Wiederholung Bruchrechnung

Florian Knierim

2022-05-09

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Wir alle kennen Brüche aus unserem Alltag. Jeder von uns hat schon von einer *viertel Stunde* gehört und selbst ein *halbes Pfund* könnte einigen geläufig sein. Mit diesen Angaben geben wir Größen an, die kleiner als ein Ganzes sind. Die *vier*tel Stunde ist der *vier*te Teil einer Stunde bzw. $60 : 4 = 15$ Minuten. Das halbe Pfund ist die Hälfte von $500g$ also $500g : 2 = 250g$.

Neben diesen im Alltag sehr verbreiteten Brüchen lassen sich auch andere Bruchteile angeben:

- Eine Stunde ist der vierundzwanzigste Teil eines Tages. $\frac{1}{24}d = 1h$
- Ein Zentimeter ist der hundertste Teil eines Meters. $\frac{1}{100}m = 1cm$
- Eine Minute ist der sechzigste Teil einer Stunde. $\frac{1}{60}h = 1min.$

Du kannst dir vorstellen, dass es im Grunde für alle Größen auch kleinere *Anteilsgrößen* gibt. Die erste Anwendung von Brüchen ist daher das Berechnen von Anteilen von Größen bzw. Bruchteilen von Größen. Die Zahl unter dem Bruchstrich gibt an, in wie viele Teile das Ganze zerlegt wurde. Brüche werden nach dieser Zahl benannt:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	...	$\frac{1}{20}$
halbe	drittel	viertel	fünftel	sechstel	siebtel	achtel	...	zwanzigstel

Ab der Zahl vier wird an die Zahl die Endsilbe „-tel“ oder bei Zahlwortendung auf „-g“ (wie bei zwanzig) die Endsilbe „-stel“ angehängt. Bei der Zahl sieben wir dauf das „-en“ am Ende verzichtet.[1]

[1] Im Englischen werden Bruchteile als *half*, *third*, *fourth*, *fifth* usw. benannt. Hier ist ab der Zahl vier die Endung immer „-th“. Bei Zahlen, die auf „-y“ enden, wie z.B. *twenty*, wird das „-y“ durch „-ieth“ ersetzt. So erhält man z.B. das *twentieth* von *20th century Fox*.

2 Bruchteile von Größen

Eben hatten wir bereits eine viertel Stunde angesprochen. Aber auch eine drei viertel Stunde kennst du vermutlich schon. In der Mathematik schreiben wir die drei viertel Stunde so: $\frac{3}{4}h$.

Ist der Bruchteil einer Größe gefordert, so kann man die Aufgabe lösen, in dem man zunächst (1) die Größe in die nächst kleinere Größe umwandelt und dann (2) durch den Nenner teilt. Abschließend wird (3) mit dem Zähler multipliziert.

Wir schauen uns diese drei Schritte mal am Beispiel der dreiviertel Stunde an:

1. Gesucht ist $\frac{3}{4}$ von $1h$. $1h = 60min$. — $\frac{3}{4}$ von $60min$.
2. Der Nenner ist 4 daher teile 60 durch 4. — $60 : 4 = 15$
3. Der Zähler ist 3 multipliziere 15 mit 3. — $15 \cdot 3 = 45$

Diese Rechnung lässt sich auch am Stück abhandeln. Wir erhalten dann eine Kette von Rechnungen:

$$\frac{3}{4} \text{ von } 1h = \frac{3}{4} \cdot 1h \overset{(1)}{=} \frac{3}{4} \cdot 60min = 60min : 4 \cdot 3 \overset{(2)}{=} 15min \cdot 3 \overset{(3)}{=} 45min$$

Bei der Kettenrechnung dürfen die Division und Multiplikation vertauscht werden. Auf die gleiche Weise lassen sich auch andere Bruchteile berechnen.

Übungen:

Prüfe durch eine Rechnung:

a) Drei viertel von $1m$ sind $75cm$.

b) Fünf sechstel von $1h$ sind $50min$.

c) Sechs achtel von $1km$ sind $750m$.

d) Drei achtel von $4km$ sind $1500m$.

