5.2 定积分的计算 (留数定理的应用)

5.2.1 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$型定积分 $\left(或 \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \text{ 型积分}\right)$

$R(\cos\theta,\sin\theta)$表示关于$\cos\theta,\sin\theta$ 的有理函数，

即其分子分母都是或可化为$\cos\theta,\sin\theta$ 的多项式，θ是实数.

如$\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{1+2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$, $\int_0^{2\pi}\dfrac{\cos2\theta}{7+3\cos\theta}\mathrm{d}\theta$, $\cdots$

5.2.1 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$型定积分$\left(或\ \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\ 型积分\right)$

$R(\cos\theta,\sin\theta)$表示关于$\cos\theta,\sin\theta$ 的有理函数，θ是实数.

积分方法：

(1)令$z=e^{i\theta}$，则$dz=ie^{i\theta}d\theta=iz\,d\theta$，故$d\theta=\frac{dz}{iz}$. (P107)

(2) $\cos\theta=\operatorname{Re}z=\frac{1}{2}(z+\bar{z})=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$， ⇐ $\boxed{\bar{z}=e^{-i\theta}=\frac{1}{z}}$

$\sin\theta=\operatorname{Im}z=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$. (P108)

★★★★★ 背熟

(3) $z=e^{i\theta}$，$0\le\theta\le2\pi$(或$-\pi\le\theta\le\pi$)表示$|z|=1$(逆时针).

(4) 因此

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta=\int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{iz}\,dz.$$

用留数定理求积分

例1 计算泊松积分$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}$, $0<p<1$.

解 令$z=e^{i\theta},0\le\theta\le 2\pi$, 则$\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz}$, $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $|z|=1$,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}=\int_{|z|=1}\frac{1}{1-p(z+\frac{1}{z})+p^2}\cdot\frac{1}{iz}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z-p(z^2+1)+p^2z}\mathrm{d}z=-i\int_{|z|=1}\frac{1}{-pz^2+(1+p^2)z-p}\mathrm{d}z。$$

$f(z)\triangleq\frac{1}{-pz^2+(1+p^2)z-p}=\frac{1}{(-pz+1)(z-p)}$, 两孤立奇点$\frac{1}{p}$, p.

因$0<p<1$, 故p在$|z|=1$内部, $\frac{1}{p}$不在$|z|=1$内部.

p是$f(z)$的1级极点, 由留数定理得

原式$=-i\int_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z=-i\cdot 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),p]=2\pi\lim_{z\to p}(z-p)f(z)$

$=2\pi\lim_{z\to p}\frac{1}{-pz+1}=\frac{2\pi}{1-p^2}$. 故泊松积分$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}=\frac{2\pi}{1-p^2}$.

例 计算 $\int_0^{2\pi}\frac{\cos2\theta}{7+\sin\theta}\mathrm{d}\theta.$ ★★★★★

解 $I\triangleq\int_0^{2\pi}\frac{\cos2\theta}{7+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}\frac{e^{2\theta i}}{7+\sin\theta}\mathrm{d}\theta.$

令$z=e^{i\theta},0\le\theta<2\pi,$ 则$\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz},$ $\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),$ $|z|=1,$

$$I=\mathrm{Re}\int_{|z|=1}\frac{z^2}{7+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{1}{iz}\mathrm{d}z=\mathrm{Re}\int_{|z|=1}\frac{2z^2}{z^2+14iz-1}\mathrm{d}z.$$

由$z^2+14iz-1=0$得, $z_{1,2}=\frac{-14i+\sqrt{(14i)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2}=\left(-7\pm4\left(\sqrt{3}\right)\right)i.$

只有奇点$z_1=\left\{-7+4\left(\sqrt{3}\right)\right\}i$ 在$|z|=1$内，z_1是1级极点. $f(z)\triangleq\frac{2z^2}{z^2+14iz-1}.$

$$I=\mathrm{Re}\left\{2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f(z),z_1\right]\right\}=\mathrm{Re}\left(2\pi i\cdot\frac{2z_1^2}{\left.\frac{d(z^2+14iz-1)}{dz}\right|_{z=z_1}}\right)$$

$$=\mathrm{Re}\frac{4\pi iz_1^2}{2z_1+14i}=\mathrm{Re}\frac{4\pi i\left(-97+56\left(\sqrt{3}\right)\right)}{8\left(\sqrt{3}\right)i}=\frac{\pi}{6}\left\{-97\left(\sqrt{3}\right)+168\right\}.$$

例2 计算：$I=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos mx}{5-4\cos x}\mathrm{d}\,x$，$m$是正整数.

解 因$\frac{1-\cos mx}{5-4\cos x}$是$x$的偶函数，故 $I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos mx}{5-4\cos x}\mathrm{d}\,x.$

$\frac{1-\cos mx}{5-4\cos x}=\mathrm{Re}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{5-4\cos x}$，故

$I=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{5-4\cos x}\mathrm{d}\,x.$ 令$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x},-\pi\le x\le\pi$，则

$$\mathrm{d}\,x=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z},\quad \cos x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}=z^m,\quad |z|=1,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{5-4\cos x}\mathrm{d}\,x=\int_{|z|=1}\frac{1-z^m}{5-4\cdot\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}\,z=\frac{1}{\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\frac{1-z^m}{5z-2z^2-2}\mathrm{d}\,z$$

$$=-\mathrm{i}\int_{|z|=1}\frac{z^m-1}{2z^2-5z+2}\mathrm{d}\,z=-\mathrm{i}\int_{|z|=1}\frac{z^m-1}{(z-2)(2z-1)}\mathrm{d}\,z.$$

例2 计算：$I=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos mx}{5-4\cos x}\,\mathrm{d}x$，$m$是正整数.

