Erinnerung

Hilbert-Kalkül $\mathbb{H}$
für $\vdash_{\mathbb{H}} \varphi$

Axiome:
- ~~aussagenlogische~~ $\mathcal{L}$-Tautologien
- Gleichheitsaxiome
- $\exists$-Axiome $\left(\varphi\frac{\tau}{v_i} \to \exists v_i \varphi\right)$

  v_i frei für τ in φ

Regeln:
- Modus Ponens
- $\exists$-Einführung $\vdash_{\mathbb{H}} (\varphi \to \psi) \Rightarrow \vdash_{\mathbb{H}} (\exists v_i \varphi \to \psi)$

  v_i nicht frei in ψ

T Theorie, $T \vdash_{\mathbb{H}} \varphi$: alle $\psi \in T$ sind zusätzliche Axiome!

T $\mathbb{H}$-widerspruchsfrei $:\Longleftrightarrow$ $T \nvdash_{\mathbb{H}} \bot$

Bemerkung $T \vdash_{\mathbb{H}} \varphi \iff T \cup \{\neg\varphi\}$ widersprüchlich (inkonsistent)

Zu zeigen: T H-widerspruchsfrei $\Rightarrow$ T hat ein Modell $\mathcal{M}$

Idee: Erweitere Sprache $\mathcal{L}$ um sehr viele Konstanten, erweitere die Theorie T entsprechend, so dass die Konstanten ein Modell bilden...

Motivation: Konstruktion von $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$

$3 \cdot x = 5$ hat keine Lösung in $\mathbb{Z}$

aber in $\mathbb{Q}$ soll gelten $\exists x \; 3 \cdot x = 5$

erfinde neues Element $c = \frac{5}{3}$ mit $3 \cdot c = 5$ $\Rightarrow$ $6 \cdot c = 10$

Die Theorie von $\mathbb{Q}$ muss zeigen, wie $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$

und $+, -, \cdot, :$ muss auf $\mathbb{Q}$ definiert werden.

Falls $T \vdash \exists v_i \varphi(v_i)$, dann soll es eine Konstante c_φ geben mit $T^* \vdash \varphi(c)$

Erweiterung von T

Henkin-Konstante

Für jede $\mathcal{L}$-Formel φ nehmen wir neue Konstante $c_\varphi \notin \mathcal{L}$

$c_\varphi \neq c_\psi \quad \psi \neq \varphi$

$$T^* := T \cup \{ \exists v_i \varphi(v_i) \to \varphi\frac{c_\varphi}{v_i} \mid \varphi(v_i) \in \mathcal{L} \}$$

$$\mathcal{L}^* := \mathcal{L} \cup \{ c_\varphi \mid \varphi(v_i) \in \mathcal{L} \}$$

Henkin-Axiom

man bekommt neue Formeln, $\mathcal{L}^*$-Formeln $\varphi(v_i)$, z.B. $v_i = f c_\varphi$

falls f einstelliges Funktionszeichen in $\mathcal{L}$

bilde T^{**}, $\mathcal{L}^{**}$

$$T^h = \text{Henkin-Theorie von } T = T \cup T^* \cup T^{**} \cup \dots$$

$$\mathcal{L}^h = \mathcal{L} \cup \mathcal{L}^* \cup \mathcal{L}^{**} \cup \dots$$

Zu zeigen: T^{L} ist widerspruchsfreie $\mathcal{L}^{L}$-Theorie ✓

Zeige: Die Hinzunahme von einem Henkin-Axiom kann eine widerspruchsfreie Theorie nicht widersprüchlich machen:

Angenommen $T \cup \{\exists v_i \varphi(v_i) \to \varphi\frac{c_\varphi}{v_i}\}$ ist widersprüchlich, aber T widerspruchsfrei.

