Graphentheorie
02 Ungerichtete Graphen/Speicherung

Christian Schindelhauer
Technische Fakultät
Rechnernetze und Telematik
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Teilgraph

Definition 7. Ein Graph $G' = (V', R', \alpha', \omega')$ heißt *Teilgraph* von $G = (V, R, \alpha, \omega)$ $G' \sqsubseteq G$, wenn

- $V' \subseteq V$,
- $R' \subseteq R$ und
- $\forall r \in R' : \alpha'(r) = \alpha(r) \wedge \omega'(r) = \omega(r)$.

G heißt dann *Obergraph* von G'. Falls zusätzlich $V' \subset V$ oder $R' \subset R$, dann ist G' ein *echter* Teilgraph von G und G ein *echter* Obergraph von G'.

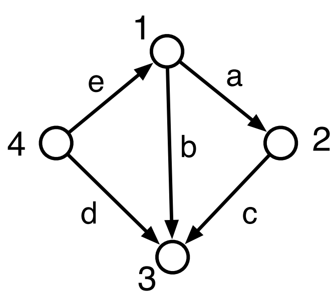
Teilgraph

Beobachtung 2. $\sqsubseteq$ ist eine partielle Ordnung, denn:

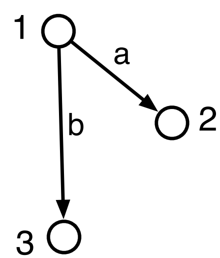
- Reflexivität: $G \sqsubseteq G$ (Jeder Graph ist ein Teilgraph von sich selbst)
- Antisymmetrie: wenn $G' \sqsubseteq G$ und $G' \sqsupseteq G$, dann $G' = G$
- Transitivität: wenn $G'' \sqsubseteq G'$ und $G' \sqsubseteq G$, dann $G'' \sqsubseteq G$

Teilgraph, Subgraph, Partialgraph

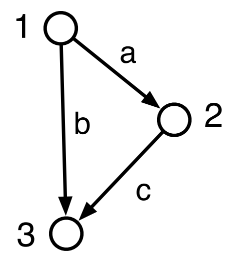
Definition 8. Sei $G = (V, R, \alpha, \omega)$ ein gerichteter Graph. Für eine Menge $V' \subseteq V$ ist der *induzierte Subgraph* $G[V']$ definiert als der Teilgraph von G mit $V(G[V']) = V'$ und $R(G[V']) = \{r \in R \mid \alpha(r) \in V' \text{ und } \omega(r) \in V'\}$.
Ein Teilgraph heißt *Subgraph*, wenn er durch eine Ecken/Knotenmenge induziert wird.
Für eine Menge $R' \subseteq R$ ist der *induzierte Partialgraph* definiert als $G_{R'} = (V, R', \alpha|_{R'}, \omega|_{R'})$.



