第四章 解析函数的级数表示

级数是研究解析函数的又一重要工具，

两种级数：**1.** 幂级数 **2.** 洛朗级数

4.1 幂级数

定义 设有复数列$\{z_n = x_n + \mathrm{i}\, y_n, n = 1,2,\cdots\}$, 其中$x_n, y_n \in \mathbb{R}$,

称 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} z_k = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_k + \cdots$ 为复数项无穷级数.

(1)若$\{z_n\}$部分和复数列$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$, $n = 1,2,\cdots$有极限

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S \text{(有限复数)},$$

则称级数$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} z_k$收敛，称$S$ 为$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} z_k$的和，记作 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} z_k = S$,

即 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} z_k = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$.

(2)若$\{z_n\}$部分和复数列$\{S_n\}$不收敛, 则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} z_k$ 发散.

定理1(P74) $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + \mathrm{i}\, b_n)$ 收敛(于$S = a + \mathrm{i}\, b$) 的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{收敛(于}a\text{) 和 } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ 收敛(于}b\text{).}$$

证明：因为$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + \mathrm{i}\, b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} b_k$, 故

$\{S_n\}$ 收敛的充要条件是$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}$收敛和$\left\{\sum_{k=1}^{n} b_k\right\}$收敛.

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = a + \mathrm{i}\, b$的充要条件是 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = a$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = b$.#

定理1 $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + \mathrm{i}\, b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \mathrm{i} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$

推论 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + \mathrm{i}\, b_n)$ 收敛, 则 $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0.$

证明 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + \mathrm{i}\, b_n)$ 收敛, 则由定理1,

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$和$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$收敛,

故 $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} z_n = 0.$#

例1. 判断 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2^n}+\mathrm{i}\frac{(-1)^n}{n}\right\}$和 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2^n}+\mathrm{i}\frac{1}{n}\right\}$的敛散性.

解 因为$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛,

故$\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2^n}+\mathrm{i}\frac{(-1)^n}{n}\right\}$收敛.

因$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 故$\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2^n}+\mathrm{i}\frac{1}{n}\right\}$发散.

绝对收敛

与实数项级数类似,

定义 如果$\sum_{n=1}^{+\infty}|z_n|$收敛, 则称级数$\sum_{n=1}^{+\infty}z_n$绝对收敛.

注：由于$\sum_{n=1}^{+\infty}|z_n|=|z_1|+|z_2|+|z_3|+\cdots$是实正项级数,

因此实正项级数的一切收敛判别法,

都可被用来判别复数项级数的绝对收敛性.

定理2(P 75) $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (x_n + \mathrm{i}\, y_n)$ 绝对收敛的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \text{ 和 } \sum_{n=1}^{+\infty} y_n \text{都绝对收敛.}$$

证明：(1)充分性. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$和$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ 都绝对收敛, 则

由 $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \le |x_n| + |y_n|$知$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 绝对收敛.

(2)必要性. 若$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$绝对收敛，则

由$|x_n| \le |z_n|, |y_n| \le |z_n|$知$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$都绝对收敛.#

例 判断复级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{n}+\mathrm{i}\frac{1}{2^n}\right\}$ 是否绝对收敛.

解. 因为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 不是绝对收敛.

从而由定理2(P75)知 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{n}+\mathrm{i}\frac{1}{2^n}\right\}$ 不绝对收敛.#

推论 若 $\sum_{n=1}^{+\infty}z_n=\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n+\mathrm{i}\,y_n)$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty}z_n$ 收敛.

证明: 由定理2, 若 $\sum_{n=1}^{+\infty}z_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty}y_n$ 都绝对收敛,

故 $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty}y_n$ 都收敛，再由定理1知 $\sum_{n=1}^{+\infty}z_n$ 收敛.#

例2(P75) 讨论级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ 的敛散性.

解 (1)因当$0 < a < 1$时，正项实级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ 收敛，

故 当$|z| < 1$时，正项级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} |z|^n$ 收敛，从而 $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ 绝对收敛,

其部分和$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$ (等比数列之和),

当$|z| < 1$时, $\lim_{n\to+\infty} |z^n - 0| = \lim_{n\to+\infty} |z|^n = 0$,故 $\lim_{n\to+\infty} z^n = 0.$

$$\therefore \sum_{k=0}^{+\infty} z^n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1}{1-z}$$ (几何级数).

