07

CHAPTER

고유값과 고유벡터

LINEAR ALGEBRA

개요

- 특성다항식을 정의하고 그것으로부터 고유값을 정의한 후 고유값을 구하는 알고리즘에 따라 예제들을 살펴봄
- 고유값에 대응하는 고유벡터를 구하는 방법에 따라 몇 가지 예를 통하여 고유벡터를 구함
- 고유값이 가지는 여러 가지 성질들을 살펴봄
- 어떤 벡터가 선형변환을 한 후에도 방향은 그대로 유지한 채 크기만 m만큼 변화하는 것의 의미와 여러 가지 응용에 대해서도 살펴봄
- MATLAB에 의해 고유값과 고유벡터를 구하는 방법을 예제를 통하여 실습함

07

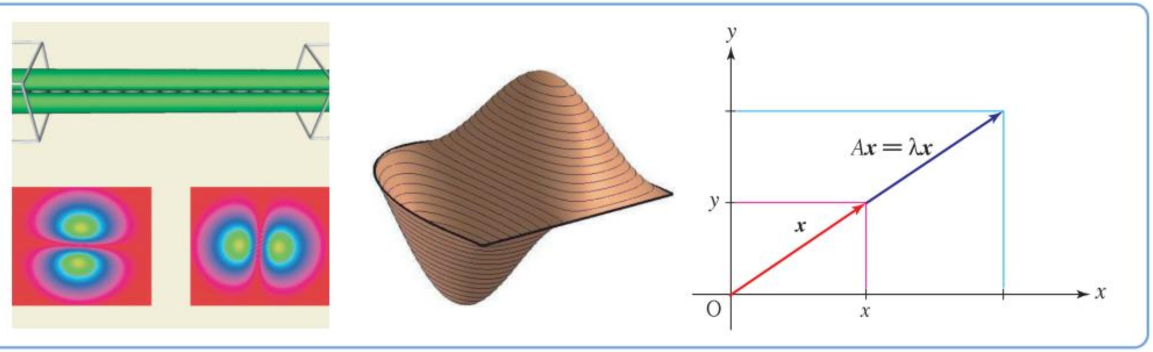
CHAPTER

고유값과 고유벡터

LINEAR ALGEBRA

CONTENTS

7.1 고유값과 고유벡터



7.1.1 특성다항식과 고유값

정의 ❼-1 | 행렬 A가 $n \times n$ 행렬이고, I가 항등행렬일 때

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

인 선형시스템에서 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$인 해가 존재하기 위한 필요충분조건은 행렬식 $|A - \lambda I| = 0$이다.

7.1 고유값과 고유벡터

정의 ❼-2 다음과 같은 $n \times n$ 행렬 A에 대해

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

를 A의 특성다항식(characteristic polynomial) 또는 고유다항식이라고 한다.

또한

고유값과 고유벡터

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

을 A의 **특성방정식(characteristic equation)** 또는 **고유방정식**이라고 한다. 이 경우 $p(\lambda)$는 λ에 관한 n차 다항식이다. 특성방정식의 근(root)인 λ를 **고유값(eigen value)**이라고 하며, 벡터 $\boldsymbol{x}$를 고유값 λ에 대한 **고유벡터(eigen vector)**라고 한다. 이 경우 고유벡터 $\boldsymbol{x}$는 $n \times 1$ 행렬이다.

고유값을 가지는 고유벡터들의 집합을 **고유공간(eigen space)**이라고 하며, 주어진 $n \times n$ 행렬로부터 모든 고유값과 고유벡터들을 구하는 것을 **고유값 문제(eigen value problem)**라고 한다.

7.1 고유값과 고유벡터

예제 ❼-1

$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$일 때 고유값과 고유벡터를 살펴보자.

$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$로 잡으면

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 10\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\lambda\boldsymbol{x}$$

따라서 $\lambda=5$는 행렬 A의 고유값이 되고, 벡터 $\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$는 고유값 5에 대한 행렬 A의 고유벡터가 된다. ■

예제 ❼-2

$A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix}$일 때 고유값과 고유벡터를 살펴보자.

$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$로 잡으면

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\lambda\boldsymbol{x}$$

따라서 $\lambda=3$은 행렬 A의 고유값이 되고, 벡터 $\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$는 고유값 3에 대한 행렬 A의 고유벡터가 된다. ■

