08

CHAPTER

LINEAR ALGEBRA

벡터의 내적과 외적

개요

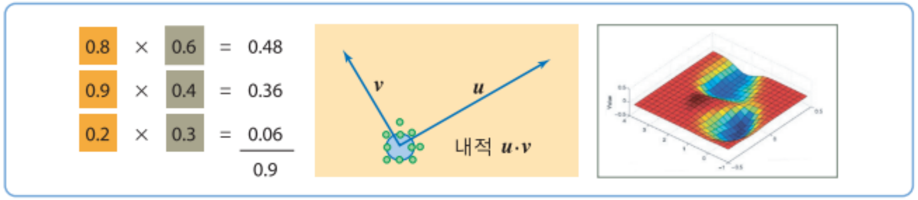
- ❖ 두 벡터 사이의 성분을 곱하여 합하는 내적의 정의와 몇 가지 예를 살펴봄
- ❖ 노름과 벡터들 사이의 거리를 정의하고, 벡터의 내적과 노름, cosθ와의 관계식을 정립함
- ❖ 내적 공간에서의 성질들을 고찰하며 벡터들의 직교와 코시-슈바르츠 부등식 등을 고찰함
- ❖ 외적의 개념을 정의하고 외적의 성질들을 살펴본 후 벡터공간 내의 삼각형의 면적, 평행사변형의 면적, 평행육면체의 체적 등에 응용되는 예를 살펴봄
- ❖ MATLAB을 이용하여 내적을 구하는 방법을 예제를 통하여 실습함
- ❖ 벡터 내적과 인공지능을 다룸

08 CHAPTER 벡터의 내적과 외적

LINEAR ALGEBRA

CONTENTS

8.1 내적



8.1.1 내적의 정의

정의 ❽−1 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$가 다음과 같은 R^n상의 벡터라고 할 때

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

R^n상의 내적(inner product, dot product, 內積)은 다음과 같은 스칼라 값으로 정의되며 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$로 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

예를 들면, $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$와 $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$가 R^2상의 벡터라고 할 때, R^2상의 내적은 다음과 같이 정의되며 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$로 나타낸다.

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

또한 $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$와 $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$가 R^3상의 벡터라고 할 때, R^3상의 내적은 다음과 같이 정의되며 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$로 나타낸다.

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

예제 8-1

MATLAB

u와 v가 다음과 같이 주어졌을 때 $u \cdot v$와 $v \cdot u$를 구해 보자.

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

풀이

$$u \cdot v = u^T v = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = (2)(3) + (-5)(2) + (-1)(-3) = -1$$

$$v \cdot u = v^T u = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} = (3)(2) + (2)(-5) + (-3)(-1) = -1$$ ■

예제 ❽-2

$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$가 다음과 같을 때 다음에 해당하는 내적을 각각 구해 보자.

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2\\-3\\5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}4\\2\\-3\end{bmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ (2) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}$ (3) $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$

풀이 (1) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=2-6+20=16$

(2) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}=4+4-12=-4$

(3) $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=8-6-15=-13$ ■

8.1 내적

정리 ❽−1 두 공간벡터에서 표준기저로 표현된 벡터의 경우에도 내적은 각 성분끼리 곱해서 합하면 된다.

$$\boldsymbol{u} = u_1 \boldsymbol{i} + u_2 \boldsymbol{j} + u_3 \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{v} = v_1 \boldsymbol{i} + v_2 \boldsymbol{j} + v_3 \boldsymbol{k}$$

의 내적은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

예를 들면, $\boldsymbol{u} = -3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$와 $\boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$인 경우의 내적은 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (-3) \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) = 5$이다.

8.1 내적

정의 ❽-2

벡터 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$의 노름(norm) 또는 길이(length)는

$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$이고, 벡터 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$와 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 사이의 거리(distance)는 $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$ 또는 $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|$로 표시하며,

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}$$이다.

예제 ❽-3 다음에 주어진 두 벡터 사이의 거리를 구해 보자.

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

풀이 $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\| = \sqrt{(-4-1)^2 + (3-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{30}$ ■

예제 ❽-4 다음과 같은 벡터 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$에 대하여 주어진 연산을 구해 보자.

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}2\\-5\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-7\\-4\\6\end{bmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ (2) $\|\boldsymbol{u}\|^2$ (3) $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2$

풀이 (1) $2\cdot(-7)+(-5)\cdot(-4)+(-1)\cdot 6=0$

(2) $2^2+(-5)^2+(-1)^2=30$

(3) $9^2+(-1)^2+(-7)^2=81+1+49=131$ ■

8.1 내적

정의 ❽−3 | 두 벡터 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$가 이루는 각(angle)을 $\theta\,(0 \leq \theta \leq \pi)$라고 할 때, $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$의 **내적**은 다음과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \begin{cases} \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta & \boldsymbol{u}\neq 0\text{이고 } \ \boldsymbol{v}\neq 0\text{일 때} \\ 0 & \boldsymbol{u}=0\text{이거나 } \boldsymbol{v}=0\text{일 때} \end{cases}$$

따라서 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 사이의 각이 θ라면

$\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|}$이다.

8.1 내적

예제 ❽-5

다음에 주어진 두 벡터 사이의 거리와 각을 구해 보자.

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

풀이 먼저 내적을 구하면 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(1)(0)+(1)(1)+(0)(1)=1$이다.

$$\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}$$
$$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}$$

따라서

$$\cos\theta=\frac{(1)(0)+(1)(1)+(0)(1)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2}$$

따라서 $\theta=60^\circ$이다. ■

8.1 내적

여기서 잠깐 !!