3 Kürzen und Erweitern

Vielleicht ist es dir bei der letzten Übung schon aufgefallen: Manche Bruchteile geben den gleichen Anteil an, ohne, dass sie gleich aussehen. Es ist egal, ob ich $\frac{6}{8}$ von einem Kilometer oder $\frac{3}{4}$ von einem Kilometer berechne. Das Ergebnis sind immer $750m$. Das liegt daran, dass beide Brüche den gleichen Wert haben. Man kann also schreiben

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Führen wir uns die dreiviertel Stunde von weiter oben nochmal vor Augen, kann man auch sagen, dass $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ ist. Du kannst die letzte Gleichung lesen als „45 von 60 sind das Gleiche wie 3 von 4" oder auch als „45 sechzigstel sind gleich 3 viertel".

Der Wechsel zwischen verschiedenen Schreibweisen von Brüchen mit dem gleichen Wert geschieht durch *kürzen und erweitern*. Dabei werden Zähler und Nenner eines Bruches mit der gleichen Zahl multipliziert (erweitern) oder durch die gleiche Zahl dividiert (kürzen). Beim Kürzen muss die *Kürzungszahl* ein gemeinsamer Teiler von Zähler und Nenner sein.

Im Fall von $\frac{45}{60}$ bringt uns eine Kürzung um 15 auf den Bruch $\frac{3}{4}$, weil

$$\frac{45}{60} = \frac{45:15}{60:15} = \frac{3}{4}$$

Die Gegenrichtung (erweitern) verläuft so

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{45}{60}$$

Auch die eben angesprochenen $\frac{6}{8}$ lassen sich durch Kürzen um 2 auf die Form $\frac{3}{4}$ bringen:

$$\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$$

Eine Kürzung oder Erweiterung wird manchmal auch abgekürzt geschrieben mit Zahlen über und unter dem Gleichheitszeichen:

- „Erweitere $\frac{5}{7}$ um 3" wird dann zu $\frac{5}{7} \overset{3}{=} \frac{15}{21}$. (Nebenrechnung $5 \cdot 3 = 15$; $7 \cdot 3 = 21$)
- „Kürze $\frac{75}{100}$ mit 25" wird dann zu $\frac{75}{100} \underset{25}{=} \frac{3}{4}$. (Nebenrechnung $75 : 25 = 3$; $100 : 25 = 4$)

Kürzen und Erweitern kann in mehreren Schritten geschehen. Mit dem größten gemeinsamen Teiler kommt man durch Kürzen immer sofort auf die Darstellung mit dem kleinsten Zähler und Nenner. Diese Darstellung wird *vollständig gekürzt* genannt. Die vollständig gekürzte Darstellung von $\frac{45}{60}$ ist zum Beispiel $\frac{3}{4}$. Denn 15 ist der größte gemeinsame Teiler von 45 und 60 und oben haben wir bereits gezeigt, dass $\frac{45}{60} \underset{15}{=} \frac{3}{4}$ ist.

Merke: Beim Erweitern werden Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert. Beim Kürzen werden Zähler und Nenner durch der gleichen Zahl dividiert.

Beim Erweitern und Kürzen ändert sich der Wert des Bruches nicht. Die dargestellten Anteile werden nur verfeinert (erweitern) bzw. zusammengefasst (kürzen).

Bei einem vollständig gekürzten Bruch sind Zähler und Nenner *teilerfremd*. Es gibt keine gemeinsamen Teiler.

Übungen:

a) Erweitere $\frac{11}{12}$ um 4.

b) Erweitere $\frac{5}{6}$ um 10.

c) Kürze $\frac{12}{60}$ mit 6.

d) Kürze $\frac{48}{60}$ soweit wie möglich (vollständig gekürzt).

Die Lösungen sind in der Fußnote[2]

[2] a) $\frac{44}{48}$; b) $\frac{50}{60}$; c) $\frac{2}{10}$; d) $\frac{4}{5}$

4 Vergleich von Brüchen; Brüche auf der Zahlengeraden

Mithilfe von Kürzen und Erweitern lassen sich Bruchteile miteinander vergleichen, sodass man sagen kann, ob $\frac{11}{26}$ oder $\frac{22}{39}$ größer sind. Hierbei gibt es mehrere Methoden. zum einen den Vergleich bei gleichem Nenner und zum anderen den Vergleich bei gleichem Zähler. Bei beiden Methoden müssen die beiden Brüche zunächst gekürzt oder erweitert werden.

4.1 Vergleich bei gleichem Nenner

Für unsere beiden Beispielzahlen ist beim Vergleich bei gleichem Nenner der Nenner 78 ein gutes Ziel, weil 78 ein gemeinsames Vielfaches von 26 ($3 \cdot 26 = 78$) und 39 ($2 \cdot 39 = 78$) ist.

