流体力学 (今井) 第二章

理学部化学科 3 年 05253011 Fumiya Kashiwai / 柏井史哉

2026 年 2 月 20 日

第 II 部
縮まない流体の渦なし運動

ラグランジュの渦定理: 渦に関する保存則

- 外力が保存力 (ポテンシャル U で $K = \nabla U$)
- バロトロピー流体 (密度が圧力のみの関数)
- 粘性項なし

粘性が小さい流体 (粘性項なしで近似できる) における、渦なし運動を記述する。

13 渦なし運動とラプラースの方程式

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \Phi \tag{13.1}$$

オイラーの運動方程式を変形して、外力 $F(t)$ の下での運動は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + \int \mathrm{d}p \frac{1}{\rho} + \Omega = F(t) \tag{13.2}$$

と記述される。
オイラーの連続方程式[*1] に代入し、Laplace の方程式を得る[*2]。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = 0 \tag{13.3}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \Delta \Phi = 0 \tag{13.4}$$

[*1]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

[*2] 電磁気学等で出てくるやつと同一である。電荷が存在しない空間での平衡状態の静電ポテンシャル、熱源が存在しない場合の温度分布など、何らかの供給源がない状態に普遍的に見られる

ただし、$\rho = const.$ を用いた。
　実用上では、適当な境界条件を与えて Laplace の方程式を解き、ポテンシャル Φ を得る。そこから $\boldsymbol{v}$、p が求められる。

■Note: **時間依存性について**　Laplace の方程式は時間に陽には依存しないため、過去の歴史によらず状態が定まる。(遠隔作用)
　つまり、ある瞬間の境界条件それ自体は時間に依存するが、その時の流れは境界条件から一意に定まる。これは、境界条件の情報が、瞬時に全ての点に伝わることを意味する[*3]。
　ただし、圧力には陽に影響する。

14　ラプラース方程式の簡単な解

15　グリーンの公式の流体力学的解釈

16　循環、速度ポテンシャル

17　流体の運動エネルギー、解の一意性

[*3] 電磁気の遅延ポテンシャルとかとの話につながりますね、と語れるほど電磁気わかってない