A. L. Cauchy(柯西)简介

1789.8.21生于法国巴黎，

1857.5.23卒于法国巴黎，

数学分析严格化的开拓者，

复变函数论的奠基人，

弹性力学理论的建立者，

在方程、群论、数论、几何、光学、天体力学等也有出色贡献.

多产的科学家(800多篇论文，仅次于欧拉)，分析大师.

临终之言：“人终有一死, 但是他们的业绩将永存. ”

单连通区域解析函数的充要条件

柯西积分定理：设 D 是由简单闭曲线（简称闭路）C围成的单连通区域，$f(z)$在闭域$\bar{D}=D+C$上解析，则$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0.$

Morera定理(柯西积分定理的逆定理)：若函数$f(z)$在区域D内连续，且沿着D内任一闭曲线C有$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$，则$f(z)$在$D$内解析.

综合Morera定理和柯西积分定理得：

函数$f(z)$在单连通区域D内解析的充分必要条件是

$f(z)$在D内连续且对D 内任一闭路C 有$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=0.$

习题5(P71). 计算$\int_{|z|=1}\frac{1}{z+2}\mathrm{d}z$, 并由此证明$\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=0.$

1) 解. 因$z=-2$不在$|z|=1$上，也不在$|z|<1$内，

故$\frac{1}{z+2}$在闭域$|z|\le 1$上处处解析.

因此由柯西积分定理得 $\int_{|z|=1}\frac{1}{z+2}\mathrm{d}z=0.$

2)证明. 再用参数法求$\int_{|z|=1}\frac{1}{z+2}\mathrm{d}z.$

$|z|=1$: $z(\theta)=e^{i\theta}$, $-\pi<\theta\le\pi$, $z'(\theta)=ie^{i\theta}$,

$$\int_{|z|=1}\frac{1}{z+2}\mathrm{d}z=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{z'(\theta)}{e^{i\theta}+2}\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{i\,e^{i\theta}}{e^{i\theta}+2}\mathrm{d}\theta$$

$$\int_{|z|=1}\frac{1}{z+2}\mathrm{d}z=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{z'(\theta)}{e^{i\theta}+2}\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}+2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{ie^{i\theta}(e^{-i\theta}+2)}{(e^{i\theta}+2)(e^{-i\theta}+2)}\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{i+2ie^{i\theta}}{5+2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-2\sin\theta+(1+2\cos\theta)i}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=-2\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\frac{\sin\theta}{5+4\cos\theta}}_{\text{奇函数}}\mathrm{d}\theta+i\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}}_{\text{偶函数}}\mathrm{d}\theta$$

$$=0+i2\int_{0}^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta\overset{1)}{=}0.$$

比较虚部得$\int_{0}^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=0.$证毕.

习题16 ($P72$) 试证明不存在这样的函数，它在闭单位圆 $|z|\le 1$上解析，而在单位圆周上的值是$\frac{1}{z}$.

证明：反证法. 假如存在满足题中所有条件的函数$f(z)$.

首先因为$f(z)$在D：$|z|\le 1$上解析，故由柯西积分定理，

$$\int_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

另一方面，根据条件，由P49例2得

$$\int_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}.$$

从而得到矛盾，故结论成立.#