III) Berechenbarkeit

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$ endliches Alphabet, $\neq \emptyset$

A^* = die Menge der Wörter über A

$$\begin{array}{ccc} M & \dashrightarrow & N \\ \cup\!\!\mid & & \\ D & & \end{array}$$

Wenn $f: D \to N$ Funktion ist,

heißt f auch partielle Funktion von M nach N

$$f: M \dashrightarrow N$$

Wenn $x \in D$, heißt f an der Stelle x definiert

und $f(x)$ Funktionswert von f an der Stelle x

Wenn $x \notin D$, heißt f unbestimmt in x

Sei $\mathcal{C}$ Turing-Maschine über A

Dann bestimmt $\mathcal{C}$ eine partielle Funktion $f_{\mathcal{C}} : A^* \dashrightarrow A^*$

$$\underset{\substack{\cap \\ A^*}}{f_{\mathcal{C}}(w)} = v \in A^*, \text{ falls } \mathcal{C} \text{ mit Eingabe } w \text{ letztlich stoppt und Ausgabe } v \text{ liefert}$$

$f_{\mathcal{C}}(w)$ ist unbestimmt, falls $\mathcal{C}$ mit Eingabe w nicht stoppt oder keine vernünftige Ausgabe liefert.

<u>Def</u>: a) Eine Funktion $f: A^* \to B^*$ heißt <u>berechenbar</u> (genauer: Turing-berechenbar), falls es eine T.M. $\mathcal{C}$ gibt mit $f_{\mathcal{C}}(w) = f(w)$ für alle $w \in A^*$.

Eine partielle Fkt $f: A^* \dashrightarrow B^*$ heißt berechenbar, falls es eine T.M. $\mathcal{C}$ gibt mit
$$\begin{cases} f_{\mathcal{C}}(w) = f(w) & \text{für alle } w \in A^*, \text{ für die } f(w) \text{ definiert ist} \\ \mathcal{C} \text{ stoppt nicht bei Eingabe } w, \text{ falls } f(w) \text{ unbestimmt.} \end{cases}$$

b) Eine Teilmenge $W \subseteq A^*$ heißt <u>entscheidbar</u>, falls die charakteristische Funktion χ_W berechenbar ist, wobei

$$\chi_W(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in W \\ 0 & \text{falls } w \notin W \end{cases}$$

(liegt $w \in W$?   ja $\hat{=}$ 1
nein $\hat{=}$ 0

d.h. W entscheidbar $\Leftrightarrow$ ex. T.M. $\mathcal{C}$, die die Frage, ob $w \in W$, richtig beantwortet)

c) $W \subseteq A^*$ heißt <u>semi-entscheidbar</u> (oder auch aufzählbar) falls die partielle Funktion

$$\overline{\chi_W}(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in W \\ \text{unbestimmt} & \text{falls } w \notin W \end{cases}$$

berechenbar ist.

Äquivalent: es ex. T.M. $\mathcal{C}$, die bei Eingabe $w \in A^*$ genau dann stoppt, wenn $w \in W$

Bsp: (a) $A = \{a_1, a_2\}$

W_1 = alle Wörter, die mit a_1 anfangen

W_2 = alle Wörter, die ebensoviele a_1 wie a_2 enthalten

} entscheidbar

(b) $A = \{0, 1, \dots, 9\}$

A^* kann mit $\mathbb{N}$ identifiziert werden

W = alle Darstellungen von Primzahlen : entscheidbar

(c) $A = \underbrace{\mathcal{L}}_{\text{endlich}} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \exists, \forall, \doteq, v, 0, 1, \dots, 9, (,)\}$

W = alle $\mathcal{L}$-Formeln (wobei Variablen v_{17} als $v17$ geschrieben werden)

W ist entscheidbar

$\mathbb{N} = \{.$

<u>Bem 1</u>: Für jedes endl. Alphabet $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ gibt es eine Bijektion $A^* \to \mathbb{N}$

<u>Fall 1</u>: $n = 1$ $\qquad \underbrace{a_1 a_1 \cdots a_1}_{n \text{ mal}} \mapsto n$ $\qquad$ (unäre Darstellung natürlicher Zahlen)

<u>Fall 2</u>: $n > 1$ siehe Übung, im wesentlichen Darstellung von $n \in \mathbb{N}$ als n-äre Zahl (Achtung: führende Nullen)

Diese Bijektionen sind berechenbar, also kann man stets $A^* = \mathbb{N}$ annehmen.

