Satz (Vollständigkeitssatz für $\mathcal{H}$)

φ $\mathcal{L}$-Formel: $\qquad \models \varphi \iff \vdash_{\mathcal{H}} \varphi$

ohne $\forall$-Quantor!

Bem: „$\Leftarrow$" heißt soundness des Kalküls („der Kalkül ist sound", d.h. produziert nur allgemeingültige Formeln)
(d.h. manchmal „Korrektheit")

ist für $\mathcal{H}$ mit den letzten beiden Lemmas aus 2.3 gezeigt!

„$\Rightarrow$" heißt Vollständigkeit des Kalküls (d.h. jede allgemeingültige Formel lässt sich in $\mathcal{H}$ beweisen
(bedeutet aber nicht, dass es ein Verfahren gibt, um solch einen Beweis zu finden...))

ist schwierig und braucht den Rest dieses Abschnittes ...

verschiedene Arten von Kalkülen

- Hilbert- oder Axiomenkalküle: viele Axiome, wenig Regeln (oft nur Modus Ponens)
- Gentzen- oder Regelkalküle: wenig Axiome, viele Regeln
- Kalkül des natürlichen Schließens, Sequenzenkalküle, ...

Nachtrag: $\forall v_i\, \varphi \vdash \exists v_i\, \varphi$ (gilt, da $\mathcal{L}$-Strukturen per Definition nicht leer sind!)

Achtung: „Alle Einhörner haben drei Beine" ist im mathematisch-logischen Sinne wahr, da es keine Einhörner gibt!

Bem: Im Vollständigkeitssatz für H wird $\forall v_i$ als Abkürzung für $\neg \exists v_i \neg$ aufgefasst.

Bem: Falls $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$, dann ist jede $\mathcal{L}$-Formel φ auch eine $\mathcal{L}'$-Formel.

Dann gilt aber: $\models \varphi$ als $\mathcal{L}$-Formel $\iff$ $\models \varphi$ als $\mathcal{L}'$-Formel

„$\Rightarrow$" Sei $\mathcal{M}'$ $\mathcal{L}'$-Struktur: „Redukt" $\mathcal{M} := \mathcal{M}' \restriction_{\mathcal{L}}$ durch Vergessen der Interpretation der Zeichen in $\mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$

und $\mathcal{M}' \models \varphi \iff \mathcal{M} \models \varphi$

„$\Leftarrow$" Sei $\mathcal{M}$ $\mathcal{L}$-Struktur: $\mathcal{M}$ wird zu $\mathcal{L}'$-Struktur $\mathcal{M}'$ expandiert, durch beliebige Interpretation der Zeichen in $\mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ (Achtung: nicht eindeutig!)

Dagegen hängt $\vdash_{H}$ a priori von $\mathcal{L}$ ab.

Ich schreibe $\vdash_{\mathcal{L}}$ statt $\vdash_{H}$, falls es auf $\mathcal{L}$ ankommt.

Klar: $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$

φ $\mathcal{L}$-Formel

$\vdash_{\mathcal{L}} \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi$

$\underbrace{\varphi_0, \dots, \varphi_n}_{\mathcal{L}\text{-Formel}} = \varphi$ $\mathcal{L}$-Beweis

$\Downarrow$

ist auch $\mathcal{L}'$-Beweis

Aus dem Vollständigkeitssatz folgt insbesondere, dass $\vdash_{H}$ in Wirklichkeit nicht von $\mathcal{L}$ abhängt!

Abgeleitete Regeln und Axiome für H

Bemerkung: Falls $\vdash_{H} \varphi$ und $\vdash (\varphi \to \psi)$ (d.h. auss. Tautologie)

dann $\vdash_{H} \psi$

Denn: Sei $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ ein H-Beweis von φ

$\varphi_n = \varphi$

ok nach Annahme — Axiom — M.P. auf $\varphi = \varphi_n$ und $(\varphi \to \psi)$

Dann ist $\underbrace{\varphi_0, \dots, \varphi_n}_{\text{ok nach Annahme}}, \underbrace{(\varphi \to \psi)}_{\text{Axiom}}, \underbrace{\psi}_{\text{M.P.}}$ ein H-Beweis von ψ

Lemma:

(1) Wenn $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ beweisbar und $((\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \to \psi)$ beweisbar, dann ist auch ψ beweisbar.