직각삼각형의 비율을 통한 $\cos\theta$의 값이 생각나는가요?

(1) $\cos 0^\circ = 1$

(2) $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(4) $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

(5) $\cos 90^\circ = 0$

8.1 내적

예제 8-6

두 벡터 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$와 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}$ 사이의 각을 구해 보자.

풀이 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=1\cdot 2+(-1)(-1)+0\cdot 2=3$

$$\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}$$
$$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$$

이므로 두 벡터 사이의 각을 θ라고 하면

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

그러므로 $\theta=45^\circ\left(\frac{\pi}{4}\right)$이다. ■

8.1 내적

정리 ❽-2 [피타고라스 정리] 두 벡터 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 수직일 필요충분조건은

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2 \text{이다.}$$

정리 ❽-3 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$가 R^2이나 R^3상의 벡터라고 하고, c를 스칼라라고 할 때 R^2과 R^3상의 내적은 다음과 같은 성질들을 가진다. 또한 이와 같은 내적의 성질을 만족하는 벡터공간을 내적공간(inner product space)이라고 한다.

(1) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\geq 0$

(2) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$ (교환법칙)

(3) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ (배분법칙)

(4) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$

(5) $c\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$

(6) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}\cdot\mathbf{u}=0$

(7) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=\|\mathbf{u}\|^2$

8.1 내적

정의 ❽-4 V가 내적공간일 때 V상의 두 개의 벡터 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$에서 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$이면 직교(orthogonal, 直交)한다 또는 수직이라고 한다.

예를 들면, $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}6\\-3\end{bmatrix}$는 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(1)(6)+2(-3)=0$이므로 직교한다.

여기서 잠깐!!

내적 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$일 경우 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta$도 0이다. 따라서 $\cos\theta$도 0이어야 하는데, 이런 경우는 두 벡터 사이의 각이 90도($\theta=\frac{\pi}{2}$)이므로 직교한다.

MATLAB

예제 8-7

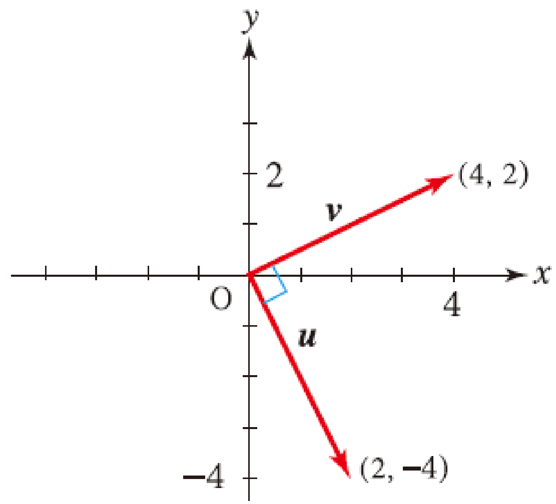
두 개의 벡터 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$가 직교하는지를 살펴보자.

풀이 두 벡터 사이의 내적을 구하면

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(2)(4)+(-4)(2)=0$$

이므로 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$는 직교한다. ■

이것을 그림으로 나타내면 〈그림 8.1〉과 같다.



〈그림 8.1〉 직교하는 두 벡터

8.1 내적

예제 8-8 다음의 두 벡터 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$가 직교하는지를 살펴보자.

$$(1)\ \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}3\\2\\-5\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-4\\1\\-2\\6\end{bmatrix}\qquad (2)\ \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2\\0\\-8\\2\end{bmatrix}$$

풀이 내적이 0인지를 확인한다.

(1) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(3)\cdot(-4)+(2)\cdot(1)+(-5)\cdot(-2)+(0)\cdot 6=0$

따라서 직교한다.

(2) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0\cdot 2+(-1)\cdot 0+1\cdot(-8)+4\cdot 2=0$

따라서 직교한다. ■

8.1 내적

두 벡터 사이의 내적은 각 성분끼리 곱한 다음 모두 더해서 구합니다.
u=[1 2], v=[-2 1]
u·v=1·(-2)+2·1=0
내적과 노름을 이용해서 두 벡터 사이의 각도와 직교성을 구할 수 있는데, 이 특성은 다양하게 응용됩니다.
코시-슈바르츠 부등식도 여러 분야에 응용되므로 상당히 중요하답니다.
||u·v||≤||u|| ||v||

예제 8-9 다음과 같은 R^3상의 벡터 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$가 주어졌을 때, 이들 벡터들이 서로 직교하는지를 살펴보자.

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}1\\-4\\3\end{bmatrix}$$

풀이 세 벡터들 간의 내적을 구해서 내적이 0이면 직교한다.

$$(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})=1+2-3=0$$
$$(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{w})=1-4+3=0$$
$$(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w})=1-8-9=-16$$

따라서 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{w}$는 직교한다. 그러나 $\boldsymbol{v}$와 $\boldsymbol{w}$는 직교하지 않는다. ■

8.1 내적

정리 ❽−4 u와 v가 영벡터가 아닐 때 다음과 같은 관계와 그 역도 성립한다.

(1) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$이면 θ는 직각 ($\cos\theta = 90^\circ$)

(2) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0$이면 θ는 예각

(3) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} < 0$이면 θ는 둔각

예를 들면, 벡터 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$과 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 사이의 내적은 1로써 양수이므로 각은 예각인 45도이다.

8.1 내적

정의 ❽-5

R^n 의 벡터들의 집합 $S=\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$가 다음 성질을 만족시킬 때 **정규 직교 집합(orthonormal set)**이라고 한다.

$$v_i \cdot v_j = 0 \quad (i \neq j) \cdots\cdots (1)$$
$$v_i \cdot v_i = 1 \quad \cdots\cdots (2)$$

여기서 (1)식만 만족시킬 때는 직교 집합(orthogonal set)이라고 한다.