d.h. $T \vdash \neg(\quad \ldots \quad)$, d.h. $T \vdash \exists v_i \varphi$, $\underbrace{T \vdash \neg \varphi \frac{c_\varphi}{v_i}}_{}$

mit AL: $T \vdash (\varphi \frac{c_\varphi}{v_i} \to \bot)$

$\exists$-Einführung $T \vdash \exists v_i \varphi(v_i) \to \bot$, d.h. (AL) $T \vdash \neg \exists v_i \varphi$

AL: $T \vdash \bot$ Widerspruch zu Annahme, dass T widerspruchsfrei ☐

Bem: Eine aufsteigende Vereinigung widerspruchsfreier Theorien ist widerspruchsfrei

d.h. $T_i \subseteq T_{i+1}$ widerspruchsfrei $\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$ widerspruchsfrei
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$
denn: Falls $T_\infty \vdash_{\mathrm{LH}} \bot$, dann kommen nur endlich viele Axiome aus T_∞ in dem Beweis vor, die bereits in einem T_i liegen!

Def.: Eine $\mathcal{L}$-Theorie T heißt <u>vollständig</u>, falls T widerspruchsfrei ist und für alle $\mathcal{L}$-Formeln φ gilt
$(=)$ (entweder) $T \vdash \varphi$ oder $T \vdash \neg\varphi$

Lemma: Jede widerspruchsfreie $\mathcal{L}$-Theorie T kann zu einer vollständigen $\mathcal{L}$-Theorie erweitert werden.

Beweis: Zähle alle $\mathcal{L}$-Formeln auf als $\{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. (Annahme hier ist, dass $\mathcal{L}$ abzählbar ist.)

$$T_0 := T$$

Induktion

$$T_{i+1} := \begin{cases} T_i \cup \{\varphi_i\} & \text{falls } T \vdash \varphi_i \\ T_i \cup \{\neg\varphi_i\} & \text{andernfalls} \end{cases}$$

in diesem Fall ist $T_i \cup \{\varphi_i\}$ widerspruchsfrei, denn sonst wäre $T_i \vdash \neg\varphi_i$ und nach Induktionsannahme ist T_i widerspruchsfrei

analoger Fall $T_i \vdash \neg\varphi_i$

zu zeigen: Falls weder $T \vdash \varphi_i$, noch $T \vdash \neg\varphi_i$, dann ist $T \cup \{\neg\varphi_i\}$ widerspruchsfrei:
angenommen $T \cup \{\neg\varphi_i\}$ widersprüchlich, dann $T \vdash \neg\neg\varphi_i$, d.h. $T \vdash \varphi_i$ ↯

Wie vorhin: $T_\infty := \bigcup_{i \in I} T_i$ ist widerspruchsfrei, und per Konstruktion vollständig.

gestartet mit widerspruchsfreier $\mathcal{L}$-Theorie T

$\rightsquigarrow$ erweitert zu (widerspruchsfreier) Henkintheorie T^h in $\mathcal{L}^h$

$\rightsquigarrow$ erweitere zu vollständiger Theorie T' in $\mathcal{L}^h$

<u>Definiere $\mathcal{L}^h$-Struktur</u> $\mathcal{M}$:

betrachte die Konstanten $\mathcal{C}$ in $\mathcal{L}^h$

Definiere binäre Relation $\sim$ auf $\mathcal{C}$ durch $c_1 \sim c_2 :\Leftrightarrow T' \vdash_{\mathbb{H}} c_1 \doteq c_2$

<u>Bem:</u> $\sim$ ist Äquivalenzrelation

folgt aus den Gleichheitsaxiomen, z.B. Transitivität:

$c_1 \sim c_2$, $c_2 \sim c_3$, d.h. $T' \vdash_{\mathbb{H}} c_1 \doteq c_2$, $T' \vdash_{\mathbb{H}} c_2 \doteq c_3$

(Gleichheitsaxiom) $T' \vdash_{\mathbb{H}} \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3 ((v_1 \doteq v_2 \land v_2 \doteq v_3) \to v_1 \doteq v_3)$

