

波浪能最大输出功率模型

摘要

本文针对**波浪能装置**运动状态和最优参数的计算问题，从装置的受力情况出发，在浮子只做垂荡运动和只做垂荡与纵摇运动两种情况下，分别求解浮子和振子的运动状态。在浮子只做垂荡运动时，分别考虑阻尼系数恒定与变化的两种情况，求解出装置的最大平均输出功率以及对应的最优阻尼系数（比例系数，幂指数）；在浮子只做垂荡和纵摇两种运动时，求解出装置的最大平均输出功率及对应的最优阻尼系数。

针对问题一，对浮子和振子进行受力分析，并基于牛顿第二定律和**微分方程**建立浮子与振子的动力学模型，并根据题目信息求得浮子与振子的初值。在求解过程中，使用变量替换，将二阶微分方程组转化为一阶微分方程组，基于**四五阶龙格-库塔法**，针对直线阻尼器的阻尼系数为定值和阻尼系数与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比两种情况，求解出浮子与振子在 40 个波浪周期内时间间隔为 $0.2s$ 的垂荡位移和速度。两种情况下浮子与振子运动状态变化曲线均在短时间震荡后进行较为稳定的周期变换，结果存放在 `result-1.xlsx` 和 `result-2.xlsx` 文件中。

针对问题二，建立**单目标优化模型**。首先，确定优化目标——平均输出功率最大；其次，当阻尼系数为常量，确定约束条件为阻尼系数的取值界限；当阻尼系数为变量，确定约束条件为比例系数和幂指数的取值界限。然后，基于问题一建立的动力学模型，对时间进行离散化处理。最后，基于**粒子群算法**，求解得到最大平均输出功率及最优阻尼系数（比例系数和幂指数）。当阻尼系数为常量时，最大平均输出功率为 $246.118W$ ，最优阻尼系数为 $37667.1025N \cdot s/m$ ；当阻尼系数为变量时，最大平均输出功率为 $1216.1029W$ ，比例系数和幂指数分别为 99643.3182 ， 1 。

针对问题三，综合考虑浮子做垂荡运动和纵摇运动两种运动前，先考虑浮子只做纵摇运动，对浮子和振子进行受力分析，基于牛顿第二定律，建立该情况下的浮子与振子的动力学模型。然后结合问题一中的模型，考虑浮子做垂荡运动和纵摇运动的耦合关系，建立修正后的浮子和振子的动力学模型。然后，确定初值条件，基于四五阶龙格-库塔法，求解出浮子与振子在 40 个波浪周期内时间间隔为 $0.2s$ 的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度。浮子与振子的运动状态均在经历短时间震荡后进行稳定的周期变换，结果保存在 `result3.xlsx`。

针对问题四，建立单目标优化模型。首先，确定优化目标——直线阻尼器和旋转阻尼器的平均输出功率之和最大，确定约束条件为直线阻尼器和旋转阻尼器的阻尼系数的取值界限。然后，基于问题三建立的修正的动力学模型，对时间进行离散化处理。最后，基于粒子群算法，求解得到最大平均输出功率为 $293.624W$ ，直线阻尼器和旋转阻尼器的最优阻尼系数分别为 $56567.4276N \cdot s/m$ ， $56567.079N \cdot m \cdot s$ 。

最后，探究了模型对离散化时间间隔 Δt 的灵敏度，分析了模型的优缺点，提出了未来的改进方向。

关键词： 波浪能装置 微分方程 龙格-库塔法 单目标优化 粒子群算法

一、问题重述

现如今，世界传统能源储量与环保问题的逐渐凸显，为了摆脱传统能源带来的束缚和危害，越来越多的国家将目光投向新能源领域。在其中，最受关注的风能和太阳能已经为人类带来了巨大的经济和环保价值，除此之外，波浪能也成为了学术和工业界一大热点，引领着未来新能源领域的发展方向。

波浪能可由波浪能发电系统转化为电能。目前波浪能发电系统已经有了多种多样的分类，但通常来讲都是由波浪能转化系统（WEC）、波浪能输出系统（PTO）以及多种辅助系统组成。目前，这样的波浪能发电系统已经在工业界得到应用，但如何设置合理的控制参数，得到更高的转换效率仍然是一个亟需解决的问题。

在所给附件中，附件 1 说明了波浪能转换装置在进行垂荡运动下的具体运动情况，附件 2 为波浪能转换装置在同时进行垂荡和纵摇运动时的运动图像，附件 3、4 均为与波浪能转换装置与波浪相关的参数。需要注意的是，每一小问中的波浪相关参数有所不同，其均在附件 3 中给出。

在本题中，共有四个问题需要解答：

(1) 只考虑浮子做垂荡运动，建立浮子和振子的运动模型，分别在直线阻尼器的阻尼系数为定值以及与浮子、振子的相对速度的绝对值的幂成正比两种情况下，计算在前 40 个波浪周期内浮子、振子每隔 0.2s 的垂荡位移和速度。

(2) 只考虑浮子的垂荡运动，分别确定在阻尼系数为常量与阻尼系数与浮子、振子的相对速度的绝对值的幂成正比两种情况下，使得平均输出功率达最大值的最优阻尼系数，并给出相应的最大输出功率。

(3) 同时考虑浮子的垂荡和纵摇运动，建立浮子和振子的运动模型，计算浮子和振子在前 40 个波浪周期每隔 0.2 秒的垂荡位移和速度、纵摇角位移和角速度。

(4) 同时考虑浮子的垂荡和纵摇运动，在直线阻尼器和旋转阻尼器的阻尼系数均为常量的情况下，确立能使得输出功率达最大值的最优阻尼系数，并给出相应的最大平均输出功率。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

在问题一中，需要在以下两种情况中，建立浮子与振子的运动模型。基于所建立的运动方程求解前 40 个波浪周期时间间隔为 0.2s 的垂荡位移和速度。

情况（1）阻尼系数取 $10000N \cdot s/m$ ；

情况（2）阻尼系数与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比，定比例系数取 10000 和幂指数取 0.5。

该问题可以转换为求解浮子与振子的动力学模型。对浮子与振子分别受力分析，并基于牛顿第二定律，建立浮子与振子的运动方程。然后通过数值算法求解数值解。

2.2 问题二的分析

在问题二中，需要在以下两种情况中，确定直线阻尼器的阻尼系数，使得 PTO 系统的平均输出功率最大。

情况（1）阻尼系数为常量，给定阻尼系数的取值界限；

情况（2）阻尼系数为变量，与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比，给定比例系数和幂指数的取值界限。

故在情况（1）中，只有阻尼系数影响 PTO 系统的平均输出功率；在情况（2）中，比例系数和幂指数影响 PTO 系统的平均输出功率。该问题可转换为一个以平均输出功率为目标函数，以阻尼系数（比例系数，幂指数）为决策变量的单目标优化问题。根据问题一中建立的动力学模型，基于优化算法对该问题进行求解。

2.3 问题三的分析

问题三本质上是在问题一的基础之上考虑波浪能转化装置的纵摇运动带来的影响，综合考虑垂荡和纵摇运动，重新建立浮子和振子的运动模型。根据垂荡运动和纵摇运动的对偶性，得出纵摇运动中浮子和振子的运动方程。再考虑垂荡运动和纵摇运动的耦合关系，建立修正后的动力学模型。最后，通过数值算法求解数值解。

2.4 问题四的分析

问题四与问题二类似，但由于新增了旋转阻尼器，功率的组成发生了改变，装置的平均输出功率由直线阻尼器和旋转阻尼器共同产生。在问题四中，需要确定直线阻尼器和旋转阻尼器的阻尼系数，使得 PTO 系统的平均输出功率最大。该问题可转换为一个以平均输出功率为目标函数，以直线阻尼器和旋转阻尼器的阻尼系数为决策变量的单目标优化问题。根据问题三中建立的动力学模型，基于优化算法对该问题进行求解。

三、模型假设

1. 海水是无粘且无旋的。
2. 波浪的运动形式为微幅波浪，浮子在波浪中做微幅运动。
3. 中轴、底座、隔层及 PTO 的质量和各种摩擦均可忽略。
4. 浮子与振子的相对运动驱动阻尼器做功，所作功作为能量输出。
5. 浮子做纵摇运动的旋转轴为振子所连接的转轴
6. 转轴与圆柱底部的距离忽略不计。

四、符号说明

符号	说明	单位
d	波浪能装置的吃水深度	m
x_f	浮子坐标	m
x_o	振子坐标	m
m_f	浮子质量	kg
m_o	振子质量	kg
R_f	浮子底半径	m
R_o	振子半径	m
H_{f1}	浮子圆柱部分高度	m
H_{f2}	浮子圆锥部分高度	m
H_o	振子高度	m
ρ	海水的密度	kg/m^3
l_0	弹簧原长	m
k_s	弹簧刚度	N/m
k_t	扭转弹簧刚度	$N \cdot m$
K_{HS}	静水恢复力矩系数	$N \cdot m$
c_s	直线阻尼器的阻尼系数	$N \cdot s/m$
c_t	旋转阻尼器的旋转阻尼系数	$N \cdot m \cdot s$
w	入射波浪频率	s^{-1}
m_a	垂荡附加质量	kg
I_a	纵摇附加转动惯量	$kg \cdot m^2$
c_h	垂荡兴波阻尼系数	$N \cdot s/m$
c_p	纵摇兴波阻尼系数	$N \cdot m \cdot s$
f	垂荡激励力振幅	N
L	垂荡激励力矩振幅	$N \cdot m$

符号	说明	单位
F_w	波浪激励力	N
M_w	波浪激励力矩	$N \cdot m$
F_{HS}	静水恢复力	N
M_{HS}	静水恢复力矩	$N \cdot m$
F_a	附加惯性力	N
M_a	附加惯性力矩	$N \cdot m$
F_{wd}	兴波阻尼力	N
M_{wd}	兴波阻尼力矩	$N \cdot m$
F_{PTO}	PTO 系统对浮子的作用力	N
M_{PTO}	PTO 系统对浮子的作用力矩	$N \cdot m$
F'_{PTO}	PTO 系统对振子的作用力	N
M'_{PTO}	PTO 系统对振子的作用力矩	$N \cdot m$

五、模型的建立与求解

5.1 问题一

5.1.1 模型准备

5.1.1.1 建立一维坐标系

以中轴与海平面的交点为原点,以竖直向上为正方向建立一维坐标系。如图 1 所示:

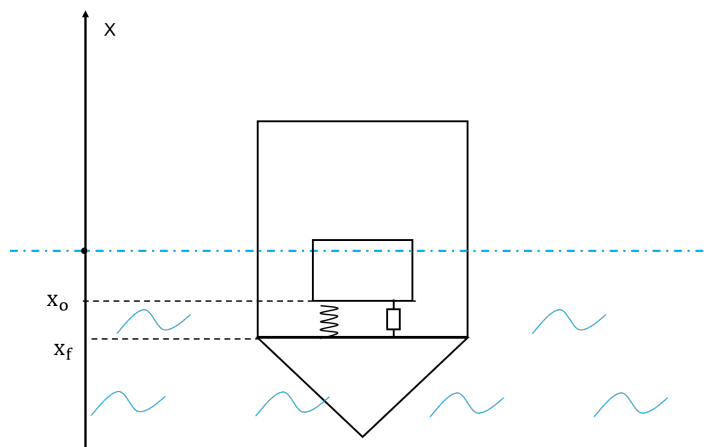


图 1: 一维坐标系

问题一采用中轴与中轴底座的焦点和中轴振子的下表面的焦点对应的坐标来分别表示振子和浮子的位置。初始时刻浮子和振子的坐标分别为 $x_f(0)$ 和 $x_o(0)$ 。

5.1.1.2 对浮子受力分析

问题一中考虑浮子在波浪中只做垂荡运动。基于假设 3，浮子受到的力有波浪激励力、附加惯性力、兴波阻尼力、静水恢复力和 PTO 对浮子的作用力。

1) 波浪激励力

在问题一和问题二中，波浪激励力始终沿着浮子垂荡运动的方向，在题干中波浪激励力以余弦的形式给出，即：

$$F_w = f \cos wt \quad (1)$$

其中 w 为入射波浪频率， f 为波浪激励力振幅。

2) 附加惯性力

浮子在海水中做垂荡运动时，会引起周围流体的运动，由于流体具有惯性，表现为对浮子的一个反作用力，称为附加惯性力。附加惯性力对应产生一个虚拟的质量，称为垂荡附加质量。附加惯性力的表达式为：

$$F_a = -m_a \ddot{x}_f \quad (2)$$

其中 m_a 为垂荡附加质量， \ddot{x}_f 为浮子做垂荡运动的加速度。

3) 兴波阻尼力

浮子在海水中做垂荡运动时，会产生波浪，从而产生对浮子垂荡运动的阻力，称为兴波阻尼力。兴波阻尼力的大小正比于浮子做垂荡运动的速度，比例系数称为行波阻尼系数。兴波阻尼力的表达式为：

$$F_{wd} = -c_h \dot{x}_f \quad (3)$$

其中 c_h 为垂荡兴波阻尼系数， \dot{x}_f 为浮子做垂荡运动的速度。

4) 静水恢复力

浮子在海水中做垂荡运动时，会受到使浮子重新保持在平时位置的力，称为静水恢复力。它是浮子的重力与所受到的海水浮力的差 [1]。静水恢复力的表达式为：

$$F_{HS} = F_b - m_f g \quad (4)$$

其中， F_b 为浮子所受到的海水的浮力， m_f 为浮子重量。

浮子在海水中做垂荡运动时受到的海水的浮力为：

$$F_b = \rho g V \quad (5)$$

其中， ρ 为海水密度， g 为重力加速度， V 为浮子的排水量。

浮子的排水量为：

$$V = \begin{cases} 0, & x_f > 0.8 \\ \frac{1}{3}\pi R_f^2 \frac{(H_{f1}-x_f)^3}{H_{f1}^2}, & 0 < x_f \leq 0.8 \\ \frac{1}{3}\pi R_f^2 H_{f1} - \pi R_f^2 x_f, & -3 < x_f \leq 0 \\ \frac{1}{3}\pi R_f^2 H_{f1} + \pi R_f^2 H_{f2}, & x_f \leq -3 \end{cases} \quad (6)$$

其中， R_f 为浮子底半径， H_{f1} 为浮子圆柱部分高度， H_{f2} 为浮子圆锥部分高度。

5) PTO 对浮子的作用力

能量输出系统 PTO 包括弹簧和阻尼器。PTO 对浮子的作用力是一个与浮子和振子的相对速度成比例的阻尼力和一个与浮子和振子的相对位移成正比的弹簧弹力的合力，即：

$$\begin{cases} F_{PTO} = F_d + F_s \\ F_d = c_s v_r \\ F_s = -k_s \Delta l \\ v_r = \dot{x}_o - \dot{x}_f \\ \Delta l = l_0 - \Delta x \\ \Delta x = x_o - x_f \end{cases} \quad (7)$$

其中 F_d 为直线阻尼器的阻尼力， F_s 为弹簧的弹力， c_s 为直线阻尼器的阻尼系数， v_r 为振子相对于浮子的速度， k_s 为弹簧刚度， Δl 为弹簧形变量， Δx 为振子与浮子的相对位移。

5.1.1.3 对振子受力分析

振子被密封在浮子的内部，通过 PTO 与浮子隔层上的中轴底座相连。通过分析，振子受到重力和 PTO 系统对它的作用力。

1) 重力

振子受到的重力表达式为：

$$G_o = m_o g \quad (8)$$

其中， m_o 为振子的质量。

2) PTO 对振子的作用力

PTO 系统对浮子和振子的作用力大小相等、方向相反。PTO 系统对振子的作用力的表达式为：

$$F'_{PTO} = -F_{PTO} \quad (9)$$

5.1.2 模型建立

5.1.2.1 初始状态的求解

建立浮子与振子的运动模型前，先对浮子与振子的初始状态进行分析。

初始时刻，整个波浪能装置处于平衡状态，即所受到的合外力为 0。整个波浪能装置，受到重力和海水对它的浮力作用，并且两者大小相等，方向相反，作用与一条直线上，即：

$$F - (m_f + m_o)g = 0 \quad (10)$$

联立式 (5)、(6)、(10) 解得初始时刻浮子的排水量和吃水深度分别为：

$$V_x = 7.121m^3$$

$$d = 2.8m$$

对于振子，由于初始时刻，浮子与振子处于平衡状态，两者相对静止。因此，振子受到的阻尼力为 0，受到的弹簧弹力与振子的重力大小相同，方向相同。结合式 (8) 和 (9) 得到：

$$F'_{PTO} - G_o = 0 \quad (11)$$

可得初始状态下弹簧长度为：

$$l = 0.195875m$$

5.1.2.2 浮子运动方程

浮子在波浪激励力 F_w 、附加惯性力 F_a 、兴波阻尼力 F_d 、静水恢复力 F_{HS} 和 PTO 对浮子的作用力 F_{PTO} 五种力的作用下运动。由牛顿第二定律可以确定浮子的运动方程为：

$$m_f \ddot{x}_f = F_w + F_{HS} + F_a + F_d + F_{PTO} \quad (12)$$

代入式 (1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6)、(7) 后可得：

$$m_f \ddot{x}_f = f \cos wt + \rho g V - m_f g - m_a \ddot{x}_f - c_h \dot{x}_f - k_s [l_0 - (x_o - x_f)] + c_s (\dot{x}_o - \dot{x}_f) \quad (13)$$

5.1.2.3 振子运动方程

振子仅受 PTO 的作用力 F'_{PTO} 和自身重力 G_o 的作用。由牛顿第二定律得振子的运动方程：

$$F'_{PTO} - G_o = m_o \ddot{x}_o \quad (14)$$

由式 (7)、(8)、(9)、(14) 可得：

$$k[l_0 - (x_o - x_f)] - c_s (\dot{x}_o - \dot{x}_f) - m_o g = m_o \ddot{x}_o \quad (15)$$

5.1.2.4 模型汇总

综上所述得到浮子与振子的运动模型：

$$\begin{cases} m_f \ddot{x}_f = f \cos wt + \rho g V - m_f g - m_a \ddot{x}_f - c_h \dot{x}_f - k[l_0 - (x_o - x_f)] + c_s(\dot{x}_o - \dot{x}_f) \\ k_s[l_0 - (x_o - x_f)] - c_s(\dot{x}_o - \dot{x}_f) - m_o g = m_o \ddot{x}_o \\ x_f(0) = -2, \quad x_o(0) = -1.8, \quad x_o(0) - x_f(0) = 0.2 \\ \dot{x}_f(0) = 0, \quad \dot{x}_o(0) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

5.1.3 模型求解

求解此二阶微分方程数值解时，首先做变量替换，将其化为一阶微分方程组，令：

$$p_1 = x_f, \quad p_2 = \dot{x}_f, \quad p_3 = x_o, \quad p_4 = \dot{x}_o \quad (17)$$

则二阶微分方程组（16）可化为如下的一阶微分方程组：

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = p_2, & p_1(0) = -2 \\ \dot{p}_2 = \frac{-(c_h + c_s)p_2 - k_s p_1 + c_s p_4 + k_s p_3 - k_s l_0 + \rho g V - m_f g + f \cos wt}{m_f + m}, & p_2(0) = 0 \\ \dot{p}_3 = p_4, & p_3(0) = -1.8 \\ \dot{p}_4 = \frac{c_s p_4 + k_s p_3 - c_s p_2 - k_s p_1 + m_o g - k_s l_0}{-m_o}, & p_4(0) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

使用 Matlab 工具箱中的 ode45 函数（采用四五阶龙格-库塔算法）[2]，分别求解该微分方程在 $c_s = 10000 N \cdot s/m$ 与 $c_s = 10000 |v_r|^{\frac{1}{2}} N \cdot s/m$ 时的数值解。

5.1.4 结果分析

(1) 阻尼系数为常数，即 $c_s = 10000 N \cdot s/m$

浮子与振子的位移随时间变化图像如图 2 和 3 所示。

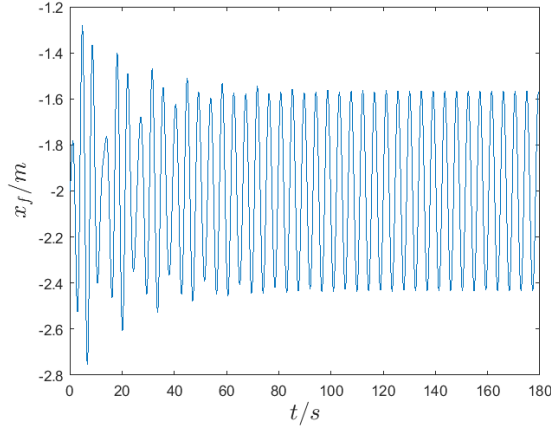


图 2: 浮子位移-时间关系图

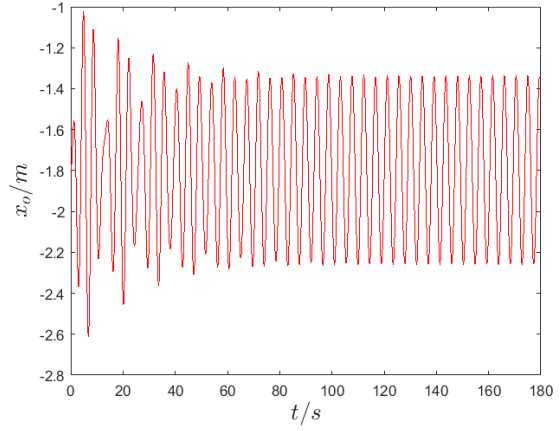


图 3: 振子位移-时间关系图

从图 2、图 3 中可以看出浮子和振子在经历一小段的不规则震荡之后, 开始进行周期性的运动, 其中振子在-1.8 米左右做周期运动, 浮子在-2 米左右做周期运动。浮子和振子在 10s、20s、40s、60s、100s 的垂荡位移与速度如表 1 所示:

表 1: 浮子、振子速度位移表

时间 (s)	浮子		振子	
	位移 (m)	速度 (m/s)	位移 (m)	速度 (m/s)
10	-2.190954076	-0.640777992	-2.01000313	-0.693713854
20	-2.590791425	-0.240503252	-2.43236668	-0.272701067
40	-1.714640468	0.313200313	-1.501579719	0.333354995
60	-2.314474968	-0.479244744	-2.129483735	-0.515476772
100	-2.083607248	-0.604068126	-1.882096565	-0.643048215

(2) 阻尼系数与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比, 即 $c_s = 10000N \cdot m, c_s = 10000|v_r|^{0.5} N \cdot s/m$ 。

浮子与振子的位移随时间变化如图 4 和 5 所示。从图 4、图 5 中可以看出此时浮子与振子的运动变化趋势与情况 (1) 中相似, 一段时间震荡后振子在-1.8m 处做周期垂荡运动, 浮子在-2m 处做周期垂荡运动。

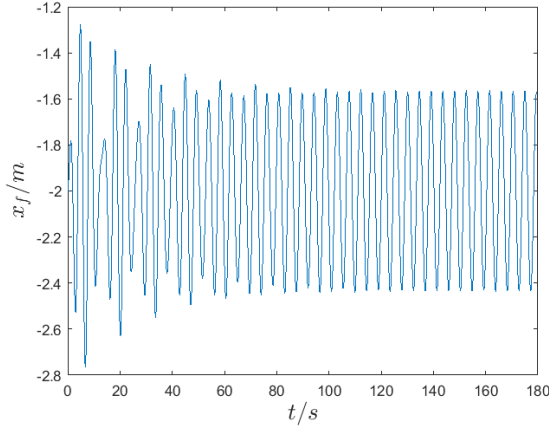


图 4: 浮子位移-时间关系图

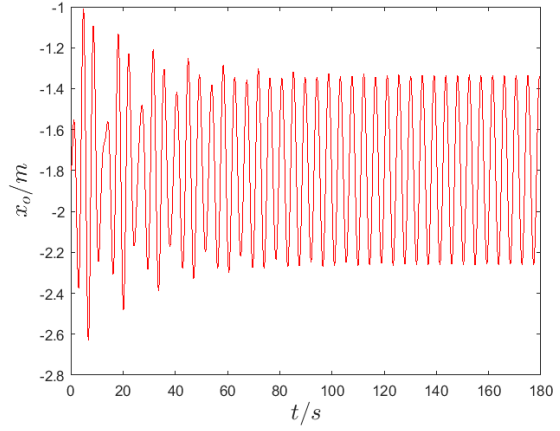


图 5: 振子位移-时间关系图

浮子和振子在 10s、20s、40s、60s、100s 的垂荡位移与速度如表 2 所示：

表 2: 浮子、振子速度位移表

时间 (s)	浮子		振子	
	位移 (m)	速度 (m/s)	位移 (m)	速度 (m/s)
10	-2.20624292	-0.652613932	-2.033048486	-0.699040381
20	-2.61129173	-0.254065041	-2.459200861	-0.276577707
40	-1.731431789	0.295841034	-1.517986272	0.314112722
60	-2.32719546	-0.491221073	-2.147706499	-0.52409872
100	-2.088343237	-0.609417569	-1.891710692	-0.650329169

5.2 问题二

5.2.1 模型建立

Step 1 优化目标

浮子与振子的相对运动驱动阻尼器做功，并将所做作为能量输出。波浪能装置的瞬时功率为 [3]：

$$P = F_d v_r \quad (19)$$

其中 v_r 为振子相对于浮子的速度。

由式 (7)、(19) 可得：

$$P = c_s v_r^2 \quad (20)$$

平均输出功率为：

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt \quad (21)$$

根据问题二，需要求解设定阻尼系数下允许的 PTO 系统最大平均输出功率，则目标为平均输出功率最大。结合式 (20)、(21)，优化目标为：

$$\max \quad \bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T c_s v_r^2 dt$$

Step 2 约束条件

根据题目信息，约束条件为阻尼系数。

(1) 阻尼系数为常量

$$0 \leq c_s \leq 100000 \quad (22)$$

(2) 阻尼系数与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比

$$\begin{cases} c_s = \sigma |v_r|^r \\ 0 \leq \sigma \leq 100000 \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases} \quad (23)$$

其中， σ 为比例系数， r 为幂指数。

Step 3 模型综合

综上所述，建立最优阻尼系数的输出功率模型综合如下：

(1) 阻尼系数为常量

$$\begin{cases} \max & \bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T c_s v_r^2 dt \\ s.t. & 0 \leq c_s \leq 100000 \\ & m_f \ddot{x}_f = F_w + F_{HS} + F_a + F_d + F_{PTO} \\ & F'_{PTO} - G_o = m_o \ddot{x}_o \end{cases} \quad (24)$$

(2) 阻尼系数与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比

$$\begin{cases} \max & \bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T c_s v_r^2 dt \\ s.t. & c_s = \sigma |v_r|^r \\ & 0 \leq \sigma \leq 100000 \\ & 0 \leq r \leq 1 \\ & m_f \ddot{x}_f = F_w + F_{HS} + F_a + F_d + F_{PTO} \\ & F'_{PTO} - G_o = m_o \ddot{x}_o \end{cases} \quad (25)$$

5.2.2 模型求解

求解平均功率计算式中所需的 v_i , 需结合第一问中所建立的浮子、振子的运动模型, 将浮子、振子的运动方程与两种情况下的平均功率计算式、约束条件结合后可得最终的目标优化方程组

(1) 阻尼系数为常量时:

$$\begin{cases} \max & \bar{P} = \frac{1}{T} \sum c_s v_r^2 \Delta t \\ s.t. & 0 \leq c_s \leq 100000 \\ & m_f \ddot{x}_f = F_w + F_{HS} + F_a + F_d + F_{PTO} \\ & F'_{PTO} - G_o = m_o \ddot{x}_o \end{cases} \quad (26)$$

(2) 阻尼系数与 v_r 的绝对值的幂成正比时:

$$\begin{cases} \max & \bar{P} = \frac{1}{T} \sum c_s v_r^2 \Delta t \\ s.t. & c_s = \sigma |v_r|^r \\ & 0 \leq \sigma \leq 100000 \\ & 0 \leq r \leq 1 \\ & m_f \ddot{x}_f = F_w + F_{HS} + F_a + F_d + F_{PTO} \\ & F'_{PTO} - G_o = m_o \ddot{x}_o \end{cases} \quad (27)$$

使用粒子群算法求解。粒子群算法 (PSO) 是一种于 1995 年提出的进化算法, 其基本思想是通过群体中每个个体的信息共享与协作来寻找最优的解, 其基本的算法步骤如下:

Step 1: 初始化一群数量为 N 粒子, 同时随机设定他们的位置和速度

Step 2: 计算每一个粒子的适应度

Step 3: 更新粒子个体最优值

Step 4: 更新粒子群体最优值

Step 5: 判断是否符合最优或者达到最大迭代次数, 若都没达成, 跳转步骤 7, 否则进入步骤 6

Step 6: 依据个体最优值和群体最优值更新各粒子的位置和速度, 重复 3、4、5 三个步骤

Step 7: 输出结果, 结束算法

取 $\Delta t = 0.10s$,

(1) 阻尼系数为常量时:

$$\bar{P}_{max} = 246.118W \quad C = 37667.1025 \quad (28)$$

(2) 阻尼系数与 v_r 的绝对值的幂成正比时:

$$\bar{P}_{max} = 1216.1029W \quad \sigma = 99643.3182 \quad r = 1 \quad (29)$$

5.3 问题三

5.3.1 模型准备

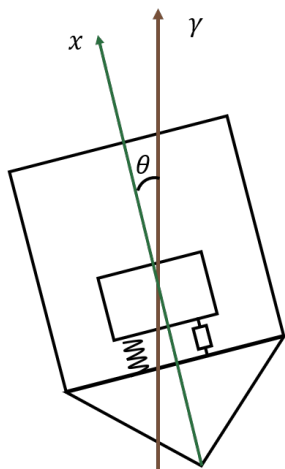


图 6: 坐标系的建立

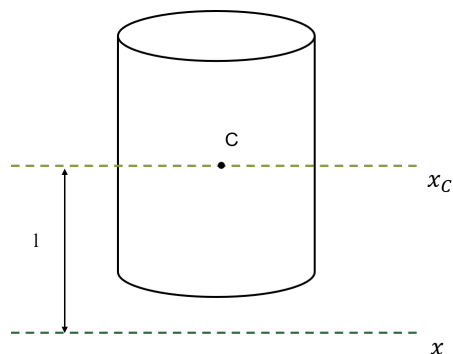


图 7: 圆柱的转动惯量

5.3.1.1 坐标系的建立

以初始时刻的中轴与海平面的交点为原点，建立坐标系。见图 6， x 表示物体在垂荡方向上的坐标， θ 表示物体在纵摇方向上偏离 γ 轴的角度，规定物体沿 x 轴为正方向，规定物体逆时针转动方向为正方向。

在问题三与问题四中，定义 x_f 为浮子隔层圆心的坐标， x_o 为振子下表面圆心的坐标， θ_f 为浮子偏离 γ 轴的角度， θ_o 为振子偏离 γ 轴的角度。

5.3.1.2 平行轴定理

在已知刚体对于一支质心轴的转动惯量，利用平行轴定理能够很简易地计算刚体对平行于质心轴的另外一支轴的转动惯量。

$$I = I_c + md_x^2$$

其中， I_c 代表刚体对于质心轴的转动惯量， m 代表刚体的质量， l 代表另外一支与质心轴平行的直轴与质心轴的垂直距离。

5.3.1.3 转动惯量的计算

1) 两端开通的圆柱壳体的转动惯量

两端开通的薄圆柱壳对如图 7 中通过其质心的轴 X_c 的转动惯量为：

$$I_c = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2 \quad (30)$$

其中 m 为圆柱薄壳质量， r 为圆柱薄壳半径， h 为圆柱薄壳高度。

设另有一轴 X 与 X_c 平行，且距离轴 X_c 为 L ，则通过平行轴定理可知该刚体对于轴 X 的转动惯量为：

$$I = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}mH^2 + ml^2 \quad (31)$$

