sin\pi z$ 在点z_k解析, $\sin\pi z_k=\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi=(-1)^k\neq 0$,

$\cos\pi z_k=0$, $(\cos\pi z)'\big|_{z=z_k}=-\pi\sin\pi z_k=(-1)^{k+1}\pi\neq 0$.

$$\operatorname{Res}[\operatorname{tg}\pi z,z_k]=\frac{\sin\pi z_k}{(\cos\pi z)'\big|_{z=z_k}}=\frac{\sin\pi z_k}{-\pi\sin\pi z_k}=-\frac{1}{\pi}.$$

第2步 找出积分路径闭路内部的所有奇点，利用留数定理求积.

(1) $|z_k|\geq\frac{1}{2}$, $\forall k\in\mathbb{Z}$. 故所有的z_k都不在$|z|=\frac{1}{3}$内,

$\operatorname{tg}\pi z$在$|z|=\frac{1}{3}$及其内部解析, 故 $\int_{|z|=\frac{1}{3}}\operatorname{tg}\pi z\,dz=0.$

(2)当C是$|z|=n,\ (n\in\mathbb{Z}^+)$时, C 内有$\operatorname{tg}\pi z$ 奇点: $z_k=k+\frac{1}{2},\quad -n\le k\le n-1.$

即$k=-n,-(n-1),\cdots,-1,0,1,2,\cdots,n-1$. 故由留数定理知,

$$\int_{|z|=n}\operatorname{tg}\pi z\,\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=-n}^{n-1}\operatorname{Res}\left[\operatorname{tg}\pi z,\ z_k\right]=\ 2\pi i\cdot(2n)\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\right)=-4ni.$$

例2 求$\int_C\operatorname{tg}\pi z\,\mathrm{d}z$,其中$C$分别是$|z|=\frac{1}{3}$和 $|z|=n$, n为正整数.

解 第1步 因$\operatorname{tg}\pi z=\dfrac{\sin\pi z}{\cos\pi z}$, 由$\cos\pi z=0$解得奇点

$z_k=k+\frac{1}{2},\ (k\in\mathbb{Z})$, 是$\operatorname{tg}\pi z$ 的(除∞外)所有孤立奇点, 都是1级极点.

$$\operatorname{Res}\left[\operatorname{tg}\pi z,z_k\right]=\frac{\sin\pi z_k}{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\cos\pi z)\right|_{z=z_k}}=\frac{\sin\pi z_k}{-\pi\sin\pi z_k}=-\frac{1}{\pi}.$$

第2步 找出积分路径闭路内部的所有奇点, 利用留数定理求积.

(1) $|z_k|\ge\frac{1}{2},\ \forall k\in\mathbb{Z}$. 故所有的$z_k$都不在$|z|=\frac{1}{3}$内,

$\operatorname{tg}\pi z$在$|z|=\frac{1}{3}$及其内部解析, 故 $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{3}}\operatorname{tg}\pi z\,\mathrm{d}z=\ 0.$

例3 求$\int_C z^3\sin^5\frac{1}{z}\,dz$, C: $|z|=1$.

解 先求C内$z^3\sin^5\frac{1}{z}$所有奇点及其留数. $z^3\sin^5\frac{1}{z}$有唯一的奇点$z=0$.

奇点$z=0$在$C:|z|=1$内. 在$|z|>0$内,

$$z^3\sin^5\frac{1}{z}=z^3\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}+\cdots\right)^5=z^3\left\{\frac{1}{z^5}+\sum_{k=7}^{+\infty}\frac{b_k}{z^k}\right\}=\frac{1}{z^2}+\sum_{k=7}^{+\infty}\frac{b_k}{z^{k-3}},$$

$z=0$是$z^3\sin^5\frac{1}{z}$的本性奇点. 洛朗展式中无$\frac{1}{z}$项, 故$a_{-1}=0$.

$$\text{故}\int_{|z|=1}z^3\sin^5\frac{1}{z}\,dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[z^3\sin^5\frac{1}{z},0\right]$$

$$=2\pi i a_{-1}=0.$$

本性奇点的留数只能用定义求(定理2P104无法应用), 即等于去心邻域内洛朗展式中负1次幂项系数a_{-1}.

