05

CHAPTER

벡터

LINEAR ALGEBRA

개요

- ❖ 벡터와 관련된 전반적인 논제들을 학습함
- ❖ 벡터의 기본 개념을 정의하고 그 표현법에 대해 고찰함
- ❖ 평면상에서 벡터의 기하학적 표현과 더불어 벡터의 크기를 정의함
- ❖ 단위벡터와 단위좌표벡터에 대해서도 살펴봄
- ❖ 벡터 연산에서 벡터의 합과 차, 그리고 스칼라 곱의 계산법과 그것이 가지는 기하학적 의미를 고찰함
- ❖ 교환법칙, 결합법칙, 항등원의 존재 등 벡터의 성질들을 고찰함
- ❖ MATLAB에 의해 편리하게 벡터 연산을 하는 방법을 살펴봄

05 CHAPTER

벡터

LINEAR ALGEBRA

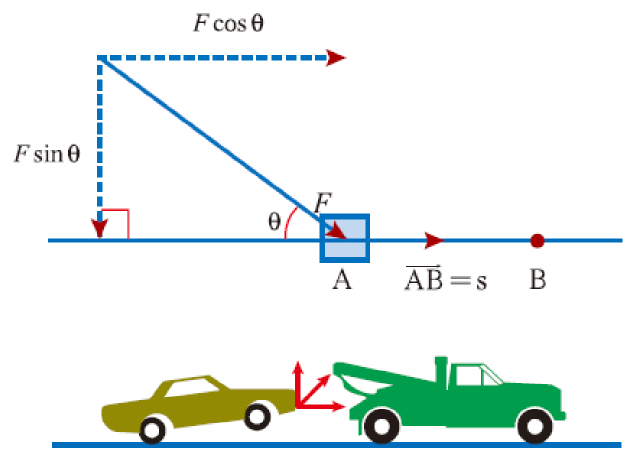
CONTENTS

5.1 벡터의 개념과 표현

- 압력, 속력(speed), 물체의 질량, 전자의 전하, 물의 비열, 저항기의 저항, 원의 지름, 삼각형의 면적, 육면체의 체적(부피) 등과 같은 물리적 양(quantity)은 주어진 양의 크기(magnitude)인 실수로 표시할 수 있다. 이때 실수 값을 **스칼라(scalar)**라고 한다.
- 단 하나의 수만으로는 나타낼 수 없는 또 다른 물리적 및 기하학적 양도 있는데, 속도(velocity), 힘(force) 그리고 가속도(acceleration) 등은 그들의 크기뿐만 아니라 방향까지도 포함한다. 이러한 것들을 **벡터(vector)**라고 한다.

스칼라 → 크기

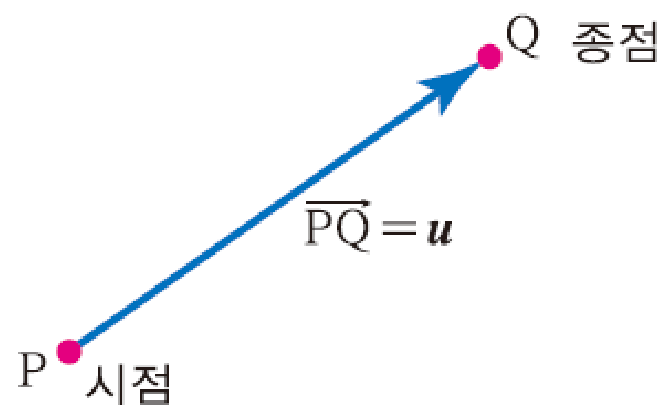
벡터 → 크기 + 방향



〈그림 5.1〉 힘의 방향을 나타내는 벡터들

5.1 벡터의 개념과 표현

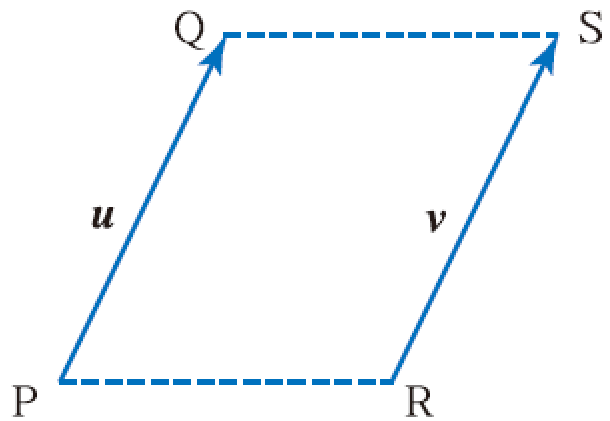
- 화살표의 시작점인 P를 **시점(initial point, tail)**이라고 하고,
- 끝나는 점인 Q를 **종점(terminal point, head)**이라고 한다.
- 점 P에서 점 Q까지의 방향을 가진 선분 PQ를 **유향선분(directed segment)**이라고 한다.



〈그림 5-2〉 시점과 종점이 있는 벡터 $\overrightarrow{PQ}$

5.1 벡터의 개념과 표현

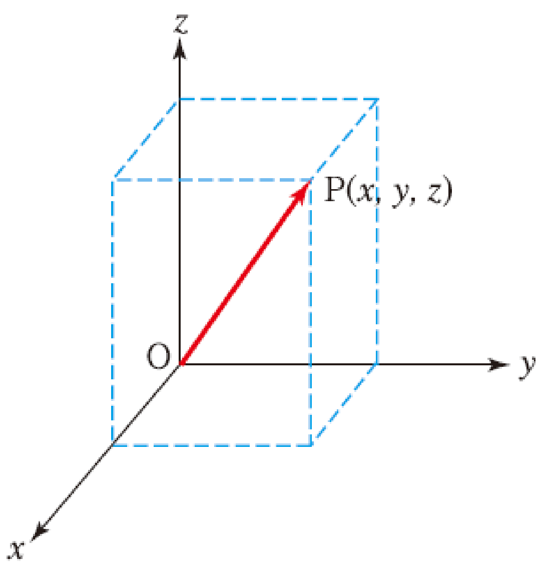
- 두 벡터 PQ와 RS가 똑같은 크기와 방향을 가지면, 이 두 벡터가 어디에 위치해 있더라도 서로 **동치(equivalent)**라고 한다.
- 이와 같이 벡터의 시점과 종점의 위치에 관계없이 크기와 방향만을 생각할 때 이것을 **기하벡터(geometric vector)**라고 부르며 $u = v$로 나타낸다.



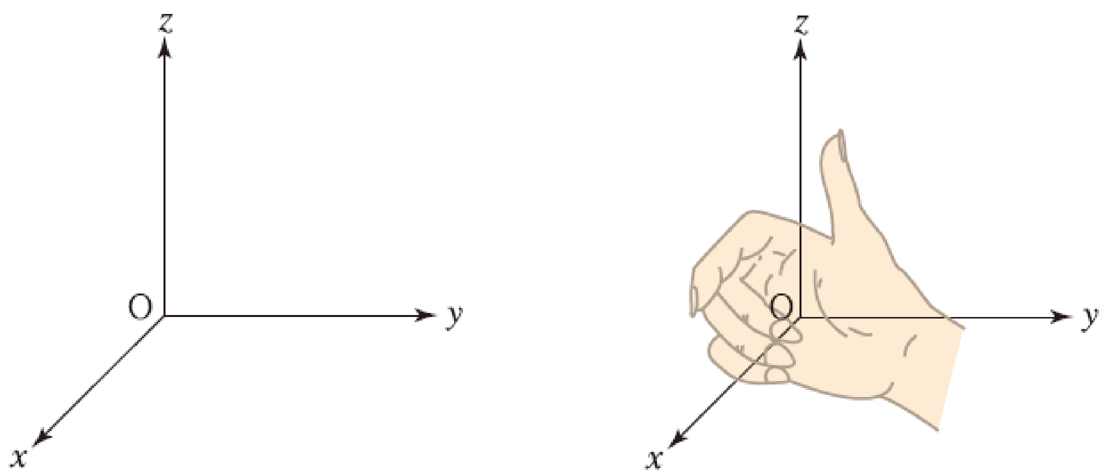
〈그림 5.3〉 $u = v$인 두 벡터

5.1 벡터의 개념과 표현

- 벡터는 좌표로도 나타낼 수 있는데,
  가령 3차원 공간에서 원점 (0, 0, 0)으로부터 좌표상의 위치 (x, y, z) 까지 향하는 벡터를 **위치벡터(position vector)**라고 부른다.