($\forall$-Axiom) $T' \vdash_{\mathbb{H}} \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3 (\cdots) \to ((c_1 \doteq c_2 \land c_2 \doteq c_3) \to c_1 \doteq c_3)$

(Modus Ponens) $T' \vdash_{\mathbb{H}} ((c_1 \doteq c_2 \land c_2 \doteq c_3) \to c_1 \doteq c_3)$

(verallg. Modus Ponens) $T' \vdash_{\mathbb{H}} c_1 \doteq c_3$

Das Universum M von $\mathfrak{M}$ ist die Menge der Äquivalenzklassen $C/\sim$

Konstanten $c \in \mathcal{L}^h$: $\quad c^{\mathfrak{M}} = c/\sim$

Funktionszeichen $f \in \mathcal{L}^h$: $\quad f^{\mathfrak{M}}\, c_1/\sim \dots c_n/\sim \;:=\; c_\varphi/\sim$

$$\underbrace{\underbrace{f c_1 \dots c_n}_{\mathcal{L}^h\text{-Term}} \doteq v_0}_{\mathcal{L}^h\text{-Formel } \varphi} \rightsquigarrow \text{Konstante } c_\varphi$$

Insbesondere ist jeder Term durch eine Konstante repräsentiert!

Relationszeichen $R \in \mathcal{L}^h$: $\quad \mathfrak{M} \models R^{\mathfrak{M}}\, c_1/\sim \dots c_n/\sim \;:\Leftrightarrow\; T' \vdash R c_1 \dots c_n$

Dies ist wohldefiniert: z.B. $c_1 \sim c_1', \dots, c_n \sim c_n'$

d.h. $T' \vdash c_1 \doteq c_1', \dots, T' \vdash c_n \doteq c_n'$

mit Gleichheitsaxiomen folgt $T' \vdash R c_1' \dots c_n'$

analog für $f^{\mathfrak{M}}$

Satz: $\mathcal{M} \models T'$ (da $T \subseteq T'$, gilt dann auch $\mathcal{M} \models T$)

Beweis: per Induktion über den Aufbau von Formeln: genauer $T' \vdash \varphi \iff \mathcal{M} \models \varphi$

- atomare Formeln: $c_1 \doteq c_2$, $R c_1 \dots c_n$ gilt per Definition

  (zusammengesetzte Terme müssen nicht betrachtet werden, da jeder Term durch eine Konstante repräsentiert wird)

- Negation: $T' \vdash \neg\varphi$

  also $T' \nvdash \varphi$, $\overset{\text{Induktionsannahme}}{\iff}$ $\mathcal{M} \not\models \varphi$

  (da T' widerspruchsfrei) $\iff$ $\mathcal{M} \models \neg\varphi$

- Konjunktion: $T' \vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, dann $T' \vdash \varphi_1$ und $T' \vdash \varphi_2$

  $\Updownarrow$ I.A. $\qquad \Updownarrow$ I.A.

  $\mathcal{M} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \iff (\mathcal{M} \models \varphi_1 \quad \mathcal{M} \models \varphi_2)$

- Existenzquantor:

Bem.: $\mathcal{M}$ Modell von T' bedeutet zwar nur „$\Rightarrow$", da T' vollständig, folgt „$\Leftarrow$"

Annahme $T' \vdash \exists v_i \psi$ Betracht Henkin-Axiom: $T' \vdash (\exists v_i \psi \to \psi \frac{c_\psi}{v_i})$

Also $T' \vdash \psi \frac{c_\psi}{v_i}$ (Modus Ponens)

Induktionsannahme: $\mathcal{M} \models \psi \frac{c_\psi}{v_i}$, also auch $\mathcal{M} \models \exists v_i \psi$.