例 求$\int_C \frac{z\sin z}{(1-e^z)^3}dz$, $C: |z|=1$.

解 第1步 由$1-e^z=0$解得全部有限奇点$z_k=(\mathrm{Ln}1)_k=\mathrm{i}2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$,

都是孤立奇点. 只有$z_0=0$在$|z|=1$内. 先求奇点0 类型. 在$0<|z|<1$内,

$$f(z)=\frac{z\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5+\cdots\right)}{\left(-z-\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}-\cdots\right)^3}=\frac{z^2\left(1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4+\cdots\right)}{-z^3\left(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots\right)^3}=\frac{\varphi(z)}{z},$$

$$\varphi(z)=\frac{1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4+\cdots}{-\left(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots\right)^3}.$$

$\varphi(z)$在$z=0$解析, $\varphi(0)=-1\neq 0$.

故$z=0$是$f(z)=\frac{\varphi(z)}{z}$的1级极点.

故 $\int_C \frac{z\sin z}{(1-e^z)^3}dz=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}[f(z),0]=2\pi\mathrm{i}\lim\limits_{z\to 0} z f(z)$

$$=2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to 0}\varphi(z)=2\pi\mathrm{i}\varphi(0)=-2\pi\mathrm{i}.$$

例 求$\oint_C \frac{dz}{(z-1)^2(z-i)(z-5)^2}$, $C: x^{\frac{2}{5}}+y^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{2}{5}}$, $x,y\in\mathbb{R}$.

(实值函数)

解 记$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z-i)(z-5)^2}$, 全体有限奇点为$z_1=1$, $z_2=i$, $z_3=5$,

$z_1=1$, $z_3=5$ 都是 2 级极点, $z_2=i$是 1级极点.

下面分析它们是否在C 的内部.

对$z_1=1=1+0i$, $1^{\frac{2}{5}}+0^{\frac{2}{5}}<4^{\frac{2}{5}}$, 故$z_1=1$在$C$ 的内部.

同理可得$z_2=i$在C 的内部.

$z_3=5=5+0i$, $5^{\frac{2}{5}}+0^{\frac{2}{5}}>4^{\frac{2}{5}}$, 故$z_3=5$不在$C$ 的内部.

由留数定理得$\oint_C f(z)dz=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),i]\}$.

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left\{(z-1)^2f(z)\right\}=\lim_{z\to1}\left\{\frac{1}{(z-i)(z-5)^2}\right\}'$$

例 求 $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z-1)^2(z-i)(z-5)^2}$, $C: x^{\frac{2}{5}}+y^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{2}{5}}$, $x, y\in\mathbb{R}$.

记 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2(z-i)(z-5)^2}$

由留数定理得 $\displaystyle\int_C f(z)dz=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z), 1]+\mathrm{Res}[f(z), i]\}$.

$$\mathrm{Res}[f(z), 1]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\{(z-1)^2 f(z)\}=\lim_{z\to 1}\left\{\frac{1}{(z-i)(z-5)^2}\right\}'$$

$$=-\lim_{z\to 1}\frac{\{(z-i)(z-5)^2\}'}{(z-i)^2(z-5)^4}=-\lim_{z\to 1}\frac{1\cdot(z-5)^2+(z-5)\cdot 2(z-i)}{(z-i)^2(z-5)^4}=-\lim_{z\to 1}\frac{3z-5-2i}{(z-i)^2(z-5)^3}$$

$$=-\frac{-2-2i}{(1-i)^2(1-5)^3}=\frac{1-i}{64}.$$

$$\mathrm{Res}[f(z),i]=\lim_{z\to i}\{(z-i)f(z)\}=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z-5)^2}$$

$$=\frac{1}{(i-1)^2(i-5)^2}=\frac{-5+12i}{676}.$$

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),i]\}=2\pi i\left(\frac{1-i}{64}+\frac{-5+12i}{676}\right)=\frac{-23\pi+89\pi i}{5408}.$$

例 求$\oint_C \frac{1}{z^3\sin z^2}\mathrm{d}z$, $C: x^2+y^2=x+\frac{3}{4}$, $x,y\in\mathbb{R}$.

