

EP MAE0699 - Tópicos de probabilidades

Fabricio Kassardjian nusp:2234961
Robert Mota dos Santos nusp:9039927

15 de maio de 2019

Introdução

O trabalho se refere a estudar as curvas de distribuição para $T(v)$ e $C(v, w)$, onde \mathbf{T} representa o caminho mais curto de retorno ao vértice v e \mathbf{C} o caminho mais curto entre os vértices v e w . O modelo de Erdo-Rényi é utilizado para gerar os grafos aleatórios com n vértices e probabilidade p de ligação entre cada par de vértices.

Modelo 2

O modelo escolhido para o teste foi usando conexões não direcionadas e preguiçoso. O fato de ser preguiçoso implica que existem conexões para continuar no mesmo vértice. Além disso fica determinado que cada conexão só pode ser usada uma unica vez para cada caminho testado, assim evita-se que a distribuição \mathbf{T} tenha apenas valores 1 e 2. Como as conexões são aleatórias podem existir vértices isolados e também como não pode ser utilizado a mesma conexão para voltar podem existir valores de \mathbf{T} e \mathbf{C} que podemos considerar inf.

Metodologia

Estimação das distribuições

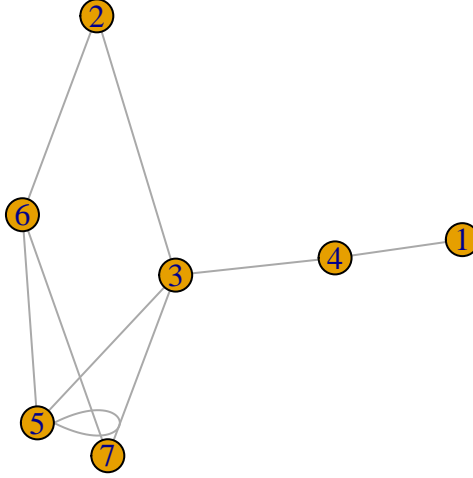
Para o teste primeiro inicia-se uma matriz A representando com **TRUE** quando a ligação entre os vértices está presente e **FALSE** quando não há ligação. A linha i da matriz representa o vértice de saída e a coluna j representa o vértice de chegada. Como o modelo é preguiçoso pode existir **TRUE** na diagonal principal da matriz, e pelo fato das conexões não serem direcionadas a matriz é simétrica.

Exemplo de matriz de conexões para 5 vértices com probabilidade de conexão 0.4:

```
n = 7
A = generateMatrix(n, 0.4)
print(1*A) #1* para deixar em formato numerico

##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7]
## [1,]  0   0   0   1   0   0   0
## [2,]  0   0   1   0   0   1   0
## [3,]  0   1   0   1   1   0   1
## [4,]  1   0   1   0   0   0   0
## [5,]  0   0   1   0   1   1   0
## [6,]  0   1   0   0   1   0   1
## [7,]  0   0   1   0   0   1   0

plot(graph_from_adjacency_matrix(A, mode = 'undirected', weighted = TRUE))
```



Para cada matriz gerada é testado para cada vértice o menor caminho de volta, usando uma busca em profundidade dos caminhos possíveis da matriz e armazenado o vetor com a contagem de cada valor para \mathbf{T} encontrado. O mesmo é feito para cada combinação de vértices possíveis para encontrar os valores de \mathbf{C} . Os caminhos podem ter tamanhos até n e iremos considerar o valor $n + 1$ como sendo infinito.

Exemplo de valores de $T(v)$ para cada vértice de \mathbf{A}

```

for(i in 1:n) {
  Ti = findPath(i,i,A,0,n+1)
  cat(sprintf("T(%d) = %d\n",i, Ti))
}

```

```

## T(1) = 8
## T(2) = 4
## T(3) = 4
## T(4) = 8
## T(5) = 1
## T(6) = 4
## T(7) = 4

```

Será gerado para cada tamanho de $n \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ uma amostra de 200 matrizes e feita uma contagem para cada valor de \mathbf{T} encontrado. A distribuição é estimada tirando a média da contagem por $n * 200$. Assim:

$$\hat{P}(T = k) = \frac{1}{n * 200} \sum_{i=1}^{n*200} \mathbb{1}_{(T=k)}$$

Para a distribuição de C é usado processo similar mas como temos as combinações entre os pares serão estimados $n * n$ valores para cada matriz, assim:

$$\hat{P}(C = k) = \frac{1}{n^2 * 200} \sum_{i=1}^{n^2 * 200} \mathbb{1}_{(C=k)}$$