Annahme: $\mathcal{M} \models \exists v_i \psi$, also existiert $m \underset{c/m}{=} \in M$ mit $\mathcal{M} \models \psi \frac{m}{v_i}$, also $\mathcal{M} \models \psi \frac{c}{v_i}$

Induktionsannahme: $T' \vdash \psi \frac{c}{v_i}$

$\exists$-Axiom + Modus Ponens: $T' \vdash \exists v_i \psi$ $\square$

Folgerung (Kompaktheits- oder Endlichkeitssatz für Prädikatenlogik)

Falls eine Menge von $\mathcal{L}$-Formeln endlich erfüllbar ist (d.h. jede endliche Teilmenge hat ein Modell), dann ist sie erfüllbar.

Falls eine Menge von $\mathcal{L}$-Formeln widersprüchlich ist, dann ist bereits eine endliche Teilmenge davon widersprüchlich.

Folgerung: Die Menge der allgemeingültigen $\mathcal{L}$-Formeln ist „maschinell aufzählbar" (semi-entscheidbar, rekursiv aufzählbar), d.h. es gibt ein Algorithmus, der eine Liste $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ von $\mathcal{L}$-Formeln erzeugt, so, dass

$$\{\varphi_i\} = \text{die Menge der allgemeingültigen } \mathcal{L}\text{-Formeln}$$

Beweis: Liste geschickt die durch H1 beweisbaren Formeln auf.

Der Satz von Herbrand

Def.: Eine $\mathcal{L}$-Formel ist in **pränexer** Normalform, falls die Gestalt hat

$$Q_1 v_{i_1} \ldots Q_n v_{i_n} \psi \qquad \text{mit } Q_i \in \{\exists, \forall\} \text{ und } \psi \text{ quantorenfrei,}$$

d.h. in ψ kommt kein Quantor vor.

Satz: Jede Formel ist zu einer Formel in pränexer Normalform äquivalent.

Beweis: Zeige: bis auf Äquivalenz sind die pränexen Formeln unter $\exists, \wedge, \neg$ abgeschlossen

$\exists$ trivial: d.h. wenn φ in pränexer NF, dann auch $\exists v_i \varphi$

$\neg$ einfach: Wenn $\neg Q_1 v_{i_1} \ldots Q_n v_{i_n} \psi \sim \bar{Q}_1 v_{i_1} \ldots \bar{Q}_n v_{i_n} \neg \psi$

wobei $\bar{\exists} = \forall$, $\bar{\forall} = \exists$

$\wedge$ ist etwas trickreich $(Q_1 v_1 \varphi \wedge \psi)$ geht ebenso für $\vee$

$\sim (Q_1 v_k \varphi \frac{v_k}{v_1} \wedge \psi)$ wobei v_k in ψ nicht vorkommt

$\sim Q_1 v_k (\varphi \frac{v_k}{v_1} \wedge \psi)$ da v_k in ψ nicht vorkommt!

Bsp: $(\exists v_0 \forall v_1 R v_0 v_1 \to \forall v_1 \exists v_0 R v_0 v_1)$

$\sim (\neg \exists v_0 \forall v_1 R v_0 v_1 \vee \forall v_1 \exists v_0 R v_0 v_1)$

$\sim (\underbrace{\forall v_0 \exists v_1 \neg R v_0 v_1}_{\text{pränex}} \vee \underbrace{\forall v_1 \exists v_0 R v_0 v_1}_{\text{pränex}})$

$\sim (\forall v_0 \exists v_1 \neg R v_0 v_1 \vee \forall v_2 \exists v_3 R v_3 v_2)$

$\sim \forall v_0 (\exists v_1 \neg R v_0 v_1 \vee \forall v_2 \exists v_3 R v_3 v_2)$

$\sim \forall v_0 \exists v_1 (\neg R v_0 v_1 \vee \ldots)$

$\vdots$

$\sim \forall v_0 \exists v_1 \forall v_2 \exists v_3 (\underbrace{\neg R v_0 v_1 \vee R v_3 v_2}_{(R v_0 v_1 \to R v_3 v_2)})$