〈그림 5.4〉 3차원상에서의 위치벡터



〈그림 5.5〉 오른손 좌표계와 오른손 법칙

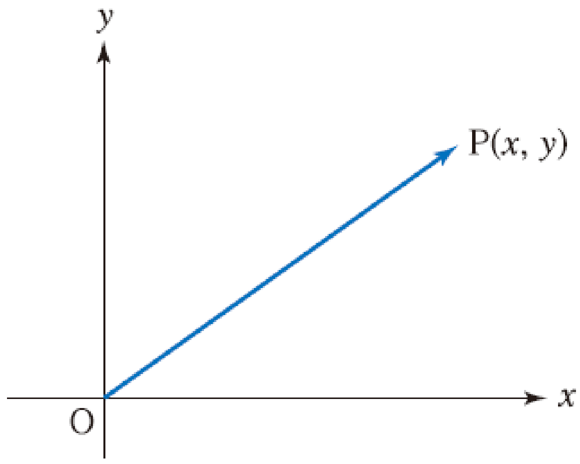
행벡터와 열벡터

또한 이것을 n차원 공간인 $\boldsymbol{R}^n$까지 확장하면 벡터 $\boldsymbol{u}$는

$$\boldsymbol{u} = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$ [행벡터(row vector) 표기 방식]

또는 $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$로 표현된다. [열벡터(column vector) 표기 방식]

5.1 벡터의 개념과 표현



〈그림 5.6〉 평면상의 벡터 $\overrightarrow{OP}$

정의 ❺-1

평면상의 벡터는 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$와 같은 2×1 행렬이다. 벡터 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$ 중 어느 하나를 평행 이동하여 완전히 겹쳐질 때, 즉 두 벡터의 크기와 방향이 같을 때 두 벡터가 **갈다 (equal)**라고 하고 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$로 나타낸다.

예를 들어, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$가 다음과 같을 때

5.1 벡터의 개념과 표현

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

두 벡터가 각각의 성분이 같으면, 즉 $x_1 = x_2$와 $y_1 = y_2$이면 같다라고 한다.

따라서 두 벡터 $\begin{bmatrix} a+b \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ a-b \end{bmatrix}$가 같기 위한 조건은

$$a + b = 4$$
$$a - b = 2$$

이므로 $a = 3$, $b = 1$이다.

예제 5-1 다음에서 두 개의 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$가 같을 때 각각의 변수 값을 구해 보자.

$$(1)\ \mathbf{u}=\begin{bmatrix} a-b \\ 2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix} 4 \\ a+b \end{bmatrix} \qquad (2)\ \mathbf{u}=\begin{bmatrix} x \\ 2y+1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{bmatrix} y-2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

풀이 양변의 벡터 값이 같도록 변수 값을 구한다.

(1) $a-b=4$

$a+b=2$

따라서 $a=3$, $b=-1$이다.

(2) $x=y-2$

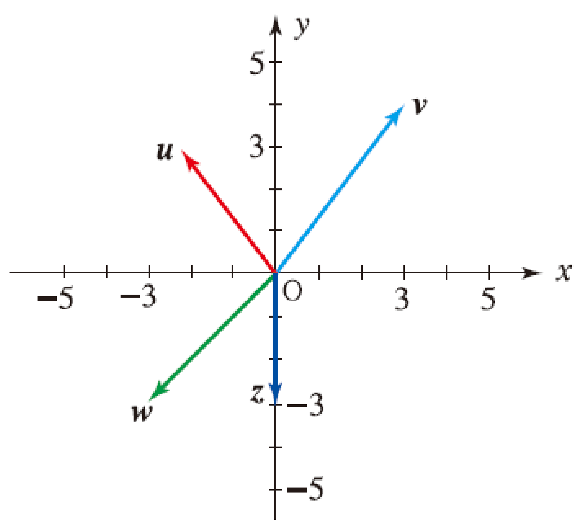
$2y+1=3$

따라서 $x=-1$, $y=1$이다. ■

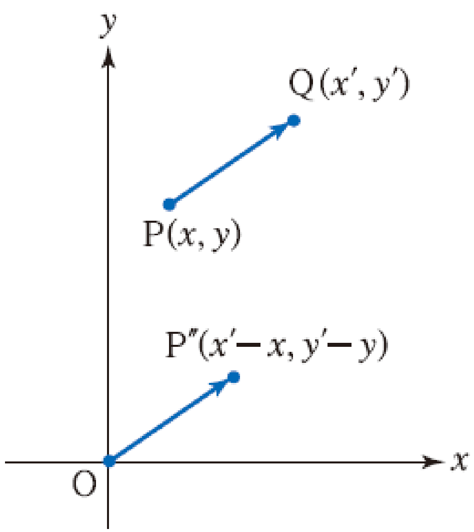
예제 5-2 다음의 벡터들을 나타내는 R^2상에서의 유향선분들을 각각 그려 보자.

$$(1)\ \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}\qquad(2)\ \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\qquad(3)\ \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}-3\\-3\end{bmatrix}\qquad(4)\ \boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}$$

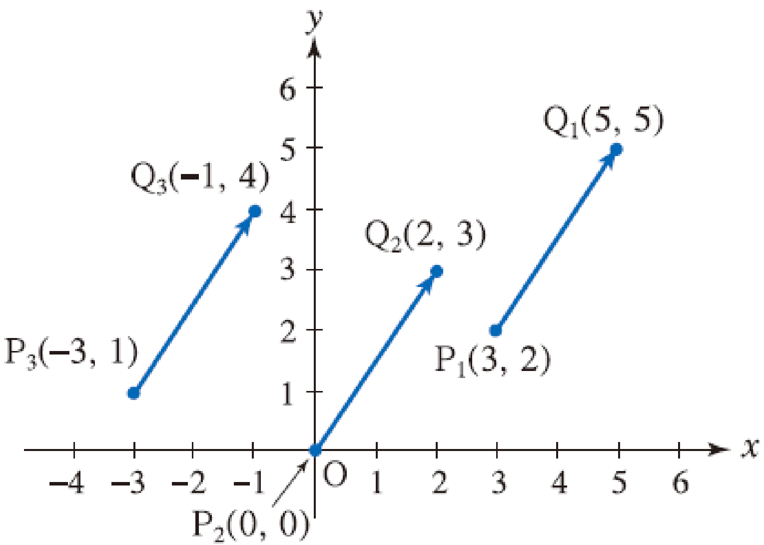
풀이 원점을 중심으로 하여 해당되는 좌표로 향하는 벡터를 그리면 〈그림 5.7〉과 같다. ■



〈그림 5.7〉 벡터의 표현



〈그림 5.8〉 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP''}$

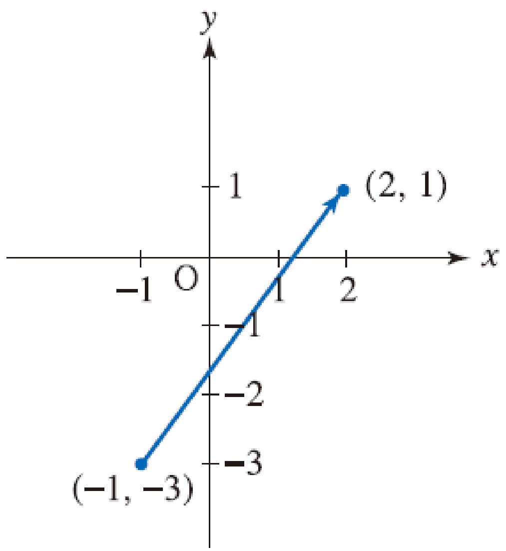


〈그림 5.9〉 3개의 같은 벡터들

예제 5-3

종점이 (2, 1)인 벡터 $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$의 시점을 결정하고 그려 보자.

풀이 종점이 (2, 1)이므로 시점을 계산하기 위해서는 종점의 성분에서 벡터의 성분을 빼면 된다. 즉, (2−3, 1−4)이므로 시점은 〈그림 5.10〉과 같이 (−1, −3)이 된다. ■



〈그림 5.10〉 종점과 주어진 벡터에 의한 벡터 표현


스칼라는 단순히 측정값인 크기를 나타내고, 벡터는 크기에다 방향까지 표현한 것입니다. 축구공을 찰 때 발에 똑같은 힘을 가하더라도 차는 부위와 방향에 따라 공이 날아가는 곳이 다르다는 것은 잘 알죠? 벡터(vector)는 '어디로 이동시킨다'는 라틴어의 'vehere'로부터 유래되었어요.
그런데 좌표상으로 보면 두 벡터가 분명히 다른데, 두 벡터가 같다라는 말은 이해가 잘 안 돼요.
벡터에서는 크기와 방향이 같은지를 중요하게 생각합니다. 크기와 방향이 같은 두 벡터는 평행이동시키면 사실상 같은 벡터가 되기 때문이지요.
벡터의 표기를 보면 행렬의 표기법과 비슷하군요.
$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
그렇죠? 행렬의 열벡터나 행벡터의 표기법과 같아요.