Tamanho da amostra

Para determinar um tamanho bom de amostra para a aproximação da estimação, fixamos $n = 8$ e geramos a distribuição e o gráfico para alguns tamanhos de amostra ($N \in \{25, 50, 75, 100, 150, 200, 250, \dots, 750, 800\}$). Depois calculamos a soma das diferenças ao quadrado entre os valores de cada distribuição e colocamos em um gráfico. No gráfico pode ser verificado se houve convergência e com que tamanho de amostra podemos considerar a convergência.

$$erro = \sum_{i=1}^{n+1} (P(T = k) - P'(T = k))^2$$

onde $P(T = k)$ é a probabilidade para o tamanho de amostra atual e $P'(T = k)$ a probabilidade da amostra anterior.

Teste de aderência

Após determinar um função de densidade de probabilidade que define a distribuição para os valores de $P(T = k)$ e $P(C = k)$, usaremos um teste de aderência para validar a hipótese. Testamos a H_0 : população segue distribuição proposta contra a H_1 : população tem outra distribuição. Para isso usaremos a seguinte estatística de teste:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Onde O_i são as frequências observadas na simulação, $E_i = P(T = i) \times N$ a frequência esperada e K representa a quantidade de pontos da distribuição. Assim χ^2 tem uma distribuição chi-quadrada com $K - 1$ graus de liberdade. Com o teste calculado definimos a região crítica como $RC = (c, \infty)$ onde $P(\chi_{s-1}^2 > c) = \alpha$, sendo α o nível de significância para o nosso teste.

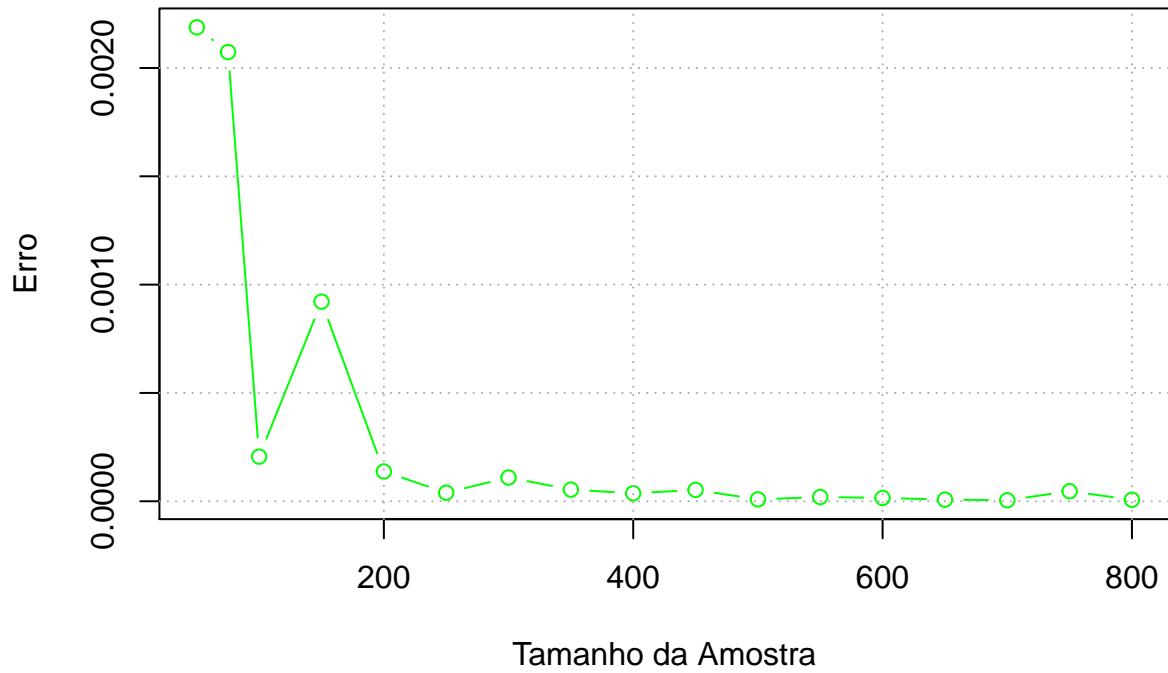
Dessa forma após as simulações e escolhida uma distribuição provável que explique a frequência observada, é feita a soma dos cálculos das diferenças, e o resultado comparado com c . Se o valor calculado for maior que c rejeitamos nossa hipótese H_0 com o nível de significância escolhido, e a distribuição selecionada não é aderente às observações. Mas se o valor calculado for menor que c então não rejeitamos H_0 e podemos considerar que a variável aleatória T tem a distribuição do modelo sugerido.

