复变函数 B 复习讲义 (第二版)

舒文炫

2022 年 11 月 10 日

目录

1 写在前面

本讲义供班上同学期末复习使用, 我把自己认为比较重要的东西罗列在里面，帮助大家梳理一个明确的框架，时间精力有限当然也不可能面面俱到，所以不能说我没写的就一定不考，写了的一定会考，助教也不知道期末题 qwq. 助教水平有限，若有错误之处，还请谅解。参考的内容主要是 ppt 和课本，增添一些帮助理解的内容，同学们复习时可以配合起来食用，预祝大家期末取得好成绩。第二版修改了一些第一版的错误，增加了一些例子。

2 各章总结

2.1 复数与平面点集

本章是复变函数最基础的部分，从本章开始，我们将研究的目标从数分的实数域扩充到现在的复数域，这里会引出很多与实数域里面不相同的性质，学习是需要注意观察不同点，以及不同的本质，能更有助于理解，下面从复数的定义开始

定义 1 *由任意有序实数对 (x, y) 确定的数 $z = x + iy$, 称为复数。其中 i 满足 $i^2 = -1$*

同时在其上定义加法和乘法, 加法零元，乘法单位元，以及乘法的逆元，我们就说复数在加法和乘法运算下构成一个域，称为复数域，记为 C

从这个简单的定义就可以看到复数域和实数域的一个不同点：复数域不是一个有序域, 而实数域有序！你没有办法比较 i 与 0 的大小

定义 2 *对复数 $z = x + iy$, 称 $\bar{z} = x - iy$ 为复数 z 的共轭，$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为 z 的模*

那么有如下一些简单命题

命题 1 *设 z，w 为两个复数，那么有*

- $Rez = \frac{z+\bar{z}}{2}, Imz = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
- $z\bar{z} = |z|^2$*(这个性质十分重要)*
- $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$
- $||z| - |w|| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$*(距离不等式，也称三角不等式，度量空间里面最基本的不等式)*

很多学生喜欢把复数拆成实部虚部那样的形式做题，但是大多数情况下这样的效率不高，且容易出错，要善于使用这些基本的性质。

例 1 *证明如果 $|z_1| = \lambda|z_2|$, 则 $|z_1 - \lambda^2 z_2| = \lambda|z_1 - z_2|$*

直接使用模长公式可以得到

$$LHS^2 = z_1\overline{z_1} - \lambda^2 z_1\overline{z_2} - \lambda^2\overline{z_1}z_2 - \lambda^4 z_2\overline{z_2}$$

同时有

$$z_1\overline{z_1} = \lambda^2 z_2\overline{z_2}$$

, 综合起来可以得到 RHS^2

复数由于是有序实数对这样的形式，可以天然的放到一个平面里面，就有下面的定义

定义 3 将复数 $z=x+iy$ 看成平面上以 x 为横坐标，y 为纵坐标的点，这个平面称为复平面, 如果再考虑极坐标表达，z 也可以对应到点 (r,ρ)，其中 $r=|z|, tan\rho=\frac{y}{x}$, 我们把取值在 $-\pi\leq\rho\leq\pi$ 的值称为辐角主值, 记作 $arg\ z$，集合 $\{Argz|Argz=argz+2k\pi, k=0,\pm1,\pm2,...\}$ 为 z 的辐角

这里就引入了两种表示法，三角表示和指数表示，指数式是 $z=|z|e^{i\theta}$ 很多情况下要善于使用指数表示解题, 将复数的乘除用指数式表示的时候，就能得到很多神奇的式子。

例 2 证明恒等式

$$sin\frac{\pi}{n}sin\frac{2\pi}{n}...sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$$

考虑 $(1+z)^n-1=z(z^{n-1}+...+n)=0$ 的根 $z_k=e^{\frac{2k\pi i}{n}}-1$ 去掉 *0* 剩下的 $|z_k|=2sin\frac{k\pi}{n}, k=1,...,n-1$, 结合韦达定理可以得到结果

需要注意开方的运算，这里结果是多值的

一些小 tips：在几何的观点下，一个复数乘以 i 可以表示将这个复数对应的向量逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$;$Arg\frac{z}{w}$ 表示复数 z，w 对应向量的夹角

下面一个例子从几何的角度分析更简单

例 3 若 $z_1,z_2,...,z_n$ 都位于过原点的直线的一侧，则 $z_1+z_2+...+z_n\neq0, \frac{1}{z_1}+...+\frac{1}{z_n}\neq0$

直接取垂直这个直线的一个向量，考虑复数在这个向量上的分量恒不为 *0*，所以他们求和也不为 *0*.

ppt 里面提到的扩充复平面：实数里面我们加上无穷大 ∞ 得到扩充实数系，复数里面我们有时也需要考虑无穷远点，这样的复平面称为扩充复平面，一个比较直观的看法是构建一个单位球面到扩充复平面的一一映射，这是 Riemann 首先引入的，更详细的说明，有兴趣可以自行查找阅读相关内容 (史济怀复变函数 1.3 节)

到目前为止，我们已经对复数本身有了较多的认识，但是数学永远不是只研究元素本身的学科，更重要的是这些元素之间的相互关系，下面就进入到平面上点集的内容

我们从极限开始

定义 4 我们说 C 中的复数列 $\{z_n\}$ 收敛到 C 中的点 z_0, 是指对于 $\forall\epsilon>0,\exists N$, 当 $n>N$ 时，$|z_n-z_0|<\epsilon$, 记作 $lim_{n\to\infty}z_n=z_0$

很简单就能推得，一个复数列收敛当且仅当其实部和虚部分别收敛

当然在数学分析里面学到的 cauchy 列的定义等也能无缝转移的复数列上来，因为实数域和复数域在定义了各自的度量，（实数是绝对值，复数是模长）都是一个度量空间，可以看到这里极限的定义只用到了度量，这是最基本的，很多数学分析里面见到的证明，只要它只涉及到了度量，都可以无缝切换到复数上来，甚至不需要任何的改变。

下面是平面点集相关术语

对平面点集 E，可以将 C 中的点分为三类，内点，外点，边界点，E 本身又有开集，闭集，有界集，无界集等一系列分类，这些定义 ppt 上都很清楚，不再赘述

比较重要的定义, 下面这些在后面的学习中更常见

定义 5 连通的非空开集 D 称为区域，区域的边界可能由一条或几条曲线，一些割痕，孤立的点组成.