解 $I=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{5-4\cos x}\,\mathrm{d}x.$ 令$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x},-\pi\le x\le\pi$, 则

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z},\quad \cos x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}=z^m,\quad |z|=1,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{5-4\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_{|z|=1}\frac{1-z^m}{5-4\cdot\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{\mathrm{i}}\int_{|z|=1}\frac{1-z^m}{5z-2z^2-2}\,\mathrm{d}z$$

$$=-\mathrm{i}\int_{|z|=1}\frac{z^m-1}{2z^2-5z+2}\,\mathrm{d}z=-\mathrm{i}\int_{|z|=1}\frac{z^m-1}{(z-2)(2z-1)}\,\mathrm{d}z.$$

被积函数有两孤立奇点2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$在$|z|=1$内，1级极点，2不在$|z|=1$内.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{5-4\cos x}\,\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{|z|=1}\frac{z^m-1}{(z-2)\underline{\left(z-\frac{1}{2}\right)}}\,\mathrm{d}z=-\frac{\mathrm{i}}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\left.\frac{z^m-1}{z-2}\right|_{z=\frac{1}{2}}$$

$$=\pi\frac{\frac{1}{2^m}-1}{\frac{1}{2}-2}=\pi\frac{2^m-1}{3\cdot 2^{m-1}}.$$ 故 $I=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\pi\frac{1-2^m}{-3\cdot 2^{m-1}}\right\}=\frac{(2^m-1)\pi}{3\cdot 2^m}.$

例 求$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{5+6\cos^2 x}\mathrm{d}x.$ ★★★★★

分析：积分区间是$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，不是$[0,2\pi]$或$[-\pi,\pi]$，不能直接令$z=e^{ix}$.

解 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{5+6\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{8+3\cos 2x}\mathrm{d}x.$ 令$t=2x$，则

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\underbrace{\frac{1}{8+3\cos t}}_{(\text{偶})}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{8+3\cos t}\mathrm{d}t.$$

令$z=e^{it},-\pi\le t\le\pi$，$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}z}{iz}$，$\cos t=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$，$|z|=1$，

$$I=\frac{1}{4}\int_{|z|=1}\frac{1}{8+3\cdot\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{1}{iz}\mathrm{d}z=\frac{1}{8i}\int_{|z|=1}\frac{1}{16z+3z^2+3}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{8i}\int_{|z|=1}\frac{1}{3\left(z-\frac{-8-\sqrt{55}}{3}\right)\left(z-\frac{-8+\sqrt{55}}{3}\right)}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{8i}\cdot\frac{1}{3\left(z-\frac{-8-\sqrt{55}}{3}\right)}\Bigg|_{z=\frac{-8+\sqrt{55}}{3}}=\frac{\pi}{8\sqrt{55}}.$$

例 求$I=\int_{|z-4|=2}\frac{e^{z}}{|z|^{2}}|dz|$. ★★★★★ $\boxed{|z|^2=z\bar{z}.}$

因积分中出现$|dz|$(以及$|z|$), 故不能直接用留数定理或柯西积分公式.

解 $|z-4|=2$的参数方程为 $z=4+2e^{i\theta},\quad 0\le\theta\le 2\pi,$

$|dz|\triangleq ds=\sqrt{\{x'(\theta)\}^2+\{y'(\theta)\}^2}\,d\theta=|z'(\theta)|\,d\theta=\left|2ie^{i\theta}\right|d\theta=2\,d\theta$, 故

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{e^{4+2e^{i\theta}}}{\left(4+2e^{i\theta}\right)\left(\overline{4+2e^{i\theta}}\right)}\cdot 2\,d\theta=2\int_0^{2\pi}\frac{e^{4}\cdot e^{2e^{i\theta}}}{(4+2e^{i\theta})(4+2e^{-i\theta})}d\theta \text{ ★★★}$$

$$=2e^4\int_0^{2\pi}\frac{e^{2e^{i\theta}}}{16+8(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+4}d\theta.$$

令$w=e^{i\theta}, 0\le\theta\le 2\pi$, $|w|=1$,

则$d\theta=\frac{dw}{iw}$, $e^{-i\theta}=\frac{1}{w}$,

$$\therefore I=2e^4\int_{|w|=1}\frac{e^{2w}}{20+8(w+\frac{1}{w})}\cdot\frac{1}{iw}dw.$$

$$I=\int_{|z-4|=2}\frac{e^z}{|z|^2}|dz|=\int_0^{2\pi}\frac{e^{4+2e^{i\theta}}}{|4+2e^{i\theta}|^2}\cdot 2d\theta=2e^4\int_0^{2\pi}\frac{e^{2e^{i\theta}}}{(4+2e^{i\theta})(4+2e^{-i\theta})}d\theta$$

$$=2e^4\int_0^{2\pi}\frac{e^{2e^{i\theta}}}{16+8(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+4}d\theta.$$

令$w=e^{i\theta}, 0\le\theta\le 2\pi, |w|=1$，

则$d\theta=\frac{dw}{iw}$， $e^{-i\theta}=\frac{1}{w}$，

$$I=2e^4\int_{|w|=1}\frac{e^{2w}}{20+8(w+\frac{1}{w})}\cdot\frac{1}{iw}dw=\frac{2e^4}{i}\int_{|w|=1}\frac{e^{2w}}{20w+8(w^2+1)}dw$$

$$=\frac{e^4}{2i}\int_{|w|=1}\frac{e^{2w}}{2w^2+5w+2}dw=\frac{e^4}{2i}\int_{|w|=1}\frac{e^{2w}}{(2w+1)(w+2)}dw$$