(2) $\forall$-Axiom: Wenn v_i frei für τ in φ ist, dann ist $(\forall v_i\, \varphi \to \varphi\frac{\tau}{v_i})$ beweisbar

(3) $\forall$-Einführung: Wenn v_i nicht frei in φ ist und $(\varphi \to \psi)$ beweisbar ist, dann ist $(\varphi \to \forall v_i\, \psi)$ beweisbar

Beweis: (1) $((\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \to \psi) \sim_{AL} (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\dots \to (\varphi_n \to \psi) \dots)))$

d.h. $\left((\underbrace{(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \to \psi}_{\text{beweisbar}}) \to (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \dots (\varphi_n \to \psi) \dots))) \right)$ ist Tautologie

beweisbar

$(n+1)$-mal Modus Ponens: ψ ist beweisbar

(2) $\exists$-Axiom für $\neg\varphi$: $(\neg\varphi\frac{\tau}{v_i} \to \exists v_i \neg\varphi)$, ist also beweisbar

Tautologie: $\vdash ((\neg A \to B) \to (\neg B \to A))$

mit „Aussagelogik" $(\underbrace{\neg\exists v_i \neg}_{\forall v_i}\varphi \to \varphi\frac{\tau}{v_i})$ ist beweisbar

(3) Sei $(\varphi \to \psi)$ beweisbar

mit „Aussagenlogik": $(\neg\psi \to \neg\varphi)$ beweisbar

$\exists$-Einführung (v_i nicht frei in φ): $(\exists v_i \neg\psi \to \neg\varphi)$ beweisbar

Aussagenlogik: $(\varphi \to \neg\exists v_i \neg\psi)$ beweisbar

$\forall v_i$

Bsp: R zweistelliges Relationszeichen

$$\models (\exists v_0 \forall v_1 \, Rv_0v_1 \to \forall v_1 \exists v_0 \, Rv_0v_1)$$

Beweisbarkeit in H ?

(1) $\exists$-Axiom: $(Rv_0v_1 \to \exists v_0 \, Rv_0v_1)$

(2) $\forall$-Axiom: $(\forall v_1 \, Rv_0v_1 \to Rv_0v_1)$

(3) Aussagenlogik auf (1) und (2): $(\forall v_1 \, Rv_0v_1 \to \exists v_0 \, Rv_0v_1)$

(4) $\exists$-Einführung auf (3): $(\exists v_0 \forall v_1 \, Rv_0v_1 \to \exists v_0 \, Rv_0v_1)$

(5) $\forall$-Einführung auf (4): $(\exists v_0 \forall v_1 \, Rv_0v_1 \to \forall v_1 \exists v_0 \, Rv_0v_1)$

Rv_0v_1 $\quad v_0 \leq v_1$

Betrachte $(\mathbb{N}, \leq)$ und $(\mathbb{Z}, \leq)$!

Versuch für:

$$(\forall v_1 \exists v_0 \, Rv_0v_1 \to \exists v_0 \forall v_1 \, Rv_0v_1)$$

Axiom $(Rv_0v_1 \to Rv_0v_1)$

$\exists$- und $\forall$-Einführung funktionieren nicht, weil v_0 frei „rechts" bzw. v_1 frei „links" ...

da die Formel nicht allgemeingültig (Gegenbeispiel finden!) ist sie auch nicht beweisbar!

Lemma: $\varphi(v_1,\dots,v_n)$ $\mathcal{L}$-Formel, $c_1,\dots,c_n$ „neue" Konstanten d.h. $\notin \mathcal{L}$

$\varphi \frac{c_1}{v_1} \cdots \frac{c_n}{v_n}$
"

$$\vdash_{\mathcal{L}} \varphi(v_1\dots v_n) \iff \vdash_{\mathcal{L}} \forall v_1 \dots \forall v_n\, \varphi(v_1\dots v_n) \iff \vdash_{\mathcal{L}\cup\{c_1,\dots,c_n\}} \varphi(c_1\dots c_n)$$

(Bem: Äquivalent gilt für Allgemeingültigkeit)

Bew: Sei $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi(v_1\dots v_n)$

Verum Verum

mit Aussagenlogik: $\vdash_{\mathcal{L}} (\top \to \varphi(v_1\dots v_n))$ [denn $\vdash (A \to (\top \to A))$]

$\forall$-Einführung (n-mal): $\vdash_{\mathcal{L}} \forall v_1 \dots \forall v_n\, \varphi(v_1\dots v_n)$

also auch: $\vdash_{\mathcal{L}\cup\{c_1,\dots,c_n\}} \forall v_1 \dots \forall v_n\, \varphi(v_1\dots v_n)$

