复变函数 B 作业 8

2023 年 11 月 20 日

4. 求下列积分：

(1)$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}(a>1)$

解：令 $z=e^{i\theta}$, 则 $\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$, $d\theta=\frac{dz}{iz}$

$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\int_{|z|=1} \frac{1}{a+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}\frac{dz}{iz}=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{2}{z^2+2az+1}dz$

$z^2+2az+1=0 \Rightarrow z_1=-a+\sqrt{a^2-1}, z_2=-a-\sqrt{a^2-1}$, 其中，仅 z_1 位于 $|z|=1$ 内，为一阶极点；

$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}=-i\cdot 2\pi i Res[\frac{2}{z^2+2az+1}, z_1]=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$

(2)$\int_0^{2\pi} \frac{r-\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}d\theta$

4. 解 (2) $\int_0^{2\pi} \frac{r-\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}d\theta$ （$r\neq 1$ 补充条件）

令 $z=e^{i\theta}$. 易得：$\int_{|z|=1} \frac{r-z}{i(rz-1)(r-z)}dz$ 的实部为所求积分

即：$I=Re\left\{\int_{|z|=1}\frac{r-z}{i(rz-1)(r-z)}dz\right\}=Re\, I_1$

下面讨论 $z=\frac{1}{r}$, $z=r$ 极点落在 $|z|=1$ 内情况.

① 若 $|r|>1$. 则：$I_1=\frac{-1}{ri}\int_{|z|=1}\frac{r-z}{(z-\frac{1}{r})(z-r)}dz$.

此时极点为 $z=\frac{1}{r}$. $z=r$. 只有 $z=\frac{1}{r}$ 在 $|z|=1$ 内.

$\therefore I_1=2\pi i\cdot Res[f(z), \frac{1}{r}]$

$=2\pi i\cdot\frac{-1}{ri}\cdot(-1)=\frac{2\pi}{r}$ $I=Re\, I_1=\frac{2\pi}{r}$

② 若 $|r|<1$. 则 此时极点 $z=r$ 在 $|z|=1$ 内.

$\therefore I_1=2\pi i\cdot Res[f(z), r]=0$

$\therefore I=Re\, I_1=0$

综上：$|r|<1$ 时. $I=0$ ； $|r|>1$ 时. $I=\frac{2\pi}{r}$.

(3)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2+\sin^2\theta}d\theta (a>0)$

(3) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a^2+\sin^2\theta}$，由于 $\frac{1}{a^2+\sin^2\theta}$ 为偶函数，故 $I=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a^2+\sin^2\theta}$

$\therefore I=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a^2+\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \overset{\tilde{\theta}=2\theta}{=\!=\!=} \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\frac{1}{2}d\tilde{\theta}}{a^2+\frac{1-\cos\tilde{\theta}}{2}}=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\tilde{\theta}}{2a^2+1-\cos\tilde{\theta}}$

令 $z=e^{i\tilde{\theta}}$，可得 $I=\frac{1}{2}\int_{|z|=1}\frac{dz}{i\cdot(2a^2+1-\frac{z+\frac{1}{z}}{2})\cdot z}$

$=\frac{1}{-i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-(4a^2+2)z+1}$

则极点可由分母 $=0$ 得出：$z_{1,2}=\frac{4a^2+2\pm\sqrt{(4a^2+2)^2-4}}{2}=2a^2+1\pm 2a\sqrt{a^2+1}$，一级

由于 $a>0$，且 $2a^2+1+2a\sqrt{a^2+1}>1$

$2a^2+1-2a\sqrt{a^2+1}=1-2a(\sqrt{a^2+1}-a)<1$

$\therefore$ 在 $|z|=1$ 内的极点为 $z_2=2a^2+1-2a\sqrt{a^2+1}$

$\therefore I=2\pi i\cdot \mathrm{Res}[f(z), z_2]$

$=2\pi i\cdot(-\frac{1}{i})\cdot\frac{1}{(z^2-(4a^2+2)z+1)'}\Big|_{z=z_2}$

$=-2\pi\cdot\frac{1}{2z-(4a^2+2)}\Big|_{z=z_2}=\frac{\pi}{2a\sqrt{a^2+1}}$

5. 求下列积分：

解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx \ (a>0)$

取 $R(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$，在上半平面只有一个二级极点 ai。

$\therefore \mathrm{Res}[R(z), ai]=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+ai)^2}\right]=\frac{2zai}{(z+ai)^3}\Big|_{z=ai}=\frac{1}{4ai}$

