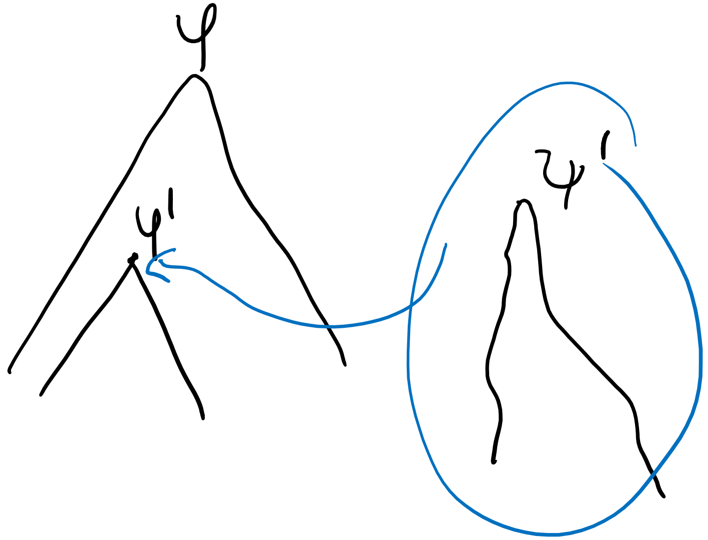
äquivalente Substitution

$\mathcal{L}$-Formeln φ, ψ sind äquivalent, wenn für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{M}$ und alle Belegungen β in $\mathfrak{M}$: $\quad \mathfrak{M} \models \varphi[\beta] \iff \mathfrak{M} \models \psi[\beta]$



Lemma: φ $\mathcal{L}$-Formel mit Teilformel φ', $\quad \varphi' \sim \psi'$

Dann $\quad \varphi \sim \varphi \frac{\psi'}{\varphi'}$

2.3 Allgemeingültige Formeln

Def.: $\mathcal{L}$-Formel φ heißt <u>allgemeingültig</u>, $\models \varphi$, wenn in allen $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{M}$ unter allen Belegungen β gilt: $\mathcal{M} \models \varphi[\beta]$

Bem.: Wenn $\varphi = \varphi(v_1, \dots, v_n)$, dann

$$\models \varphi \iff \models \underbrace{\forall v_1 \dots \forall v_n}_{\mathcal{L}\text{-Aussage}} \varphi$$

Für Aussagen ψ ist $\models \psi \iff$ für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{M}$ gilt $\mathcal{M} \models \varphi$

Bsp.: $v_0 \doteq v_0$ ist allgemeingültig

Def: φ, ψ $\mathcal{L}$-Formeln sind (log.) äquivalent,
falls für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{M}$, alle Belegungen β

$$\mathcal{M} \models \varphi[\beta] \iff \mathcal{M} \models \psi[\beta]$$

Bem: $\varphi \sim \psi \iff \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$

Wenn $\varphi = \varphi(v_1 \dots v_n)$, $\psi = \psi(v_1 \dots v_n)$, dann

$$\varphi \sim \psi \iff \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$$
$$\iff \models \forall v_1 \dots \forall v_n (\varphi \leftrightarrow \psi)$$
$$\text{i.a.} \not\Leftarrow \forall v_1 \dots \forall v_n \varphi \sim \forall v_1 \dots \forall v_n \psi$$

Bsp: R_0 einstellig: $\forall v_0 R_0 v_0 \sim \forall v_1 R_0 v_1$ $(\forall v_0 \forall v_1 R_0 v_0 \sim \forall v_0 \forall v_1 R_0 v_1)$

$$R_0 v_0 \not\sim R_0 v_1$$

Def: $\mathcal{L}$-Formeln φ_i $(i \in I)$, ψ

ψ folgt (logisch) aus $\{\varphi_i \mid i \in I\}$, wenn

für alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathfrak{M}$, für alle β gilt

Wenn $\mathfrak{M} \models \varphi_i[\beta]$ für alle $i \in I$, dann $\mathfrak{M} \models \psi[\beta]$.

Bem: I endlich: $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \psi \iff \models ((\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \to \psi)$

Ein paar Regeln

Lemma („unnötige Quantoren")

Wenn v_i nicht frei in φ ist, dann gilt $\exists v_i \varphi \sim \forall v_i \varphi \sim \varphi$

Beweis: „$\mathfrak{M} \models \varphi[\beta]$" hängt nur von den freien Variablen von φ ab, d.h.

für jedes $m \in M$ $\quad \mathfrak{M} \models \varphi[\beta] \iff \mathfrak{M} \models \varphi[\beta \frac{m}{v_i}]$ .... $\square$

Lemma (Kommutativität von $\exists$ bzw $\forall$)

$$\forall v_1 \forall v_2 \varphi \sim \forall v_2 \forall v_1 \varphi$$

$$\exists v_1 \exists v_2 \varphi \sim \exists v_2 \exists v_1 \varphi$$

Achtung: $\forall v_1 \exists v_2 \varphi \not\sim \exists v_2 \forall v_1 \varphi$

Lemma (Umbenennung gebundener Variablen)

