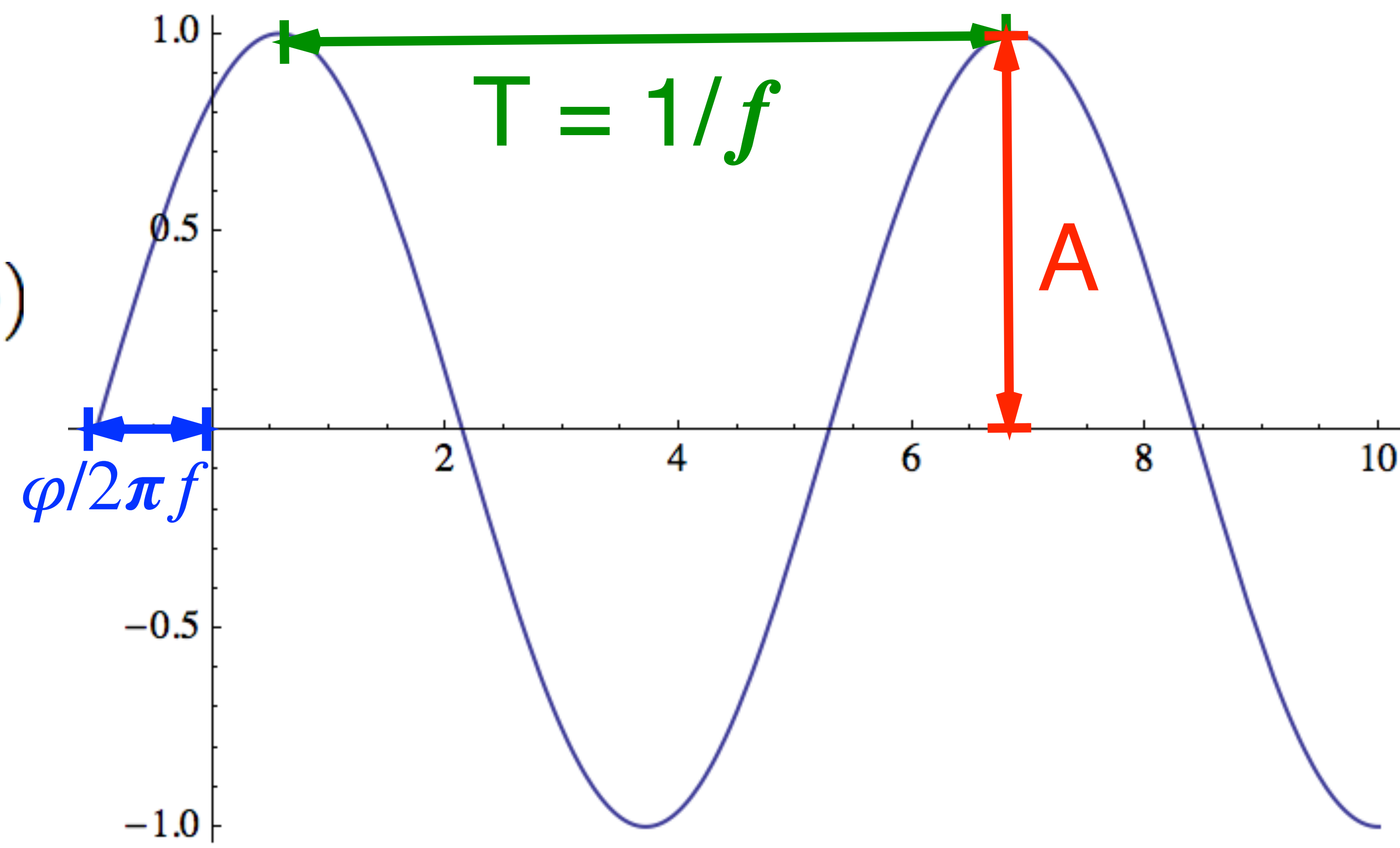
CoNe Freiburg

Breitband

- Idee:
  - Konzentration auf die idealen Frequenzen des Mediums
  - Benutzung einer Sinuskurve als Trägerwelle der Signale
- Eine Sinuskurve hat keine Information
- Zur Datenübertragung muss die Sinuskurve fortdauernd verändert werden (moduliert)
  - Dadurch Spektralweitung (mehr Frequenzen in der Fourier-Analyse)
- Folgende Parameter können verändert werden:
  - Amplitude A
  - Frequenz f=1/T
  - Phase φ

$$s(t) = A \sin(2\pi f t + \phi)$$

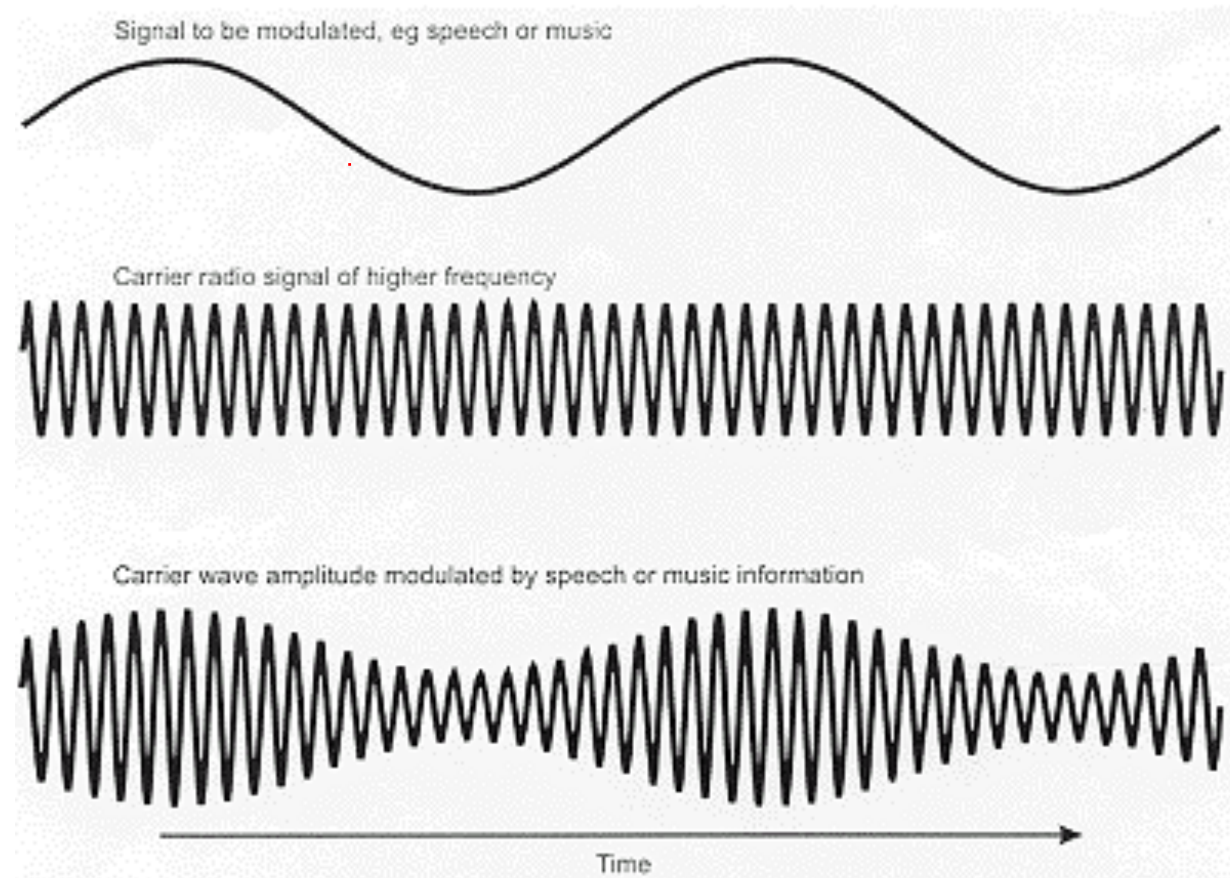


CoNe Freiburg

Amplitudenmodulation

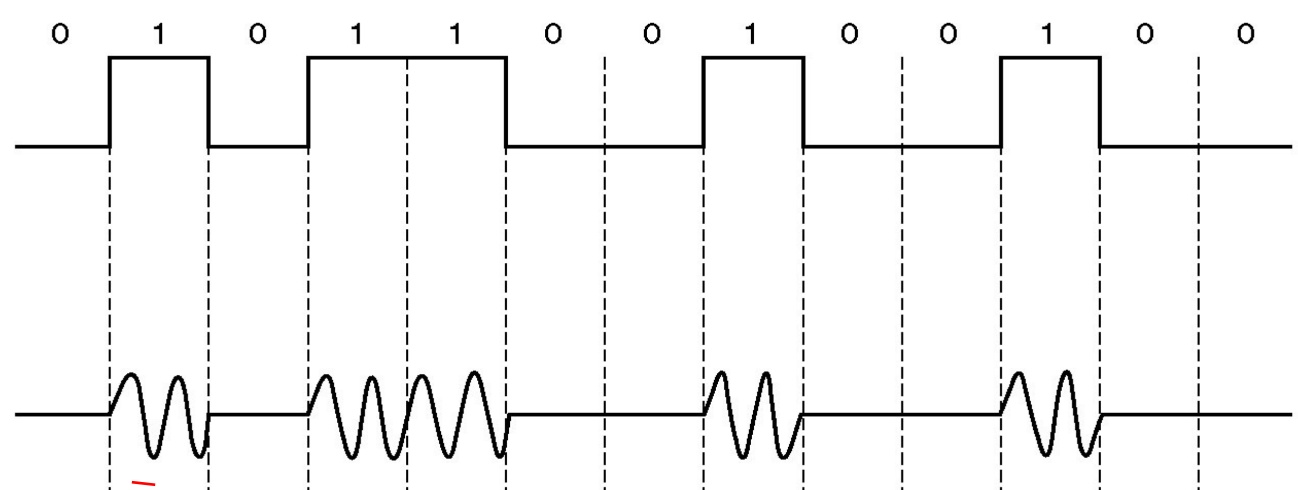
- Das zeitvariable Signal s(t) wird als Amplitude einer Sinuskurve kodiert:

$$f_A(t) = s(t)\,\sin(2\pi f t + \phi)$$



- Analoges Signal
  - Amplitude Modulation
  - Kontinuierliche Funktion in der Zeit
    - z.B. zweites längeres Wellensignal (Schallwellen)

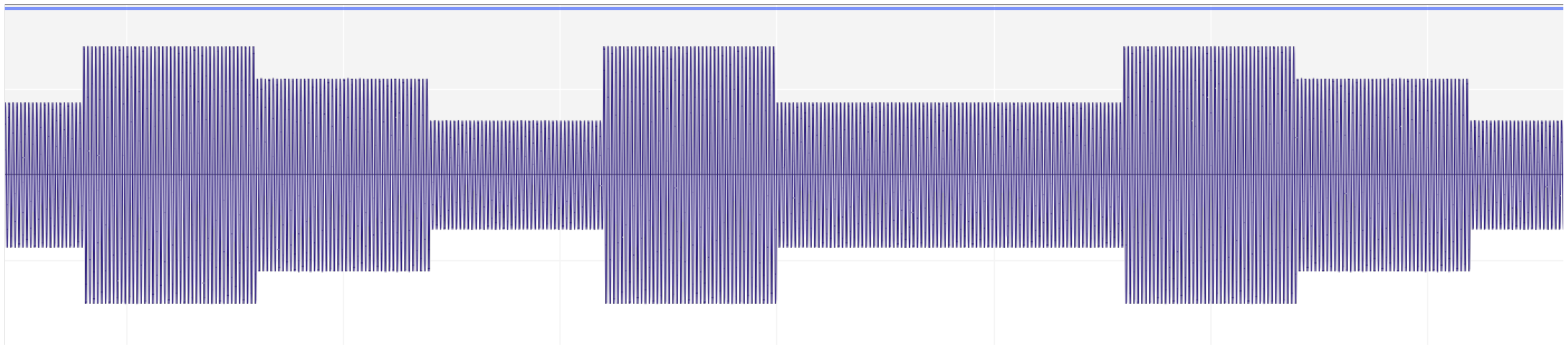
on/off key



- Digitales Signal
  - Amplitude Keying
  - Z.B. durch Symbole gegeben als Symbolstärken
  - Spezialfall: Symbole 0 oder 1
    - on/off keying

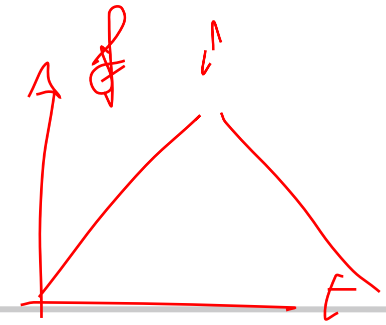
Hörbeispiel

- Amplituden-modulierte Sinuskurve

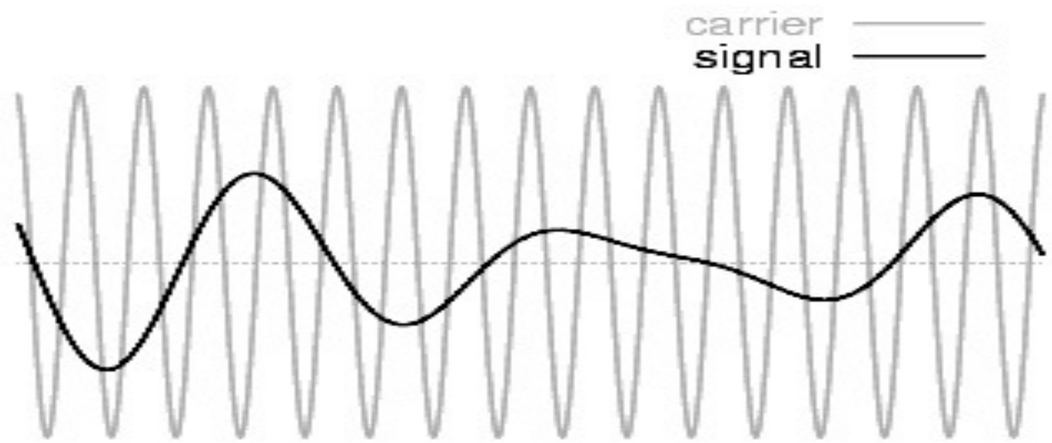


Frequenzmodulation

→ Chirp

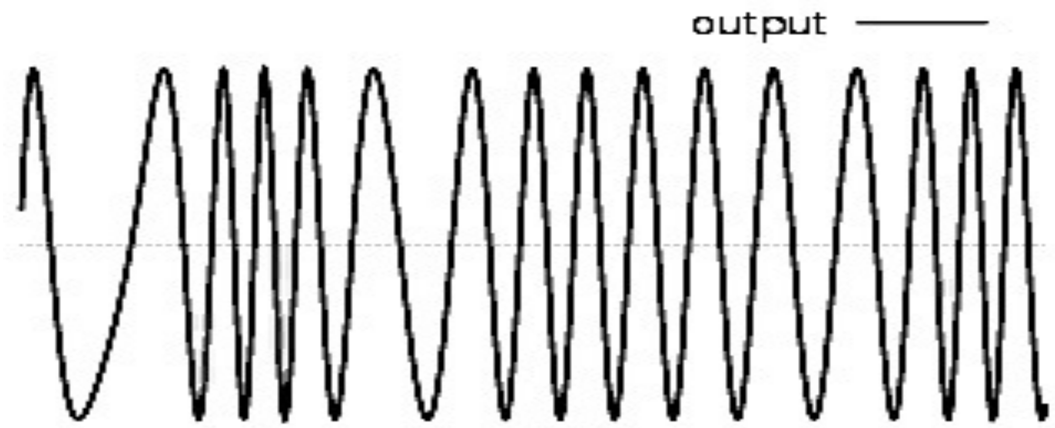


- Das zeitvariable Signal s(t) wird in der Frequenz der Sinuskurve kodiert:

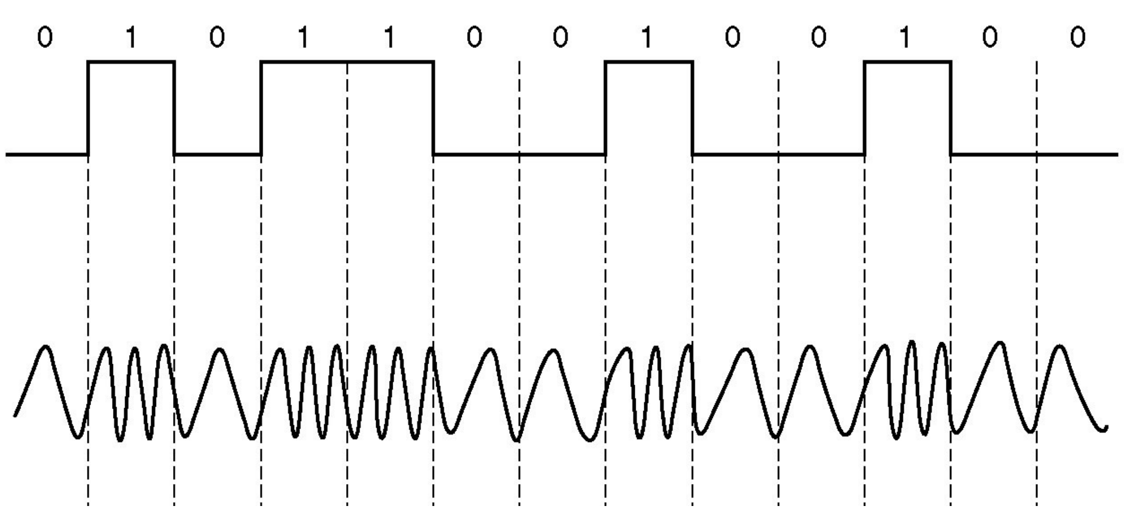


$$f_F(t) = a \sin(2\pi \underline{s(t)} t + \phi)$$

- Analoges Signal
  - Frequency Modulation (FM)
  - Kontinuierliche Funktion in der Zeit



- Digitales Signal
  - Frequency Shift Keying (FSK)
  - Z.B. durch Symbole gegeben als Frequenzen



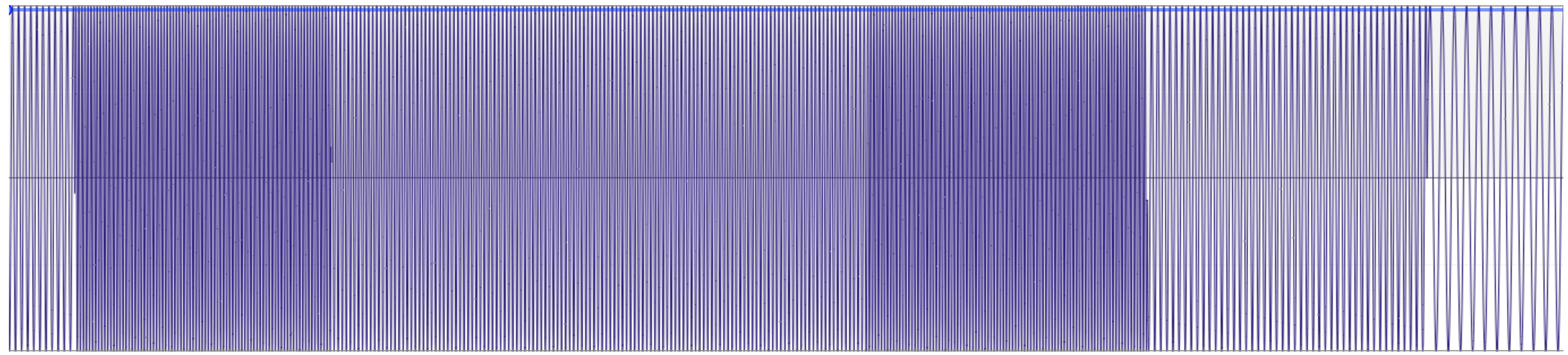
CoNe Freiburg

Hörbeispiel

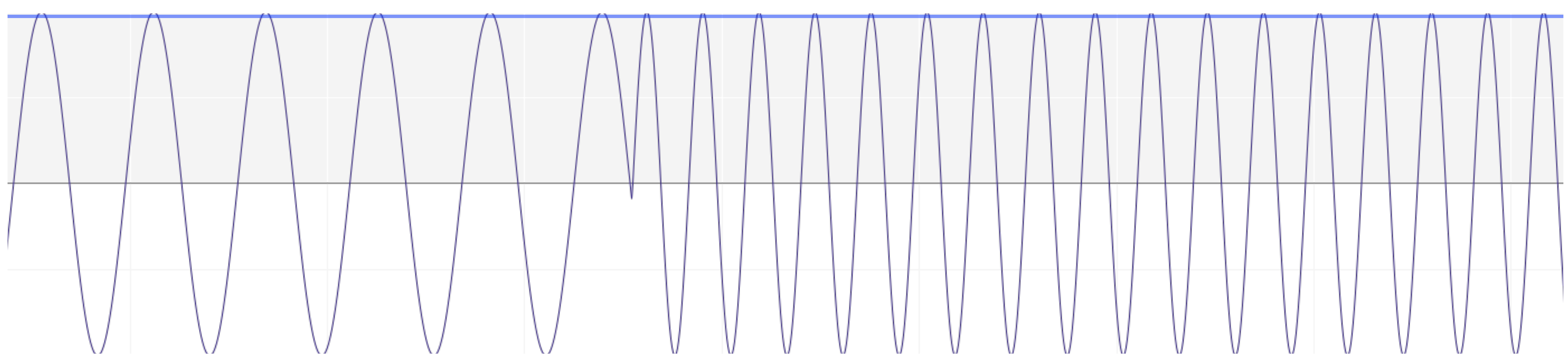
$$3^{x'} = 2^{y}$$

$$f_0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x} = f_0 \cdot 2^{y} \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{x} = 2^{y}$$

- frequenz-modulierte Sinuskurve



$f, 2f, 3f, 4f, 5f, 6f, 7f, 8f, 9f, \ldots$



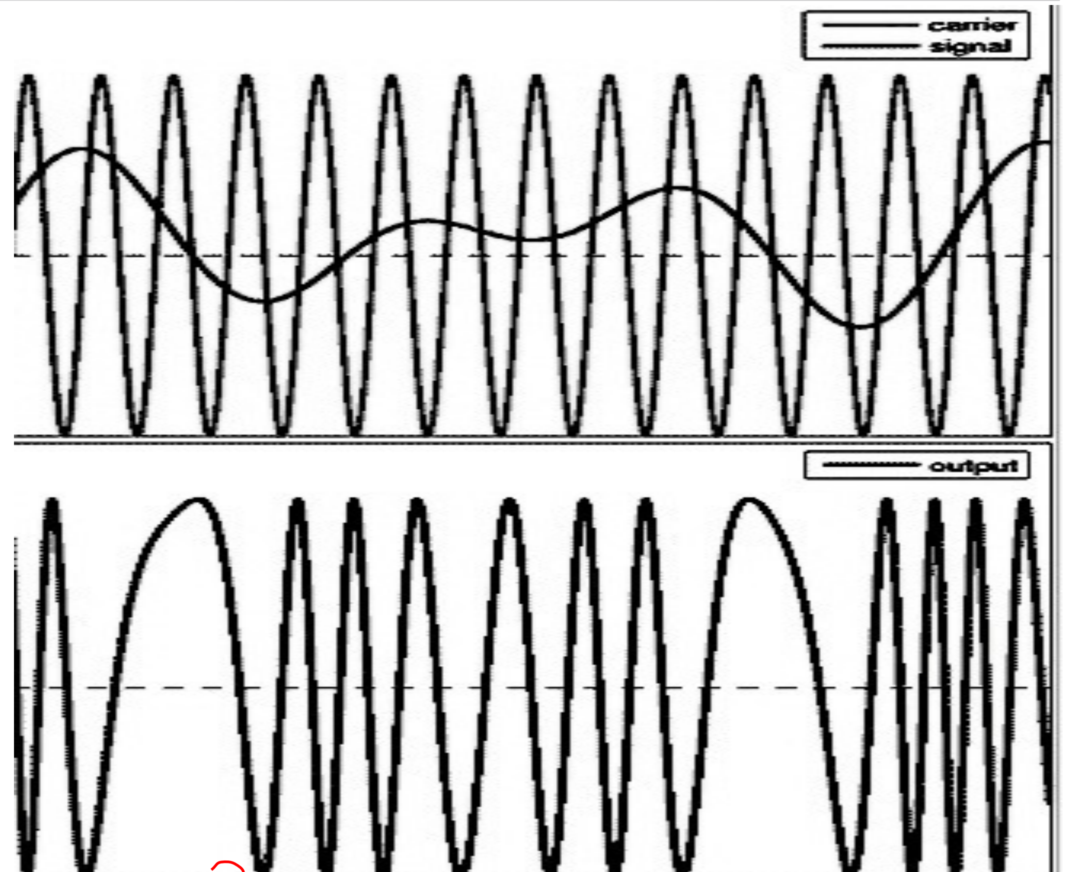
Phasenmodulation

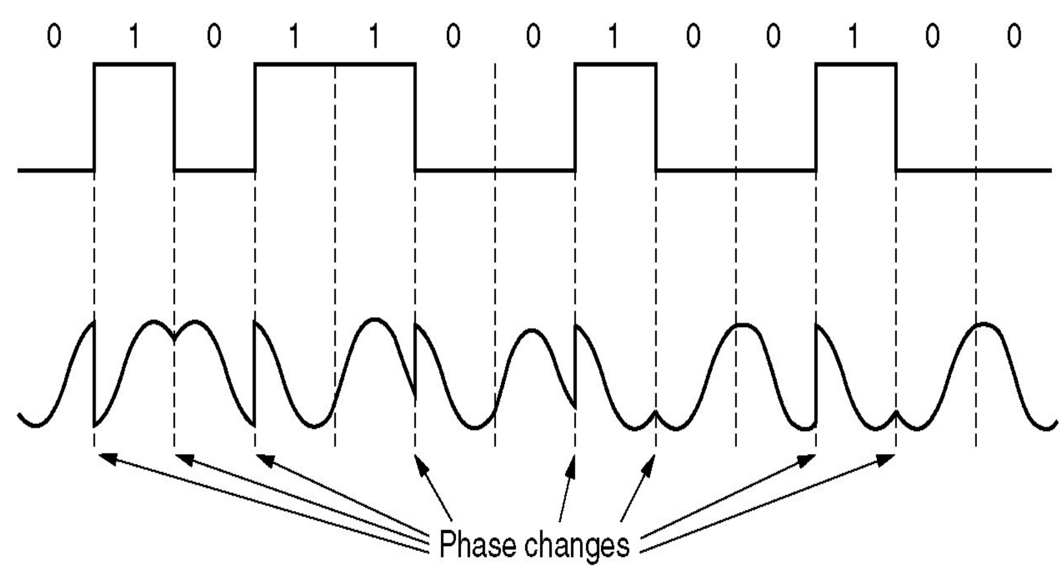
$\frac{s(t)}{t} \cdot t$

- Das zeitvariable Signal s(t) wird in der Phase der Sinuskurve kodiert:

$$f_P(t) = a \sin(2\pi f t + s(t))$$

- Analoges Signal
  - Phase Modulation (PM)
  - Sehr ungünstige Eigenschaften
  - Wird nicht eingesetzt
- Digitales Signal
  - Phase-Shift Keying (PSK)
  - Z.B. durch Symbole gegeben als Phasen