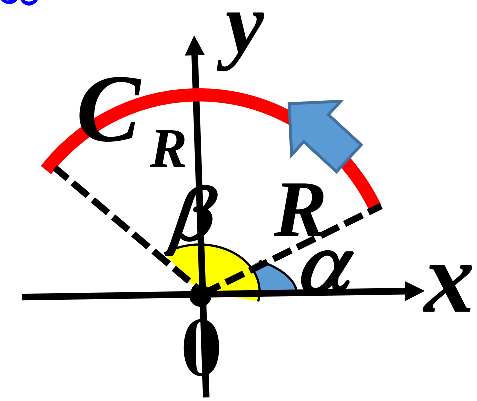
$$=\frac{e^4}{4i}\int_{|w|=1}\frac{e^{2w}}{(w+\frac{1}{2})(w+2)}dw.$$

$|w|=1$内被积函数只有奇点$-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$是1级极点. 故由留数定理，

$$I=\frac{e^4}{4i}\cdot 2\pi i\cdot\left.\frac{e^{2w}}{w+2}\right|_{w=-\frac{1}{2}}=\frac{\pi e^4}{2}\cdot\frac{e^{-1}}{-\frac{1}{2}+2}=\frac{\pi e^3}{3}.$$

5.2.2 三条引理

用留数定理还可以求一些特殊类型的广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$，为此需要用到本小节的三个引理.



$z\to\infty \Leftrightarrow |z|\to+\infty$。

引理1(P110): 设$\exists R_0>0$,使得当$R>R_0$时,

$f(z)$在圆弧$C_R: z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \alpha\le\theta\le\beta$上连续.

若$\lim\limits_{z\to\infty} z f(z)=0$, 则$\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z=0.$

证明: 方法1. 利用P71习题第7题的结论，

对应题中$A=0$的情形. P71习题第7题的证明与P50例3类似.

方法2.直接证明. $\forall\varepsilon>0$, 因$\lim\limits_{z\to\infty} z f(z)=0$, 故$\exists\tilde{R}>R_0$,

使得当$|z|=R>\tilde{R}$时, $|z f(z)|\le\dfrac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$, C_R上, $\mathrm{d}z=z'(\theta)\,\mathrm{d}\theta=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta$,

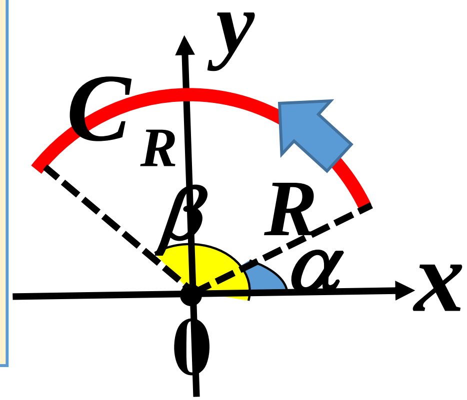
$$\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right|=\left|\int_\alpha^\beta f\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta\right|\le\int_\alpha^\beta\left|f\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\right|\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta\left|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} f\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|\mathrm{d}\theta\le\int_\alpha^\beta\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\,\mathrm{d}\theta=\varepsilon .\#$$

引理1(P110)：：设∃$R_0>0$,使得当$R>R_0$时,

$f(z)$在圆弧$C_R: z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \alpha\le\theta\le\beta$上连续.

若 $\lim\limits_{z\to\infty} z f(z)=0$, 则 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z=0$.



推论(P110) 若$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$和$Q(z)$都是z的多项式,

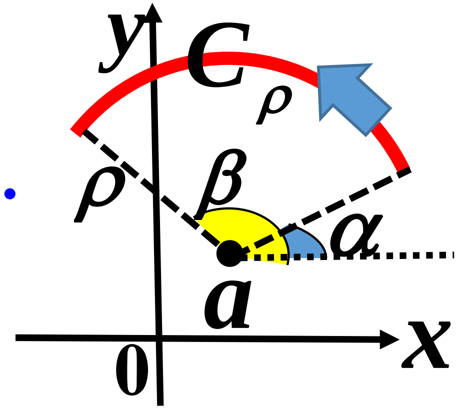
分母$Q(z)$至少比分子$P(z)$次数高2次,则 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}\dfrac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z=0$.

证明 由条件得 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{zP(z)}{Q(z)}=0$, 由引理1得结论. #

引理2(P110)(P50例3)：设∃$\rho_0>0$, 使得当$0<\rho<\rho_0$时,

$f(z)$在C_ρ： $z=a+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\alpha\le\theta\le\beta$上连续,

若 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$, 则 $\lim\limits_{\rho\to0}\int_{C_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}(\beta-\alpha)k$.



