5.3 辐角原理(留数理论的应用)

可应用到多项式或有理函数的零点个数.

定理1(P125) 设a是$f(z)$的m 级零点,b是$f(z)$ 的n 级极点,

则a,b都是$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的一级极点,且

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},a\right]=m,\quad \operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},b\right]=-n.$$

定理1(P125) 设a是$f(z)$的m 级零点, b是$f(z)$的n 级极点,

则a,b都是 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的一级极点, 且$\mathrm{Res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)},a\right]=m$, $\mathrm{Res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)},b\right]=-n$.

证明: (1) 因a是$f(z)$的m 级零点, 故在a 的充分小邻域U内,

$f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$, $\varphi(z)$在a 解析, 在U内$\varphi(z)\neq 0$.

在a 的充分小去心邻域内,

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\{(z-a)^m\varphi(z)\}'}{(z-a)^m\varphi(z)}=\frac{(z-a)^m\varphi'(z)+m(z-a)^{m-1}\varphi(z)}{(z-a)^m\varphi(z)}=\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}+\frac{m}{z-a},$$

$\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$在$a$ 解析, 故$\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$在$a$ 可展成幂级数, 即

$\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots$ (没有负幂项), 代入$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的等式得

a是$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的一级极点, 且 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)},a\right]=a_{-1}=m$.

定理1（P125）设a是$f(z)$的m级零点，b是$f(z)$的n级极点，

则a,b都是$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的一级极点，且$\operatorname{Res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)},a\right]=m$，$\operatorname{Res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)},b\right]=-n$.

(2) 设b是$f(z)$的n级极点，故在b的充分小去心邻域V内，

$$f(z)=\frac{\beta(z)}{(z-b)^n},\quad \beta(z)\text{在}b\text{解析，}\quad \text{在}V\text{内}\beta(z)\neq 0.$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{(z-b)^n}{\beta(z)}\left\{\frac{\beta(z)}{(z-b)^n}\right\}'=\frac{(z-b)^n}{\beta(z)}\cdot\frac{\beta'(z)(z-b)^n-n\beta(z)(z-b)^{n-1}}{(z-b)^{2n}}$$

$$=\frac{\beta'(z)}{\beta(z)}-\frac{n}{z-b},$$

$\dfrac{\beta'(z)}{\beta(z)}$在$b$解析，故它在$b$可展成幂级数，

$$\frac{\beta'(z)}{\beta(z)}=b_0+b_1(z-b)+b_2(z-b)^2+\cdots(\text{没有负幂项}).$$

故b是$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的一级极点，且$\operatorname{Res}\left[\dfrac{f'(z)}{f(z)},\ b\right]=b_{-1}=-n$.#

定理2(P126) 设$f(z)$在闭路(正向)C的内部可能有有限个极点，除去这些极点外，$f(z)$在C及其内部解析，且$f(z)$在C上无零点，

(f在C内最多只有有限个极点，无本性奇点)　　$\left(\forall z \in C, f(z) \neq 0\right)$

则 $\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = N - P$，$N$表示$f(z)$在$C$内零点总数，(每一个$k$级零点算成$k$个零点)

P表示$f(z)$在C内的极点总数(每一个k级极点算成k个极点).

思路 由条件知$f(z)$在C上解析且无零点，故$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$在C上解析.

> 假如$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$在C内最多只有有限个孤立奇点$a_1, a_2, \cdots, a_n$，则
>
> 由留数定理知，$\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, a_k\right]$.

故先求$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$在C内所有奇点，即$f(z)$的所有奇点和零点，并求它们的留数.

关于$f(z)$奇点，由条件知$f(z)$在C内无本性奇点，最多只有有限个极点.

思路　由条件$f(z)$在C上解析且无零点, 故

假如$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$在C内最多只有有限个孤立奇点$a_1, a_2, \cdots, a_n$, 则

由留数定理知，$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, a_k\right].$$

故先求$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$在C内所有奇点, 即$f(z)$的所有奇点和零点, 并求它们的留数.