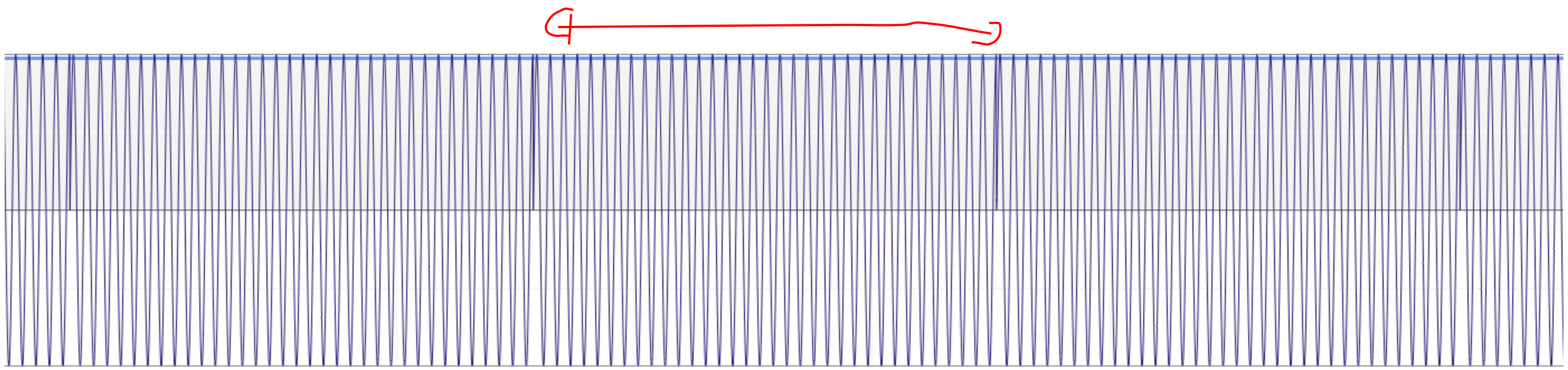


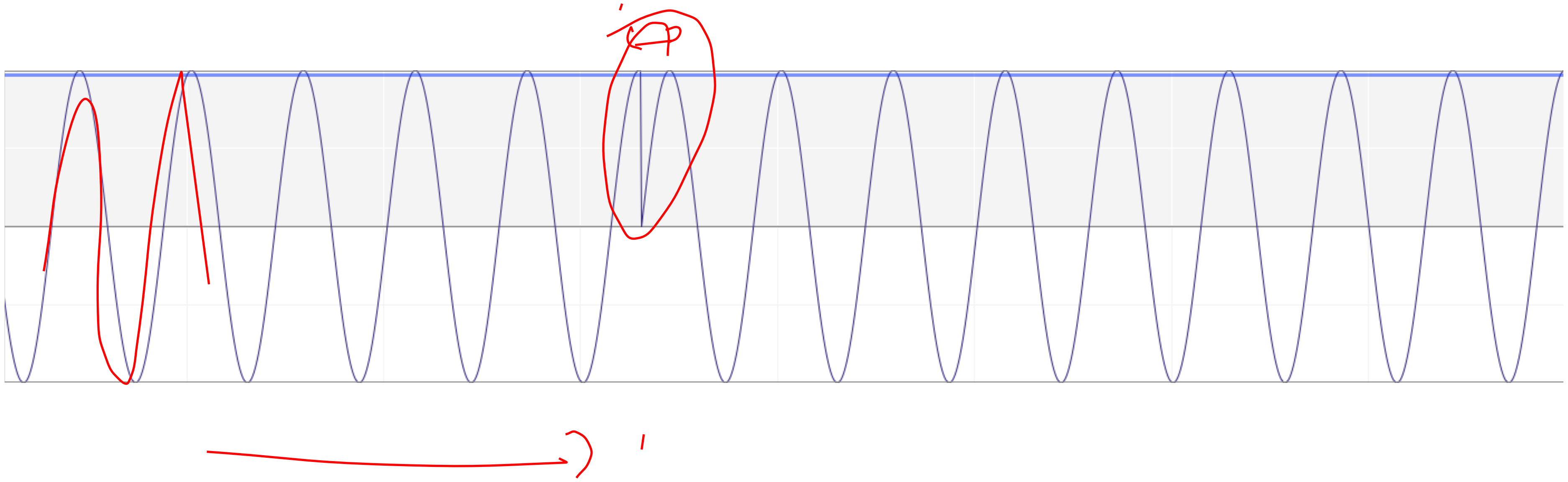


CoNe Freiburg

Hörbeispiel

- phasen-modulierte Sinuskurve

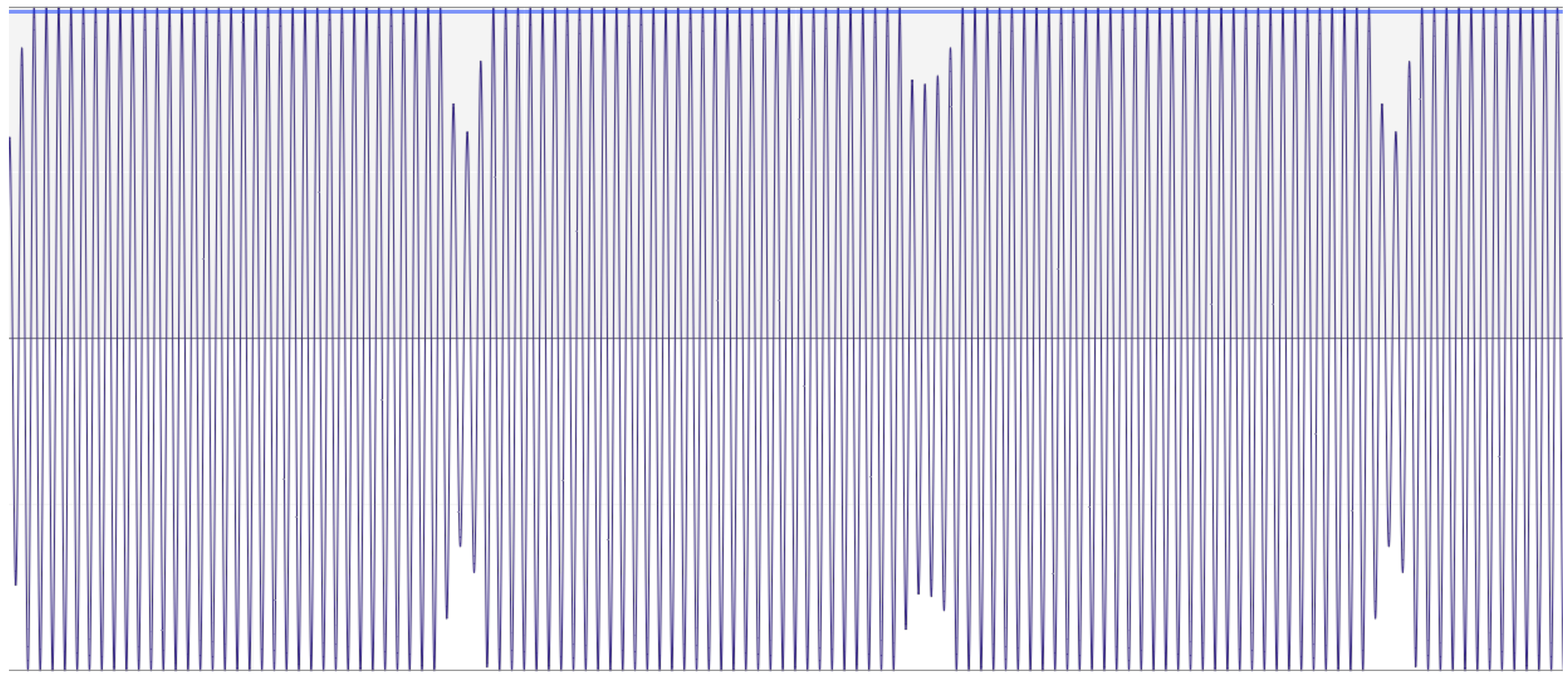




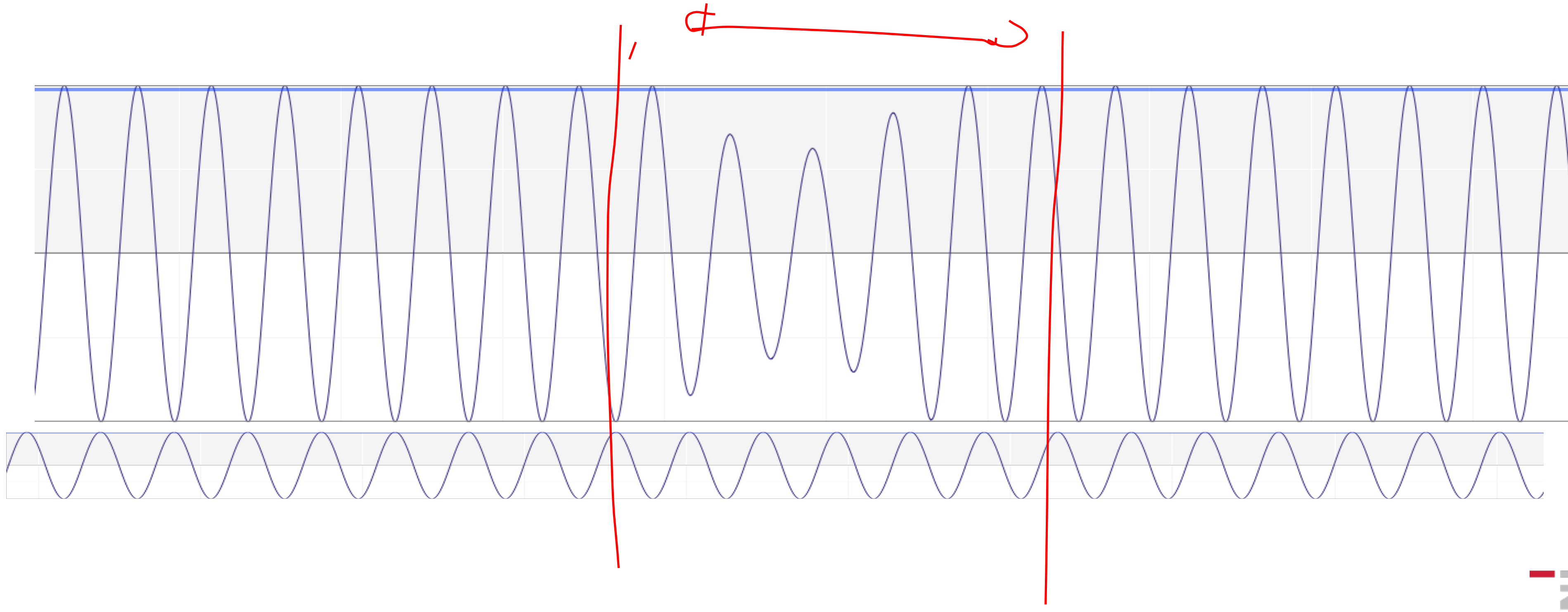
UNI FREIBURG

Hörbeispiel

- phasen-modulierte Sinuskurve
  - mit glatten Übergang



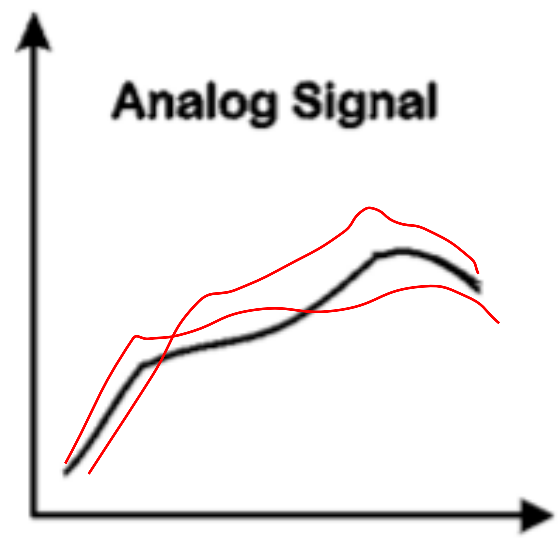
zum Vergleich

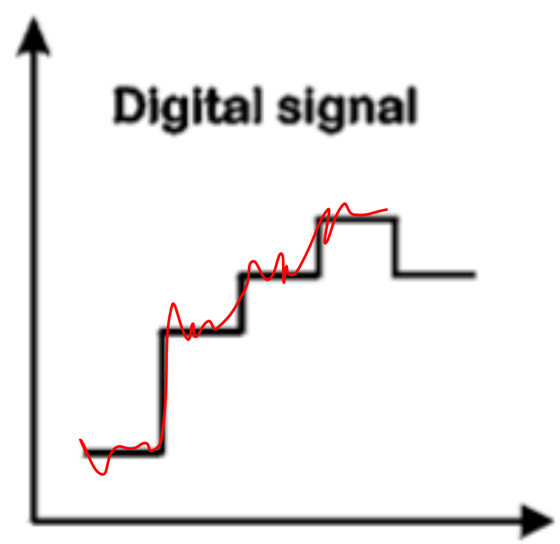


CoNe Freiburg

Digitale und analoge Signale im Vergleich

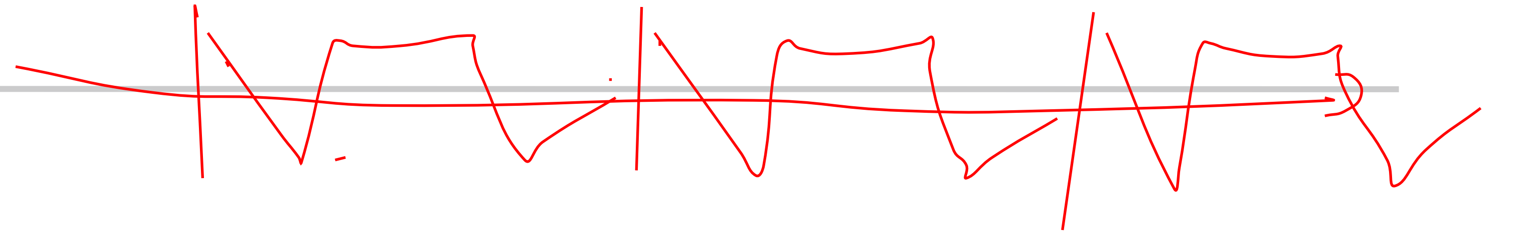
- Für einen Sender gibt es zwei Optionen
  - Digitale Übertragung
    - Endliche Menge von diskreten Signalen
    - Z.B. endliche Menge von Spannungsgrößen/Stromstärken
  - Analoge Übertragung
    - Unendliche (kontinuierliche) Menge von Signalen
    - Z.B. Signal entspricht Strom oder Spannung im Draht
- Vorteil der digitalen Signale:
  - Es gibt die Möglichkeit Empfangsungenauigkeiten zu reparieren und das ursprüngliche Signal zu rekonstruieren
  - Auftretende Fehler in der analogen Übertragung können sich weiter verstärken



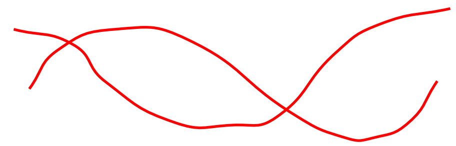


UNI FREIBURG

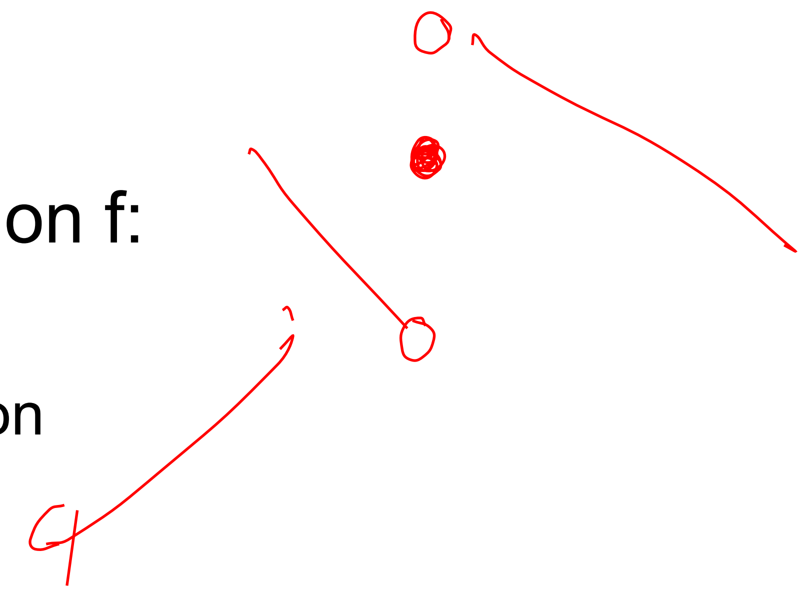
Fouriertransformation



- Fouriertransformation einer periodischen Funktion:
  - Zerlegung in verschiedene
  - Sinus/Cosinus-Funktionen



- Dirichletsche Bedingungen einer periodischen Funktion f:
  - $f(x) = f(x+2\pi)$
  - $f(x)$ is in $(-\pi,\pi)$ in endlich vielen Intervallen stetig und monoton
  - Falls f nicht stetig in x_0, dann ist $f(x_0)=(f(x_0-0)+f(x_0+0))/2$



- Satz von Dirichlet:
  - $f(x)$ genüge in $(-\pi,\pi)$ den Dirichletschen Bedingungen. Dann existieren Fourierkoeffizienten $a_0,a_1,a_2,\ldots,b_1,b_2,\ldots$ so dass gilt:

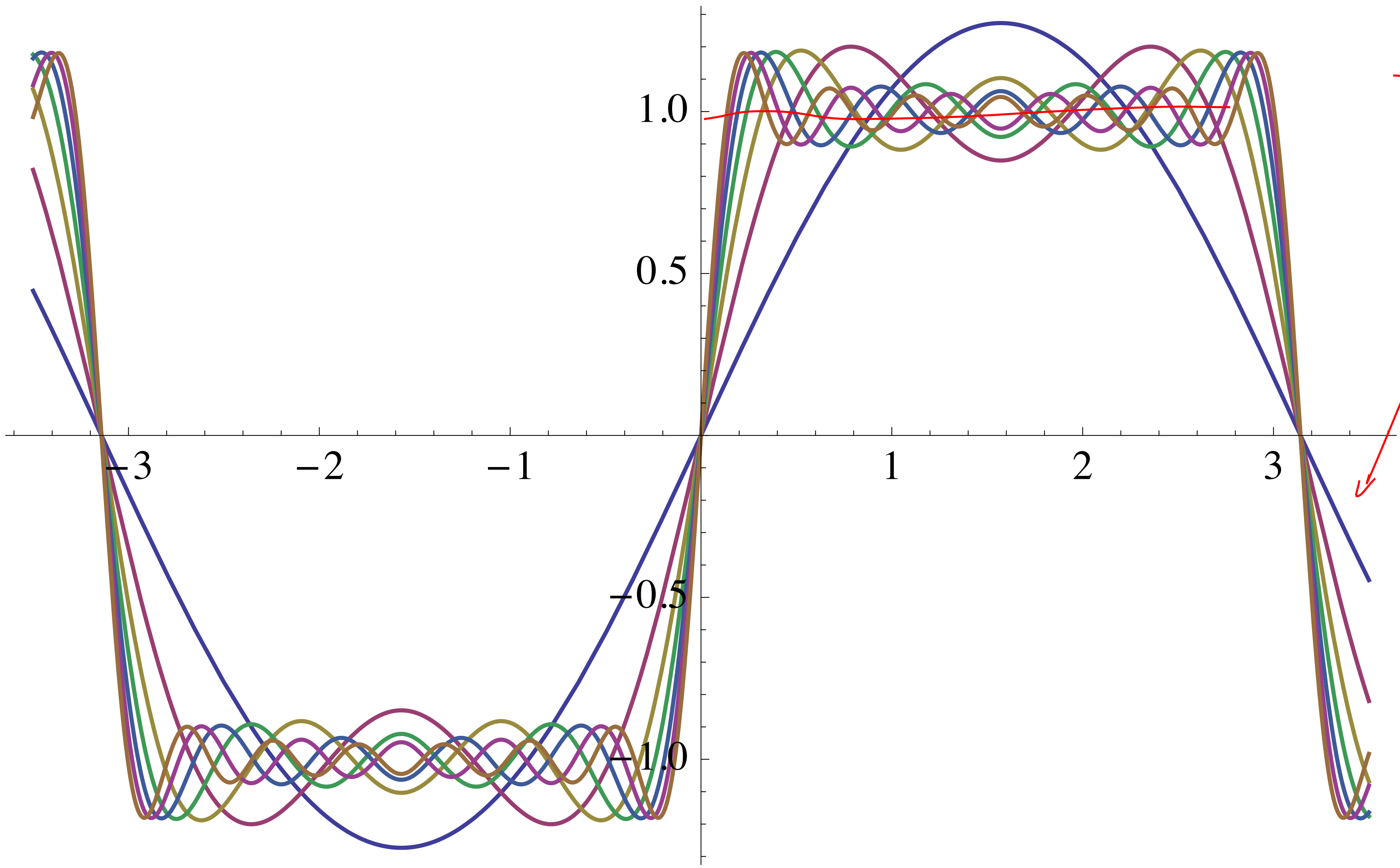
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = f(x)$$

