Def: Teilformel / Formelbaum: analog zur Aussagenlogik

Der **Wirkungsbereich** eines Quantors $\exists v_i$ oder $\forall v_i$ ist diejenige Teilformel φ', vor der der Quantor steht (vor die der Quantor im Aufbauprozess der Formel geschrieben wird).

Wenn ein v_i im Wirkungsbereich eines Quantors $\exists v_i$ / $\forall v_i$ steht, heißt dieses Vorkommen von v_i **gebunden** durch den Quantor,
es sei denn, v_i ist bereits durch einen anderen Quantor $\exists v_i$ / $\forall v_i$ gebunden.

Ein Vorkommen einer Variablen v_i in einer Formel, das nicht im Wirkungsbereich eines Quantors $\exists v_i$ oder $\forall v_i$ steht, heißt **frei**.

Achtung: als Vorkommen von Variablen zählen nur die Vorkommen in Termen, nicht hinter dem $\exists$ oder $\forall$

$\exists v_i$ ist wie ein Zeichen zu sehen, bei dem v_i angibt, auf welche Variable sich $\exists$ bezieht

R_0 einstelliges, R_1 zweistelliges Relationszeichen

bindet keine Variable

bindet

frei

frei

Bsp: $(R_0 v_0 \to \exists v_2 (\forall v_2 \forall v_1 \exists v_1 (R_0 v_1 \vee R_1 v_1 v_2) \to \neg R_1 v_1 v_2))$

Wirkungsbereich

bindet

bindet

Def:

v_i heißt freie Variable von φ, wenn es mind. ein freies Vorkommen gibt

$$(R_0 v_0 \to \exists \square (\forall \square \forall \square \exists \square (R_0 \square \vee R_1 \square \square) \to \neg R_1 v_1 \square))$$

Notation

$\tau(v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$ bedeutet: $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$ sind paarweise verschiedene Variablen

$\varphi(v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$ und die Variablen, die in τ vorkommen, bzw die freien Variablen von φ, sind enthalten in $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\}$

τ $\mathcal{L}$-Term, φ $\mathcal{L}$-Formel

Def: Eine prädikatenlogische $\mathcal{L}$-Formel, die keine Variablen enthält, heißt $\mathcal{L}$-Aussage oder $\mathcal{L}$-Satz (engl. proposition)

3.2 Semantik

$\mathcal{L}$ Sprache

Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M}$ (oder $\mathcal{M}$) besteht aus:

- einer nicht-leeren Menge M („Universum" oder „Individuenbereich")
- für jedes $n \in \mathbb{N}$
  und n-stelliges Funktionszeichen $f_i \in \mathcal{L}$ eine Funktion
  n-stelliges Relationszeichen $R_j \in \mathcal{L}$ eine Teilmenge

$$f_i^{\mathfrak{M}} : M^n \to M$$
$$R_j^{\mathfrak{M}} \subseteq M^n$$

„Interpretation der Zeichen in $\mathfrak{M}$"

man schreibt $R_i^{\mathfrak{M}} m_1 \ldots m_n$ für $(m_1, \ldots, m_n) \in R_i^{\mathfrak{M}}$

„Die Relation $R_i^{\mathfrak{M}}$ trifft auf $m_1, \ldots, m_n$ zu"

Hier werden Relationen identifiziert mit ihren Graphen, d.h.
n-stelliges R mit der Menge der n-Tupel, auf die R zutrifft

Spezialfälle $n=0$: f_i 0-stelliges Fktzeichen : $f_i^{\mathcal{M}} : M^0 \to M$

$M^0 = \{\emptyset\}$ ← einelementige Menge

$f_i^{\mathcal{M}}$ kann identifiziert werden mit $\text{Bild}(f_i^{\mathcal{M}}) = f_i^{\mathcal{M}}(\emptyset) \in M$

R_i 0-stelliges Relationszeichen : $R_i^{\mathcal{M}} \subseteq M^0 = \{\emptyset\}$

zwei Fälle : $R_i^{\mathcal{M}} = \{\emptyset\}$ → entspricht Wahrheitswert 1

$R_i^{\mathcal{M}} = \emptyset$ — " — 0

Bsp: $\mathcal{L} = \{ f_0, c_0 \}$

zweistellig ↗ ↖ Konstante

$\mathcal{M}_1 = (\mathbb{Z}; +, 0)$, d.h. $\mathbb{Z} = M_1$ ist Universum, $f_0^{\mathcal{M}_1} = +$, $c_0^{\mathcal{M}_1} = 0$

