09 CHAPTER

선형변환

LINEAR ALGEBRA

개 요

- ❖ 선형변환과 선형연산자를 정의하고, 선형변환이 되는지를 예제들을 통하여 살펴봄
- ❖ 선형사상과 커널에 관해 고찰함
- ❖ 함수와 선형변환과의 밀접한 관계를 고려하여 함수의 기본적인 사항들을 학습함
- ❖ 선형변환의 여러 가지 변환 중에서 사영변환, 확대변환, 축소변환, 반사변환, 회전변환 등을 2차원상의 그림을 통하여 고찰함
- ❖ 표준행렬에 따른 다양한 변환들을 그림으로 나타내어 변환을 구체적으로 학습함
- ❖ 선형변환의 응용 면에서는 산업적 응용, 그래픽 변환으로의 응용, 층밀림의 응용을 고찰함

09

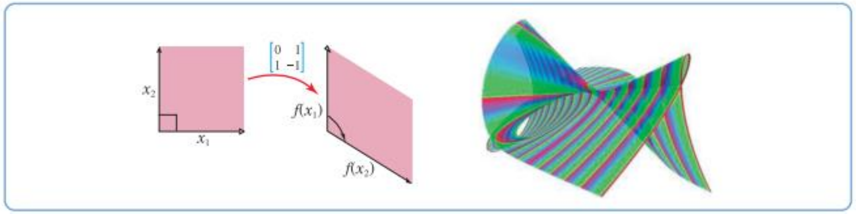
CHAPTER

선형변환

LINEAR ALGEBRA

CONTENTS

9.1 선형변환의 개념과 함수



9.1.1 선형변환의 정의

정의 ❾−1 V와 W가 벡터공간이고 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$가 V에 속하며 α가 실수일 경우, V로부터 W로 가는 함수 L이 다음의 2가지 공리(axiom)를 만족시킬 때 **선형변환(linear transformation)** 또는 **선형사상(linear mapping)**이라고 한다.

$$L : V \longrightarrow W$$

(1) $L(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{u}) + L(\boldsymbol{v})$

(2) $L(\alpha\boldsymbol{u}) = \alpha L(\boldsymbol{u})$

특히 $V = W$일 경우에는 선형변환 L을 V상에서의 **선형연산자(linear operator)**라고 한다.

9.1 선형변환의 개념과 함수

예제 9-1

벡터공간 R^2상의 벡터 $\boldsymbol{x}$에 대하여 L이 다음과 같이 정의된 함수일 때 선형변환인지의 여부를 살펴보자.

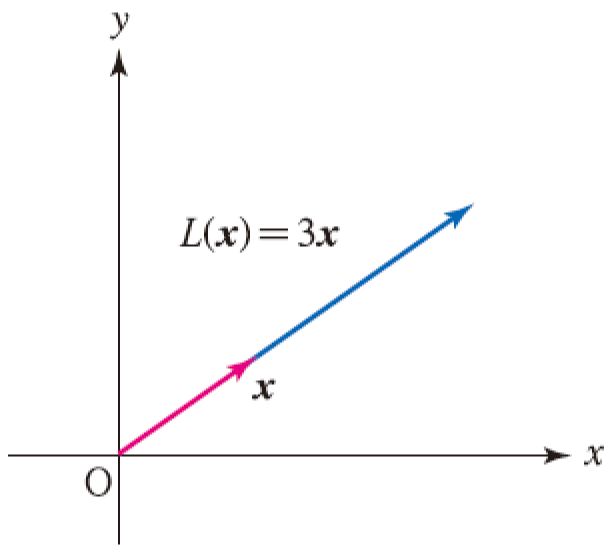
$$L(\boldsymbol{x}) = 3\boldsymbol{x}$$

풀이

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= 3(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \\ &= 3\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y} \\ &= L(\boldsymbol{x})+L(\boldsymbol{y}) \\ L(\alpha\boldsymbol{x}) &= 3(\alpha\boldsymbol{x}) \\ &= \alpha(3\boldsymbol{x}) \\ &= \alpha L(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

선형변환의 2가지 조건을 만족하므로 L은 선형변환이다. ■

9.1 선형변환의 개념과 함수



〈그림 9.1〉 R^2상에서의 $L(x) = 3x$로의 변환

예제 ❾−2

함수 $L : R^3 \rightarrow R^3$이 다음과 같이 정의되었을 때 L이 선형변환인지를 판단해 보자.

$$L(x, y, z) = (x - y, 0, y + z)$$

풀이 $\boldsymbol{u} = (x_1, y_1, z_1)$

$\boldsymbol{v} = (x_2, y_2, z_2)$ 라고 하자.

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) &= L(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= ((x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), 0, (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)) \\ &= (x_1 - y_1, 0, y_1 + z_1) + (x_2 - y_2, 0, y_2 + z_2) \\ &= L(\boldsymbol{u}) + L(\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

그리고

$$\begin{aligned} L(\alpha \boldsymbol{u}) &= (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \\ &= (\alpha x_1 - \alpha y_1, 0, \alpha y_1 + \alpha z_1) \\ &= \alpha (x_1 - y_1, 0, y_1 + z_1) \\ &= \alpha L(\boldsymbol{u}) \end{aligned}$$

따라서 함수 L은 선형변환이다. ■

예제 9-3 함수 $L: R^2 \rightarrow R^2$이 다음과 같이 정의되었을 때 L이 선형변환인지를 판단해 보자.

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + 1 \\ 2a_2 \end{bmatrix}$$

풀이 L이 선형변환인지를 결정하기 위해

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

라고 하면

$$L(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (a_1+b_1)+1 \\ 2(a_2+b_2) \end{bmatrix}$$

또한

$$L(\boldsymbol{u}) + L(\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} a_1+1 \\ 2a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1+1 \\ 2b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1+b_1)+2 \\ 2(a_2+b_2) \end{bmatrix}$$

$(a_1+b_1)+1 \neq (a_1+b_1)+2$이므로

$$L(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \neq L(\boldsymbol{u}) + L(\boldsymbol{v})$$

따라서 함수 L은 선형변환이 아니다. ■

예제 ❾-4

다음과 같은 함수 $L : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$은 선형변환이 아님을 확인해 보자.

$$L(x, y) = (x+a, y+b) \quad ((a, b) \neq (0, 0))$$

풀이 $\boldsymbol{u} = (x_1, y_1)$

$\boldsymbol{v} = (x_2, y_2)$ 라고 하자.

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= L(x_1+x_2, y_1+y_2) \\ &= (x_1+x_2+a, y_1+y_2+b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{u})+L(\boldsymbol{v}) &= L(x_1, y_1)+L(x_2, y_2) \\ &= (x_1+a, y_1+b)+(x_2+a, y_2+b) \\ &= (x_1+x_2+2a, y_1+y_2+2b) \end{aligned}$$

여기서 $(a, b) \neq (0, 0)$이므로

$$L(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \neq L(\boldsymbol{u})+L(\boldsymbol{v})$$

따라서 함수 L은 선형변환이 아니다. ■

예제 9-5 함수 $L : \boldsymbol{R}^3 \rightarrow \boldsymbol{R}^3$이 선형변환이 가능한지를 판단해보자.

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + 2 \\ 3a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

풀이 L이 선형변환인지를 결정하기 위해

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$ 라고 하면

$$L(\mathbf{u}+\mathbf{v})=L\left(\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}\right)=L\left(\begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}a_1+a_2+2\\3(a_2+b_2)\\a_3+b_3\end{bmatrix}$$

$$L(\mathbf{u})+L(\mathbf{v})=\begin{bmatrix}a_1+2\\3a_2\\a_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1+2\\3b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+b_1+4\\3(a_2+b_2)\\a_3+b_3\end{bmatrix}$$

$a_1+b_1+2 \neq a_1+b_1+4$이므로

$$L(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \neq L(\mathbf{u})+L(\mathbf{v})$$

따라서 함수 L은 선형변환이 아니다. ■

선형변환의 경우

선형변환은 행렬과도 밀접한 관련이 있다. $\boldsymbol{R}^n$의 원소를 열벡터 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$로 나타낼 경우 $m\times n$ 행렬 $A=[a_{ij}]$와 벡터 $\boldsymbol{x}$를 곱하여 다음과 같은 $\boldsymbol{R}^m$의 원소를 얻는다.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^m$$

이와 같이 $m\times n$ 행렬 A와 벡터 $\boldsymbol{x}$의 곱은 변환함수

$$L:\boldsymbol{R}^n\longrightarrow \boldsymbol{R}^m,\ \ L(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$$

가 되며 이러한 변환은 선형이 되므로 선형변환이다.