定义 6 $z(t)=x(t)+iy(t), t$ 为参数，x,y 实函数，如果 x,y 关于 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，则称这样构成的点集为连续曲线，如果还能保证该曲线不是自相交的，则是简单曲线，简单曲线的基础上如果还有端点重合，则是简单闭曲线。

注：有一个直观但证明很复杂的定理，Jordan 定理：一条简单闭曲线把复平面分成两个域，一个有界，是该曲线的内部，一个无界，是其外部，而该曲线是这两个域的共同边界

定义 7 对复平面上的区域 D，如果 D 中任意一条简单闭曲线 l，l 内区域每一点都属于 D，就称 D 是单连通的

注：实际上直观来看就是看这个区域里面有多少洞，几个洞就是几连通

2.2 复变函数

数分里面的函数，定义域都在实数域上，这里我们需要讨论定义域到了复数域上会出现什么不一样的性质

当然一样的，很多只涉及度量的定理，到复变函数里面都适用，但是我们更喜欢从几何的角度来看函数 $f(z)$ 的性质, f 将 z 平面点集 E 映射到了 w 平面的点集 E'，记为 $f(E)=E'$,E' 为 E 的像。

最简单的例子是分式线性变换

定义 8 形如 $w=T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ 的映射称为分式线性变换或莫比乌斯变换，其中 a,b,c,d 是复常数，且满足 $ad-bc\neq 0$

习题里面做过的 $\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ 就是一个分式线性变换的例子

分式线性变换虽然简单，但是有很多好玩的性质，比如把圆周变成圆周，且最多只有两个不动点，有了这些基本的认识，可以随意构建很多域之间的映射，有兴趣可以看史济怀复变 2.5 节

我们更多研究的是连续函数, 连续是很好的性质，可以让你把极限拿到函数里面去。

定义 9 如果 $lim_{z\to z_0}=f(z_0)$, 那么称 $f(z)$ 在 z_0 连续

命题 2 复变函数连续当且仅当实部虚部分别连续

命题 3 连续的复变函数的和差商积以及符合函数仍然连续

这些命题证明都很容易，可以之间从数分那里照搬

注解 1 如何证明函数不连续，可以从这些定义下手，比如从不同的方向趋于同一个点，得到不同的极限，但是要注意，就算从不同的方向趋于同一个点，极限相同也不能说明在这一点连续，因为极限看的是整个邻域里面的性质。

导数这一块就开始展现很多不一样的性质了

先从定义开始

定义 10 f:$D\to C$ 是定义在域 D 上的函数，$Z_0\in D$ 如果极限

$$lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

存在，就说 f 在 z_0 处复可微或可微

可以看到最基础的定义与数学分析里面没什么区别，还是用极限来定义的，所以函数和差商积复合的导数的形式也是和实函数类似。

但是如果我们考虑 $f=u+iv$ 这样的形式,u,v 是实函数，我们就得到了下面很重要的定理，这在实函数里面是看不到的

命题 4 $f=u+iv$ 定义在区域 D 内，则 f 在点 $z=x+iy$ 处可微的充分必要条件是在点 (x,y) 上有

(1)$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 可微

(2)$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

注解 2 *这里还能涉及到调和函数,$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为拉普拉斯算子，u 为调和函数即 $\Delta u = 0$, 如果实函数 u,v 是一对调和函数，且满足 CR 方程，则称 u, v 为共轭调和函数。*

需要注意这里经常会拿来出一道题的，就是给出一个解析函数的实部，让你求其虚部，这里第一步就是要验证给出的实部的调和性，不然我们是找不到对应的虚部的，这样也就是这个解析函数不存在。

然后求出结果之后需要将函数化成 z 的形式，我们可以考虑令 $y = 0$ 得到一个函数，然后将 x 替换为 z，这里的原理就是，解析函数零点的孤立性 (本讲义的后面会提到)。这里将相当于两个函数在实轴上面相等推出他们在整个解析的区域内都相等，零点的孤立性实际上也是很不平凡的性质。

注解 3 *我们可以考虑这样的算子 $\frac{\partial}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$，因为复变函数 $f(z)$ 可以写成*

$$f(x,y) = f(\frac{z+\bar{z}}{2}, -i\frac{z-\bar{z}}{2})$$

把 $z, \bar{z}$ 看成独立变量，分别对其求偏导数。这样可微的充要条件可以写成如下

命题 5 *$f = u + iv$ 定义在区域 D 内，则 f 在点 $z_0 = x + iy$ 处可微的充分必要条件是在点 (x,y) 上有*

(1)u(x,y) 与 v(x,y) 可微

(2)$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$

这种情况下 $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$

注解 4 *用上面的算子，拉普拉斯算子还可表示成 $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$*

注：判断不可微的方法，一些基础的函数可能需要直接使用定义，知道这些基础的结论，其他复杂的函数的判断可以直接建立在这些基础的函数上。

一些补充：导数我们也可以从几何的角度来审视，一条曲线 γ 被函数 f 映射为 σ,z_0 映射为 ω_0 他们与正实轴的夹角之差为 $Argf'(z_0)$

具体来说，过 z_0 点作两条光滑曲线 $\gamma_1 m \gamma_2$ 他们的方程分别为

$$z = \gamma_1(t), a \leq t \leq b$$

和

$$z = \gamma_2(t), a \leq t \leq b$$

, 且 $\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = z_0$, 通过映射 $w = f(z)$, 将它们分别映为两条曲线 $\sigma_1 = f(\gamma_1(t)), sigma_2$, 我们可以得到这两组曲线的夹角是相等的，也就是如果 $f'(z_0) \neq 0$, 我们可以得到这个映射是保角的。同时 $|f'(z_0)|$ 可以视为 f 在 z_0 处的伸缩率。