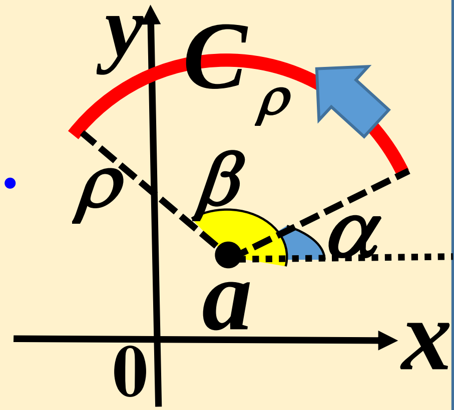
证明 参见P51.#

引理2(P110)(P50例3)：设$\exists\rho_0>0$，使得当$0<\rho<\rho_0$ 时，

$f(z)$在C_ρ：$z=a+\rho e^{i\theta}$，$\alpha\le\theta\le\beta$上连续，

若 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$，则 $\lim\limits_{\rho\to 0}\int_{C_\rho}f(z)\,dz=i(\beta-\alpha)k$.

$k\neq 0$时，a 是$f(z)$ 的奇点.



证明 参见P51.#

推论：设 a 是$f(z)$ 的1级极点，则

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho}f(z)\,dz=i(\beta-\alpha)\operatorname{Res}[f(z),a].$$

证明：因a是$f(z)$的1级极点，则 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=\operatorname{Res}[f(z),a]$.

a是孤立奇点，a在$f(z)$的充分小去心邻域内解析，

设$\exists\rho_0>0$，使得当$0<\rho<\rho_0$ 时，$f(z)$在C_ρ上连续.

由引理2得 $\lim\limits_{\rho\to 0}\int_{C_\rho}f(z)\,dz=i(\beta-\alpha)\operatorname{Res}[f(z),a]$.#

引理3(P111约当引理) 设$a>0$是正实常数，如果当R充分大时，

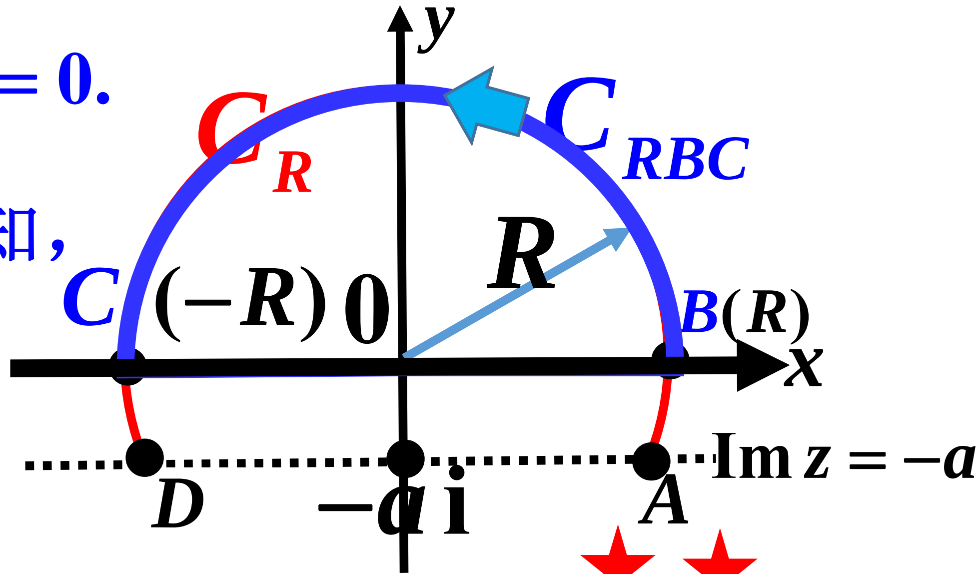
$g(z)$在$C_R:|z|=R,\ \operatorname{Im} z>-a(a>0)$上连续，$\lim\limits_{z\to\infty} g(z)=0$，

则 $\forall\lambda>0,\quad \lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R} g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\,\mathrm{d}z=0.$

证明参见P111-112(略). 从证明知，

记上半圆为$C_{RBC}:z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ 0\le\theta\le\pi,$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_{RBC}} g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda z}\,\mathrm{d}z=0.$$

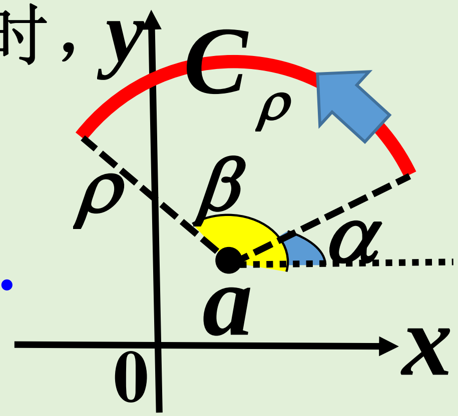


(P112倒数第6行)

引理2(P110)(P50例3)：设$\exists\rho_0>0$，使得当$0<\rho<\rho_0$时，

$f(z)$在C_ρ：$z=a+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \alpha\le\theta\le\beta$上连续，

若$\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$，则$\lim\limits_{\rho\to0}\int_{C_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}(\beta-\alpha)k.$



推论：设a是$f(z)$的1级极点，则$\lim\limits_{\rho\to0}\int_{C_\rho} f(z)\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}(\beta-\alpha)\operatorname{Res}[f(z),a].$

5.2.3 有理函数广义积分

设有理函数$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $x\in\mathbb{R}$, $P(x)$和$Q(x)$都是x的多项式,