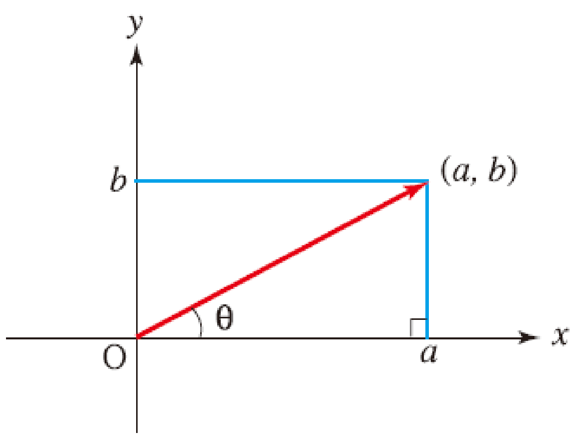
5.1 벡터의 개념과 표현

정의 ❺-2 R^2상의 평면에서 벡터 $\boldsymbol{u}=(a,\ b)$의 크기(magnitude), 길이(length) 또는 노름(norm)은 $\|\boldsymbol{u}\|$로 나타내며, 피타고라스의 정리에 따라

$$\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{a^2+b^2}$$

이 된다. 임의의 벡터 $\boldsymbol{u}$에 대해 명백히 $\|\boldsymbol{u}\|\geq 0$이고, $\boldsymbol{u}$가 영벡터일 때 $\|\boldsymbol{u}\|=0$이다.

예를 들어, $\boldsymbol{u}=(1,\ -2)$이면 $\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$이다.



〈그림 5.11〉 벡터 $\boldsymbol{u}=(a,\ b)$의 크기와 방향

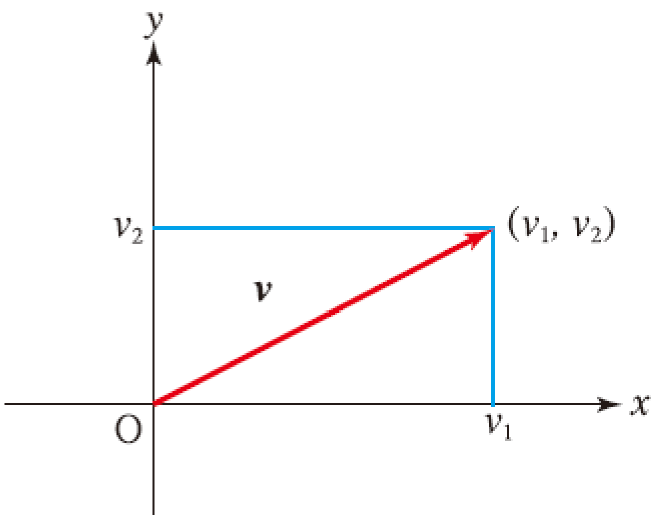
정의 ❺-3 다음과 같이 모든 성분이 0인 벡터를 영벡터(zero vector)라고 하고 $\mathbf{0}$으로 나타낸다.

$$[0],\quad \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

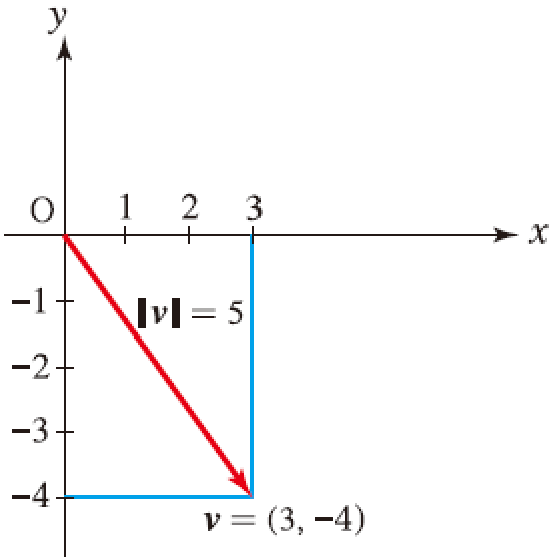
즉, $\mathbf{0}$(영벡터)는 시점과 종점이 일치하는 특수한 벡터로 크기가 0이다. 따라서 어떤 벡터 $\boldsymbol{u}$에 대해

$$\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{u} + (-1)\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$$

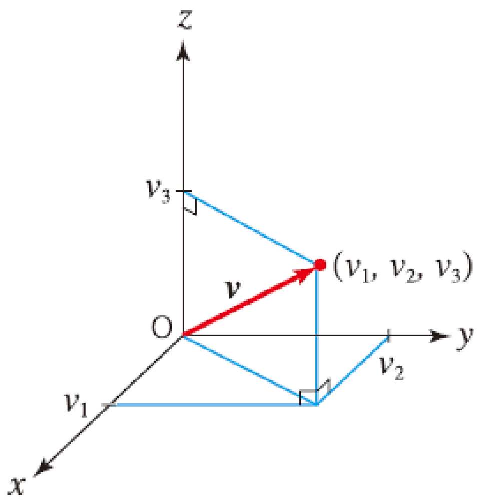
가 성립한다. 이 경우 $(-1)\boldsymbol{u}$는 $-\boldsymbol{u}$로 나타내고 $\boldsymbol{u}$와 반대 방향인 벡터를 의미한다.



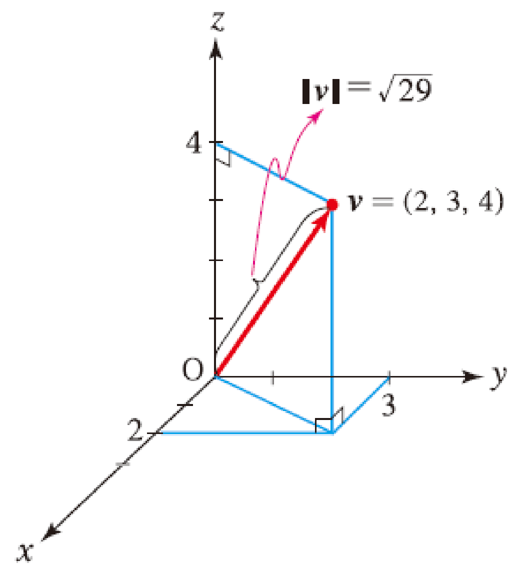
〈그림 5.12〉 R^2상의 벡터 $\boldsymbol{v}$의 표현



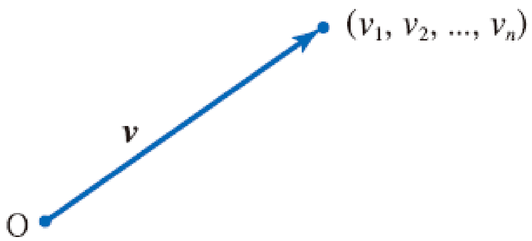
〈그림 5.13〉 벡터 $\boldsymbol{v}$의 크기



〈그림 5.14〉 R^3상의 벡터의 표현

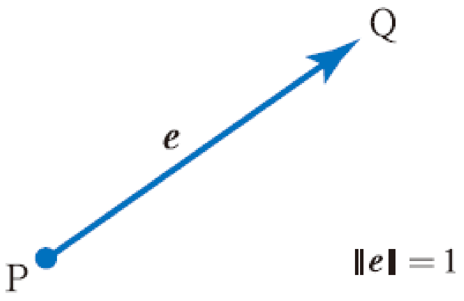


〈그림 5.15〉 R^3상의 벡터의 표현과 크기



〈그림 5.16〉 R^n상에서의 벡터 v의 표현

정의 ❺-4 R^n상에서 크기가 1인 벡터를 단위벡터(Unit vector)라고 하며 e로 나타낸다. 그러므로 v와 방향이 같은 단위벡터는 $(1/\|v\|)v$가 된다. 즉, 임의의 벡터를 그 벡터의 크기로 나눈 벡터는 항상 단위벡터가 되는 성질을 가지고 있다. 〈그림 5.17〉은 단위벡터를 나타낸다.