一些初等函数的例子，如指数函数 e^z, 三角函数 sinz,cosz, 对数函数 Lnz, 一般幂函数 z^α, 虽然我这里写的不多 (ppt 上很详细了)，但是还是比较重要的，这一块重点要理解这些函数是如何从实数域扩充定义的复数域上的，到了复数域上这些函数都具备了很多不一样的性质，比如 sinz,cosz 是无界的，很多人做题的时候会偶尔以为这玩意有界，要注意，不要再犯这样的小错误。还有就是对数函数和一般幂函数都是多值函数他们的多值性来源于 $Argz$ 的多值性。

期中考试的时候第二题很多人没有考虑长大不等式，而是使用柯西积分公式，但是需要注意的是，柯西积分公式需要被积的那部分是解析的，然而对应一般的幂函数，并没有在全平面上解析，而是需要去掉原点和负实轴，这里原点实际上为其支点，这个函数绕原点一周，其值会从多值函数的一个单值分支跳到另一个单值分支。

注：有兴趣的同学可以看看不同的域会被这些函数映射成什么，这对理解这些函数帮助很大，至少清楚了这个，就不会天真的认为 sinz 有界了，提一个小问题：把除去线段 $\{z = a + iy : 0 < y < h\}$ 的上半平面变成上半平面，这个用上面这些初等函数就可以做到。

2.3 解析函数的积分表示

积分是求导的逆运算，复变函数的积分的定义与实变函数都是类似的取分点求和，求极限，那么其线性性，齐次性，积分路径的可加性都可以直接从实函数照搬

如果想用实函数表示复函数的积分我们有如下定理

定义 11 如果 *f=u+iz*，在逐段光滑曲线 C 上连续，则复积分

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$$

更进一步，如果被积分的曲线光滑，可以用参数 t 表示 $a \le t \le b$，积分可以写成下面的形式

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z)z'(t)dt$$

这个通常可以用在积分曲线参数很好表示，比如如果曲线是一个圆，我们可能可以选择使用指数式表达，将曲线用 θ 参数化。

这里最重要的不等式

命题 6 长大不等式:*f(z)* 在曲线 C 上连续，则 $|\int_C f(z)dz| \le \int_C |f(z)|ds$

这是一个很粗糙的积分上界的估计, 但是很多情况下很够用，这个积分可以被其被积函数最大值以及曲线长度控制住

下面要介绍的是复变函数里面最 nontrivial 的定理之一

命题 7 柯西积分定理：设 D 是由简单闭曲线 C 围成的单连通区域，*f(z)* 在闭域 $\bar{D} = D + C$ 上解析，则

$$\int_C f(z)dz = 0$$

stein 的复分析上通过三角剖分证明这个定理，过程十分优美，学有余力可以看看。

注：推广到多连通区域上是如下形式

命题 8 复闭路由闭曲线 $C_0, C_1, ..., C_n$ 组成，C_0 外边界，其余为内边界，内外边界的定向相反, 那么可以得到

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + ... + \int_{C_n} f(z)dz$$

这是个很强大的结论，如果你的这个域有几点的性质不是很好，我们可以将其先挖掉，剩下的变成一个多连通域，这样就可以求积分了，要回到原来的域，可以考虑取极限之类的操作，认真做了附加作业的应该都很清楚这种方法的运用。

注解 5 柯西积分定理可以保证全纯函数的原函数的存在性，对于原函数我们有如下定理

命题 *9* 如果 f 在域 D 上连续，且对 D 中任意可求长闭曲线 γ, 均有 $\int_\gamma f(z)dz = 0$ 那么

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$$

是 D 中全纯函数，且在 D 中有 $F'(z) = f(z)$, 这里 z_0 是 D 中一固定点。

这里最重要的性质就是积分要与路径无关，单连通域上的全纯函数通过柯西积分定理可以很自然的保证这一点。

注意条件里面单连通域很重要，比如你就没办法对 $f(z) = \frac{1}{z}$ 找到其原函数

如果将柯西积分定理用到多连通域，比较特殊的就是函数在去掉一个点外全纯，那么我们就能得到柯西积分定理

命题 10 设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的域，如果 f 在域里面全纯, 在边界上连续，对 $\forall z \in D$ 均有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

只要注意到被积函数在除了 z 之外全纯，然后用经典的挖去一个小圆，求极限的方法就可以得到。

注解 6 上面的定理可以得出结论，全纯函数有任意阶导数

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta, n=1,2,...$$

证明可以直接看着这个形式，数学归纳法。这里可以看到，本来全纯 (解析) 在定义的时候，我们只要求了一阶导的存在，但是这里可以得到任意阶导的存在性，这个也是实函数所办不到的，可以说这也是一个很美妙的结论，下面提一下其简单运用

结合长大不等式，我们又能得到对全纯函数每阶导函数的上界的估计, 用这个可以证明有界整函数必为常数，进而我们还能导出代数学基本定理。

若结合原函数，又可以导出柯西积分定理的逆定理.