$A = \{a,b,c\}$ $\mathcal{M}_2 = (A^*; ^\frown; aba)$, d.h. $A^* = M_2$ ist Universum, $f_0^{\mathcal{M}_2}$ ist Konkatenation $^\frown$

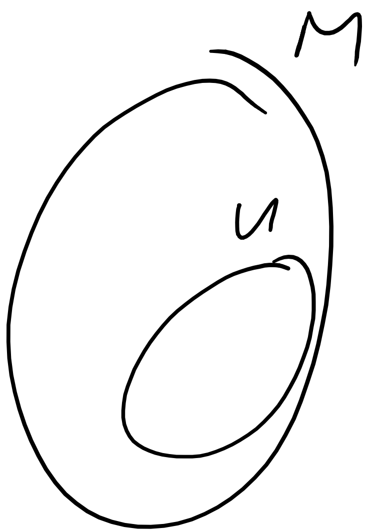
$c_0^{\mathcal{M}_2} = aba$

$\mathfrak{M}$ $\mathcal{L}$-Struktur

<u>$\mathcal{L}$-Unterstruktur</u> $\mathfrak{U}$: $\emptyset \neq U \subseteq M$, U abgeschlossen unter allen $f_i^{\mathfrak{M}}$ $(f_i \in \mathcal{L})$,

$f_i^{\mathfrak{U}} = f_i^{\mathfrak{M}} \restriction_{U^n}$ falls f_i n-stellig

$R_i^{\mathfrak{U}} = R_i^{\mathfrak{M}} \cap U^n$ falls R_i n-stellig



$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ $\mathcal{L}$-Strukturen

$\alpha: M \to N$ ist <u>$\mathcal{L}$-Homomorphismus</u>, falls

$$\alpha(f_i^{\mathfrak{M}}(m_1, \dots, m_n)) = f_i^{\mathfrak{N}}(\alpha(m_1), \dots, \alpha(m_n))$$

$$R_i^{\mathfrak{M}} m_1 \dots m_n \Rightarrow R_i^{\mathfrak{N}} \alpha(m_1) \dots \alpha(m_n)$$

α heißt <u>starker $\mathcal{L}$-Homomorphismus</u>, falls zusätzlich „$\Leftrightarrow$" gilt

$\alpha: M \to N$ heißt <u>$\mathcal{L}$-Isomorphismus</u>, falls α bijektiver $\mathcal{L}$-Homomorphismus und α^{-1} ebenfalls $\mathcal{L}$-Homomorphismus

äquivalent: α bijektiver starker $\mathcal{L}$-Homomorphismus

Auswertung von $\mathcal{L}$-Termen und $\mathcal{L}$-Formeln

$\mathfrak{M}$ sei stets $\mathcal{L}$-Struktur

brauche eine Belegung (der Individuenvariablen mit Werten in $\mathfrak{M}$)

$$\beta: \{v_0, v_1, v_2, \dots\} \longrightarrow M$$

Def: Jeder $\mathcal{L}$-Term τ definiert ein Element $\tau^{\mathfrak{M}}[\beta] \in M$

durch:

$$\boxed{\begin{aligned} v_i^{\mathfrak{M}}[\beta] &:= \beta(v_i) \\ (f_i \tau_1 \dots \tau_n)^{\mathfrak{M}}[\beta] &:= f_i^{\mathfrak{M}}(\tau_1^{\mathfrak{M}}[\beta], \dots, \tau_n^{\mathfrak{M}}[\beta]) \end{aligned}}$$

Bsp: $(\mathbb{Z}, +, 0)$ als $\{f_0, c_0\}$-Struktur

"$\mathfrak{M}_1$"

$\tau = f_0 f_0 c_0 v_1 v_2$

bzw. $(c_0 + v_1) + v_2$

$\tau^{\mathfrak{M}_1}[\beta] = \dots = 2 + 4 = 6$

$\beta: v_i \longmapsto 2i$

$v_1^{\mathfrak{M}_1}[\beta] = 2$

$v_2^{\mathfrak{M}_1}[\beta] = 4$

$c_0^{\mathfrak{M}_1}[\beta] = c_0^{\mathfrak{M}_1} = 0$

$f_0 c_0 v_1^{\mathfrak{M}_1}[\beta] = f_0^{\mathfrak{M}_1}(c_0^{\mathfrak{M}_1}[\beta], v_1^{\mathfrak{M}_1}[\beta])$