〈그림 5.17〉 단위벡터

예제 ❺-4 다음에 주어진 벡터와 방향이 같은 단위벡터를 구해 보자.

(1) $\boldsymbol{u}=(2,-3)$ (2) $\boldsymbol{v}=(2,1,-3)$

풀이 (1) $\boldsymbol{u}=(2,-3)$일 때,

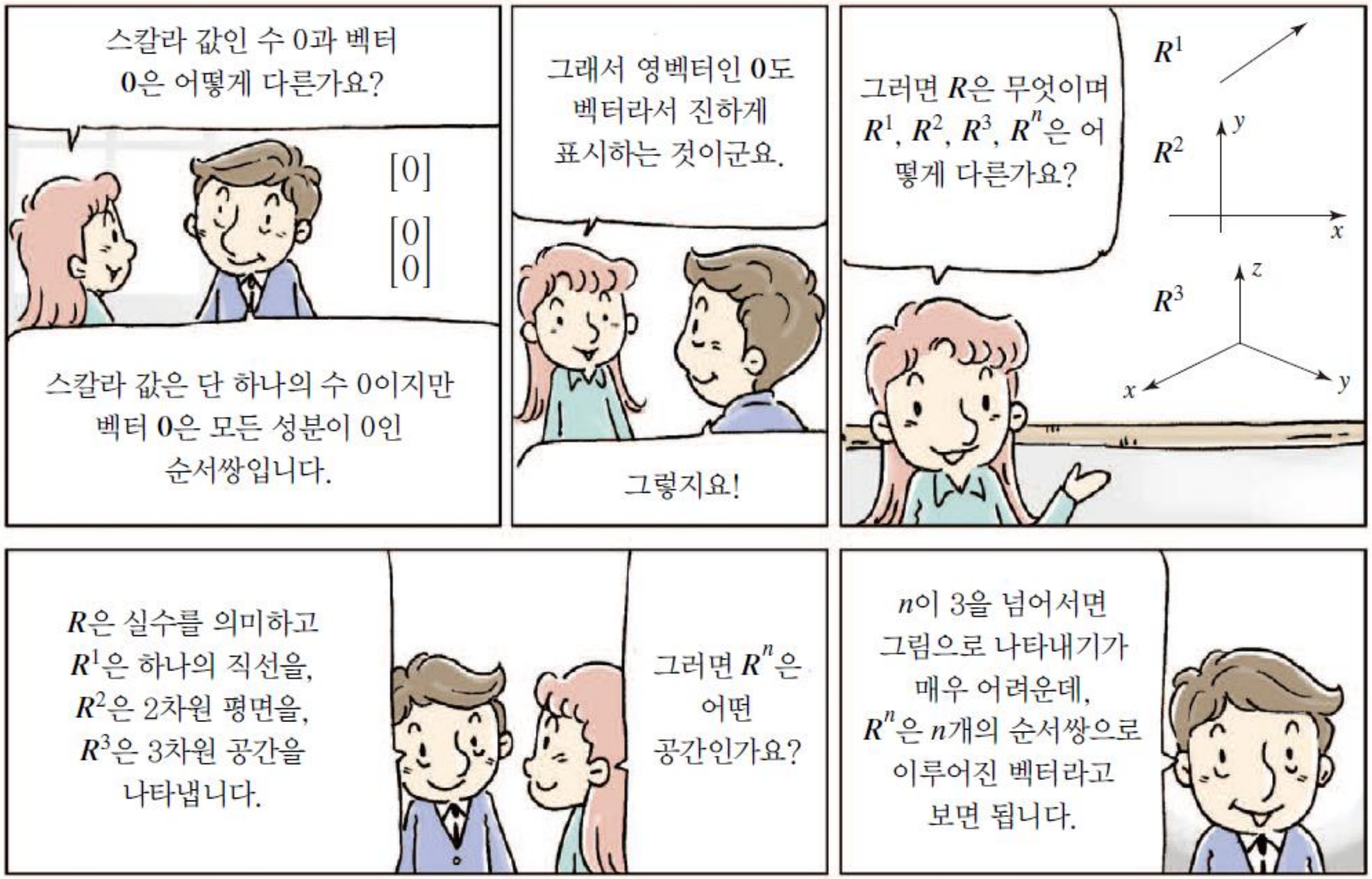
$\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$이므로 단위벡터 $\boldsymbol{e}=\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)(2,-3)$이다.

(2) $\boldsymbol{v}=(2,1,-3)$일 때,

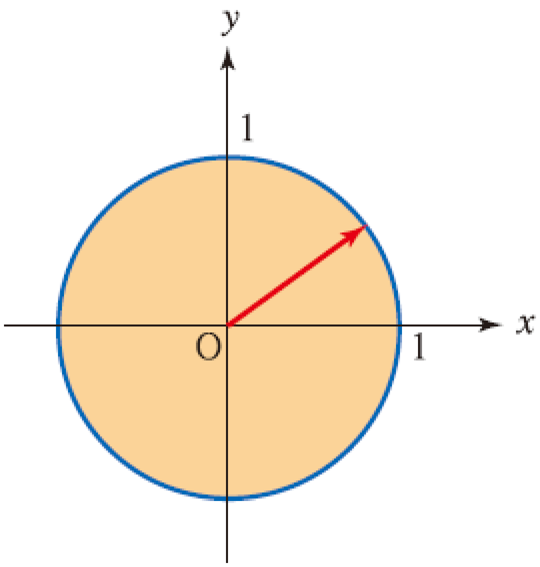
$\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}=\sqrt{14}$이므로 단위벡터 $\boldsymbol{e}=\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)(2,1,-3)$

이다. ■

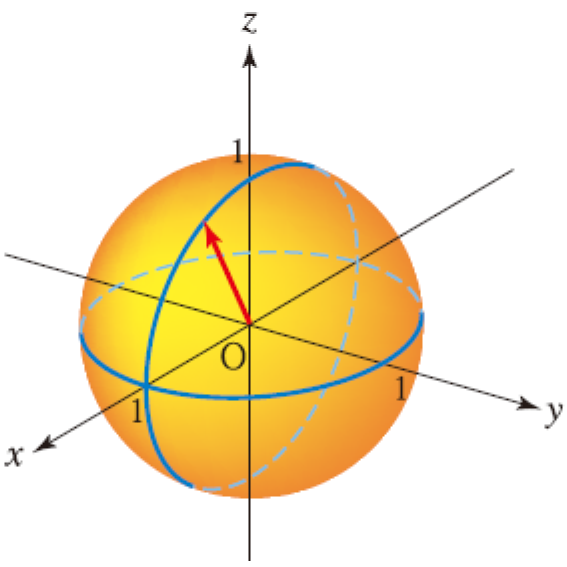
5.1 벡터의 개념과 표현



스칼라 값인 수 0과 벡터 **0**은 어떻게 다른가요?
[0]
$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$
스칼라 값은 단 하나의 수 0이지만 벡터 **0**은 모든 성분이 0인 순서쌍입니다.
그래서 영벡터인 **0**도 벡터라서 진하게 표시하는 것이군요.
그렇지요!
그러면 R은 무엇이며 R^1, R^2, R^3, R^n은 어떻게 다른가요?
R^1
R^2
y
x
R^3
z
x
y
R은 실수를 의미하고 R^1은 하나의 직선을, R^2은 2차원 평면을, R^3은 3차원 공간을 나타냅니다.
그러면 R^n은 어떤 공간인가요?
n이 3을 넘어서면 그림으로 나타내기가 매우 어려운데, R^n은 n개의 순서쌍으로 이루어진 벡터라고 보면 됩니다.



〈그림 5.18〉 R^2상에서의 단위벡터



〈그림 5.19〉 R^3상에서의 단위벡터

예제 ❺-5

벡터 $\boldsymbol{v}=(3,\ 4)=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$에 대하여 $\boldsymbol{v}$ 방향의 단위벡터를 구해 보자.

