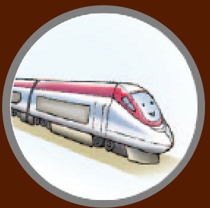
개정판

LINEAR ALGEBRA

선형대수학 Express



Express Train to the Linear Algebra World

01
CHAPTER

선형대수와 선형방정식

LINEAR ALGEBRA

개요

- 선형대수와 선형방정식에 대한 기본적인 사항들을 고찰
- 선형대수를 학습하는 필요성과 응용 분야들을 요약
- 선형대수학에서 중요한 선형개념을 설명
- 선형결합, 해집합, 선형시스템, 동차시스템 등을 정의
- 또한 2개의 변수를 가진 선형방정식에서 그래프를 통한 3가지 기하학적인 경우들을 살펴봄
- 전향 소거법을 이용한 가우스 소거법을 살펴봄
- 가우스-조단 소거법을 살펴봄

01

CHAPTER

선형대수와 선형방정식

LINEAR ALGEBRA

CONTENTS

1.1 선형대수와 선형시스템

1.1.1 선형대수학

1.1.2 선형방정식과 선형시스템

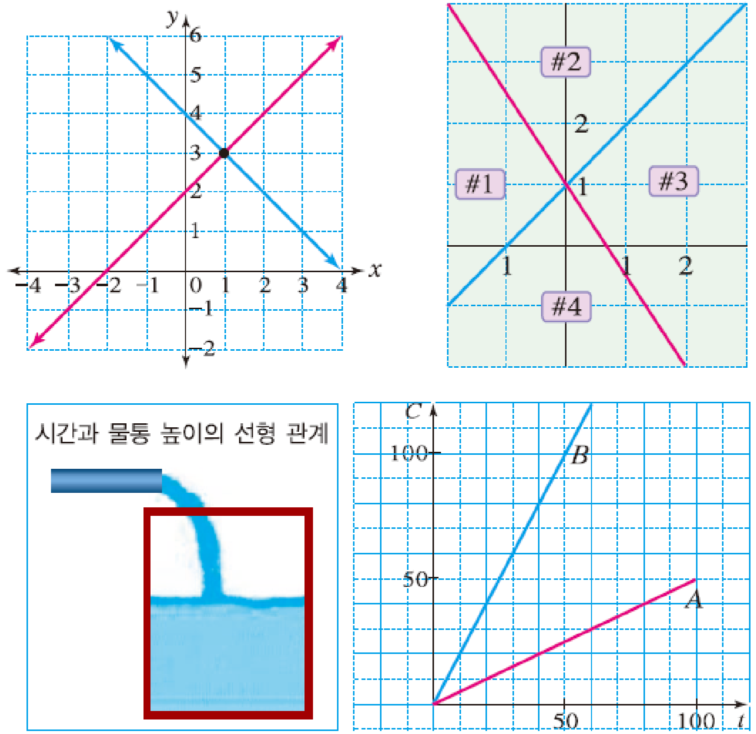
1.2 선형방정식의 소거법

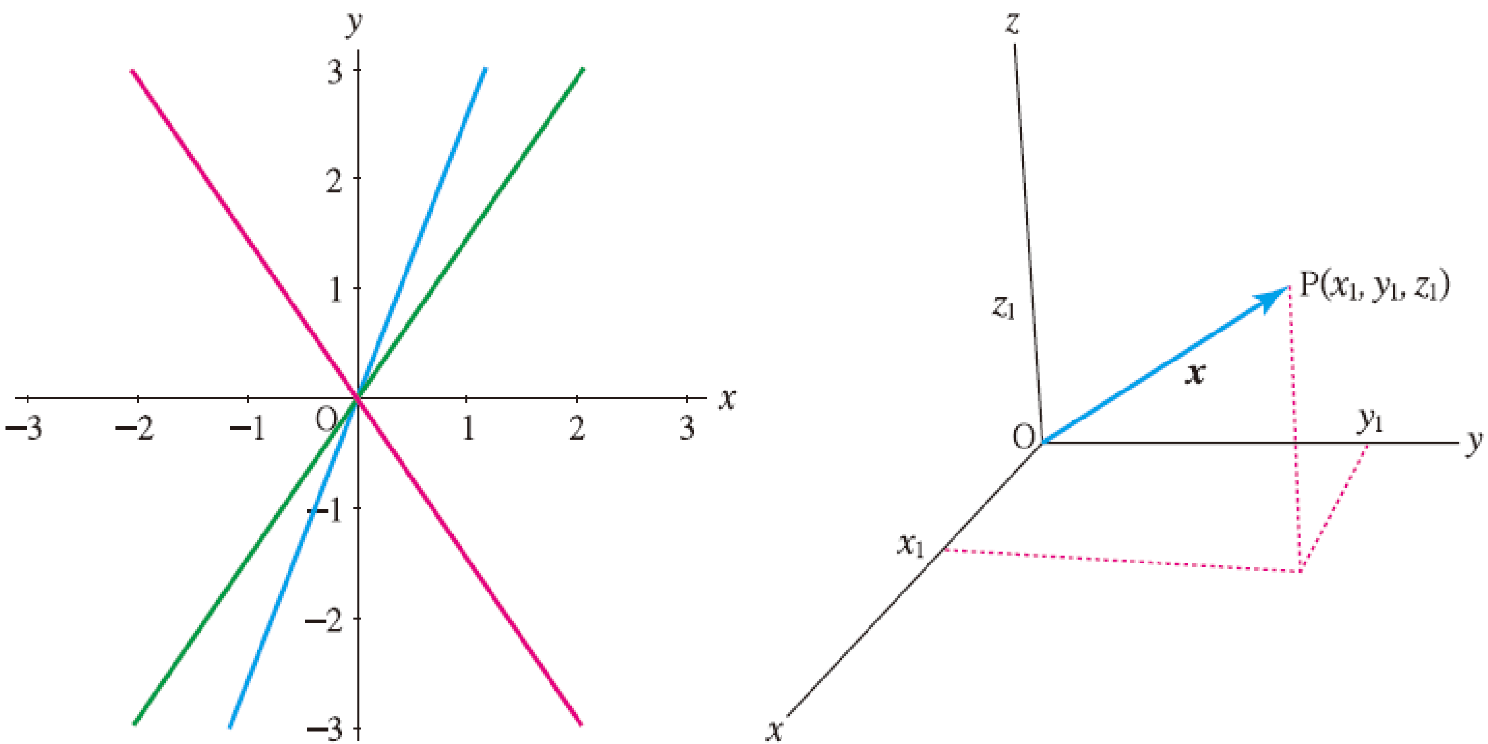
1.2.1 변수가 2개인 선형방정식의 소거법

