后缀自动机 (SAM) - 上

fjy666

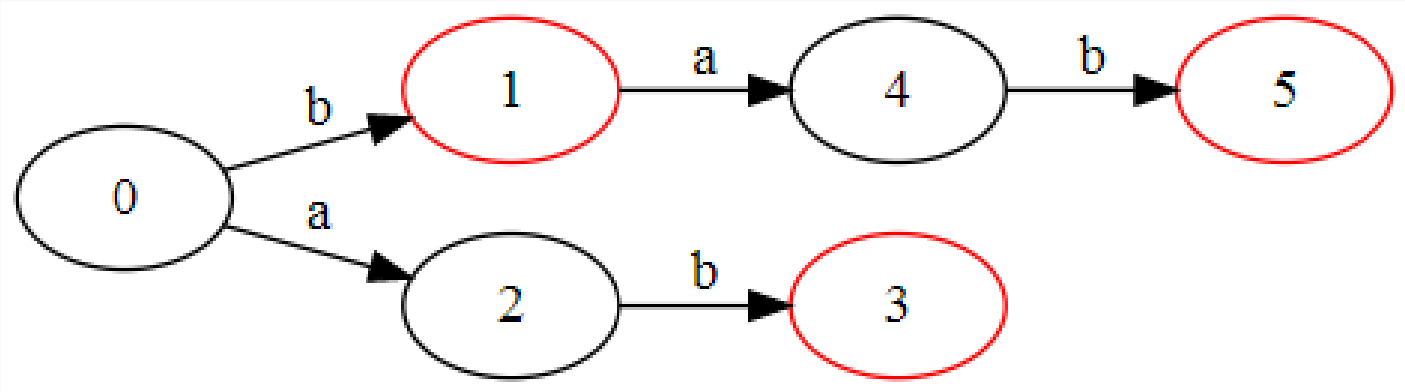
June 16th, 2022

引入

首先，SAM 是什么？
Suffix AutoMaton, 后缀自动机。
这是 OI 中字符串算法的最高点了。
虽然如此，我们要清楚一个概念:
SAM 和 SA(后缀数组) 没有任何关系。
那么，就开始吧！

介绍

SAM 是一种什么结构？
我们先不管它，先来看一个东西：
字符串 S="bab" 和它的「后缀 Trie」(即把所有后缀扔到一个 Trie 上)



介绍

这玩意有个非常棒的性质：它包括了 S 的所有子串的信息。
从节点 0 开始，随便走一段必定是 S 的子串，
而 S 的子串也必定是 0 到某一个节点的路径。
并且只要最终走到了红色的节点，这个字符串就一定是原串的一个后缀。
并且，这个「后缀 Trie」是一个 DAG，可以很方便的 dp。

介绍

这玩意有个非常棒的性质：它包括了 S 的所有子串的信息。
从节点 0 开始，随便走一段必定是 S 的子串，
而 S 的子串也必定是 0 到某一个节点的路径。
并且只要最终走到了红色的节点，这个字符串就一定是原串的一个后缀。
并且，这个「后缀 Trie」是一个 DAG，可以很方便的 dp。
唯一也是致命的缺点：这玩意的时空复杂度是 $\mathcal{O}(n^2)$ 的！
看到这里，你应该清楚 SAM 是个什么东西了吧！

没错，SAM 就是一个具有上述性质，并且时空复杂度均为 $\mathcal{O}(n \log \Sigma)$ 的结构！

定义

虽说如此，SAM 的概念还是有必要提一句的。

字符串 s 的 SAM 是一个接受 s 的所有后缀的最小 **DFA**（确定性有限自动机或确定性有限状态自动机）。

换句话说：

- SAM 是一张有向无环图。结点被称作 **状态**，边被称作状态间的 **转移**。
- 图存在一个源点 t_0，称作 **初始状态**，其它各结点均可从 t_0 出发到达。
- 每个 **转移** 都标有一些字母。从一个结点出发的所有转移均 **不同**。
- 存在一个或多个 **终止状态**。如果我们从初始状态 t_0 出发，最终转移到了一个终止状态，则路径上的所有转移连接起来一定是字符串 s 的一个后缀。s 的每个后缀均可用一条从 t_0 到某个终止状态的路径构成。
- 在所有满足上述条件的自动机中，SAM 的结点数是最少的。

From oi-wiki.org

endpos

endpos 是什么？
考虑原串 S 的任意非空子串 T，那么
endpos(T) 被定义为 T 在 S 中出现时末尾位置所组成的集合（下标从 1 开始）。
这个可能有点难懂，所以我举个例子：
S = "114514",T="14",
那么 endpos(T)=$\{3,6\}$。
对于空串，我们定义它的 endpos 为 $\{0,1,2,3,\cdots,|S|\}$
是不是非常 Easy？这玩意必须记住，这是重中之重。

endpos

我们定义 endpos 等价类为一堆 endpos 相等的子串所组成的集合。
显然，两个不同的 endpos 等价类不可能有相同的元素。
那么这样我们就把一共 $\mathcal{O}(n^2)$ 种子串分成了 $\mathcal{O}(n)$ 种 endpos 等价类。
有人要问了：为啥是 $\mathcal{O}(n)$？自己翻 OI-wiki 去/xyx

link

link，即后缀链接，是「SAM 上的 fail 指针」。
这玩意很玄学，我们来看看 OI-wiki 的定义吧！

考虑 SAM 中某个不是 t_0 的状态 v。我们已经知道，状态 v 对应于具有相同 endpos 的等价类。

我们如果定义 w 为这些字符串中最长的一个，则所有其它的字符串都是 w 的后缀。

我们还知道字符串 w 的前几个后缀（按长度降序考虑）全部包含于这个等价类，且所有其它后缀（至少有一个——空后缀）在其它的等价类中。我们记 t 为最长的这样的后缀，然后将 v 的后缀链接连到 t 上。