9.1 선형변환의 개념과 함수

함수의 개념과 정의

정의 ❾-2 집합 X에서 집합 Y로의 관계의 부분집합으로써, 집합 X에 있는 모든 원소 x가 집합 Y에 있는 원소 중 한 개와 관계가 있을 경우 f를 **함수(function)**라고 하며 다음과 같이 나타낸다.

$$f : X \longrightarrow Y$$

여기서 X를 함수 f의 **정의역(domain)**이라고 하며, Y를 함수 f의 **공변역(codomain)**이라고 한다. $f : X \longrightarrow Y$를 함수라고 할 때 $x \in X$와 $y \in Y$에 대해 $(x, y) \in f$이면 $f(x) = y$라고 표시하며, y를 함수 f에 의한 x의 **상(image)**, **이미지** 또는 **함수값**이라고 한다. 이 경우 y들의 집합을 **치역(range)**이라고 한다.

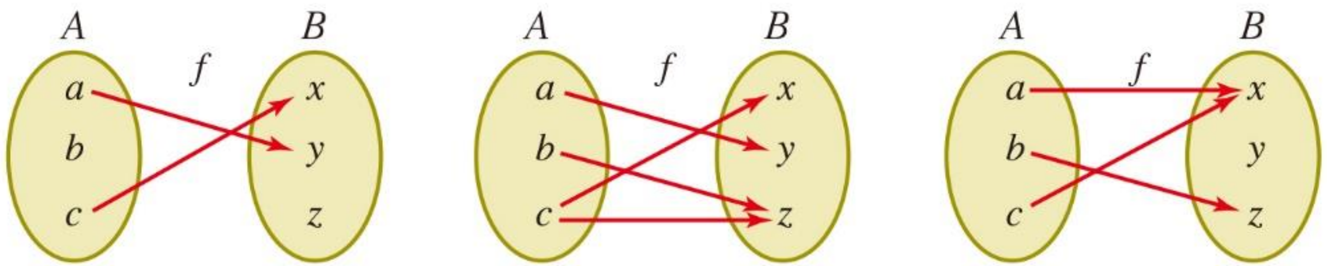
예제 9-6

다음 〈그림 9.2〉의 3가지 다이어그램에서 $A=\{a, b, c\}$에서 $B=\{x, y, z\}$로 가는 함수가 정의되는지를 판단해 보자.

풀이 (1) $b \in A$에서 B로의 사상이 없으므로 함수가 아니다.

(2) $c \in A$에 대해 x와 z가 동시에 대응하므로 함수가 아니다.

(3) A의 모든 원소에서 B로 가는 사상이 존재하므로 함수이다. ■



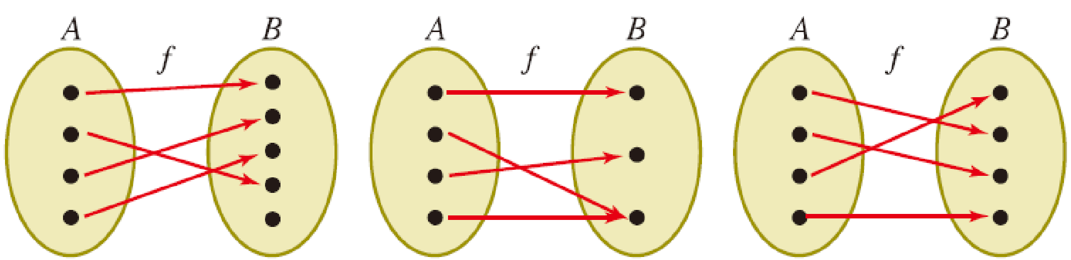
〈그림 9.2〉 3가지 다이어그램

정의 ❾-3

함수 $f: A \longrightarrow B$에서 $a_i, a_j \in A$에 대하여 $f(a_i) = f(a_j)$일 때 $a_i = a_j$가 되는 경우 함수 f를 **단사함수(injective function)**라고 한다.

함수 $f: A \longrightarrow B$에서 B의 모든 원소 b에 대하여 $f(a) = b$가 성립되는 $a \in A$가 적어도 하나 존재할 때, 함수 f를 **전사함수(surjective function, onto function)**라고 한다.

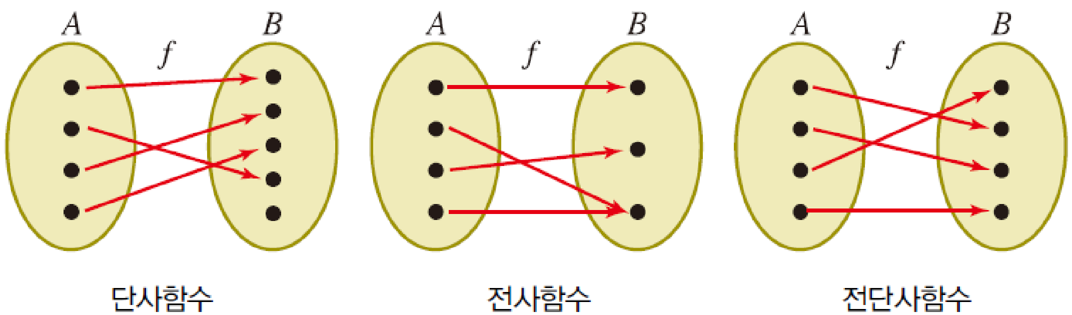
함수 $f: A \longrightarrow B$에서 f가 단사함수인 동시에 전사함수일 때 함수 f를 **전단사함수(bijective function)**라고 한다. 이 전단사 함수는 집합 A의 모든 원소들이 집합 B의 모든 원소와 하나씩 대응되기 때문에 **1대1 대응함수(one-to-one correspondence)**라고도 한다.



단사함수 전사함수 전단사함수

〈그림 9.3〉 단사함수, 전사함수, 전단사함수

9.1 선형변환의 개념과 함수



〈그림 9.3〉 단사함수, 전사함수, 전단사함수

- 가장 왼쪽의 함수는 A의 모든 원소가 각각 B의 다른 원소에 대응되기 때문에 단사함수이다. 그러나 B 원소 중 가장 아래 부분의 원소가 대응되는 원소가 없으므로 전사함수는 아니다.
- 가운데 함수는 A의 두 원소가 B의 같은 원소에 대응되기 때문에 단사함수가 될 수 없다. 그러나 B의 모든 원소들이 대응되었기 때문에 전사함수이다.
- 가장 오른쪽 함수는 A의 원소들이 모두 B의 서로 다른 원소들에 대응되었으므로 단사함수이다. 또한 B의 모든 원소들도 대응되었기 때문에 전사함수이기도 하다. 따라서 둘 다 만족하므로 전단사함수이다.

9.1 선형변환의 개념과 함수

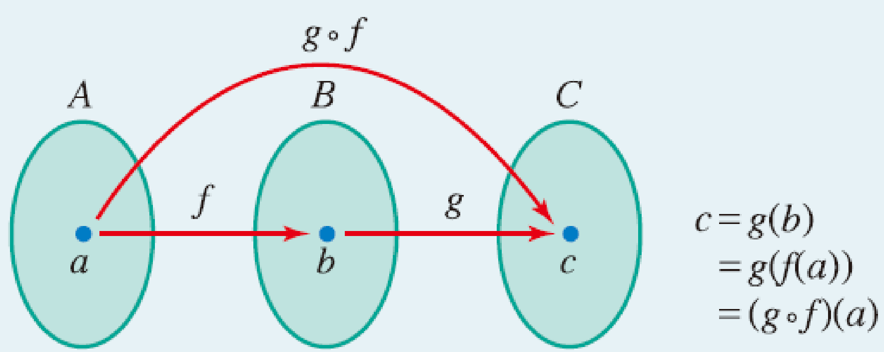
정의 ❾-4

합성함수(composition function)

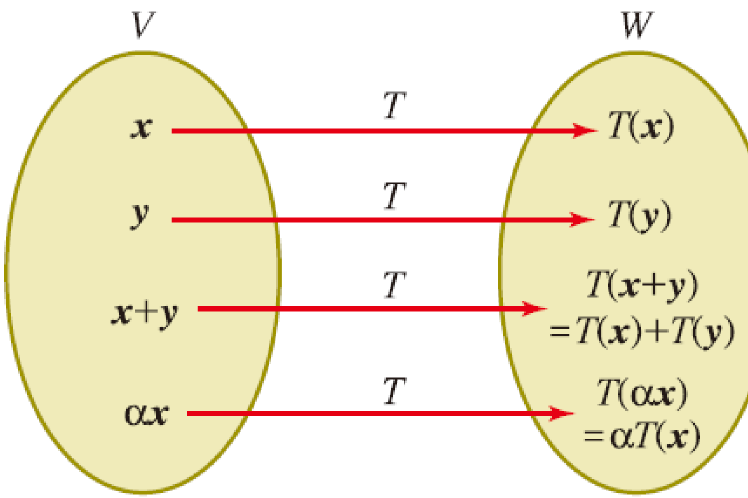
두 함수 $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$에 대하여 두 함수 f와 g의 합성함수는 집합 A에서 집합 C로의 함수인 $g \circ f : A \longrightarrow C$를 의미하며 다음을 만족한다.

$$g \circ f = \{(a, c) \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C,\ f(a) = b,\ g(b) = c\}$$

함수 f의 공변역은 함수 g의 정의역이 된다. 함수 f, g와 합성함수 $g \circ f$에 대한 관계를 그림으로 나타내면 〈그림 9.4〉와 같다.