Es ist dann $\frac{11}{26} \stackrel{3}{=} \frac{33}{78}$ und $\frac{22}{39} \stackrel{2}{=} \frac{44}{78}$.

Weil $33 < 44$ (Vergleich der Zähler), kann man nun sagen, dass $\frac{33}{78} < \frac{44}{78}$ ist. Somit stehen auch die Ausgangsbrüche im gleichen Verhältnis:

$$\left(\frac{33}{78} =\right) \frac{11}{26} < \frac{22}{39} \left(= \frac{44}{78}\right)$$

Merke: Gleicher Nenner, dann gibt der größere Zähler den größeren Bruch an.

4.2 Vergleich bei gleichen Zähler

Der Vergleich bei gleichem Zähler läuft ähnlich ab. zunächst werden beide Brüche durch kürzen und/oder erweitern auf den gleichen Zähler gebracht und dann anhand des Nenners entschieden, welcher Bruch größer ist.

Für die Zähler 11 und 22 bietet es sich an, auf 22 zu erweitern, weil es das kleinste gemeinsame Vielfache dieser Zahlen ist. Wir sparen uns so sogar eine Erweiterung.

Wir erweitern $\frac{11}{26} \stackrel{2}{=} \frac{22}{52}$.

Die Nenner stehen nun im Verhältnis $52 > 39$. Das bedeutet, das wir einmal 22 von 52 Teilen haben und das andere Mal 22 von 39 Teilen. Diese 39stel Teile sind aber Größer als die 52stel Teile - genauso wie ein viertel größer ist als ein achtel. Die Ausgangsbrüche stehen daher im umgekehrten Verhältnis.

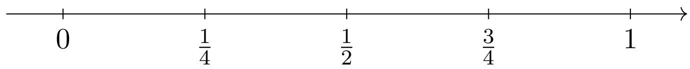
Also ist $\frac{22}{52} < \frac{22}{39}$ und auch

$$\left(\frac{22}{52} =\right) \frac{11}{26} < \frac{22}{39}$$

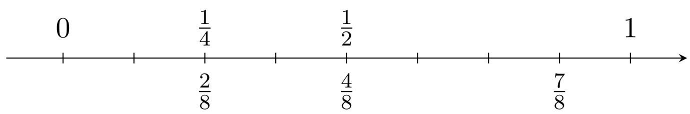
Merke: Gleicher Zähler, dann gibt der kleinere Nenner den größeren Bruch an.

4.3 Brüche auf der Zahlengeraden

So wie auch schon natürliche und ganze Zahlen[3] lassen sich auch Brüche anhand ihrer Größe sortiert auf der Zahlengeraden eintragen. Wir füllen mit den Brüchen Lücken zwischen den bisher bekannten Zahlen. Der Bruch $\frac{1}{2}$ liegt bspw. genau in der Mitte zwischen 0 und 1 der Bruch $\frac{1}{4}$ wiederum genau zwischen 0 und $\frac{1}{2}$. Der Bruch $\frac{3}{4}$ hingegen liegt in der Mitten zwischen $\frac{1}{2}$ und 1.



Sollen mehrere Brüche mit verschiedenen Nennern auf eine Zahlengerade eingetragen werden, ist es sinnvoll zunächst alle Brüche auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen. Dann Teilt man den Abstand zwischen benachbarten ganzen Zahlen in ebenso viele gleichgroße Abstände ein, wie der gemeinsame Nenner groß ist. Zum Beispiel lassen sich $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{7}{8}$ gut eintragen, wenn alle erst auf den Nenner 8 erweitert werden: $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{8}$ und $\frac{7}{8}$. Anschließend wird der Bereich zwischen 0 und 1 in acht gleiche Abschnitt unterteilt und die Brüche an diese eingetragen.



Übungen:

a) Vergleiche die Brüche $\frac{7}{8}$ und $\frac{5}{6}$ (Setze $<$, $>$ oder $=$).

b) Trage die folgenden Brüche auf einer Zahlengraden ein: $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{9}{12}$

Lösung siehe[4].

[3] Die Zahlen $\{1;\ 2;\ 3;\ ...\}$ heißen natürliche Zahlen ($\mathbb{N}$). Die Zahlen $\{...;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ ...\}$ heißen ganze Zahlen ($\mathbb{Z}$). Jede natürliche Zahl ist auch eine ganze Zahl.