关于$f(z)$奇点, 由条件知$f(z)$在C 内无本性奇点, 最多只有有限个极点.

记C的内部为D, 记D 内去掉$f(z)$ 的全部极点外的多联通区域为D_1.

(1) 在假设$f(z)$在D_1内最多只有有限个零点下，证明定理结论成立.

(2)证明$f(z)$在D_1内确实最多只有有限个零点.

最后综合(1)和(2)，得定理结论.

定理2(P126) 设$f(z)$在闭路(正向)C的内部可能有有限个极点，除去这些极点外，$f(z)$在C及其内部解析，且$f(z)$在C上无零点，则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = N-P$$ （N，P分别表示$f(z)$在C内的零点和极点总数）.

证明：(1)首先假设$f(z)$在D_1内只有有限个零点，则可设$f(z)$在C内只有n个零点$a_1,a_2,\cdots,a_n$和m个极点$b_1,b_2,\cdots,b_m$，$0\le n,m<+\infty$，且它们的级数分别依次是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$.

由定理1知，$a_1,\cdots,a_n$和$b_1,\cdots,b_m$都是$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的一级极点，且

$$\operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},a_k\right]=\alpha_k,\ 1\le k\le n,\quad \operatorname{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)},b_j\right]=-\beta_j,\ 1\le j\le m.$$

$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$在C内除$\{a_k\}_{k=1}^{n}$和$\{b_j\}_{j=1}^{m}$外解析，故由留数定理得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k+\sum_{j=1}^{m}(-\beta_j)=N-P.$$

（C的内部为D，D内去掉$f(z)$的全部有限极点外为D_1）

定理2(P126) 设$f(z)$在闭路(正向)C 的内部可能有有限个极点，除去这些极点外，$f(z)$在C及其内部解析，且$f(z)$在C上无零点，

则 $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = N - P$，($N, P$分别表示$f(z)$在$C$的内部的零点和极点总数.)

证明：(1)$\cdots$(2)证明$f(z)$在D_1 内确实最多只有有限个零点.

在D_1内$f(z)\not\equiv 0$. 因为假设在D_1 内$f(z)\equiv 0$，则由$f(z)$在$C+D_1$ 内解析从而连续，故在C上$f(z)\equiv 0$，与条件$f(z)$在C上无零点矛盾.

下证$f(z)$在D_1 内最多只有有限个零点. 反证法.

假设$f(z)$在D_1 内有一列无穷多互不相等的零点$\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$，$f(z_n)=0$，$n=1,2,\cdots$.

因$\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$在闭路C 内有界，故由列紧性定理知它在D_1 内有收敛子列 $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$，

记 $\lim\limits_{k\to+\infty} z_{n_k} = z_0$，$f(z_{n_k})=0$. 因$f(z)$在$z_0$处连续，故$f(z_0)=0$.

因z_0是非孤立零点，因此在D_1 内部$f(z)\equiv 0$，矛盾！

故 $f(z)$在D_1 内至多只有有限个零点. 因此定理2结论成立.#

定理2(P126)　设$f(z)$在闭路(正向)C 的内部可能有有限个极点，除去这些极点外，$f(z)$在C及其内部解析，且$f(z)$在C上无零点，

则 $$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = N - P$$ (N,P分别表示$f(z)$在C的内部的零点和极点总数).

例 设$f(z)=\dfrac{(2z+1)^3}{(z-1)^2(z+2)}$, C: $|z|=3$. 　　求$\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$.

解 因$f(z)$有一个三级零点$-\dfrac{1}{2}$，二级极点1，一级极点-2，

它们都在$|z|=3$的内部，故 $N=3$，　$P=2+1=3$.