정리 ❽-5 $S=\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ 가 영벡터가 아닌 벡터들의 직교 집합이면 집합 S는 선형독립이다.

증명 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 가 상수일 때

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k = \mathbf{0}$ 이라고 하자.

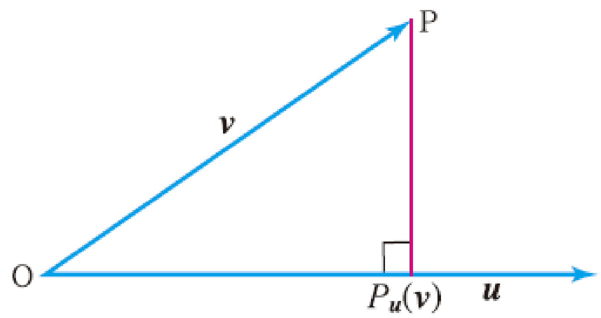
그러면 $i=1, 2, \cdots, k$에 대해

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot v_i &= c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_i v_i + \cdots + (c_k v_k) \cdot v_i \\
&= c_1 (v_1 v_i) + c_2 (v_2 v_i) + \cdots + c_i (v_i v_i) + \cdots + c_k (v_k v_i) \\
&= c_1 \mathbf{0} + c_2 \mathbf{0} + \cdots + c_i |v_i|^2 + \cdots + c_k \mathbf{0} = c_i |v_i|^2
\end{aligned}
$$

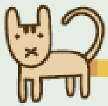
이다. 그런데 $v_i \neq \mathbf{0}$이므로 $|v_i|^2 > 0$이 되어

$c_i = 0$이 된다. 또한 이것은 모든 $i=1, 2, \cdots, k$에 대해 성립하므로 S는 선형독립이다. ■

정의 ❽-6 두 벡터 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$에 대하여 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq 0$라고 할 때, $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$ 사이의 거리가 가장 가까운 벡터, 즉 〈그림 8.2〉와 같이 벡터 $\boldsymbol{v}$를 수직으로 내린 발을 $p_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v})$로 나타내고, 이를 $\boldsymbol{u}$에 대한 $\boldsymbol{v}$의 정사영(orthogonal projection, 正射影)이라고 한다.



〈그림 8.2〉 두 벡터의 정사영



정리 ❽-6 [코시-슈바르츠 부등식(Cauchy-Schwartz Inequality)]

두 개의 벡터 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$에서 $\|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\| \le \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$가 항상 성립한다.

증명 (간편한 증명)

$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta$에서 $-1 \le \cos\theta \le 1$이므로

$$-\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| \le \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} \le \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$$

따라서 $\|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}\| \le \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$이다. ■

정리 ❽-7 **[삼각 부등식(Triangle Inequality)]**

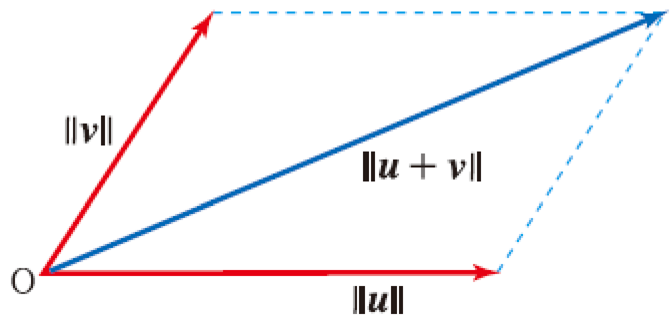
두 개의 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$에서 $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$이다.

증명

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &\le \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2\end{aligned}$$

따라서 $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$이다.

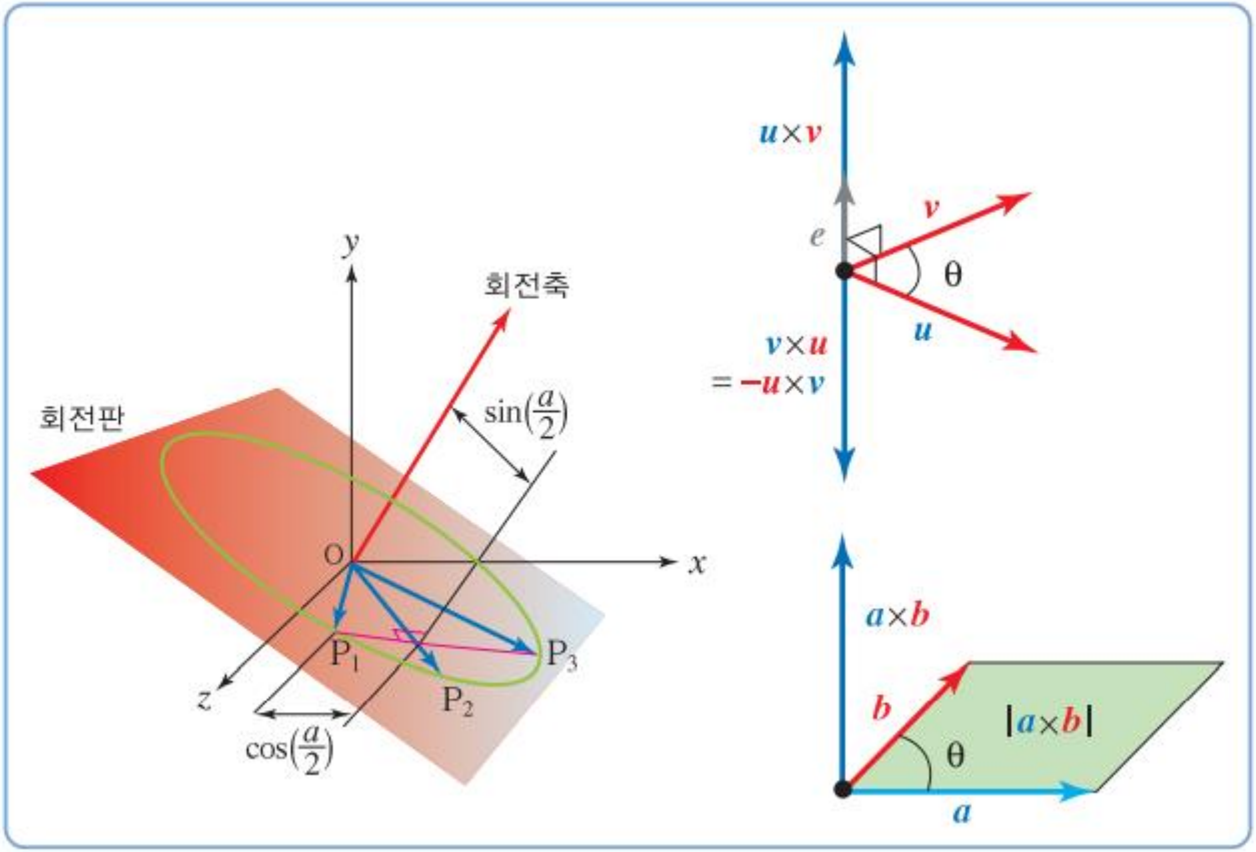
이것을 그림으로 나타내면 〈그림 8.3〉과 같이 두 벡터의 합의 길이는 각각의 길이의 합과 같거나 작다는 것을 의미한다. ■