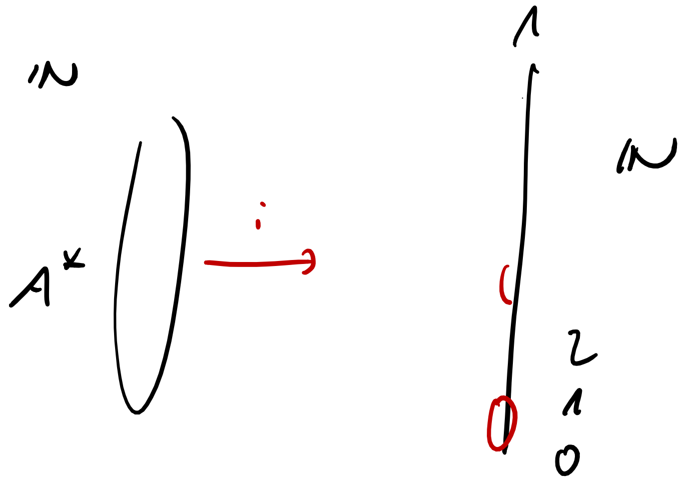
<u>Bem 2</u>: es existiert T.M., die systematisch alle Elemente aus A^* auflistet (z.B. durch berechenbare Bijektion $\mathbb{N} \to A^*$)

Einschub: $A = \{a, b, c\}$

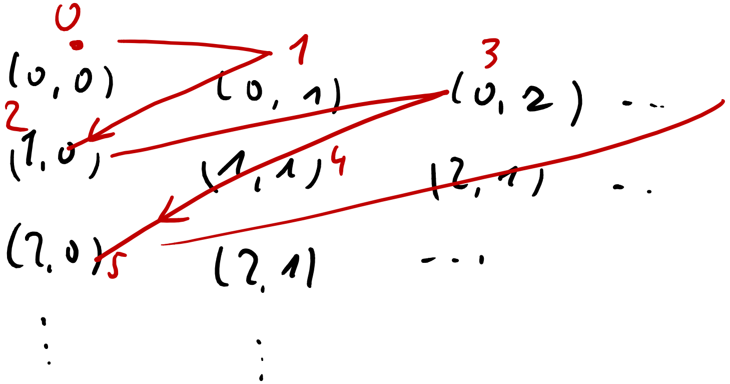
$\begin{matrix} a & b & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$

$w \in A^*$ ist Ziffernfolge $1123312 \in \mathbb{N}$

definiert Injektion $i: A^* \hookrightarrow \mathbb{N}$



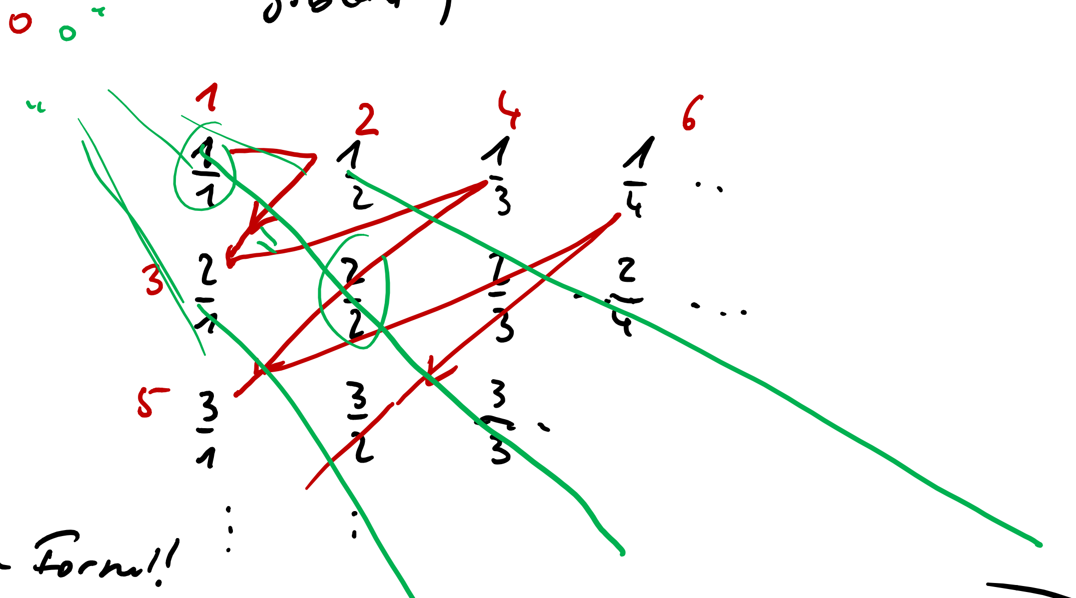
Lem 3: es gibt berechenbare Bijektion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$