Wenn v_i in φ frei für v_j ist, und v_j nicht frei in φ ist, dann

$$\exists v_i \varphi \sim \exists v_j \varphi \frac{v_j}{v_i}$$

$$\forall v_i \varphi \sim \forall v_j \varphi \frac{v_j}{v_i}$$

Gegenbeispiel

$$\underbrace{\forall v_i\ v_i \doteq v_j}_{\text{nicht allgemeingültig}} \not\sim \underbrace{\forall v_j\ v_j \doteq v_j}_{\text{allgemeingültig}}$$

Beweis: $\mathfrak{M} \models \exists v_j\, \varphi \frac{v_j}{v_i} [\beta] \iff$ ex $m_0 \in M$ mit $\mathfrak{M} \models \varphi \frac{v_j}{v_i} [\beta \frac{m_0}{v_j}]$

$\iff$ ex $m_0 \in M$ mit $\mathfrak{M} \models \varphi [\beta \frac{m_0}{v_j} \frac{\beta\frac{m_0}{v_i}(v_j)}{v_i}]$

Substitutionslemma

$\iff$ —— " —— $\mathfrak{M} \models \varphi [\beta \frac{\beta\frac{m_0}{v_i}(v_j)}{v_i}]$

v_j kommt in φ nicht frei vor

$\iff$ $\mathfrak{M} \models \exists v_i\, \varphi [\beta]$ $\boxtimes$

Bem. manche Autoren schreiben $\bigvee_{v_i}$ für $\exists v_i$, $\bigwedge_{v_i}$ für $\forall v_i$

in $\mathcal{L}_M = \mathcal{L} \cup \{\underline{m} \mid m \in M\}$

neue Konstanten

Lemma: $\neg \exists v_i\, \varphi \sim \forall v_i\, \neg\varphi$

$\neg \forall v_i\, \varphi \sim \exists v_i\, \neg\varphi$

(Art verallgemeinerte de Morgan'sche Regel: $\forall v_i\, \varphi(v_i)$ ist gleichwertig mit $\bigwedge_{m \in M} \varphi \frac{\underline{m}}{v_i}$

in finiten (endlichen) $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M}$: $\exists v_i\, \varphi(v_i)$ ist gleichwertig mit $\bigvee_{m\in M} \varphi \frac{\underline{m}}{v_i}$

Beweis: $\mathfrak{M} \models \forall v_i \neg\varphi[\beta] \iff$ für alle $m \in M$ $\mathfrak{M} \models \neg\varphi[\beta\frac{m}{v_i}] \iff$ für alle $m \in M$ $\mathfrak{M} \not\models \varphi[\beta\frac{m}{v_i}]$

$\iff$ es gibt kein $m \in M$ $\mathfrak{M} \models \varphi[\beta\frac{m}{v_i}]$

$\iff$ $\mathfrak{M} \not\models \exists v_i \varphi[\beta] \iff \mathfrak{M} \models \neg\exists v_i \varphi[\beta]$

2. Teil analog oder mit Substitution: $\neg\exists v_i \varphi \sim \forall v_i \neg\varphi$

$$\Rightarrow \neg\neg\exists v_i \varphi \sim \neg\forall v_i \neg\varphi$$
$$\underset{\exists v_i \varphi}{\wr}$$

$$\Rightarrow \exists v_i \neg\varphi \sim \neg\forall v_i \neg\neg\varphi \sim \neg\forall v_i \varphi \qquad \boxtimes$$

Folgerung $\exists v_i \varphi \sim \neg\forall v_i \neg\varphi$

$\forall v_i \varphi \sim \neg\exists v_i \neg\varphi$

$\{\neg, \wedge, \exists\}$ ist ein vollständiges Junktoren-Quantoren-System, d.h.

jede $\mathcal{I}$-Formel ist äquivalent zu einer $\mathcal{I}$-Formel, in der keine anderen Junktoren & Quantoren vorkommen.

Def: (a) $\mathcal{L}$-Formel φ ist $\mathcal{L}$-Tautologie, wenn $\varphi = F\frac{\varphi_1}{A_1} \ldots \frac{\varphi_n}{A_n}$

für $\mathcal{L}$-Formeln φ_i und eine aussagenlog. Tautologie F (mit Aussvar. $A_1, \ldots, A_n$)

(b) Folgende $\mathcal{L}$-Formeln heißen Gleichheitsaxiome:

$\forall v_0 \; v_0 \doteq v_0$ (Reflexivität der Gleichheit)

$\forall v_0 \forall v_1 \; (v_0 \doteq v_1 \to v_1 \doteq v_0)$ (Symmetrie)

$\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 \; ((v_0 \doteq v_1 \wedge v_1 \doteq v_2) \to v_0 \doteq v_2)$ (Transitivität)

$\forall v_1 \ldots \forall v_n \forall v_{n+1} \ldots \forall v_{2n} \; ((v_1 \doteq v_{n+1} \wedge \ldots \wedge v_n \doteq v_{n+n}) \to f v_1 \ldots v_n \doteq f v_{n+1} \ldots v_{n+n}))$