若分母$Q(x)$至少比分子$P(x)$次数高2次, 且$\forall x\in\mathbb{R}$, $Q(x)\neq 0$,

则广义积分 $I\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛,

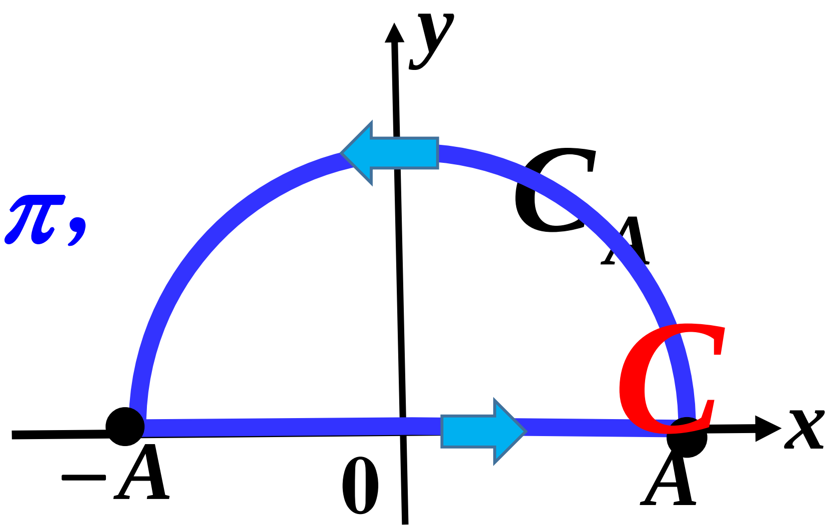
即$\forall c\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_c^A R(x)\,\mathrm{d}x$和$\lim\limits_{B\to-\infty}\int_B^c R(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛, 故

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}R(x)\,\mathrm{d}x.$$

为了用留数定理计算上式右端积分,

添加半圆弧C_A: $z=Ae^{i\theta}$, $0\leq\theta\leq\pi$,

得半圆形辅助闭路: $C=C_A+[-A,A]$.



取辅助函数 $f(z)=R(z)$,

当$z=x\in\mathbb{R}$时, $f(z)=R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$在实轴解析，从$Q(z)=0$ 可解得$f(z)$只有有限个奇点.

设$f(z)$在C内只有有限个奇点：a_k， $k=1,2,\cdots,n_A$，都是极点，由留数定理，

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{-A}^{A}R(x)\,\mathrm{d}x+\underline{\int_{C_A} f(z)\,\mathrm{d}z}=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n_A}\mathrm{Res}\left[f(z),a_k\right].$$

$Q(z)$至少比$P(z)$ 高2 次，故由引理1推论得$\underline{\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{C_A} f(z)\,\mathrm{d}z=0.}$ (P110)

故令$A\to+\infty$，得

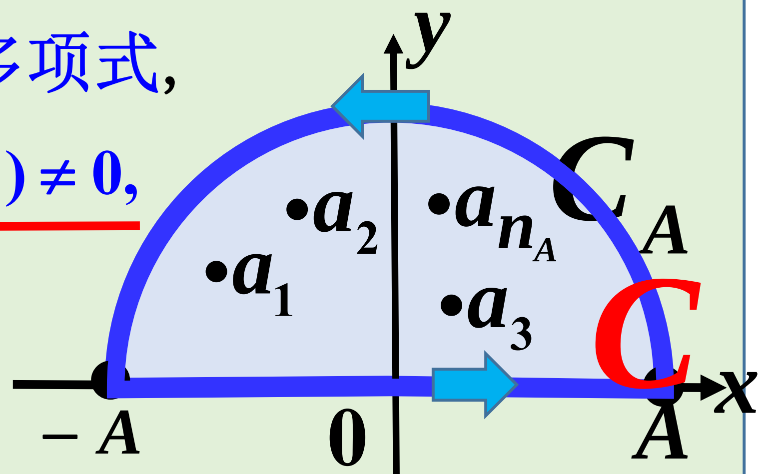
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},a_k\right],$$ (P114)

$a_1,a_2,\cdots,a_n$是$\dfrac{P(z)}{Q(z)}$在上半平面的全部奇点. (P113)

$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$， $x\in\mathbb{R}$， $P(x)$和$Q(x)$都是x 的多项式，

若分母$Q(x)$至少比分子$P(x)$ 高2 次，$\underline{\forall x\in\mathbb{R},\ Q(x)\neq 0,}$

则 $\underline{I\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}R(x)\,\mathrm{d}x.}$



添加半圆弧C_A： $z=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$， $0\le\theta\le\pi$，

得半圆形辅助闭路：$C=C_A+[-A,A]$. 取辅助函数 $f(z)=R(z)$.

设$R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $x\in\mathbb{R}$, $P(x)$和$Q(x)$都是x的多项式, (P112)

若分母$Q(x)$比分子$P(x)$次数高2 次或以上, 且$\forall x\in\mathbb{R}$, $Q(x)\neq 0$,

则 $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},a_k\right],$$ (P114)

其中$a_1,a_2,\cdots,a_n$是$\dfrac{P(z)}{Q(z)}$在上半平面的全部奇点. (P113)

(虚部大于0 的全部奇点)

例3(P114) 计算 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}$, $a>0$. ★★

解 $P(x)=1$ (0次), $Q(x)=(x^2+a^2)^3$ (6次)都是多项式,

$Q(x)$比$P(x)$次数高2次以上. 因 $a>0$, 故$\forall x\in\mathbb{R}$, $Q(x)\neq 0$.

记 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+a^2)^3}$, 由$(z^2+a^2)^3=0$解得全部奇点$a\mathrm{i}, -a\mathrm{i}$, 3级极点,

因 $a>0$, 故$f(z)$在上半平面只有奇点$a\mathrm{i}$. 故

$$I=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[f(z),a\mathrm{i}\right]=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2!}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[(z-a\mathrm{i})^3f(z)\right]$$

例3(P114) 计算 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}$, $a>0$.