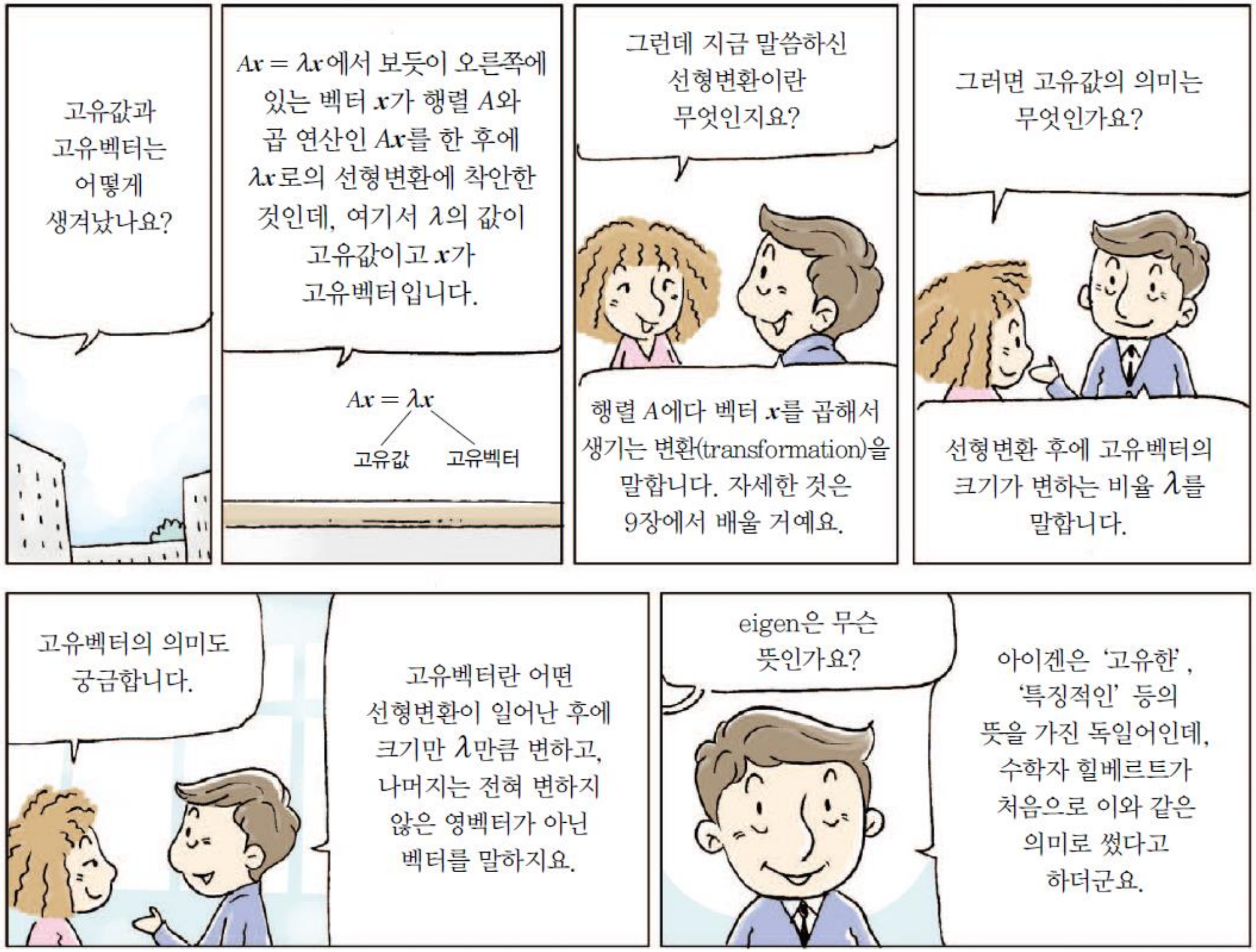
7.1 고유값과 고유벡터

정의 ❼-3 만약 어느 고유값 λ가 특성다항식 $p(\lambda)$의 해로 k번(k는 2 이상) 나타날 경우 고유값 λ의 **중복 해(multiplicity solution)**라고 한다.

예를 들면, $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$의 경우 $\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$으로부터

$(\lambda-1)^2=0$이 된다. 따라서 $\lambda_1=\lambda_2=1$인 중복 해가 된다.

고유값과 고유벡터


고유값과 고유벡터는 어떻게 생겨났나요?
$Ax = \lambda x$에서 보듯이 오른쪽에 있는 벡터 x가 행렬 A와 곱 연산인 Ax를 한 후에 λx로의 선형변환에 착안한 것인데, 여기서 λ의 값이 고유값이고 x가 고유벡터입니다.
$Ax = \lambda x$
고유값
고유벡터
그런데 지금 말씀하신 선형변환이란 무엇인지요?
행렬 A에다 벡터 x를 곱해서 생기는 변환(transformation)을 말합니다. 자세한 것은 9장에서 배울 거예요.
그러면 고유값의 의미는 무엇인가요?
선형변환 후에 고유벡터의 크기가 변하는 비율 λ를 말합니다.
고유벡터의 의미도 궁금합니다.
고유벡터란 어떤 선형변환이 일어난 후에 크기만 λ만큼 변하고, 나머지는 전혀 변하지 않은 영벡터가 아닌 벡터를 말하지요.
eigen은 무슨 뜻인가요?
아이겐은 '고유한', '특징적인' 등의 뜻을 가진 독일어인데, 수학자 힐베르트가 처음으로 이와 같은 의미로 썼다고 하더군요.

MATLAB

예제 ❼-3

다음과 같이 주어진 행렬 A의 특성다항식과 고유값을 구해 보자.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & -6\end{bmatrix}$$

풀이 먼저 특성다항식을 구하고 고유값을 구한다.

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & -6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-\lambda & 3\\ 3 & -6-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}\,(A-\lambda I)&=\begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 3 & -6-\lambda\end{vmatrix}\\ &=(2-\lambda)(-6-\lambda)-(3)(3)\\ &=-12-2\lambda+6\lambda+\lambda^2-9\\ &=\lambda^2+4\lambda-21\end{aligned}$$

따라서 특성다항식은 $\lambda^2+4\lambda-21$이 된다.

$\lambda^2+4\lambda-21=0$이라고 놓으면 $(\lambda-3)(\lambda+7)=0$이다.

따라서 A의 고유값은 3과 -7이 된다. ■

MATLAB

예제 7-4

다음의 행렬 A에 대한 고유값과 그에 대응하는 고유벡터를 구해 보자.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

풀이 특성방정식을 구하기 위해 $\mathrm{Det}(A - \lambda I) = 0$을 구하면

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0\text{이다.}$$

즉, $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$, $(\lambda - 4)(\lambda + 3) = 0$

그러므로 A의 고유값은 4와 -3이다.

(1) $\lambda = 4$에 대응하는 고유벡터를 구하기 위해 $(A - 4I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$를 풀면

$$\begin{bmatrix} 3-4 & 2 \\ 3 & -2-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x_1 + 2x_2 = 0$$
$$3x_1 - 6x_2 = 0$$

$x_1 = 2x_2$가 나오므로

여기서 x_2를 1이라고 하면 $x_1 = 2$가 된다.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

그러므로 $\lambda = 4$에 대응하는 고유벡터는 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$이다.