〈그림 8.3〉 벡터의 삼각 부등식

여기서 잠깐!! 벡터의 내적은 신경망에서의 입력과 연결강도와의 곱을 효율적으로 수행한다.

벡터에서의 외적

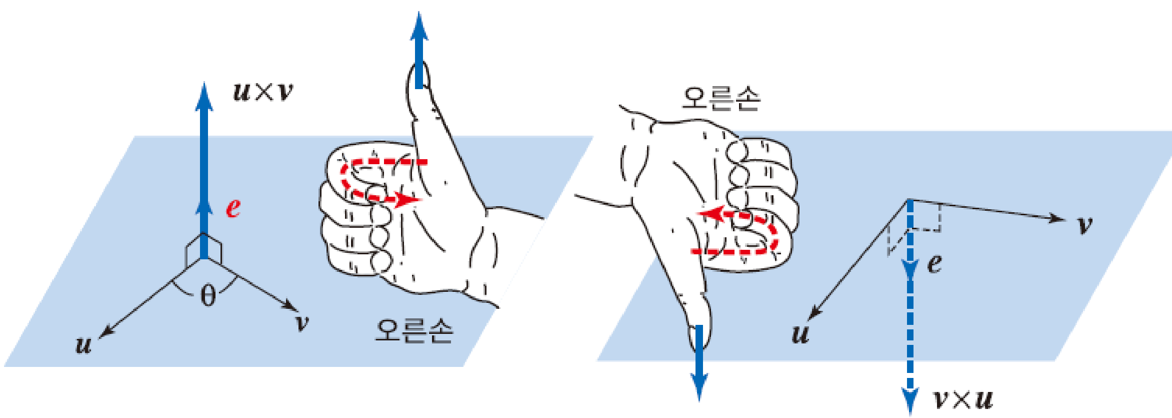


8.2 외적

정의 8-7 R^3상의 두 벡터 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$의 다음과 같은 벡터 곱을 외적(cross product, 外積)이라고 하는데, 〈그림 8.4〉와 같이

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| \sin\theta)\,\boldsymbol{e}$$

인 벡터이다. 여기서 θ는 $0 \le \theta \le \pi$인 두 벡터 사이의 각이고, 벡터 $\boldsymbol{e}$는 오른손 법칙에 따라 방향을 가지는 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$에 의해 생성된 평면과 수직인 단위벡터이다. 즉, $\boldsymbol{e}$는 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$에 공통으로 수직인 단위벡터인데 2가지 방향을 가질 수 있다.



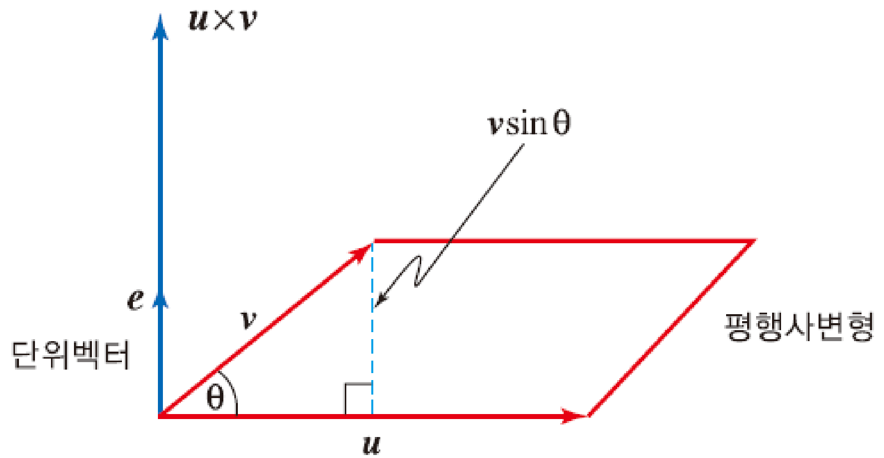
〈그림 8.4〉 $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$의 크기와 방향

외적

정리 8-8 벡터 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면, $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$의 크기는

$$\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\sin\theta$$

인데, 이 크기는 벡터 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$가 이루는 평행사변형의 면적에 해당된다.
즉, 〈그림 8.5〉와 같이 외적 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$는 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$에 각각 수직인 벡터이며, 그 크기는 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$가 이루는 평행사변형의 면적과 같다.



