中国科学技术大学

摘要

中国科学技术大学。

关键词：USTC, MMC

1 问题重述

通信系统在当今社会中扮演了十分重要的角色。其中，信息的传递是传输信息串实现的，而每一个信息串由若干个比特（0 或 1）组成。显然，由于实际环境中的噪音，信息传递不可能完全准确。在本题中，我们只考虑一种较为简单的噪音：比特是通过二元对称信道传输的。在二元对称信道中，发送一个比特，接收到的比特有概率 p 与原来不同。假定 $p \in (0,1)$ 是一个常数，且每一个比特的发送和接收是独立的。

设 $V = \{0,1\}^n$ 是含 n 个比特的信息全体。给定 $k < n$，划分 V 为 $m = 2^k$ 个集合 $V_1, V_2, \ldots, V_m$, 即 V_i 两两不交，且 $\bigcup_{i=1}^m V_i = V$。对每个 V_i，选取一个 x_i 作为其代表。以后，我们仅发送这些选定的代表。若发送 x_i，接收到的信息为 y，则解码为 y 所在集合 V_j 的代表 x_j。记 e_i 为“错误解码”的概率，即 $e_i = \mathrm{Prob}\,(x_j \neq x_i)$。

定义 $\mathrm{BER} = \max_{1\le i\le m} e_i$。我们需解决以下两个问题：

1. 对给定的 $r = k/n$，设计 $V_1, \ldots, V_m$ 及代表 $x_1, \ldots, x_m$，使得 BER 尽可能小。
2. 设计一套算法，对输入的 n 和 k 能够给出相应的 $V_1, \ldots, V_m$ 和 $x_1, \ldots, x_m$, 使得 BER 尽可能小。以 $k = 24, n = 32, p = 0.1$ 为例进行分析。

2 问题分析

本题中两个问题的主要目标都是使 BER 的值尽可能小，因此我们先做整体上的分析。

首先我们假设已经设计好 $V_1, \ldots, V_m$，并设 $V_i = \{v_{i1}, \ldots, v_{ia_i}\}$, 这里 $a_i = \#V_i$ 是 V_i 的元素个数，满足 $\sum_{i=1}^m a_i = 2^n$。我们的目的是选择合适的 $x_i \in V_i$，这也即要求发送 x_i，接收到的信号仍在 V_i 内的概率最大。为此，我们可以计算发送出 v_{ij} 而接收到 v_{il} 的概率 p^i_{jl}，这里上标 i 表示考虑的集合是 V_i。显然，$p^i_{jl} = p^i_{lj}$。这样，发送 v_{ij} 后接收到的信号仍在 V_i 的概率为 $P_{ij} = \sum_{l=1}^{a_i} p^i_{jl}$。取 x_i 为使得 P_{ij} 最大的 v_{ij} 即可。于是 $\mathrm{Prob}\,(x_j \neq x_i) = e_i = 1 - \max_{1\le j\le a_i} P_{ij}$，则 $\mathrm{BER} = \max_{1\le i\le m} e_i$。

从以上分析可以看出，一旦设计好 $V_1, \ldots, V_m$，则可以设计出合适的 $x_1, \ldots, x_m$。现在需要考虑如何设计 $V_1, \ldots, V_m$。

3 条件假设

4 符号说明

5 模型的建立与求解

5.1 问题一的求解

我们将给出 BER 最小值的一个估计。

$\boxed{\text{引理}}$ 代数式 $\binom{n}{q}p^q(1-p)^{n-q}$ 的最大值在 $q=\lceil(n+1)\,p\rceil-1$ 时取得。

证明　记 $f\,(q)=\binom{n}{q}p^q\,(1-p)^{n-q}$, 则

$$\frac{f\,(q+1)}{f\,(q)}=\frac{p\,(n-q)}{(1-p)\,(q+1)}$$

由此可知 $q\leq(n+1)\,p-1$ 时 $f\,(q)$ 单调增加，否则 $f\,(q)$ 单调减少。 □

记 $q_0=\lceil(n+1)\,p\rceil-1$, $p_0=\binom{n}{q_0}p^{q_0}(1-p)^{n-q_0}$。因为任何 p^i_{jl} 不超过 p_0, 于是我们可以给出 BER 的最小值的一个下界。

$$\begin{aligned}
\mathrm{BER}_{\min}&=\max_{1\leq i\leq m}e_i\\
&\geq\frac{\sum_{i=1}^m e_i}{m}\\
&=\frac{m-\sum_{i=1}^m\sum_{l=1}^{a_i}p^i_{jl}}{m}\\
&\geq\frac{m-p_0\sum_{i=1}^m a_i}{m}\\
&=\frac{m-p_0\cdot 2^n}{m}\\
&=1-p_0\cdot 2^{n-k}
\end{aligned}$$

下面来估计 BER 的最小值的上界。我们取 V 的一个划分，使得诸 e_i 相等。取 t 是使得 $2\sum_{l=1}^t\binom{n}{l}\leq 2^{n-k}$ 的最大整数，则显然 $t\leq n/2$。通过估计各 $f\,(s)$ 的个数可得

$$e_i\leq 1-\sum_{s=0}^t\binom{n}{s}\left(p^s\,(1-p)^{n-s}+p^{n-s}\,(1-p)^s\right)$$

故

$$\mathrm{BER}_{\min}\leq e_i\leq 1-\sum_{s=0}^t\binom{n}{s}\left(p^s\,(1-p)^{n-s}+p^{n-s}\,(1-p)^s\right)$$

6　模型的评价与改进

7　模型优缺点分析

测试[1, 2, 3]。

参考文献

[1] Stefan Kaiser, “OFDM code-division multiplexing in fading channels”, *IEEE Transactions on communications*, vol. 50, no. 8: 1266–1273, 2002.

[2] Lisa A. Urry et al., *Campbell Biology*, New York, NY: Pearson, 187–221, 2016.

[3] MultiMedia LLC, *MS Windows NT Kernel Description*, URL: http://web.archive.org/web/20080207010024/http://www.808multimedia.com/winnt/kernel.htm (2010/9/30).