(explizite Formel: Übungsblatt)

Einschub: es gibt Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$

$\mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$



$\beta(n)$ = der nächste Bruch in der Auflistung, der noch nicht vorkam

ist berechenbar ohne offensichtliche explizite Formel!

Bsp „3n+1"- Problem:

Starte mit $n_0 \in \mathbb{N}$ und berechne Folge n_i:

falls n_i ungerade, setze $n_{i+1} = 3n_i + 1$

falls n_i gerade, setze $n_{i+1} = \frac{n_i}{2}$

offene Vermutung: für jeden Startwert n_0 kommt irgendwann in der Folge der Wert 1 vor

Definition liefert nur Semi-Entscheidbarkeitsverfahren!

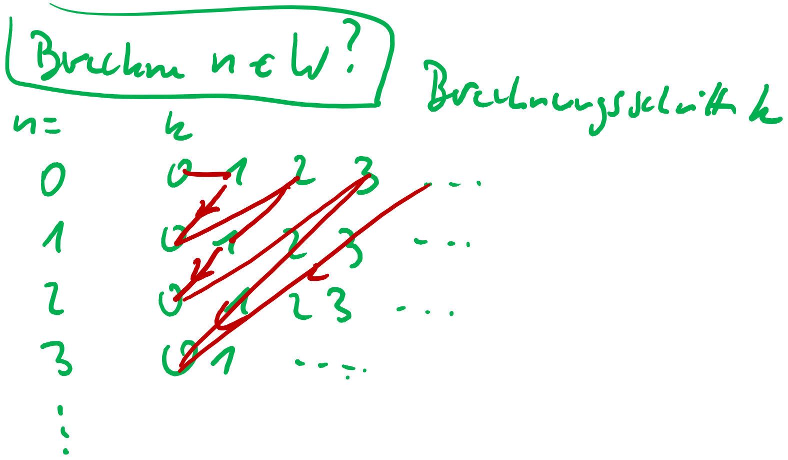
Lemma (a) $W \subseteq A^*$ ist genau dann semi-entscheidbar, wenn es eine berechenbare Funktion $f: A^* \to A^*$ mit $\text{Bild}(f) = W$ (daher auch „aufzählbar")

$A^* = \mathbb{N}$

(b) $W \subseteq A^*$ ist genau dann entscheidbar, wenn W und $A^* \setminus W$ semi-entscheidbar sind.

Bew: „$\Leftarrow$" Gegeben $w \in A^*$. Berechne nach und nach alle $f(v)$ für $v \in A^*$. Falls $f(v) = w$, Antwort „ja" auf Frage, ob $w \in W$ und stoppe. Sonst mach weiter.

„$\Rightarrow$" Betrachte $W \subseteq \mathbb{N}$ (identifiziere A^* mit $\mathbb{N}$) betrachte folgende Maschine M:
im $\left(\frac{n(n+1)}{2} + k\right)$-ten Berechnungsschritt von M führe den k-ten Berechnungsschritt für „$n \in W$?" durch ($n \in \mathbb{N}$, $k = 0, \ldots, n$)



Definiere $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$: $\quad f(n) = m$, falls m die n-te Zahl ist,
für die M die Antwort „$m \in W$" liefert.