〈그림 8.5〉 두 벡터의 외적과 면적

정리 ❽-9

$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$와 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}$ 또는 두 벡터 $\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{i}+u_2\boldsymbol{j}+u_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}$가

R^3상의 벡터들일 경우 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$의 외적 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$는 다음과 같이 R^3상의 벡터로 정의된다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}u_2&u_3\\v_2&v_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}u_1&u_3\\v_1&v_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}u_1&u_2\\v_1&v_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

이것을 계산하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(u_2v_3-u_3v_2,\ u_3v_1-u_1v_3,\ u_1v_2-u_2v_1)$$

예제 8-10 두 벡터 $\boldsymbol{u}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$에 대해 외적 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$를 구해 보자.

풀이 행렬식을 이용하면 상당히 편리하다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-1&2\\1&-2&4\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}-1&2\\-2&4\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}3&2\\1&4\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}3&-1\\1&-2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\&=(-4+4)\boldsymbol{i}-(12-2)\boldsymbol{j}+(-6+1)\boldsymbol{k}\\&=0\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}\quad\blacksquare\end{aligned}$$

8.2 외적

정리 ❽-10 R^3상의 벡터 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$와 스칼라 α에 대하여 다음과 같은 외적의 성질이 성립한다.

(1) $\boldsymbol{u}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}\times\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$

(2) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=-(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})$ (교대법칙)

(3) $(\alpha\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{v}=\alpha(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\times(\alpha\boldsymbol{v})$ (배분법칙)

(4) $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w})$

(5) $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

(6) $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=0$, 즉 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$는 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$ 모두와 직교한다.

(7) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$일 때 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$는 평행이다.

(8) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$

(9) $\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\|$는 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$에 의해 결정되는 평행사변형의 면적이다.

(10) $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=\pm$ $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$에 의해 결정되는 체적이다.

예제 ❽-11 R^3상의 벡터 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$에 있어서 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=-(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})$가 성립함을 확인해 보자.

풀이

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ v_1 & v_2 & v_3\\ u_1 & u_2 & u_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}v_2 & v_3\\ u_2 & u_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}v_1 & v_3\\ u_1 & u_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}v_1 & v_2\\ u_1 & u_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}\ (\text{행 교환})$$

$$=-\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ v_1 & v_2 & v_3\\ u_1 & u_2 & u_3\end{vmatrix}$$

$$=-(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})$$

행렬에서 행을 교환하면 원래의 행렬식의 값 d를 $-d$로 바꾼다.

따라서 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=-(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})$이다. ■

정리 ❽-11 만약 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$가 같은 방향 또는 반대 방향을 가지거나 어느 하나가 영벡터이면 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$이다. 그 밖의 경우에는 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$는 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$를 이웃하는 두 변으로 가지는 평행사변형의 면적과 같고, 그 방향은 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$에 모두 수직이다.

정리 ❽-12 표준단위벡터 $e_1=(1, 0, 0)$, $e_2=(0, 1, 0)$, $e_3=(0, 0, 1)$에 대하여

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_3=\mathbf{0}\\
&\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3=-\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_1\\
&\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_2\\
&\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}$$

이 된다.

8.2 외적

외적이란 두 벡터 u와 v의 벡터곱인 $u \times v = (\|u\|\|v\| \sin\theta)\, e$를 말합니다.
$u \times v$의 결과가 벡터인지는 어떻게 아나요?
식의 맨 끝에 단위벡터인 e가 달려 있는 것이 보이나요? 두 벡터가 만드는 평행사변형이 오른손 법칙에 따라 그 방향으로 힘을 받는 것이지요.
$u \times v = (\|u\|\|v\| \sin\theta) e$
외적은 주로 어디에 이용되나요?
물리량이 작용되는 곳에 광범위하게 이용됩니다. 여기서는 벡터공간 내의 평행사변형과 삼각형의 면적과 평행육면체의 체적을 구해 봅니다.

예제 8-12

R^3상의 벡터 $\boldsymbol{u}=(3, 1, 0)$와 $\boldsymbol{v}=(1, 3, 2)$에 의해 결정되는 평행사변형의 면적을 구해 보자.

풀이 면적을 구하는 공식에 따라 심볼행렬(Symbolic matrix)을 만들면 다음과 같다.

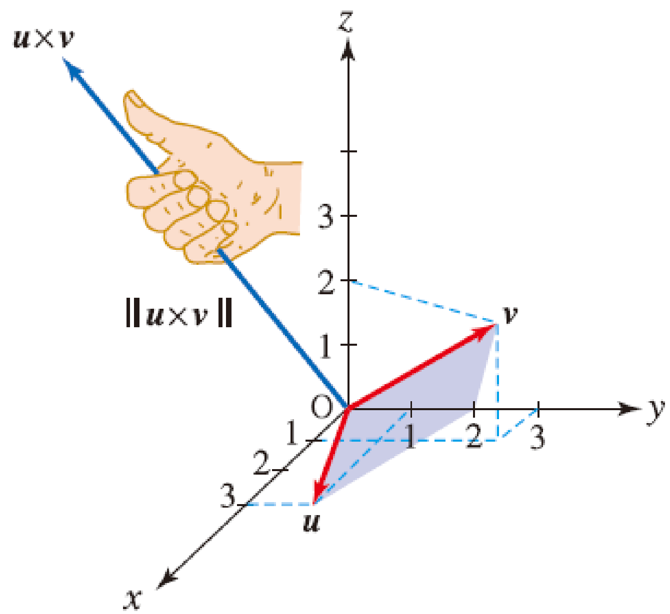
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