2) 浮子的转动惯量

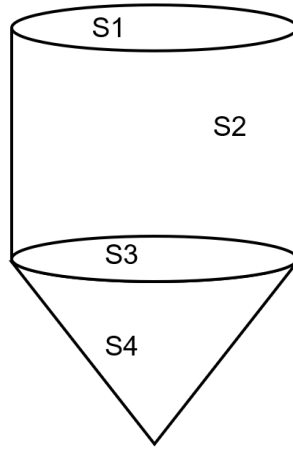


图 8: 浮子的四个面

浮子由圆锥壳体 and 圆柱壳体组成，如图 8，可分为四个面，从上至下依次命名为 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 。 S_1 的转动惯量为：

$$I_{f1} = \frac{1}{4}m_{f1}R_f^2 + m_{f1}H_{f1}^2 \quad (32)$$

根据式 (31)， S_2 的转动惯量为：

$$I_{f2} = \frac{1}{2}m_{f1}R_f^2 + \frac{1}{12}m_{f3}H_{f1}^2 + m_{f3}\left(\frac{H_{f1}}{2}\right)^2 \quad (33)$$

S_3 关于转轴的转动惯量为：

$$I_{f3} = \frac{1}{4}m_{f3}R_f^2 \quad (34)$$

其中 m_{f1} ， m_{f2} ， m_{f3} ， m_{f4} 根据对应的面积占比来计算，因为浮子的质量式均匀分布的。面 S_4 的转动惯量 I_{f4} 可通过微元的方法求出（详细的推倒过程在附录中给出）：

浮子的转动惯量为：

$$I_f = I_{f1} + I_{f2} + I_{f3} + I_{f4} \quad (35)$$

3) 实心圆柱转动惯量

实心圆柱对如图 7 中通过其质心的轴 X_c 的转动惯量为：

$$I_c = \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2) \quad (36)$$

其中 m 为刚体质量， r 为刚体半径， h 为刚体高度

设另有一轴 X 与 X_c 平行，且距离轴 X_c 为 d_x ，则通过平行轴定理可知该刚体对于轴 X 的转动惯量为：

$$I = \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2) + md_x^2 \quad (37)$$

4) 浮子转动惯量

由式 (37) 即可求得振子对转轴的转动惯量：

$$I_o = \frac{1}{12}m_o(3R_o^2 + H_o^2) + m_o(x_o - x_f + \frac{H_o}{2})^2 \quad (38)$$

5.3.1.4 垂荡运动时的对浮子受力分析

在问题三中，考虑浮子只做垂荡运动和纵摇运动。因此，需要在问题一中对浮子与振子的受力分析的基础上，考虑浮子与振子受到的力矩作用以及垂荡运动和纵摇运动间的耦合关系。因此，在考虑浮子只做垂荡运动和纵摇运动之前，先考虑浮子只做纵摇运动的情况下浮子和振子的运动模型 [4]。

1) 波浪激励力矩

在问题三中，波浪激励力矩始终沿着浮子纵摇运动的方向，波浪激励力矩以余弦的形式给出，即：

$$M_w = L \cos wt \quad (39)$$

其中 w 为入射波浪频率， L 为波浪激励力矩振幅。

2) 附加惯性力矩

浮子在海水中做纵摇运动时，会引起周围流体的运动，由于流体具有惯性，表现为对浮子的一个反作用力矩，称为附加惯性力矩。附加惯性力矩对应产生一个虚拟转动惯量，称为纵摇附加转动惯量。附加惯性力矩的表达式为：

$$M_a = -I_a \ddot{\theta}_f \quad (40)$$

其中 I_a 为纵摇附加质量， $\ddot{\theta}_f$ 为浮子做纵摇运动的加速度。

3) 兴波阻尼力矩

浮子在海水中做纵摇运动时，会产生波浪，从而产生对浮子纵摇运动的阻力矩，称为兴波阻尼力矩。兴波阻尼力矩的大小正比于浮子做纵摇运动的速度，比例系数称为行波阻尼系数。兴波

阻尼力矩的表达式为：

$$M_{wd} = -c_p \dot{\theta}_f \quad (41)$$

其中 c_p 为纵摇兴波阻尼系数， $\dot{\theta}_f$ 为浮子做纵摇运动的速度。

4) 静水恢复力矩

浮子在海水中做纵摇运动时，会受到使其转正的力矩，称为静水恢复力矩。静水恢复力矩的大小与 θ_f 成正比，表达式为：

$$M_{HS} = -K_{HS} \theta_f \quad (42)$$

其中， K_{HS} 为静水恢复力矩系数。

5) PTO 对浮子的作用力矩

能量输出系统 PTO 包括弹簧和阻尼器。PTO 对浮子的作用力矩是一个与浮子和振子的相对速度成比例的阻尼力矩和一个与浮子和振子的相对位移成正比的弹簧弹力矩的合力矩，即：

$$\begin{cases} M_{PTO} = M_d + M_s \\ M_d = c_t w_r \\ M_s = k_t \Delta\theta \\ w_r = \dot{\theta}_o - \dot{\theta}_f \\ \Delta\theta = \theta_o - \theta_f \end{cases} \quad (43)$$

其中 M_d 为旋转阻尼器的旋转阻尼力矩， M_s 为弹簧的弹力矩， c_t 为直线旋转阻尼器的旋转阻尼系数， w_r 为振子相对于浮子的角速度， k_t 为扭转弹簧刚度， $\Delta\theta$ 为振子与浮子的相对角位移。

5.3.1.5 垂荡运动时的对振子受力分析

振子被密封在浮子的内部，通过 PTO 和转轴架与浮子隔层上的中轴底座相连。振子受到重力矩和 PTO 系统对它的作用力矩。

1) 重力矩

振子受到的重力矩表达式为：

$$M_G = m_o g \sin \theta_o \cdot \left(\frac{1}{2} H_o + \Delta x \right)^2 \quad (44)$$

其中， m_o 为振子的质量。

2) PTO 对振子的作用力矩

PTO 系统对浮子和振子的作用力矩大小相等、方向相反。PTO 系统对振子的作用力矩的表达式为：

$$M'_{PTO} = -M_{PTO} \quad (45)$$

5.3.2 模型建立

5.3.2.1 浮子只做纵摇运动时的运动方程

1) 浮子的运动方程

考虑浮子只做纵摇运动时，浮子受到波浪激励力矩 M_w 、附加惯性力矩 M_a 、兴波阻尼力矩 M_{wd} 、静水恢复力矩 M_{HS} 、PTO 对的作用力矩 M_{PTO} 的作用。由牛顿第二定律可以确定浮子的运动方程为：

$$I_f \ddot{\theta}_f = M_w + M_{HS} + M_a + M_{wd} + M_{PTO} \quad (46)$$

由式 (39)、(40)、(41)、(42)、(43) 得：

$$I_f \ddot{\theta}_f = L \cos wt - I_a \ddot{\theta}_f - c_p \dot{\theta}_f - K_{HS} \theta_f + k_t (\theta_o - \theta_f) + c_t (\dot{\theta}_o - \dot{\theta}_f) \quad (47)$$

2) 振子的运动方程

考虑浮子只做纵摇运动时，振子受到 PTO 的作用力矩 M_{PTO} 和重力分力提供的力矩。由牛顿第二定律可以确定振子的运动方程为：

$$I_o \ddot{\theta}_o = M'_{PTO} + M_G \quad (48)$$

由式 (45)、(44) 得：

$$I_o \ddot{\theta}_o = -k_t (\theta_o - \theta_f) - ct (\dot{\theta}_o - \dot{\theta}_f) + m_o g \sin \theta_o (\frac{1}{2} H_o + l_o) \quad (49)$$

5.3.2.2 考虑浮子只做垂荡运动

考虑浮子只做垂荡运动时，浮子与振子的运动模型如下：

$$\begin{cases} m_f \ddot{x}_f = f \cos wt + \rho g V - m_f g - m_a \ddot{x}_f - c_h \dot{x}_f - k_s [l_0 - (x_o - x_f)] + c_s (\dot{x}_o - \dot{x}_f) \\ m_o \ddot{x}_o = k_s [l_0 - (x_o - x_f)] - c_s (\dot{x}_o - \dot{x}_f) - m_o g \\ x_f(0) = -2, \quad x_o(0) = -1.8, \quad x_o(0) - x_f(0) = 0.2 \\ \dot{x}_f(0) = 0, \quad \dot{x}_o(0) = 0 \end{cases} \quad (50)$$

5.3.2.3 考虑浮子只做纵摇运

考虑浮子只做纵摇运动时，浮子与振子的运动模型如下：

$$\begin{cases} I_f \ddot{\theta}_f = L \cos wt - I_a \ddot{\theta}_f - c_p \dot{\theta}_f - K_{HS} \theta_f + k_t (\theta_o - \theta_f) + c_t (\dot{\theta}_o - \dot{\theta}_f) \\ I_o \ddot{\theta}_o = -k_t (\theta_o - \theta_f) - ct (\dot{\theta}_o - \dot{\theta}_f) + m_o g \sin \theta_o (\frac{1}{2} H_o + l_o) \\ \theta_f(0) = 0 \quad \theta_o(0) = 0 \\ \dot{\theta}_f(0) = 0 \quad \dot{\theta}_o(0) = 0 \end{cases} \quad (51)$$

5.3.2.4 考虑垂荡运动和纵摇运动的耦合关系

1) 考虑耦合关系对于浮子运动的影响

考虑浮子同时做垂荡和纵摇运动，浮子和振子在沿中轴方向运动的同时，与海平面会有一个角度的偏移。浮子与振子的相对角位移使得 PTO 系统对浮子作用力 F_{PTO} 的方向发生变化，而振子的角度偏离于平衡状态使得浮子受到一个反重力矩 M_a 。

通过上述分析，基于浮子垂荡运动和纵摇运动的耦合关系的影响，对浮子的运动模型进行修正，修正后的模型如下：

$$\begin{cases} m_f \ddot{x}_f = f \cos wt + \rho g V - m_f g - m_a \ddot{x}_f - c_h \dot{x}_f - \{k_s [l_0 - (x_o - x_f)] + c_s (\dot{x}_o - \dot{x}_f)\} \cos(\theta_o - \theta_f) \\ I_f \ddot{\theta}_f = L \cos wt - I_o \ddot{\theta}_f - c_p \dot{\theta}_f - K_{HS} \theta_f + k_t (\theta_o - \theta_f) + c_t (\dot{\theta}_o - \dot{\theta}_f) - m_o g \sin \theta_o (\frac{1}{2} H_o + x_o - x_f) \\ x_f(0) = -2 \quad \dot{x}_f(0) = 0 \\ \dot{\theta}_f(0) = 0 \quad \ddot{\theta}_f(0) = 0 \end{cases} \quad (52)$$