Fouriertransformation

- Fouriertransformation einer periodischen Funktion:
  - Zerlegung in verschiedene
  - Sinus/Cosinus-Funktionen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = f(x)$$

+1
-1
sin x



CoNe Freiburg

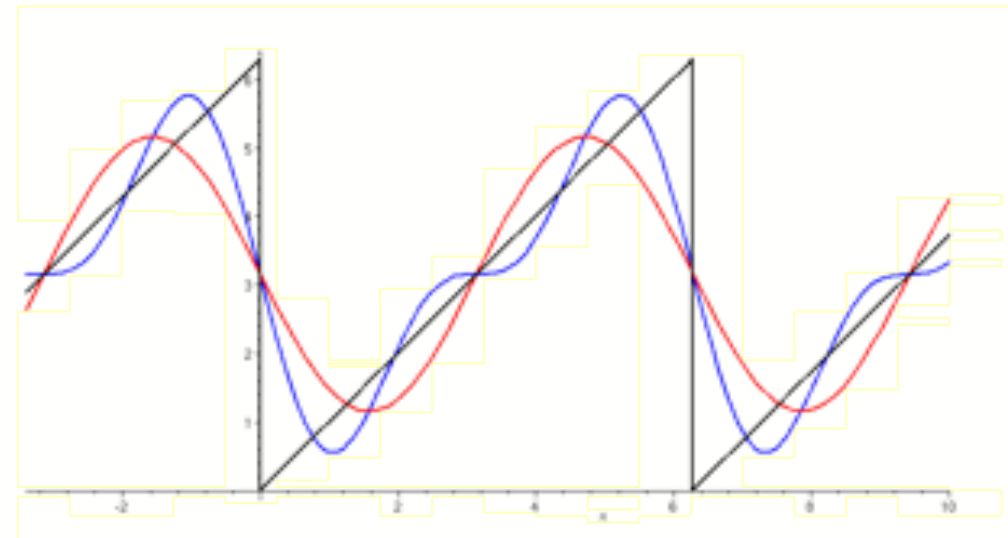
Berechnung der Fourierkoeffizienten

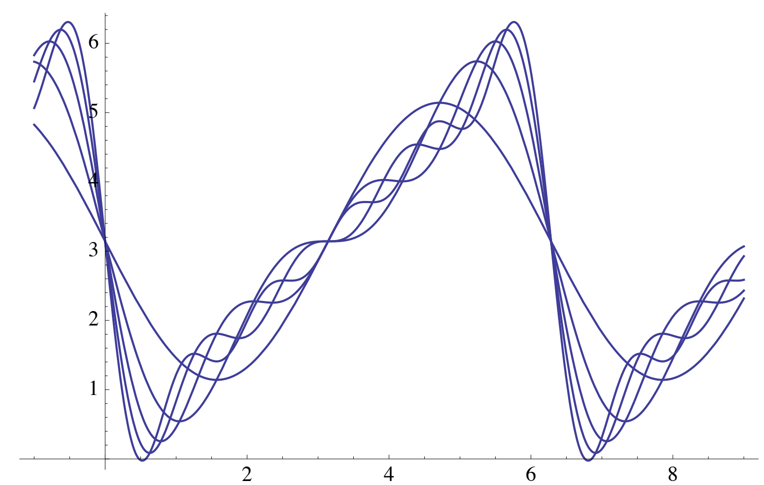
- Die Fourierkoeffizienten a_i, b_i können wie folgt berechnet werden:
  - Für k = 0,1,2,…

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \; dx$$

  - Für k = 1,2,3,…

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \; dx$$

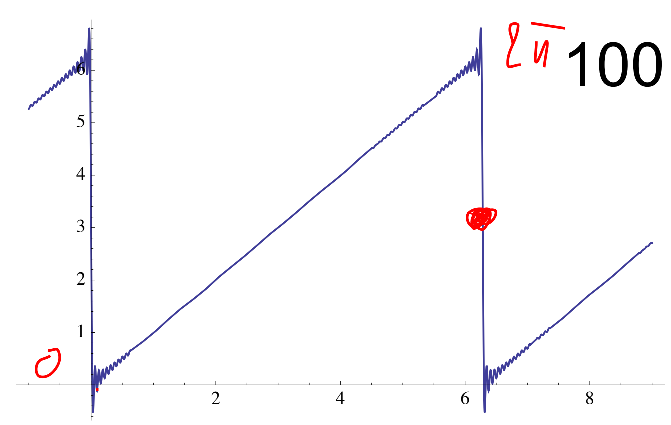




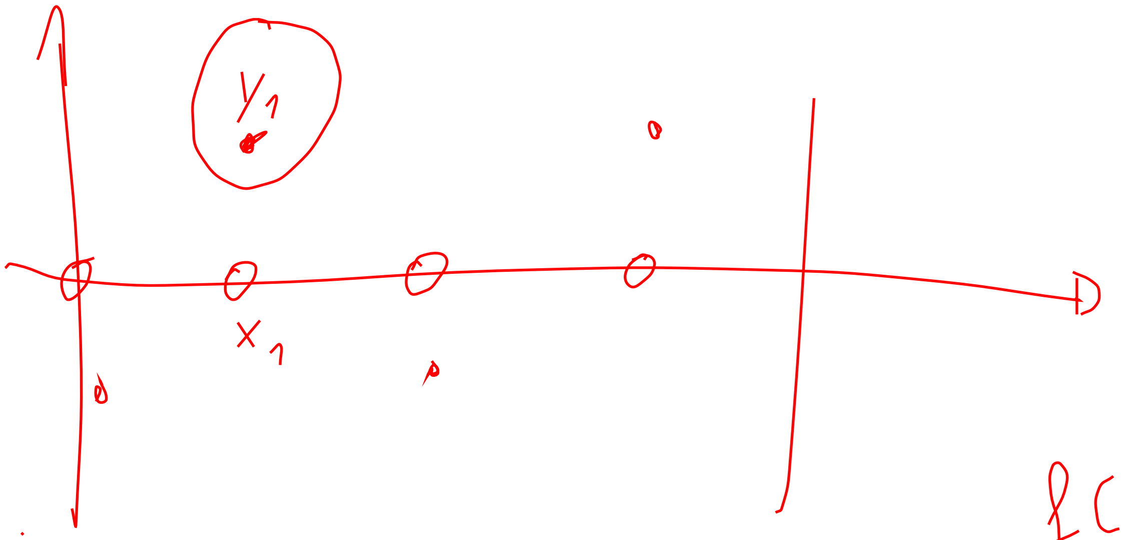
- Beispiel: Sägezahnkurve

$$f(x) = x \text{ , für } 0 < x < 2\pi$$

$$f(x) = \pi - 2 \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots \right)$$



100 Terme



$$f(x) = 3 \cdot \sin x + 4 \cos x$$

$$-\frac{1}{17} \sin 2x + \frac{5}{15} \cos 2x$$

$$a_1 \cdot \sin x_1 + b_1 \cdot \cos x_1 \dots$$

$$f(x_1) = y_1$$

$$f(x_2) = y_2$$

$$f(x_3) = y_3$$

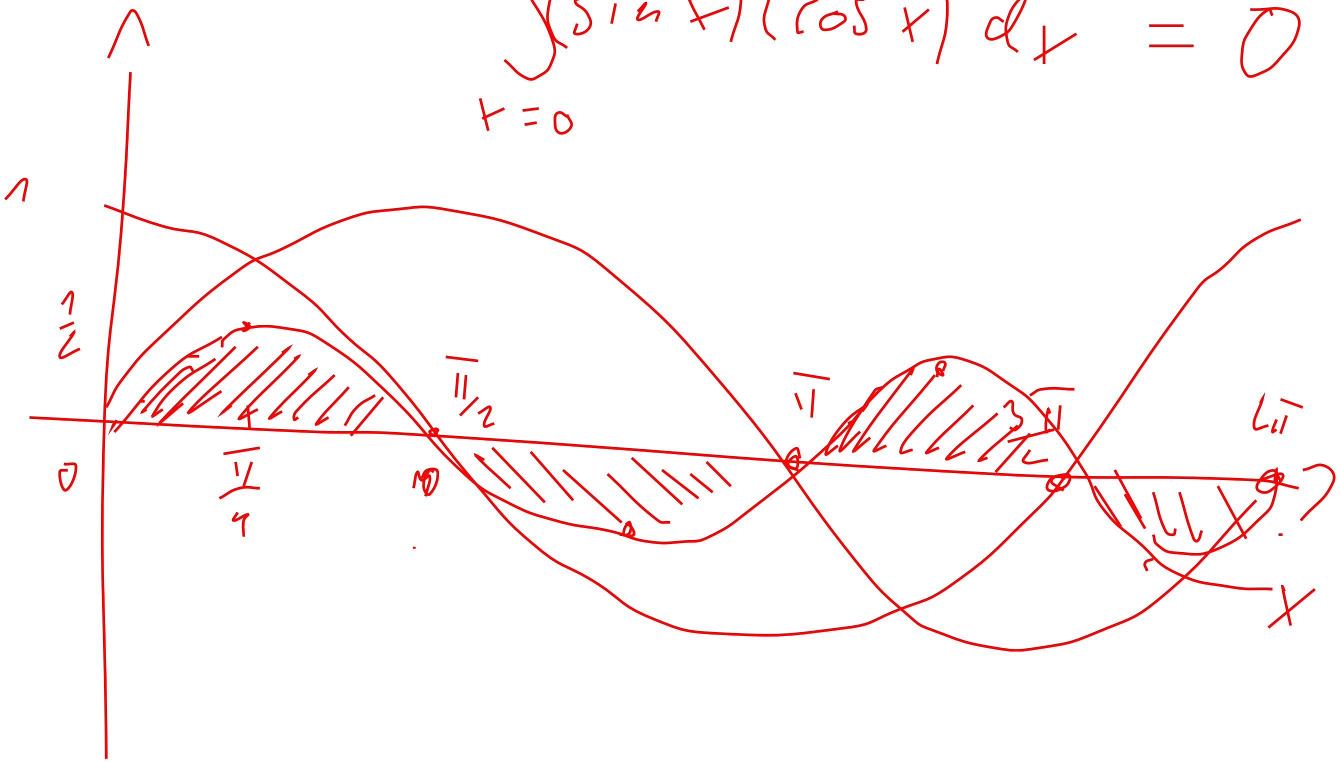
$$f(x_4) = y_4$$

PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

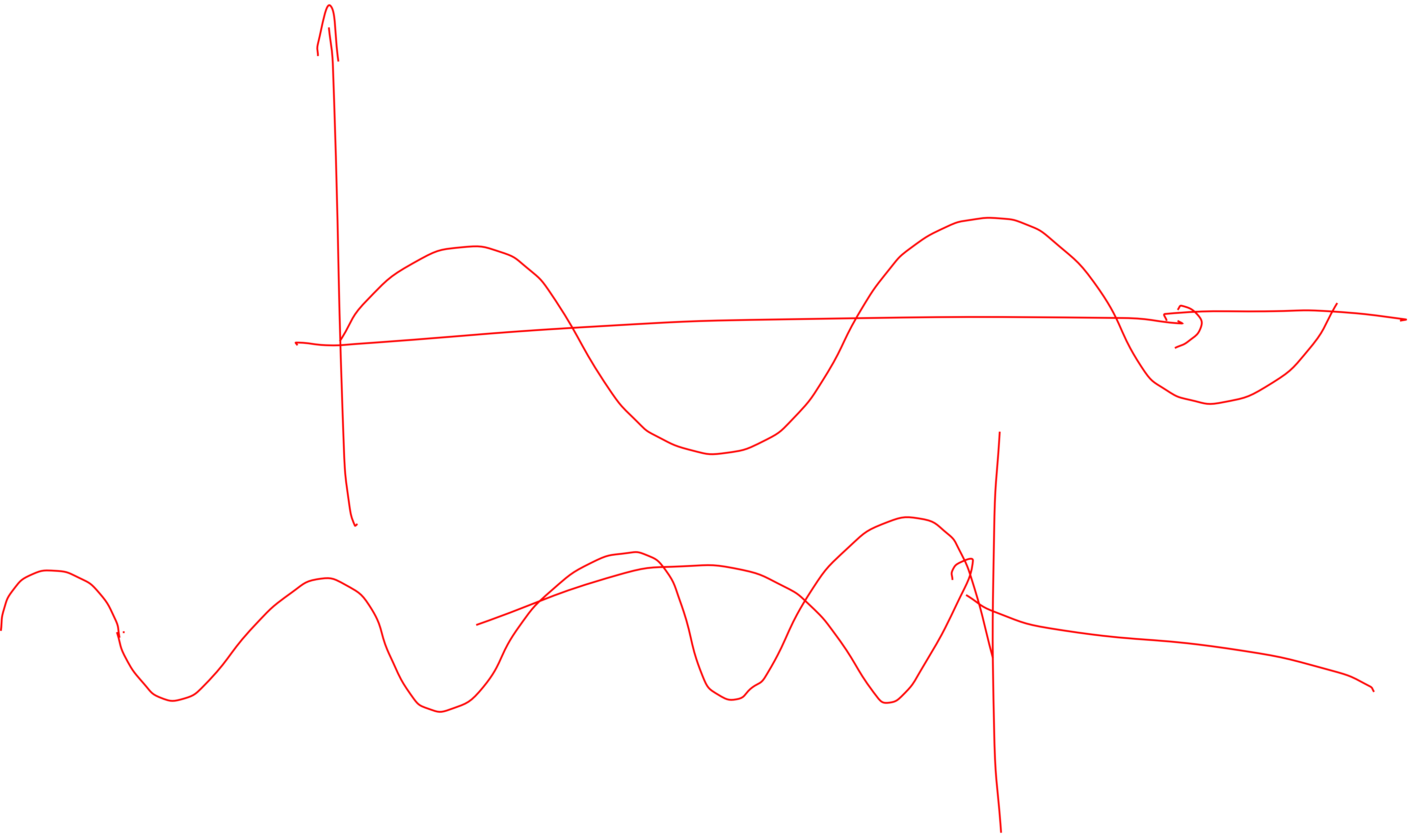
PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com

$$(\sin x)(\cos x) = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} (\sin x)(\cos x)\,dx = 0$$