외적을 구하면

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} \\ &= 2\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

따라서 〈그림 8.6〉에 나타난 평행사변형의 면적은 다음과 같다.

$$\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = 2\sqrt{1+9+16} = 2\sqrt{26} \quad \blacksquare$$



〈그림 8.6〉 평행사변형의 면적

예제 8-13

R^3상의 꼭지점들인 $(-1, 2, 0)$, $(2, 1, 3)$, $(1, 1, -1)$로 이루어지는 삼각형의 면적을 구해 보자.

풀이 점 $(-1, 2, 0)$을 벡터공간의 삼각형의 기준점으로 잡고, 그 점으로부터 시작하여 $(2, 1, 3)$, $(1, 1, -1)$ 점에 이르는 새로운 벡터들을 설정한다. 즉,

$$\boldsymbol{u} = (2, 1, 3) - (-1, 2, 0) = (3, -1, 3)$$
$$\boldsymbol{v} = (1, 1, -1) - (-1, 2, 0) = (2, -1, -1)$$

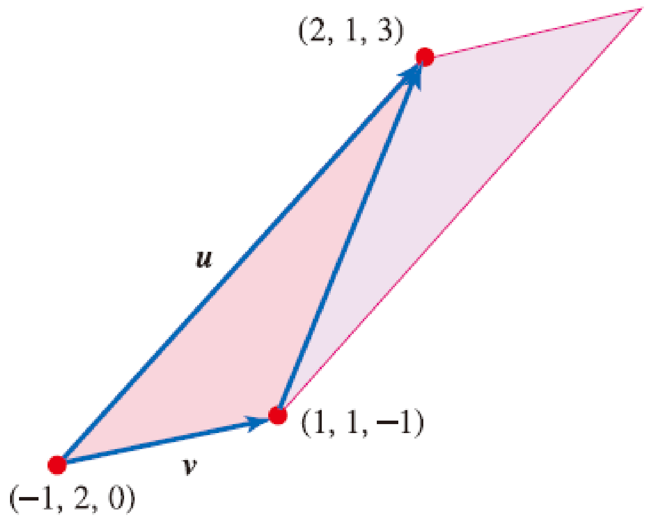
이제 $\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|$는 이들 벡터로부터 결정되는 평행사변형의 면적이고 구하려고 하는 삼각형의 면적은 〈그림 8.7〉에 나타난 평행사변형 면적의 $\frac{1}{2}$이다. 따라서 다음과 같은 심볼행렬을 만든다.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$
$$= 4\boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$

이다. 따라서

$$\|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\| = \sqrt{16+81+1} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

그러므로 구하려는 삼각형의 면적은 $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$이다. ■



〈그림 8.7〉 R^3상의 삼각형의 면적

예제 ❽-14

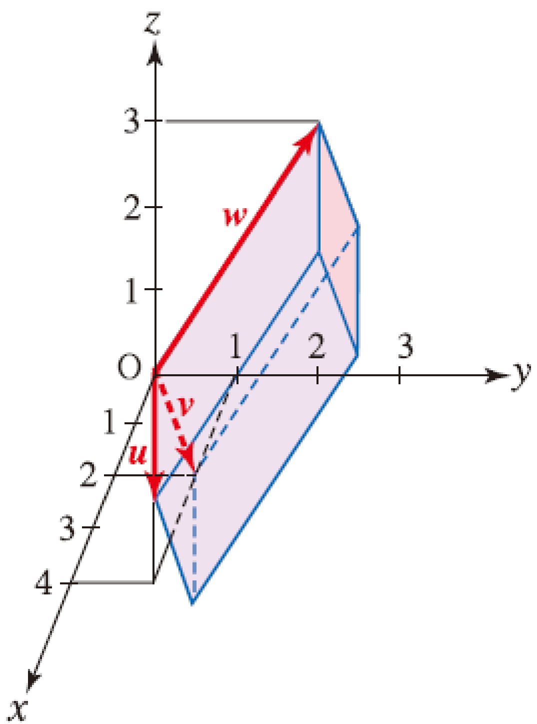
평행육면체(parallelepiped)의 체적은 그것을 이루는 벡터들의 행렬식의 값으로 결정된다. 다음의 벡터들에 의해 구성되는 평행육면체의 체적을 구해 보자.

$$\boldsymbol{u} = (4,\ 1,\ 1),\quad \boldsymbol{v} = (2,\ 1,\ 0),\quad \boldsymbol{w} = (0,\ 2,\ 3)$$

풀이 주어진 벡터들로 이루어지는 평행육면체는 〈그림 8.8〉과 같으며 그것의 체적은 다음의 행렬식에 의해 결정된다.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 10 \quad \blacksquare$$



〈그림 8.8〉 평행육면체의 체적

8.3 MATLAB에 의한 연산

실습 ❽-1

예제 ⑧-1 MATLAB

u와 v가 다음과 같이 주어졌을 때 $u \cdot v$와 $v \cdot u$를 구해 보자.