若结合换元，又可以得到平均值公式, 这次的期中就考到了平均值公式的应用，一般来说每次期末最后一题是比较难的证明题之类，如果想往高分考，这些性质都得熟练掌握。

定理 2.1 刘维尔定理：有界整函数必为常数

整函数是指在复平面上解析的函数，我们设这个界为 M，由柯西积分公式我们有，对任意 $a \in C$

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=R}\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

再由长大不等式

$$|f'(a)| \le \frac{M}{R}$$

令 $R\to\infty$, 我们得到对 $\forall a, f'(a)=0$, 这也就说明了 f 是常数。

当然还可以考虑另一种方法证明

任取复平面上两点 a,b 我们可以计算

$$\lim_{R\to\infty}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz$$

, 这个由长大不等式，可以得到趋于 0. 同时我们计算这个的实际值，可以由柯西积分公式快速给出 $\frac{2\pi i}{a-b}(f(a)-f(b))$, 结合这两个可以得到 $f(a)=f(b)$, 对任意两个点 a，b 都成立，从而得到有界整函数必为常数

定理 2.2 代数学基本定理：任意复系数多项式

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_n, a_0\neq 0$$

在 C 中必有零点

这里反证，假设没有零点，$\frac{1}{P(z)}$ 是一个整函数，且同时我们有 $P(z)\to\infty, |z|\to\infty$. 从而我们得到 $\frac{1}{P(z)}$ 有界，同时又是整函数，从而必为常数，但是这个显然矛盾，也就是说 $P(z)$ 在 C 上必有零点

定理 2.3 平均值公式: 设 $f(z)$ 在闭圆 $|z-a|\le R$ 上解析，则

$$f(a)=\frac{1}{2\pi R}\int_C f(z)ds$$

其中 $C:|z-a|=R, z=a+Re^{i\theta}$,$ds$ 为 C 上的弧长微分 $ds=Rd\theta$

对应的调和函数也有平均值公式，并且由平均值公式可以推出最大模原理

定理 2.4 若 $f(z)$ 在域 D 上解析，且存在点 $z_0 \in D$, 使得 $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ 对所有的 $z \in D$ 都成立，则 $f(z)$ 必为常数。

换句话说，对于非常数的 f, 在 D 内解析，在边界连续，f 的最大模只能在 D 的边界上取到。

证明考虑集合 $S = z \in D|f(z) = f(z_0)$, f 连续，故为闭集，只要证其为开集，此时只需要取一个小邻域，对这个小邻域用平均值公式，可以得到这个边界上的点都在 S 内，也就是 S 为开集，D 是连通集，连通集的即开又闭子集必是它本身，这样即可得证。

下面的一个例子作为最大模原理的应用给出

例 4 若函数 $f(z)$ 在有界域 D 上解析，且不为常数，在边界上连续，若 $f(z) \neq 0$,$m = \inf_{z\in\partial D} |f(z)|, M = \sup_{z\in\partial D} |f(z)|$, 则在 D 内的任一点 z 都有

$$m < |f(z)| < M$$

2.4 解析函数的级数表示

上一章我们得到了全纯函数有任意阶导数，联想数分里面的泰勒展开，全纯函数也可以做类似的事情，下面我们从一般的幂级数开始

定义 12 设有复数列 $\{z_n\}$ 称

$$\sum_{i=1}^{\infty} z_i = z_1 + z_2 + ...$$

为复数项级数，如果其部分和 $S_n = \sum_{i=1}^{n}$ 构成的复数列收敛，就说这个级数收敛

通过部分和收敛这个定义，很容易推出，$\sum_{i=1}^{\infty} z_i$ 收敛当且仅当其实部和虚部构成的级数分别收敛

和数分里面的级数类似，可以从级数收敛推出其项构成的复数列极限趋于 0，可以看到这里也只是涉及到度量

自然的如柯西收敛准则在这里也能用。不过我们用到更多的是下面的定义

定义 13 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{i=1}^{\infty} z_i$ 绝对收敛

因为复数我们无法直接比较大小，但是模长可以，这样转化为模长的求和，有些处理就和实数一般无二了

注解 7 更好的性质，还有一致收敛，不过此时我们考虑的是函数列，而不是简单的复数列，这里的一致性是对函数上每一个取值的一致性，有一致收敛可以保证如果函数列的每一项连续，则有和函数也连续，还有求导与求和换序，积分与求和换序，这些都是数分里面介绍过的，证明也可以直接照搬。

还有些情况下，我们不能得到在整个域上面一致收敛，这个时候可以考虑这个域内任意紧子集 (有界闭集)，如果在这上面收敛，就说函数是内闭一致收敛的, 引入这个概念主要是有如下定理:

如果全纯函数构成的级数在域内闭一致收敛到和函数，就能得到这个和函数一定是域内的全纯函数，这就是实函数里面没有的性质

那如果我们对级数里面的 z 做一个平移, 加上系数，更一般的，就能得到如下形式

定义 14 设 $a_n(n = 0, 1, 2, ...)$ 和 a 都是复常数，则无穷级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

为幂级数

幂级数我们也可以讨论其收敛性，我们可以给出其收敛半径如下

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

这里这个极限是上极限的意思，因为这些系数模长的极限不一定存在，但是上极限是一定有的

在收敛半径内都是绝对收敛的，外面都是发散的，但是在收敛圆周上，往往会有很多不一样的情况，这个是在习题里面见过的

有了上面的准备我们就可以过渡到泰勒展开了

命题 11 *若 f 在圆 $B(z_0, R)$ 上全纯，则可以展开成幂级数*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, z \in B(z_0, R)$$

称这个级数为 f 的泰勒级数。且这样的展开式唯一

证明即用到柯西积分定理以及一个很基本的幂级数展开。

这里你还可以注意到一些初等函数如 $e^z, sinz, cosz$ 泰勒展开的形式与实数域下是一样的，只不过 x 换成了 z，或许用幂级数来推广这些函数是个不错的方法。

注解 8 *求函数的泰勒展开，这个也是很繁琐的，展开前要注意其收敛半径，然后记住一些常见的展开，至于其他的，要相信自己的算力*

用泰勒展开，我们可以研究函数零点的一些性质

定义 15 *设 f 在 z_0 点全纯且不恒为 0，如果有*

$$f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, ..., f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

则称 z_0 是 f 的 m 阶零点

使用泰勒展开的话，就有如下命题

命题 12 *z_0 为 f 的 m 阶零点的充分必要条件为 f 在 z_0 的邻域内可以表示为*

$$f(z) = (z-z_0)^m g(z)$$

这里 $g(z)$ 在 z_0 点全纯，且 $g(z_0) \neq 0$

零点对于全纯函数而言是比较特殊的，体现在下面一个命题

命题 13 *设 D 为 C 中的域，$f \in H(D)$,f(z) 不恒为 0，那么 f 在 D 中的零点是孤立的，即若 z_0 为 f 的零点，则必存在 z_0 的邻域，使得 f 在这个邻域中除了 z_0 外不能有其他的零点*

这个命题表明，如果全纯函数在一个领域上恒为 0，那么其在整个域 D 上恒为 0.