풀이 $\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로 $\boldsymbol{v}$ 방향의 단위벡터 $\boldsymbol{u}$는

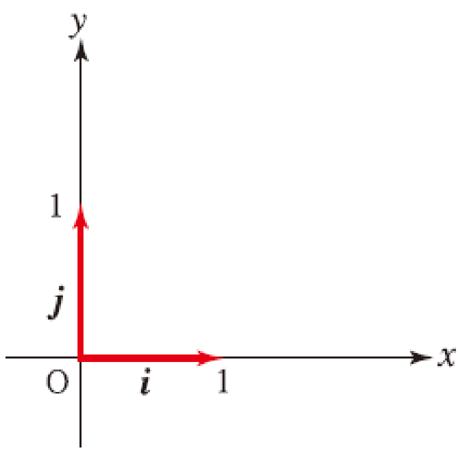
$$\boldsymbol{u}=\frac{1}{5}(3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})=\frac{3}{5}\boldsymbol{i}+\frac{4}{5}\boldsymbol{j}$$

이다. 그 이유는 단위벡터 $\boldsymbol{u}$는 원래의 벡터 $\boldsymbol{v}$와 같은 방향이면서

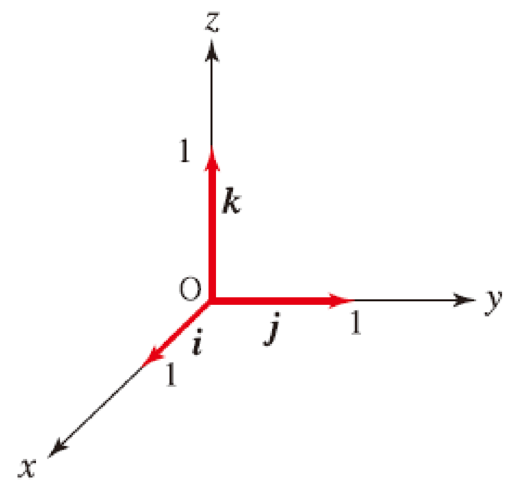
$\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=1$이기 때문이다. ■

5.1 벡터의 개념과 표현

- R^2상에는 다른 벡터들을 편리하게 나타낼 수 있는 두 개의 특별한 벡터인 **단위좌표벡터(Unit coordinate vector)**가 있다.
- 두 벡터 i와 j를 벡터공간 R^2의 **기저벡터(basis vector)**라고 한다.



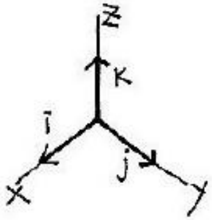
〈그림 5.20〉 R^2상에서의 단위좌표벡터



〈그림 5.21〉 R^3상에서의 단위좌표벡터

단위벡터, 단위좌표벡터, 기저벡터

- 단위벡터는 크기가 1인 벡터를 말한다.
- 단위좌표벡터는 좌표상의 단위벡터임을 강조한 것이다.
- 기저벡터인 i, j, k 등도 단위벡터 중의 하나인데, x, y, z상의 축의 역할을 담당한다.



예제 ❺-6

원점으로부터 $\boldsymbol{u}=(1,\ 2,\ 5)$ 방향의 단위좌표벡터를 구해 보자.

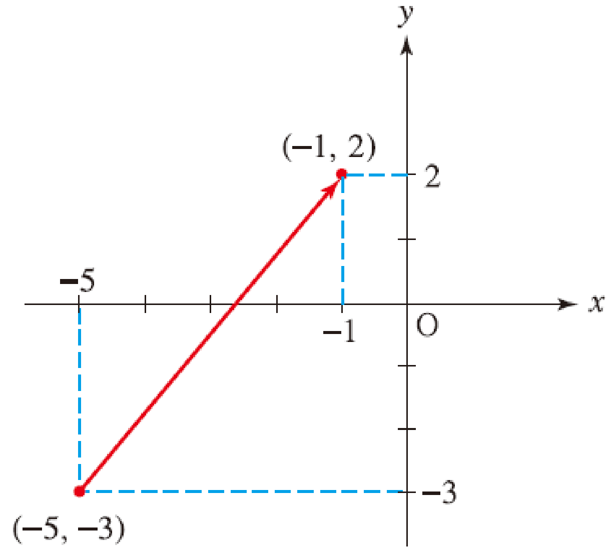
풀이 임의의 벡터를 그 벡터의 크기로 나누면 단위좌표벡터가 되는데,

$\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{1^2+2^2+5^2}=\sqrt{30}$이다. 따라서 $\boldsymbol{u}$ 방향의 단위좌표벡터는 다음과 같다.

$$\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}=\frac{1}{\sqrt{30}}(1,\ 2,\ 5)\ \text{ 또는 }\left(\frac{1}{\sqrt{30}},\ \frac{2}{\sqrt{30}},\ \frac{5}{\sqrt{30}}\right)\quad\blacksquare$$

예제 5-7 시점이 $P_1(-5, -3)$인 벡터 $\overrightarrow{P_1P_2} = 4\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$의 종점 P_2를 구해 보자.

풀이 시점이 $(-5, -3)$이고 벡터의 길이가 $4\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$이므로 종점 P_2의 좌표는 $(-5+4, -3+5) = (-1, 2)$이다. 이것을 좌표평면상의 벡터로 나타내면 〈그림 5.22〉와 같다. ■



〈그림 5.22〉 시점과 벡터

5.1 벡터의 개념과 표현

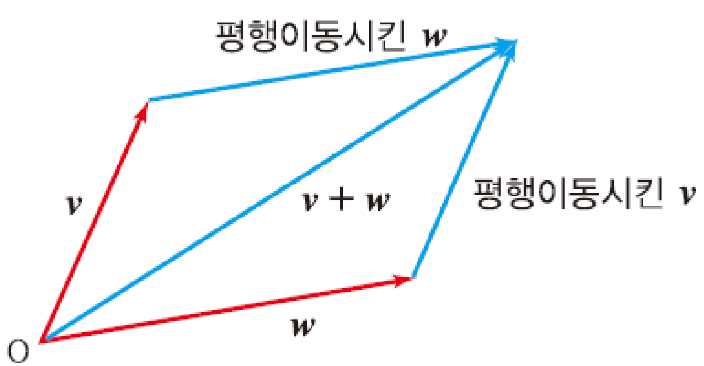
여기서 잠깐 !!

벡터는 신경망에서의 입력과 연결강도 등의 변수들을 표현하는데 매우 유용하게 활용된다. 또 8장에서 다루는 벡터의 내적과 외적의 바탕이 된다.

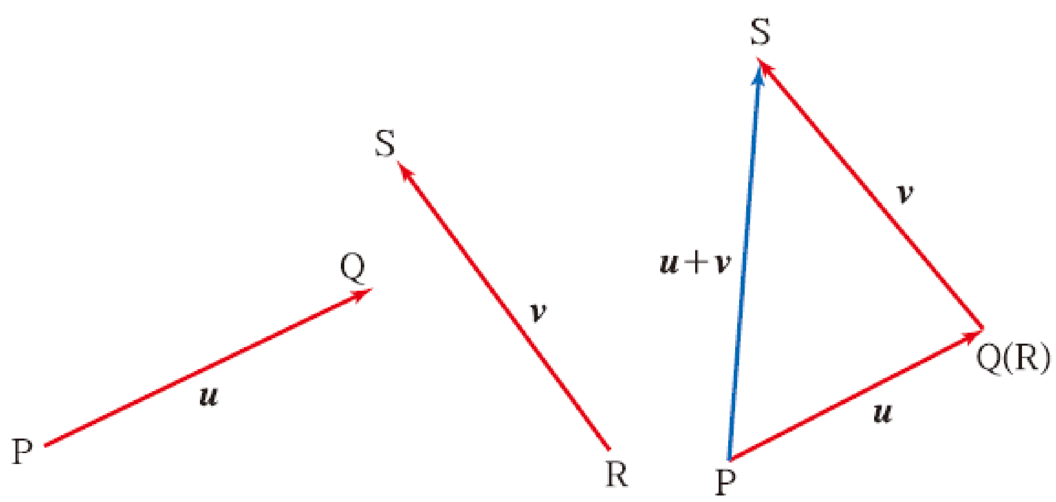
벡터의 연산

정의 ❺-5 | R^n상에서 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$와 $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$가 주어졌을 때, **벡터의 합(sum)**은 대응하는 각 성분들끼리 서로 더한 것으로 다음과 같다.