2) 考虑耦合关系对于振子运动的影响

考虑浮子同时做垂荡和纵摇运动，浮子和振子在沿中轴方向运动的同时，与海平面会有一个角度的偏移。振子与竖直方向夹角的偏移会导致振子在沿中轴方向上的分力大小 $mg \cos \theta_o$ 发生变化，同时振子会受到另一个垂直方向上的重力分力提供的力矩 $mg \sin \theta \cdot (\frac{1}{2} H_o + \Delta x)$ 。

通过上述分析，基于浮子垂荡运动和纵摇运动的耦合关系的影响，对振子的运动模型进行修正，修正后的模型如下：

$$\begin{cases} m_o \ddot{x}_o = k_s [l_0 - (x_o - x_f)] - c_s (\dot{x}_o - \dot{x}_f) - m_o \cos \theta_o \\ I_o \ddot{\theta}_o = -k_t (\theta_o - \theta_f) - c_t (\dot{\theta}_o - \dot{\theta}_f) + m_o g \sin \theta_o (\frac{1}{2} H_o + x_o - x_f) \\ x_o(0) = -1.8, \quad \dot{x}_o(0) = 0 \\ \dot{\theta}_o(0) = 0, \quad \ddot{\theta}_o(0) = 0 \end{cases} \quad (53)$$

5.3.3 模型求解

5.3.3.1 模型综合

同时进行垂荡运动和纵摇运动的浮子和振子的运动模型如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} m_f \ddot{x}_f = f \cos wt + \rho g V - m_f g - m_a \ddot{x}_f - c_h \dot{x}_f - \{k_s[l_0 - (x_o - x_f)] + c_s(\dot{x}_o - \dot{x}_f)\} \cos(\theta_o - \theta_f) \\ I_f \ddot{\theta}_f = L \cos wt - I_o \ddot{\theta}_f - c_p \dot{\theta}_f - K_{HS} \theta_f + k_t(\theta_o - \theta_f) + c_t(\dot{\theta}_o - \dot{\theta}_f) - mg \sin \theta_o (\frac{1}{2}H_o + x_o - x_f) \\ I_o \ddot{\theta}_o = -k_t(\theta_o - \theta_f) - c_t(\dot{\theta}_o - \dot{\theta}_f) + m_o g \sin \theta_o (\frac{1}{2}H_o + x_o - x_f) \\ m_o \ddot{x}_o = k_s[l_0 - (x_o - x_f)] - c_s(\dot{x}_o - \dot{x}_f) - m_o \cos \theta_o \\ x_f(0) = -2, \quad x_o(0) = -1.8 \\ \dot{x}_f(0) = 0, \quad \dot{x}_o(0) = 0 \\ \theta_f(0) = 0 \quad \theta_o(0) = 0 \\ \dot{\theta}_f(0) = 0 \quad \dot{\theta}_o(0) = 0 \end{array} \right. \quad (54)$$

5.3.3.2 变量替换

同样使用龙格-库塔方法求解，故先进行变量替换，令

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = x_f \quad p_2 = \dot{x}_f \quad p_3 = x_o \quad p_4 = \dot{x}_o \\ p_5 = \theta_f \quad p_6 = \dot{\theta}_f \quad p_7 = \theta_o \quad p_8 = \dot{\theta}_o \end{array} \right. \quad (55)$$

替换后可得

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_1 = p_2 \quad p_1(0) = -2 \\ \dot{p}_2 = (f \cos wt - c_h p_2 + (\rho g V - m_f g) \cos p_5 + \\ \{-k_s[l_0 - (p_3 - p_2) + c_s(p_4 - p_2)]\} \cos(p_7 - p_5)) / (m_f + m_a) \quad p_2(0) = 0 \\ \dot{p}_3 = p_4 \quad p_3(0) = 0 \\ \dot{p}_4 = \frac{k_s[l_0 - (p_3 - p_1)] - c_s(p_4 - p_2) - m_o g \cos p_7}{m_o} \quad p_4(0) = 0 \\ \dot{p}_5 = p_6 \quad p_5(0) = 0 \\ \dot{p}_6 = \frac{L \cos wt - c_p p_6 - K_{HS} p_5 + k_t(p_7 - p_5) + c_t(p_8 - p_6)}{I_f + I_a} \quad p_6(0) = 0 \\ \dot{p}_7 = p_8 \quad p_7(0) = 0 \\ \dot{p}_8 = \frac{-k_t(p_7 - p_5) - c_t(p_8 - p_6) + m_o g \sin p_7 (\frac{1}{2}H_o + p_3 - p_1)}{\frac{1}{12}m_o(3R_0^2 + H_o^2) + m_o(\frac{1}{2}H_o + p_3 - p_1)^2} \quad p_8(0) = 0 \end{array} \right. \quad (56)$$

使用 Matlab 工具箱中的 ode45 求解该微分方程组的数值解。

5.3.4 结果分析

求解得到浮子在前四十个波浪周期的垂荡位移与纵摇角位移的变化图像如图 9 和图 10 所示。

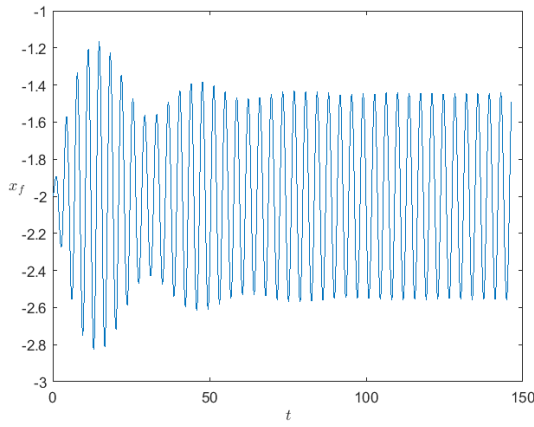


图 9: 浮子垂荡位移-时间关系图

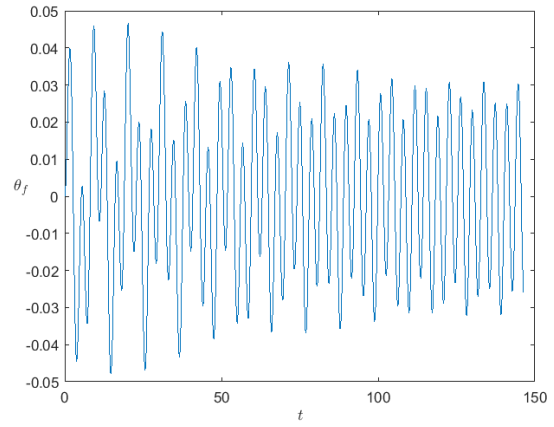


图 10: 浮子纵摇角位移-时间关系图

振子的在前四十个波浪周期的垂荡位移与纵摇角的位移如图 11 和图 12 所示。由图 9、10、11、12 可以看出浮子和振子的垂荡位移和纵摇角位移在起初发生小规模争当变化后逐渐趋于稳定的周期变化，其中浮子的垂荡位移、纵摇角位移变化区间的中值分别为 $-2m, 0rad$ ；振子的垂荡位移、纵摇角位移变化区间的中值分别为 $-1.8m, 0 rad$ ；

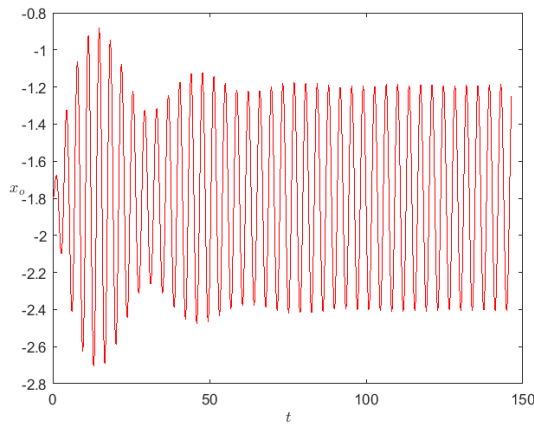


图 11: 振子垂荡位移-时间关系图

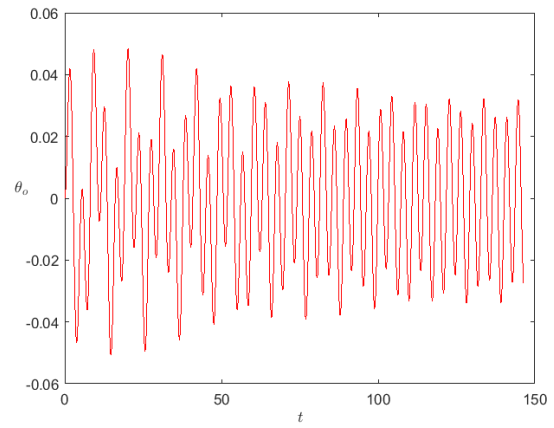


图 12: 振子纵摇角位移-时间关系图

浮子和振子在 10s、20s、40s、60s、100s 的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度如表 3、4 所示：

表 3: 浮子的运动状态

时间 (s)	浮子			
	垂荡位移 (m)	垂荡速度 (m/s)	纵摇角位移	纵摇角速度 (s^{-1})
10	-2.530205404	0.969656259	0.025905358	-0.044915317
20	-2.707149731	-0.272495862	0.04530003	0.015251541
40	-1.630977902	0.758080582	-0.013147645	-0.015661311
60	-2.321632588	-0.723166485	0.024724855	0.0384184
100	-2.050102029	-0.94791551	0.005764356	0.048632011

表 4: 振子的运动状态

时间 (s)	振子			
	垂荡位移 (m)	垂荡速度 (m/s)	纵摇角位移	纵摇角速度 (s^{-1})
10	-2.39872616	1.037259095	0.026936371	-0.046993777
20	-2.572543584	-0.322107565	0.047224723	0.015357587
40	-1.405760548	0.845603018	-0.013989323	-0.016586873
60	-2.140468111	-0.800596124	0.025960204	0.040466308
100	-1.840587578	-1.037923424	0.0060929	0.050803328

5.4 问题四

5.4.1 模型建立

Step 1 优化目标

考虑波浪能系统的垂荡和纵摇运动，输出功率为直线阻尼器和旋转阻尼器功率之和，其瞬时功率表达式为 [5]：

$$P = F_d v_r + W_d w_r \quad (57)$$

其中 v_r 为振子相对于浮子的速度， w_r 为振子相对于浮子的角速度。

由式 (7)、(43)、(57) 可得：

$$P = c_s v_r^2 + c_t w_r^2 \quad (58)$$

平均输出功率为：

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt \quad (59)$$

根据问题二，需要求解设定阻尼系数下允许的 PTO 系统最大平均输出功率，则目标为平均输出功率最大。结合式 (58)、(59)，优化目标为：

$$\max \quad \bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T (c_s v_r^2 + c_t w_r^2) dt$$

Step 2 约束条件

根据题目信息，约束条件为阻尼系数 c_s 和 c_t 的取值范围。

$$\begin{cases} 0 \leq c_s \leq 100000 \\ 0 \leq c_t \leq 100000 \end{cases} \quad (60)$$