解 $P(x)=1$(0次), $Q(x)=(x^2+a^2)^3$(6次)都是多项式,

$Q(x)$比$P(x)$次数高2次以上. 因 $a>0$, 故$\forall x\in\mathbb{R}$, $Q(x)\neq 0$.

记 $f(z)=\frac{1}{(z^2+a^2)^3}$, 由$(z^2+a^2)^3=0$解得全部奇点$a\mathrm{i}$, $-a\mathrm{i}$, 3级极点,

因 $a>0$, 故在上半平面$f(z)$只有奇点$a\mathrm{i}$. $\boxed{(z^2+a^2)^3=(z-a\mathrm{i})^3(z+a\mathrm{i})^3.}$

故$I=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left[f(z),a\mathrm{i}\right]=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2!}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[(z-a\mathrm{i})^3f(z)\right]$

$$=\pi\mathrm{i}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left\{\frac{1}{(z+a\mathrm{i})^3}\right\}=\pi\mathrm{i}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\frac{(-3)(-4)}{(z+a\mathrm{i})^5}$$

$$=\frac{12\pi\mathrm{i}}{(2a\mathrm{i})^5}=\frac{3\pi}{8a^5}.$$

例 计算$I=\int_0^{+\infty}\frac{1+2x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$. ★★★★

(将被积函数变量x换为z所得函数.)

解 因被积函数是偶函数,故$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+2x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$. 设$f(z)=\frac{1+2z^2}{(z^2+1)^2}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ (x^2+1)^2\neq 0$. $(x^2+1)^2$比$1+2x^2$高2次.

$f(z)$只有两奇点$\mathrm{i},-\mathrm{i}$, i在上半平面,且是2级极点, $-\mathrm{i}$不在上半平面.

故由P114公式得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),\ \mathrm{i}]=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{1!}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-\mathrm{i})^2f(z)\right]$$

$$=2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{\frac{1+2z^2}{(z+\mathrm{i})^2}\right\}=2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{4z(z+\mathrm{i})^2-2(z+\mathrm{i})(1+2z^2)}{(z+\mathrm{i})^4}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{4z(z+\mathrm{i})-2(1+2z^2)}{(z+\mathrm{i})^3}=2\pi\mathrm{i}\frac{4\mathrm{i}(\mathrm{i}+\mathrm{i})-2(1+2\mathrm{i}^2)}{(\mathrm{i}+\mathrm{i})^3}=\frac{3\pi}{2}.$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi.$$

例 计算$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+16}\mathrm{d}x.$

解 因被积函数是偶函数, 故 $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+16}\mathrm{d}x.$ 设 $f(z)=\frac{1}{z^4+16}.$

$\forall x\in\mathbb{R},\ x^4+16\neq 0.\quad x^4+16$比1高2次以上.

由$z^4+16=0$可解得

$$z_k=\left(\sqrt[4]{-16}\right)_k=2\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)=\begin{cases}2\exp\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right)=(\sqrt{2})+\mathrm{i}(\sqrt{2}), & k=0,\\ 2\exp\left(\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}\right)=-(\sqrt{2})+\mathrm{i}(\sqrt{2}), & k=1,\\ 2\exp\left(\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}\right)=-(\sqrt{2})-\mathrm{i}(\sqrt{2}), & k=2,\\ 2\exp\left(\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}\right)=(\sqrt{2})-\mathrm{i}(\sqrt{2}), & k=3,\end{cases}$$

因$(\sqrt{2})>0$, 在上半平面$f(z)$只有两个奇点 (虚部大于0 的奇点):

$z_1=(\sqrt{2})+\mathrm{i}(\sqrt{2}),\quad z_2=-(\sqrt{2})+\mathrm{i}(\sqrt{2})$, 都是1级极点.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+16}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}\left[f(z),z_1\right]+\mathrm{Res}\left[f(z),z_2\right]\right\}.$$

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+16}\,\mathrm{d}\,x=\underline{\underline{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+16}\,\mathrm{d}\,x}}.$$ 设 $f(z)=\dfrac{1}{z^4+16}$.

由$z^4+16=0$知 在上半平面$f(z)$只有两个奇点 (虚部大于0 的奇点):

$z_1=(\sqrt{2})+\mathrm{i}(\sqrt{2})$, $\quad z_2=-(\sqrt{2})+\mathrm{i}(\sqrt{2})$, 都是1级极点.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+16}\,\mathrm{d}\,x=2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}\left[f(z),z_1\right]+\mathrm{Res}\left[f(z),z_2\right]\right\}.\quad (*)$$

$$\underline{\underline{\mathrm{Res}\left[f(z),z_1\right]=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^4+16)\Big|_{z=z_1}}}}=\frac{1}{4z_1^3}=\frac{z_1}{4z_1^4}=\frac{(\sqrt{2})+\mathrm{i}(\sqrt{2})}{4\cdot(-16)}=-\frac{(\sqrt{2})+\mathrm{i}(\sqrt{2})}{64}.$$

同理 $\mathrm{Res}\left[f(z),z_2\right]=\dfrac{1}{4z_2^3}=\dfrac{z_2}{4z_2^4}=\dfrac{(\sqrt{2})-\mathrm{i}(\sqrt{2})}{64}$. 代入$(*)$，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+16}\,\mathrm{d}\,x=2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{(\sqrt{2})+\mathrm{i}(\sqrt{2})}{64}+\frac{(\sqrt{2})-\mathrm{i}(\sqrt{2})}{64}\right)=\frac{(\sqrt{2})}{16}\pi.$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4+16}\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sqrt{2})}{16}\pi=\frac{(\sqrt{2})}{32}\pi.$$

作业

P132　4(1)(2)(3)，5

补充作业：求 $\displaystyle\int_{|z-1|=2}\frac{|\mathrm{d}z|}{1+|z|^2}$.

