Transferencia de calor en un paralelepípedo

Integrantes:

- Fabian Catalán
- Miguel Nahuelpán
- Felipe Zabala

Asignatura: INFO189 [Software de Ingeniería]

Profesor: Sr. Cristian Olivares

Fecha: 17/04/2019

Introducción

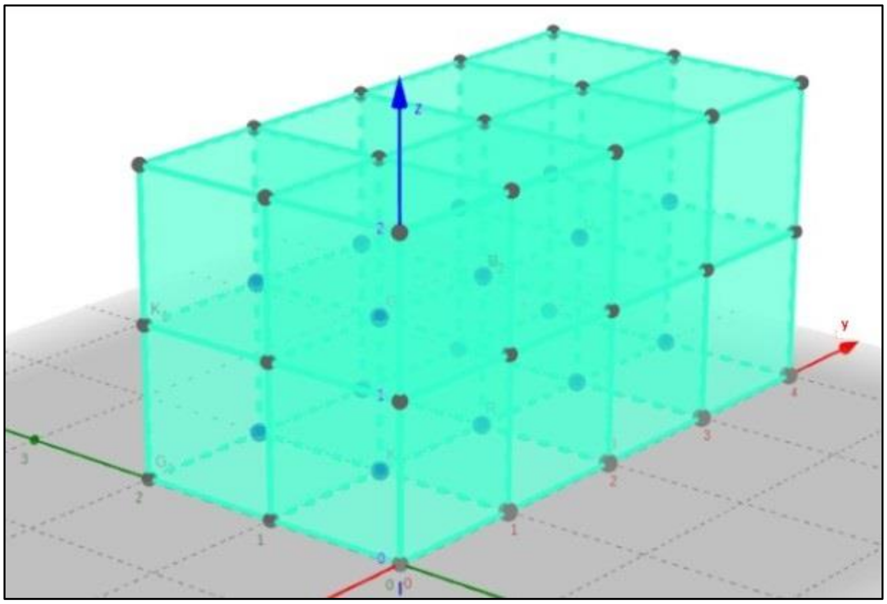
En el presente informe se le dará solución a un problema de transferencia de calor en un paralelepípedo, que consiste en encontrar la distribución estacionaria de la temperatura $T(x, y, z)$ en un dominio V, para esto tendremos unas condiciones de frontera, las densidades de generación de calor por unidad de volumen a ambos lados, la temperatura que existe sobre una cara, así como un flujo de calor constante que afecta la cara opuesta. Siendo así, el objeto registrara temperaturas distintas para cada uno de sus nodos. También se tiene que la malla que conforma el paralelepípedo es homogénea.

Para el problema, utilizaremos el método de diferencias finitas progresivas.

Desarrollo

Para este problema la malla es homogénea $h = 1$, y la conductividad $k_x = k_y = k_z = 0{,}5\ [\frac{Watt}{cm\ °C}]$

Grafica con las coordenadas $x = i, y = j, z = k$ y los 45 nodos del paralelepípedo:



La distribución estacionaria de la temperatura está dada por:

$$K_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q = 0$$

El cual es resuelto por el método de diferencias finitas (diferencias progresivas), cuya fórmula general en base a temperaturas en cada nodo es:

$$K_x \left(\frac{T_{i-1,j,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i+1,j,k}}{h^2} \right) + K_y \left(\frac{T_{i,j-1,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j+1,k}}{h^2} \right) + K_z \left(\frac{T_{i,j,k-1} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j,k+1}}{h^2} \right) = -Q$$

Se utilizará un solo K de ahora en adelante, $K = k_x = k_y = k_z$

Reordenando:

$$T_{i-1,j,k} - 2T_{ijk} + T_{i+1,j,k} + T_{i,j-1,k} - 2T_{ijk} + T_{i,j+1,k} + T_{i,j,k-1} - 2T_{ijk} + T_{i,j,k+1} = \frac{-Qh^2}{k}$$

$$T_{i-1,j,k} + T_{i+1,j,k} + T_{i,j-1,k} + T_{i,j+1,k} + T_{i,j,k-1} + T_{i,j,k+1} - 6T_{ijk} = \frac{-Qh^2}{k}$$

Se aplica la fórmula anterior para cada nodo, donde cada nodo dependerá de sus nodos vecinos (nodo izquierdo, derecho, arriba, abajo, atrás y adelante) dejando 36 ecuaciones de nodos con temperatura incógnitas, son 36 ya que se nos entrega como dato la temperatura de una cara del paralelepípedo, que es $t = 10$, dejando 9 ecuaciones menos.