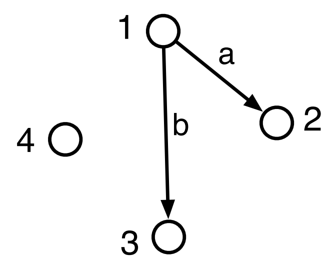
Graph G



Teilgraph G



Subgraph G



Partialgraph G

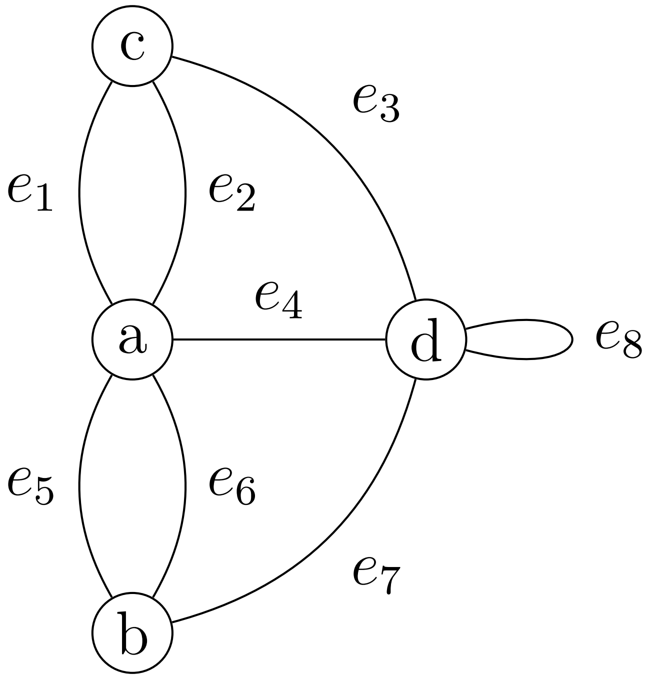
Ungerichteter Graph

Definition 9. Ein *ungerichteter Graph* ist ein Tripel $G = (V, E, \gamma)$ mit

- $V =$ Ecken/Knotenmenge
- $E =$ Kantenmenge
- $V \cap E = \emptyset$
- $\gamma : E \to \{X \subseteq V \mid 1 \leq |X| \leq 2\}$

Die Abbildung γ ordnet jeder Kante ihre Endknoten zu.

Ungerichteter Graph



	γ
e_1	$\{a, c\}$
e_2	$\{a, c\}$
e_3	$\{c, d\}$
e_4	$\{a, d\}$
e_5	$\{a, b\}$
e_6	$\{a, b\}$
e_7	$\{b, d\}$
e_8	$\{d, d\} = \{d\}$

Ungerichteter Graph

Definition 10. Sei $G = (V, E, \gamma)$ ein ungerichteter Graph.

- Eine Kante e heißt *Schlinge* wenn $|\gamma(e)| = 1$.

- Zwei Kanten e, e' sind *parallel* wenn $\gamma(e) = \gamma(e')$.

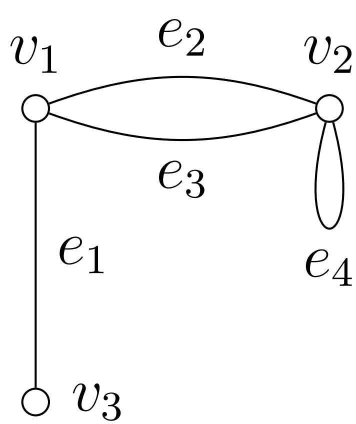
- $\delta_G(v) := \{e \in E \mid v \in \gamma(e)\}$
  Menge der zu v inzidenten Kanten

- $N_G(v) := \{u \in V \mid \exists e \in E : \gamma(e) = \{u, v\}\}$
  Menge der Nachbarn, d.h. der zu v adjazenten Knoten

- $g_G(v) := \sum_{e \in \delta_G(v)} 3 - |\gamma(e)|$
  Grad von v

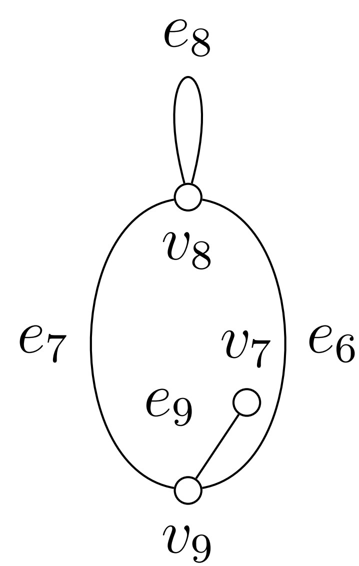
- $\Delta(G) := \max_{v \in V} g_G(v)$
  Maximalgrad von G