解 记$f(z)=\frac{1}{z^3\sin z^2}$, 全体有限奇点为 $z_0=0$,

$$z_{n,1}=\left(\sqrt{n\pi}\right),\ z_{n,2}=-\left(\sqrt{n\pi}\right),\ z_{n,3}=\left(\sqrt{n\pi}\right)\mathrm{i},\ z_{n,4}=-\left(\sqrt{n\pi}\right)\mathrm{i},\ n\in\mathbb{Z}.$$

下面分析它们是否在C 的内部.

$$C: \frac{3}{4}=x^2+y^2-x=z\bar{z}-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}\bar{z}=\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(\bar{z}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}=\left|z-\frac{1}{2}\right|^2-\frac{1}{4},$$

故$C: \left|z-\frac{1}{2}\right|=1$. $\left|0-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$, 故0在$C$内.

$\left|z_{n,k}-\frac{1}{2}\right|\geq\left|\left(\sqrt{\pi}\right)-\frac{1}{2}\right|>1$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, $k=1,2,3,4$. 故$z_{n,k}$都不在C内.

故$\oint_C \frac{1}{z^3\sin z^2}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[f(z),0\right]$.

$$f(z)=\frac{1}{z^3\sin z^2}=\frac{1}{z^3\left\{z^2-\frac{(z^2)^3}{3!}+\cdots\right\}}=\frac{1}{z^3\left(z^2-\frac{z^6}{3!}+\cdots\right)}=\frac{1}{z^5\left(1-\frac{z^4}{3!}+\cdots\right)}.$$

0是$f(z)$的5级极点. $0<|z|<{}^{\exists}\delta$, $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{z^5}$,

$\varphi(z)=\dfrac{1}{1-\frac{z^4}{3!}+\cdots}$在$z=0$解析, $\varphi(0)=1\neq 0$. $0<|z|<{}^{\exists}\rho\leq\delta$, $\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_nz^n$,

$$f(z)=\frac{1}{z^5\left(1-\frac{z^4}{3!}+\cdots\right)}=\frac{\varphi(z)}{z^5}=\frac{1}{z^5}\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n.$$ 故$\mathrm{Res}[f(z),0]=b_4$.

$$1=\left(1-\frac{z^4}{3!}+\cdots\right)\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n=b_0+b_1z+b_2z^2+b_3z^3+\left(b_4-\frac{1}{3!}b_0\right)z^4+\cdots.$$

比较系数得$b_0=1$, $b_1=b_2=b_3=b_4-\frac{1}{3!}b_0=0$. 故$b_4=\dfrac{1}{6}$.

$$故\oint_C\frac{1}{z^3\sin z^2}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),0]=2\pi\mathrm{i}b_4=\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}.$$

留数的计算方法(设$a\neq\infty$是$f(z)$孤立奇点) ★★★★★

(1) 设$f(z)$在D：$0<|z-a|<\delta(\delta>0$充分小)内的洛朗展式为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n,$$ 则 $\mathrm{Res}[f(z),a]=a_{-1}$, $\left(a_{-1}\text{: } \frac{1}{z-a}\text{的系数}\right)$.

(对本性奇点和易求洛朗展式的极点都适用)

(2) 设a 是$f(z)$ 的m 级极点, 则

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\{(z-a)^m f(z)\}.$$

(只适用于极点)

特别是, 若a是$f(z)$ 的1级极点, 则$\mathrm{Res}[f(z),a]=\lim_{z\to a}\{(z-a)f(z)\}$.