〈그림 9.4〉 합성함수

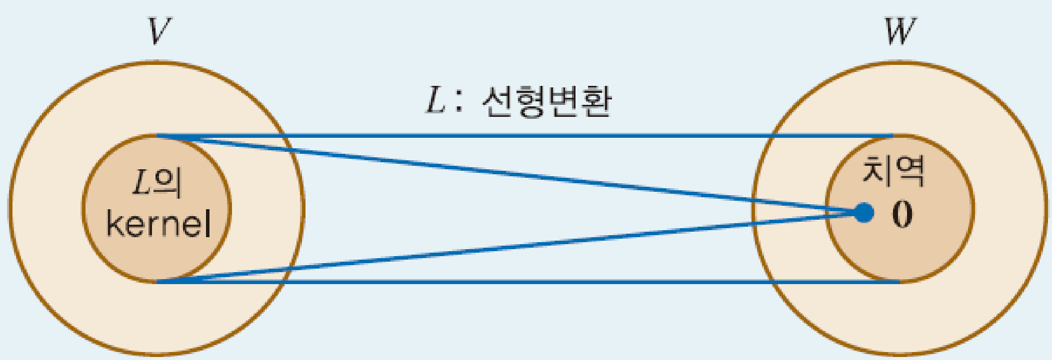


〈그림 9.5〉 V에서 W로의 함수

9.1 선형변환의 개념과 함수

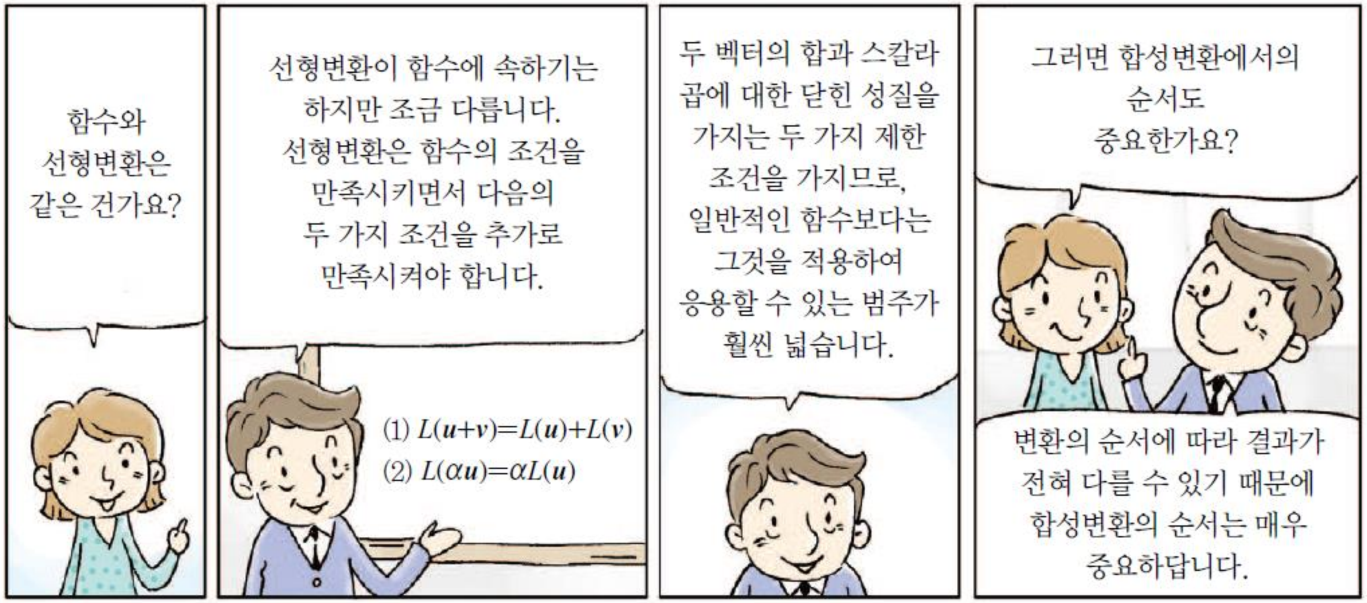
정의 ❾-5 $L: V \longrightarrow W$가 벡터공간 V에서 W로의 선형변환이라고 할 때, $\ker(L)$로 나타내는 L의 커널(kernel)은 $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$를 만족하는 V의 부분집합 요소들이다.

선형변환에서의 커널은 〈그림 9.6〉과 같이 나타낼 수 있다.



〈그림 9.6〉 선형변환 L의 커널

9.1 선형변환의 개념과 함수



(1) 사영변환

예제 9-7 $L : R^3 \rightarrow R^2$이 다음과 같이 정의될 때 L이 선형변환이 되는지를 살펴보자.

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

풀이 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$를 각각 다음과 같이 정의하자.

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

먼저 합에 관한 조건에 따라 적용하면

$$L(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=L\left(\begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}=L(\boldsymbol{u})+L(\boldsymbol{v})$$

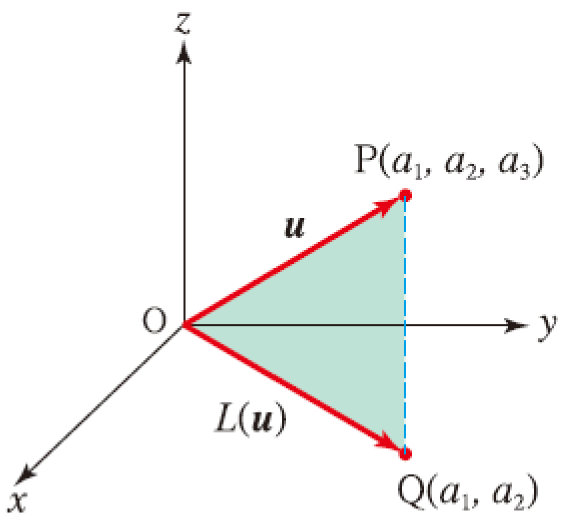
가 성립한다.

또한 α가 실수라면

$$L(\alpha\boldsymbol{u})=L\left(\begin{bmatrix}\alpha a_1\\\alpha a_2\\\alpha a_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\alpha a_1\\\alpha a_2\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}=\alpha L(\boldsymbol{u})$$

가 성립한다. 따라서 L은 선형변환이다. ■

특히 이런 경우에는 사영변환(projection transformation)이라고 하는데, 〈그림 9.7〉과 같이 R^3상의 벡터 $\boldsymbol{u}$를 R^2인 $x-y$평면에 수직으로 사영한 변환이다.



〈그림 9.7〉 사영변환

(2) 확대변환과 축소변환

예제 9-8

$L: R^3 \rightarrow R^3$이 다음과 같이 정의되고, r이 실수일 때 L이 선형변환이 되는지를 살펴보자.

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = r\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

풀이 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$를 각각 다음과 같이 정의하자.

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

먼저 합에 관한 조건에 따라 적용하면

$$L(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = L\left(\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= r\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$= L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$$

가 성립한다.