$\therefore I=2\pi i\cdot\frac{1}{4ai}=\frac{\pi}{2a}$.（运用书本 P114 页公式）

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$　　极点：a_1 a_2

取 $R(z)=\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$，在上半平面有两个一级极点 ai 和 bi。

$\therefore \mathrm{Res}[R(z), ai]+\mathrm{Res}[R(z), bi]=\lim_{z\to ai}\frac{1}{(z+ai)(z^2+b^2)}+\lim_{z\to bi}\frac{1}{(z^2+a^2)(z+bi)}$

$=\frac{1}{2ai\cdot(b^2-a^2)}+\frac{1}{2bi\cdot(a^2-b^2)}=\frac{1}{2abi\cdot(a+b)}$

$\therefore I=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{2}\mathrm{Res}[R(z), a_k]=2\pi i\cdot\frac{1}{2abi(a+b)}=\frac{\pi}{ab(a+b)}$

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

取 $R(z)=\frac{1+z^2}{1+z^4}$. 解 $z^4+1=0$ 可得四个一级极点 $\begin{cases} z_1=e^{\frac{\pi}{4}i} \\ z_2=e^{\frac{3\pi}{4}i} \\ z_3=e^{\frac{5\pi}{4}i} \\ z_4=e^{\frac{7\pi}{4}i}\end{cases}$ z_1, z_2 在上半平面.

$\therefore \sum_{k=1}^{2} Res[R(z), z_k]=\lim_{z\to z_1}\frac{1+z^2}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}+\lim_{z\to z_2}\frac{1+z^2}{(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}i}+\frac{1}{2\sqrt{2}i}=\frac{1}{\sqrt{2}i}$

由于 $\frac{1+x^2}{1+x^4}$ 为偶函数. $\therefore I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$.

$\therefore I=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{2} Res[R(z), z_k]=\pi i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}i}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

附加题：$\int_{|z-1|=2}\frac{|dz|}{1+|z|^2}$

解：$|z-1|=2$. 取 $z=2e^{i\theta}+1$. $dz=2ie^{i\theta}d\theta$

则 $|dz|=|2ie^{i\theta}d\theta|=2d\theta$

$|z|^2=|2\cos\theta+2i\sin\theta+1|^2=4\cos^2\theta+1+4\cos\theta+4\sin^2\theta=5+4\cos\theta$

$\therefore I=\int_0^{2\pi}\frac{2d\theta}{6+4\cos\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3+2\cos\theta}$

则取 $z=e^{i\theta}$. $I=\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz(3+z+\frac{1}{z})}$

$=\int_{|z|=1}\frac{dz}{i(z^2+3z+1)}$

极点为 $z_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$, 其中 $z_1=\frac{\sqrt{5}-3}{2}$ 在 $|z|=1$ 内.

$\therefore$ 原积分 $I=2\pi i\cdot\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{(z^2+3z+1)'}\Big|_{z=z_1}=2\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\pi$.

6. 求下列积分

(1)$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx(a>0,b>0)$

解：(1) 由于 $\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}$ 为偶函数. 故原积分 $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx$.

取 $R(z)=\frac{z}{z^2+b^2}$ 在上半平面只有一个一级极点 $z=bi$

$\therefore Res[R(z)e^{iaz}, bi]=\lim_{z\to bi}\frac{ze^{iaz}}{z+bi}=\frac{e^{-ab}}{2}$

由公式(4)可知：$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx$

$=\frac{1}{2}Im\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{iax}}{x^2+b^2}dx\right]$

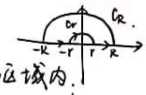
$=\frac{1}{2}Im\left[2\pi i\cdot\frac{e^{-ab}}{2}\right]$

$=\frac{\pi}{2}\cdot e^{-ab}$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx(a>0,b>0)$

(2). 由于 $\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}$ 为偶函数. 故原积分 $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx$.