Para aplicar la condición de borde ($j = 0$), en la cara donde se aplica el flujo de calor, realizamos diferencias progresivas, quedándonos:

$$\frac{\partial T}{\partial y} \approx \frac{T_{i,j+1,k} - T_{i,j,k}}{h} = 0{,}5, \qquad h = 1$$

$$T_{i,j+1,k} - T_{i,j,k} = 0{,}5h$$

Cuando se calcule un nodo que pertenezca a esta cara se utilizara la ecuación anterior.

Cuando se tome un nodo exterior (uno de los que no está listado a continuación) a la figura, se considerará nulo, ya que fuera del paralelepípedo, no hay flujo de calor, se asume temperatura 0°C.

Considerando $h = 1$ queda de la siguiente forma:

Para $y = 0$:

$$T1(0,0,0){:}\, T_{0,1,0} - T_{0,0,0} = 0{,}5$$

$$T2(1,0,0){:}\, T_{1,1,0} - T_{1,0,0} = 0{,}5$$

$$T3(2,0,0){:}\, T_{2,1,0} - T_{2,0,0} = 0{,}5$$

$$T4(0,0,1){:}\, T_{0,1,1} - T_{0,0,1} = 0{,}5$$

$$T5(1,0,1){:}\, T_{1,1,1} - T_{1,0,1} = 0{,}5$$

$$T6(2,0,1){:}\, T_{2,1,1} - T_{2,0,1} = 0{,}5$$

$$T7(0,0,2){:}\, T_{0,1,2} - T_{0,0,2} = 0{,}5$$

$$T8(1,0,2){:}\, T_{1,1,2} - T_{1,0,2} = 0{,}5$$

$$T9(2,0,2){:}\, T_{2,1,2} - T_{2,0,2} = 0{,}5$$

Para $Q = 0$:

$$T10(0,1,0){:}\, \cancel{T_{-1,1,0}} + T_{1,1,0} + T_{0,0,0} + T_{0,2,0} + \cancel{T_{0,1,-1}} + T_{0,1,1} - 6T_{0,1,0} = 0$$

$$T11(1,1,0){:}\, T_{0,1,0} + T_{2,1,0} + T_{1,0,0} + T_{1,2,0} + \cancel{T_{1,1,-1}} + T_{1,1,1} - 6T_{1,1,0} = 0$$

$$T12(2,1,0){:}\, T_{1,0,0} + \cancel{T_{3,1,0}} + T_{2,0,0} + T_{2,2,0} + \cancel{T_{2,1,-1}} + T_{2,1,1} - 6T_{2,1,0} = 0$$

$$T13(0,1,1){:}\, \cancel{T_{-1,1,1}} + T_{1,1,1} + T_{0,0,1} + T_{0,2,1} + T_{0,1,0} + T_{0,1,2} - 6T_{0,1,1} = 0$$

$$T14(1,1,1){:}\, T_{0,1,1} + T_{2,1,1} + T_{1,0,1} + T_{1,2,1} + T_{1,1,0} + T_{1,1,2} - 6T_{1,1,1} = 0$$

$$T15(2,1,1): T_{1,1,1} + \cancel{T_{3,1,1}} + T_{2,0,1} + T_{2,2,1} + T_{2,1,0} + T_{2,1,2} - 6T_{2,1,1} = 0$$

$$T16(0,1,2): \cancel{T_{-1,1,2}} + T_{1,1,2} + T_{0,0,2} + T_{0,2,2} + T_{0,1,1} + \cancel{T_{0,1,3}} - 6T_{0,1,2} = 0$$

$$T17(1,1,2): T_{0,1,2} + T_{2,1,2} + T_{1,0,2} + T_{1,2,2} + T_{1,1,1} + \cancel{T_{1,1,3}} - 6T_{1,1,2} = 0$$

$$T18(2,1,2): T_{1,1,2} + \cancel{T_{3,1,2}} + T_{2,0,2} + T_{2,2,2} + T_{2,1,1} + \cancel{T_{2,1,3}} - 6T_{2,1,2} = 0$$