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \cdots, v_n + w_n)$$



〈그림 5.23〉 R^n상에서의 벡터 $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$의 표현



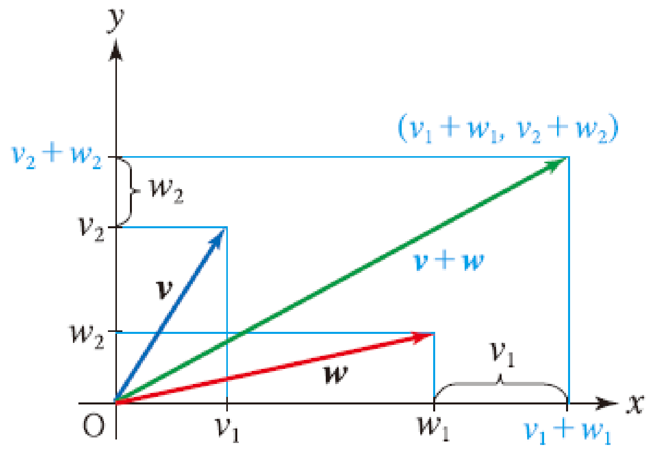
〈그림 5.24〉 벡터의 합

정의 ❺-6 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$가 R^2상에서의 두 개의 벡터라고 할 때

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$$

두 벡터 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$의 합은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{bmatrix}$$



〈그림 5.25〉 R^2상의 벡터 v+w의 표현

예제 ❺-8

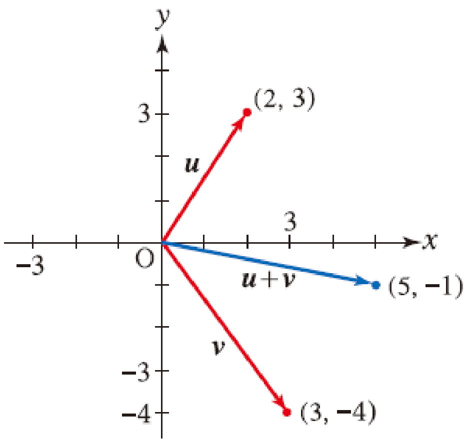
MATLAB

두 벡터 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$가 다음과 같이 주어졌을 때 두 벡터의 합을 구해 보자.

(1) $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$　　(2) $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}3\\-4\\2\end{bmatrix}$

풀이 (1) 대응하는 성분들의 합을 구하면

$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2+3\\3+(-4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}$이다. 이것은 〈그림 5.26〉과 같이 나타낼 수 있다.



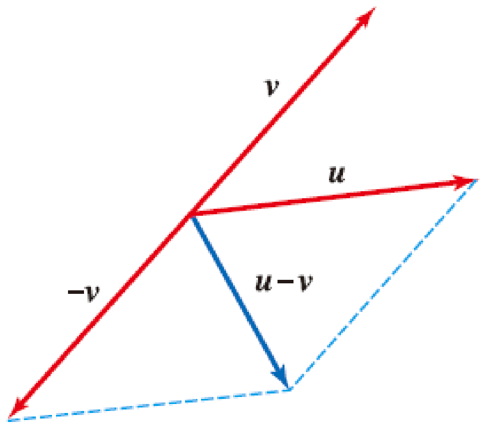
〈그림 5.26〉 두 벡터의 합

(2) 대응하는 성분들의 합을 구하면 다음과 같다.

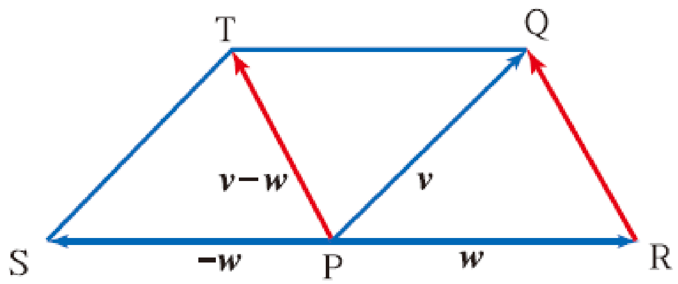
$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} 2+3 \\ 3+(-4) \\ (-1)+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \blacksquare$$

정의 ❺−7 R^n상에서 $\boldsymbol{v}=(v_1, v_2, \cdots, v_n)$와 $\boldsymbol{w}=(w_1, w_2, \cdots, w_n)$가 주어졌을 때, **벡터의 차(difference)** 또는 뺄셈(subtraction)은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}=(v_1-w_1, v_2-w_2, \cdots, v_n-w_n)$$



〈그림 5.27〉 벡터의 차



〈그림 5.28〉 R^2상의 벡터 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$의 표현

MATLAB

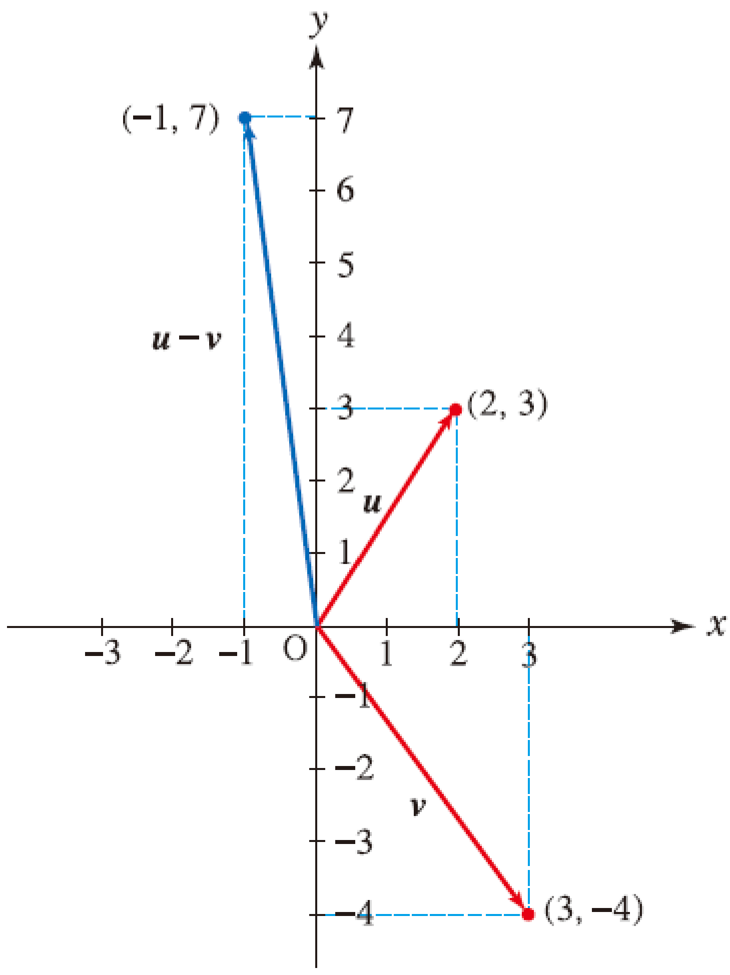
예제 ❺-9

두 벡터 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$가 다음과 같이 주어졌을 때 두 벡터의 차를 구해 보자.

(1) $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$ (2) $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}3\\-4\\2\end{bmatrix}$

풀이 (1) 대응하는 성분들의 차를 구하면

$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2-3\\3-(-4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\7\end{bmatrix}$이다. 이것은 〈그림 5.29〉와 같이 나타낼 수 있다.



〈그림 5.29〉 두 벡터의 차

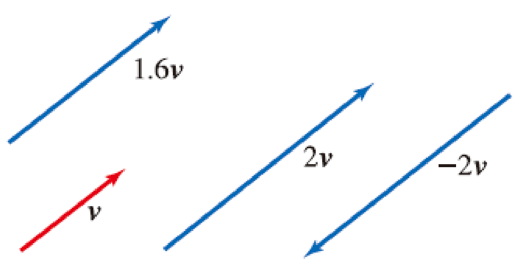
(2) 대응하는 성분들의 차를 구하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} 2-3 \\ 3-(-4) \\ (-1)-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix} \blacksquare$$

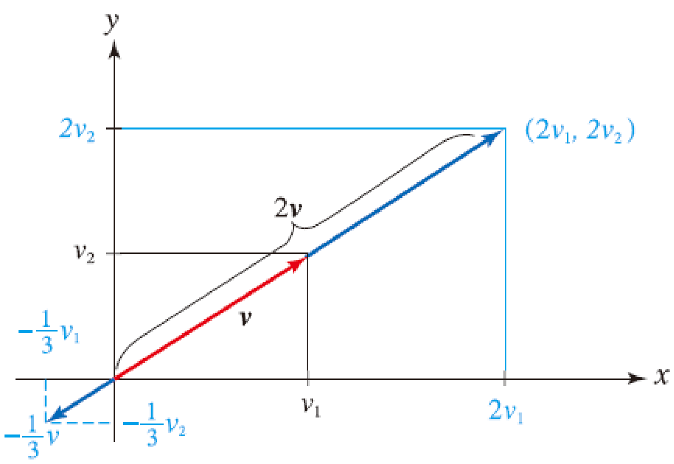
정의 ❺−8

벡터 $\boldsymbol{u}$와 스칼라 α의 곱 $\alpha\boldsymbol{u}$를 벡터의 **스칼라 곱(scalar product)**이라고 한다.