更进一步就能导出，如果两个全纯函数，存在一列点使其值相等，那么这两个全纯函数在域 D 上恒等，到这里就可以理解前面算调和函数为什么可以直接令 y=0 了

前面的泰勒展开都是在收敛圆上面进行展开，如果将展开的区域换成了圆环，如何展开？也是幂级数吗？那么我们可以引出下面的定理

命题 14 设 $D=\{z:r<|z-z_0|<R\}$, 如果 f 在 D 上全纯，那么 f 在 D 上可以展开为 *Laurent* 级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$$

其中 $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}},\gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta-z_0|=\rho\},r<\rho<R$ 且展开式唯一

其中幂指数非负的部分称为全纯部分，幂指数为负的部分为主要部分，如果这两个部分分别收敛，我们就说这个 Laurent 级数收敛，Laurent 级数的重要性质取决于主要部分

至于求 Laurent 展开，这个也是很考验算功的, 另外 ppt 上也有一些比较技巧性的展开方式，大家可以看看，至少熟悉一下，说不定有帮助

实际运用时我们往往考虑的是在无心圆盘 (这实际上也能看成圆环) 上的展开，因为往往会有这种函数，在去掉域上面的某个点后，在剩下的域上是全纯的，这个去掉的点就是孤立奇点，自然孤立奇点 z_0 的分为下面三种形式

- z_0 可去奇点,$\lim_{z\to z_0}f(z)=a$,a 有限
- z_0 极点，$\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$
- z_0 本性奇点，$\lim_{z\to z_0}f(z)$ 不存在

注解 9 我们有 z_0 可去奇点等价与 f 在 z_0 附近有界

对于极点, 有如果 z_0 是 f 的 m 阶极点，等价于 z_0 是 $\frac{1}{f}$ 的 m 阶零点

本性极点就比较 *nontrivial* 了，实际上 *Weierstrass* 有一个定理: 如果 z_0 是 f 的本性奇点，那么对任意复数 A(可以为 ∞)，必存在区域 z_0 的点列 $\{z_n\}$, 使得 $\lim_{n\to\infty}f(z_n)=A$

Picard 还有一个更强的结论，全纯函数在本性奇点附近可以无穷多次取到每个有穷复值，最多有一个例外

例:$e^{\frac{1}{z}}$ 除了 0，其他的值都可以被无穷次取到有一些人会觉得有一个极限趋于正无穷，另一个极限一个趋于负无穷就是本性奇点了，实际上在复平面上无穷远点就只有一个，可以通过黎曼映射来考虑。本性奇点是需要既有无穷的极限，也有有限的极限。

上面两个定理表明，函数在本性奇点附近的表现是很复杂的，那么我们有没有办法去研究这个性质呢？这个时候洛朗展开的重要性就体现出来了

- 在可去奇点处的洛朗展开是一个幂级数
- 在 m 阶极点处的洛朗展开，其主要部分有 m 项
- 在本性奇点处的洛朗展开，其主要部分无穷项

注解 10 有时候我们还会考虑无穷远点 ∞ 是孤立奇点的情况

定义 *16* 如果 $f(z)$ 在某个邻域 $D:R<|z|<+\infty$ 内解析，则称 ∞ 是 $f(z)$ 的孤立奇点

这里一定要清楚孤立奇点的定义，并不是所有的奇点都是孤立的。比如 $\frac{1}{sinz}$, 无穷远点就不是孤立奇点，因为存在一个奇点列趋于无穷远点

这种情况下，我们一般对函数做一个变换 $\varphi(\zeta)=f(\frac{1}{\zeta})$, 这样就把考虑 f 无穷远点转为考虑 φ 在 0 的性质，如果进行洛朗展开的话，因为把 ζ 替换成了 $\frac{1}{\zeta}$, 正幂项就变成了负幂项。

依靠洛朗展开我们可以确定某些函数的性质，比如下面这个例子

例 5 解析函数 *f(z)* 在区域 $D(0 \in D)$ 内不为零且有 $|\frac{f(z)}{z}| \geq 1$，证明存在一个常数 c，$|c| \geq 1$，使得 $f(z) = \frac{c}{z}$

证明:$f(z)$ 不为零所以我们有 $\frac{1}{f(z)}$ 在 D 上解析，并且 $|\frac{1}{f(z)}| \leq |z|$, 设 $\frac{1}{f(z)}$ 在 *0* 点洛朗展开为

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n \in Z} a_n z^n$$

, 然后去分析系数，$n \leq 0$,

$$|a_n| = |\lim_{r \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{1}{z^{n+1} f(z)} dz| \leq \lim_{r \to 0} \frac{1}{2\pi} 2\pi r r \frac{1}{r^{n+1}} = 0$$

同理对 $n \geq 2$ 我们也能证明类似的结论，那么就能得到 $\frac{1}{f(z)} = a_1 z$, 也即 $f(z) = \frac{c}{z}$

例 6 设 $f(z)$ 在不包含无穷远点的复平面上除了 $z = 2$ 外都解析, $z = 2$ 是 $f(z)$ 的二级极点, 当 $|z| > 2015$ 时，存在 $M > 0$ 使得 $|f(z)| < M$, 且有 $f(0) = 1, f(1) = 2, f(3) = 0$, 求 $f(z)$ 的表达式。