(2) 当$|z| \geq 1$时，因 $\lim_{n\to+\infty} |z^n - 0| = \lim_{n\to+\infty} |z|^n \geq 1 \neq 0$,

由定理1推论(P74)知$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ 发散.

幂级数及其收敛圆

定义(P76): 设$a_n(n=0,1,2,\cdots)$和a 都是复常数，称无穷级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots$$

为幂级数.

若复数项级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_0-a)^n$ 收敛，则称幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ 在点z_0收敛.

若此幂级数在点集E上每一个点收敛，则称它在点集E上收敛.

映射：$z \in E \to \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ 的和，定义了E上的一个复值函数，

称为和函数.

关于幂级数收敛性, 有以下两个定理:

定理3 Abel(阿贝尔)定理(P76) 令$I=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$为幂级数,

(1) 若幂级数I在$z_0(\neq a)$收敛, 则I在圆$|z-a|<|z_0-a|$内绝对收敛;

(2) 若幂级数I在z_1发散, 则I在圆外域$|z-a|>|z_1-a|$处处发散.

证明 (1)用比较判别法.

由条件和定理1推论知

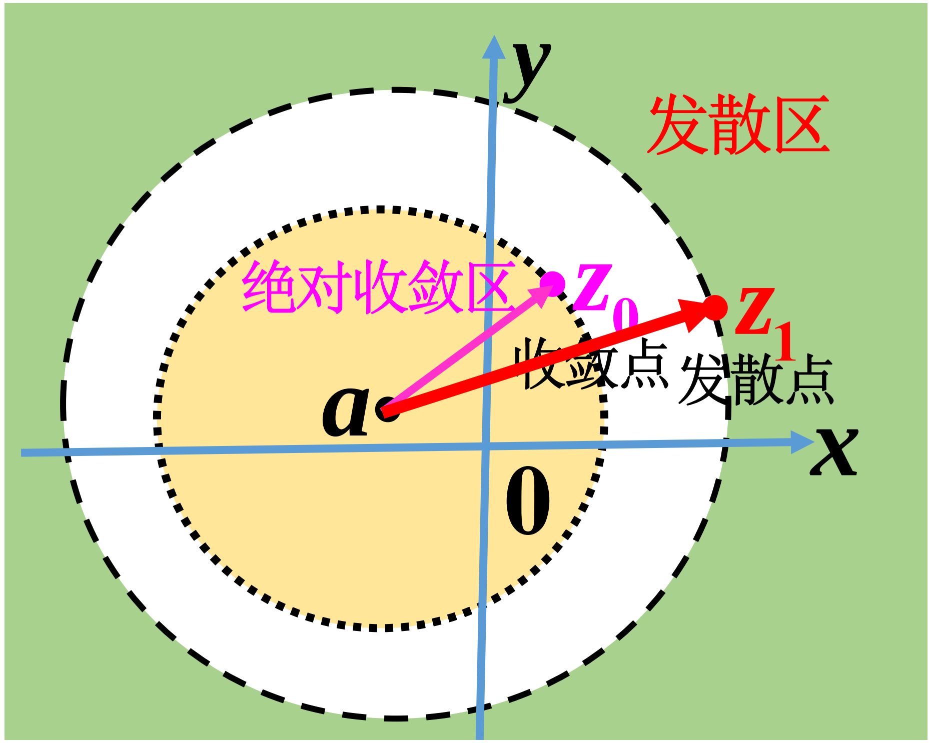
$$\lim_{n\to+\infty}a_n(z_0-a)^n=0\Rightarrow\exists M>0,$$

$$\forall n\geq 1,\ |a_n(z_0-a)^n|\leq M.$$

$$\therefore\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n(z-a)^n|$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left|a_n(z_0-a)^n\cdot\frac{(z-a)^n}{(z_0-a)^n}\right|$$

$$\leq\sum_{n=0}^{+\infty}M\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n$$ (绝对收敛). 从而由比较判别法即得结论.



(2) 用反证法证明.

假设存在z_2, 使得$|z_2-a|>|z_1-a|$, 且I在 z_2 收敛,

则由(1)知, I在$|z-a|<|z_2-a|$内绝对收敛.

而z_1在$|z-a|<|z_2-a|$内, 故I在z_1绝对收敛,

这与条件I在z_1发散矛盾!