引理3(P111约当引理):

$(a>0\text{是定数})$

如果R充分大时，$g(z)$在圆弧$C_R: |z|=R,\ \operatorname{Im} z > -a\ (a>0)$上连续，且

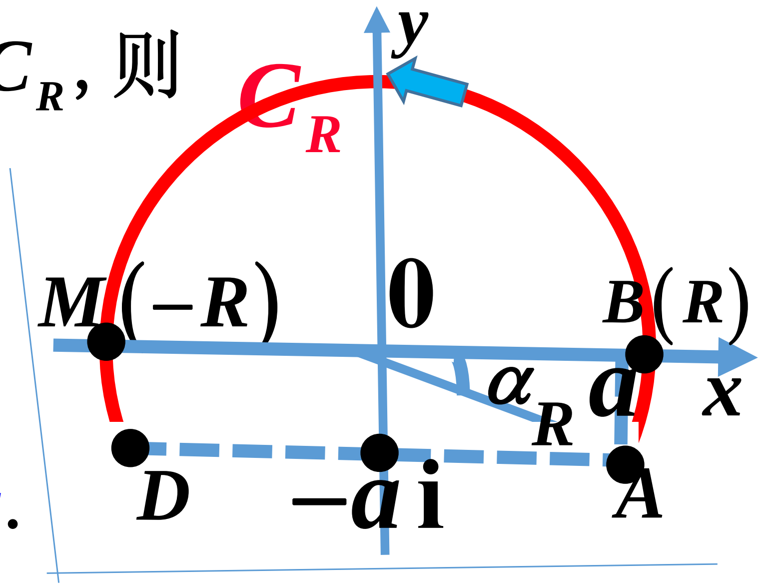
$\lim\limits_{z\to\infty} g(z)=0$，则 $\forall\lambda>0$，$\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R} g(z)e^{i\lambda z}\,dz=0$.

证明 记$M(R)=\max\limits_{z\in C_R}|g(z)|$. 因 $\lim\limits_{z\to\infty} g(z)=0$，故 $\lim\limits_{R\to+\infty} M(R)=0$.

如图$C_R=\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BM}+\overset{\frown}{MD}$. 设$z=x+iy\in C_R$，则

$y>-a$，$\forall\lambda>0$，$-\lambda y<\lambda a$.

故$\left|e^{i\lambda z}\right|=\left|e^{i\lambda x-\lambda y}\right|=e^{-\lambda y}\le e^{\lambda a}$.



$\overset{\frown}{AB}$长度$=R\alpha=R\arcsin\dfrac{a}{R}=\dfrac{\arcsin\frac{a}{R}}{\frac{a}{R}}\cdot a\xrightarrow{R\to+\infty}a$.

$\boxed{i\lambda z=i\lambda(x+iy)=i\lambda x-\lambda y}$

由长大不等式，

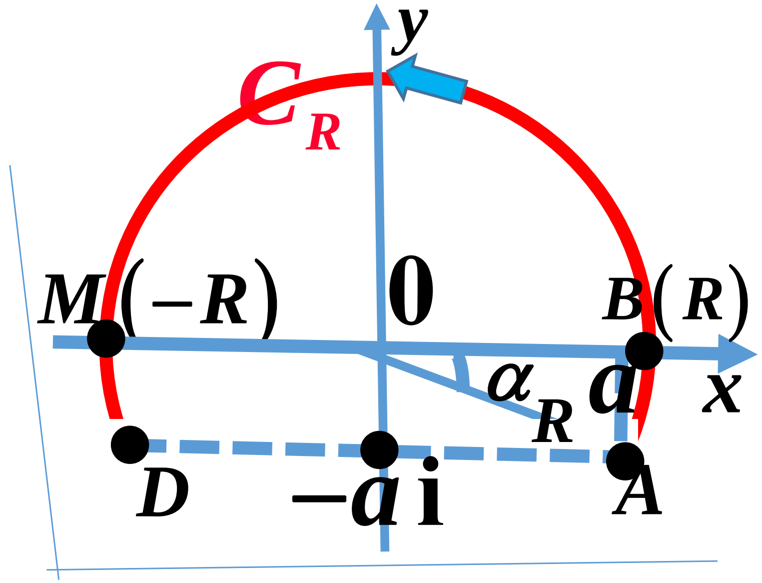
$\left|\int_{\overset{\frown}{AB}} g(z)e^{i\lambda z}\,dz\right|\le M(R)e^{\lambda a}\cdot(R\alpha)\xrightarrow{R\to+\infty}0\cdot e^{\lambda a}\cdot a=0$.