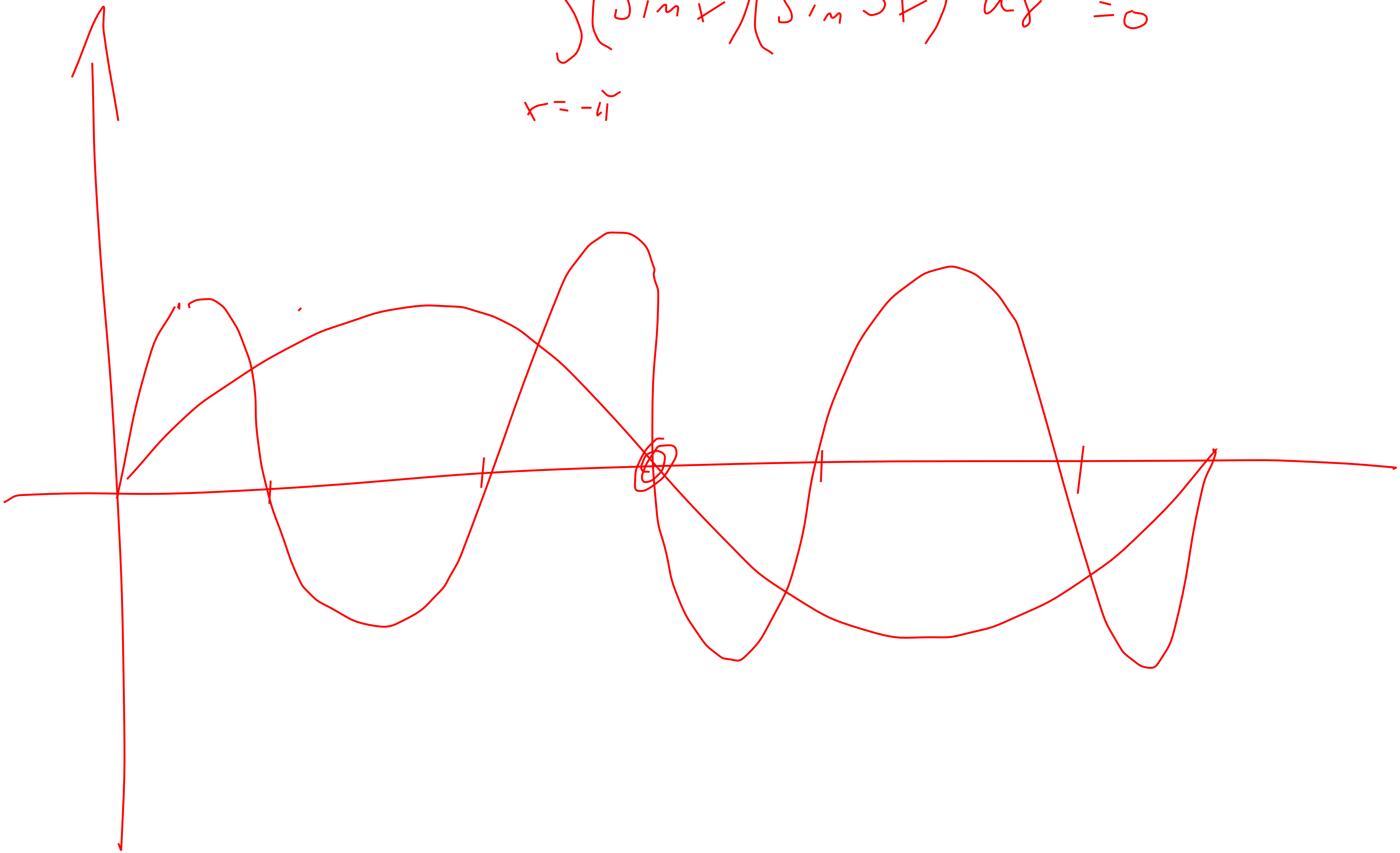


PDF-XChange Viewer
Click to buy NOW!
www.docu-track.com



2π

$$\int_{x=-\pi}^{\pi} (\sin x)(\sin 3x)\, dx = 0$$



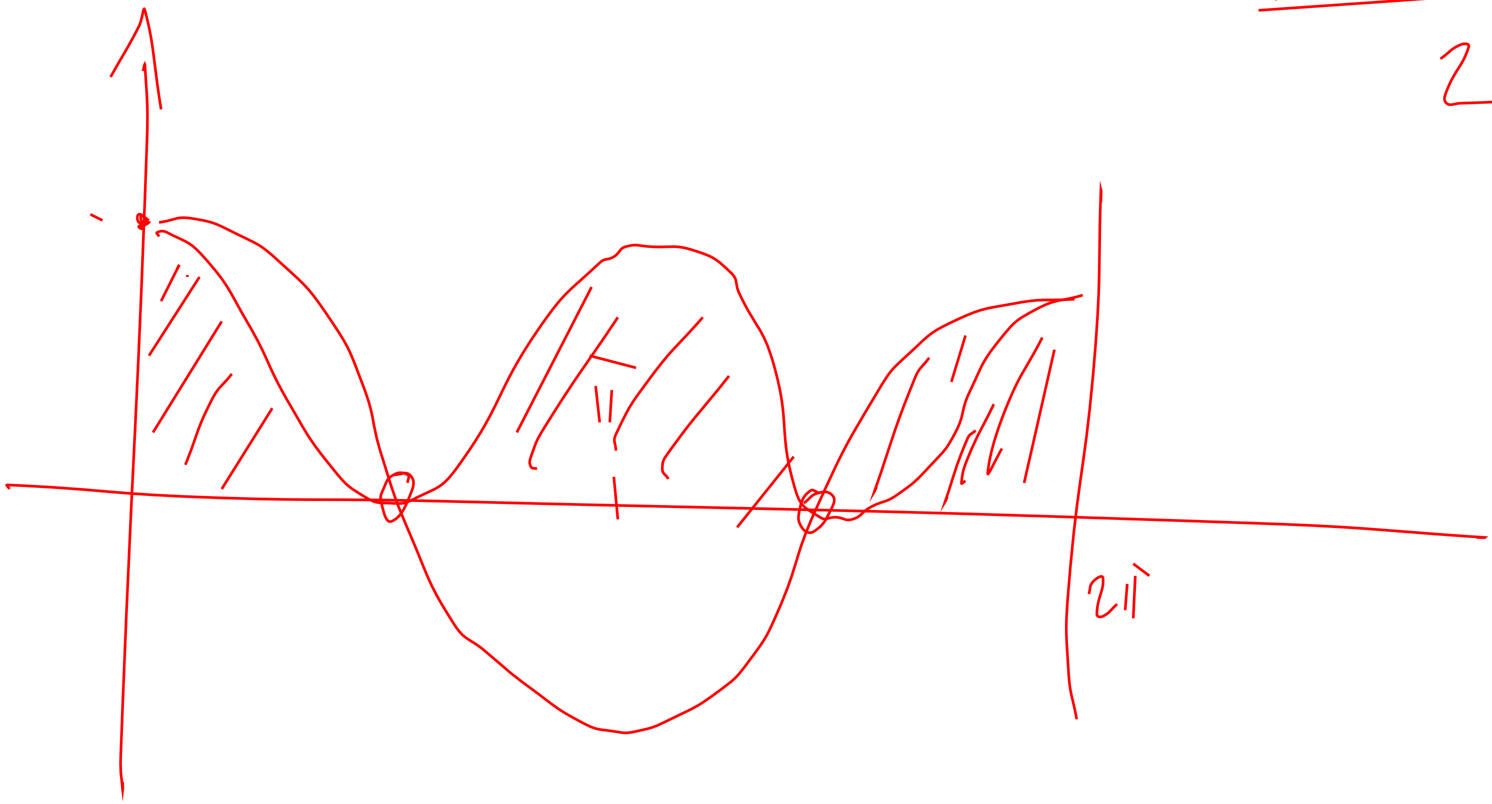
PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

$$\int^{2\pi} (\cos x)^2 \, dx = \pi$$

$$(\cos x)(\cos x) = (\cos x)^2$$

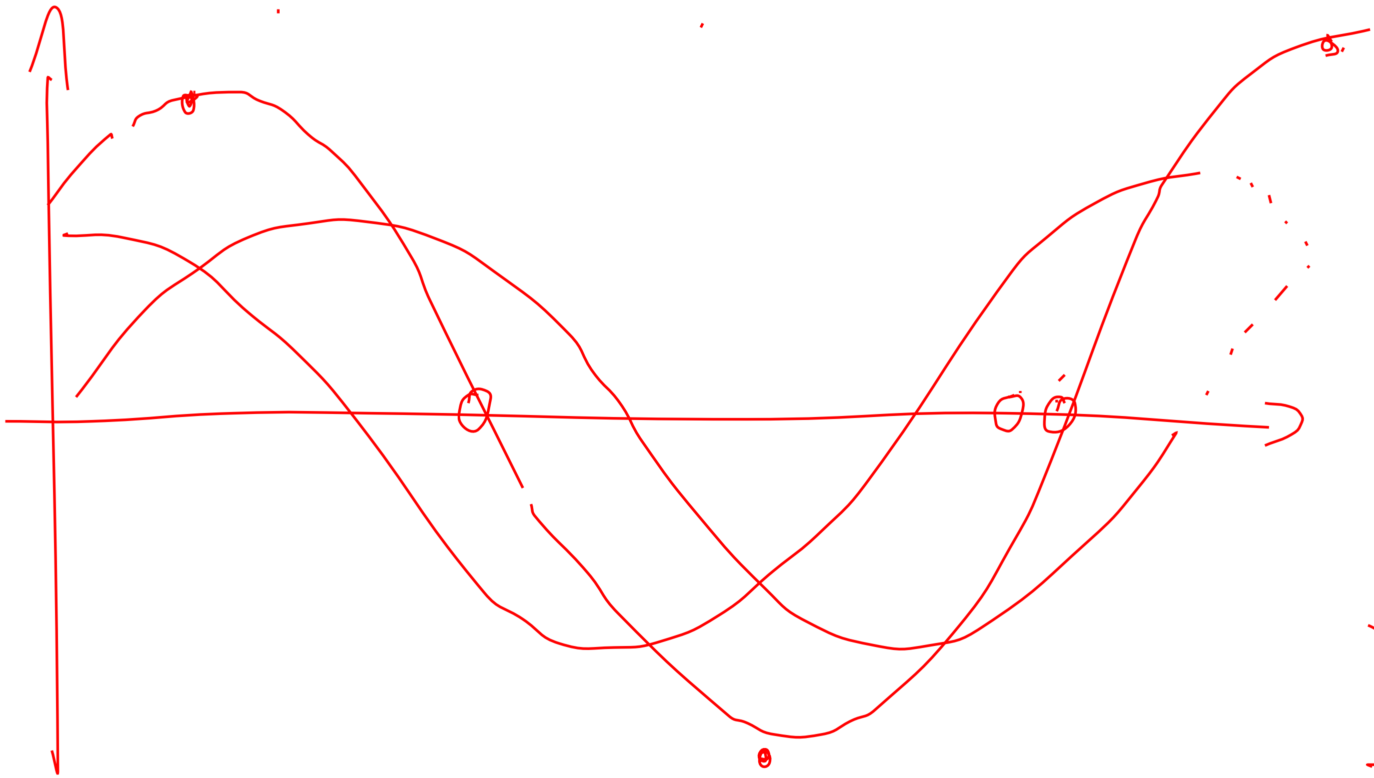
$$= \frac{(\cos 2x) + 1}{2}$$

$x = 0$



PDF-XChange Viewer Click to buy NOW! www.docu-track.com

$\sin x + \cos x \rightarrow 2$



$\sin x + (-\sin x)$

$= 0$

CoNe Freiburg

Fourier-Analyse für allgemeine Periode

- Der Satz von Fourier für Periode T=1/f:
  - Die Koeffizienten c, a_n, b_n ergeben sich dann wie folgt

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f t) + b_k \sin(2\pi k f t)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cos(2\pi n f t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin(2\pi n f t) dt$$

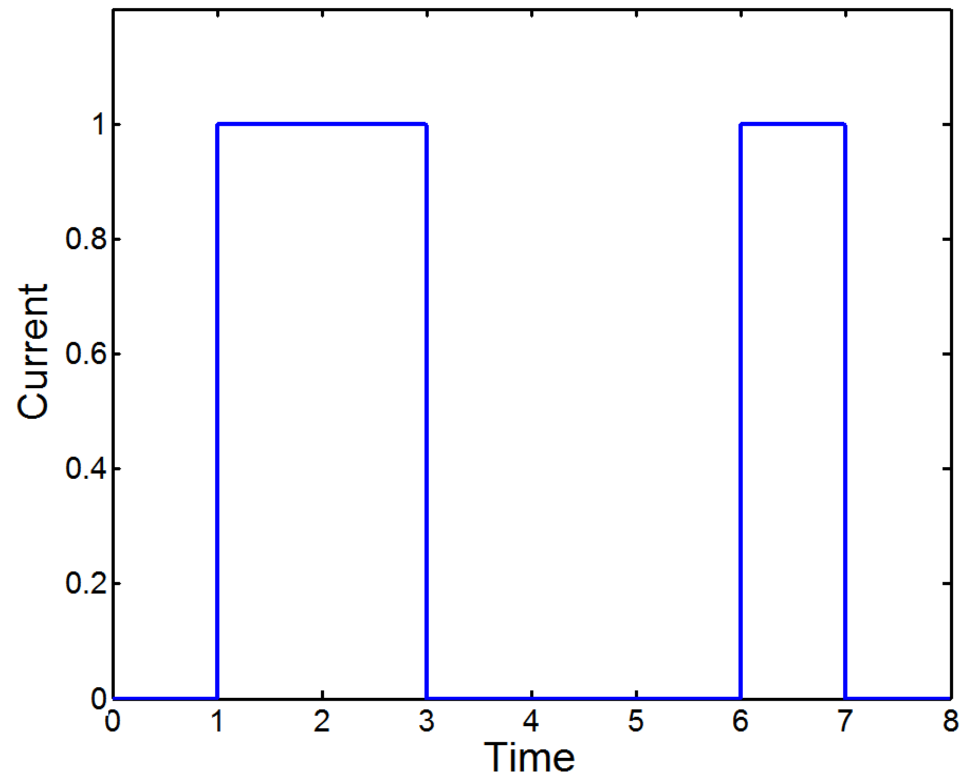
- Die Quadratsumme der k-ten Terme ist proportional zu der Energie, die in dieser Frequenz verbraucht wird:

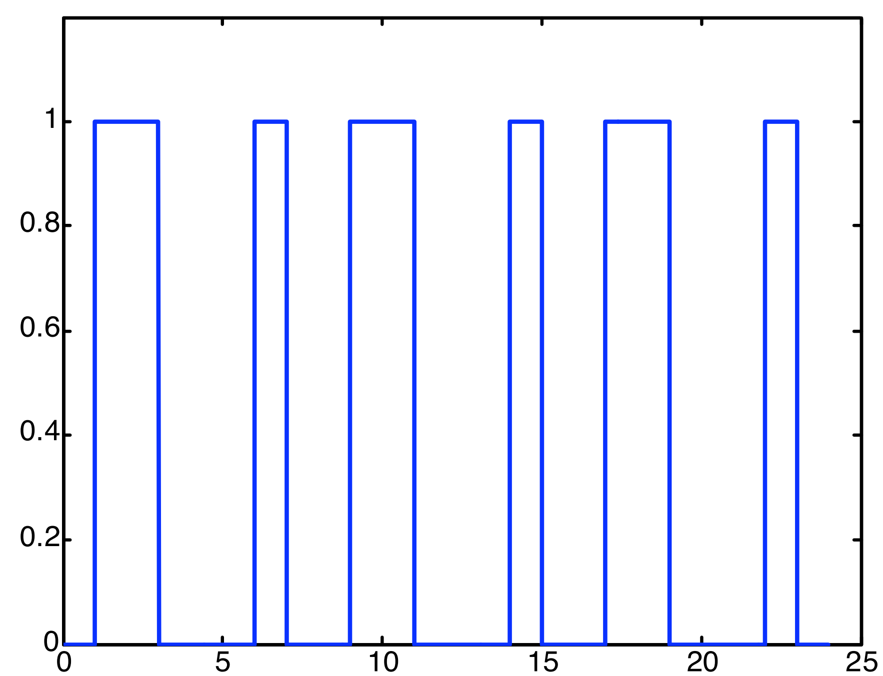
$$(a_k)^2 + (b_k)^2$$

UNI FREIBURG

Anwendung der Fourier-Analyse

- Problem:
  - Signal ist nicht periodisch
- Lösung:
  - Wiederholung des Signals mit Periode 8