由定理2(P126)，$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = N - P = 3-3=0.$$

定理2(P126) 设$f(z)$在闭路(正向)C 的内部可能有有限个极点,除去这些极点外,$f(z)$在C及其内部解析,且$f(z)$在C上无零点,

则 $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = N - P$ (N,P分别表示$f(z)$在C的内部的零点和极点总数).

在定理2(P126)条件下,$\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \mathrm{i}(N-P)$. (*)

---

(1) 比较(*)两边虚部得

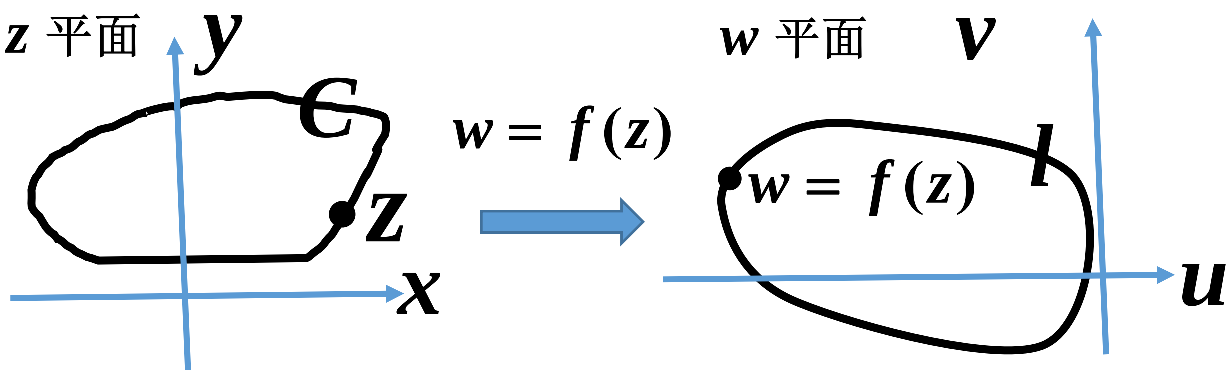
$$N - P = \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z\right\}.$$

(2) 比较(*)两边实部得

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z\right\} = 0.$$

$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ 几何意义：设$f(z)$满足定理4的条件，

当z在C上绕行一圈时，$w=f(z)$ 在w 平面上连续变化出一闭曲线l，



设l 方程为：

$w=\rho(\theta)e^{i\theta}$

$(\theta=\arg w,\ \rho(\theta)=|w|)$.

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz \overset{w=f(z)}{=} \int_l \frac{1}{w}dw \overset{w=\rho(\theta)e^{i\theta}}{=} \int_l \frac{\rho'(\theta)e^{i\theta}+i\rho(\theta)e^{i\theta}}{\rho(\theta)e^{i\theta}}d\theta=\int_l \frac{\rho'(\theta)}{\rho(\theta)}d\theta+\int_l i\,d\theta$$

$$=\underbrace{\int_l \frac{1}{\rho}d\rho}_{=0}+i\int_l 1\,d\theta = i\Delta_C \arg w = i\Delta_C \arg f(z),$$

$\Delta_C \arg f(z)$表示z(从C上任一点出发)正向绕C一周(再回到该点)后，$\arg f(z)$发生的变化.

故 $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)$. $(**)$

注：对任意的复数$a\neq 0$，因 $\int_C \frac{\{af(z)\}'}{af(z)}dz=\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$，故由$(**)$ 得

$$\Delta_C \arg\{af(z)\}=\Delta_C \arg f(z).$$

定理2(P126) 设$f(z)$在正向闭路C的内部可能有有限个极点，除去这些极点外，$f(z)$在C及其内部解析，且$f(z)$在C上无零点，

则 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$, (Δ) N, P分别表示$f(z)$在C的内部的零点和极点总数.