$= 0 + 2 = 2$

Lemma: Wenn $\tau = \tau(v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$ und β, β' sind Belegungen, die auf $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$ übereinstimmen, dann ist $\tau^{\mathcal{M}}[\beta] = \tau^{\mathcal{M}}[\beta']$

Beweis: klar oder Übung.

Def.: $\mathcal{M}$ $\mathcal{L}$-Struktur, β Belegung, φ $\mathcal{L}$-Formel

Definiere „$\mathcal{M} \models \varphi[\beta]$" („$\varphi$ trifft in $\mathcal{M}$ unter β zu"
„φ gilt in $\mathcal{M}$ unter β"
„$\mathcal{M}$ ist Modell für φ unter β"
„$\mathcal{M}$ erfüllt φ unter β" ...)

$\models$ Modellzeichen

Variante des Tautologiezeichens $\vdash$

stets $\mathcal{M} \models \top\ [\beta]$ $\mathcal{M} \not\models \bot\ [\beta]$, d.h. „$\mathcal{M} \models \bot\ [\beta]$" gilt nicht

Verum   Falsum

$$\mathcal{M} \models \underbrace{\tau_1 \doteq \tau_2}_{\text{Formel } \varphi}\ [\beta] \quad :\Leftrightarrow \quad \underbrace{\tau_1}_{\text{Term}}{}^{\mathcal{M}}[\beta] = \underbrace{\tau_2}_{\text{Term}}{}^{\mathcal{M}}[\beta]$$

$$\mathcal{M} \models R_i\, \tau_1 \ldots \tau_n\ [\beta] \quad :\Leftrightarrow \quad R_i^{\mathcal{M}}\ \tau_1^{\mathcal{M}}[\beta], \ldots, \tau_n^{\mathcal{M}}[\beta]$$

R_i n-stelliges Relationszeichen in Σ

$$\mathcal{M} \models \neg\varphi\ [\beta] \quad :\Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \not\models \varphi\ [\beta]$$

$$\mathcal{M} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[\beta] \quad :\Leftrightarrow \quad (\mathcal{M} \models \varphi_1 [\beta] \text{ und } \mathcal{M} \models \varphi_2 [\beta])$$

etc für $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

$$\mathcal{M} \models \exists v_i\, \varphi\ [\beta] \quad :\Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein } m \in M \text{ mit } \mathcal{M} \models \varphi\ [\beta \tfrac{m}{v_i}]$$

Belegung β' mit $\beta'(v_j) = \begin{cases} m & j = i \\ \beta(v_j) & j \neq i \end{cases}$

$$\mathcal{M} \models \forall v_i\, \varphi\ [\beta] \quad :\Leftrightarrow \quad \text{für alle } m \in M \text{ gilt } \mathcal{M} \models \varphi\ [\beta \tfrac{m}{v_i}]$$

Bem

$\not\models$ ist konventionelle metasprachliche Verneinung von $\models$, analog zu $\neq$

Objektsprachlich sind $\dot{\neq}$, $\not\exists$, $\not\forall$ nicht vorgesehen/erlaubt

„umgangssprachlich" wird es aber manchmal verwendet

Satz: Wenn $\varphi = \varphi(v_{i_1} \dots v_{i_n})$ $\mathcal{L}$-Formel und β, β' sind Belegungen, die auf $v_{i_1} \dots v_{i_n}$ übereinstimmen, dann $\mathcal{M} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[\beta']$

Beweis: Induktion über den Aufbau der Formeln.

Spezialfall Wenn φ eine $\mathcal{L}$-Aussage ist (also keine freien Variablen hat)

dann $\mathcal{M} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[\beta']$ für alle Belegungen β, β'

Man schreibt dann „$\mathcal{M} \models \varphi$" und sagt „$\varphi$ gilt in $\mathcal{M}$"
„φ ist wahr in $\mathcal{M}$"
„$\mathcal{M}$ erfüllt φ"
„$\mathcal{M}$ ist Modell von φ"