

中国科学技术大学数学科学学院
2019—2020学年第一学期考试试卷

■ A 卷

□ B 卷

课程名称 复变函数B 课程编号 001506
姓名 _____ 学号 _____ 学院 _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一. (共10分) 求解以下复方程

(1) $z^3 = -3\bar{z}$, (其中 $z \neq 0$) (2) $\sin z = 3$.

二. (7分) 已知解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x, y) = e^{\alpha y} \cos 3x + 3x$, 其中 $\alpha > 0$ 且 $f(0) = 1$, 求常数 α , 并求出解析函数 $f(z)$. (请用 z 表示函数 $f(z)$)

三. (10分)

(1) 把 $f(z) = z^5 e^{2z}$ 在 $z = 0$ 展开成幂级数, 并指出收敛区域.

(2) 把 $g(z) = \frac{1}{(z-2)(z-4)^2}$ 在区域 $0 < |z-2| < 2$ 展成洛朗级数.

四 计算复积分(共36分)

(1) $\int_0^{\pi i} (2019z^2 - \cos z) dz$, (2) $\int_{|z|=6} \frac{e^{2z}}{(z-1)(z-3)} dz$,

(3) $\int_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{z^2 - 8z + 5}{z^3(z+2)(z-3)^2} dz$, (4) $\int_{|z|=3} \frac{\cos(\frac{1}{z-2})}{4-z} dz$,

(5) $\int_{|z|=3} \frac{z+5}{1-\cos(z-2)} dz$, (6) $\int_{|z|=2} \frac{|dz|}{|z-i|^4}$



五求以下定积分(共14分)

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{3 - 2\cos \theta} d\theta, \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin 4x}{(x^2 + 4)^2} dx$$

六(5分)判断方程 $z^9 = 8z^3 + 2z^2 + z + 2$ 在 $1 < |z| < 5$ 的根的个数, 并说明理由。

七(10分)利用拉普拉斯变换解微分方程:

$$\begin{cases} y'' + y = e^t \cos 2t \\ y(0) = 4, y'(0) = 0. \end{cases}$$

八 (8分) 已知函数 $f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 解析, 函数 $g(z)$ 在 $|z| \geq 1$ 解析, 且存在常数 M , 使得在 $|z| \geq 1$ 时, $|g(z)| < M$. 证明以下算式成立:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - a} - \frac{ag(\xi)}{\xi(\xi - a)} \right) d\xi = \begin{cases} f(a), & \text{当 } |a| < 1 \\ g(a), & \text{当 } |a| > 1. \end{cases}$$