因此I在圆外域$|z-a|>|z_1-a|$处处发散. 证毕.#

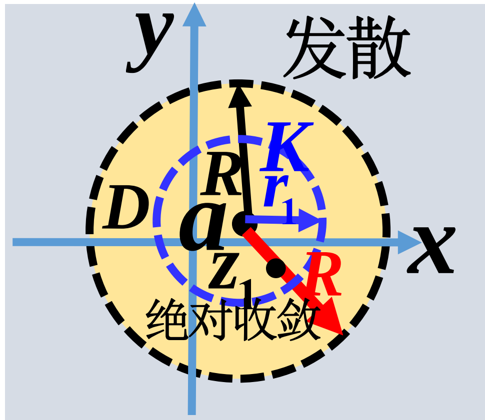
定理4(P76)

若实幂级数$J=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|x^n, x\in\mathbb{R}$的收敛半径为$R$, 令$I=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$, 则

(1) 若$0<R<+\infty$, 则

(i) I 在圆$D:|z-a|<R$ 内绝对收敛;

(ii) I在圆外域$|z-a|>R$处处发散;



(2)若$R=+\infty$,则 I 全平面内收敛;

(3)若$R=0$,则I 在全平面内除$z=a$ 外处处发散.

证明:(1)(i)若$0<R<+\infty$, $\forall z_1\in D$,有$|z_1-a|<R$.

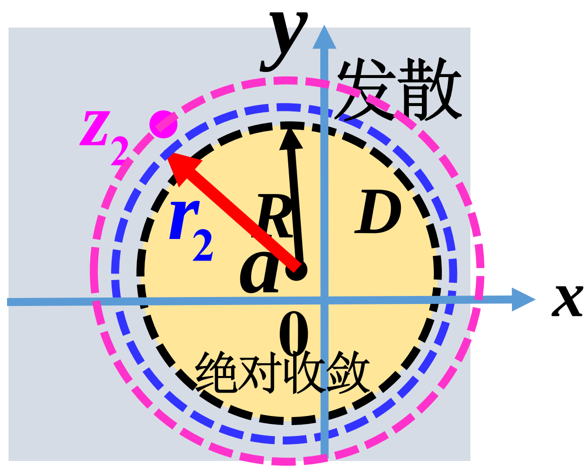
可取$r_1>0$使得$|z_1-a|<r_1<R$. 由条件知, $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|r_1^n$ 收敛,

故 I 在圆周$K:|z-a|=r_1$ 上任一点绝对收敛, 从而由**Abel定理**有

I在K内点 z_1 绝对收敛. 由z_1任意性知, I 在圆D 内绝对收敛.

(1)(i i)反证法.

假设在圆外域:$|z-a|>R$ 内存在一点z_2 使得 $|z_2-a|>R, I$在 z_2收敛.



则对任意满足$|z_2-a|>r_2>R$ 的r_2,

由**Abel定理**知I 在圆$|z-a|=r_2$ 上的任一点绝对收敛.

因此 $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|r_2^n$ 收敛. 这与假设 $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|x^n$ 的收敛半径为R 矛盾.

(2),(3)证明类似(详见后面的证明). 证毕.

定义: **定理4(P76)** ⇨ 称实幂级数$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|x^n$, $x\in\mathbb{R}$的收敛半径R

为幂级数 $I=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$ 的收敛半径.

称$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|x^n,\ x\in\mathbb{R}$ 的收敛半径R为幂级数 $I=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$ 的收敛半径.

(1)若$0<R\le+\infty$, 则称圆内域$|z-a|<R$ 为 I 的收敛圆;

定理4(P76) $\Rightarrow$ I 在$|z-a|<R$ 内处处收敛.

(2) 当$0<R<+\infty$时, 在收敛圆周$|z-a|=R$ 上任一点,

I 可能收敛, 也有可能发散. 具体问题需具体分析.

(3)若$R=0$, I 在全平面内仅在点$z=a$ 收敛.

根据 $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|x^n,\ x\in\mathbb{R}$ 收敛半径R 的达朗贝尔计算公式或柯西计算公式知:

若$a_n\neq 0\left(n=0,1,2,\cdots\right)$, 则幂级数$I$ 的收敛半径$R=\frac{1}{r}$,

其中 $r=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, 或 $r=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$.

例 试求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^p}$ (p为正整数)的收敛半径R.