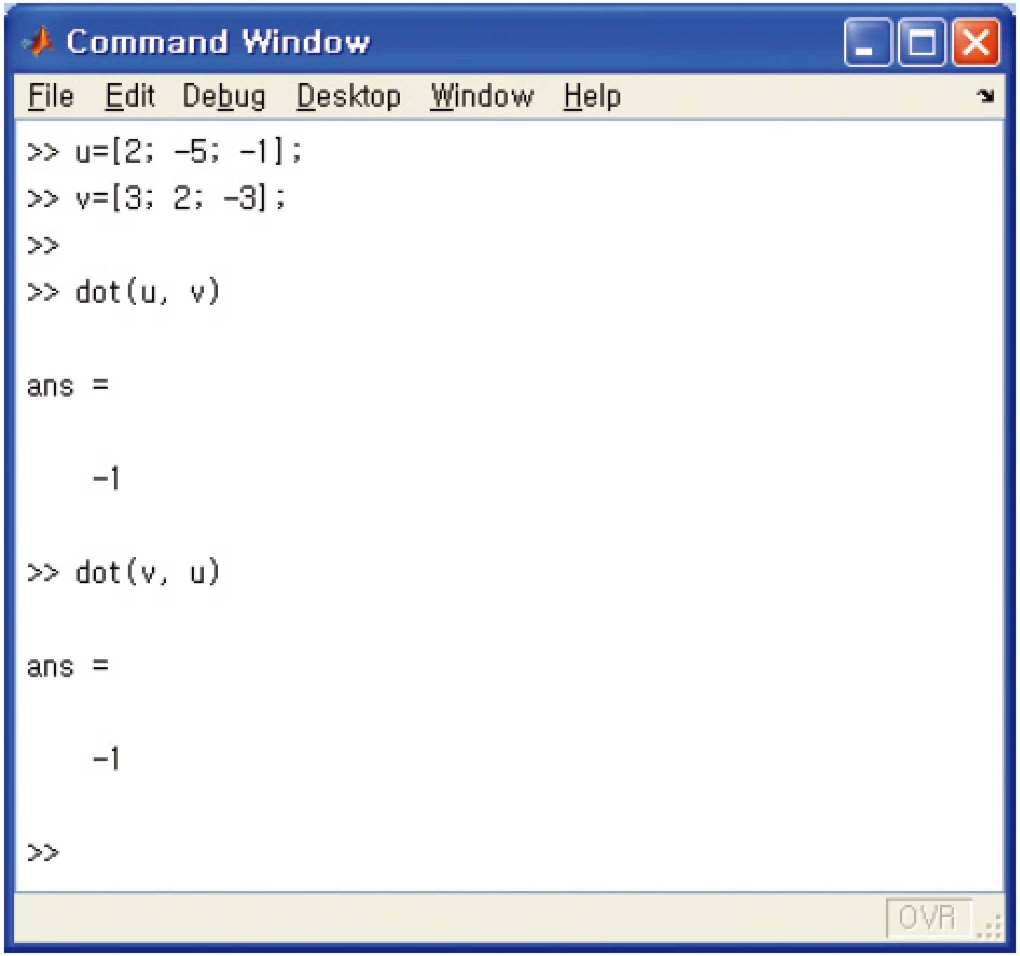
$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

풀이

$$u \cdot v = u^T v = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = (2)(3) + (-5)(2) + (-1)(-3) = -1$$

$$v \cdot u = v^T u = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} = (3)(2) + (2)(-5) + (-3)(-1) = -1$$ ■

MATLAB에 의한 연산



실습 ❽−2

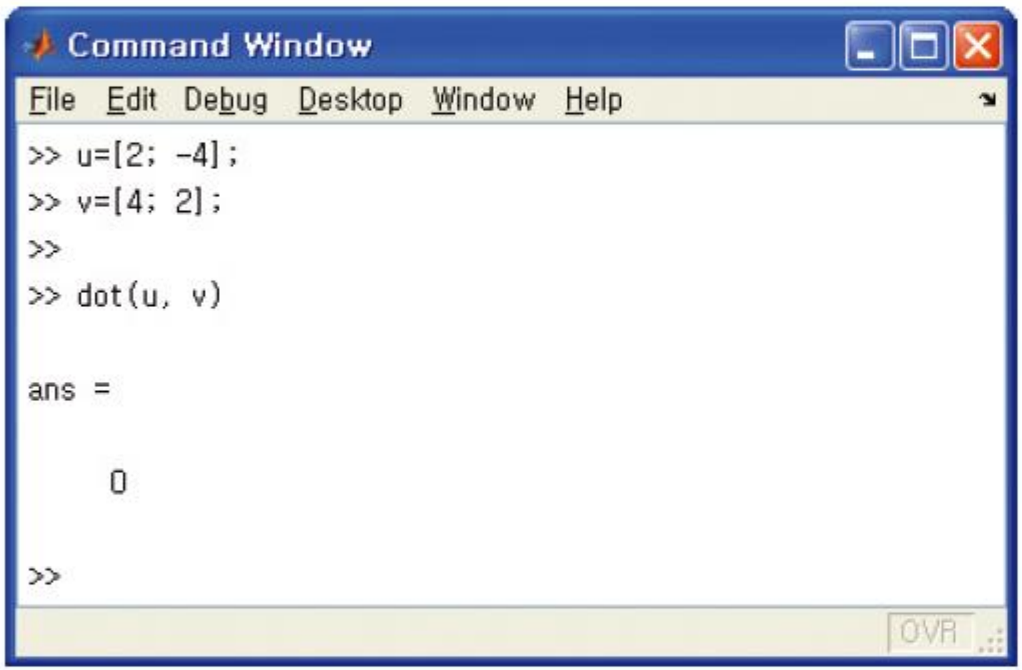
예제 ⑧−7 MATLAB

두 개의 벡터 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$가 직교하는지를 살펴보자.