本题也是经典的依靠洛朗展开，直接在 $z = 2$ 处展开，我们可以得到在 $z = 2$ 处的主要部分

$$g(z) = \sum_{n=-2}^{-1} a_n (z-2)^n$$

, 由于当 $|z| > 2015$ 时，$f(z)$ 有界，同时，$f(z) - g(z)$ 在整个复平面上全纯，而且有界，有界整函数必为常数，从而我们可以得到 $f(z) = g(z) + c$, 如何带入题中所给的三个点，可以算得结果。

2.5 留数及其应用

这一章主要是洛朗级数在积分方面小应用，也就是留数，以及各种积分的计算

留数简单来说就是函数进行洛朗展开后，其负 1 幂次的系数，这个系数的特殊性在进行积分的时候可以体现出来，f 展开成洛朗级数后，因为一致收敛性，可以交换积分与求和次序，可以对每一项单独积分再求和，然而除了-1 幂次之外，其他项积分都是 0，只有这一项在积分时被保留下来，我们叫它留数

我们就有如下留数定理

命题 15 设 *f(z)* 在闭路 C 上解析，在 C 的内部区域除去 n 个孤立奇点 $a_1, ..., a_n$ 外也解析，则有

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[f(z), a_k]$$

用这个定理算积分，重要的地方就是留数的计算，一般有如下的方法

- 直接按照定义，对函数洛朗展开，取出 a_{-1} 这个方法是最通用的方法，在不知道怎么算时，不妨想想定义

- 特殊的，如果该奇点是 m 级极点，可以用 $Res[f(z), a] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^m f(z)$,m 如果比较小这个方法还是很实用的，太大了的话，计算量就比较大了，说不定直接按照定义还快一点

- 再特殊一点，如果有 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都在 a 解析，$P(a) \neq 0, Q(a) = 0, Q'(a) \neq 0$, 则 $Res[\frac{P(z)}{Q(z)}, a] = \frac{P(a)}{\lim_{z \to a} \frac{dQ(z)}{dz}}$

总之，算留数，定义要记清楚，如果有一些有比较特殊的形式，会有一些特殊的处理方法，可能会使得计算简便，实在没有办法，定义永远是你的好兄弟，另外一些常见的留数要能反应过来，老师 ppt 上的一些例子要熟悉

留数定理最重要的应用之一就是拿来算一些定积分了，这里面很多定积分你在数分里面可能都见过，不过当时算起来各种技巧，很复杂，在这里可以看到如何留数定理以一破万

一些常用方法

- 遇到 sin, cos, 考虑令 $z = e^{i\theta}$, 这样可以将这些函数都转为 z 的形式，然后选一个合适的围道积分, 有时找不到一个围道，需要考虑函数奇偶性扩充一下积分的区间
- 积分中有 $|dz|$, 可以考虑，如果 $z = Re^{i\theta}|dz| = Rd\theta = \frac{Rdz}{iz}$, 按照积分的曲线，写出 z 关于 θ 的参数方程求解
- 遇到广义积分了，你可能需要选一条合适的围道，一些边边角角可能需要取极限消掉，这时可以考虑书上的三条引理，而且积分的时候最好把你所选的围道说清楚，一段一段的放缩取极限，这样不容易出错。

有的时候为了方便我们会考虑无穷远点的留数

定义 17 *若 ∞ 是 f 的孤立奇点，即 f 在 $R < |z| < \infty$ 中全纯，我们定义 f 在 $z = \infty$ 处的留数为*

$$Res(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$

但是一般来说我们要具体的算出这个值，也就是 $f(z)$ 在 $R < |z| < \infty$ 的洛朗展开的负 1 次幂系数的相反数。考虑到 ∞ 为 $f(z)$ 的极点，当且仅当 0 为 $g(z) = f(\frac{1}{z})$ 的极点，我们只需要考虑 $g(z)$ 对应的留数即可，更具体的可以看我后面留的题。

实际上由这个定义，我们知道所有的留数 (包括无穷远点的留数) 和为 0

这里考虑作业的一道附加题

例 7 *求积分*

$$\int_{|z|=3}\frac{z^{2021}}{z^{2022}-1}$$

这里如果考虑留数定理，需要计算 2022 个一级极点的留数，当然这个也不是很难算，但是如果考虑无穷远点的留数，只需要将其在 $1 < |z| < \infty$ 上展开，这个实际上可以一眼看出结果。

类似的还有

例 8 *求积分*

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^3(z^{10}-2)}$$

这里直接来算无穷远点处的留数会简单不少，因为这里对于 0 点有三级极点。

很多同学在取极限这一块就会日常口胡，明明不趋于 0，硬说趋于 0，在考试的时候，这样不可能骗到分的，要注意.

这里 ppt 上有巨多的例子，有空多算算，动动你们勤快的小手，考试的时候才不会慌

这里再给出两个例子

例 9

$$(1)\int_{|z|=2}\frac{e^{\overline{z}|dz|}}{4z-\overline{z}+15}$$

这个比较经典，令 $z = 2e^{i\theta}$ 然后用 $d\theta = \frac{dz}{iz}$, 计算留数即可，结果为 $\frac{4\pi e^{-1}}{17}$

$$(2)\int_{|z|=1}\frac{z^{2020}}{(sinz)^{2023}}dz$$

令 $sinz = z\phi(z)$,$\phi(z) = 1 - \frac{z^2}{6} + ...$, 注意到 0 为被积函数的三阶极点，我们需要考虑 $(\frac{1}{\phi(z)^{2023}})''$ 计算即可。

还有一个应用就是辐角原理，这里我们考虑的函数形式主要是 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 我们有这样的定理

命题 16 *设 $f(z)$ 在正向闭路 C 的内部可能有有限个极点，除去这些极点外，$f(z)$ 在 C 及其内部解析，且 $f(z)$ 在 C 上无零点则有*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$$