其中， σ 为比例系数， r 为幂指数。

Step 3 模型综合

综上所述，建立最优阻尼系数的输出功率模型综合如下：

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & \bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T (c_s v_r^2 + c_t w_r^2) dt \\ s.t. & 0 \leq c_s \leq 100000 \\ & 0 \leq c_t \leq 100000 \\ & m_f \ddot{x}_f = F_w + F_{HS} + F_a + F_d + F_{PTO} \\ & m_o \ddot{x}_o = F'_{PTO} - G_o \\ & I_f \ddot{\theta}_f = M_w + M_{HS} + M_a + M_{Wd} + M_{PTO} \\ & I_o \ddot{\theta}_o = M'_{PTO} + M_G \end{array} \right. \quad (61)$$

5.4.2 模型求解

为了求解平均功率计算式中所需的 v_r 和 w_r ，需结合第三问中所建立的浮子、振子的运动模型，将浮子、振子的运动方程与两种情况下的平均功率计算式、约束条件结合后可得最终的目标优化方程组。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max & \bar{P} = \frac{1}{T} \Sigma (c_s v_r^2 + c_t w_r^2) \Delta t \\ s.t. & 0 \leq c_s \leq 100000 \\ & 0 \leq c_t \leq 100000 \\ & m_f \ddot{x}_f = F_w + F_{HS} + F_a + F_d + F_{PTO} \\ & F'_{PTO} - G_o = m_o \ddot{x}_o \\ & I_f \ddot{\theta}_f = M_w + M_{HS} + M_a + M_{Wd} + M_{PTO} \\ & I_o \ddot{\theta}_o = M'_{PTO} + M_G \end{array} \right. \quad (62)$$

取 $\Delta t = 0.10s$ ，使用粒子群算法求解，得：

$$\bar{P}_{max} = 293.624W \quad c_s = 56567.4276N \cdot s/m \quad 56567.079N \cdot m \cdot s \quad (63)$$

六、灵敏度分析

在问题二求解最大平均输出功率中，采用了按照一定时间间隔 Δt 离散化处理的方法。为了探究时间间隔 Δt 的取值对问题答案的影响，让时间间隔 Δt 在当前值附近以 $0.02s$ 的步长变化，研究问题二的结果变化程度，得到在两种情况下 PTO 最大平均输出功率随时间间隔 Δt 变化的曲线。

情况（1）阻尼系数为常量，给定阻尼系数的取值界限；

情况（2）阻尼系数为变量，与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比，给定比例系数和幂指数的取值界限。

在情况（1）的条件下 TO 最大平均输出功率随时间间隔 Δt 变化的曲线如图 13；在情况（2）的条件下 PTO 最大平均输出功率随时间间隔 Δt 变化的曲线如图 14。

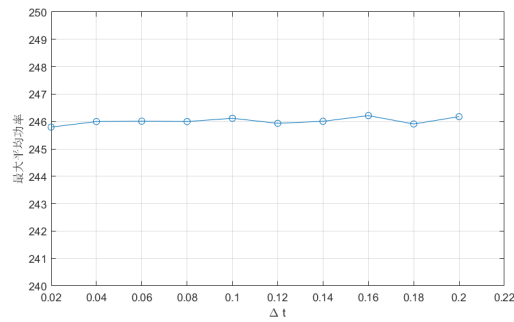


图 13: 灵敏度分析一

可以看出最大平均功率的变化幅度不大，此外，计算每一情况下的最优阻尼系数可知其变化范围不超过 10%。

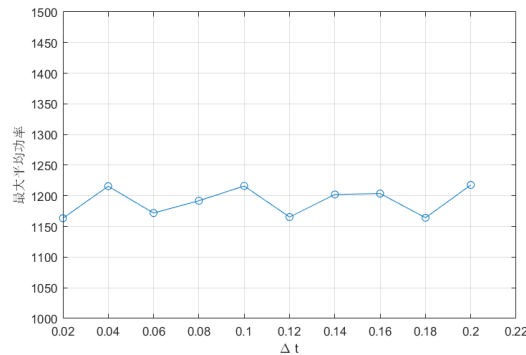


图 14: 灵敏度分析二

最大平均功率变化幅度亦不大，经计算，比例系数与幂指数的变化均小于 10%，综上所述，模型较为稳定。问题四中的模型与问题二类似，其灵敏度分析过程就不在此赘述。

七、模型评价与推广

7.1 模型的优点

1. 在求解平均功率的大小时，通过对时间进行离散化处理，简化了平均功率的求解过程。
2. 首先单独分析波浪能转换装置的纵摇运动，再综合考虑纵摇运动与垂荡运动之间的相互影响，模型架构清晰。
3. 在问题二、四的计算结果中，浮子和振子的运动状态都趋于稳定，说明模型的可信度较高。
4. 运用了力与力矩之间的对偶性来分析浮子和振子的受力矩情况，简化了问题的求解。

7.2 模型的缺点

1. 在受力分析时忽略了中轴、底座、隔层及 PTO 的质量和各种摩擦，考虑的不够全面。
2. 计算功率时忽略了各种能的功率损耗，和真实条件有所偏差。
3. 以转轴为浮子转动的转轴，忽略了在浮子运动过程中，转动轴的转轴的轻微变化。

7.3 模型的改进与推广

1. 全面考虑波浪能转换装置的受力情况。
2. 计算功率时考虑能量转换过程中的能量损耗。
3. 在浮子运动过程中，考虑浮子转动轴的变化
4. 模型中对于浮子、振子运动情况建立的模型可以用于分析其他模式下的波浪能转换装置。

参考文献

- [1] 黄秀秀. 振荡浮子式波浪发电系统的功率控制. Master's thesis, 华南理工大学, 2019.
- [2] 司守奎 and 孙玺菁. 数学建模算法与程序. 海军航空工程学院, 9:95–98, 2007.
- [3] Jeffrey A Oskamp and H Tuba Özkan-Haller. Power calculations for a passively tuned point absorber wave energy converter on the oregon coast. *Renewable Energy*, 45:72–77, 2012.
- [4] 周丙浩. 纵摇浮子式波浪能转换装置研究. Master's thesis, 哈尔滨工程大学, 2018.
- [5] 唐友刚, 赵青, 黄印, and 何鑫. 筏式波浪能发电装置浮体水动力相互作用与能量俘获研究. 海洋技术学报, 35(4):87–92, 2016.

附录

A. 支撑材料列表

- 问题一

- t_1.m ——求解问题一程序
- V.m ——计算体积的函数
- result1-1.xlsx ——题目要求结果
- result1-2.xlsx ——题目要求结果
- result1-1_dis.xlsx ——用于论文中展示 (10s, 20s, 40s, 60s, 100s)
- result1-2_dis.xlsx ——用于论文中展示 (10s, 20s, 40s, 60s, 100s)
- 附件 3.xlsx

- 问题二

- t_2.m ——求解问题二程序
- V.m ——计算体积的函数
- P.m ——计算平均输出功率的函数
- 2.csv ——问题二结果
- 2-1.csv ——问题二灵敏度分析
- 2-2.csv ——问题二灵敏度分析

- 问题三

- t_3.m ——求解问题三程序
- V.m ——计算体积的函数
- result3.xlsx ——题目要求结果
- result3_dis.xlsx ——用于论文中展示 (10s, 20s, 40s, 60s, 100s)
- 附件 3.xlsx

- 问题四
 - t_4.m ——求解问题四程序
 - V.m ——计算体积的函数
 - P4.m ——计算问题四平均输出功率的函数
- images/ ——存放代码运行得到的部分图的目录
- 论文相关材料/ ——存放.tex 源文件等论文相关材料的目录

B. 源代码

t_1.m

```

1  clear, clc
2  a = readmatrix('附件3.xlsx');
3  a = a(:, 2:end);
4
5  i = 1;
6  w = a(i, 1);
7  m_a1 = a(i, 2);
8  c1 = a(i, 4);
9  f = a(i, 6);
10
11 m_f = 4866;
12 r = 1;
13 m_o = 2433;
14 rho = 1025;
15 k = 80000;
16 g = 9.8;
17 l0 = 0.5;
18
19 xf0 = -2;
20 xo0 = -1.8;
21
22 c = 10000;
23
24 T = 2 * pi / w;
25

```

```

26 dp_c=@(t,p,c)[p(2);
27     (-c1 + c) * p(2) - k * p(1) + c * p(4) + k * p(3) - k * l0 + ...
28     rho * g * V(p(1)) - m_f * g +...
29     f * cos(w * t)) / (m_a1 + m_f);
30     p(4);
31     (c * p(4) + k * p(3) - c * p(2) - k * p(1) + m_o * g - k * l0) / (-m_o);];
32 dp1 = @(t,p)dp_c(t, p, c);
33 dp2 = @(t,p)dp_c(t, p, c*(abs(p(2) - p(4))^0.5));
34
35 sol1=ode45(dp1,[0,40*T],[-2 0 -1.8 0]);
36 sol2=ode45(dp2,[0,40*T],[-2 0 -1.8 0]);
37
38
39 %保存结果
40 t = 0:0.2:40*T;
41 t_dis = [10, 20, 40, 60, 100];
42 % result1-1
43 p1 = deval(sol1,t);
44 xf1 = p1(1,:);
45 vf1 = p1(2,:);
46 xo1 = p1(3,:);
47 vo1 = p1(4,:);
48
49 figure;
50 plot(t, xf1);
51 xlabel('$t/s$', 'Interpreter', 'latex', 'fontsize',16)
52 ylabel('$x_f/m$', 'Interpreter', 'latex', 'fontsize',16)
53
54 figure;
55 plot(t, xo1, 'r');
56 xlabel('$t/s$', 'Interpreter', 'latex', 'fontsize',16)
57 ylabel('$x_o/m$', 'Interpreter', 'latex', 'fontsize',16)
58
59 result1 = [t; xf1; vf1; xo1; vo1]';
60 filename = 'result1-1.xlsx';
61 writematrix(result1,filename,'Sheet',1,'Range','A3:E900')
62
63 % 论文展现
64 p1_dis = deval(sol1,t_dis);
65 xf1_dis = p1_dis(1,:);