(b) „$\Rightarrow$" Wenn W entscheidbar, dann W und $A^* \setminus W$ semi-entscheidbar

berechne $\chi_W(w)$. Falls $\chi_W(w) = 1$, Ausgabe „ja" und stoppe
Falls $\chi_W(w) = 0$, irgendeine unendl. Schleife

$\Big\}$ berechnet $\overline{\chi}_W$

analog für $A^* \setminus W$

„$\Leftarrow$" Eingabe $w \in A^*$: Teste mit abwechselnden Berechnungsschritten,
ob $w \in W$ oder $w \in A^* \setminus W$.
Eines der Verfahren stoppt. Gib entsprechende Ausgabe und stoppe.

$\boxtimes$

Wenn $u: A^* \times A^* \to A^*$ berechenbar ist, dann sind auch alle Funktionen $u_w: A^* \to A^*$ berechenbar mit $u_w(v) = u(w,v)$ $(w, v \in A^*)$

Satz: (a) Es gibt keine universelle berechenbare Funktion $u: A^* \times A^* \to A^*$, so dass $\{u_w \mid w \in A^*\}$ die Menge aller berechenbaren Fkt. $A^* \to A^*$ ist.

(b) Es gibt eine universelle berechenbare partielle Funktion $u: A^* \times A^* \dashrightarrow A^*$, so dass $\{u_w \mid w \in A^*\}$ die Menge aller berechenbaren partiellen Fkt. $A^* \dashrightarrow A^*$ ist.

Bew: (a) Wenn $u: A^* \times A^* \to A^*$ berechenbar, dann auch $\delta: A^* \to A^*$, $w \mapsto u(w,w)$

und also auch $\delta': A^* \to A^*$, $w \mapsto u(w,w)^\frown a_1$ (Hintendranhängen von a_1 bzw. falls $A^* = \mathbb{N}$ „$+1$")

Wenn u universell wäre, gäbe es ein $w_0 \in A^*$ mit $\delta' = u_{w_0}$: $u_{w_0}(w_0) = u(w_0,w_0) = \delta(w_0) \neq \delta'(w_0)$

(b) Programm einer T.M. $\mathcal{C}$ kann in A als $\ulcorner \mathcal{C} \urcorner$ codiert werden

Betrachte universelle T.M. $\mathcal{U}$, die als Eingabe ein Paar (c, w) bekommt.

testet, ob $c = \ulcorner \mathcal{C} \urcorner$,

falls ja, simuliere Lauf von $\mathcal{C}$ mit Eingabe w

Falls $\mathcal{C}$ mit Eingabe w stoppt und Ausgabe v liefert,

stoppe $\mathcal{U}$ und liefere diese Ausgabe

In allen anderen Fällen lasse $\mathcal{U}$ unendlich laufen.

u ist die durch $\mathcal{U}$ bestimmte Funktion. (vgl. Info III) $\square$

Satz (Halteproblem, Turing)

Die Menge $\mathcal{H} = \{ (c,w) \in A^* \times A^* \mid c = \ulcorner \mathcal{C} \urcorner$ und die T.M. $\mathcal{C}$ stoppt bei Eingabe $w \}$

ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.

Beweis: (a) Semi-Entscheidbarkeit:

Teste, ob $c = \ulcorner \mathcal{C} \urcorner$. Falls ja, simuliere Lauf von $\mathcal{C}$ mit Eingabe w. Falls $\mathcal{C}$ stoppt, stoppe auch. Sonst laufe unendlich weiter.

(b) Nicht-Entscheidbarkeit: Angenommen $\mathcal{H}$ wäre entscheidbar.

Dann baue universelle berechenbare Funktion:

Eingabe (c,w). Prüfe ob $c = \ulcorner \mathcal{C} \urcorner$. Falls ja, teste ob $(c,w) \in \mathcal{H}$.

Falls wieder ja, simuliere Lauf von $\mathcal{C}$ mit Eingabe w und gib dessen Ergebnis aus. und stoppe.

In allen anderen Fällen: Festgelegten Wert ausgeben und stoppen. ↯ ∎