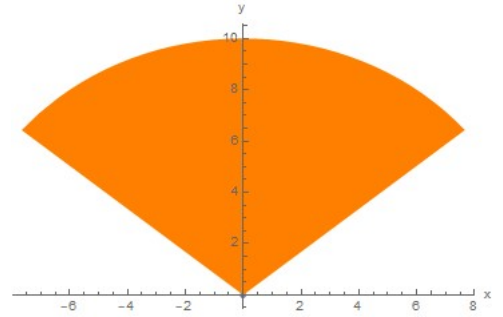


## A题：FMCW雷达的两维联合超分辨率算法设计

调频连续波Frequency Modulated Continuous Wave 雷达，简称FMCW雷达，是一种广泛应用于汽车领域的雷达系统。假设某种FMCW雷达有 $N$ 根天线，它们均匀排列在水平面上，第 $n$ 根天线的坐标为 $P_n = \left(-\frac{L}{2} + n\frac{L}{N-1}, 0\right)$ ， $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 。假设在雷达的探测范围（如图所示的半径10米、圆心角 $100^\circ$ 的扇形区域）内有 $K$ 个物体，这些物体可视为水平面上的离散点列，第 $k$ 个物体的坐标为 $Q_k$ ， $k = 1, 2, \dots, K$ ，则在第 $t$ 个采样时刻，第 $n$ 根天线接收到的中频Intermediate Frequency信号为一系列复数



$$z_n(t) = \sum_{k=1}^K \left( a_k e^{\frac{4\pi |P_n - Q_k| (\gamma s t + f)}{c} i} + \omega_{n,k} \right), \quad t = 0, 1, 2, \dots, T-1,$$

其中 $a_k$ 表示物体的反射性， $f$ 是载频， $c$ 是光速， $\gamma$ 是调频斜率， $s$ 是相邻两次采样的时间间隔， $T$ 是总的时间采样数， $i = \sqrt{-1}$ 是虚数单位， $\omega_{n,k}$ 是复数值高斯白噪声， $\omega_{n,k}$ 的实部和虚部服从均值 $\mathbf{0}$ 、协方差阵 $\sigma^2 \mathbf{I}$ 的二维正态分布。我们希望能够根据天线接收到的中频信号

$$\{z_n(t) \mid 0 \leq n \leq N-1, 0 \leq t \leq T-1\}$$

分辨出每个物体的位置 $Q_k$ 。

请解决下列问题，并以科技论文的形式阐述你的解决方案。

1. 附件Data\*\_real.txt和Data\*\_imag.txt中的数据分别是在两个无噪声场景下，天线接收到的 $K$ 个点源目标物体的中频信号的实部和虚部，排成 $N$ 行 $T$ 列的表格。请在每个场景下，分辨出物体数目 $K$ ，并定位出各物体的位置。

2. 对于实际场景中的目标物体，例如两辆分开的汽车，我们不能把这种目标物体简单地视为水平面上的离散点列。请建立数学模型，设计一种

算法，使之能够通过中频信号分辨出相距较近的目标物体的位置，并分析这种算法的精度和计算复杂度。

注：在典型场景中， $f = 78.8 \times 10^9$ 赫兹， $\gamma = 78.986 \times 10^{12}$ 赫兹/秒， $L = 0.0815$ 米， $N = 86$ ， $s = 0.125 \times 10^{-6}$ 秒， $T = 256$ 。

## B 题：编码设计中的子集划分问题

在通信系统中，通过传递 01 信息串来传递消息。但实际的通信环境存在各种噪音，使得信号传递有一定的错误概率，导致接收的信号与发送的信号不同。为简单起见，假设  $0 \rightarrow 1$  和  $1 \rightarrow 0$  的概率均为  $p \in (0, 1)$ ，本题中假定  $p$  是一个恒定常数。如果同时传递长度为  $n$  的信息串，每个字符发生错误是独立同分布的随机事件，且概率都为  $p$ 。为保证通信的稳定性，需要增加信息的冗余度大幅降低上述随机误差导致的信息错误。

给定正整数  $k < n$ 。我们把  $V = \{0, 1\}^n$  划分为  $m = 2^k$  个两两不相交的子集合，且满足  $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$ 。每个集合  $V_i$ ， $i = 1, 2, \dots, m$ ，选取一个元素  $x_i$ （长度为  $n$  的一个信息串）作为代表。实际通信中，发送一个信号代表  $x_i$ ，接收到的信号为  $y$ ，若存在  $j$  使得  $y \in V_j$ ，则接收到的信号解码为  $V_j$  的代表  $x_j$ 。记解码信号与发送信号不同的概率  $\text{Prob}(x_j \neq x_i)$  为  $e_i$ ，其为关于  $x_i, V_1, \dots, V_m$  的函数。

请解决下列问题，并以学术论文的形式阐述你的解决方案。

1. 设  $\text{BER} = \max_{1 \leq i \leq m} e_i$ 。在给定  $p$  和  $r = k/n$  的情况下，通过设计  $V_1, \dots, V_m$  和  $x_1, \dots, x_m$ ，给出关于 BER 最小值的一个理论估计。

2. 设计一套算法，在给定  $n$  和  $k$  的情况下，快速设计一组  $V_1, \dots, V_m$  和  $x_1, \dots, x_m$ ，使得 BER 尽可能小。并且请以  $k = 24$ ， $n = 32$ ， $p = 0.1$  进行分析与讨论，输出该情形下的 BER 值，并分析该算法的时间复杂度与空间复杂度。