Simulação

Tamanho da amostra

Gráfico para vários tamanhos de amostra com $p = 0.4$:

Convergencia dos erros para $n = 8$

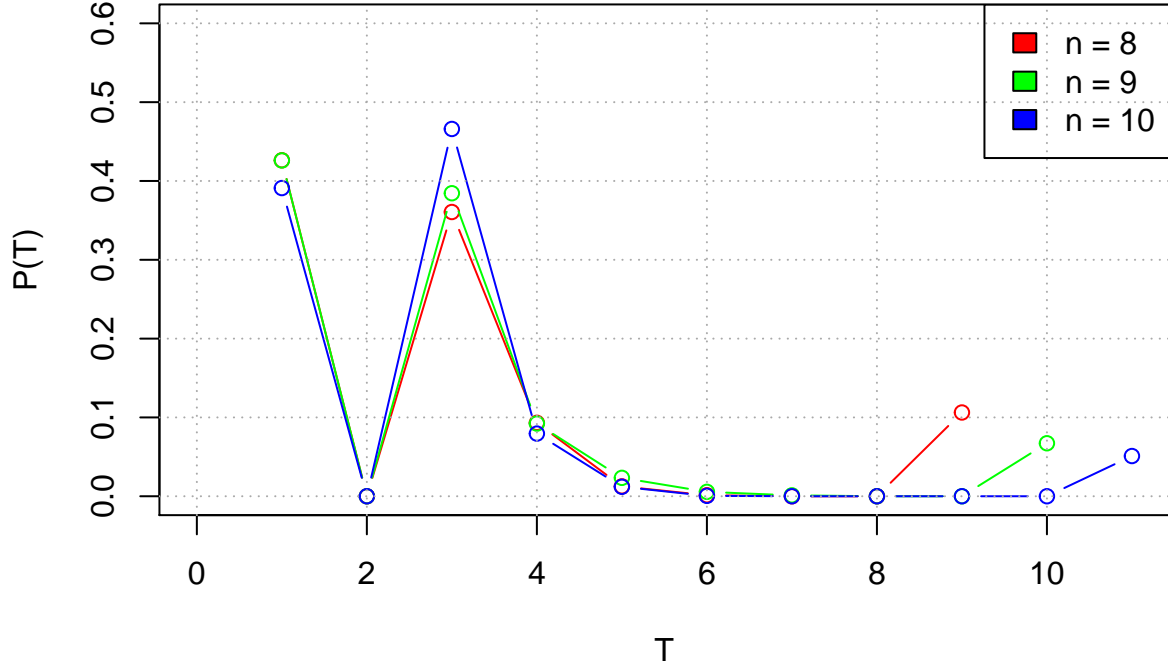


Pelo gráfico podemos considerar uma amostra com tamanho 200 razoável para as estimações de distribuição.

