Ausdrucksweise in der Prädikatenlogik: (Intermezzo ...)

$\mathcal{L} = \{ \underbrace{+, \cdot}_{2}, \underbrace{-}_{1}, \underbrace{0, 1}_{0}, \underbrace{\leq}_{2} \}$ stellig

Funktionszeichen (+, ·, −, 0, 1) Relationszeichen (≤)

$\mathbb{R}$ auf „natürliche Weise" $\mathcal{L}$-Struktur, d.h.

$+^{\mathbb{R}}$ ist die normale Addition $+$

etc.

(a) „jede positive Zahl ist eine Quadratzahl"

„Umgangsformalismus": $\forall x \geq 0 \ \exists \sqrt{x}$ keine $\mathcal{L}$-Formel!

$\mathcal{L}$-Formel: $\forall v_0 \, (0 \leq v_0 \rightarrow \exists v_1 \ \underbrace{\cdot v_1 v_1}_{v_1 \cdot v_1} \doteq v_0)$

relativierter Quantor

(b) „$\mathbb{R}$ ist archimedisch, d.h. zu jeder reellen Zahl gibt es natürliche Zahl, die größer ist."

Umgangsformalismus: $\forall r \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} \ n > r$

$\mathcal{L}_N$-Formel $\forall v_0 \exists v_1 \, (N v_1 \wedge \underbrace{v_0 \leq v_1 \wedge \neg v_0 \doteq v_1}_{v_1 > v_0})$

$\mathcal{L}_N = \mathcal{L} \cup \{N\}$ $\quad \mathbb{R}^N = \mathbb{N}$

1 Prädikat

(c) „Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert"

„Umgangsformalismus" $\forall (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ $(\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n, m > N \ldots$

$\rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \ldots)$

Quantor über Folge („zweitstufiger Quantor")
nicht (ohne weiteres) erststufig ausdrückbar

Beweis des Satzes

Induktion über den Aufbau der Formeln φ für alle möglichen Belegungen β, β' gleichzeitig!

I.A.

φ atomar : φ ist $\perp$ oder $\top$: Satz gilt per Definition

$\varphi = R\tau_1 \ldots \tau_n$: $\mathcal{M} \models \varphi[\beta] \iff R^{\mathcal{M}}\, \tau_1^{\mathcal{M}}[\beta] \ldots\ldots \tau_n^{\mathcal{M}}[\beta]$

(R n-stelliges Relationszeichen, $\tau_1 \ldots \tau_n$ $\mathcal{L}$-Terme)

$$\tau_1^{\mathcal{M}}[\beta] = \tau_1^{\mathcal{M}}[\beta'] \qquad \tau_n^{\mathcal{M}}[\beta] = \tau_n^{\mathcal{M}}[\beta']$$

Lemma für Terme

freie Variablen von φ sind alle in $\tau_1 \ldots \tau_n$ vorkommenden Variablen

$\iff \mathcal{M} \models \varphi[\beta']$

$\varphi = \tau_1 \doteq \tau_2$: analog

IS: $\varphi = \neg \psi$

$$\mathfrak{M} \models \varphi[\beta] \iff \mathfrak{M} \not\models \psi[\beta] \underset{\text{I.V.}}{\iff} \mathfrak{M} \not\models \psi[\beta'] \iff \mathfrak{M} \models \neg\psi[\beta']$$

freie Variablen von φ und ψ sind die gleichen!

$\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$

$$\mathfrak{M} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[\beta] \iff \mathfrak{M} \models \psi_1[\beta] \text{ und } \mathfrak{M} \models \psi_2[\beta]$$

$$\underset{\text{I.V.}}{\iff} \mathfrak{M} \models \psi_1[\beta'] \text{ und } \mathfrak{M} \models \psi_2[\beta']$$

$$\iff \mathfrak{M} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[\beta']$$

die freien Variablen von ψ_1 und ψ_2 sind enthalten in den freien Variablen von φ

etc. für die anderen auss. Junktoren

$\varphi = \exists v_i \, \psi$

$$\mathfrak{M} \models \varphi[\beta] \iff \text{ex. } m_0 \in M \text{ mit } \mathfrak{M} \models \psi\left[\beta \tfrac{m_0}{v_i}\right]$$

$$\iff \text{ex } \cancel{m \in M} \text{ mit } \mathfrak{M} \models \psi\left[\beta' \tfrac{m_0}{v_i}\right]$$

$$\iff \mathfrak{M} \models \varphi[\beta']$$

stimmen auf den freien Variablen von ψ überein, denn diese sind enthalten in $\{v_i\} \cup \{$freie Variablen von $\varphi\}$

analog $\varphi = \forall v_i \, \psi$

$\square$

Substitutionen

F aussagenlogische Formel mit Aussagenvariablen $A_1, \dots, A_n$

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ $\mathcal{L}$-Formeln

Dann ist $F\left[\frac{\varphi_1}{A_1} \dots \frac{\varphi_n}{A_n}\right]$ eine $\mathcal{L}$-Formel (entsteht dadurch, dass man A_i durch φ_i ersetzt)