Graph-Isomorphie

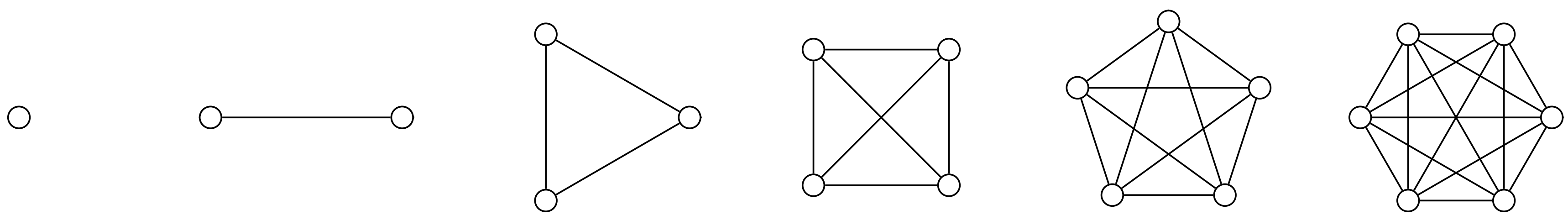


	σ
v_1	v_9
v_2	v_8
v_3	v_7

	τ
e_1	e_9
e_2	e_6
e_3	e_7
e_4	e_8

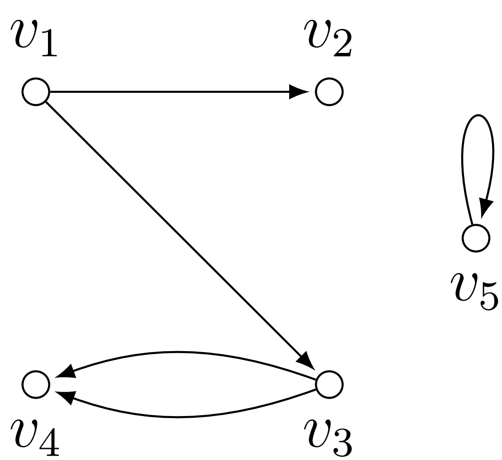


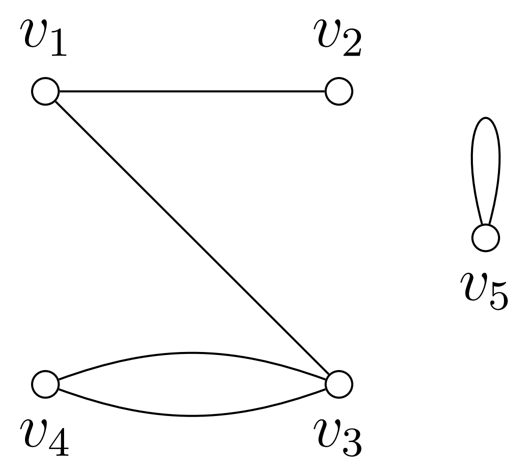
Vollständige Graphen



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

Adjazenz-Matrix

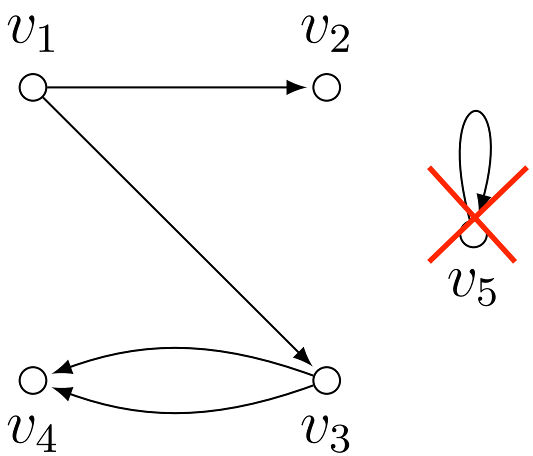


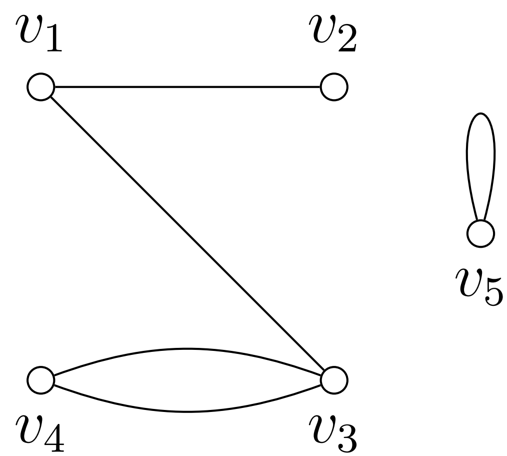


$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inzidenz-Matrix