Distribuições para T

Valores estimados e gráficos da distribuição, usando 200 amostras, e $p = 0.4$

Dist. Amostras



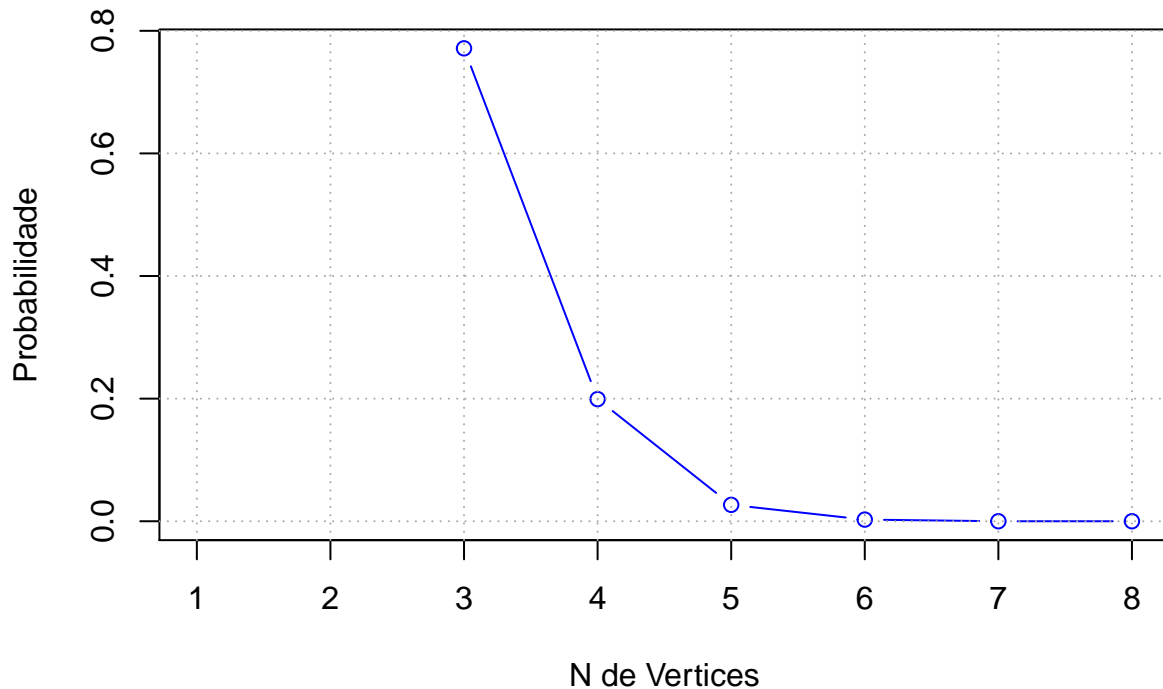
Proposta de distribuição proposta para T

Ao realizarmos os testes, percebemos que nossa distribuição aparenta ter características e formas de algumas distribuições conhecidas, sendo elas: Poisson, Exponencial e Geométrica. Neste caso vamos tentar identificar qual distribuição é mais ‘próxima’ da nossa distribuição e quais são os melhores parâmetros da distribuição escolhida.

Premissas iniciais:

Nossa simulação é um processo discreto, além disso realizamos algumas mudanças em nossas distribuições de T. Primeiramente, retiramos a observação 2 de nosso processo, porque o problema definido não permite que o tempo mínimo de volta seja 2, assim: $O_2 = 0$. Retiramos, também, a observação 1 porque, de fato, $P(O_1) = p$, pois na forma como o grafo foi definido, sortemos o caminho do loop para o mesmo nó com probabilidade p , e portanto fica bem definido que $P(O_1) = p$. Por fim e não menos importante, retiramos O_{inf} porque ele “inviesa” nossa distribuição esperada.

A distribuição sem os dados citados tem uma distribuição reescalada na forma:



Parâmetros da distribuição:

Para encontrar os parâmetros da distribuição vamos usar as leis dos grandes números que diz que a média da amostra converge para a média da população quando o tamanho da amostra cresce, em outras palavras:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}_n \rightarrow \mu$$

Usaremos essa premissa para encontrar os parâmetros da nossa distribuição. Sendo assim devemos conhecer a esperança da distribuição geométrica, poisson e exponencial:

$$\begin{aligned} E(X \sim Geo(p)) &= \frac{1}{p} \\ E(X \sim Exp(\lambda)) &= \lambda \\ E(X \sim Pois(\lambda)) &= \lambda \end{aligned}$$

Realizando simulações com as premissas citadas obtemos os seguintes distribuições:

X - 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10

Exponencial

Geométrica

Poisson

Usando os resultados da tabela podemos calcular a $E(T) = \sum_{i=1}^n T_i * P(T = i) = xxx \rightarrow p = \frac{1}{E(T)}$ para cada uma das distribuições:

$$E(X \sim Geo(p)) = \frac{1}{p} \rightarrow E(X \sim Exp(\lambda)) = \lambda E(X \sim Pois(\lambda)) = \lambda$$