[4] a) $\frac{7}{8} \overset{6}{=} \frac{42}{48} > \frac{40}{48} \underset{8}{=} \frac{5}{6}$; b) $\frac{5}{6} \overset{2}{=} \frac{10}{12}$, $\frac{2}{3} \overset{4}{=} \frac{8}{12}$. Daher Zahlenstrahl mit Zwölftelschritten zeichnen und die erweiterten Werte eintragen.

5 Addition und Subtraktion von Brüchen

Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem sie zunächst auf den gleichen Nenner gebracht werden (*gleichnamig machen*) und anschließend die Zähler entweder summiert werden oder die Differenz der Zähler gebildet wird.

Hinweis: Die Addition bzw. Subtraktion geschieht bei gleichnamigen Brüchen ausschließlich im Zähler. Der Nenner bleibt gleich.

Beispiel Addition:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{8+3}{12}=\frac{11}{12}$$

Beispiel Subtraktion:

$$\frac{6}{9}-\frac{2}{6}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3}$$

Bei der Subtraktion wurde hier gekürzt. Man hätte ebenso auf den gemeinsamen Nenner 18 erweitern können. In diesem Fall wäre das Ergebnis $\frac{6}{18}$ gewesen. Das ist (gekürzt um 6) gleich $\frac{1}{3}$. Kürzen und Erweitern können in jeder Kombination genutzt werden.

Übungen:

a) Übung Add subtr frac

6 Multiplikation und Division mit Brüchen

Bei der Berechnung von Bruchteilen von Größen in Abschnitt 2 haben wir bereits Brüche mit natürlichen Zahlen multipliziert. Dabei wurde die natürliche Zahl immer mit dem Zähler multipliziert und durch den Nenner dividiert. Die Multiplikation mit einem Bruch verlangte also immer zwei Punktrechnungen, deren Reihenfolge frei gewählt werden konnte:

$$\frac{3}{4} \cdot 12 = (12 \cdot 3) : 4 = 36 : 4 = 9 \text{ liefert das gleiche wie } \frac{3}{4} \cdot 12 = (12 : 4) \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9$$

6.1 Bruch mal Zahl

Weil in der Multiplikation vertauscht werden darf ($3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$), ist es egal, ob wir den Fall $Bruch \cdot Zahl$ oder $Zahl \cdot Bruch$ betrachten.

Bei der Rechnung $3 \cdot \frac{7}{8}$ lässt sich die Division weder vor der Multiplikation ($3 : 8$) noch danach ($3 \cdot 7 : 8 = 21 : 8$) durchführen ohne, dass ein Rest entsteht. Wir können das Ergebnis aber dennoch angeben in der Bruchschreibweise

$$3 \cdot \frac{7}{8} = \frac{3 \cdot 7}{8} = \frac{21}{8}$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir auch, wenn wir die Multiplikation als mehrfaches Addieren umschreiben (hier drei mal $\frac{7}{8}$ mit sich selbst addieren):

$$3 \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{8} + \frac{7}{8} + \frac{7}{8} = \frac{21}{8}$$

Merke: Wenn man eine ganze Zahl mit einem Bruch multipliziert, muss man die ganze Zahl mit dem Zähler multiplizieren. Der Nenner bleibt gleich.

$$Zahl \cdot Bruch = Zahl \cdot \frac{Z}{N} = \frac{Zahl \cdot Z}{N}$$

Hinweis: Das Ergebnis kann evtl. noch gekürzt werden.

Übungen:

a) Übung Bruch mal Zahl

6.2 Bruch durch Zahl

Werden Brüche durch Zahlen geteilt. Zum Beispiel teile $\frac{1}{2}$ durch 3. Dann teilen wir den bestehenden Bruchteil in ebenso kleine Teile und nehmen einen davon. In Abbildung 1 ist dieser Vorgang für einen Kreis dargestellt. Im rechten Kreis entspricht der markierte Teil einem Sechstel des ganzen Kreises. Ebenso ist $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$.

Abb. 1: Links: Halber Kreis ist markiert. Rechts: Der halbe Kreis wurde in drei gleich große Teile zerlegt. Das markierte Teil ist ein Drittel des halben Kreises.

> Merke: Wenn man einen Bruch durch eine Zahl dividiert, muss man die ganze Zahl mit dem Nenner multiplizieren. Der Zähler bleibt gleich.
>
> $$Bruch : Zahl = \frac{Z}{N} : Zahl = \frac{Z}{Zahl \cdot N}$$

Hinweis: Das Ergebnis kann evtl. noch gekürzt werden.