注意到: $f(z)=\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}$. 取围道如右:



则: 此时存在 $z=bi$ 一个一级极点在积分区域内.

$\therefore \int_C f(z)dz = 2\pi i\cdot\lim_{z\to bi}\frac{e^{iaz}}{z(z+bi)} = 2\pi i\cdot\frac{e^{-ab}}{-2b^2} = \frac{\pi i e^{-ab}}{-b^2}$

再由柯西积分定理: $\int_C f(z)dz = \int_{-R}^{-r}f(x)dx+\int_r^R f(x)dx + \int_{C_r}f(z)dz+\int_{C_R}f(z)dz$.

由若尔当引理: $\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z(z^2+b^2)}=0. \Rightarrow \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}dz=0. \Rightarrow \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$

由引理 2: $\lim_{r\to0}\int_{C_r}f(z)dz = -\pi i\cdot Res[f(z),0]$

$= -\pi i\cdot\lim_{z\to0}\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}$

$= \frac{-\pi i}{b^2}$

$\therefore$ $R\to+\infty$, $r\to0$ 时: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx - \frac{\pi i}{b^2} = \frac{\pi i e^{-ab}}{-b^2}$

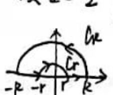
$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx = \frac{\pi i}{b^2}(1-e^{-ab})$

$\therefore I=\frac{1}{2}Im\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{b^2}\cdot(1-e^{-ab}) = \frac{\pi}{2b^2}(1-e^{-ab})$

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\frac{\sin x}{x}dx(a>0)$

(3) 由于 $\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\frac{\sin x}{x}$ 为偶函数. 故 $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\frac{\sin x}{x}dx$

取 $f(z)=\frac{z^2-a^2}{z^2+a^2}\cdot\frac{e^{iz}}{z}$ 取围道:



$\int_C f(z)dz = 2\pi i\cdot Res[f(z),ai] = 2\pi i\cdot\lim_{z\to ai}\frac{z^2-a^2}{z+ai}\frac{e^{iz}}{z} = 2\pi i\cdot e^{-a}$

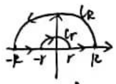
分析过程如(2). 不再多说. $\Rightarrow$ $\begin{cases}\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0 & \text{(若尔当)}\\ \lim_{r\to0}\int_{C_r}f(z)dz = -\pi i\cdot\lim_{z\to0}\frac{z^2-a^2}{z^2+a^2}\cdot e^{iz} = \pi i. & \text{(引理2)}\end{cases}$

$\therefore$ $R\to+\infty$, $r\to0$ 时: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\frac{e^{ix}}{x}dx+\pi i = 2\pi i\cdot e^{-a}$

$\therefore I=\frac{1}{2}Im\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\frac{e^{ix}}{x}dx\right] = \frac{1}{2}Im[2\pi i\cdot e^{-a}-\pi i] = \pi(e^{-a}-\frac{1}{2})$

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2} dx (a > 0, b > 0)$

(4). 由于 $\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}$ 为偶函数. 故 $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}dx$.

取 $f(z)=\frac{e^{i2az}-e^{i2bz}}{z^2}$. 取围道:  $z=0$ 为一级极点.

$$\int_C f(z)\,dz=0=\int_{C_r} f(z)\,dz+\int_{C_R} f(z)\,dz+\int_{-R}^{-r} f(x)\,dx+\int_r^R f(x)\,dx$$

由若尔当引理: $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{e^{i2az}}{z^2}dz=0$. $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{e^{i2bz}}{z^2}dz=0 \Rightarrow \lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)=0$.