```

```

66 vf1_dis = p1_dis(2,:);
67 xo1_dis = p1_dis(3,:);
68 vo1_dis = p1_dis(4,:);
69 result1_dis = [t_dis; xf1_dis; vf1_dis; xo1_dis; vo1_dis]';
70 filename = 'result1-1_dis.xlsx';
71 writematrix(result1_dis,filename,'Sheet',1,'Range','A3:E7')
72
73 % result1-2
74 p2 = deval(sol2,t);
75 xf2 = p2(1,:);
76 vf2 = p2(2,:);
77 xo2 = p2(3,:);
78 vo2 = p2(4,:);
79
80 figure;
81 plot(t, xf2);
82 xlabel('$t/s$', 'Interpreter', 'latex', 'fontsize',16)
83 ylabel('$x_f/m$', 'Interpreter', 'latex', 'fontsize',16)
84
85 figure;
86 plot(t, xo2, 'r');
87 xlabel('$t/s$', 'Interpreter', 'latex', 'fontsize',16)
88 ylabel('$x_o/m$', 'Interpreter', 'latex', 'fontsize',16)
89
90 result2 = [t; xf2; vf2; xo2; vo2]';
91 filename = 'result1-2.xlsx';
92 writematrix(result2,filename,'Sheet',1,'Range','A3:E900')
93
94 % 论文展现
95 p2_dis = deval(sol2,t_dis);
96 xf2_dis = p2_dis(1,:);
97 vf2_dis = p2_dis(2,:);
98 xo2_dis = p2_dis(3,:);
99 vo2_dis = p2_dis(4,:);
100 result2_dis = [t_dis; xf2_dis; vf2_dis; xo2_dis; vo2_dis]';
101 filename = 'result1-2_dis.xlsx';
102 writematrix(result2_dis,filename,'Sheet',1,'Range','A3:E7')

```

V.m

```

1 function v = V(xf)
2     r = 1;
3     v = 0;
4     if xf >= 0.8
5         v = 0;
6     elseif xf > 0
7         v = pi * (r ^ 2) * ((0.8 - xf) ^ 3) / (0.8 ^ 2) / 3;
8     elseif xf > -3
9         v = 0.8 * pi / 3 - pi * (r ^ 2) * xf;
10    else
11        v = 9.8 * pi / 3;
12    end
13 end

```

t_2.m

```

1 clear, clc
2
3 delta_T = [0.2, 0.18, 0.16, 0.14, 0.12, 0.10, 0.08, 0.06, 0.04, 0.02];
4
5 for num=1:length(delta_T)
6     delta_t = delta_T(num);
7     '初始化种群-----';
8     %'适应度函数定义';
9     %f= @(x)x .* sin(x) .* cos(2 * x) - 2 * x .* sin(3 * x); % 函数表达式 (适应度函数)
10    N = 100; % 种群个数
11    %d = 1; % 空间维数
12    d = 2; % 空间维数
13    ger = 150; % 最大迭代次数
14    %limit = [0, 100000]; % 设置位置参数限制 d x 2 (d维, 上下限)
15    limit = [0, 100000; 0, 1]; % 设置位置参数限制 d x 2 (d维, 上下限)
16    %vlimit = [-1, 1]; % 设置速度限制 d x 2 (d维, 上下限)
17    vlimit = [-1, 1; -0.01, 0.01]; % 设置速度限制 d x 2 (d维, 上下限)
18    w = 0.8; % 惯性权重
19    c1 = 0.5; % 自我学习因子
20    c2 = 0.5;
21    % 群体学习因子
22    for i = 1:d
23        x(:,i) = limit(i, 1) + (limit(i, 2) - limit(i, 1)) * rand(N, 1);%初始种群的位置
24    end

```

```

25     v = rand(N, d);           % 初始种群的速度
26     xm = x;                   % 每个个体的历史最佳位置
27     ym = zeros(1, d);         % 种群的历史最佳位置
28     fxm = zeros(N, 1);        % 每个个体的历史最佳适应度
29     fym = -inf;                % 种群历史最佳适应度 (寻max则初始化为-inf, 寻min则初始化为inf)
30     '-----';
31
32     '群体更新';
33     record = zeros(ger, 1);    % 记录器(记录每次迭代的群体最佳适应度)
34     for iter = 1:ger
35         fx = zeros(N, 1);
36         for i = 1:N
37             %fx(i) = P(x(i), 0, delta_t); % 个体当前适应度
38             fx(i) = P(x(i, 1), x(i, 2), delta_t); % 个体当前适应度
39         end
40         '更新个体历史最佳适应度和个体历史最佳位置';
41         for i = 1:N
42             if fxm(i) < fx(i) % < / > -----
43                 fxm(i) = fx(i); % 更新个体历史最佳适应度
44                 xm(i,:) = x(i,:); % 更新个体历史最佳位置
45             end
46         end
47
48         '更新群体历史最佳适应度和群体历史最佳位置';
49         if fym < max(fxm) % < / > -----
50             [fym, nmax] = max(fxm); % 更新群体历史最佳适应度-----
51             ym = xm(nmax, :); % 更新群体历史最佳位置
52         end
53
54         '速度更新';
55         v = v * w + c1 * rand * (xm - x) + c2 * rand * (repmat(ym, N, 1) - x); % 速度更新
56         % 边界速度处理-----
57         new_v = zeros(N, d);
58         for i = 1:d
59             vi = v(:,i);
60             vi(vi > vlimit(i,2)) = vlimit(i,2);
61             vi(vi < vlimit(i,1)) = vlimit(i,1);
62             new_v(:,i) = vi;
63         end
64         v = new_v;

```

```

65
66     '位置更新';
67     x = x + v; % 位置更新
68     % 边界位置处理-----
69     new_x = zeros(N, d);
70     for i = 1:d
71         xi = x(:,i);
72         xi(xi > limit(i,2)) = limit(i,2);
73         xi(xi < limit(i,1)) = limit(i,1);
74         new_x(:,i) = xi;
75     end
76     x = new_x;
77     record(iter) = fym; % 最佳适应度记录
78 end
79
80 figure(3);plot(record);title('收敛过程')
81 % f = fopen('2_1.csv', 'a');
82 f = fopen('2_2.csv', 'a');
83 fprintf(f, 'delta_t: %.2f, 最大值: %.4f, 变量取值: %.4f, %.2f\n', delta_t, fym, ym(1),
84         ym(2));
85 fclose(f);
86 disp(['最大值: ', num2str(fym)]);
87 disp(['变量取值: ', num2str(ym(1)), ' ', num2str(ym(2))]);
88 end

```

P.m

```

1 function ans = P(c, n, delta_t)
2     w = 2.2143;
3     m_a1 = 1165.992;
4     c1 = 167.8395;
5     f = 4890;
6
7     m_f = 4866;
8     r = 1;
9     m_o = 2433;
10    rho = 1025;
11    k = 80000;
12    g = 9.8;
13    l0 = 0.5;

```



```

14
15     xf0 = -2;
16     xo0 = -1.8;
17
18     %c = 10000;
19
20     T = 2 * pi / w;
21
22     dp_c=@(t,p,c)[p(2);
23         (-(c1 + c) * p(2) - k * p(1) + c * p(4) + k * p(3) - k * l0 + ...
24         rho * g * V(p(1)) - m_f * g +...
25         f * cos(w * t)) / (m_a1 + m_f);
26         p(4);
27         (c * p(4) + k * p(3) - c * p(2) - k * p(1) + m_o * g - k * l0) / (-m_o);];
28     dp1 = @(t,p)dp_c(t, p, c);
29     dp2 = @(t,p)dp_c(t, p, c*((abs(p(2) - p(4)))^n));
30     sol1=ode45(dp2,[0,40*T],[-2 0 -1.8 0]);
31     t = 0:delta_t:40*T;
32     p1 = deval(sol1,t);
33     xf1 = p1(1,:);
34     vf1 = p1(2,:);
35     xo1 = p1(3,:);
36     vo1 = p1(4,:);
37     p = c * (vo1 - vf1) .* (vo1 - vf1);
38     ans = sum(p) * delta_t / (40*T);
39 end

```

t_3.m

```

1 clear, clc
2 a = readmatrix('附件3.xlsx');
3 a = a(:, 2:end);
4
5 i = 3;
6 w = a(i, 1);
7 m_a1 = a(i, 2);
8 Ia = a(i, 3);
9 c1 = a(i, 4);
10 cp = a(i, 5);
11 f = a(i, 6);

```

```

12 L = a(i, 7);
13
14 m_f = 4866;
15 Rf = 1;
16 Hf1 = 3;
17 Hf2 = 0.8;
18 Sf1 = pi*Rf^2;
19 Sf2 = pi*Rf^2;
20 Sf3 = 2*pi*Rf*Hf1;
21 l = sqrt(Hf2^2 + Rf^2);
22 Sf4 = pi*Rf*l;
23 mf1 = Sf1 / (Sf1 + Sf2 + Sf3 + Sf4) * m_f;
24 mf2 = Sf2 / (Sf1 + Sf2 + Sf3 + Sf4) * m_f;
25 mf3 = Sf3 / (Sf1 + Sf2 + Sf3 + Sf4) * m_f;
26 mf4 = Sf4 / (Sf1 + Sf2 + Sf3 + Sf4) * m_f;
27 If1 = 1 / 4 * mf1 * Rf^2 + mf1 * Hf1^2;
28 If2 = 1 / 4 * mf2 * Rf^2;
29 If3 = 1 / 2 * mf3 * Rf^2 + 1 / 12 * mf3 * Hf1^2 + mf3 * (Hf1 / 2)^2;
30 dh = [0.01:0.01:Hf2];
31 dr = dh * Rf / Hf2;
32 dl = 2 * pi * dr;
33 dm = mf4 / (sum(dl)) * dl;
34 If4 = 1 / 2 * dm.*(dr.^2) + dm.*((Hf2 - dh).^2);
35 If4 = sum(If4);
36
37 If = If1 + If2 + If3 + If4;
38
39 m_o = 2433;
40 Ro = 0.5;
41 Ho = 0.5;
42 rho = 1025;
43 ks = 80000;
44 g = 9.8;
45 l0 = 0.5;
46 kt = 250000;
47 Khs = 8890.7;
48
49 xf0 = -2;
50 xo0 = -1.8;
51

```

```

52 c = 10000;
53 ct = 1000;
54
55 T = 2 * pi / w;
56
57
58 dp_c=@(t,p,c)[p(2);
59     (f*cos(w*t) - c1*p(2) + (rho*g*V(p(1)) - m_f*g) * cos(p(5)) +...
60     (-ks*(10 - (p(3) - p(1))) + c * (p(4) - p(2))) * cos(p(7)-p(5))) / (m_f + m_a1);
61     p(4);
62     (ks*(10 - (p(3)-p(1))) - c * (p(4)-p(2)) - m_o*g*cos(p(7))) / m_o;
63     p(6);
64     (L * cos(w*t) - cp*p(6) - Khs*p(5) + kt*(p(7)-p(5)) + ct*(p(8)-p(6)) -...
65     m_o*g*sin(p(7))*(Ho / 2 + p(3)-p(1))) / (If + Ia);
66     p(8);
67     (-kt*(p(7)-p(5)) - ct*(p(8)-p(6)) + m_o*g*sin(p(7))*(Ho / 2 + p(3)-p(1))) /...
68     (1 / 12 * m_o * (3*Ro^2 + Ho^2) + m_o*(Ho/2 + p(3) - p(1))^2)];
69
70 dp1 = @(t,p)dp_c(t, p, c);
71
72 sol1=ode45(dp1,[0,40*T],[-2 0 -1.8 0 0 0 0 0]);
73
74
75 %保存结果
76 t = 0:0.2:40*T;
77 t_dis = [10, 20, 40, 60, 100];
78 % result1-1
79 p1 = deval(sol1,t);
80 xf1 = p1(1,:);
81 vf1 = p1(2,:);
82 xo1 = p1(3,:);
83 vo1 = p1(4,:);
84 theta_f1 = p1(5,:);
85 wf1 = p1(6,:);
86 theta_o1 = p1(7,:);
87 wo1 = p1(8,:);
88
89 figure;
90 plot(t, xf1);
91 xlabel('$t$', 'Interpreter', 'latex')