(2) $\lambda = -3$에 대응하는 고유벡터를 구하기 위해 $(A-(-3)I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$를 풀면

$$\begin{bmatrix} 3-(-3) & 2 \\ 3 & -2-(-3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$6x_1 + 2x_2 = 0$$
$$3x_1 + x_2 = 0$$

$$6x_1 = -2x_2$$
$$x_2 = -3x_1$$

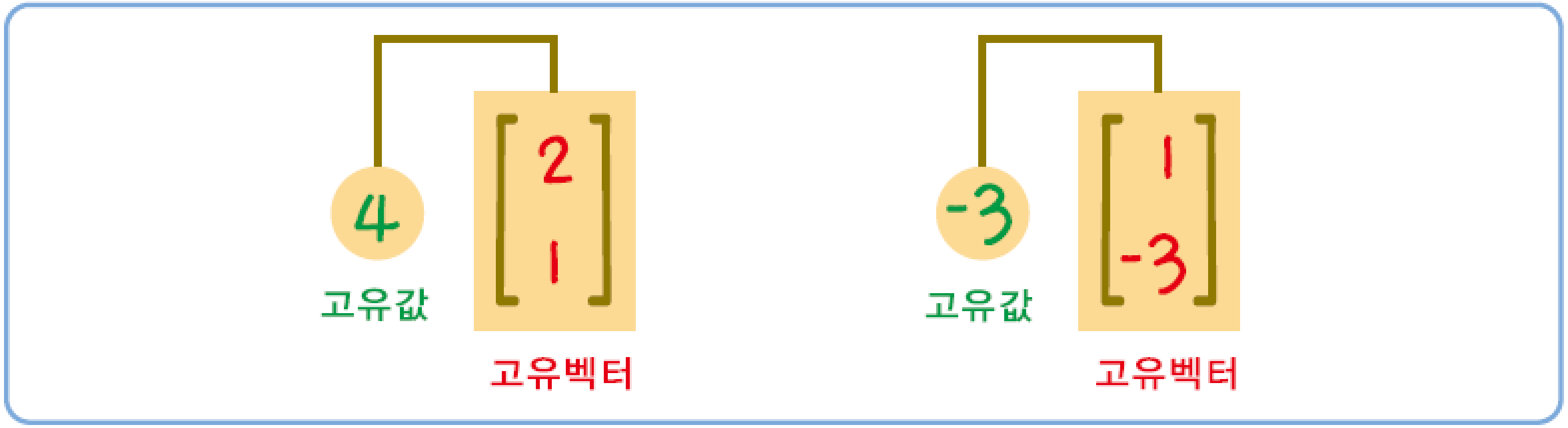
여기서 x_1을 1이라고 하면 $x_2 = -3$이 된다.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

그러므로 $\lambda = -3$에 대응하는 고유벡터는 $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$이다.

따라서 각각의 고유값과 이에 대응하는 고유벡터는 다음의 2가지이다. ■

고유값과 고유벡터



MATLAB

예제 7-5

다음과 같은 행렬 A의 고유값과 고유벡터를 구해 보자.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -12 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

풀이 $\mathrm{Det}\,(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -12 & -\lambda & 5 \\ 4 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$ 1행에 대하여 여인수로 전개하면

$$\begin{aligned} &=(3-\lambda)\left[\left(\lambda^2+\lambda\right)+10\right]-(-1)\left[\left(12\lambda+12\right)-20\right]+(-1)(24+4\lambda) \\ &=-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2 \\ &=-(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)=0 \end{aligned}$$

따라서 A의 고유값들은 $-1,\ 1,\ 2$이다.

(1) 고유값 $\lambda = -1$에 대응하는 고유벡터를 구하기 위해 $(A-(-1)I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$를 풀면,

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -12 & -\lambda & 5 \\ 4 & -2 & -1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3-(-1) & -1 & -1 \\ -12 & 0-(-1) & 5 \\ 4 & -2 & -1-(-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -12 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

여기서 계수행렬을 기약 행 사다리꼴로 바꾼다.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ \boxed{-12} & 1 & 5 \\ \boxed{4} & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$3 \times R_1 + R_2 \to R_2$
$(-1) \times R_1 + R_3 \to R_3$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$\left(-\frac{1}{2}\right) R_2 + R_3 \to R_3$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

그러므로 선형시스템은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} 4x_1 \; - x_2 \; - x_3 &= 0 \\ -2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$x_2 = x_3$이므로

여기서 x_2를 2라고 하면 $x_3 = 2$, $x_1 = 1$이 된다.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

그러므로 $\lambda = -1$에 대응하는 고유벡터는 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$이다.

(2) 고유값 $\lambda = 1$에 대응하는 고유벡터를 구하기 위해 $(A - I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$를 풀면,

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -12 & -\lambda & 5 \\ 4 & -2 & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3-1 & -1 & -1 \\ -12 & 0-1 & 5 \\ 4 & -2 & -1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ 이므로

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -12 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

여기서 계수행렬을 기약 행 사다리꼴로 바꾼다.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ \boxed{-12} & -1 & 5 \\ \boxed{4} & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$6\times R_1+R_2\rightarrow R_2$
$(-2)\times R_1+R_3\rightarrow R_3$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

그러므로 선형시스템은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} 2x_1 \quad -x_2-x_3&=0 \\ -7x_2-x_3&=0 \end{aligned}$$

여기서 x_2를 1이라고 하면 $x_3=-7$, $x_1=-3$이 된다.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

그러므로 $\lambda = 1$에 대응하는 고유벡터는 $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$이다.

(3) 고유값 $\lambda = 2$에 대응하는 고유벡터를 구하기 위해 $(A - 2I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$를 풀면,

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -12 & -\lambda & 5 \\ 4 & -2 & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3-2 & -1 & -1 \\ -12 & 0-2 & 5 \\ 4 & -2 & -1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -12 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

여기서 계수행렬을 기약 행 사다리꼴로 바꾼다.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \boxed{-12} & -2 & 5 \\ \boxed{4} & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$12 \times R_1 + R_2 \rightarrow R_2$
$(-4) \times R_1 + R_3 \rightarrow R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -14 & -14 \\ 0 & \boxed{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$\left(\frac{1}{7}\right) \times R_2 + R_3 \rightarrow R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -14 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

그러므로 선형시스템은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_2 \quad - x_3 &= 0 \\ -14x_2 - 7x_3 &= 0 \end{aligned}$$