$\text{———————— '' ————————} \to (R v_1 \ldots v_n \leftrightarrow R v_{n+1} \ldots v_{n+n})$

f n-stelliges Fktszeichen in $\mathcal{L}$, R n-stelliges Relationszeichen in $\mathcal{L}$ (Kongruenz)

(c) Wenn φ $\mathcal{L}$-Formel, τ $\mathcal{L}$-Term, v_i frei für τ in φ,

dann heißt $(\varphi\frac{\tau}{v_i} \to \exists v_i \varphi)$ $\exists$-Axiom

Lemma: $\mathcal{J}$-Tautologien, Gleichheitsaxiome und $\exists$-Axiome sind allgemeingültig!

klar

Beweis:

(c) z.z. für alle $\mathfrak{M}$ und β gilt $\mathfrak{M} \models (\neg \varphi \frac{\tau}{v_i} \vee \exists v_i\, \varphi)[\beta]$

Angenommen $\mathfrak{M} \not\models \neg \varphi \frac{\tau}{v_i} [\beta]$, d.h. $\mathfrak{M} \models \varphi \frac{\tau}{v_i} [\beta]$

$\overset{\text{Subst.}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathfrak{M} \models \varphi [\beta \frac{\tau^{\mathfrak{M}}[\beta]}{v_i}] \Rightarrow \mathfrak{M} \models \exists v_i\, \varphi [\beta]$ ↯

Lemma

(a) Modus Ponens: Wenn φ und $(\varphi \to \psi)$ allgemeingültig sind, dann auch ψ

(b) $\exists$-Einführung: Sei v_i nicht frei in ψ.

Wenn $(\varphi \to \psi)$ allgemeingültig ist, dann auch $(\exists v_i\, \varphi \to \psi)$

Beweis: (a) ist klar, (b): Sei für alle $\mathfrak{M}, \beta$ $\mathfrak{M} \models (\varphi \to \psi) [\beta]$, angenommen auch $\mathfrak{M} \models \exists v_i\, \varphi [\beta]$

zu zeigen: $\mathfrak{M} \models \psi [\beta]$

heißt: ex $m_0 \in M$ mit $\mathfrak{M} \models \varphi [\beta \frac{m_0}{v_i}]$

aus folgt: $\mathfrak{M} \models \psi [\beta \frac{m_0}{v_i}]$. Da v_i nicht frei in ψ ist, auch $\mathfrak{M} \models \psi [\beta]$ ☒

alternativ: $\models (\varphi \to \psi)$ $\leadsto$ $\models \forall v_i (\varphi \to \psi)$

$\leadsto$ $\models \forall v_i (\neg\varphi \vee \psi)$

falls v_i nicht frei in ψ

(für $\wedge$ und $\vee$)

$\leadsto$ $\models (\forall v_i \neg\varphi \vee \psi)$

$\leadsto$ $\models (\neg \exists v_i \varphi \vee \psi)$

$\leadsto$ $\models (\exists v_i \varphi \to \psi)$

2.4 Der Gödel'sche Vollständigkeitssatz

Definition (Hilbertkalkül $\mathbb{H}$)

Eine $\mathcal{L}$-Formel φ ist beweisbar in $\mathbb{H}$, $\vdash_{\mathbb{H}} \varphi$,

wenn es eine Folge $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ von $\mathcal{L}$-Formeln gibt mit

- $\varphi_n = \varphi$
- jedes φ_i ist entweder ein Axiom oder folgt mit einer Schlussregel aus $\varphi_0, \ldots, \varphi_{i-1}$

heißt Beweis oder Ableitung von φ

Axiome von $\mathbb{H}$

- $\mathcal{L}$-Tautologien
- Gleichheitsaxiome
- $\exists$-Axiome

Schlussregeln von $\mathbb{H}$

- Modus Ponens
- $\exists$-Einführung

d.h. wenn φ und $(\varphi \to \psi)$ beweisbar sind, dann auch ψ,

bzw. wenn φ und $(\varphi \to \psi)$ in einem Beweis vorkommen, darf ψ angefügt werden

Satz (Vollständigkeitssatz für $\mathbb{H}$)

φ $\mathcal{L}$-Formel: $\quad \models \varphi \iff \vdash_{\mathbb{H}} \varphi$

Bem: „$\Leftarrow$" heißt soundness des Kalküls („der Kalkül ist sound", d.h. produziert nur allgemeingültige Formeln)

(dt. manchmal „Korrektheit")

ist für $\mathbb{H}$ mit den letzten beiden Lemmas aus 2.3 gezeigt!

„$\Rightarrow$" heißt Vollständigkeit des Kalküls (d.h. jede allgemeingültige Formel lässt sich in $\mathbb{H}$ beweisen (bedeutet aber nicht, dass es ein Verfahren gibt, um solch einen Beweis zu finden...))

ist schwierig und braucht den Rest dieses Abschnittes ...

Verschiedene Arten von Kalkülen

- Hilbert- oder Axiomenkalküle: viele Axiome, wenig Regeln (oft nur Modus Ponens)
- Gentzen- oder Regelkalküle: wenig Axiome, viele Regeln
- Kalkül des natürlichen Schließens, Sequenzenkalküle, ...