즉, $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$가 평면상의 벡터이고 α가 스칼라일 때 $\boldsymbol{u}$의 α 값에 대한 스칼라 곱은 $\begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{bmatrix}$가 된다. 만일 $\alpha>0$이면 $\boldsymbol{u}$와 같은 방향을 가지고, $\alpha<0$이면 $\boldsymbol{u}$와 반대 방향을 가지는데 $\alpha\boldsymbol{u}$ 의 크기는 $|\alpha|\cdot\|\boldsymbol{u}\|$이다. 특히 $\alpha=0$이거나 $\boldsymbol{u}=0$이면 $\alpha\boldsymbol{u}=0$이고, $(-1)\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{u}$이다. 〈그림 5.30〉은 α의 값에 따른 벡터 $\boldsymbol{v}$의 방향과 크기를 나타낸다.

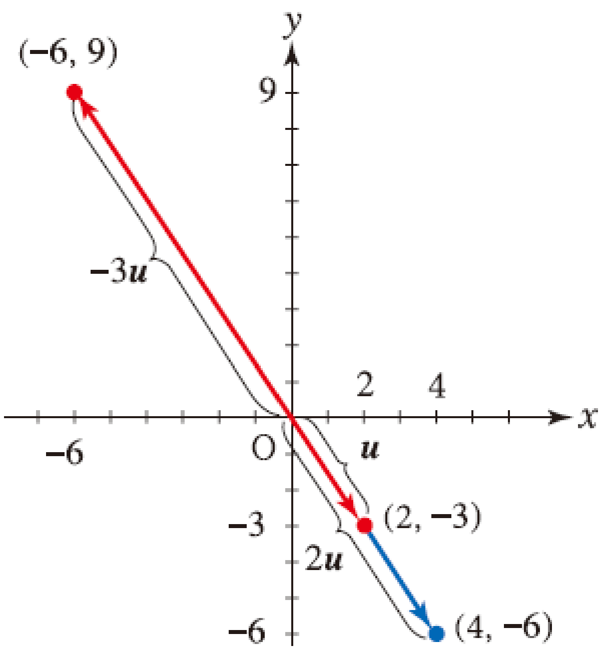


〈그림 5.30〉 스칼라 곱



〈그림 5.31〉 R^2상의 벡터 $\boldsymbol{v}$의 스칼라 곱 표현

예제 ❺-10 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\alpha=2$, $\beta=-3$일 때 $\alpha\boldsymbol{u}$와 $\beta\boldsymbol{u}$를 각각 구해 보자.



〈그림 5.32〉 벡터의 스칼라 곱

풀이 $\alpha\boldsymbol{u}=2\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2(2) \\ 2(-3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}$이고

$$\beta\boldsymbol{u}=-3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (-3)(2) \\ (-3)(-3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

이며, 이와 관련된 벡터는 〈그림 5.32〉와 같이 나타낸다. ■

MATLAB

예제 ❺-11

다음과 같은 세 벡터가 주어졌을 때 벡터 연산의 결과를 각각 구해 보자.

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}5\\3\\-4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-1\\5\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}3\\-1\\-2\end{bmatrix}$$

(1) $3\boldsymbol{u}$ (2) $5\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}$ (3) $-2\boldsymbol{u}+4\boldsymbol{v}-3\boldsymbol{w}$

풀이 먼저 스칼라 곱을 구하고 벡터의 합과 차를 구한다.

(1) $3\boldsymbol{u}=3\begin{bmatrix}5\\3\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\9\\-12\end{bmatrix}$

$$(2)\ 5\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}=5\begin{bmatrix}5\\3\\-4\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-1\\5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25\\15\\-20\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-10\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}27\\5\\-24\end{bmatrix}$$

$$(3)\ -2\boldsymbol{u}+4\boldsymbol{v}-3\boldsymbol{w}=-2\begin{bmatrix}5\\3\\-4\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}-1\\5\\2\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}3\\-1\\-2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-10\\-6\\8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4\\20\\8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-9\\3\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-23\\17\\22\end{bmatrix}\ \blacksquare$$

정리 ❺-1 R^2이나 R^3상의 벡터 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$와 영벡터 $\boldsymbol{0}$에 대하여 벡터의 성질들을 요약하면 다음과 같다.

(1) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$	(덧셈에 대한 교환법칙)
(2) $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$	(덧셈에 대한 결합법칙)
(3) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{u}$	(덧셈에 관한 항등원)
(4) $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}$	(덧셈에 관한 역원)
(5) $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$	(α는 스칼라)
(6) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{u}$	(α와 β는 스칼라)
(7) $\alpha(\beta\boldsymbol{u})=(\alpha\beta)\boldsymbol{u}$	(α와 β는 스칼라)
(8) $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$	(곱셈에 대한 항등원)
(9) $0\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$	(영벡터)

증명 (1) $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$가 R^2상에서의 다음과 같은 벡터라고 하자.

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$$

그러면

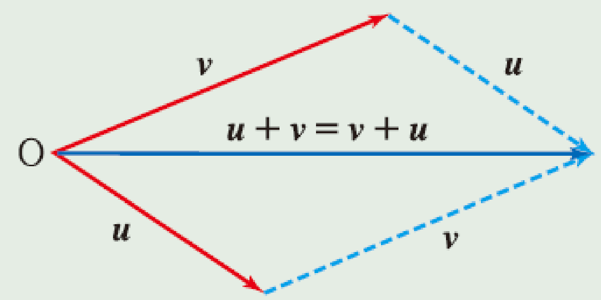
$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{bmatrix}\text{이고,}\quad \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}v_1+u_1\\v_2+u_2\end{bmatrix}\text{이다.}$$

벡터 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$의 성분이 모두 실수이므로
$u_1+v_1=v_1+u_1$과 $u_2+v_2=v_2+u_2$가 성립한다. 그러므로 R^2상에서

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$$

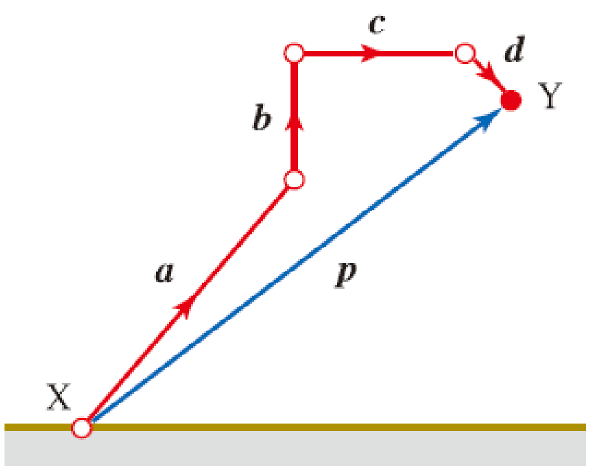
가 성립한다. 이것을 그림으로 나타내면 〈그림 5.33〉과 같다. 이와 마찬가지로 R^3상에서도 덧셈에 대한 교환법칙이 성립한다. ■

5.2 벡터의 연산

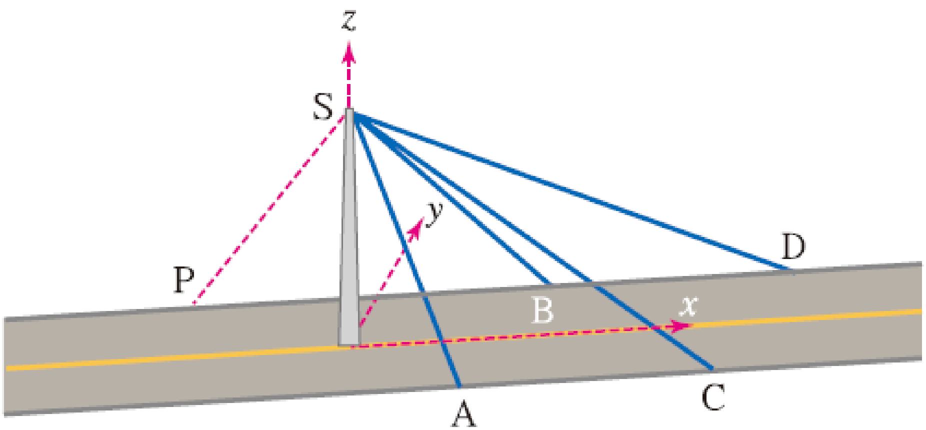


〈그림 5.33〉 $u+v=v+u$

또한 영벡터 $\mathbf{0}$은 길이가 0이고 방향은 고려하지 않아도 되므로 어떤 벡터에서도 $u+\mathbf{0}=\mathbf{0}+u=u$가 성립하고, u와 $-u$는 크기가 같고 방향이 반대이므로 $u+(-u)=\mathbf{0}$도 성립한다. 나머지 성질들도 비교적 간단하게 입증될 수 있다.