由引理2: $\lim\limits_{r\to0}\int_{C_r} f(z)\,dz=-\pi i\cdot\lim\limits_{z\to0}\frac{e^{i2az}-e^{i2bz}}{z}\overset{洛必达}{=\!=}-\pi i\cdot\lim\limits_{z\to0}\frac{2ai\,e^{i2az}-2bi\,e^{i2bz}}{1}$

$$=2\pi(a-b)$$

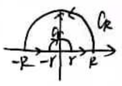
$\therefore R\to+\infty,\ r\to0$ 时: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i2az}-e^{i2bz}}{z^2}dz+2\pi(a-b)=0$

$\therefore I=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i2az}-e^{i2bz}}{z^2}dz\right]=\frac{1}{2}\cdot(-2\pi(a-b))=\pi(b-a)$

(5) $\int_0^{+\infty} (\frac{\sin x}{x})^3 dx$

(5) $I=\int_0^{+\infty}(\frac{\sin x}{x})^3dx$. 由于 $(\frac{\sin x}{x})^3$ 为偶函数. 故 $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{\sin x}{x})^3dx$.

取 $f(z)=\frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(3iz)^n}{n!}-3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}+2}{z^3}=\frac{(3iz)^2-3\cdot(iz)^2+\cdots}{z^3}=\frac{-6+\cdots}{z}$

故 $z=0$ 为 $f(z)$ 的一级极点. 故取围道: 

$$\int_C f(z)\,dz=0=\int_{C_R} f(z)\,dz+\int_{C_r} f(z)\,dz+\int_{-R}^{-r} f(x)\,dx+\int_r^R f(x)\,dx$$

若尔当引理1: $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{e^{3iz}}{z^3}dz=0$. $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{3e^{iz}}{z^3}dz=0$. $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{2}{z^3}dz=0$.

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz=0$$

引理2: $\lim\limits_{r\to0}\int_{C_r} f(z)\,dz=-\pi i\cdot\lim\limits_{z\to0}\frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^2}\overset{洛}{=}-\pi i\cdot\lim\limits_{z\to0}\frac{3ie^{3iz}-3ie^{iz}}{2z}$

$$\overset{洛}{=}-\pi i\cdot\lim_{z\to0}\frac{-9e^{3iz}+3e^{iz}}{2}=-\pi i\cdot\frac{-6}{2}=3\pi i.$$

$R\to+\infty, r\to0$: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}dz+3\pi i=0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}dz=-3\pi i$

由于 $\sin^3x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{z^3}dz=0$. ($\frac{1}{z^3}$ 为奇函数)

$\therefore I=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{3e^{ix}-e^{3ix}}{x^3}dx\right]$

$=\frac{1}{8}\mathrm{Im}\left[-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{3ix}-3e^{ix}+2}{x^3}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{x^3}dx\right]$

$=\frac{1}{8}\cdot3\pi=\frac{3}{8}\pi.$

7. 求下列积分；

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx$

解：(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx$. 取 $f(z) = \frac{e^{iz} - e^{-z}}{z}$. $z=0$ 为可去奇点，故全平面解析。

取闭道：. 由柯西积分定理：$\int_C f(z)\,dz = \int_0^R f(x)\,dx + \int_{Ri}^0 f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz$

由长大不等式：在 C_R 上：$z = Re^{i\theta}$. $\int_{C_R} f(z)\,dz \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-R\sin\theta} + e^{-R\cos\theta}}{R} \cdot R\,d\theta$

由于 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时，$\sin\theta \ge \frac{2}{\pi}\theta$.

(这里 $\tilde{\theta} = \frac{\pi}{2} - \theta$)

则：$\int_{C_R} f(z)\,dz \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta} d\theta + \underline{\int_{\frac{\pi}{2}}^0 e^{-R\sin\tilde{\theta}} (-d\tilde{\theta})}$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta} d\theta \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\cdot\frac{2}{\pi}\theta} d\theta$

$= -\frac{\pi}{R} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{R}(e^{-R} - 1) \to 0$. $R \to +\infty$ 时.

$\therefore \lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0$.