换句话说，一个 **后缀链接** $\operatorname{link}(v)$ 连接到对应于 w 的最长后缀的另一个 endpos 等价类的状态。

link

有人会问了：fjy 你这样没良心的抄 OI-wiki 好吗？
额……
我们很容易地发现：如果定义一个结点 x 的父节点为 link[x]，
那么这就是！一课！树！

link

有人会问了：fjy 你这样没良心的抄 OI-wiki 好吗？
额……
我们很容易地发现：如果定义一个结点 x 的父节点为 link[x]，
那么这就是！一课！树！恭迎！凸包之神！俞开！！1111

link

有人会问了：fjy 你这样没良心的抄 OI-wiki 好吗？
额……
我们很容易地发现：如果定义一个结点 x 的父节点为 link[x]，
那么这就是！一课！树！恭迎！凸包之神！俞开！！1111

而根据树的定义，我们似乎也可以把 SAM 叫做凸包/xyx。

node

自动机吗，肯定是有一个个节点组成的。
那么 SAM 的节点是什么呢？
由于有 $\mathcal{O}(n)$ 种 endpos 等价类（下称等价类），
每个 SAM 节点都代表一个等价类内所有的子串的集合！
显然，每个节点代表的 endpos 集合都不同，也就是没有一个字符串同时包含在两个节点里。
当然实现的时候不可能真存一堆字符串，也不会存下 endpos，否则空间炸出翔。

node

那一个 node 里存啥捏？别急，我们先来引入一些记号：

s 的子串可以根据它们结束的位置 endpos 被划分为多个等价类；

SAM 由初始状态 t_0 和与每一个 endpos 等价类对应的每个状态组成；

对于每一个状态 v，一个或多个子串与之匹配。我们记 $\mathrm{longest}(v)$ 为其中最长的一个字符串，记 $\mathrm{len}(v)$ 为它的长度。类似地，记 $\mathrm{shortest}(v)$ 为最短的子串，它的长度为 $\mathrm{minlen}(v)$。那么对应这个状态的所有字符串都是字符串 $\mathrm{longest}(v)$ 的不同的后缀，且所有字符串的长度恰好覆盖区间 $[\mathrm{minlen}(v), \mathrm{len}(v)]$ 中的每一个整数。

对于任意不是 t_0 的状态 v，定义后缀链接为连接到对应字符串 $\mathrm{longest}(v)$ 的长度为 $\mathrm{minlen}(v) - 1$ 的后缀的一条边。从根节点 t_0 出发的后缀链接可以形成一棵树。这棵树也表示 endpos 集合间的包含关系。

对于 t_0 以外的状态 v，可用后缀链接 $\mathrm{link}(v)$ 表达 $\mathrm{minlen}(v)$：

$$\mathrm{minlen}(v) = \mathrm{len}(\mathrm{link}(v)) + 1.$$

如果我们从任意状态 v_0 开始顺着后缀链接遍历，总会到达初始状态 t_0。这种情况下我们可以得到一个互不相交的区间 $[\mathrm{minlen}(v_i), \mathrm{len}(v_i)]$ 的序列，且它们的并集形成了连续的区间 $[0, \mathrm{len}(v_0)]$。

node

OI-wiki：明天律师函就到你家门口。
谜底揭晓：每个 node 里存 len, link 和 trans。
这个 trans 是啥东西？
傻孩子！你自动机连边都不存的吗？

node

那问题来了：SAM 中的「边」是怎么定义的呢？
把 endpos 等价类里的所有能拓展的 s 都往后拓展一个字符 c，这些新字符串所组成的等价类就是这条「边」所指向的节点。
我们来举个例子吧！S=cxyyuyu，节点 {3,4,6} 的边 u 所指向节点的 endpos 是什么呢？

node

那问题来了：SAM 中的「边」是怎么定义的呢？
把 endpos 等价类里的所有能拓展的 s 都往后拓展一个字符 c，
这些新字符串所组成的等价类就是这条「边」所指向的节点。
我们来举个例子吧！S=cxyyuyu，节点 $\{3,4,6\}$ 的边 u 所指向节点的 endpos 是什么呢？
没错，是 $\{5,7\}$。
边有两种存法，一种是数组，一种是 std::map
数组的复杂度为 $\mathcal{O}(n)$，但空间为 $\mathcal{O}(n\Sigma)$
std::map 的空间 $\mathcal{O}(n)$，但时间为 $\mathcal{O}(n\log\Sigma)$。
使用时可以自行选择。

node

到了这里，我们总算把定义搞定了。
在看如何实现之前，我们先看几个标准的 SAM。
1. S=cxyuyu，它的 SAM 长这样：
* 展示 SAM*
很壮观，是不是？

实现

有趣的是，概念似乎比实现还要难/kx
我们先看一下【模板】，然后边看代码边讲吧。
https://www.luogu.com.cn/problem/P3804

总结

SAM 确实是一种比较强大的 string DS。
它可以很方便地解决很多和后缀有关的东西。
有些本质不同子串问题也可以用它。
总而言之，遇到不会的题，SAM 淦它就对了！
我还会出下一讲——SAM 的习题与应用，敬请期待 qwq！

Goodbye

Thank you for your listening!
Made by fjy666.
参考链接:
https://oi-wiki.org/string/sam/
https://www.luogu.com.cn/problem/solution/P3804
https://alpha1022.gitee.io/sam-visualizer/
https://blog.csdn.net/qq_42101694/article/details/111740597

Special Thanks

Special Thanks to lym(fix LaTeX error in my computer), the oi-wiki and luogu.