즉, $$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

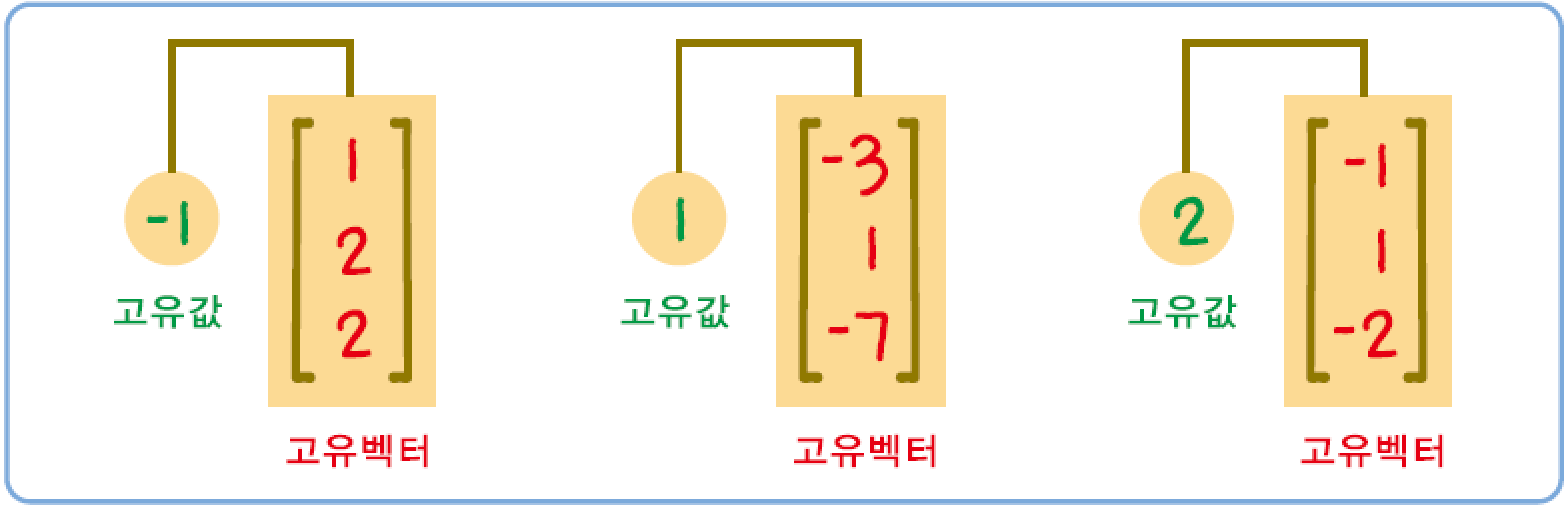
여기서 x_2를 1이라고 하면 $x_3 = -2$, $x_1 = -1$이 된다.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

그러므로 $\lambda = 2$에 대응하는 고유벡터는 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$이다.

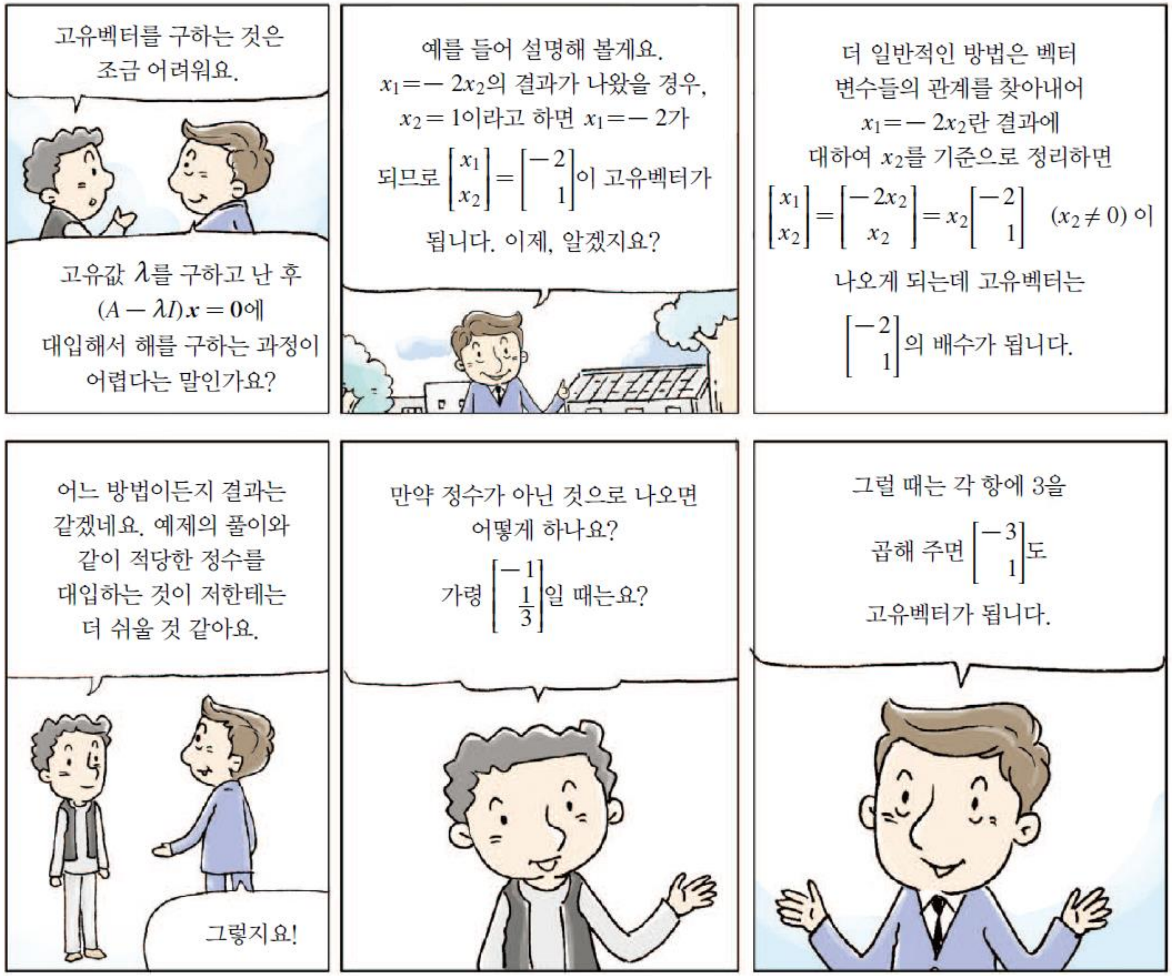
따라서 각각의 고유값과 이에 대응하는 고유벡터는 다음의 3가지이다. ■

고유값과 고유벡터



여기서 잠깐!! 고유값을 구하기 위해 미리 행 연산을 하면 전혀 다른 고유값이 나오므로 주의해야 한다. 그러나 고유값을 구하고 난 후 고유벡터를 구하는 과정에서는 행 연산을 하면 계산이 훨씬 수월해지는 경우가 많다.