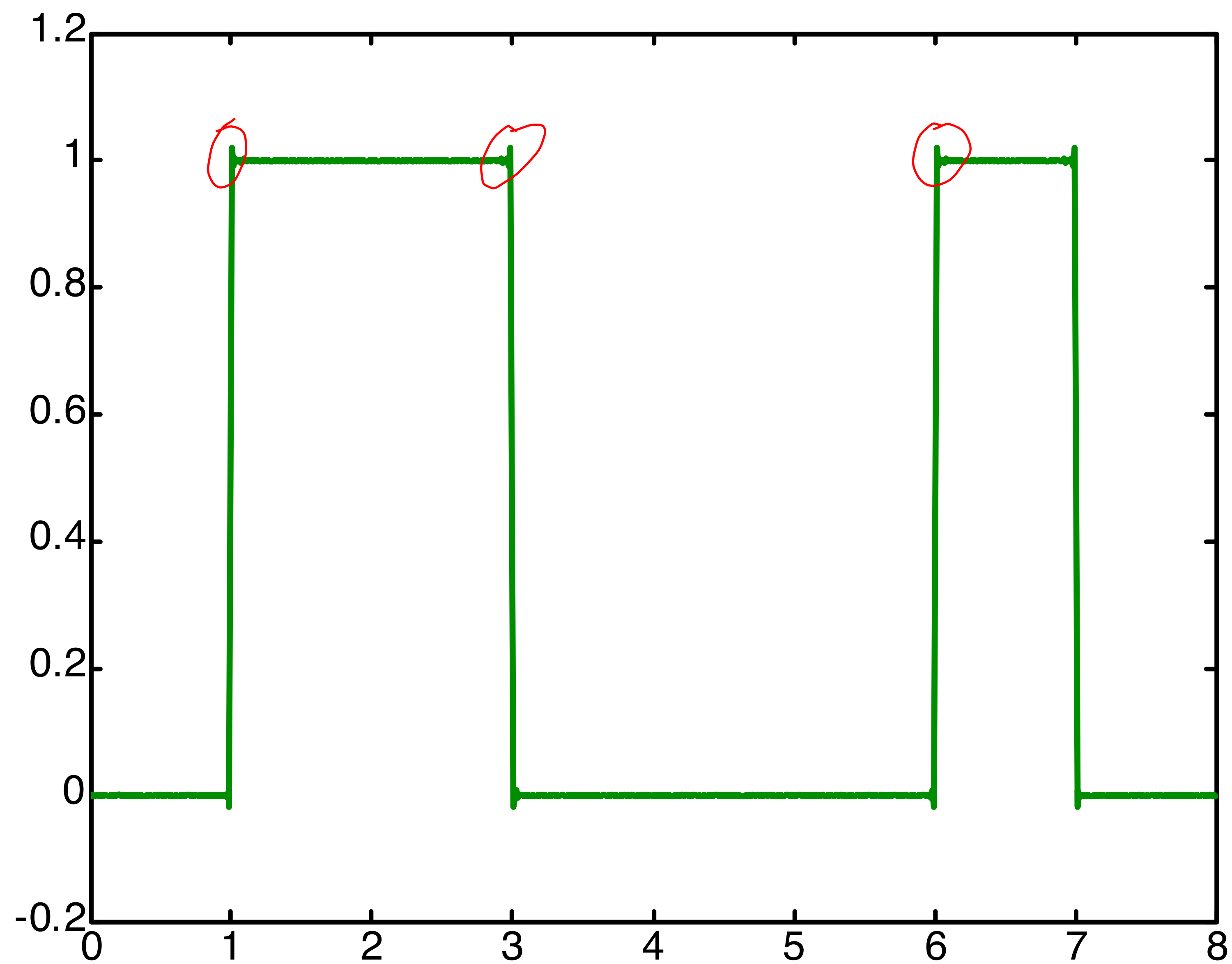




(aus Vorlesung von Holger Karl)

Anwendung der Fourier-Analyse

- Fourier-Analyse mit 512 Termen:

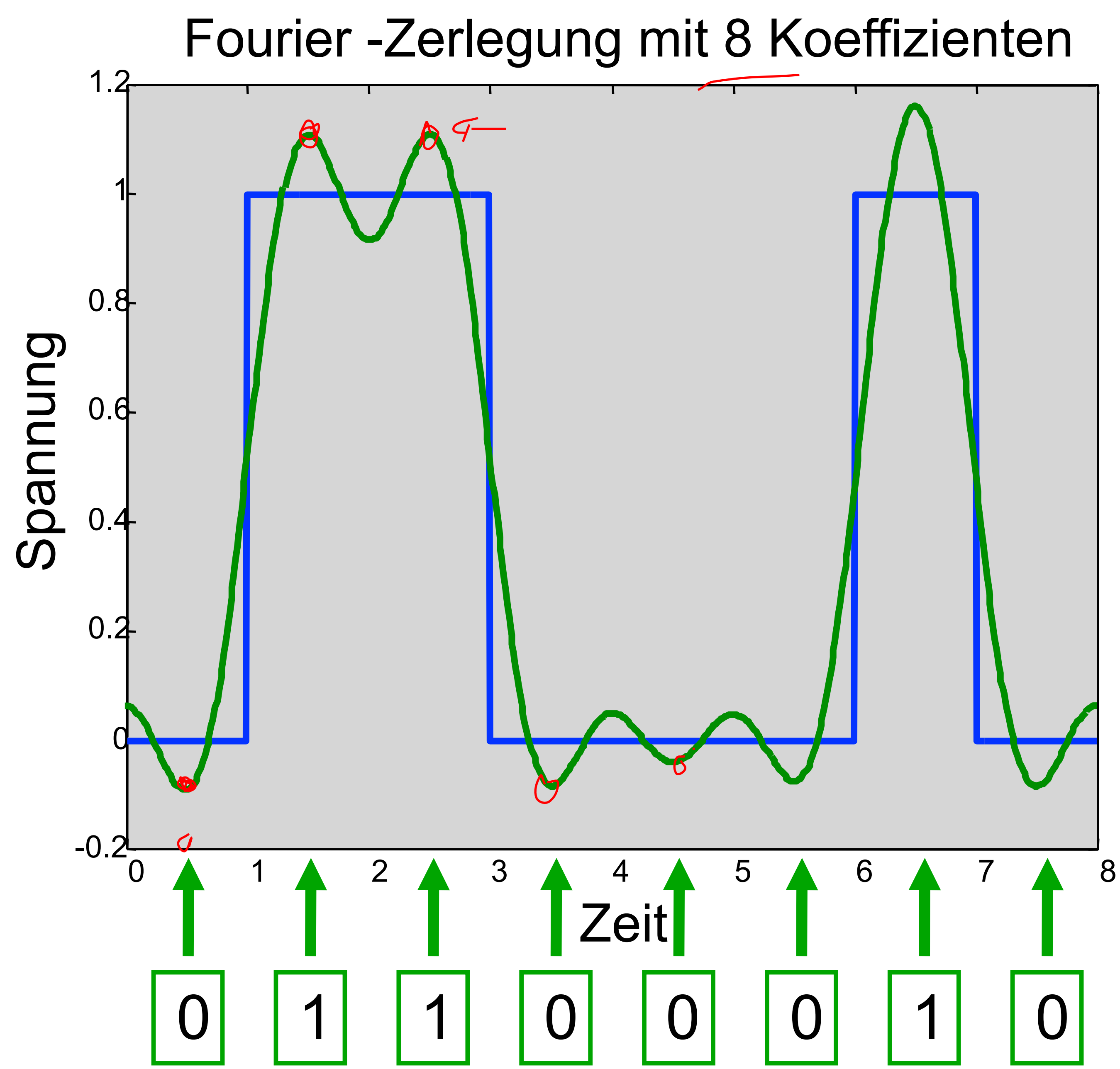


(aus Vorlesung von Holger Karl)

Wie oft muss man messen?

4 Frequen

- Wie viele Messwerte sind notwendig, um eine Fouriertransformation bis zur k.-ten Komponenten genau zu bestimmen?
- Nyquist-Shannon-Abtasttheorem
  - Um ein kontinuierliches bandbegrenztes Signal mit einer Maximalfrequenz f_{max} zu rekonstruieren, braucht man mindestens eine Abtastfrequenz von $2\ f_{max}$.



Nyquists Theorem

- Definition
  - Die Bandweite H ist die Maximalfrequenz in der Fourier-Zerlegung
- Angenommen:
  - Die maximale Frequenz des empfangenen Signals ist f=H in der Fouriertransformation
    - (Komplette Absorption [unendliche Dämpfung] aller höheren Frequenzen)
  - Die Anzahl der verschiedenen verwendeten Symbole ist V
  - Es treten keinerlei anderen Störungen, Verzerrungen oder Dämpfungen auf
- Theorem von Nyquist
  - Die maximal mögliche Symbolrate ist höchstens 2 H baud.
  - Die maximal mögliche Datenrate ist höchstens 2 H $\log_2$ V bit/s.

Helfen mehr Symbole?

- Nyquists Theorem besagt, dass rein theoretisch die Datenrate mit der Anzahl der verwendeten Symbole vergrößert werden könnten

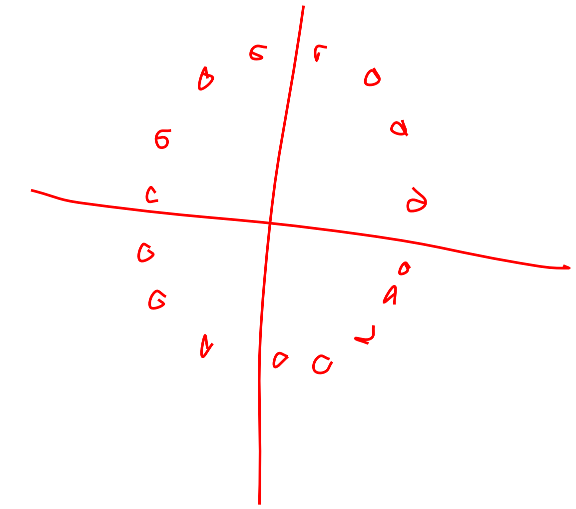
- Diskussion:
  - Nyquists Theorem liefert nur eine theoretische obere Schranke und kein Verfahren zur Übertragung
  - In der Praxis gibt es Schranken in der Messgenauigkeit
  - Nyquists Theorem berücksichtigt nicht das Problem des Rauschens

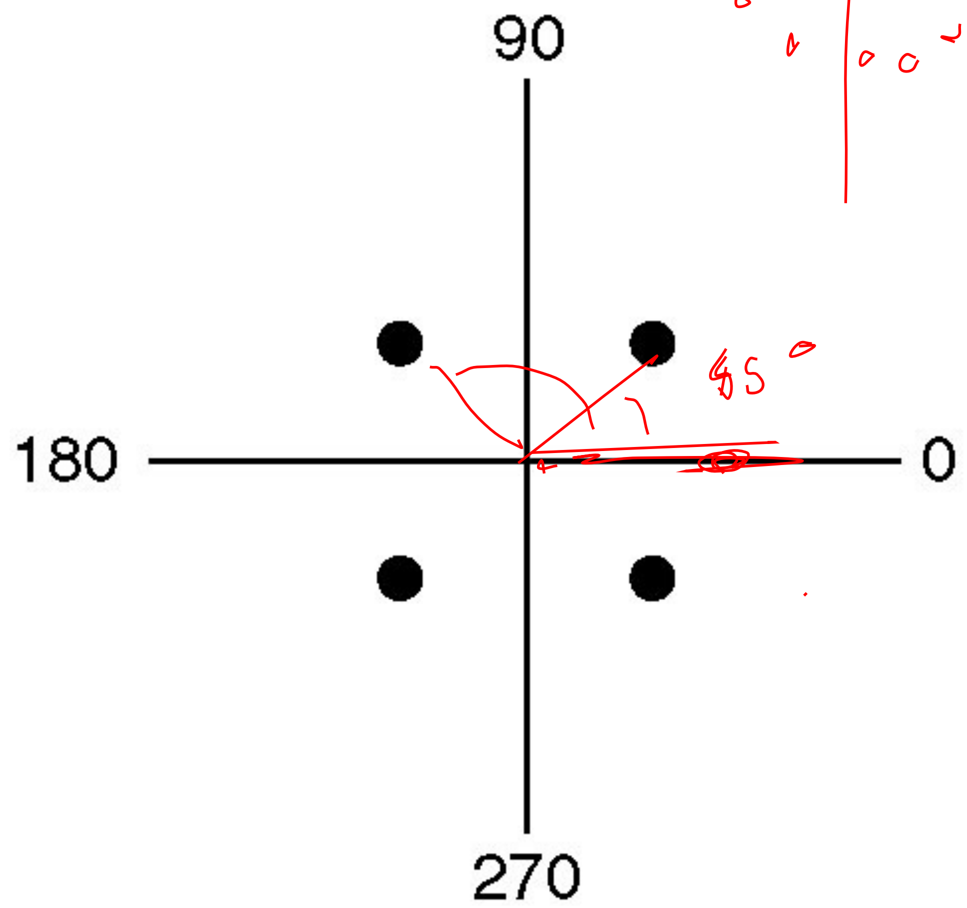
CoNe Freiburg

PSK mit verschiedenen Symbolen

Phase Shift Keying

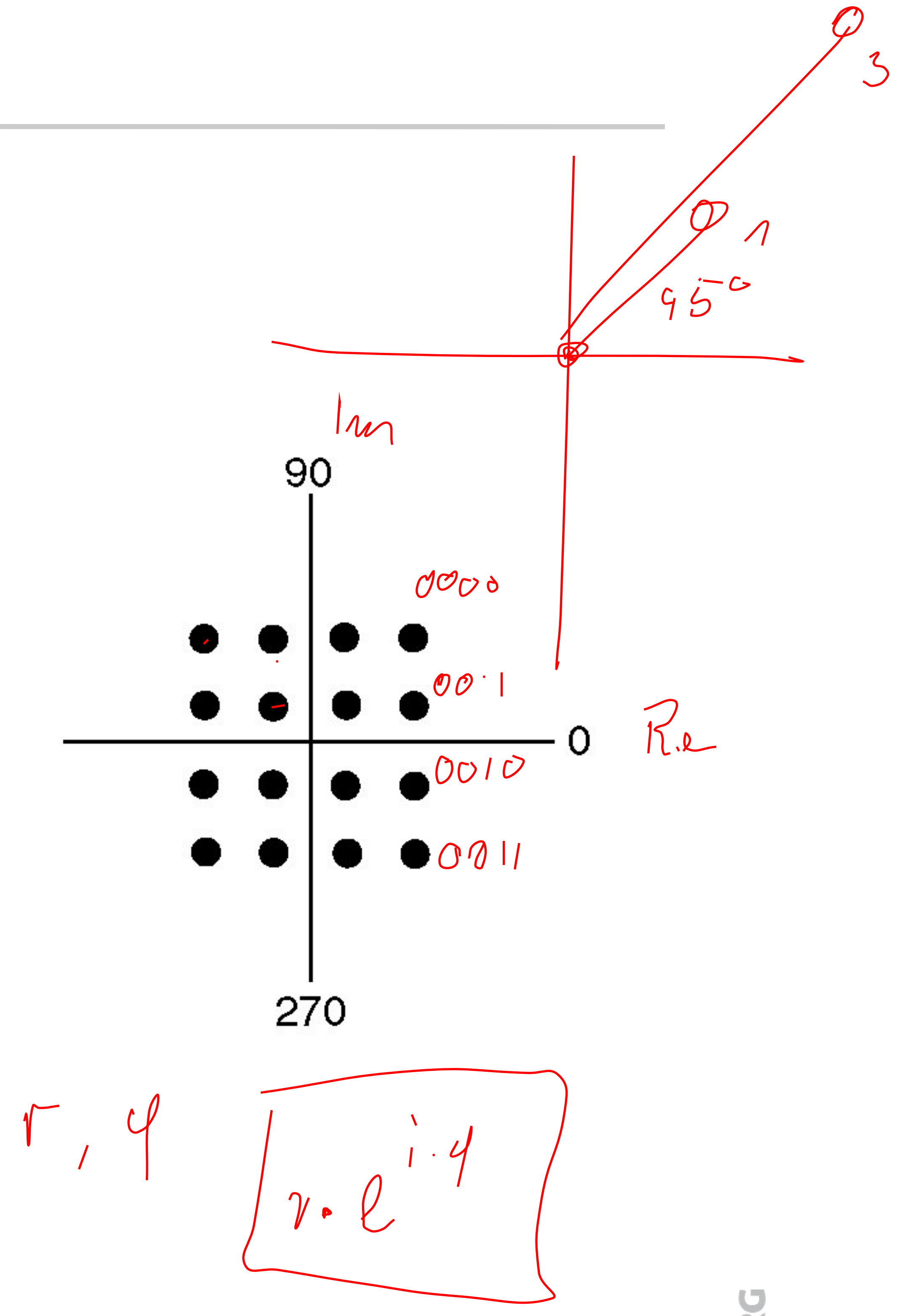
- Phasenverschiebungen können vom Empfänger sehr gut erkannt werden
- Kodierung verschiedener Symbole sehr einfach
  - Man verwendet Phasenverschiebung z.B. $\pi/4$, $3/4\pi$, $5/4\pi$, $7/4\pi$
    - selten: Phasenverschiebung 0 (wegen Synchronisation)
  - Bei vier Symbolen ist die Datenrate doppelt so groß wie die Symbolrate
- Diese Methode heißt Quadrature Phase Shift Keying (QPSK)