Übungen:

a) Übung Bruch durch Zahl

6.3 Multiplikation von Bruch mit Bruch

Die Multiplikation von einem Bruch mit einem anderen ist letztlich nichts anderes als eine Multiplikation des einen Bruches mit dem Zähler des zweiten und Division mit dessen Nenner.

Nehmen wir mal wieder das Beispiel der dreiviertel Stunde und schauen, was $\frac{2}{3}$ einer $\frac{3}{4}h$ sind. So müssen wir die Dreiviertelstunde erst verdoppeln, weil der erste Bruch eine eine zwei im Zähler hat. Das Ergebnis dieser Rechnung wird anschließend durch drei dividiert, weil im Nenner des ersten Bruches eine drei Steht.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}h = 2 \cdot \frac{3}{4}h : 3 = \frac{2 \cdot 3}{4}h : 3 = \frac{6}{4}h : 3 = \frac{6}{4 \cdot 3}h = \frac{6}{12}h \underset{6}{=} \frac{1}{2}h$$

Die gleiche Überlegung mit Umwandlung der dreiviertel Stunde in Minuten liefert:

$$\frac{2}{3} \text{ von } 45min. = \frac{2}{3} \cdot 45min. = \frac{2 \cdot 45}{3}min. = \frac{90}{3}min. \underset{3}{=} 30min. = \frac{1}{2}h$$

Fasst man die beiden Schritte *Multiplikation mit Zähler* und *Division mit Nenner* zusammen werden die Brüche multipliziert, indem Zähler und Nenner des einen Bruches jeweils mit dem Zähler bzw. Nenner des anderen Bruches multipliziert werden.

Die Multiplikation von Brüchen erfolgt nach dem Prinzip „*Zähler mal Zähler durch Nenner mal Nenner*“:

$$Bruch1 \cdot Bruch2 = \frac{Z1}{N1} \cdot \frac{Z2}{N2} = \frac{Z1 \cdot Z2}{N1 \cdot N2}$$

Bemerkung: Bei der Multiplikation von Brüchen berechnet man *Anteile von Anteilen*.

Beispiel:

$$\frac{3}{4} \text{ von } \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{6}{20}$$

Übungen:

Berechne (Lösungen in der Fußnote[5])

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7}$	b) $\frac{10}{11} \cdot \frac{3}{4}$	c) $\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{5}$	d) $\frac{1}{9} \cdot \frac{6}{8}$

6.4 Division von Bruch durch Bruch

Division wurde bislang immer durch die Frage „Wie oft passt eine Zahl in eine andere Zahl?“ begleitet. Die Rechnung $12 : 4 = 3$ beantwortet z.B. die Frage: „Wie oft passt die vier in die zwölf?“.

Bei der Division mit ganzen Zahlen kam es mitunter vor, dass ein Rest übrig blieb. Durch Brüche können wir diesem Rest nun einen festen Wert geben. Die Rechnung $13 : 4 = 3R1$ wird so zu $13 : 4 = 3 + \frac{1}{4}$ Es passen also drei ganze und ein viertel von 4 in die 13. Das zeigt euch die klassische Probe per Gegenrechnung:

$$\left(3 + \frac{1}{4}\right) \cdot 4 = 3 \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 12 + 1 = 13$$

Es können so beliebige Divisionen durchgeführt werden. Es kann dabei sogar passieren, dass der gefragte Teiler (Divisior) kein einziges Mal komplett in den Dividend passt, jedoch ein Bruchteil des Divisors.

Beispiel: Das ein viertel zwei mal in ein halbes passt, ist vermutlich leicht verständlich. Aber wie oft passt ein viertel in ein achtel?

Rechne: $\frac{1}{8} : \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Es passt ein halbes viertel in ein achtel.

BILDER

[5] a) $\frac{6}{35}$; b) $\frac{30}{44} = \frac{15}{22}$; c) $\frac{28}{40} = \frac{7}{10}$; d) $\frac{6}{72} = \frac{1}{12}$

Brüche werden dividiert, indem mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert wird. Der Kehrwert ist der Bruch mit vertauschtem Zähler und Nenner

$$Bruch1 : Bruch2 = \frac{Z1}{N1} : \frac{Z2}{N2} = \frac{Z1}{N1} \cdot \frac{N2}{Z2} = \frac{Z1 \cdot N2}{N1 \cdot Z2}$$

Beispiel:

$$\frac{5}{12} : \frac{5}{6} = \frac{5}{12} \cdot \frac{6}{5} = \frac{5 \cdot 6}{12 \cdot 5} = \frac{30}{60} =_{30} \frac{1}{2}$$