〈그림 5.34〉 로봇의 위치를 나타내는 벡터



〈그림 5.35〉 교량 건설에 이용되는 벡터

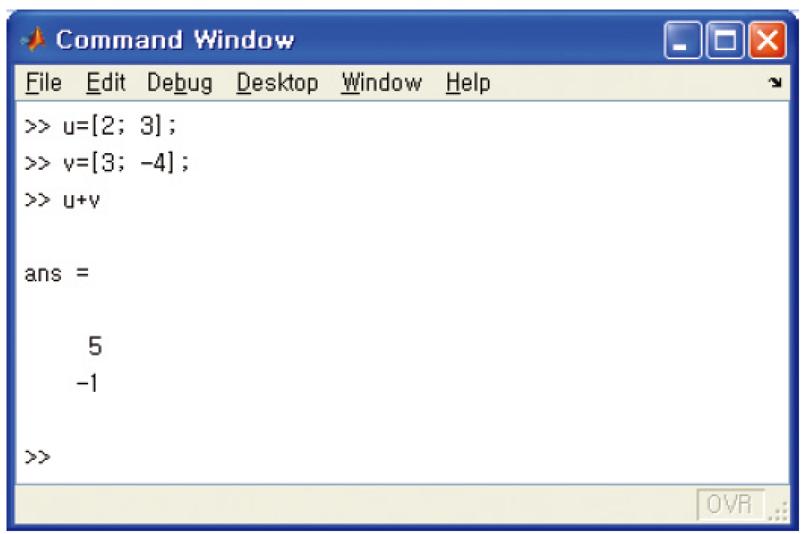
실습 ❺-1

예제 ⑤-8 MATLAB

두 벡터 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$가 다음과 같이 주어졌을 때 두 벡터의 합을 구해 보자.

$$(1)\ \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}\qquad (2)\ \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}3\\-4\\2\end{bmatrix}$$

풀이 $(1)\ \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2+3\\3+(-4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}$



5.3 MATLAB에 의한 연산

$$(2)\ \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} 2+3 \\ 3+(-4) \\ (-1)+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
>> u=[2; 3; -1];
>> v=[3; -4; 2];
>> u+v

ans =

     5
    -1
     1

>>
```

실습 ❺-2

예제 ⑤-9 MATLAB

두 벡터 $\boldsymbol{u}$와 $\boldsymbol{v}$가 다음과 같이 주어졌을 때 두 벡터의 차를 구해 보자.

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$$

풀이 $$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2-3\\3-(-4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\7\end{bmatrix}$$

Command Window

File Edit Debug Desktop Window Help

```
>> u=[2; 3];
>> v=[3; -4];
>> u-v

ans =

    -1
     7

>>
```

OVR

실습 ❺-3

예제 ⑤-11 MATLAB

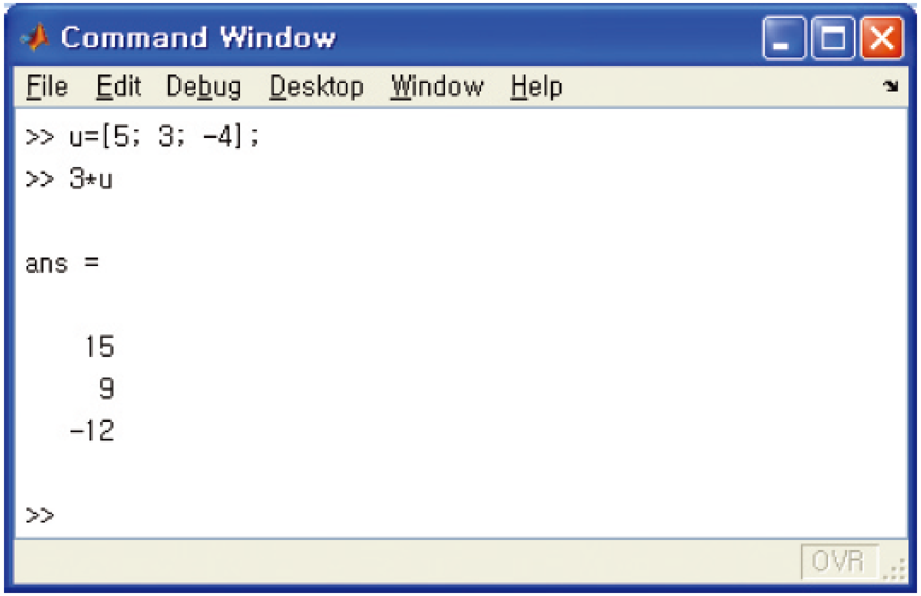
다음과 같은 세 벡터가 주어졌을 때 벡터 연산의 결과를 각각 구해 보자.

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}5\\3\\-4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}-1\\5\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}3\\-1\\-2\end{bmatrix}$$

(1) $3\boldsymbol{u}$

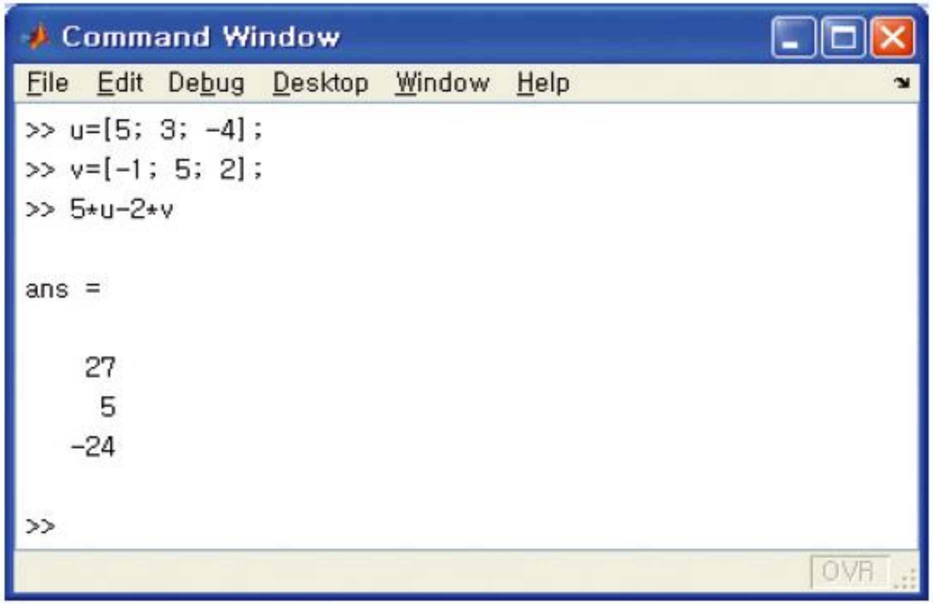
(2) $5\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}$

풀이 (1) $3\boldsymbol{u}=3\begin{bmatrix}5\\3\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\9\\-12\end{bmatrix}$



$$(2)\ 5\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}=5\begin{bmatrix}5\\3\\-4\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-1\\5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25\\15\\-20\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-10\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}27\\5\\-24\end{bmatrix}$$

MATLAB에 의한 연산



벡터의 생활속의 응용

- 벡터는 물리학에서 두 물체 사이의 이동이나 상호작용을 나타내는 척도로 매우 중요한 역할을 한다.
- 일이나 에너지 같은 물리량을 벡터로 나타내어 복잡한 연산을 간편하게 할 수 있다.
- 자연법칙을 수식으로 표현할 때는 물리량에 의해 가능한데, 이것을 벡터와 스칼라를 통해 나타낼 수 있다.
- 네트워크를 분석하거나 경로 탐색 등에 중요한 역할을 한다.
- 컴퓨터 그래픽에 응용될 수 있다.
- 신경망에서의 입력과 연결강도 등의 변수들을 벡터로 표현하고, 그들 사이의 연산에 응용된다.