$\forall$-Axiom + Modus Ponens (n-mal): $\vdash_{\mathcal{L}\cup\{c_1,\dots,c_n\}} \varphi(c_1\dots c_n)$

im gesamten Beweis ersetze $c_1\dots c_n$ durch neue Variablen $w_1\dots w_n$

d.h. w_i ist ein v_j, das im Beweis von $\varphi(c_1,\dots,c_n)$ nicht vorkommt

$\vdash_{\mathcal{L}} \varphi(w_1\dots w_n)$

mit $\forall$ Einführung $\vdash_{\mathcal{L}} \forall w_1 \dots \forall w_n\, \varphi(w_1\dots w_n)$

$\forall$-Axiom + Modus Ponens $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi(v_1\dots v_n)$

$\boxtimes$

Folgerungen: (1) Man kann sich im Vollständigkeitssatz auf Aussagen beschränken.

(2) Für $\mathcal{L}$-Aussage φ gilt $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi \iff \vdash_{\mathcal{L} \cup \{c_1, \dots, c_n\}} \varphi$

Def: $\mathcal{L}$ Sprache

$\mathcal{L}$-Theorie T ist eine Menge von $\mathcal{L}$-Aussagen (die auch „Axiome" der Theorie heißen)

$T \models \varphi$: in jeder $\mathcal{L}$-Struktur, die Modell von T ist, gilt φ
(d.h. alle Axiome von T gelten)

$T \vdash_{H} \varphi$: Axiome von T sind zusätzliche Axiome, d.h. es gibt eine Folge von $\mathcal{L}$-Formeln $\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi$, wobei φ_i
- Axiom von H
- Axiom von T
- folgt mit Regeln von H aus vorangehenden Regeln

In einem Beweis kommen nur endlich viele Axiome von T vor, etwa $\psi_1 \dots \psi_k$

$$T \vdash_{H} \varphi \iff \vdash_{H} \big((\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k) \to \varphi\big)$$

Def: T heißt <u>widerspruchsfrei</u> (HI-widerspruchsfrei), wenn $T \nvdash_{HI} \bot$

Bem: $T \vdash_{HI} \varphi \iff T \cup \{\neg\varphi\}$ ist HI-widersprüchlich d.h. nicht HI-widerspruchsfrei

$\Big($ $\iff T \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{HI} \bot$

$\iff T \vdash_{HI} (\neg\varphi \to \bot) \overset{\text{Auss. Logik}}{\iff} T \vdash_{HI} \varphi$ $\Big)$

durch Umformen des Beweises

Satz (Vollständigkeitssatz für Theorien)

Eine $\mathcal{L}$-Theorie T ist genau dann HI-widerspruchsfrei, wenn sie ein Modell hat, (d.h. wenn es eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ gibt mit $\mathcal{M} \models T$)

Folgerung: Vollständigkeitssatz für HI

Sei φ allgemeingültige $\mathcal{L}$-Aussage, betrachte $T = \{\neg\varphi\}$, d.h. T hat kein Modell

<u>Satz</u>: T ist nicht HI-widerspruchsfrei $\iff T \vdash_{HI} \bot \iff \vdash_{HI} (\neg\varphi \to \bot) \iff \vdash_{HI} \varphi$ ☒

Eine Richtung des Satzes ist einfach:

Wenn $\mathfrak{M} \models T$ und $T \vdash_H \varphi$, dann $\mathfrak{M} \models \varphi$.

D.h. Wenn T ein Modell hat, gilt nicht $T \vdash_H \bot$, d.h. T widerspruchsfrei

Zu zeigen ist die Umkehrung: T widerspruchsfrei $\Rightarrow$ es gibt ein Modell von T

Motivation: T_G Theorie der Gruppen $\mathcal{L} = \{\circ, e\}$

zweistelliges Funktionszeichen; Konstante

Element m: $\langle m \rangle = \{e, m, m\circ m, (m\circ m)\circ m, \dots, m^{-1}, (m\circ m)^{-1}, \dots\}$

Bem: Wenn die Sprache reichhaltig genug ist (genug Fkt enthält) bilden die Interpretationen der Terme bereits ein Modell

$$T_G \vdash \forall v_0 \exists v_1 \; v_0 \circ v_1 = e$$

kein in der Sprache $\mathcal{L}$

$T \vdash \exists v_0 \varphi$

neue Konstante c_φ

$\left(\exists v_0 \varphi \to \varphi \frac{c_\varphi}{v_0}\right)$

Idee: für jede gültige Existenzformel führe neues Konstantenzeichen ein