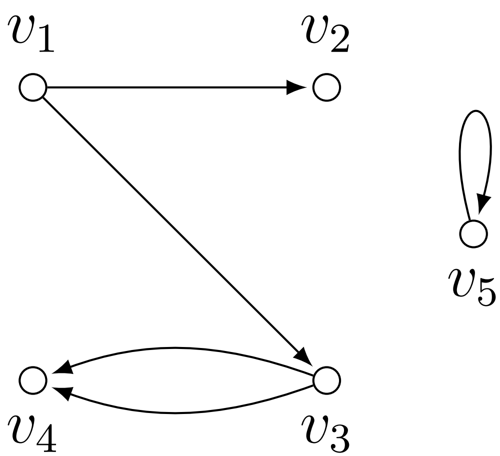


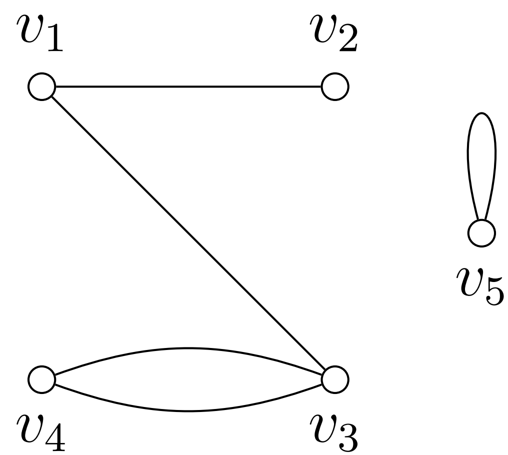


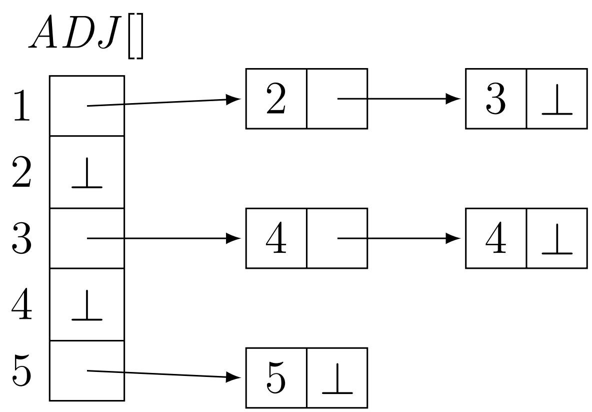
$$I(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$$

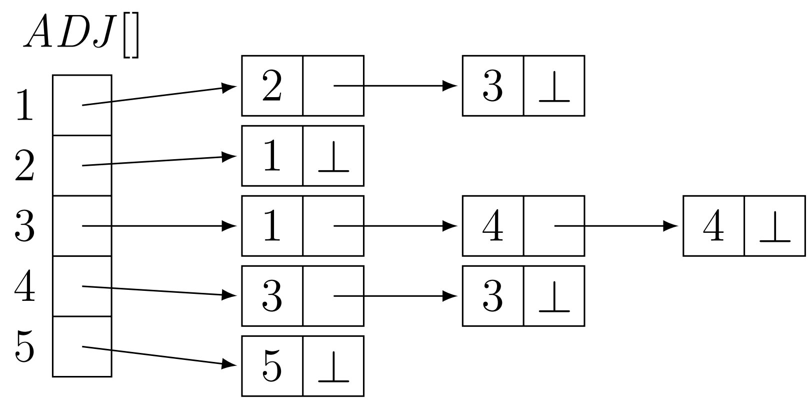
$$I(H) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Adjazenz-Liste









Turingmaschinenbandkodierung

$$
\begin{aligned}
V &= \{0, 1, 2, 3\} \\
E &= \{[0, 1], [2, 3]\}
\end{aligned}
$$

(	{	0	,	1	,	1	0	,	1	1	}	,	{	[	0	,	1	]	,	[	1	0	,	1	1	]	}	)