在定理2(P126)条件下，$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{f'(z)}{f(z)}dz = \dfrac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)$, (ΔΔ)

其中$\Delta_C \arg f(z)$表示 z正向绕C一周后$\arg f(z)$ 的变化. 联立(Δ)和(ΔΔ)得

定理3(辐角原理) 在定理2条件下，

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z).$$

例 $f(z) = \dfrac{(z^2+1)(z-4)}{\sin^3 z} = \dfrac{1}{z^3}\cdot\left(\dfrac{z}{\sin z}\right)^3 (z+i)(z-i)(z-4)$,

在l_1上无零点，无奇点.

(1)在$l_1: |z| = 3$ 内有两个一级零点i和$-i$，故$N = 2$,

在l_1内有一个极点0(三级)，故$P = 3$,

故$\Delta_{l_1} \arg f(z) = 2\pi(N - P) = -2\pi$,

即z正向绕l_1一周后，$\arg f(z)$的变化量为-2π.

定理2(辐角原理) 在定理2条件下，$N-P=\dfrac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z).$

例 $f(z)=\dfrac{(z^2+1)(z-4)}{\sin^3 z}=\dfrac{1}{(z\pm\pi)^3}\cdot\left(\dfrac{z\pm\pi}{\sin z}\right)^3(z+i)(z-i)(z-4),$

在l_1上无零点，无奇点.

(1)在$l_1:|z|=3$ 内有两个一级零点i和$-i$，故$N=2$,

在l_1内有一个极点0(三级)，故$P=3$,

故$\Delta_{l_1}\arg f(z)=2\pi(N-P)=-2\pi$,

即z正向绕l_1一周后，$\arg f(z)$的变化量为-2π.

(2)在$l_2:|z|=5$ 内有三个零点$i,-i,4$,都是一级，故$N=3$,

在l_2上无零点, 无奇点,

在l_2 内有三个极点$-\pi,0,\pi$，三级，故

故$P=9$,

故$\Delta_{l_2}\arg f(z)=2\pi(N-P)=-12\pi$,

即z 正向绕l_2 一周后，

$\arg f(z)$的变化量为-12π.

例 $f(z)=z(1-z)^3$，求 $g(z)=\sqrt{f(z)}=\sqrt{z(1-z)^3}$ 的支点（一般不讲！）.

解：因 $\sqrt{z}$ 的支点是0 和∞，故$g(z)$可能的支点有0，1，∞ .

(1) $f(z)$在$\underline{\underline{l_1:|z|=\frac{1}{2}\text{(充分小)}}}$ 内只有一个零点$z=0$(一级)，故$N=1$,

f在l_1 内没有极点, 故$P=0$, $\underline{\underline{\text{故}\Delta_{l_1}\arg f(z)=2\pi(N-P)=2\pi}}$.

$\underline{\underline{g(z)}}=\sqrt{f(z)}=\left(\sqrt{|f(z)|}\right)\exp\underline{\left(\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,f(z)}{2}\right)}$, $\frac{1}{2}\Delta_{l_1}\arg f(z)=\pi$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-1\neq1$,

故z沿l_1转一圈后, $g(z)$变化了因子-1，故 $z=0$是$g(z)$的支点.

(2) $f(z)$在$l_2:|z-1|=\frac{1}{2}$(充分小)内只有一个零点$z=1$(三级)，$N=3$,

f在l_2 内无极点, $P=0$, $\underline{\underline{\text{故}\Delta_{l_2}\arg f(z)=2\pi(N-P)=}}$ 6π,

$\frac{1}{2}\Delta_{l_2}\arg f(z)=3\pi$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi}=-1\neq1$,

故z沿l_1转一圈后, $g(z)$变化了因子-1，故$z=1$ 是$g(z)$的支点.

例 $f(z)=z(1-z)^3$，$g(z)=\sqrt{f(z)}=\sqrt{z(1-z)^3}$的支点.

(3) 最后判断∞是不是支点.