N, P 分别是 $f(z)$ 在 C 内部的零点和极点总数

那为什么叫辐角原理，上面的说明好像和辐角毫无关系，但是注意到 $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ 的几何意义: 当 z 绕 C 一圈时，会在 w 平面上连续变化处一条闭曲线，这个闭曲线前后绕原点的圈数就是这个式子的值, 其中符号表示绕的方向

使用这个定理的几何意义，我们可以得到

命题 17 *设 $f(z)$ 和 $\varphi(z)$ 在正向闭路 C 及其内部解析，且在边界 C 上，$|f(z)| > |\varphi(z)|$，则在 C 内部 $f(z) + \varphi(z)$ 和 $f(z)$ 的零点个数相等*

证明要点就是由条件可以得到 $1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)}$ 不会绕原点转圈，这个定理一个应用就是求零点个数，通过找一个零点个数好求的函数，然后证明这个函数零点个数与需要求零点个数的函数相等，即可。

例 10 *证明 $\lambda - z - e^{-z} = 0(\lambda > 1)$ 在右半平面内有唯一一个根，且是实的。*

考虑 $f(z) = -e^{-z}, g(z) = \lambda - z$，取 C 为右半圆，在圆弧上 $|z| = R, z = x + iy, x > 0$，我们总能有 $|-e^{-z}| = |e^{-x-iy}| \leq 1$，只要 R 足够大，我们可以有 $|f(z)| < |g(z)|$. 在 y 轴上，$z = iy$，注意到 λ 为实数，$|\lambda - z| > \lambda > 1 = |-e^{-iy}|$，从而在右半圆上，我们总有 $|f(z)| < |g(z)|$，这样可以得到，$f(z) + g(z)$ 零点个数和 $g(z)$ 相等，从而 $\lambda - z - e^{-z} = 0(\lambda > 1)$ 在右半平面内有唯一根，然后考虑函数 $f(x) = \lambda - x - e^{-x}, x \geq 0, f(0) = \lambda - 1 > 0, f(\lambda) = -e^{-\lambda} < 0$，从而该方程在实轴上有根，结合上面可以得到，在右半平面内有唯一一个根，且是实的。

2.6 拉普拉斯变换

本章可以说和前面内容关系不是很大，更多是可能为后面数理方程铺路

定义 18 *设 $f(t)$ 是实变量 t 的实值或复值函数，$f(t) = f(t)h(t), h(t)$ 在 t 大于 0 时为 1，其余为 0，若 $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$，在 $p = \sigma + is$ 的某区域内收敛，则称 $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ 为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 (简称拉氏变换)，也称为 $f(t)$ 的拉氏变换的像函数，记作*

$$L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

这里要求在 $t > 0$ 的地方积分，因为小于 0 的话 e^{-pt} 这一项可能就会很大，就有问题了

对应的也有逆变换，$f(t)$ 是 $F(p)$ 的拉式逆变换，或本函数，记为 $f(t) = L^{-1}[F(p)]$

或者写出表达式

$$f(t) = f(t)h(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}dp$$

那么对于什么样的函数我们可以做拉式变换呢, 我们有下面的定理?

定理 2.5 *如果 f(t) 满足下面两个条件*

- *f(t) 在 t 轴任意有限区间内逐段光滑*
- *f(t): 指数增长型，即 $\exists K > 0, c \geq 0$ 使得 $|f(t) \leq Ke^{ct}|, \forall t \geq 0$*

则像函数 $F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ 在区域 $Rep>c$ 内有意义且解析。

常见的一些拉式变换及其逆变换列在下面

- $$L[1]=L[h(t)]=\frac{1}{p},L^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]=h(t)$$
- $$L[e^{at}]=\frac{1}{p-a},L^{-1}\left[\frac{1}{p-a}\right]=e^{at}h(t)$$
- $$L[sin\omega t]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2},L^{-1}\left[\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right]=h(t)sin\omega t$$
- $$L[cos\omega t]=\frac{p}{p^2+\omega^2},L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+\omega^2}\right]=h(t)cos\omega t$$
- $$L[sh\omega t]=\frac{\omega}{p^2-\omega^2},L^{-1}\left[\frac{\omega}{p^2-\omega^2}\right]=h(t)sh\omega t$$
- $$L[ch\omega t]=\frac{p}{p^2-\omega^2},L^{-1}\left[\frac{p}{p^2-\omega^2}\right]=h(t)ch\omega t$$

这里主要需要了解其性质

- 线性性,$L[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha L[f(t)]+\beta L[g(t)]$
- 相似定理，$L[f(\alpha t)]=\frac{1}{\alpha}F(\frac{p}{\alpha})$
- 位移定理，$L[e^{\lambda t}f(t)]=F(p-\lambda)$
- 微分，$F'(p)=L[-tf(t)],F^{(n)}(p)=L[(-t)^nf(t)]$
- 本函数微分公式，$L[f'(t)]=pL[f(t)]-f(+0),f(+0)=\lim_{t\to 0^+}f(t)$
- 本函数积分公式，$L[\int_0^t f(s)ds]=\frac{1}{p}L[f(t)]$ 这两个性质的本质将极限运算转变为代数运算
- 延迟定理，设 $\tau>0,f(t-\tau)=f(t-\tau)h(t-\tau)$, 则 $L[f(t-\tau)h(t-\tau)]=e^{-p\tau}L[f(t)]$, 这个性质考虑将 f 向右平移后的拉氏变换与 f 本身的拉氏变换的关系
- 卷积定理，$L[f_1*f_2]=L[f_1]l[f_2]$ 拉氏变换把卷积变成了乘积。

对于一些复杂的函数，我们想去求其逆变换可以考虑如下定理

定理 2.6 设 $F(p)=L[f(t)]$ 在 $Rep\le\sigma$ 内有奇点 $p_1,p_2,...,p_n$, 除此这些奇点外，$F(p)$ 在 p 平面处处解析，设 $\lim_{p\to\infty}F(p)\to 0$，则 $f(t)=\sum_{k=1}^n Res\left[F(p)e^{pt},p_k\right]$

这些性质可以用来解微分方程初值问题，基本步骤

- 1. 对方程两边作拉氏变换，得到关于 $Y(p)$,p 的代数方程，一般来说不会超过二次，所以上面那些简单的拉氏变换一定要熟练
- 2. 解所得代数方程得到 $Y(p)$
- 3. 对 $Y(p)$ 做拉式逆变换, 这里得到的结果会乘上一个 $h(t)$ 不过没有关系，可以验证在 t<0 时也成立，这样就得到了原微分方程的解，去掉 $h(t)$.