7.1 고유값과 고유벡터

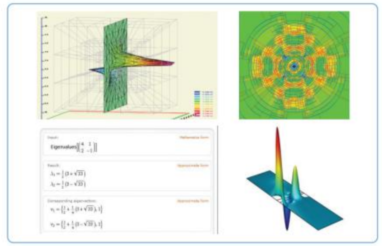


고유벡터를 구하는 것은 조금 어려워요.
고유값 λ를 구하고 난 후 $(A-\lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$에 대입해서 해를 구하는 과정이 어렵다는 말인가요?
예를 들어 설명해 볼게요. $x_1=-2x_2$의 결과가 나왔을 경우, $x_2=1$이라고 하면 $x_1=-2$가 되므로 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$이 고유벡터가 됩니다. 이제, 알겠지요?
더 일반적인 방법은 벡터 변수들의 관계를 찾아내어 $x_1=-2x_2$란 결과에 대하여 x_2를 기준으로 정리하면 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}=x_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(x_2 \neq 0)$ 이 나오게 되는데 고유벡터는 $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$의 배수가 됩니다.
어느 방법이든지 결과는 같겠네요. 예제의 풀이와 같이 적당한 정수를 대입하는 것이 저한테는 더 쉬울 것 같아요.
그렇지요!
만약 정수가 아닌 것으로 나오면 어떻게 하나요? 가령 $\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$일 때는요?
그럴 때는 각 항에 3을 곱해 주면 $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$도 고유벡터가 됩니다.

7.1 고유값과 고유벡터

$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$에다 (−1)을 곱하면 $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$이 되는데, 그것도 고유벡터가 된다는 말씀인가요?
바로 그거예요.
고유벡터에다 0이 아닌 수를 곱하면 언제나 고유벡터가 됩니다.
$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$
그런데 고유벡터는 몇 개나 구해야 하나요?
각 고유값마다 고유벡터가 하나씩 있으니까 λ의 개수만큼 구하면 됩니다.

7.2 고유값의 성질과 응용



7.2.1 고유값의 성질

정리 ❼-1 행렬 A의 고유값이 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$이라고 할 때 다음과 같은 성질들이 성립한다.

(1) 행렬 A의 고유값들의 합은 주대각선상의 항들의 합인 대각합(trace)과 같다.

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{trace}(A)$$

(2) 행렬 A의 고유값들의 곱은 A의 행렬식의 값과 같다.

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n = \mathrm{Det}(A)$$

(3) 행렬 A의 전치행렬 A^T의 고유값은 원래의 고유값과 같다.

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$$

(4) 행렬 A의 역행렬이 만약 존재한다면 A^{-1}의 고유값은 다음과 같다.

$$\frac{1}{\lambda_1},\ \frac{1}{\lambda_2},\ \cdots,\ \frac{1}{\lambda_n}$$

(5) k가 스칼라 값이라면 kA의 고유값은 원래의 고유값에다 각각 k배를 한 것과 같다.

$$k\lambda_1,\ k\lambda_2,\ \cdots,\ k\lambda_n$$

(6) k가 양의 정수라면 A^k의 고유값은 원래의 고유값에다 k제곱한 것과 같다.

$$\lambda_1^k,\ \lambda_2^k, \cdots,\ \lambda_n^k$$

정리 ❼-2 삼각행렬

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

의 특성방정식은

$$p_A(x)=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)=0$$

이고, 따라서 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$이 고유값이 된다.

예를 들면, $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$와 같이 삼각행렬일 때 A의 고유값은 대각항인 4, -5이다.

MATLAB

예제 7-6 다음 행렬 A, B의 고유값들을 구해 보자.

$$(1)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (2)\ B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

풀이 삼각행렬에서의 고유값의 특성을 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

(1) A는 상부삼각행렬이므로 고유값은 주대각선상의 값인 $0, 2, -1$이다.

(2) B는 하부삼각행렬이므로 고유값은 주대각선상의 값인 $4, 0, -3$이다. ■

정리 ❼-3 고유값에 대응하는 고유벡터들 사이의 선형독립 관계는 다음과 같다.

(1) λ가 A의 중복 해가 아닌 경우, 고유값 λ에 대응하는 선형독립인 고유벡터는 유일하다.

(2) $n \times n$ 행렬 A의 서로 다른 고유값에 대응하는 고유벡터들은 선형독립이다.

(3) $n \times n$ 행렬 A가 n개의 서로 다른 고유값을 가지면, A는 n개의 선형독립인 고유벡터들을 가진다.

예제 ❼-7

다음과 같이 행렬 A가 주어졌을 경우, 고유값들의 합은 trace(A)와 같고 고유값들의 곱은 Det(A)와 같은지를 살펴보자.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

풀이 A에서 trace$(A) = 5+(-1) = 4$이고, Det$(A) = -5-7 = -12$이다. 또한

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 7 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$$이므로

$$(\lambda + 2)(\lambda - 6) = 0$$

따라서 A의 고유값은 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 6$이다.

그러므로 $\lambda_1 + \lambda_2 = 4 = \text{trace}(A)$이고, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -12 = \text{Det}(A)$이다. ■

정리 ❼-4 A가 $n \times n$ 행렬이고, I는 $n \times n$ 항등행렬이며, λ가 스칼라일 때 다음의 문장들은 모두 동치이다.

(1) λ가 A의 고유값이다.

(2) $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$는 비자명해를 가진다.

(3) $A - \lambda I$는 비가역적이다.