Lemma Falls $\mathcal{M}$ $\mathcal{L}$-Struktur und β Belegung, dann ist

$$\mathcal{M} \models F\left[\frac{\varphi_1}{A_1} \dots \frac{\varphi_n}{A_n}\right][\beta] \iff \beta_\varphi(F) = 1$$

wobei β_φ ~~die~~ eine aussagenlogische Belegung mit $\beta_\varphi(A_i) = 1 \iff \mathcal{M} \models \varphi_i[\beta]$

Bsp: $(\underbrace{\exists v_0 \, P v_0}_{\varphi_1} \vee \neg \underbrace{\forall v_1 \; v_0 \doteq v_1}_{\varphi_2})$ $F = (A_1 \vee \neg A_2)$

" $F\left[\frac{\varphi_1}{A_1}, \frac{\varphi_2}{A_2}\right]$

Beweis: gilt nach Definition der Auswertung von Junktoren in Modellen $\square$

Notation: Term $\tau = \tau(v_1 \dots v_n)$, $m_1, \dots, m_n \in M$ $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$

Wähle Belegung β mit $\beta(v_i) = m_i$.

Setze $\tau^{\mathcal{M}}[m_1, \dots, m_n] := \tau^{\mathcal{M}}[\beta]$ (unabhängig von der Wahl von β)

Wenn $\tau = \tau(v_1 \dots v_n)$ Term, dann definiert τ eine Funktion $\tau^{\mathcal{M}}: M^n \to M$

$$(m_1, \dots, m_n) \mapsto \tau^{\mathcal{M}}[m_1, \dots, m_n]$$

Bsp: $\mathcal{L} = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$ $\mathcal{L}$-Struktur $\mathbb{R}$

$\mathcal{L}$-Terme sind im Wesentlichen Polynome über $\mathbb{Z}$

$(1+1) \cdot (v_0 \cdot v_0) + -v_0 + 1 \quad = \tau$

$2v_0^2 - v_0 + 1 \quad \rightsquigarrow \quad$ Funktion $\tau^{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$r \mapsto 2r^2 - r + 1 = \tau^{\mathbb{R}}[r]$$

(oder $(v_0 \cdot v_0) + (v_0 \cdot v_0) + -v_0 + 1$)

Substitutionslemma für Terme

v_i Variable, σ $\mathcal{L}$-Term, $\mathfrak{M}$ $\mathcal{L}$-Struktur, β Belegung.

Für jeden $\mathcal{L}$-Term τ gilt $\quad \Big(\underbrace{\tau\frac{\sigma}{v_i}}\Big)^{\mathfrak{M}}[\beta] = \tau^{\mathfrak{M}}\left[\beta\,\frac{\sigma^{\mathfrak{M}}[\beta]}{v_i}\right]$

$\mathcal{L}$-Term, der aus τ entsteht, indem man jedes Vorkommen von v_i durch σ ersetzt

(sagt in etwa: $(\tau(\sigma))^{\mathfrak{M}} = \tau^{\mathfrak{M}} \circ \sigma^{\mathfrak{M}}$)

Wenn $\tau = \tau(v_1,\dots,v_n)$, $\sigma = \sigma(v_1,\dots,v_n)$ und $i = 1$

$$\tau(\sigma(v_1,\dots,v_n), v_2,\dots,v_n)^{\mathfrak{M}}[m_1,\dots,m_n] = \tau(v_1,\dots,v_n)^{\mathfrak{M}}[\sigma^{\mathfrak{M}}[m_1,\dots,m_n], m_2,\dots,m_n]$$

Beweis: formal über Aufbau der Terme ...