解 因为 $a_n=\frac{1}{n^p}$,

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}=1.$$

故收敛半径为 $R=\frac{1}{r}=1.$

根据 $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|x^n,\ x\in\mathbb{R}$ 收敛半径R 的达朗贝尔计算公式或柯西计算公式知:

若$a_n\neq 0(n=0,1,2,\cdots)$, 则 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$ 的收敛半径$R=\frac{1}{r}$, 其中

$$r=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,\quad \text{或 } r=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

定理4(P76) 若$J=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|x^n$ 的收敛半径为R, 令$I=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$, 则

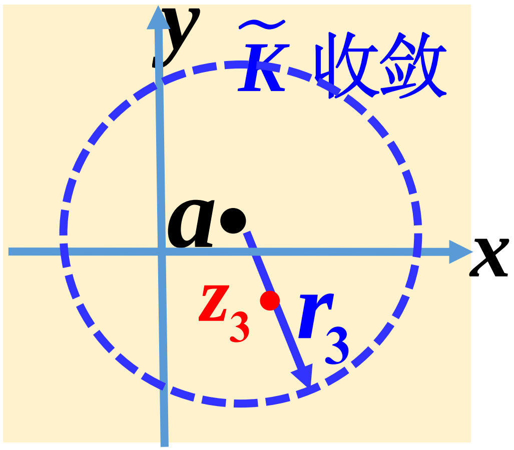
(2) 若$R=+\infty$, 则幂级数 I在全平面内收敛;

(3)若$R=0$, 则I 在全平面内除$z=a$ 外处处发散.

证明:(2)$R=+\infty$, $\forall z_3\in\mathbb{C}$(复平面), $\exists r_3>0$使得$|z_3-a|<r_3$.

由条件知, $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|r_3^n$ 收敛, 故 I 在$\widetilde{K}$: $|z-a|=r_3$ 上任一点绝对收敛,

z_3 在 $\widetilde{K}$ 内，由Abel定理知, I 在z_3收敛.



由z_3的任意性知, I在全平面内收敛.

定理4(P76)若$J=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|x^n$ 的收敛半径为R, 令$I=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$, 则

(3)若$R=0$, 则I 在全平面内除$z=a$ 外处处发散.

(3)的证明用反证法. 证明过程与(1)(ii) 的证明过程类似.

若$R=0$, 假设存在一点$z_4\neq a$, 使得I在点 z_4 收敛.

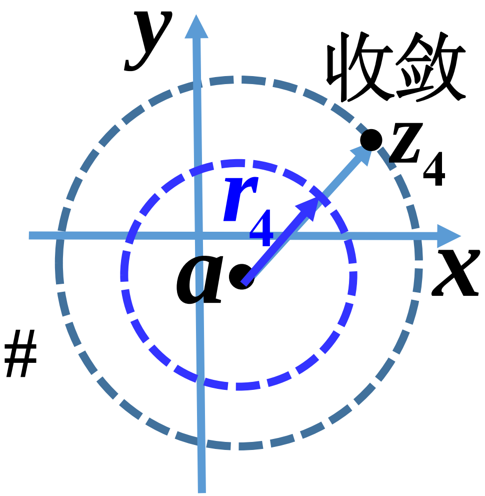
可取到$r_4>0$,使得 $0<r_4<|z_4-a|$.

由Abel 定理知 I 在圆周$|z-a|=r_4$上任一点绝对收敛.

故$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|r_4^n$ 收敛,

这与条件J的收敛半径$R=0$矛盾.

故幂级数 I 在全平面内除去$z=a$ 外处处发散.#



与实幂级数类似，若 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n$ 的收敛半径为$R>0$，则在收敛圆$|z-a|<R$ 内，

1) $f(z)$可以逐项求任意阶导数，故$f(z)$在收敛圆内解析：

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{+\infty}n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k},\ k\geq 1.$$

在上述幂级数的两边取$z=a$，有：

$$f(a)=a_0;\quad f^{(k)}(a)=k(k-1)(k-2)\cdots 1\cdot a_k,\ k\geq 1.$$

$$\Rightarrow\quad a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!},\ k\geq 0.$$

→ 定理5(P 78)

2)在收敛圆内曲线C上，可以逐项积分：

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_C\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-a)^n\right)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\int_C(z-a)^n\,\mathrm{d}z.$$

作业

P 98

1, 2(4)(6)(8)