(3) 设$P(z)$和$Q(z)$都在a点解析, $P(a)\neq 0$,

$Q(a)=0$, $Q'(a)\neq 0$, 则 $$\mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},a\right]=\frac{P(a)}{\lim\limits_{z\to a}\frac{\mathrm{d}Q(z)}{\mathrm{d}z}}.$$

熟记此页.

作业

P131 1(2)(4)(8)

P132 3(2)(3)(5)

附加作业：

计算(1) $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{z^{2022}-1}{z^{2023}-1}\,\mathrm{d}z$

(2) $\displaystyle\oint_{|z|=3}e^{\frac{2023}{z}}\,\mathrm{d}z$

例 $\oint_{|z|=3}\frac{z^4}{z^4-1}\,\mathrm{d}z.$

解 记 $f(z)=\frac{z^4}{z^4-1}$，　由$z^4-1=0$解得$f(z)$的所有(非∞)奇点为

$\boxed{\arg 1=0}$

$$z_k=\left(\sqrt[4]{1}\right)_k=\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\arg 1+2k\pi}{4}\right)=\exp\left(\frac{k\pi}{2}\mathrm{i}\right),\quad k=0,1,2,3.$$

$|z_k|=1$，　故z_k都在$|z|=3$ 内部，　都是1级极点.

$$\oint_{|z|=3}f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=0}^{3}\mathrm{Res}\left[f(z),z_k\right]=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=0}^{3}\frac{z^4\big|_{z=z_k}}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^4-1)\Big|_{z=z_k}}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=0}^{3}\frac{z_k^4}{4z_k^3}=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=0}^{3}\frac{z_k}{4}=\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}\sum_{k=0}^{3}z_k$$

$$=\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}(1+\mathrm{i}-1-\mathrm{i})=0.$$

(2)(定理2 P104) 设a 是$f(z)$ 的m 级极点，则

$$\operatorname{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\{(z-a)^m f(z)\}.$$

(只适用于a是 $f(z)$ 的极点的情形，本性奇点不适用)

证法二：设a是$f(z)$ 的m 级极点, 则$\exists\delta>0$,使得在U: $0<|z-a|<\delta$ 内，

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},\quad \varphi(z)\text{在}U\text{内解析},\ \varphi(a)\neq 0.$$ (P93定理2之1))

取C 是U内任一条围绕 a 的正向简单闭路,

$$\operatorname{Res}[f(z),a]\overset{\text{留数定义}}{=}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}\mathrm{d}z$$

3.3柯西积分公式

$$=\frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\{(z-a)^m f(z)\}.$$

$$\varphi(z)=(z-a)^m f(z)$$

(2)(定理2 P104) 设a 是$f(z)$ 的m 级极点，则

$$\operatorname{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\{(z-a)^m f(z)\}.$$

推论 若a是$f(z)$ 的1级极点$(m=1)$, 则

$$\operatorname{Res}[f(z),a]=\lim_{z\to a}\{(z-a)f(z)\}.$$

例1 求$f(z)=\dfrac{1}{z^n-z^{n-1}}$在它的孤立奇点处的留数, n 为大于1 的正整数.

解 $n\ge 2$, $f(z)=\dfrac{1}{z^{n-1}(z-1)}$ 有且只有两个孤立奇点 0, 1.

0是$f(z)$的$n-1$ 级极点，1是$f(z)$的1级极点. 故由定理2 P104知,

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\{(z-1)f(z)\}=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z^{n-1}}=1.$$

设a 是$f(z)$ 的m 级极点, 则 $\operatorname{Res}[f(z),a]=\dfrac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to a}\dfrac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\{(z-a)^m f(z)\}$.

推论 若a是$f(z)$ 的1级极点, 则 $\operatorname{Res}[f(z),a]=\lim\limits_{z\to a}\{(z-a)f(z)\}$.

例 求$f(z)=\dfrac{1}{z^n-z^{n-1}}$在它的孤立奇点处的留数, n 为大于1 的正整数.