Amplituden- und Phasenmodulation

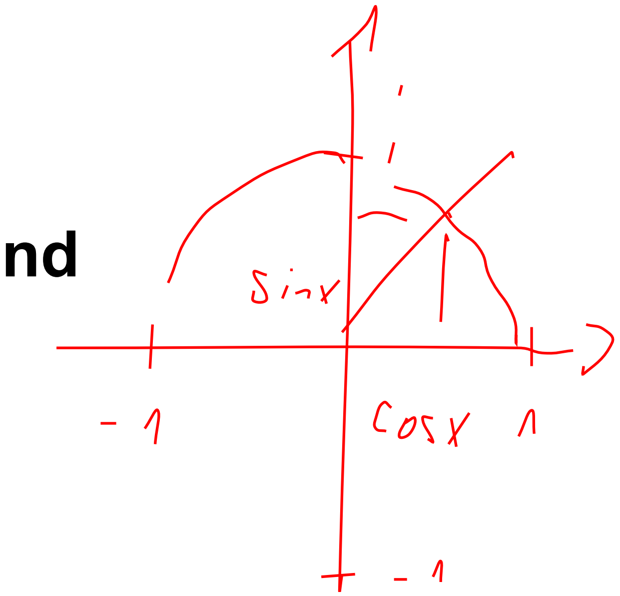
- Amplituden- und Phasenmodulation können erfolgreich kombiniert werden
- Beispiel: 16-QAM (Quadrature Amplitude Modulation)
  - Man verwendet 16 verschiedene Kombinationen von Phasen und Amplituden für jedes Symbol
  - Jedes Symbol kodiert vier Bits ($2^4 = 16$)
  - Die Datenrate ist also viermal so groß wie die Symbolrate



Wiederholung: Komplexe Zahlen

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

- **i: imaginäre Zahl mit**
  - $i^2 = -1$
- **Komplexe Zahl ist lineare Kombinaton aus Realteil a und Imaginärteil b**
  - $z = a + bi$
- **Rechenregeln:**
  - $(a+bi)+(c+di) = (a+c) + (b+d)\,i$
  - $(a+bi)\,(c+di) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$
  - $1/\,(a+b\,i) = (a-bi)/(a^2+b^2)$
- **Komplex konjugierte Zahl**
  - $(a+bi)^* = (a - bi)$
  - $(a+bi)^*\,(a+bi) = a^2+b^2$



$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1}{4!}\cdot x^4 \ldots$$

$$e^{ix} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}\cdot x^4 \ldots \Big| = \cos x$$

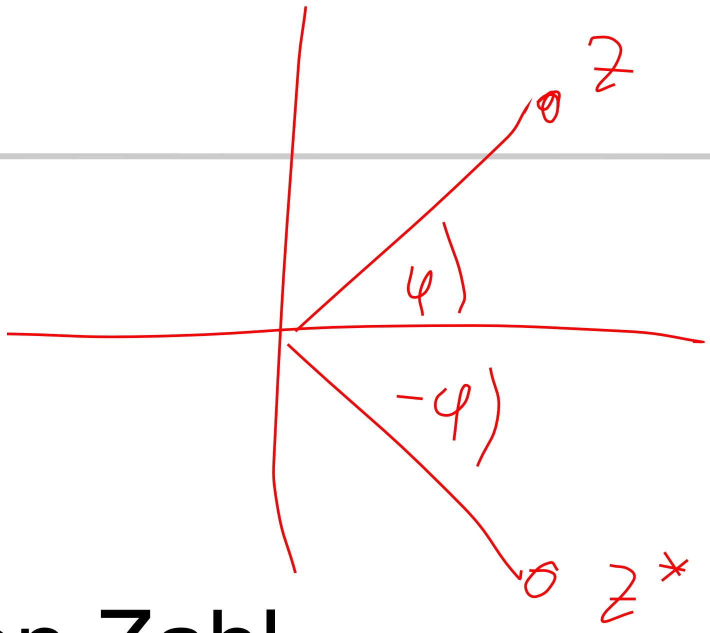
$$+ix - i\frac{1}{6}\cdot x^3 \ldots \Big| = i\cdot\sin x$$

$$r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \cdot r_1 \cdot r_2$$

$$Re(e^{ix}) = \cos x$$

Potenzierung komplexer Zahlen

$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

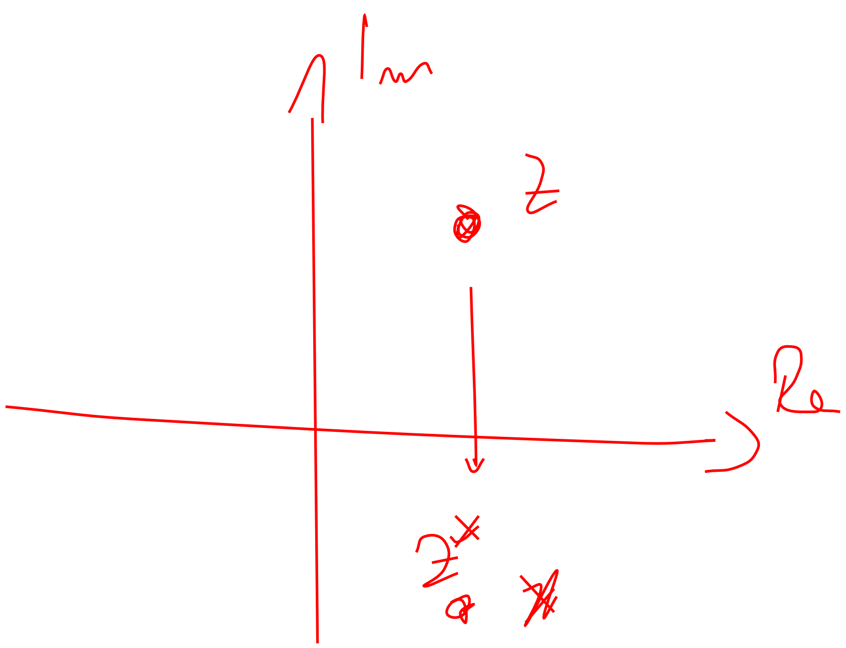


- Wichtige Gleichung:
  - $e^{i\pi} = -1$
  - $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$
- Exponentation einer komplexen Zahl
  - $e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a (\cos b + i \sin b)$
  - Realteil von $e^{i\varphi}$: $\mathrm{Re}(e^{i\varphi}) = \cos\varphi$
  - Imaginärteil von $e^{i\varphi}$: $\mathrm{Im}(e^{i\varphi}) = \sin\varphi$

$r \cdot e^{i\varphi} \cdot r \cdot e^{-i\varphi} = r^2 e^{i(\varphi-\varphi)}$

$= r^2$

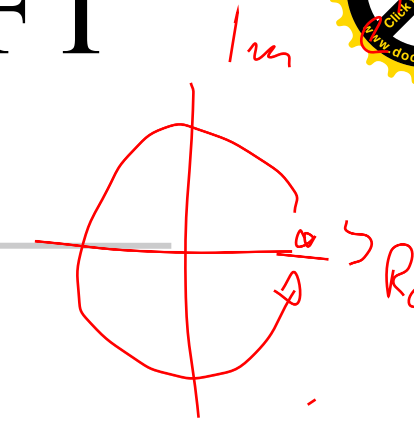
$(r \cdot e^{i\varphi})^* = r \cdot e^{-i\varphi}$



$e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i} = e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2} i}$

CoNe Freiburg

Äquivalente Darstellungen der FFT



- Realzahlendarstellung
  - Sinus und Cosinus-Funktionen der einzelnen Frequenzen

$$g(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k sin \frac{2\pi kt}{T}$$

- Berechnung der Inversen durch Integralprodukt mit Cosinus/Sinus

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cos(2\pi n f t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin(2\pi n f t) dt$$

- Komplexe Darstellung
  - Realteil der Exponentialfunktion der verschiedenen Frequenzen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} z_k e^{i2\pi kt/T}$$

- Berechnung der Inversen durch Integral des Produkts mit der komplex konjugierten Trägerwelle