(4) $\mathrm{Det}\,(A - \lambda I) = 0$

정의 ❼-4

행렬 A, B, C가 모두 $n\times n$ 행렬이고 $B=C^{-1}AC$가 성립할 때 두 행렬 A와 B는 **닮은행렬(similar matrix)**이라 한다.

예제 ❼-8

행렬 A, B, C가 다음과 같을 때 A와 B가 닮은행렬임을 알아보자.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 5 & -3\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

풀이

$$CB=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -2\\ 5 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

이므로 $CB=AC$이다. 또한 $\mathrm{Det}\,(C)=2-1=1\neq 0$이므로 C는 가역적이다. 그러므로 $CB=AC$로부터 $B=C^{-1}AC$를 얻을 수 있다. 따라서 A와 B는 닮은행렬이다. ■

예제 7-9 다음 행렬 A, B가 닮은행렬임을 확인해 보자.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & -4 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & 3 & 3\\ -6 & -6 & -2\\ 6 & 5 & -1\end{bmatrix}$$

풀이 행렬 C, C^{-1}에 대하여

$$C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad C^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$B=C^{-1}AC$임을 보인다.

$$C^{-1}AC=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & -4 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3 & 3\\ -6 & -6 & -2\\ 6 & 5 & -1\end{bmatrix}=B$$

따라서 A와 B는 닮은행렬이다. ■

7.2 고유값의 성질과 응용

정리 ❼−5 A와 B가 $n \times n$ 닮은행렬인 경우 A와 B는 같은 고유값을 가진다.

예제 ❼−10 앞의 (예제 ❼−8)의 행렬 A와 B가 같은 고유값을 가짐을 확인해 보자.

풀이 A와 B의 특성방정식을 구해본다.

$$\mathrm{Det}(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-2)(\lambda+1)=0$$

고유값은 $\lambda=2,-1$이다.

$$\mathrm{Det}\,(B-\lambda I)=\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 5 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$=\lambda^2-\lambda-12+10$$
$$=(\lambda-2)(\lambda+1)=0$$

고유값은 $\lambda=2,\,-1$이다.

그러므로 두 경우의 고유값은 같다. ■

예제 7-11 행렬 A와 벡터 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$가 다음과 같이 주어졌을 경우, $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$가 행렬 A의 고유벡터가 되는지를 판정하고 그림을 통하여 고찰해 보자.

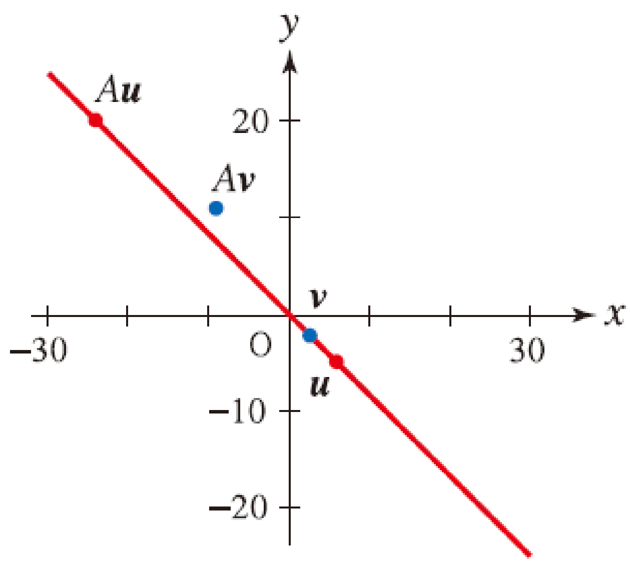
$$A=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 5 & 2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}6\\ -5\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}$$

풀이

$$A\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-24\\ 20\end{bmatrix}=-4\begin{bmatrix}6\\ -5\end{bmatrix}=-4\boldsymbol{u}$$

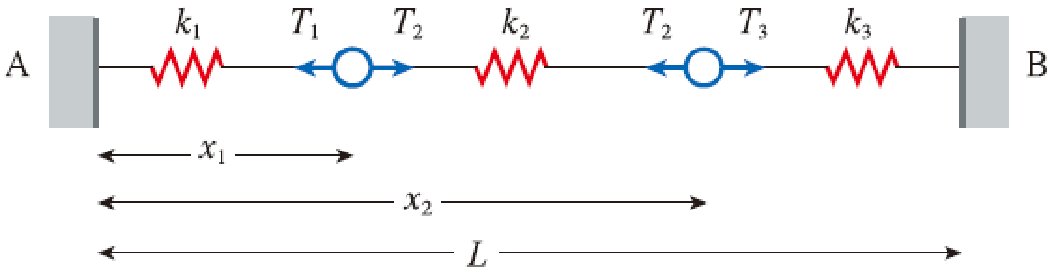
$$A\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9\\ 11\end{bmatrix}\neq\lambda\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}$$

그러므로 $\boldsymbol{u}$는 고유값 -4에 대응하는 고유벡터가 된다. 그러나 $A\boldsymbol{v}$가 $\boldsymbol{v}$의 배수가 아니기 때문에 $\boldsymbol{v}$는 고유벡터가 아니다. 따라서 $\boldsymbol{u}$와 $A\boldsymbol{u}$는 같은 직선상에 있으나, $A\boldsymbol{v}$는 같은 직선상에 있지 않다는 것을 〈그림 7.3〉을 통하여 알 수 있다. ■



〈그림 7.3〉 $A\mathbf{u}$와 $A\mathbf{v}$

7.2 고유값의 성질과 응용



〈그림 7.4〉 벽면 사이의 스프링

여기서 잠깐!!

고유값과 고유벡터는 인공지능 중 신경망에도 활용되고 있다. 특히 푸리에(Fourier) 행렬 등의 수준 높은 선형대수학에서 다루어진다.