解 $n\geq 2$, $f(z)=\dfrac{1}{z^{n-1}(z-1)}$ 有两个孤立奇点 0, 1.

0是$f(z)$的 $n-1$ 级极点， 1是$f(z)$的1级极点.

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{(n-2)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}z^{n-2}}\left\{z^{n-1}f(z)\right\}\quad (a=0, m=n-1\geq 1)$$

$$=\frac{1}{(n-2)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}z^{n-2}}\left\{\frac{1}{z-1}\right\}=\frac{1}{\cancel{(n-2)!}}\lim_{z\to 0}\frac{(-1)^{n-2}\cancel{(n-2)!}}{(z-1)^{n-1}}=-1.$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\frac{1}{z-1}\right\}=\frac{-1}{(z-1)^2},\quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left\{\frac{1}{z-1}\right\}=\frac{(-1)(-2)}{(z-1)^3},\cdots,\quad \frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}z^{n-2}}\left\{\frac{1}{z-1}\right\}=\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(z-1)^{n-1}}\right)$$

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\{(z-1)f(z)\}=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z^{n-1}}=1.$$

例 求$\int_C \frac{1}{z^n - z^{n-1}} dz$, n为大于1 的正整数， $C: x^2 - 2x + y^2 = 3.$

解 $C: 3 = z\bar{z} - (z+\bar{z}) = (z-1)(\bar{z}-1) - 1 = |z-1|^2 - 1.$ $\boxed{\text{故}C: |z-1| = 2.}$

$n \geq 2$, $f(z) = \frac{1}{z^n - z^{n-1}} = \frac{1}{z^{n-1}(z-1)}$有两个孤立奇点 0, 1, 都在$C$ 内.

0是$f(z)$的$n-1$ 级极点， 1是$f(z)$的1级极点.

$$\text{Res}[f(z), 0] = \frac{1}{(n-2)!} \lim_{z \to 0} \frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}} \left\{ z^{n-1} f(z) \right\} \quad (a = 0, m = n-1 \geq 1)$$

$$= \frac{1}{(n-2)!} \lim_{z \to 0} \frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}} \left\{ \frac{1}{z-1} \right\} = \frac{1}{\cancel{(n-2)!}} \lim_{z \to 0} \frac{(-1)^{n-2} \cancel{(n-2)!}}{(z-1)^{n-1}} = -1.$$

$$\text{Res}[f(z), 1] = \lim_{z \to 1} \left\{ (z-1) f(z) \right\} = \lim_{z \to 1} \frac{1}{z^{n-1}} = 1.$$

由留数定理, $\int_C \frac{1}{z^n - z^{n-1}} dz = 2\pi i \left\{ \text{Res}[f(z), 0] + \text{Res}[f(z), 1] \right\}$

$$= 2\pi i(-1+1) = 0.$$

例1 求$f(z)=\dfrac{1}{z^n-z^{n-1}}$在它的孤立奇点处的留数, n 为大于1 的正整数.

解 $n\geq 2$, $f(z)=\dfrac{1}{z^{n-1}(z-1)}$ 有两个孤立奇点 0, 1. $\begin{cases} 0\text{是 } n-1 \text{ 级极点}, \\ 1\text{是} f(z)\text{的}1\text{级极点}. \end{cases}$

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\{(z-1)f(z)\}=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z^{n-1}}=1.$$

也可用洛朗展式求$\operatorname{Res}[f(z),0]$. $f(z)$在 $0<|z|<1$ 内解析,

$$f(z)=\frac{1}{z^{n-1}}\cdot\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z^{n-1}}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z^{n-1}}\sum_{m=0}^{+\infty}z^m=-\sum_{m=0}^{+\infty}z^{m-n+1}.$$

令$m-n+1=-1$, 得$m=n-2\geq 0$, 故有负一次幂项 ,故 $a_{-1}=-1$,

由留数定义得, $\operatorname{Res}[f(z),0]=a_{-1}=-1$.