设$R>1$(充分大)，则 $f(z)$ 在$l_3:|z|=R$内包含$f(z)$ 所有零点0，1，

0是一级零点，1是三级零点， 故$N=1+3=4.$

f在l_3 内无极点， $P=0.$ 故$\Delta_{l_3}\arg f(z)=2\pi(N-P)=8\pi,$

因$g(z)=\left(\sqrt{|f(z)|}\right)\exp\left(\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\, f(z)}{2}\right)$，$\frac{1}{2}\Delta_{l_3}\arg f(z)=4\pi,$

$e^{i4\pi}=1$，故 z 沿 l_3 转一圈，$g(z)$值不发生变化，

故$z=\infty$不是$g(z)$ 的支点.

注： a是多值函数$f(z)$的支点是指z绕在a邻域内的闭曲线C连续变动一周后，$f(z)$的值发生改变.

定理4（儒歇Rouché定理）(P129)★ (函数零点问题)

设$f(z)$与$\varphi(z)$在正向闭路C及其内部都解析，且

$$\text{在边界}C\text{上，}\quad |f(z)|>|\varphi(z)|,$$

则在C的内部 $f(z)+\varphi(z)$和$f(z)$的零点个数相等.

证明 设$f(z)+\varphi(z)$在C 内有N个零点, $f(z)$在C 内有N'个零点,

下面用辐角原理证明$N=N'$. 为此首先验证辐角原理的条件.

由条件，$f(z)+\varphi(z)$在C 内极点总数$P=0$，$f(z)$在C内极点总数$P'=0.$

下证它们在C上无零点. 由条件在边界C上，$|f(z)|>|\varphi(z)|\geq 0.$

故在边界C上$|f(z)|>0$，故$f(z)$在C上无零点.

在边界C上，$|f(z)+\varphi(z)|\geq|f(z)|-|\varphi(z)|>0$， 故 $f(z)+\varphi(z)$在C上无零点.

故对$f(z)+\varphi(z)$和$f(z)$都可用辐角原理, 由条件得

$$N'=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z),\quad N=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg\{f(z)+\varphi(z)\}.$$

定理4（儒歇Rouché定理）(P129) 设$f(z)$与$\varphi(z)$在正向闭路C及其内部解析，且在C上，$|f(z)|>|\varphi(z)|$，则在C的内部 $f(z)+\varphi(z)$和$f(z)$的零点个数相等.

注意到

$$N=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg\{f(z)+\varphi(z)\}=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg\left\{f(z)\left(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)\right\},$$

因 $\arg\left\{f(z)\left(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)\right\}=\arg f(z)+\arg\left(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)$，故

$$N=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg\left\{f(z)\left(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)\right\}=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)+\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg\left(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right).$$

因此为了证明$N=N'$，只需证明 $\Delta_C \arg\left(1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right)=0.$

因此为了证明$N=N'$，只需证明 $\Delta_C\arg\left(1+\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}\right)=0.$

事实上, 当$z\in C$ 时, 曲线 $1+\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$不会绕着原点转圈，这是因为

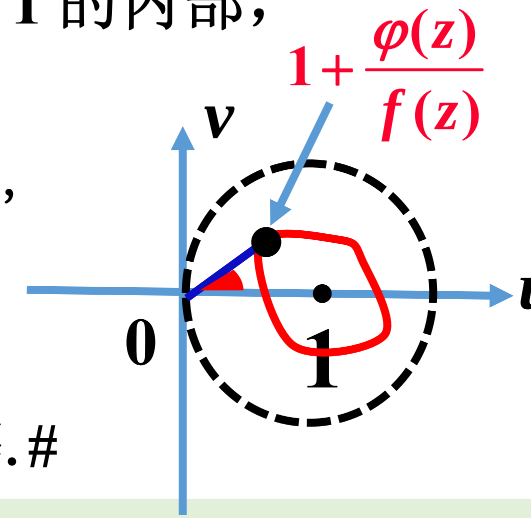
$1+\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$与1的距离: $\left|\left\{1+\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}\right\}-1\right|=\left|\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}\right|<1$(由条件).