同理$\left|\int_{\overset{\frown}{DM}} g(z)e^{i\lambda z}\,dz\right|\xrightarrow{R\to+\infty}0$.

$$\left|\int_{\overset{\frown}{AB}} g(z)e^{i\lambda z}\,dz\right| \le M(R)e^{\lambda a}\cdot(R\alpha) \xrightarrow{R\to+\infty} 0\cdot e^{\lambda a}\cdot a = 0.$$

同理 $\left|\int_{\overset{\frown}{DM}} g(z)e^{i\lambda z}\,dz\right| \xrightarrow{R\to+\infty} 0.$

下证 $\left|\int_{\overset{\frown}{BM}} g(z)e^{i\lambda z}\,dz\right| \xrightarrow{R\to+\infty} 0.$



引理3(P111约当引理):

如果R充分大时, $g(z)$在圆弧$C_R:|z|=R,\ \operatorname{Im} z>-a\,(a>0)$上连续, 且

$\lim\limits_{z\to\infty} g(z)=0$, 则 $\forall\lambda>0$, $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R} g(z)e^{i\lambda z}\,dz=0.$

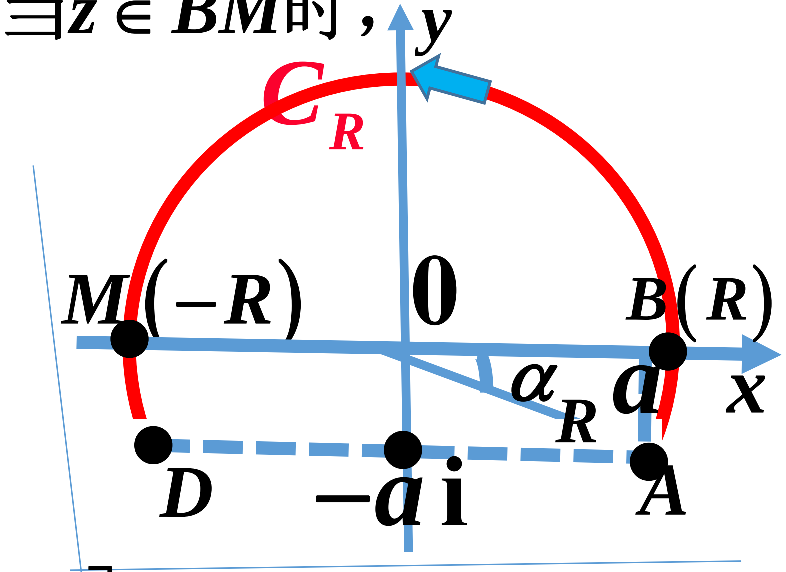
如果R充分大时，$g(z)$在圆弧$C_R: |z| = R$，$\operatorname{Im} z > -a\left(a>0\right)$上连续，且

$(a>0$是定数$)$

$$\lim_{z\to\infty} g(z) = 0, \quad 则\ \forall \lambda > 0, \quad \lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} g(z) e^{i\lambda z}\, dz = 0.$$

证明 记$M(R) = \max\limits_{z\in C_R} |g(z)|$，$\lim\limits_{R\to+\infty} M(R) = 0$. 当$z \in \overset{\frown}{BM}$时，

$z = Re^{i\varphi}, \left(\varphi = \arg z \in [0,\pi]\right.$如图所示$\left.\right)$，则



$$\left|e^{i\lambda z}\right| = \left|e^{i\lambda R e^{i\varphi}}\right| = e^{-\lambda R \sin\varphi}, \quad z'(\varphi) = iRe^{i\varphi}, \quad |z'(\varphi)| = R, 故$$

$$\left|\int_{\overset{\frown}{BM}} g(z) e^{i\lambda z}\, dz\right| \le M(R) \int_0^{\pi} e^{-\lambda R\sin\varphi} R\, d\varphi.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R\sin\varphi}\, d\varphi \overset{\beta=\pi-\varphi}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-\lambda R \sin\beta}\, d\beta, \qquad \forall \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ \sin\varphi \ge \frac{2}{\pi}\varphi.$$

$$\left|\int_{\overset{\frown}{BM}} g(z) e^{i\lambda z}\, dz\right| \le 2M(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R\sin\varphi} R\, d\varphi \le 2M(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R\cdot\frac{2}{\pi}\varphi} R\, d\varphi$$

$$\le \frac{\pi M(R)}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda R}\right) \xrightarrow{R\to+\infty} \le \frac{\pi \cdot 0}{\lambda}(1-0) = 0.$$

因此 $\forall \lambda > 0, \ \lim\limits_{R\to+\infty} \int_{C_R} g(z) e^{i\lambda z}\, dz = 0.$

P132 **(4)** 求积分 $\int_0^{\pi} \tan(\theta+ia)d\theta$, $a\in\mathbb{R}$, 且 $a\neq 0$.

解: (1) 首先证明 $\int_0^{\pi} \tan(\theta+ia)d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} \tan(\theta+ia)d\theta$.

这只需对后一个积分作变换 $\theta=\pi+\varphi$。……

(2) 由(1)得 $I \triangleq \int_0^{\pi} \tan(\theta+ia)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \tan(\theta+ia)d\theta$.

令 $z=e^{i\theta}$, 则 $0\le\theta<2\pi$, $|z|=1$, $d\theta=\frac{dz}{iz}$,

$$\tan(\theta+ia) = \frac{\sin(\theta+ia)}{\cos(\theta+ia)} = \frac{\frac{1}{2i}\{e^{i(\theta+ia)}-e^{-i(\theta+ia)}\}}{\frac{1}{2}\{e^{i(\theta+ia)}+e^{-i(\theta+ia)}\}}$$

$\underset{\text{(将}z=e^{i\theta}\text{代入)}}{=\!=\!=}$ ……

故 $I = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} (\ \cdots\cdots\ )\frac{1}{iz}dz = \cdots\cdots$

整理后用留数定理或柯西积分公式求积。

注意, 分 $a>0$ 和 $a<0$ 讨论奇点是否在 $|z|=1$ 内。