拉氏变换重要的就是掌握这些定义的应用就行，更好的理解一些物理图像？助教物理不好 qwq

3 往年卷分析以及一些预测

这一部分可能是有些同学很感兴趣的，大概总结了 4，5 年的往年卷规律

基础部分，基本上包含求复方程的解，或者求复数的值，洛朗级数展开，求解析函数 (给实部求虚部)，幂级数收敛半径，求根个数 (儒歇定理)

第二部分就是算积分，这里有可能会出现要积 $|dz|$ 这样的，这个老师讲过的，要会的，不要只看一遍，要真的动手算，不然一到考试，紧张了可能就没了, 然后定积分要学会用留数定理，学会将这个实的形式转为复的，写清楚围道，这样才能找清楚奇点，作业里面有同学这种题，算一个错一个，说再多还是同学们把算功提上来比较重要，多看看 ppt 例子，多动手

第三部分貌似每年都有拉普拉斯变换解微分方程，但是我觉得今年大概率还是有的，而且掌握了性质，这种题实际上送分，复习的时候需要关注一下，别把自己送了。如果对自己算出的结果把握不定，就简单的代入验证一下，有的时候可以发现很多问题

第四部分，可能是比较综合的题，每年不定，难度稍微有一点，毕竟复变 B 没怎么重视证明，这一部分就需要看同学们自己对复变函数的理解有多深刻了, 这一部分往年题的参考价值估计不高，有些题涉及到的知识好像今年没讲，所以说还是以老师讲的内容为主

下面整理一些杂题，大家有兴趣就做做

1. 设 $f(z)$ 是域 D 上非常数的全纯函数，并且在 D 上不取 0 值，证明：
   (1)$log|f(z)|$ 在 D 上调和
   (2)$|f(z)|^p$ 在 D 上不调和，p>0, 更一般的 $\Delta|f(z)|^p = p^2|f|^{p-2}|f'|^2$

注解 11 *要注意调和函数是实值函数，这里 f 虽然是复的，但是加了模长就变成实值的了，可以考虑我在前面提到的拉普拉斯算子的另一种表示来解这道题，另外学会用模长公式 $z\bar{z} = |z|^2$*

2. 设 $a_1, a_2, ..., a_n \in B(0,1), f(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z}$, 证明
   (1), 若 $b \in B(0,1)$, 则 $f(z) = b$ 在 $B(0,1)$ 中恰有 n 个根
   (2), 若 $b \in B(1,\infty)$, 则 $f(z) = b$ 在 $B(1,\infty)$ 中恰有 n 个根

注解 12 *本题考察儒歇定理，不妨注意一下这种形式的函数的模*

3. 设 f 在 $B(0,R)$ 上全纯，在边界上没有零点，在内部零点个数为 N，证明

$$\max_{|z|\to R} Re\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} \geq N$$

注解 13 *辐角原理, 这里积分路径是圆，可以考虑换元 $z = Re^{i\theta}$ 以及简单的放缩*

4. 设 $0 < r < 1$, 证明：当 n 充分大时，多项式

$$1 + 2z + 3z + ... + nz^{n-1}$$

在 $B(0,r)$ 中没有根

注解 14 *本题也是儒歇定理的应用，注意到该级数在 $B(0,1)$ 内，可以内闭一致收敛到 $\frac{1}{(1-z)^2}$*

5.f 在域 D$|z| > R$ 上全纯，证明
   (1) 若 ∞ 是 f 的可去奇点，则

$$Res(f,\infty) = \lim_{z\to\infty} z^2 f'(z)$$

(2) 若 ∞ 是 f 的 m 阶极点，则

$$Res(f,\infty)=\frac{(-1)^m}{(m+1)!}\lim_{z\to\infty}z^{m+2}f^{(m+1)}(z)$$

注解 15 本题讲上课讲的求留数的公式推广到了无穷远点的情况，理解无穷远点是奇点怎么定义的，结合留数定义以及洛朗展开即可

6. 算积分

$$\int_{|z|=R}\frac{z^2}{e^{2\pi iz^3}-1}dz,(n<R^3<n+1,n\in N)$$

注解 16 常规的留数定理，看起来复杂做起来简单，结果是 $n+1$

7. 若 $f(z)$ 在 $D=B(0,1)$ 上全纯，求证：

$$2|f'(0)|\leq\sup_{z,w\in D}|f(z)-f(w)|$$

等号成立当且仅当 $f(z)=a_0+a_1z$

注解 17 本题难度较大，看到 f' 与 f 关系可以往柯西积分公式上想，并注意到下面的式子

$$\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}f(re^{i\theta})d\theta=-\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}f(-re^{i\theta})d\theta$$

8.f 在复平面除去极点 1，2，∞ 外全纯，且在这三个极点处的洛朗展开的主要部分为 $\frac{1}{z-1}$,$\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}$ 和 $z+z^2$, 并且 $f(0)=0$, 求 $f(z)$

注解 18 这题很有意思的，看起来只给了极点处的性状，但是注意到，如果我们把所有主要部分减去，则有 f 减去这些主要部分在整个复平面 (包括无穷远点) 全纯，从而是常数。

9. 设 $0<a_0<a_1<...<a_n$ 证明三角多项式 $a_0+a_1cos\theta+a_2cos2\theta+...+a_ncosn\theta$ 在 $(0,2\pi)$ 中有 2n 个不同的零点.