7.3 MATLAB에 의한 연산

실습 ❼-1

예제 ⑦-3 MATLAB

다음과 같이 주어진 행렬 A의 특성다항식과 고유값을 구해 보자.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

풀이 특성다항식은 $\lambda^2+4\lambda-21$이고 고유값은 3과 -7이다. ■

Command Window

File Edit Debug Desktop Window Help

```
>> A=[2, 3; 3, -6];
>> poly(A)

ans =

     1     4   -21

>> eig(A)

ans =

    -7
     3

>>
```

OVR

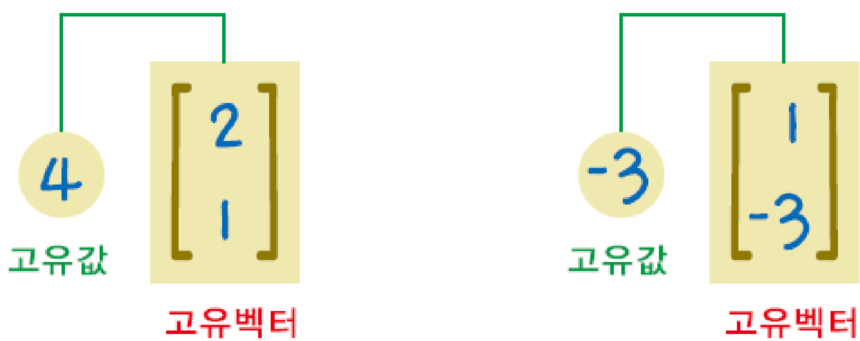
실습 ❼-2

예제 ⑦-4 MATLAB

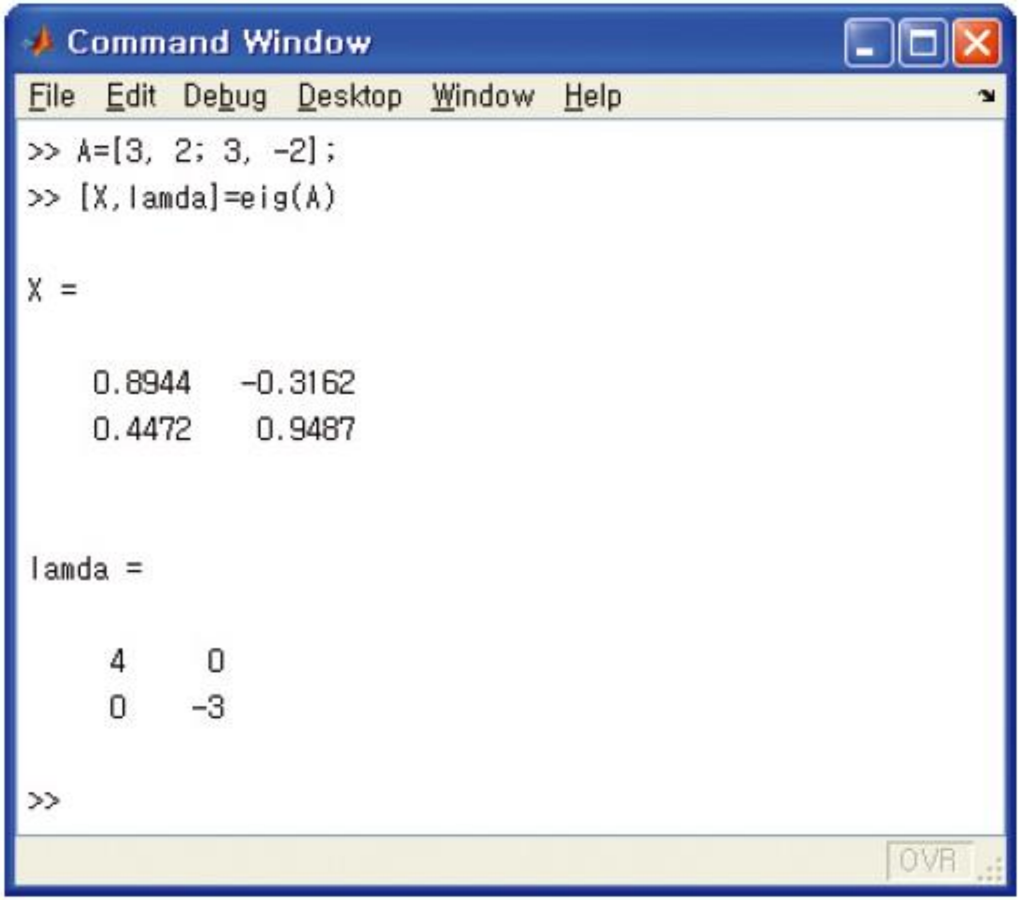
다음의 행렬 A에 대한 고유값과 그에 대응하는 고유벡터를 구해 보자.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

풀이 각각의 고유값과 그에 대응하는 고유벡터는 다음의 2가지이다. ■



MATLAB에 의한 연산



7.3 MATLAB에 의한 연산

예제 ⑦-5 MATLAB

실습 ❼-3

다음과 같은 행렬 A의 고유값과 고유벡터를 구해 보자.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -12 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