풀이 두 벡터 사이의 내적을 구하면

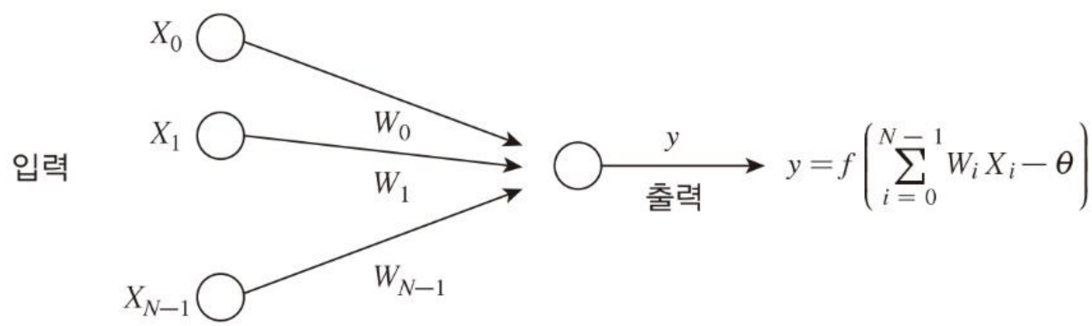
$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(2)(4)+(-4)(2)=0$$

이므로 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$는 직교한다. ■


Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help
>> u=[2; -4];
>> v=[4; 2];
>>
>> dot(u, v)
ans =
0
>>
OVR

8.4.1 인공지능과 벡터의 내적

- 인공지능 중 신경망에서는 <그림 8. 9>와 같이 뉴런의 입출력을 계산함
- 여러 뉴런들로부터 들어오는 입력값 X_i와 그 사이의 연결강도 W_i를 곱함
- 그 후 그들을 모두 더한 후 합성함수 f를 적용하여 최종 출력값을 계산함



〈그림 8.9〉 뉴런의 입출력 계산

벡터의 내적 계산

- 뉴런의 입력값과 그에 대응하는 연결강도를 각각 곱하여 합함
- 사실상 벡터 내적의 개념을 이용, 행렬의 곱을 활용하는 것이 매우 효율적임
- $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$가 R^n상의 벡터일 때 R^n상의 벡터의 내적(inner product)은 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$로 나타냄
- 이 경우 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$의 결과값은 벡터가 아닌 스칼라임

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

벡터 내적 계산의 예

- 예를 들어 벡터 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$가 R^3 상의 벡터일 때, R^3 상의 내적 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$의 값 계산 방법

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

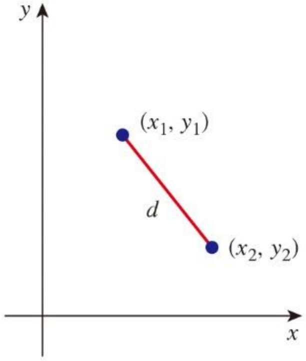
- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 1 \times 4 + 2 \times 2 + 4 \times (-3) = -4$가 됨

- 계산이 매우 복잡한 경우 소프트웨어인 MATLAB을 이용할 수도 있음

8.4.2 거리 개념과 인공지능 응용

(1) 유클리드 거리(Euclidean distance)

- 유클리드 거리는 두 점 사이의 거리를 계산할 때 흔히 쓰는 방법임
- 이 거리에 대응하는 노름(norm)을 유클리드 노름(Euclidean norm)이라 부름
- 인공지능에서는 유클리드 거리를 이용하여 패턴(pattern)을 분류하는 경우가 많음
- 유클리드 거리는 다양한 분야에 활용됨



$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

〈그림 8.10〉 두 점 사이의 거리

두 벡터 사이의 유클리드 거리 구하기

- 가령 $u=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$, $v=\begin{bmatrix}4\\2\\-3\end{bmatrix}$ 일 때 두 벡터 사이의 유클리드 거리

$$d=\sqrt{(4-1)^2+(2-2)^2+(-3-4)^2}=\sqrt{58}$$ 이 됨

- n차원 공간의 거리로 일반화한 $P(p_1, p_2, \cdots, p_n)$와 $Q(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 사이의 거리

$$\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+\cdots+(q_n-p_n)^2}$$
$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(q_i-p_i)^2}$$

- 신경망의 K-mean, K-NN 등의 분류를 위한 클러스터링(clustering) 등에 활용 가능

(2) 벡터 내적의 인공지능에의 활용

- 신경망에서 뉴런으로 들어오는 입력과 연결강도와의 곱은 벡터의 내적으로 연산됨
- 신경망의 연산에 벡터가 필수적으로 활용됨
- 인공지능 관련 지식에는 누구에게나 벡터에 대한 기초적인 이해가 필요함
- 유클리드 거리는 각 점 사이의 거리를 측정하는 좋은 도구임
- 유클리드 거리는 신경망의 분류 작업에 매우 유용하게 활용됨

벡터의 내적과 외적의 생활 속의 응용

- 내적은 복잡한 벡터공간에서 수직과 직선 방정식을 구하는 데 이용된다.
- 내적은 역학, 자기공학, 전기공학 등에 많이 활용된다.
- 내적은 신경망에서의 입력과 연결강도와의 곱을 효율적으로 수행한다.
- 외적은 벡터공간에서 면적, 체적 등을 매우 쉽게 구할 수 있다.
- 외적은 물리학에서 운동량과 토크를 구하는 데 쓰인다.
- 외적은 자기장에서 로렌츠의 힘(Lorentz force) 등에 매우 유용하게 쓰이며, 초음파 탐지, 전자레인지, 스피커 원자력 등에도 광범위하게 응용된다.