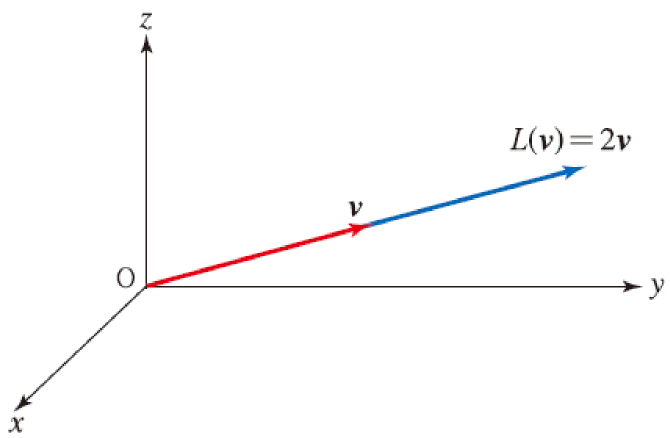
또한 α가 실수라면

$$L(\alpha\mathbf{u}) = L\left(\begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{bmatrix}\right) = r\begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{bmatrix} = \alpha r\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

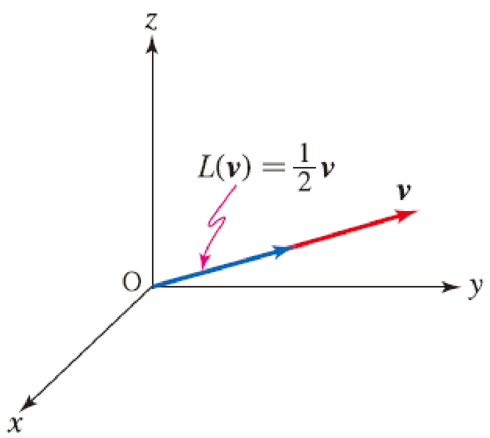
$$= \alpha L(\mathbf{u})$$

가 성립한다. 따라서 L은 선형변환이다. ■

$L : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$인 경우에는 둘 다 3차원상의 선형변환이므로 L은 선형연산자가 된다. 만약 $r > 1$일 경우에는 L을 확대변환(dilation transformation)이라 하고, $0 < r < 1$인 경우에는 L을 축소변환(contraction transformation)이라 한다. 확대변환인 경우에는 〈그림 9.8〉과 같이 벡터의 길이가 늘어나고, 축소변환인 경우에는 〈그림 9.9〉와 같이 벡터의 길이가 줄어들게 된다.



〈그림 9.8〉 확대변환



〈그림 9.9〉 축소변환

(3) 반사변환

예제 9-9 $L: \boldsymbol{R}^2 \rightarrow \boldsymbol{R}^2$이 다음과 같이 정의될 때 L이 선형변환이 되는지를 살펴보자.

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix}$$

풀이 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$를 각각 다음과 같이 정의하자.

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

먼저 합에 관한 조건에 따라 전개하면

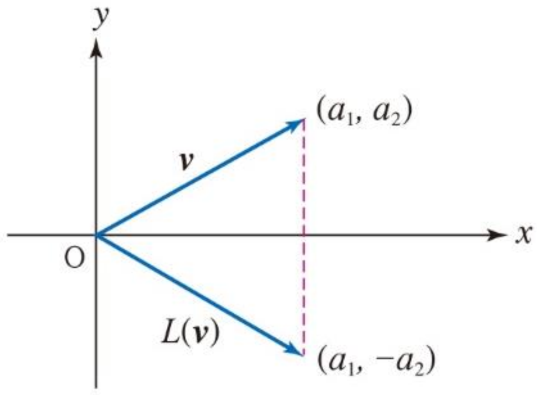
$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= L\left(\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ -(a_2+b_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ -a_2-b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ -b_2 \end{bmatrix} \\ &= L(\boldsymbol{u}) + L(\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

가 성립한다.

또한 α가 실수라면

$$L(\alpha\boldsymbol{u}) = L\left(\begin{bmatrix}\alpha a_1 \\ \alpha a_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\alpha a_1 \\ -\alpha a_2\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}a_1 \\ -a_2\end{bmatrix}$$
$$= \alpha L(\boldsymbol{u})$$

가 성립한다. 따라서 L은 선형변환이다. ■

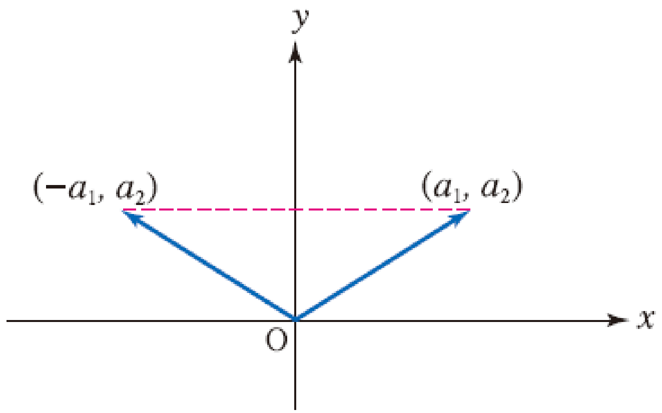


〈그림 9.10〉 x축에 대한 반사변환

9.1 선형변환의 개념과 함수

앞의 예제에서 L의 역할을 기하학적으로 나타내면 〈그림 9.10〉과 같은데, 이것은 x축에 대한 반사변환(reflection transformation)이다. 이와 마찬가지로 y축에 대한 반사변환은 다음과 같은 변환에 의해 이루어지는데 〈그림 9.11〉에 나타내었다.

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$



〈그림 9.11〉 y축에 대한 반사변환

(4) 회전변환

예제 9-10

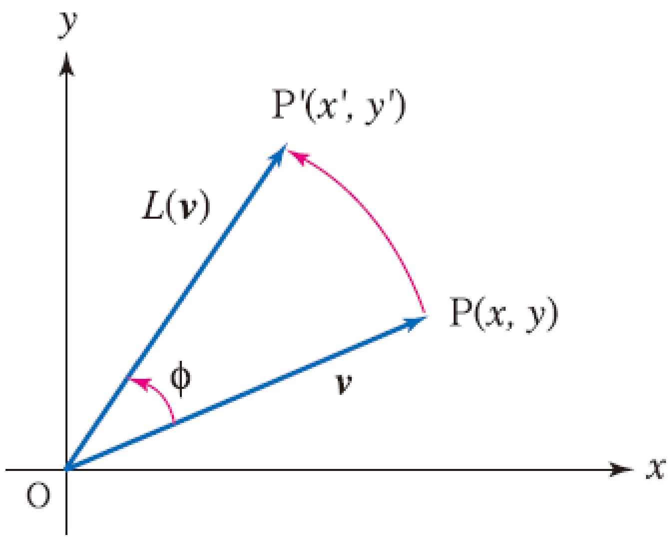
선형변환 $L: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$이 다음과 같이 정의될 때

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

만약 $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$라고 하면

$$L(\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} x\cos\phi - y\sin\phi \\ x\sin\phi + y\cos\phi \end{bmatrix}$$

와 같이 변환된다. 이 경우 L을 회전변환(rotation transformation)이라고 하는데, $L(\boldsymbol{v})$는 〈그림 9.12〉와 같이 원래의 벡터가 나타내는 점 $\mathrm{P}(x, y)$로부터 원점 O를 중심축으로 ϕ각도만큼 $\mathrm{P}'(x', y')$로 회전변환된 벡터이다. ■



〈그림 9.12〉 회전변환

9.1.4 변환의 표준행렬

정의 ❾-6 $L: R^n \to R^m$이 선형변환일 때 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$이 R^n에서의 표준기저라고 하고, A가 $m \times n$ 행렬이고 j번째 열이 $L(e_j)$라고 하자.

만약 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$가 R^n상의 어떤 벡터라고 하면 행렬 A는

$$L(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

인 성질을 가진다. 더군다나 A가 위의 식을 만족하는 유일한 행렬일 때, A를 L을 나타내는 표준행렬(standard matrix)이라고 한다.

예제 ❾-11 $L : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$이 다음과 같이 정의된 선형변환일 때 L을 나타내는 표준행렬을 구해 보자.