Das bedeutet: Es passt ein halbes $\frac{5}{6}$-Stück in ein $\frac{5}{12}$-Stück.

mehr folgt später... mehr multi div mit frac

Übungen:

a) Übung Bruch durch Bruch

7 Gemischte Schreibweise

Wir alle kennen den Ausdruck *anderthalb Stunden* für den Zeitraum von *ein einhalb* Stunden. Gemeint ist damit die Summe aus einer Stunde und einer halben Stunde. Mathematisch wird dies abgekürzt geschrieben als $1\frac{1}{2}h$. Diese Schreibweise lässt sich umrechnen in einen *gewöhnlichen* Bruch, indem die ganze Zahl vor dem Bruch mit dem Nenner multipliziert wird und zum Zähler addiert wird.

$$1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 2 + 1}{2}$$

Ebenso

$$3\frac{7}{8} = \frac{3 \cdot 8}{8} + \frac{7}{8} = \frac{24 + 7}{8} = \frac{31}{8}$$

Die Rückrichtung funktioniert so, dass man bei einem Bruch mit $Zähler > Nenner$ den Zähler so zerlegt, dass ein Summand sich durch den Nenner teilen lässt und der andere kleiner als der Nenner ist:

$$\frac{43}{7} = \frac{42 + 1}{7} = \frac{42}{7} + \frac{1}{7} = 6 + \frac{1}{7} = 6\frac{1}{7}$$

Im Beispiel ist $43 > 7$ der Zähler größer als der Nenner. Den Zähler zerlegen wir in $42 + 1$, da 42 durch 7 teilbar ist und $1 < 7$. Dann wird die Summe auf zwei Brüche mit Nenner 7 zerlegt und der erste Summand zur ganzen Zahl 6 gekürzt. Schließlich wird das Plus weggelassen und wir erhalten einen Bruch in gemischter Schreibweise. Ein weiteres Beispiel:

$$\frac{77}{6} = \frac{72 + 5}{6} = \frac{72}{6} + \frac{5}{6} = 12 + \frac{5}{6} = 12\frac{5}{6}$$

Im Zähler wird die 77 zerlegt in $72 + 5$, weil $72 = 6 \cdot 12$ ist und $5 < 6$.

Vorteil: Man muss nur noch den Bruch kürzen, die Zahl vor dem Bruch bleibt immer gleich.

Übungen:

Überführe in die jeweils andere Schreibweise. Kürze ggfs. das Ergebnis.

a) $\frac{8}{6}$

b) $\frac{65}{12}$

c) $3\frac{5}{6}$

d) $5\frac{3}{4}$

REDLösung für Übung gemischte Schreibweise

8 Dezimalzahlen, Dezimalbrüche

Eine weitere Möglichkeit Zahlen außerhalb der ganzen Zahlen darzustellen sind *Dezimalzahlen* (Kommazahlen). Sie erweitern das uns bekannte Stellwertsystem von Einern, Zehnern, Hundertern usw. um Zehntel, Hunderstel, Tausendstel usw. Die Zahl 1337 setzt sich dabei z.B. zusammen aus 1 Tausender, 3 Hundertern, 3 Zehnern und 7 Einern.

Die Zahl $0{,}75$ bedeutet dabei, dass es 0 Einer, 7 Zehntel und 5 Hunderstel gibt. Also

$$0{,}75 = 0 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{70}{100} + \frac{5}{100} = \frac{75}{100} \underset{25}{=} \frac{3}{4}$$

Hinweis: Die Stellenwerte nach dem Komma werden oft als kleine Buchstaben geschrieben und entsprechen gespiegelt denen vor der einer Stelle. Beispiel: $1\,598\,186{,}435$:

M	HT	ZT	T	H	Z	E	,	z	h	t
Mio.	100Tsd.	10Tsd.	1000er	100er	10er	Einer	,	10tel	100stel	1000stel
1	5	9	8	1	8	6	,	4	3	5

9 Umwandlung von Bruch in Dezimalzahl

Schriftliche Division. Wenn man nicht mehr weiterkommt ein Komma Setzen und immer weiter Nullen holen... Bei Wiederholung liegt eine periodischer Dezimalzahl vor.

muss noch mehr... Umwandlung frac2deci

Beispiel: Abbrechende Dezimalzahl

$$\frac{16}{25} = 16 : 25 = ...$$

Beispiel: Periodische Dezimalzahl

$$\frac{19}{99} = 19 : 99 = ...$$

10 Umwandlung von Dezimalzahl zu Bruch

10.1 Abbrechende Dezimalzahl

Eine abbrechende Dezimalzahl kann in einen Bruch umgewandelt werden, indem man zunächst die Zahl vor dem Komma als Ganzes lässt und dann die Zahlen hinter dem Komma als Zähler auf einen Bruch schreibt. Der Nenner ist diejenige Zehnerpotenz (zehn, hundert, tausend,...), an der die letzte Zahl steht.