$$z_k = \frac{1}{T} \int_0^T \left(e^{i2\pi kt/T}\right)^* f(x) dt$$

$$e^{-i2\pi \frac{4t}{T}} \cdot f(t)$$

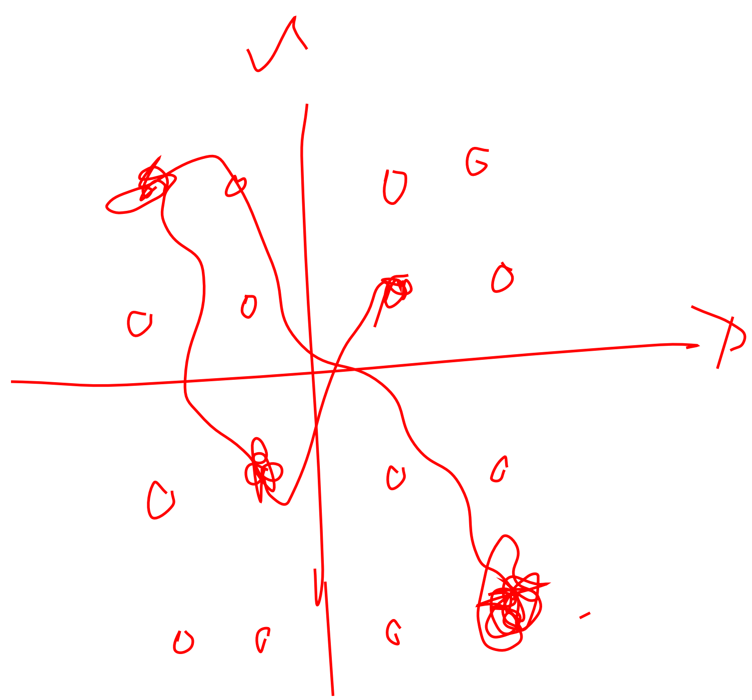
$$z \cdot z^* = \|z\|^2$$

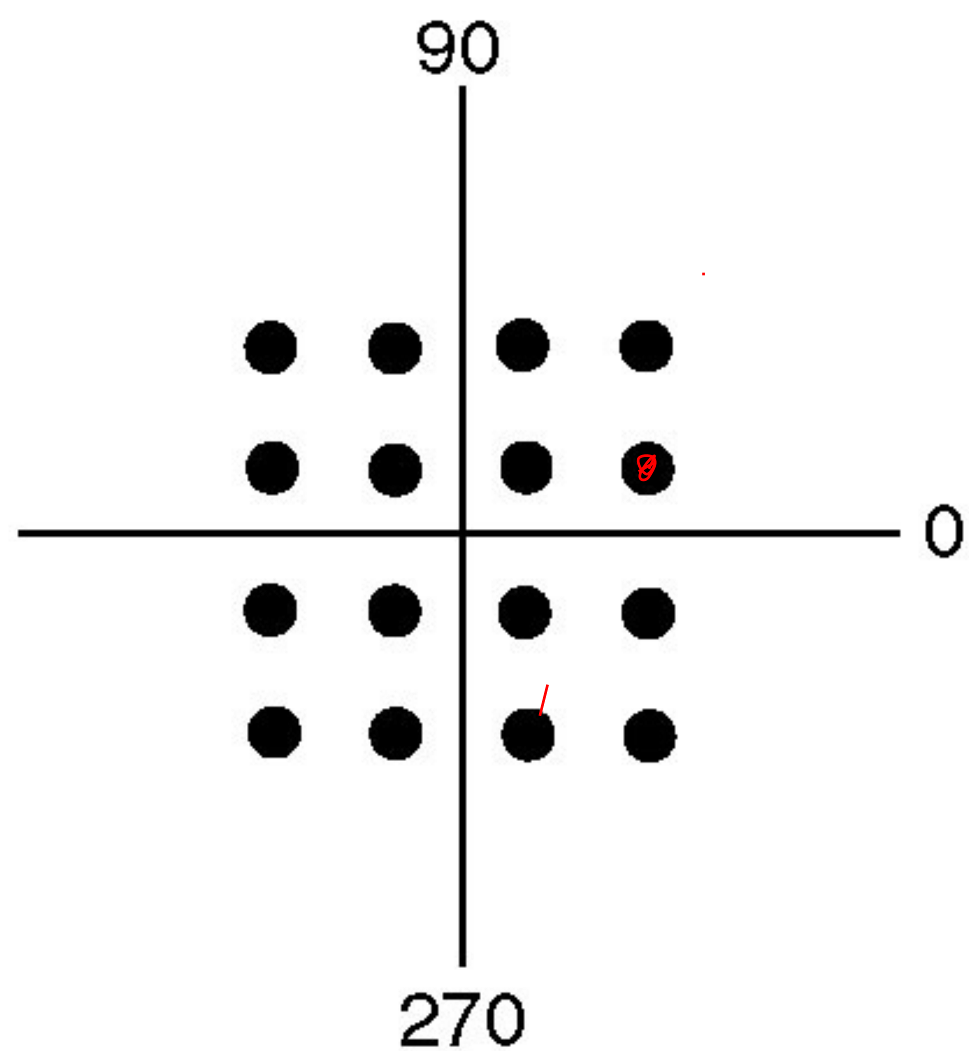
UNI FREIBURG

Vorteil der komplexen Darstellung

- Jedes Symbol des QAM kann direkt als komplexe Zahl dargestellt werden

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} z_k \; e^{i2\pi kt/T}$$





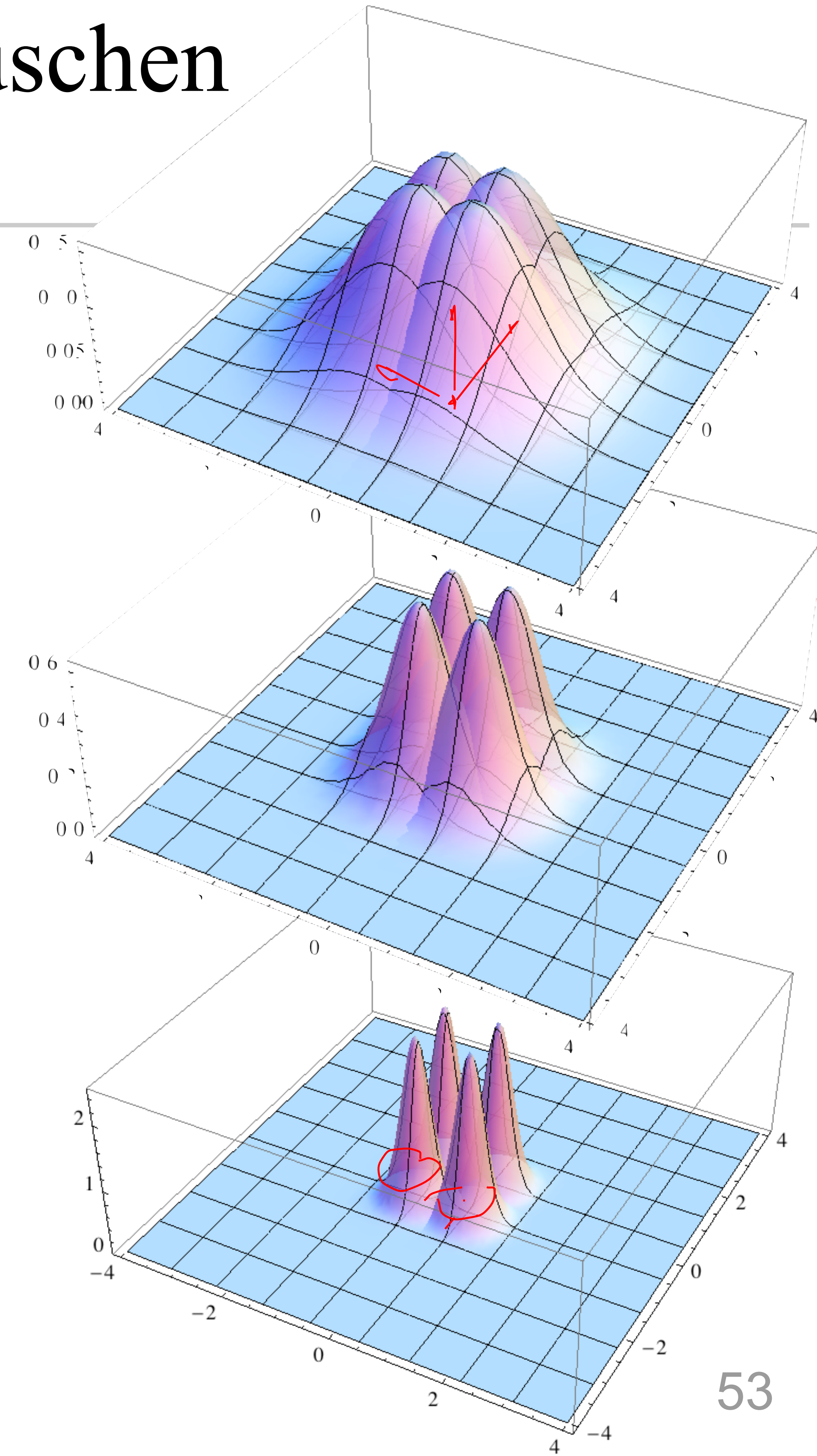
CoNe Freiburg

QAM und Rauschen

- Rauschen wird mit der Normalverteilung beschrieben

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

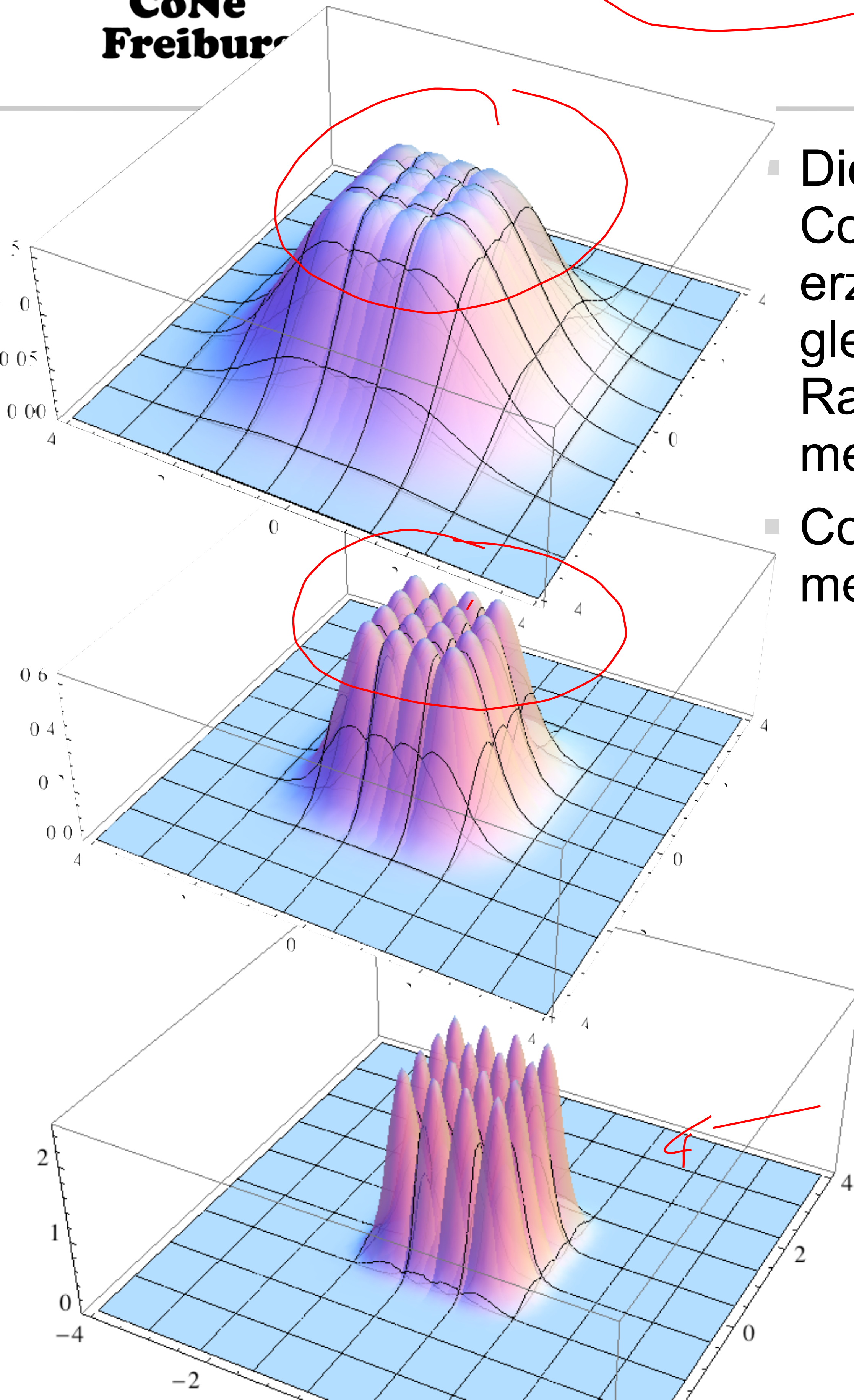
- Bitfehler entstehen, wenn das dekodierte Signal zu stark abweicht
- Das Signal/Rausch-verhältnis korreliert mit der Standardabweichung σ



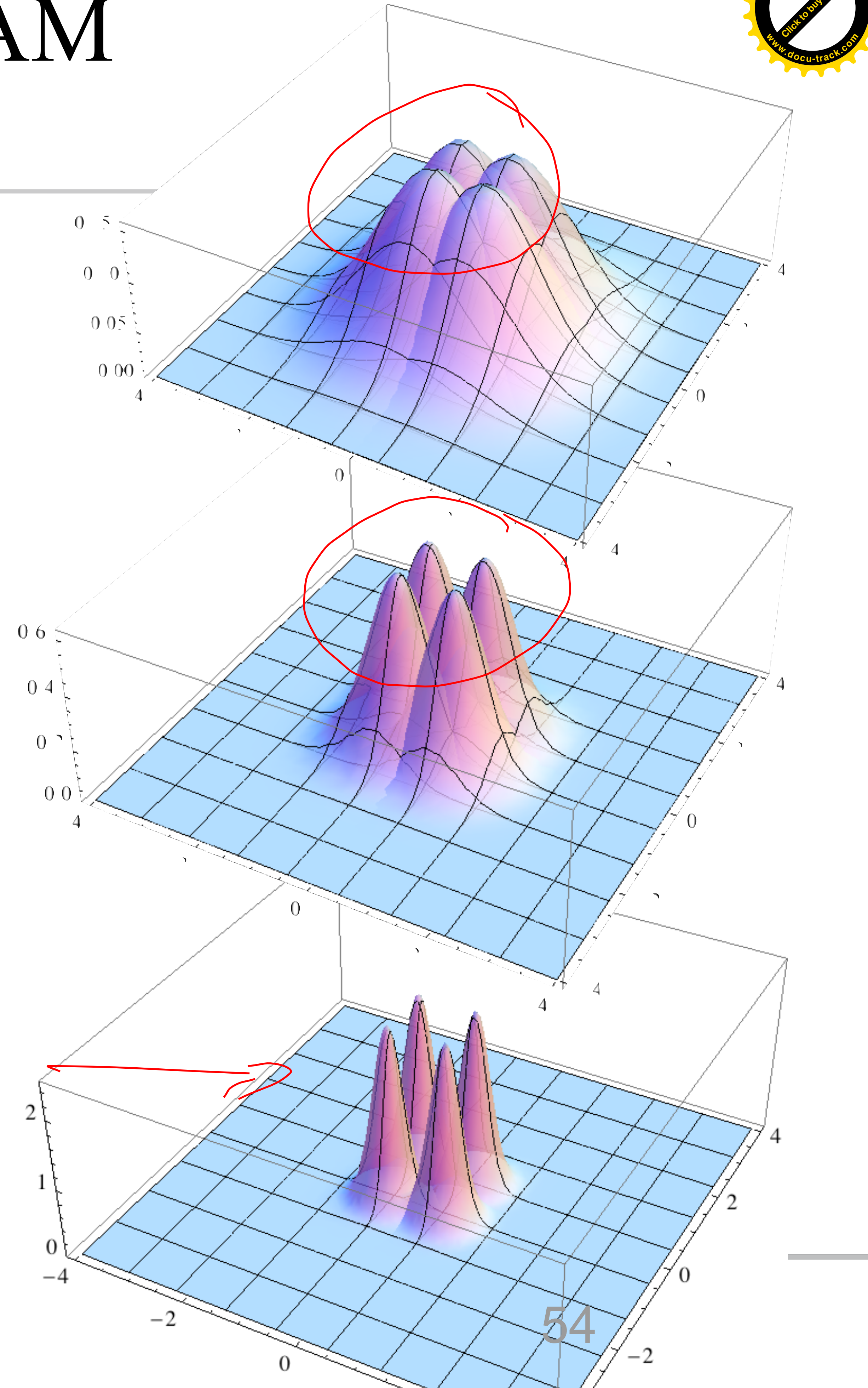
UNI FREIBURG

CoNe Freiburg

QAM versus 16QAM



- Dichtere Codes erzeugen bei gleichem Rauschen mehr Fehler
- Codieren aber mehr Bits



CoNe Freiburg

Die Bitfehlerhäufigkeit und das Signalrauschverhältnis

- Je höher das Signal-Rausch-Verhältnis, desto geringer ist der auftretende Fehler
- Bitfehlerhäufigkeit (bit error rate - BER)
  - Bezeichnet den Anteil fehlerhaft empfangener Bits
- Abhängig von
  - Signalstärke,
  - Rauschen,
  - Übertragungsgeschwindigkeit
  - Verwendetem Verfahren
- Abhängigkeit der Bitfehlerhäufigkeit (BER) vom Signal-Rausch-Verhältnis
  - Beispiel:
    4 QAM, 16 QAM, 64 QAM, 256 QAM

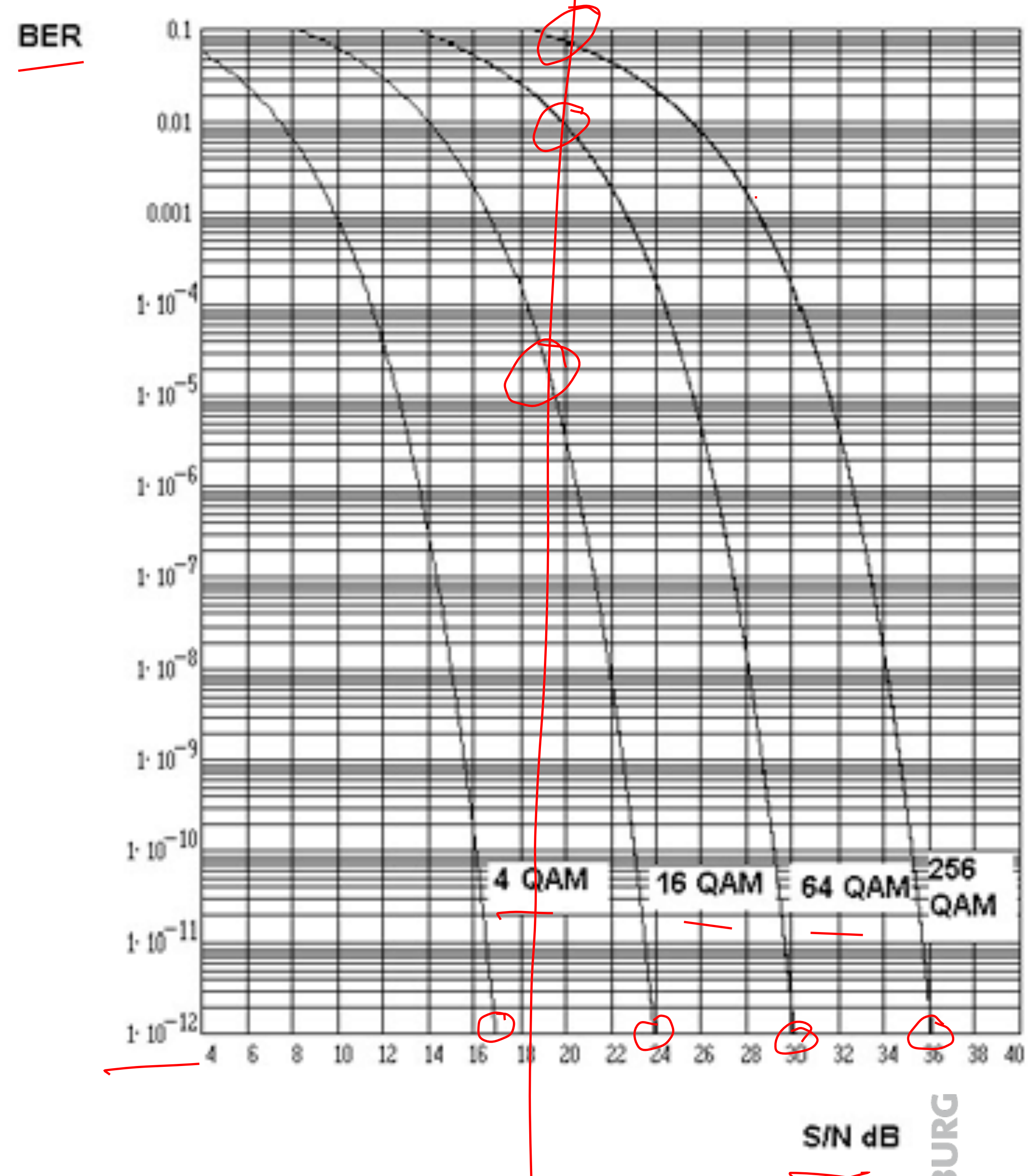


Abb. aus http://www.blondertongue.com/QAM-Transmodulator/Digital_Signal_Analysis.php

UNI FREIBURG