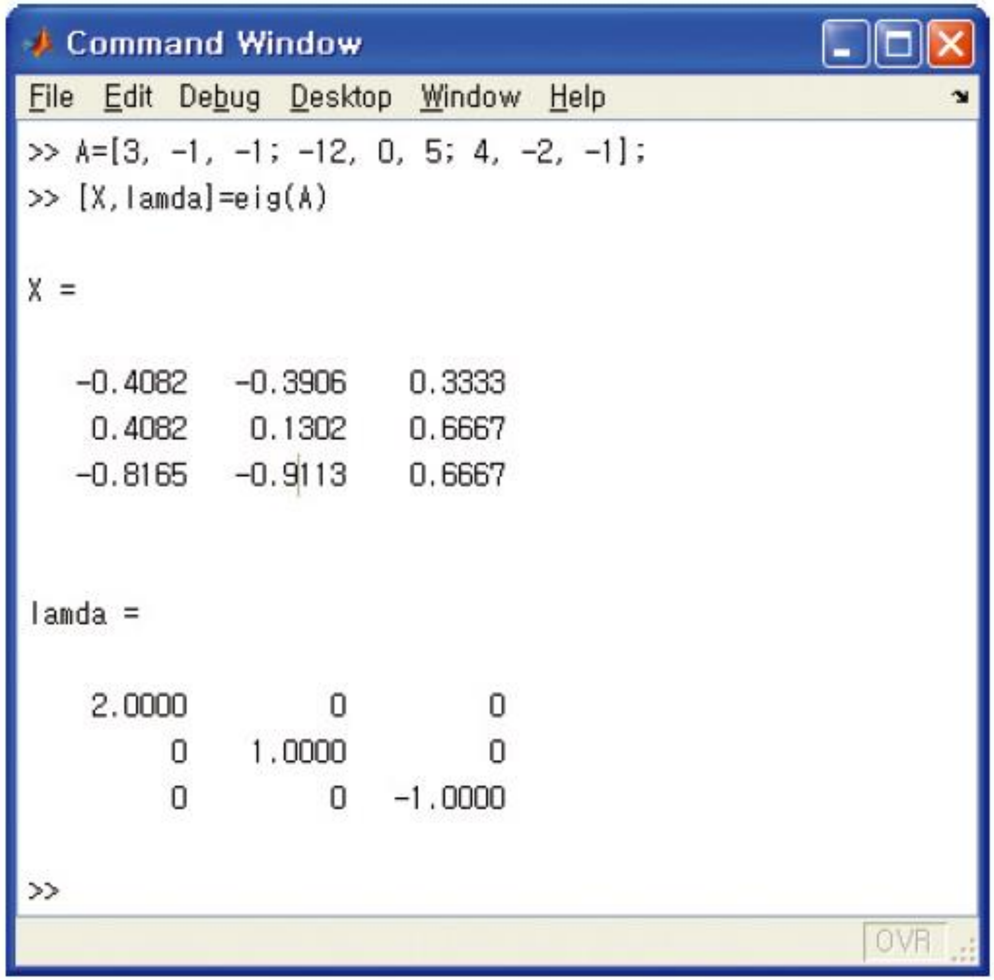
풀이 각각의 고유값과 그에 대응하는 고유벡터는 다음의 3가지이다. ■

고유값 -1, 고유벡터 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

고유값 1, 고유벡터 $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$

고유값 2, 고유벡터 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

MATLAB에 의한 연산




```
>> A=[3, -1, -1; -12, 0, 5; 4, -2, -1];
>> [X,lamda]=eig(A)

X =

   -0.4082   -0.3906    0.3333
    0.4082    0.1302    0.6667
   -0.8165   -0.9113    0.6667


lamda =

    2.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0         0   -1.0000

>>
```

실습 ❼-4

예제 ⑦-6 MATLAB

다음 행렬 A, B의 고유값들을 구해 보자.

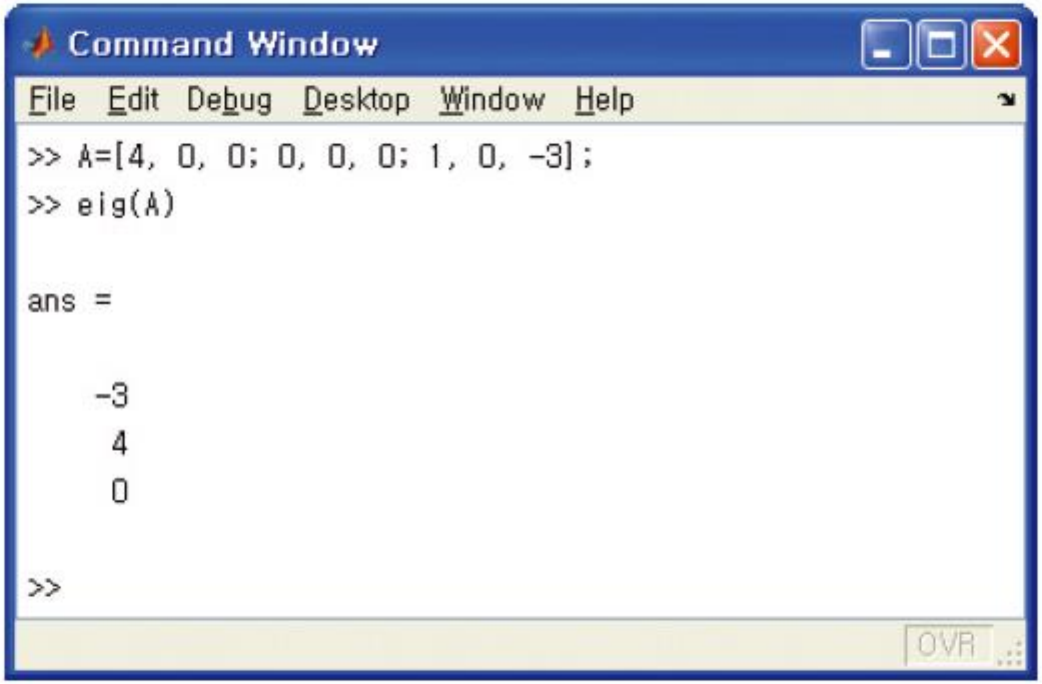
$$(1)\ A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (2)\ B=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

풀이 (1) A는 상부삼각행렬이므로 고유값은 주대각선상의 값인 0, 2, -1이다.

```
Command Window
File  Edit  Debug  Desktop  Window  Help
>> A=[0, 0, 0; 0, 2, 5; 0, 0, -1];
>> eig(A)

ans =

     0
     2
    -1

>>
OVR
```

(2) B는 하부삼각행렬이므로 고유값은 주대각선상의 값인 $4,\ 0,\ -3$이다. ■

MATLAB에 의한 연산



고유값과 고유벡터의 생활속의 응용

- 고유값은 선형변환의 대각화에 매우 중요한 개념을 제공한다.
- 물리적인 시스템의 중요한 특성을 표현하는 수학적 모델의 개발에 유용하다.
- 행렬의 거듭제곱의 계산에 고유값의 개념을 도입하면 매우 편리하다.
- 인구 증가 모델의 분석과 동역학(Dynamic System) 분석에 매우 유용하다.
- 미분방정식의 풀이에 쓰인다.
- 여러 응용 수학 분야, 특히 선형대수학, 함수해석 등에 사용되며,
  여러 가지 비선형 분야에서도 자주 사용된다.