```

```

92 ylabel('$x_f$', 'Interpreter', 'latex', 'Rotation', 0)
93
94 figure;
95 plot(t, theta_f1);
96 xlabel('$t$', 'Interpreter', 'latex')
97 ylabel('$\theta_f$', 'Interpreter', 'latex', 'Rotation', 0)
98
99 figure;
100 plot(t, xo1, 'r');
101 xlabel('$t$', 'Interpreter', 'latex')
102 ylabel('$x_o$', 'Interpreter', 'latex', 'Rotation', 0)
103
104 figure;
105 plot(t, theta_o1, 'r');
106 xlabel('$t$', 'Interpreter', 'latex')
107 ylabel('$\theta_o$', 'Interpreter', 'latex', 'Rotation', 0)
108
109 result3 = [t; xf1; vf1; theta_f1; wf1; xo1; vo1; theta_o1; wo1]';
110 filename = 'result3.xlsx';
111 writematrix(result3,filename,'Sheet',1,'Range','A3:I735')
112
113 % 论文展现
114 p1_dis = deval(sol1,t_dis);
115 xf1_dis = p1_dis(1,:);
116 vf1_dis = p1_dis(2,:);
117 xo1_dis = p1_dis(3,:);
118 vo1_dis = p1_dis(4,:);
119 theta_f1_dis = p1_dis(5,:);
120 wf1_dis = p1_dis(6,:);
121 theta_o1_dis = p1_dis(7,:);
122 wo1_dis = p1_dis(8,:);
123 result3_dis = [t_dis; xf1_dis; vf1_dis; theta_f1_dis; wf1_dis; xo1_dis; vo1_dis;
    theta_o1_dis; wo1_dis]';
124 filename = 'result3_dis.xlsx';
125 writematrix(result3_dis,filename,'Sheet',1,'Range','A3:I7')

```

t_4.m

```

1 clear, clc
2

```

```

3 %delta_T = [0.14, 0.12, 0.10, 0.08, 0.06, 0.04, 0.02];
4 delta_T = [0.10];
5
6 for num=1:5
7     %delta_t = delta_T(num);
8     delta_t = delta_T(1);
9     '初始化种群-----';
10    %'适应度函数定义';
11    %f= @(x)x .* sin(x) .* cos(2 * x) - 2 * x .* sin(3 * x); % 函数表达式 (适应度函数)
12    N = 100; % 种群个数
13    %d = 1; % 空间维数
14    d = 2; % 空间维数
15    ger = 100; % 最大迭代次数
16    %limit = [0, 100000]; % 设置位置参数限制 d x 2 (d维, 上下限)
17    limit = [0, 100000; 0, 100000]; % 设置位置参数限制 d x 2 (d维, 上下限)
18    %vlimit = [-1, 1]; % 设置速度限制 d x 2 (d维, 上下限)
19    vlimit = [-1, 1; -1, 1]; % 设置速度限制 d x 2 (d维, 上下限)
20    w = 0.8; % 惯性权重
21    c1 = 0.5; % 自我学习因子
22    c2 = 0.5;
23    % 群体学习因子
24    for i = 1:d
25        %x(:,i) = limit(i, 1) + (limit(i, 2) - limit(i, 1)) * rand(N, 1);%初始种群的位置
26        x(:,i) = linspace(0, 100000, N)';%初始种群的位置
27    end
28    v = rand(N, d); % 初始种群的速度
29    xm = x; % 每个个体的历史最佳位置
30    ym = zeros(1, d); % 种群的历史最佳位置
31    fxm = zeros(N, 1); % 每个个体的历史最佳适应度
32    fym = -inf; % 种群历史最佳适应度 (寻max则初始化为-inf, 寻min则初始化为inf)
33    '-----';
34
35    '群体更新';
36    record = zeros(ger, 1); % 记录器(记录每次迭代的群体最佳适应度)
37    for iter = 1:ger
38        fx = zeros(N, 1);
39        for i = 1:N
40            %fx(i) = P(x(i), 0, delta_t); % 个体当前适应度
41            fx(i) = P4(x(i, 1), x(i, 2), delta_t); % 个体当前适应度
42        end

```

```

43     '更新个体历史最佳适应度和个体历史最佳位置';
44     for i = 1:N
45         if fxm(i) < fx(i) % < / > -----
46             fxm(i) = fx(i); % 更新个体历史最佳适应度
47             xm(i,:) = x(i,:); % 更新个体历史最佳位置
48         end
49     end
50
51     '更新群体历史最佳适应度和群体历史最佳位置';
52     if fym < max(fxm) % < / > -----
53         [fym, nmax] = max(fxm); % 更新群体历史最佳适应度---
54         ym = xm(nmax, :); % 更新群体历史最佳位置
55     end
56
57     '速度更新';
58     v = v * w + c1 * rand * (xm - x) + c2 * rand * (repmat(ym, N, 1) - x); % 速度更新
59     % 边界速度处理-----
60     new_v = zeros(N, d);
61     for i = 1:d
62         vi = v(:,i);
63         vi(vi > vlimit(i,2)) = vlimit(i,2);
64         vi(vi < vlimit(i,1)) = vlimit(i,1);
65         new_v(:,i) = vi;
66     end
67     v = new_v;
68
69     '位置更新';
70     x = x + v; % 位置更新
71     % 边界位置处理-----
72     new_x = zeros(N, d);
73     for i = 1:d
74         xi = x(:,i);
75         xi(xi > limit(i,2)) = limit(i,2);
76         xi(xi < limit(i,1)) = limit(i,1);
77         new_x(:,i) = xi;
78     end
79     x = new_x;
80     record(iter) = fym; % 最佳适应度记录
81 end
82

```

```

83     figure(3);plot(record);title('收敛过程')
84     % f = fopen('2_1.csv', 'a');
85     f = fopen('4_true.csv', 'a');
86     fprintf(f,'delta_t: %.2f, 最大值: %.4f, 变量取值: %.4f, %.2f\n', delta_t, fym, ym(1),
            ym(2));
87     fclose(f);
88     disp(['最大值: ', num2str(fym)]);
89     disp(['变量取值: ', num2str(ym(1)), ' ', num2str(ym(2))]);
90 end

```

P4.m

```

1 function ans = P(c, ct, delta_t)
2     w = 1.9806;
3     m_a1 = 1091.099;
4     Ia = 7142.493;
5     c1 = 528.5018;
6     cp = 1655.909;
7     f = 1760;
8     L = 2140;
9
10    m_f = 4866;
11    Rf = 1;
12    Hf1 = 3;
13    Hf2 = 0.8;
14    Sf1 = pi*Rf^2;
15    Sf2 = pi*Rf^2;
16    Sf3 = 2*pi*Rf*Hf1;
17    l = sqrt(Hf2^2 + Rf^2);
18    Sf4 = pi*Rf*l;
19    mf1 = Sf1 / (Sf1 + Sf2 + Sf3 + Sf4) * m_f;
20    mf2 = Sf2 / (Sf1 + Sf2 + Sf3 + Sf4) * m_f;
21    mf3 = Sf3 / (Sf1 + Sf2 + Sf3 + Sf4) * m_f;
22    mf4 = Sf4 / (Sf1 + Sf2 + Sf3 + Sf4) * m_f;
23    If1 = 1 / 4 * mf1 * Rf^2 + mf1 * Hf1^2;
24    If2 = 1 / 4 * mf2 * Rf^2;
25    If3 = 1 / 2 * mf3 * Rf^2 + 1 / 12 * mf3 * Hf1^2 + mf3 * (Hf1 / 2)^2;
26    dh = [0.01:0.01:Hf2];
27    dr = dh * Rf / Hf2;
28    dl = 2 * pi * dr;

```

```

29     dm = mf4 / (sum(dl)) * dl;
30     If4 = 1 / 2 * dm.*(dr.^2) + dm.*((Hf2 - dh).^2);
31     If4 = sum(If4);
32
33     If = If1 + If2 + If3 + If4;
34
35     m_o = 2433;
36     Ro = 0.5;
37     Ho = 0.5;
38     rho = 1025;
39     ks = 80000;
40     g = 9.8;
41     l0 = 0.5;
42     kt = 250000;
43     Khs = 8890.7;
44
45     xf0 = -2;
46     xo0 = -1.8;
47
48
49     T = 2 * pi / w;
50
51     dp_c=@(t,p,c)[p(2);
52         (f*cos(w*t) - c1*p(2) + (rho*g*V(p(1)) - m_f*g) * cos(p(5)) +...
53         (-ks*(l0 - (p(3) - p(1))) + c * (p(4) - p(2))) * cos(p(7)-p(5))) / (m_f + m_a1);
54         p(4);
55         (ks*(l0 - (p(3)-p(1))) - c * (p(4)-p(2)) - m_o*g*cos(p(7))) / m_o;
56         p(6);
57         (L * cos(w*t) - cp*p(6) - Khs*p(5) + kt*(p(7)-p(5)) + ct*(p(8)-p(6)) -...
58         m_o*g*sin(p(7))*(Ho / 2 + p(3)-p(1))) / (If + Ia);
59         p(8);
60         (-kt*(p(7)-p(5)) - ct*(p(8)-p(6)) + m_o*g*sin(p(7))*(Ho / 2 + p(3)-p(1))) /...
61         (1 / 12 * m_o * (3*Ro^2 + Ho^2) + m_o*(Ho/2 + p(3) - p(1))^2)];
62     dp1 = @(t,p)dp_c(t, p, c);
63
64     sol1=ode45(dp1,[0,40*T],[-2 0 -1.8 0 0 0 0 0]);
65     t = 0:delta_t:40*T;
66     p1 = deval(sol1,t);
67     xf1 = p1(1,:);
68     vf1 = p1(2,:);

```



```
69     xo1 = p1(3,:);
70     vo1 = p1(4,:);
71     theta_f1 = p1(5,:);
72     wf1 = p1(6,:);
73     theta_o1 = p1(7,:);
74     wo1 = p1(8,:);
75     p = c * (vo1 - vf1) .* (vo1 - vf1) + ct * (wo1 - wf1) .* (wo1 - wf1);
76     ans = sum(p) * delta_t / (40*T);
77 end
```