故当$z\in C$时, 曲线 $1+\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$ 完全落在圆$|z-1|=1$ 的内部,

因此当z正向绕C一周时, $\arg\left\{1+\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}\right\}$将不发生变化,

即$\Delta_C\arg\left\{1+\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}\right\}=0.$ 因此证得$N=N'$,

即在C的内部 $f(z)+\varphi(z)$和$f(z)$的零点个数相等.#



定理4（儒歇Rouché 定理）设$f(z)$与$\varphi(z)$在正向闭路C及其内部解析，且在C上，$|f(z)|>|\varphi(z)|$，则在C的内部 $f(z)+\varphi(z)$和$f(z)$的零点个数相等.

儒歇定理的应用：求零点个数★★★★★

例 设$P(z)=z^6-z^4-5z^3+2$, 在$|z|<1$内$P(z)=0$有多少个根？

解 $\max\{1,|-1|,|-5|,2\}=5$, 取$f(z)=-5z^3$, (取系数模最大的那一项)

$\varphi(z)=P(z)-f(z)=z^6-z^4+2$. 对$f(z)$，$\varphi(z)$验证儒歇定理条件.

则$f(z)$与$\varphi(z)$在$|z|=1$及其内部解析，在边界$|z|=1$上，

$|f(z)|=5|z|^3=5,$ (求C上$|f(z)|$或$|f(z)|$的下(确)界)

$|\varphi(z)|\leq|z|^6+|z|^4+2=4,$ (求C上$|\varphi(z)|$或$|\varphi(z)|$的上(确)界)

因此在$|z|=1$上，$|f(z)|>|\varphi(z)|$. 因此由儒歇定理知，

在$|z|<1$内，$P(z)=f(z)+\varphi(z)$和$f(z)$有相同个数的零点.

在$|z|<1$内，$f(z)=-5z^3$只有一个零点0(三级)，$N=3$,

因此在$|z|<1$内，$P(z)=0$有三个根(按零点级数计数).

例 设$P(z)=z^7-z^4+9z-5$, 在$1<|z|<2$ 内$P(z)=0$有多少个根？

解题思路 可分四步做： (1) 求出$|z|<1$ 内根的个数N_1;

(2) 求$|z|=1$上根的个数N_2； (3) 求出$|z|<2$ 内根的个数N_3;

(一般直接证明$N_2=0$)

(4) $1<|z|<2$ 内根的个数$=N_3-N_1-N_2$.

步骤 (1) 求出$|z|<1$ 内$P(z)$根的个数N_1. $\max\{1,|-1|,|9|,|-5|\}=|9|$,

取 $f(z)=9z$, $\varphi(z)=P(z)-f(z)=z^7-z^4-5$.

$f(z)$与 $\varphi(z)$在$|z|=1$及其内部解析, 当$|z|=1$(边界)时, $|f(z)|=9|z|=9$,

$|\varphi(z)|\le|z|^7+|z|^4+5=7$, 故$|f(z)|>|\varphi(z)|$.

由儒歇定理知, 在$|z|<1$内$f(z)+\varphi(z)$和$f(z)$有相同个数的零点.

在$|z|<1$内, $f(z)=9z$有一个零点$z=0$, 一级,

因此在$|z|<1$内, $P(z)=0$也只有一个根(单重), $N_1=1$.

步骤(1) 取 $f(z)=9z$, $\varphi(z)=P(z)-f(z)=z^7-z^4-5$, 当$|z|=1$时, $|f(z)|>|\varphi(z)|$,

在$|z|<1$内, $f(z)=9z$只有一个一级零点0，故$P(z)$=0也只有一个根(单重)，$N_1=1$.

(2) 求$|z|$=1上根的个数N_2. 由(1)知, 当$|z|=1$时, $|f(z)|>|\varphi(z)|$.

故在$|z|=1$上，$|P(z)|=|f(z)+\varphi(z)|\geq|f(z)|-|\varphi(z)|>0$.