$\square$

Notation: $\mathcal{L}$-Formel $\varphi(v_1,\dots,v_n)$, $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$, $m_1,\dots,m_n \in M$

Sei β eine Belegung mit $\beta(v_i) = m_i$

$$\mathcal{M} \models \varphi[m_1,\dots,m_n] \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathcal{M} \models \varphi[\beta]$$ (unabhängig von der Wahl von β)

d.h. Formeln $\varphi(v_1,\dots,v_n)$ definieren n-stellige Relationen $\varphi^{\mathcal{M}}$ über M

$$\varphi^{\mathcal{M}} = \{(m_1,\dots,m_n) \in M^n \mid \mathcal{M} \models \varphi[m_1,\dots,m_n]\}$$

Bsp: $\mathcal{L} = \{E\}$

zweistelliges Relationssymbol

Graph G ist $\mathcal{L}$-Struktur: G Knotenmenge

$G \models E^G ab \Longleftrightarrow$ es gibt Kante zwischen a und b (irreflexiv)

$$\varphi(v_0,v_1) = \exists v_2 \, (E v_0 v_2 \wedge E v_2 v_1)$$

„es gibt Weg der Länge 2 zwischen v_0 und v_1"

$\varphi^{\mathcal{M}}$ = Abstand von v_0 und v_1 ist ≤ 2

Substitutionslemma für Formeln

v_i Variable, σ $\mathcal{L}$-Term, $\mathcal{M}$ $\mathcal{L}$-Struktur, β Belegung in $\mathcal{M}$

Dann gilt für jede Formel φ mit <u>v_i frei für σ in φ</u>, d.h. durch die Substitution wird keine Variable von σ in $\varphi\frac{\sigma}{v_i}$ gebunden!

$$\mathcal{M} \models \underbrace{\varphi\frac{\sigma}{v_i}}\,[\beta] \iff \mathcal{M} \models \varphi\left[\beta\frac{\sigma^{\mathcal{M}}[\beta]}{v_i}\right]$$

Formel, die φ entsteht, indem jedes Vorkommen von v_i in einem Term in φ durch σ ersetzt wird

Falls $\sigma = fv_1$, $i=0$

$\varphi = \exists v_0\ v_0 \doteq fv_0$

$\varphi\frac{\sigma}{v_0} = \exists v_0\ fv_1 \doteq ffv_1$

Bsp: $\varphi = \underline{\forall v_0}\ v_0 \doteq v_1$ frei

ist immer falsch in $\mathcal{M}$, wenn $|M| \geq 2$

$\sigma \overset{i=1}{=} v_0$ $\quad \varphi\frac{\sigma}{v_1} = \forall v_0\ v_0 \doteq v_0$ gebunden

gilt immer

Def: v_i heißt frei für σ in φ,

falls **1. Fall** v_i ist freie Variable von φ und eine folgende Fälle gilt:

- φ atomar
- $\varphi = \neg\psi$, $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ etc. — und v_i ist frei für σ in ψ bzw. ψ_1 und ψ_2
- $\varphi = \exists v_j \psi$, $\varphi = \forall v_j \psi$ — und v_i frei für σ in ψ und v_j kommt in σ nicht vor

$i \neq j$

2. Fall v_i ist keine freie Variable von φ

<u>Beweis</u> per Induktion über den Aufbau der Formeln

Schwierig ist nur der Quantorenfall

$$\mathfrak{M} \models (\exists v_j \, \psi)\frac{\sigma}{v_i}[\beta] \iff \text{ex } m_0 \in M \text{ mit } \mathfrak{M} \models \psi\frac{\sigma}{v_i}\left[\beta\frac{m_0}{v_j}\right]$$

Annahme:
v_i frei für σ in $\exists v_j \, \psi$
$i \neq j$
d.h. v_i freie Variable in ψ

$$\overset{\text{I.A.}}{\iff} \mathfrak{M} \models \psi\left[\underbrace{\beta\frac{m_0}{v_j}\frac{\sigma^{\mathfrak{M}}[\beta\frac{m_0}{v_j}]}{v_i}}_{\beta\frac{m_0}{v_j}\frac{\sigma^{\mathfrak{M}}[\beta]}{v_i} \;=\; \beta\frac{\sigma^{\mathfrak{M}}[\beta]}{v_i}\frac{m_0}{v_j}}\right]$$

v_j darf in σ nicht vorkommen

$$\sigma^{\mathfrak{M}}\left[\beta\frac{m_0}{v_j}\right] = \sigma^{\mathfrak{M}}[\beta]$$

$$\iff \mathfrak{M} \models \psi\left[\beta\frac{\sigma^{\mathfrak{M}}[\beta]}{v_i}\frac{m_0}{v_j}\right]$$

$$\iff \mathfrak{M} \models \exists v_j \, \psi\left[\beta\frac{\sigma^{\mathfrak{M}}[\beta]}{v_i}\right]$$

Fall v_i ist keine freie Variable von ψ ist trivial.

$\boxtimes$