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}$$

풀이 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$이 $\boldsymbol{R}^3$의 표준기저라 하고 $L(\boldsymbol{e}_1)$, $L(\boldsymbol{e}_2)$, $L(\boldsymbol{e}_3)$을 각각 계산한다.

$$L(\boldsymbol{e}_1)=L\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

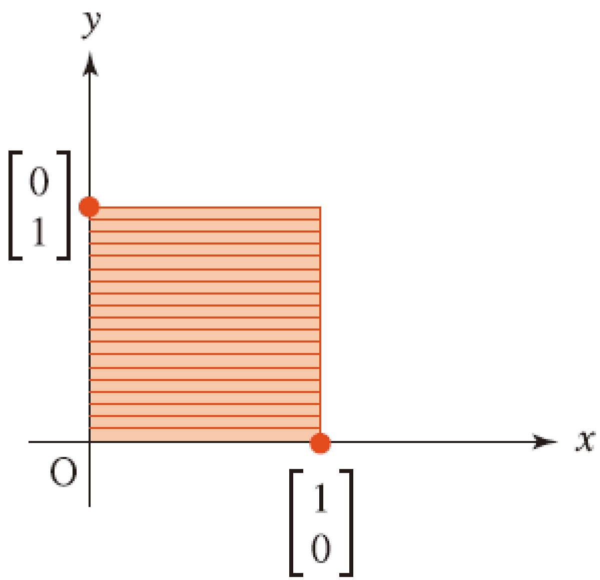
$$L(\boldsymbol{e}_2)=L\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

$$L(\boldsymbol{e}_3)=L\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}$$

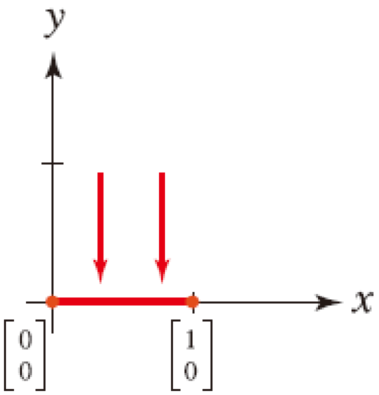
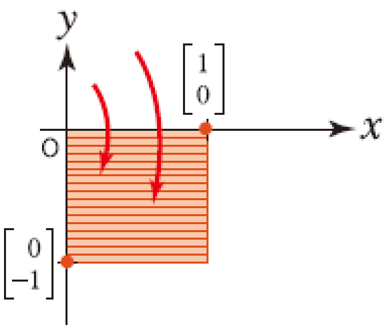
따라서 표준행렬은

$$A=\left[L(\boldsymbol{e}_1)\ L(\boldsymbol{e}_2)\ L(\boldsymbol{e}_3)\right]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 3 & -2\end{bmatrix}$$ 이다. ■

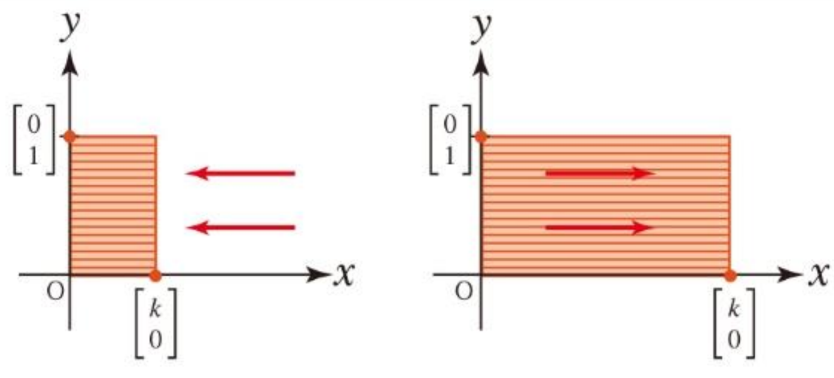
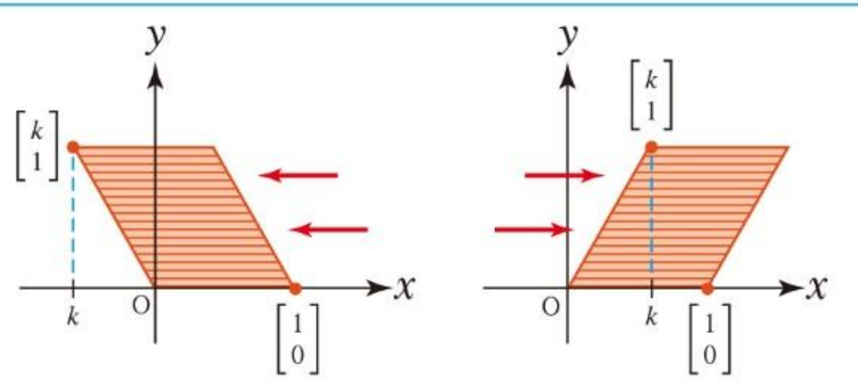
9.1 선형변환의 개념과 함수



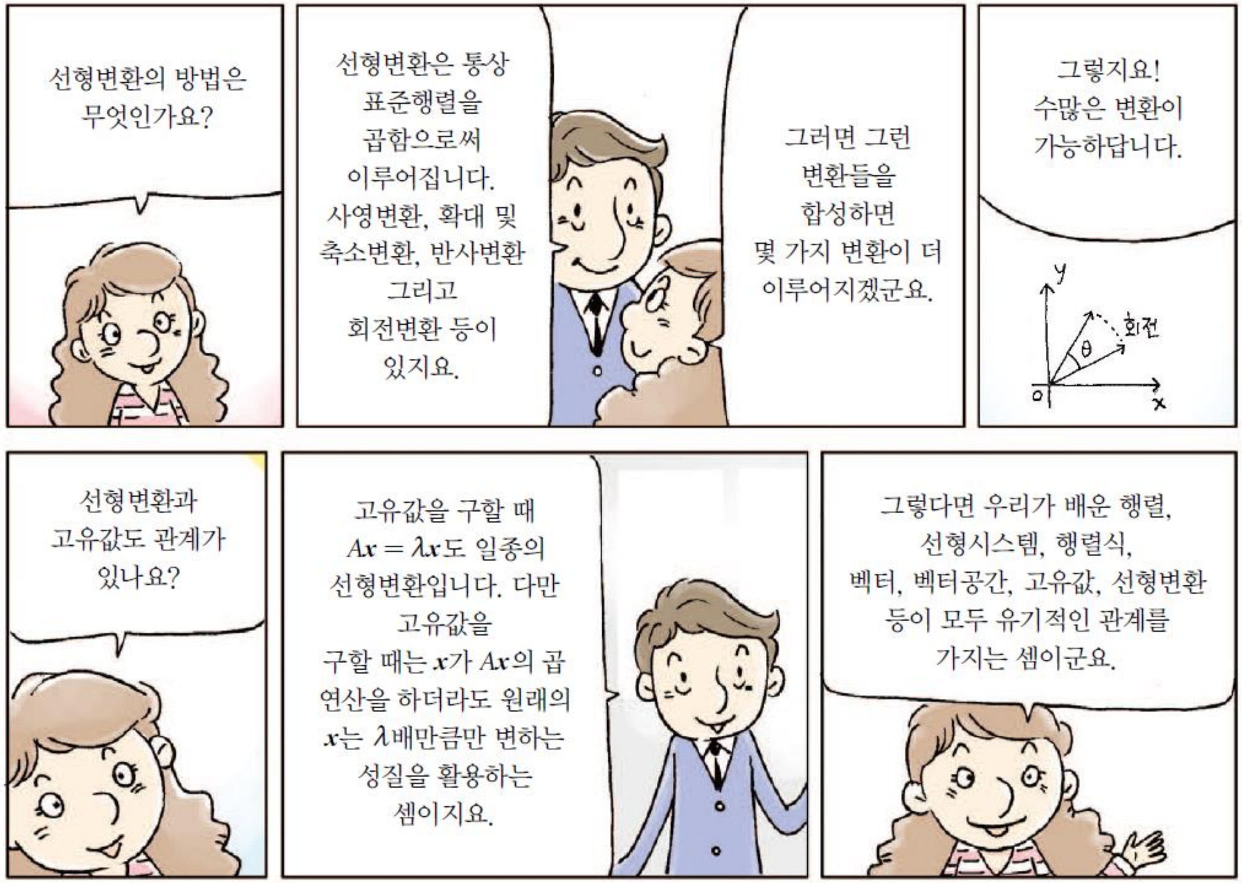
〈그림 9.13〉 선형변환의 대상 이미지

변 환	표준행렬	변환된 이미지
x축으로의 사영	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	
x축으로의 반사	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	

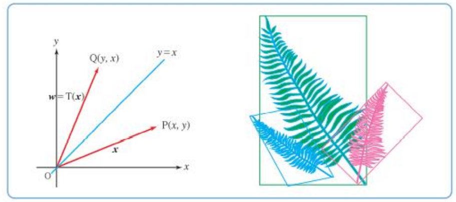
9.1 선형변환의 개념과 함수

변 환	표준행렬	변환된 이미지
수평방향으로의 축소와 확대	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	 $0<k<1$ $k>1$
수평방향으로의 층밀림	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	 $k<0$ $k>0$

〈그림 9.14〉 표준행렬과 여러 가지 변환


선형변환의 방법은 무엇인가요?
선형변환은 통상 표준행렬을 곱함으로써 이루어집니다. 사영변환, 확대 및 축소변환, 반사변환 그리고 회전변환 등이 있지요.
그러면 그런 변환들을 합성하면 몇 가지 변환이 더 이루어지겠군요.
그렇지요! 수많은 변환이 가능하답니다.
y
회전
θ
o
x
선형변환과 고유값도 관계가 있나요?
고유값을 구할 때 $Ax = \lambda x$도 일종의 선형변환입니다. 다만 고유값을 구할 때는 x가 Ax의 곱 연산을 하더라도 원래의 x는 λ배만큼만 변하는 성질을 활용하는 셈이지요.
그렇다면 우리가 배운 행렬, 선형시스템, 행렬식, 벡터, 벡터공간, 고유값, 선형변환 등이 모두 유기적인 관계를 가지는 셈이군요.