Beispiel:

$$27{,}3654 = 27 + \frac{3\,654}{10\,000} = \frac{273\,654}{10\,000} = 27\frac{3\,654}{10\,000} = 27\frac{1\,827}{5\,000}$$

Die Anzahl der Nullen hinter der 1 im Nenner entspricht der Position der letzten Ziffer der Dezimalzahl hinter dem Komma.

10.2 Periodische Dezimalzahl

Bei der Umwandlung von $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{9}$,... in eine Dezimalzahl fällt auf, dass der Zähler über dem Nenner 9 genau die Zahl in der Periode ist: $\frac{1}{9} = 0{,}\overline{1}$, $\frac{2}{9} = 0{,}\overline{2}$, $\frac{3}{9} = 0{,}\overline{3}$. Einstellige Perioden sind daher immer genau die Zahl in der Periode über dem Nenner 9.

... schwierig als Text ... Periodische Brüche in DeziZahlen umwandeln erklären

11 Addition und Subtraktion von Dezimalzahlen

Wie schon bei der Addition und Subtraktion von ganzen Zahlen kann addiert werden, wenn die Stellenwerte übereinander stehen. Im Zweifel müssen noch Nullen angehängt werden. Nullen hinter der letzten Zahl hinter dem Komma ändern den Wert der Zahl nicht.

Beispiele Addition:

$$\begin{array}{ccccc} & \text{T} & \text{H} & \text{Z} & \text{E} \\ & & 3 & 5 & 7 \\ + & 2 & 4 & 3_1 & 9 \\ \hline = & 2 & 7 & 9 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & \text{E,} & \text{z} & \text{h} & \text{t} \\ & 0, & 3 & 5 & 7 \\ + & 2, & 4 & 3_1 & 9 \\ \hline = & 2, & 7 & 9 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & \text{H} & \text{Z} & \text{E,} & \text{z} & \text{h} \\ & 3 & 6 & 5, & 0 & 5 \\ + & 2_1 & 4 & 3,_1 & 9_1 & 7 \\ \hline = & 6 & 0 & 9, & 0 & 2 \end{array}$$

Im ersten und zweiten Beispiel kann man sehen, dass sich außer dem Setzen des Kommas nichts verändert. Die Stellenwerte werden hinter dem Komma fortgesetzt nach den Zehnerpotenzen (10, 100, 1000) als Bruch. Im Dritten Beispiel kann man sehen, dass der Übertrag auch über das Komma hinweg also von der Zehntel zur Einer-Stelle geschieht.

Beispiele Subtraktion:

$$\begin{array}{ccccc} & \text{T} & \text{H} & \text{Z} & \text{E} \\ & 4 & 3 & 6 & 7 \\ - & 2_1 & 4 & 3_1 & 9 \\ \hline = & 1 & 9 & 2 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & \text{E,} & \text{z} & \text{h} & \text{t} \\ & 4, & 3 & 6 & 7 \\ - & 2,_1 & 4 & 3_1 & 9 \\ \hline = & 1, & 9 & 2 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & \text{H} & \text{Z} & \text{E,} & \text{z} & \text{h} \\ & 3 & 6 & 5, & 0 & 0 \\ - & 2 & 4 & 3,_1 & 8_1 & 7 \\ \hline = & 1 & 2 & 1, & 1 & 3 \end{array}$$

Ist eine der beteiligten Zahlen *zu kurz*, können hinter dem Komma beliebig viele Nullen angehängt werden. So besitzen beide Zahlen gleich viele Nachkommastellen. Das ist beim letzten Beispiel geschehen, indem an 365 noch zwei „unsichtbare Nullen“ angehängt wurden ($365 \mapsto 365{,}00$).

12 Multiplikation und Division von Dezimalzahlen

Bei der Multiplikation udn Division von Dezimalzahlen können wir wieder auf unser Wissen von der Multiplikation udn Division ganzer Zahlen zurückgreifen. Einzige Besonderheit ist, dass irgendwann ein Komma dazukommt. Die Position des Kommas wird bestimmt durch die Summe der Nachkommastellen der beiden Faktoren oder durch die Differenz der Nachkommastellen von Dividend und Divisor.