Para $Q = 1$:

$$T19(0,2,0): \cancel{T_{-1,2,0}} + T_{1,2,0} + T_{0,1,0} + T_{0,3,0} + \cancel{T_{0,2,-1}} + T_{0,2,1} - 6T_{0,2,0} = -2$$

$$T20(1,2,0): T_{0,2,0} + T_{2,2,0} + T_{1,1,0} + T_{1,3,0} + \cancel{T_{1,2,-1}} + T_{1,2,1} - 6T_{1,2,0} = -2$$

$$T21(2,2,0): T_{1,2,0} + \cancel{T_{3,2,0}} + T_{2,1,0} + T_{2,3,0} + \cancel{T_{2,2,-1}} + T_{2,2,1} - 6T_{2,2,0} = -2$$

$$T22(0,2,1): \cancel{T_{-1,2,1}} + T_{1,2,1} + T_{0,1,1} + T_{0,3,1} + T_{0,2,0} + T_{0,2,2} - 6T_{0,2,1} = -2$$

$$T23(1,2,1): T_{0,2,1} + T_{2,2,1} + T_{1,0,1} + T_{1,3,1} + T_{1,2,0} + T_{1,2,2} - 6T_{1,2,1} = -2$$

$$T24(2,2,1): T_{1,2,1} + \cancel{T_{3,2,1}} + T_{2,1,1} + T_{2,3,1} + T_{2,2,0} + T_{2,2,2} - 6T_{2,2,1} = -2$$

$$T25(0,2,2): \cancel{T_{-1,2,2}} + T_{1,2,2} + T_{0,1,2} + T_{0,3,2} + T_{0,2,1} + \cancel{T_{0,2,3}} - 6T_{0,2,2} = -2$$

$$T26(1,2,2): T_{0,2,2} + T_{2,2,2} + T_{1,1,2} + T_{1,3,2} + T_{1,2,1} + \cancel{T_{1,2,3}} - 6T_{1,2,2} = -2$$

$$T27(2,2,2): T_{1,2,2} + \cancel{T_{3,2,2}} + T_{2,1,2} + T_{2,3,2} + T_{2,2,1} + \cancel{T_{2,2,3}} - 6T_{2,2,2} = -2$$

$$T28(0,3,0): \cancel{T_{-1,3,0}} + T_{1,3,0} + T_{0,2,0} + T_{0,4,0} + \cancel{T_{0,3,-1}} + T_{0,3,1} - 6T_{0,3,0} = -2$$

$$T29(1,3,0): T_{0,3,0} + T_{2,3,0} + T_{1,2,0} + T_{1,4,0} + \cancel{T_{1,3,-1}} + T_{1,3,1} - 6T_{1,3,0} = -2$$

$$T30(2,3,0): T_{1,3,0} + \cancel{T_{3,3,0}} + T_{2,2,0} + T_{2,4,0} + \cancel{T_{2,3,-1}} + T_{2,3,1} - 6T_{2,3,0} = -2$$

$$T31(0,3,1): \cancel{T_{-1,3,1}} + T_{1,3,1} + T_{0,2,1} + T_{0,4,1} + T_{0,3,0} + T_{0,3,2} - 6T_{0,3,1} = -2$$

$$T32(1,3,1): T_{0,3,1} + T_{2,3,1} + T_{1,2,1} + T_{1,4,1} + T_{1,3,0} + T_{1,3,2} - 6T_{1,3,1} = -2$$

$$T33(2,3,1): T_{1,3,1} + \cancel{T_{3,3,1}} + T_{2,2,1} + T_{2,4,1} + T_{2,3,0} + T_{2,3,2} - 6T_{2,3,1} = -2$$