9.2.1 산업적 응용



예제 9-12

어떤 회사에서 두 개의 상품 A, B를 제조한다고 한다. 1만 원짜리 제품 A를 생산하기 위해서는 4,000원의 재료비, 3,000원의 인건비, 1,500원의 기타 경비가 든다고 하며, 1만 원짜리 제품 B를 만들기 위해서는 3,500원의 재료비, 3,500원의 인건비, 2,000원의 기타 경비가 든다고 한다. 이 경우 벡터 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$는 각 제품의 1만 원짜리 제품을 생산하는 데 드는 비용벡터가 된다.

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}4000\\3000\\1500\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}3500\\3500\\2000\end{bmatrix}$$

그러면 두 개의 벡터를 통합한 단가행렬 $P=[\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{v}]$를 만들 수 있다.

$$\begin{array}{cl} & \text{생산량} \\ & \begin{array}{cc}\text{A} & \text{B}\end{array} \\ P=\begin{bmatrix}4000 & 3500\\3000 & 3500\\1500 & 2000\end{bmatrix} & \begin{array}{l}\text{재료비}\\\text{인건비}\\\text{기타 경비}\end{array}\end{array}$$

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$를 x_1만 원에 해당하는 제품 A의 생산량과 x_2만 원에 해당하는 제품 B의 생산량을 나타내는 생산벡터라 하고 다음과 같이 함수를 정의한다.

$$T : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$$

$$T(\boldsymbol{x}) = P\boldsymbol{x} = x_1 \begin{bmatrix} 4000 \\ 3000 \\ 1500 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3500 \\ 3500 \\ 2000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{총 재료비} \\ \text{총 인건비} \\ \text{총 기타 경비} \end{bmatrix}$$

여기서 선형변환 T는 총 금액에 해당하는 생산벡터를 총 비용벡터로 변환시키는데, 이 변환의 선형성은 다음과 같은 두 가지로 반영된다.

1. 만약 생산량이 $\boldsymbol{x}$에서 $4\boldsymbol{x}$의 비율로 증가되었다면 그 비용은 같은 비율인 $T(\boldsymbol{x})$에서 $4T(\boldsymbol{x})$로 증가할 것이다.
2. 만약 $\boldsymbol{x}$와 $\boldsymbol{y}$를 생산벡터라고 한다면, $\boldsymbol{x}$와 $\boldsymbol{y}$가 결합된 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$에 해당하는 총 비용벡터는 정확히 $T(\boldsymbol{x})$와 $T(\boldsymbol{y})$의 합과 같다.

따라서 (1), (2) 조건에 따라 T는 선형변환이 되며, 산업 생산에 있어서 생산량과 제조 원가를 연동시키는 좋은 응용이 될 수 있다. ■

9.2.2 그래픽 변환으로의 응용

예제 9-13 R^2상의 벡터 $\mathbf{v}$를 x축에 대해 반사(reflection)하는 것은 다음과 같은 선형연산자에 의해 정의된다.

$$L(\mathbf{v}) = L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

그러면 정의에 따라

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{과 } L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

따라서 표준기저에 대해 L을 나타내는 표준행렬(standard matrix)은

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

그러므로 $L(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$이다.

예를 들어, 컴퓨터 그래픽스에서 〈그림 9.15〉와 같이 삼각형의 꼭지점의 좌표가 다음과 같다고 하자.

$$(-1,\ 4),\ (3,\ 1),\ (2,\ 6)$$

삼각형을 x축에 반사시키기 위해

$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$에 대해 다음과 같은 벡터 곱을 통해 이미지

$L(\mathbf{v}_1)$, $L(\mathbf{v}_2)$, $L(\mathbf{v}_3)$을 계산한다.

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

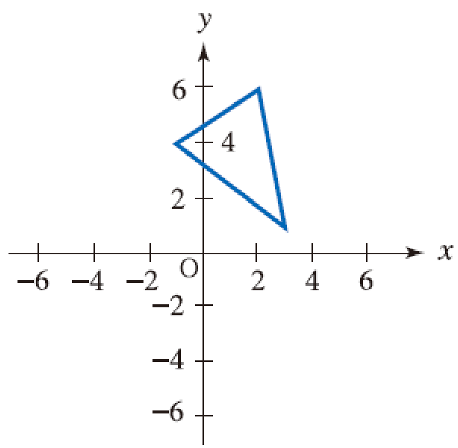
9.2 선형변환의 응용

이 3개의 결과들은 부분행렬에 의해 다음과 같이 나타난다.

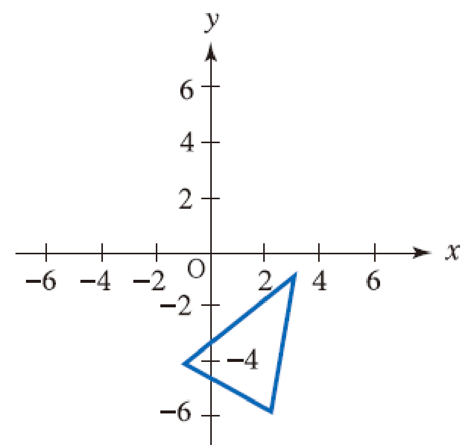
$$A[\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

따라서 삼각형의 x축에 반사된 이미지는 〈그림 9.16〉과 같은 3개의 꼭지점을 가진다.

$$(-1, -4), (3, -1), (2, -6) \quad ■$$



〈그림 9.15〉 원래의 이미지



〈그림 9.16〉 x축에 반사된 이미지

예제 9−14

R^2상의 벡터 $\mathbf{v}$를 $y=-x$인 직선에 대해 반사하는 것은 다음과 같은 선형연산자에 의해 정의된다.

$$L(\mathbf{v})=L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$$

그러면 정의에 따라

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\text{과 } L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\text{이다.}$$

따라서 표준기저에 대해 L을 나타내는 표준행렬은

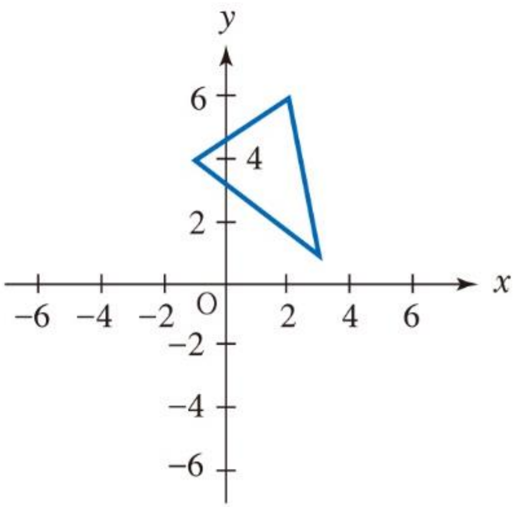
$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$이다.

예를 들어, 삼각형을 앞의 예제와 같이 정의하고 벡터 곱을 통해 이미지를 계산한다.