12.1 Multiplikation von Dezimalzahlen

Jede abbrechende Dezimalzahl lässt sich leicht als Bruch schreiben. Bei dieser Umwandlung entstehen zwei Produkte: Im Zähler werden die Zahlen ohne Komma multipliziert. Im Nenner werden nur Potenzen von 10 multipliziert[6]. Beispiel:

$$1{,}25 \cdot 0{,}3 = \frac{125}{100} \cdot \frac{3}{10} = \frac{125 \cdot 3}{100 \cdot 10} = \frac{375}{1000} = 0{,}375$$

Man kann sich das Vorgehen auch verkürzen, wenn man zunächst multipliziert, als ob zwei ganze Zahlen vorlägen und am Ende ein Komma so setzt, dass das Ergebnis genauso viele Nachkommastellen hat, wie die beiden Faktoren zusammen.

$$\underbrace{1{,}25}_{2NKS} \cdot \underbrace{0{,}3}_{1NKS} = \underbrace{0{,}375}_{3NKS}$$

Achtung: Es kann passieren, dass im Ergebnis der Multiplikation eine Null an der letzten Stelle stehen würde. In diesem Fall muss sie für die Nachkommastellen bedacht werden, kann aber im Endergebnis weggelassen werden.

$$\underbrace{1{,}5}_{1NKS} \cdot \underbrace{0{,}04}_{2NKS} = \underbrace{0{,}060}_{3NKS} = 0{,}06$$

> Merke: Dezimalzahlen werden multipliziert, indem zunächst beide Zahlen ohne Komma multipliziert werden. Im Ergebnis muss dann ein Komma so eingesetzt werden, dass das Ergebnis genauso viele Nachkommastellen hat wie die beiden Faktoren zusammen.

Anmerkung: Bei periodischen Dezimalzahlen lohnt sich die Umwandlung in Brüche erst recht. Dort stehen im Nenner statt 10er-Potenzen dann Zahlen wie 9, 99, 999 usw.

12.2 Division von Dezimalzahlen

Auch die Division läuft grundsätzlich wie bei ganzen Zahlen. Beim Ergebnis muss wieder an der richtigen Stelle ein Komma eingefügt werden. Die Position des Kommas wird durch

[6] Potenzen wie $10^1 = 10;\ 10^2 = 100;\ 10^3 = 1\,000$ usw. heißen auch *Zehnerpotenzen*.

die Bruchschreibweise vorgegeben:

$$7{,}5 : 0{,}15 = \frac{75}{10} : \frac{15}{100} = \frac{75}{10} \cdot \frac{100}{15} = \frac{75 \cdot 100}{10 \cdot 15} = \frac{75 \cdot 100}{15 \cdot 10} = \frac{75}{15} \cdot \frac{100}{10}$$

Im letzten Ausdruck steht der Bruch $\frac{75}{15}$ für die Division der Zahlen ohne Komma $75 : 15$ und der zweite Ausdruck $\frac{100}{10}$ gibt an, wie das Komma verschoben werden muss. $75 : 15 = 5$ und $100 : 10 = 10$ daher ist das Ergebnis 50 eine $5{,}0$ mit Kommaverschiebung um eins nach rechts.

Um das Verfahren abzukürzen, kann bei Dividend und Divisor solange das Komma nach rechts verschoben werden, **bis der Divisor keine Nachkommastellen mehr hat**. Dabei ist es wichtig, dass die **Kommaverschiebung in beiden Zahlen um gleich viele Stellen** geschieht. Es können im Zweifel wieder beliebig viele unsichtbare Nullen hinter dem Komma dazugenommen werden, damit weiter das Komma verschoben werden kann.

Aus der Eingangsaufgabe wird dann:

$$7{,}5 : 0{,}15 = 75{,}0 : 1{,}5 = 750 : 15 = 50$$

Hinweis: Die gleichmäßige Kommaverschiebung entspricht dem Erweitern von Dividend und Divisor mit zehn, hundert oder tausend (je nachdem, wie viele Stellen). Der Bruchstrich wird dabei als Divisionszeichen umgeschrieben.

$$7{,}5 : 0{,}15 = \frac{7{,}5}{0{,}15} \overset{100}{=} \frac{750}{15} = 750 : 15 = 50$$

ToDo