因此$P(z)=0$在$|z|=1$上无根, $N_2=0$,

(3) 求出$|z|<2$ 内根的个数N_3. (在半径大于1的圆内分析时, 取次数最高的项)

取$g(z)=z^7$, $\psi(z)=P(z)-f(z)=-z^4+9z-5$,

例 设$P(z)=z^7-z^4+9z-5$, 在$1<|z|<2$ 内$P(z)=0$有多少个根?

解题思路 可分四步做：(1) 求出$|z|<1$ 内根的个数N_1;

(2) 求$|z|$=1上根的个数N_2; (3) 求出$|z|<2$ 内根的个数N_3;

(一般直接证明$N_2=0$)

(4) $1<|z|<2$ 内根的个数=$N_3-N_1-N_2$.

步骤(1) 取 $f(z)=9z$, $\varphi(z)=P(z)-f(z)=z^7-z^4-5$, 当$|z|=1$时, $|f(z)|>|\varphi(z)|$,

在$|z|<1$内, $f(z)=9z$只有一个一级零点0，故$P(z)$=0也只有一个根(单重), $N_1=1$.

(2) 由(1)知, 当$|z|=1$时, $|f(z)|>|\varphi(z)|$. 故在$|z|=1$上,

$|P(z)|=|f(z)+\varphi(z)|\geq|f(z)|-|\varphi(z)|>0$, 因此$P(z)$=0无根, $N_2=0$.

(3) 求出$|z|<2$ 内根的个数N_3. (在半径大于1的圆内上分析时, 取次数最高的项)

取$g(z)=z^7$, $\psi(z)=P(z)-f(z)=-z^4+9z-5$,

$g(z)$与$\psi(z)$在$|z|=2$及其内部解析，且当$|z|=2$时，

$|g(z)|=|z|^7=2^7$, $|\psi(z)|\leq|z|^4+9|z|+5=2^4+18+5=39$,

因此在$|z|=2$上，$|g(z)|>|\psi(z)|$. 由儒歇定理知，

在$|z|<2$内, $P(z)=g(z)+\psi(z)$和$g(z)$有相同个数的零点.

在$|z|<2$内, $g(z)$=z^7有一个零点$z=0$, 七级,

因此在$|z|<2$内, $P(z)$=0 有7个根(按重数计数), $N_3=7$.

(4) $N_3-N_1-N_2=7-1-0=6$.

例 设$P(z)=z^7-z^4+9z-5$, 在$\underline{\underline{1<|z|<2}}$内$P(z)=0$有多少个根?★

解 (1)考虑$|z|<1$. 取$f(z)=9z$, $\varphi(z)=P(z)-f(z)=z^7-z^4-5$.

当$|z|=1$时,⋯,$|f(z)|>|\varphi(z)|$, 在$|z|<1$内, $f(z)=9z$只有一个零点0, 一级,

由儒歇定理知, 在$|z|<1$内, $P(z)$=0也只有一个 根(单重), $N_1=1$.

(2) 由(1)知, 当$|z|=1$时, $|f(z)|>|\varphi(z)|$. 故在$|z|=1$上,

$|P(z)|=|f(z)+\varphi(z)|\geq|f(z)|-|\varphi(z)|>0$, $\underline{\underline{\text{故在}|z|=1\text{上}P(z)=0\text{无根}}}$, $N_2=0$.

(3) 考虑$|z|<2$. 取$g(z)=z^7$, $\psi(z)=P(z)-f(z)=-z^4+9z-5$.

当$|z|=2$时, $|g(z)|>|\psi(z)|$. 在$|z|<2$内, $g(z)=z^7$只有一个零点0, 七级,

由儒歇定理知, 在$|z|<2$内, $P(z)=0$有7个根(按重数计数), $N_3=7$.

(4) $N_3-N_1-N_2=7-1-0=6$,

故在$1<|z|<2$内$P(z)=0$有且只有6个根(按重数计数).

作业

P133 9,10