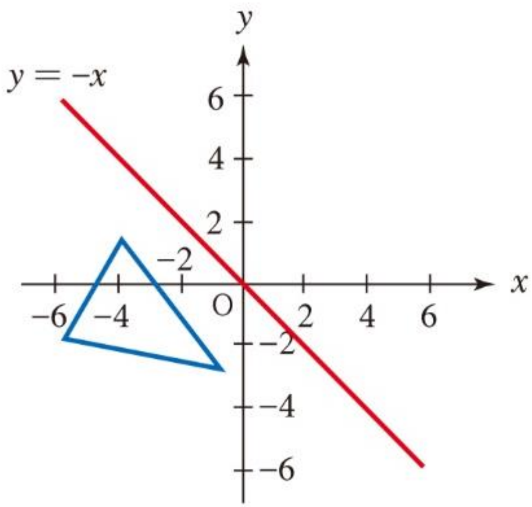
$$A[\boldsymbol{v}_1 \ \ \boldsymbol{v}_2 \ \ \boldsymbol{v}_3]=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & -1 & -6 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

따라서 〈그림 9.17〉과 같은 원래의 삼각형 이미지가 $y=-x$에 대해 반사된 이미지는 〈그림 9.18〉과 같이 3개의 꼭지점을 가진다.

$(-4,\ 1),\ (-1,\ -3),\ (-6,\ -2)$ ■



〈그림 9.17〉 원래의 이미지



〈그림 9.18〉 $y = -x$에 반사된 이미지

예제 9-15

평면에서의 회전은 선형연산자 $L : \boldsymbol{R}^2 \rightarrow \boldsymbol{R}^2$을 사용하여 시계 반대 방향으로 ϕ의 각도만큼 회전하는데, $\boldsymbol{R}^2$상에서의 표준기저는 다음과 같이 주어진다.

$$A = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

이제 포물선(parabola) $y = x^2$을 시계 반대 방향으로 $50°$만큼 회전시키려 한다고 가정하자.
예를 들어, 〈그림 9.19〉와 같이 포물선에서 5개의 점을 선택한다.

$$(-2, 4),\ (-1, 1),\ (0, 0),\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right),\ (3, 9)$$

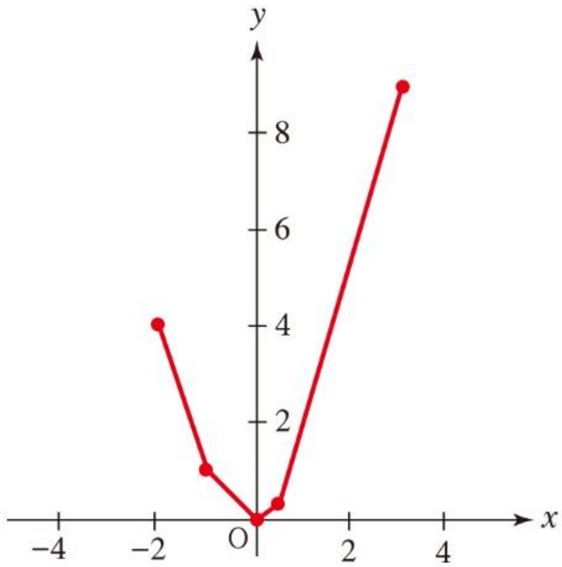
이 점들의 이미지를 계산하기 위해 다음과 같이

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_4=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_5=\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix}$$

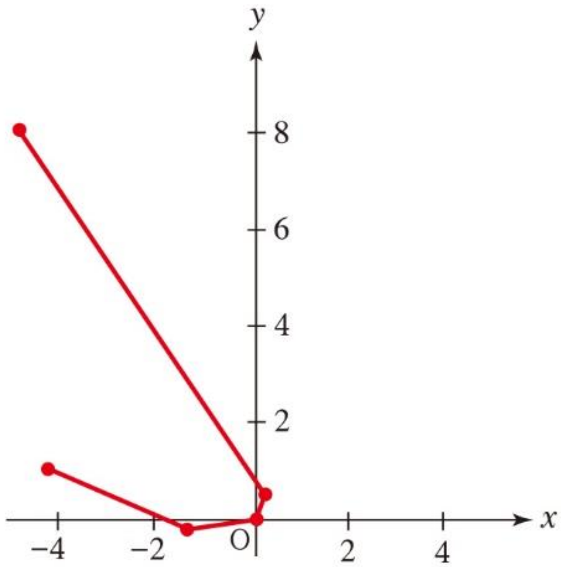
벡터로 놓고 벡터 곱을 통해 소수 4자리까지 값을 계산한다.

$$A[\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2\ \ \boldsymbol{v}_3\ \ \boldsymbol{v}_4\ \ \boldsymbol{v}_5]=\begin{bmatrix}-4.3498 & -1.4088 & 0 & 0.1299 & -4.9660\\1.0391 & -0.1233 & 0 & 0.5437 & 8.0832\end{bmatrix}$$

따라서 이미지 점은 (−4.3498, 1.0391), (−1.4088, −0.1233), (0, 0), (0.1299, 0.5437), (−4.9660, 8.0832)와 같이 정해지고, 나머지 점들도 연결시키면 〈그림 9.20〉과 같이 변환된 포물선 이미지를 보여 준다. ■



〈그림 9.19〉 원래의 이미지



〈그림 9.20〉 선형변환된 이미지

예제 ❾-16 선형변환 $T : \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$이 다음과 같이 정의될 때

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$에 대한 T의 이미지를 구해 보자.

풀이

$$T(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

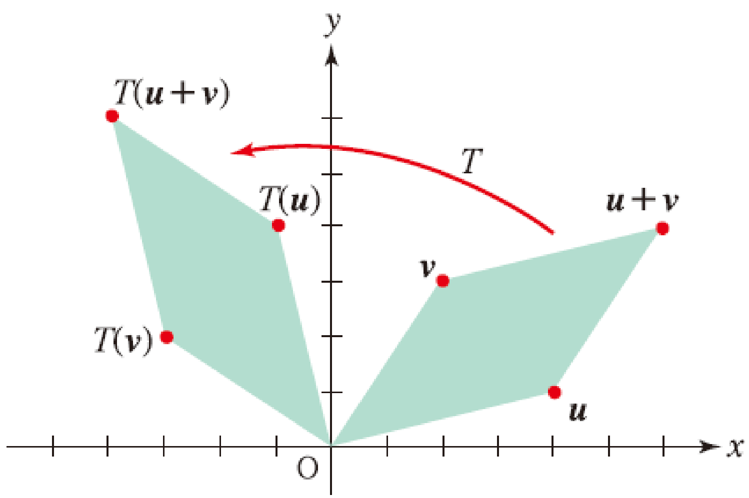
$$T(\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

이 결과로부터 $T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$는 $T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$임을 알 수 있다. ■

9.2 선형변환의 응용

〈그림 9.21〉에서 T는 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$를 원점을 축으로 시계 반대 반향으로 $90°$만큼 회전시킨다. 즉, T는 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$에 의해 결정되는 평행사변형을 $T(\boldsymbol{u})$와 $T(\boldsymbol{v})$에 의해 결정되는 평행사변형으로 변환시키는 것이다. ■



〈그림 9.21〉 평행사변형의 회전

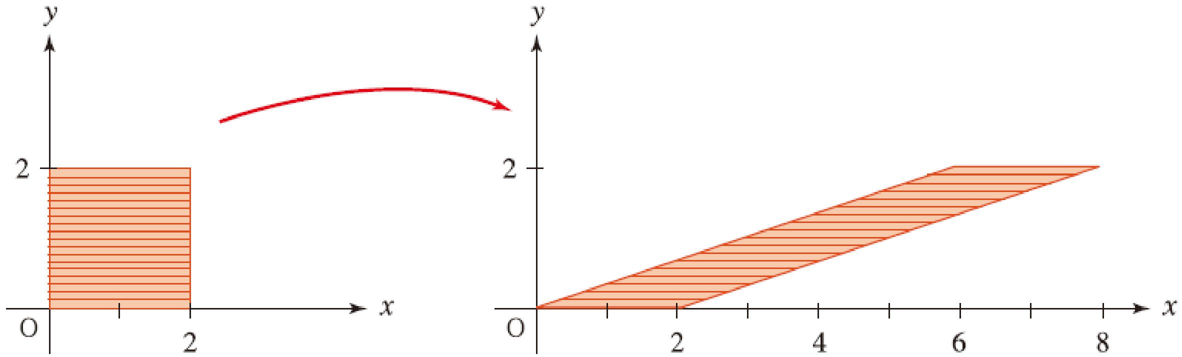
9.2.3 컴퓨터 그래픽에서 층밀림의 응용

예제 9-17

$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}$일 때 $T:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$로의 선형변환 $T(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$는 층밀림변환(shear transformation)임을 살펴보자.