A seguir o resultado de cada uma das distribuições com os parâmetros encontrados:

#IMAGEM DAS DISTRIBUIÇÕES JUNTAS:

A partir destas distribuições tomamos aquela que possui menor distância entre a distribuição simulada e as distribuições propostas.

$$d_{(Geo,proposta)} = d_{(Exp,proposta)} = d_{(Pois,proposta)} =$$

Portanto a distribuição que será assumida é a Geométrica.

Em seguida iremos realizar o teste de χ^2 para avaliarmos se estamos cometendo o erro na escolha da distribuição.

##Teste de aderência: Com nossa função proposta em mãos, podemos realizar o teste χ^2 com $\alpha = 5$ de tolerância de que nossa hipótese alternativa. para avaliarmos se estamos ou não cometendo o erro de escolher a distribuição Geométrica com parâmetro(p=)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

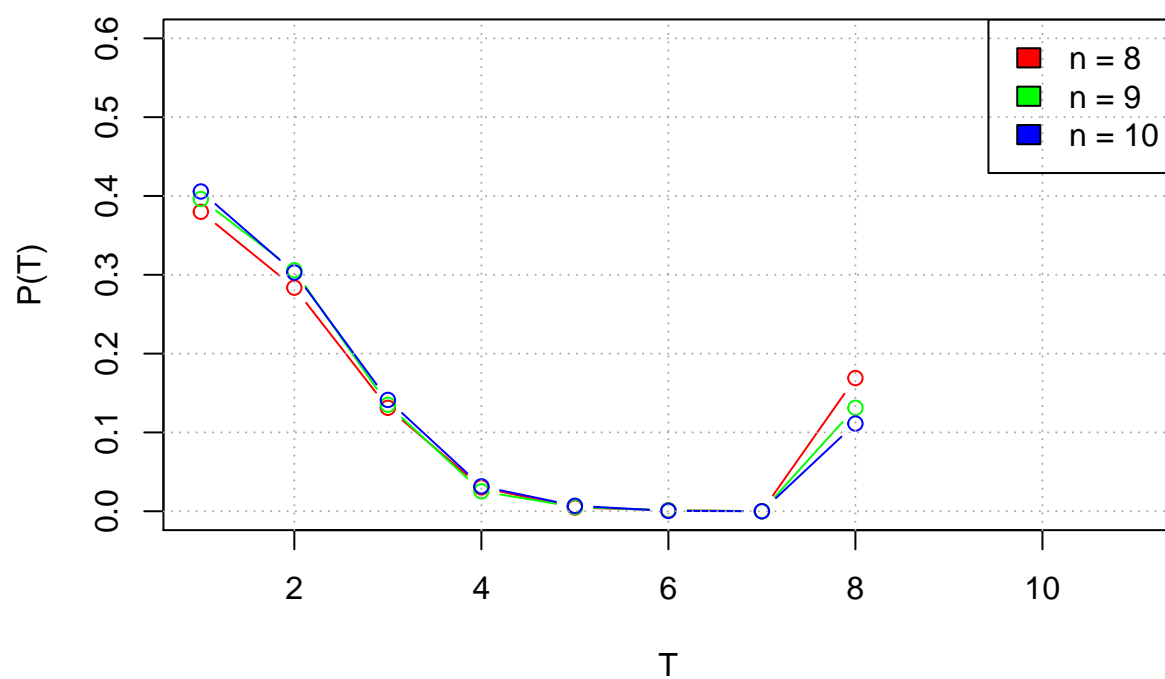
Onde O_i são as frequências observadas na simulação e $E_i = P(T = i) \times N$ com $T \sim (Poisson, Exponencial, Geometrica)$. K representa o número de repetições.

Teste de aderência para T

Distribuições para C

Valores estimados e gráficos da distribuição. Como a quantidade de testes aumenta em n vezes para a distribuição C, reduzimos a quantidade de matrizes geradas pela metade, e portanto usamos uma amostra de tamanho 100 com $p = 0.4$.

Dist. Amostras



Teste de aderência para C