又 $\because \int_0^R f(z)\,dz + \int_{Ri}^0 f(z)\,dz = \int_0^R \frac{e^{ix} - e^{-x}}{x} + \underline{\int_R^0 \frac{e^{i(iy)} - e^{-iy}}{iy}(i\,dy)}$ (这里 $z = iy$)

$= \int_0^R \left(\frac{e^{ix} - e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x} - e^{-ix}}{x}\right) dx$

$= \int_0^R \frac{e^{ix} + e^{-ix} - 2e^{-x}}{x} dx.$

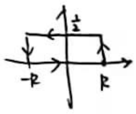
$= \int_0^R \frac{2\cos x - 2e^{-x}}{x} dx$

令 $R \to +\infty$：则有 $0 = 0 + 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx$

$\therefore$ 原积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx = 0.$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx$

(2). $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx$. 取 $\underline{\underline{f(z)=\frac{z}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}}}$. 易时 $z=0$ 为$\underline{\underline{可去奇点}}$. C内解析.

取闭道：

则 $\int_C f(z)dz = \underbrace{\int_{-R}^{R} f(x)dx}_{①} + \underbrace{\int_{R}^{R+\frac{1}{2}i} f(z)dz}_{②} + \underbrace{\int_{R+\frac{1}{2}i}^{-R} f(z)dz}_{③} + \underbrace{\int_{R+\frac{1}{2}i}^{-R+\frac{1}{2}i} f(z)dz}_{④}=0$

即：①+②+③+④=0.

对②：$z=R+iy$. $dz=idy$. $|dz|=dy$.

$$\int_R^{R+\frac{1}{2}i} f(z)dz \le \int_0^{\frac{1}{2}} |f(z)|\,|dz| \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{R}{|e^{\pi(R+iy)}|+|e^{-\pi(R+iy)}|}\cdot dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{R\,dy}{e^{\pi R}+e^{-\pi R}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{e^{\pi R}+e^{-\pi R}}$$

由于 $\lim\limits_{R\to+\infty} \frac{R}{2(e^{\pi R}+e^{-\pi R})} \overset{\frac{\infty}{\infty},洛}{=\!=\!=} \lim\limits_{R\to+\infty} \frac{1}{2(\pi e^{\pi R}-\pi e^{-\pi R})} = 0$.

$\therefore \lim\limits_{R\to+\infty} \int_R^{R+\frac{1}{2}i} f(z)dz = 0$

对③：$z=-R+iy$. $dz=idy$ $|dz|=dy$

$$\int_{-R+\frac{1}{2}i}^{-R} f(z)dz \le \int_{\frac{1}{2}}^{0} |f(z)||dz| \le \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{R\,dy}{e^{\pi R}+e^{-\pi R}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{e^{\pi R}+e^{-\pi R}}.$$

同②可知：$\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{-R+\frac{1}{2}i}^{-R} f(z)dz = 0$.

对④：$\int_{R+\frac{1}{2}i}^{-R+\frac{1}{2}i} f(z)dz = \int_R^{-R} \frac{x+\frac{1}{2}i}{e^{\pi(x+\frac{1}{2}i)}-e^{-\pi(x+\frac{1}{2}i)}}dx$

$= \frac{1}{i}\int_R^{-R} \frac{x+\frac{1}{2}i}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}dx$. 由于 $\frac{x}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}$ 为奇函数. 故对称区间积分为0

$= \frac{1}{i}\int_R^{-R} \frac{\frac{1}{2}i}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}dx = \frac{1}{2}\int_R^{-R} \frac{e^{\pi x}}{e^{2\pi x}+1}dx$

令 $R\to+\infty$. $\overset{t=e^{\pi x}}{\underset{dt=\pi e^{\pi x}dx}{=\!=\!=}} \frac{1}{2}\int_{+\infty}^{0} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2\pi}\arctan t\Big|_{+\infty}^{0} = \frac{1}{2\pi}\cdot[0-\frac{\pi}{2}] = -\frac{1}{4}$.

综上：$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx = \frac{1}{2}[0-②-③-④] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.