T가 〈그림 9.22〉와 같이 길이가 2인 정사각형에 작용하여 층밀림변환을 통하여 오른쪽의 평행사변형을 만든다.

예를 들어, $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$인 점의 이미지는 $T(\boldsymbol{u})=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}$로 변환하고, $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$는 $\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix}$로 이미지가 변환된다. 층밀림변환 T는 바닥은 고정된 채 윗부분을 옆으로 미는 작용을 한다. 층밀림변환은 물리학, 지질학, 결정학 등에 많이 응용된다. ■



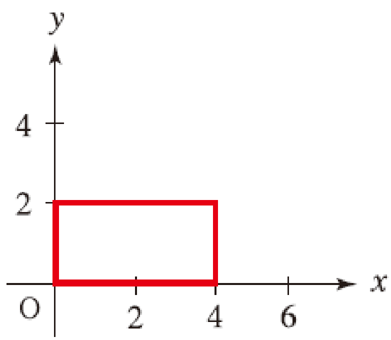
〈그림 9.22〉 층밀림변환

예제 9-18 x축 방향의 층밀림(shear)은 다음과 같은 선형연산자에 의해 정의된다.

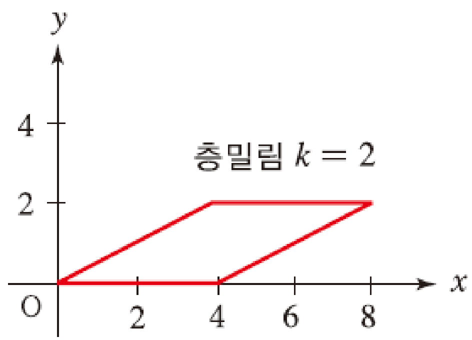
$$L(\mathbf{v}) = L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+ky \\ y \end{bmatrix} \quad (k\text{는 스칼라})$$

따라서 표준기저와 관련된 L을 나타내는 표준행렬은 $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$이다.

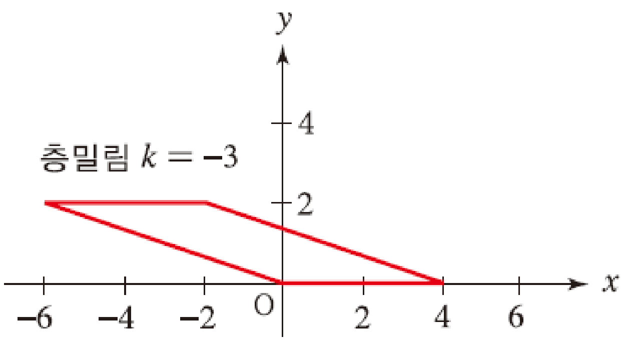
x축 방향으로의 층밀림은 점 (x, y)를 점 $(x+ky, y)$로 변환한다. 즉, 점(x, y)는 x축 방향으로 ky만큼 평행이동한다.



〈그림 9.23〉 원래의 이미지

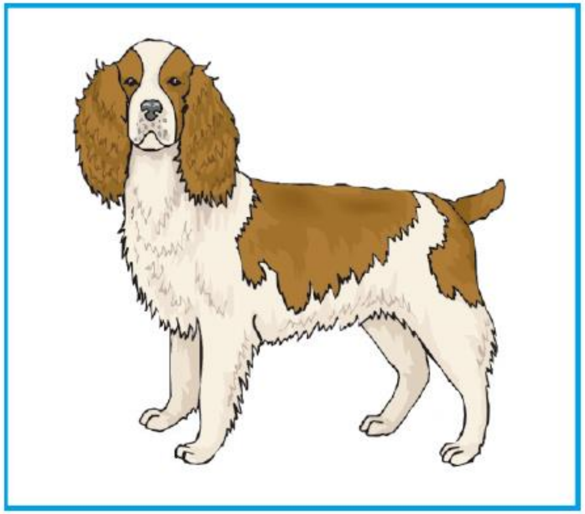


〈그림 9.24〉 $k=2$일 때의 이미지



〈그림 9.25〉 $k=-3$일 때의 이미지

예를 들어, 〈그림 9.23〉에서와 같이 꼭지점들이 (0, 0), (0, 2), (4, 0), (4, 2)인 4개의 점을 가진 직사각형의 층밀림변환을 고려해 보자. 만약 x축 방향으로 $k=2$를 적용시킬 경우 원래의 이미지는 〈그림 9.24〉와 같이 4개의 꼭지점 (0, 0), (4, 2), (4, 0), (8, 2)를 가진 평행사변형으로 변환되며, $k=-3$을 적용시킬 경우 원래의 이미지는 〈그림 9.25〉와 같이 4개의 꼭지점 (0, 0), (−6, 2), (4, 0), (−2, 2)를 가진 평행사변형으로 변환된다. ■



〈그림 9.26〉 원래 개의 이미지

〈그림 9.27〉 층밀림변환 후 개의 이미지

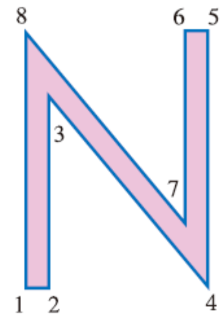
예제 ❾−19

글씨 N은 〈그림 9.28〉과 같이 8개의 점으로 이루어져 있다. 그 점의 좌표들은 다음과 같은 행렬 D와 같이 나타난다.

꼭지점

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x\text{축} \\ y\text{축} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & .5 & .5 & 6 & 6 & 5.5 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6.42 & 0 & 8 & 8 & 1.58 & 8 \end{bmatrix} = D \end{array}$$

행렬 D 이외에도 점들이 어떻게 연결되어 있는지 지정하는 것이 필요하지만 선형변환 후에는 그 관계가 그대로 유지된다고 가정한다.

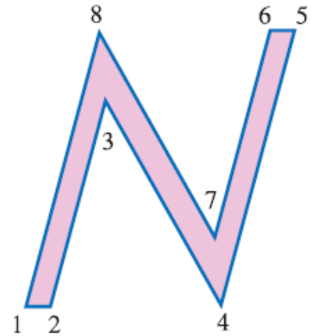


〈그림 9.28〉 원래의 N

다음과 같은 행렬 $A=\begin{bmatrix}1 & .25\\ 0 & 1\end{bmatrix}$가 주어졌을 때, 행렬의 층밀림변환에 있어서 주어진 행렬을 곱하면 $L\mathbf{x}=A\mathbf{x}$가 된다. 행렬의 곱의 정의에 의하여 AD는 문자 N의 점들의 다음과 같이 변환된 이미지를 가진다.

$$AD=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & .5 & 2.105 & 6 & 8 & 7.5 & 5.895 & 2 \\ 0 & 0 & 6.420 & 0 & 8 & 8 & 1.580 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

$k=0.25$를 적용시켜 변환된 점들은 〈그림 9.29〉와 같이 기울어진 형태로 나타나는데 원래의 그림에 대응하는 선의 연결로 나타난다.



〈그림 9.29〉 기울어진 N

〈그림 9.30〉 합성변환으로 축소된 N

그리고 이에 추가하여 X축 방향으로 0.75를 곱하여 실제 크기의 25%만큼 축소시키는 것을 살펴보자. 행렬 A의 변환에다 추가로 축소시키는 행렬 $S=\begin{bmatrix} .75 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$를 적용하면 합성변환의 행렬은 다음과 같다.

$$SA=\begin{bmatrix} .75 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & .25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} .75 & .1875 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

합성변환의 결과는 〈그림 9.30〉과 같이 기울어진 N을 다시 25% 축소시킨 결과로 나타난다. ■

선형변환의 생활 속의 응용

- 선형변환은 선형 관계에 있는 다양한 데이터들의 변화에 따른 처리를 매우 원활하게 하여, 빠르고 정확한 계산을 가능하게 한다.
- 데이터의 단순화를 통하여 더욱 간편하게 각종 통계적 처리를 할 수 있도록 해 준다.
- 선형변환은 높은 차원의 벡터를 사영을 통하여 낮은 차원의 벡터로 변환시켜준다.
- 응용의 폭이 매우 넓은 행렬에서의 선형변환을 통하여 수학, 물리학, 공학 등에 많이 활용된다.
- 컴퓨터 그래픽에서 선형변환을 통해 점이나 도형 등의 영상을 변환시켜서 처리할 수 있으며, 다양한 그래픽의 변화를 통해 우리 눈을 즐겁게 해 준다.

감사합니다

Thank you