$$T34(0,3,2): \cancel{T_{-1,3,2}} + T_{1,3,2} + T_{0,2,2} + T_{0,4,2} + T_{0,3,1} + \cancel{T_{0,3,3}} - 6T_{0,3,2} = -2$$

$$T35(1,3,2): T_{0,3,2} + T_{2,3,2} + T_{1,2,2} + T_{1,4,2} + T_{1,3,1} + \cancel{T_{1,3,3}} - 6T_{1,3,2} = -2$$

$$T36(2,3,2): T_{1,3,2} + \cancel{T_{3,3,2}} + T_{2,2,2} + T_{2,4,2} + T_{2,3,1} + \cancel{T_{2,3,3}} - 6T_{2,3,2} = -2$$

Los elementos tachados tienen valor 0, ya que son nodos exteriores.

Para estos nodos la temperatura es 10°C:

$$T37(0,4,0) = 10$$

$$T38(1,4,0) = 10$$

$$T39(2,4,0) = 10$$

$$T40(0,4,1) = 10$$

$$T41(1,4,1) = 10$$

$$T42(2,4,1) = 10$$

$$T43(0,4,2) = 10$$

$$T44(1,4,2) = 10$$

$$T45(2,4,2) = 10$$

Al ejecutar el programa, el resultado del sistema de ecuaciones es el siguiente:

$T1(0,0,0) = 0{,}119$	$T16(0,1,2) = 0{,}619$	$T31(0,3,1) = 4{,}608$
$T2(1,0,0) = 0{,}363$	$T17(1,1,2) = 0{,}863$	$T32(1,3,1) = 5{,}580$
$T3(2,0,0) = 0{,}119$	$T18(2,1,2) = 0{,}619$	$T33(2,3,1) = 4{,}608$
$T4(0,0,1) = 0{,}363$	$T19(0,2,0) = 1{,}870$	$T34(0,3,2) = 3{,}847$
$T5(1,0,1) = 0{,}699$	$T20(1,2,0) = 2{,}376$	$T35(1,3,2) = 3{,}608$
$T6(2,0,1) = 0{,}363$	$T21(2,2,0) = 1{,}870$	$T36(2,3,2) = 3{,}847$
$T7(0,0,2) = 0{,}119$	$T22(0,2,1) = 2{,}376$	$T37(0,4,0) = 10$
$T8(1,0,2) = 0{,}363$	$T23(1,2,1) = 3{,}047$	$T38(1,4,0) = 10$
$T9(2,0,2) = 0{,}119$	$T24(2,2,1) = 2{,}376$	$T39(2,4,0) = 10$
$T10(0,1,0) = 0{,}619$	$T25(0,2,2) = 1{,}870$	$T40(0,4,1) = 10$
$T11(1,1,0) = 0{,}863$	$T26(1,2,2) = 2{,}376$	$T41(1,4,1) = 10$
$T12(2,1,0) = 0{,}619$	$T27(2,2,2) = 1{,}870$	$T42(2,4,1) = 10$
$T13(0,1,1) = 0{,}863$	$T28(0,3,0) = 3{,}847$	$T43(0,4,2) = 10$
$T14(1,1,1) = 1{,}199$	$T29(1,3,0) = 4{,}608$	$T44(1,4,2) = 10$
$T15(2,1,1) = 0{,}863$	$T30(2,3,0) = 3{,}847$	$T45(2,4,2) = 10$

Conclusión

El método de diferencias finitas nos permite calcular distintos problemas de ecuaciones diferenciales como es en este caso la transferencia de calor de un paralelepípedo, el método de diferencias progresivas nos facilitó calcular la variación de temperatura en todas las caras y nodos del paralelepípedo, asumiendo su condición de borde $0{,}5\,\frac{Watt}{cm^2}$ en la cara del eje Y.

Así logramos saber cómo progresa la temperatura que va avanzando en el objeto hasta llegar a la última cara opuesta que posee una temperatura de 10°C.