1.2.2 가우스 소거법

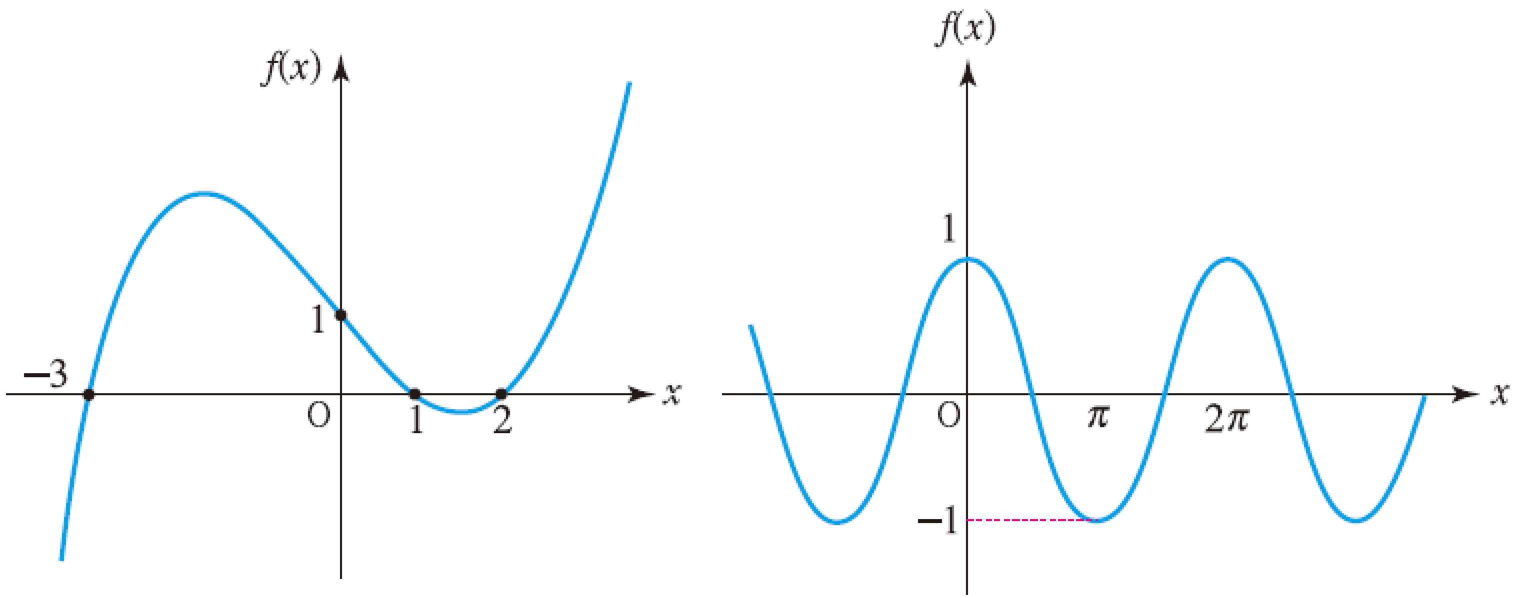
1.2.3 가우스-조단 소거법

1.1 선형대수와 선형시스템



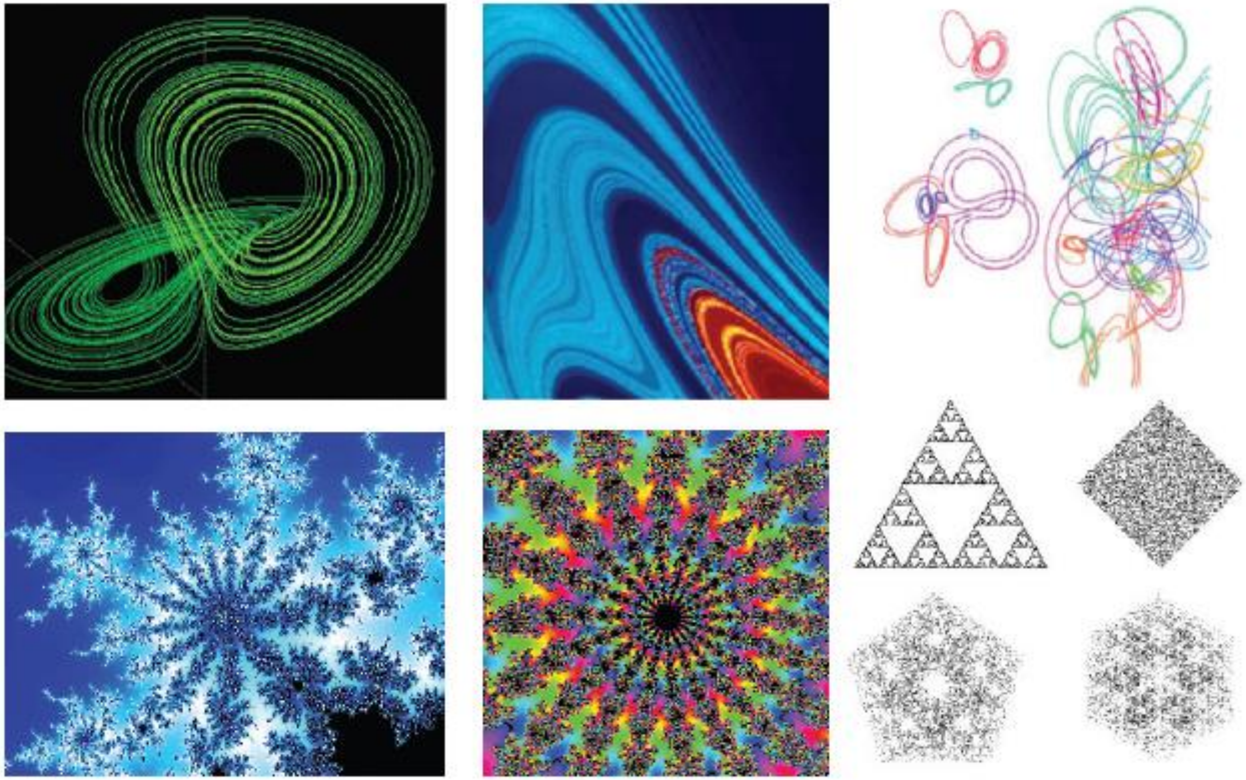


〈그림 1.1〉 1차함수와 벡터와 같은 선형함수들



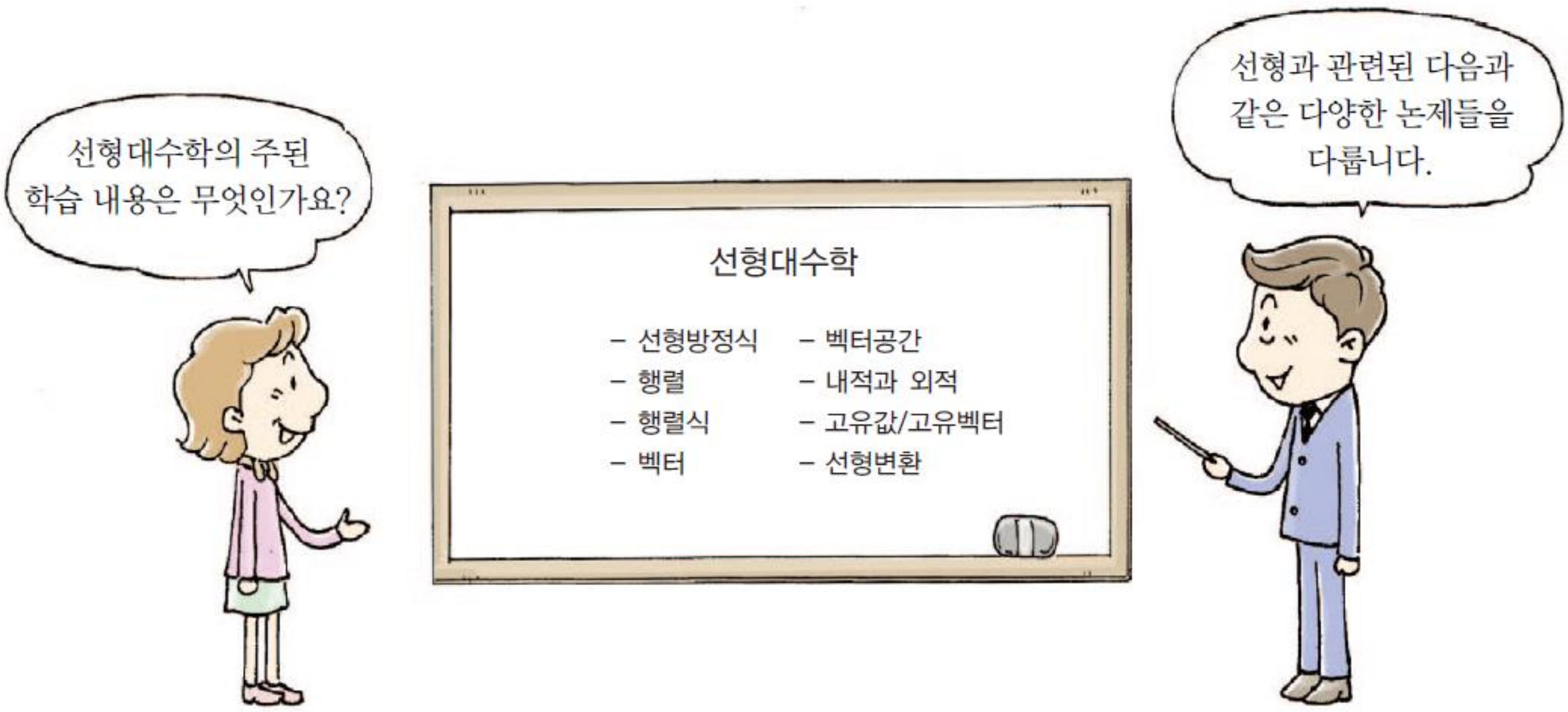
〈그림 1.2〉 3차식과 cos(x) 함수와 같은 비선형함수

1.1 선형대수와 선형시스템



〈그림 1.3〉 카오스와 프랙탈과 같은 비선형함수

1.1 선형대수와 선형시스템



〈표 1.1〉 선형과 비선형의 특징과 차이점

선형(Linear)	비선형(Nonlinear)
1차식이나 1차함수	1차식이 아닌 2차 이상의 함수(x^2)나 cos(x) 등의 함수
하나의 원인에는 하나의 결과가 있음	훨씬 복잡하다
그래프가 직선	그래프가 곡선
속도와 거리의 관계	카오스 등의 자연 현상
행렬로 표현 가능	행렬로 표현 불가능
회전변환, 원점을 지나는 직선에 대한 대칭변환, 어떤 벡터공간에 대한 수직입사 등	피드백(feedback)과 같은 복잡한 변환

1.1 선형대수와 선형시스템

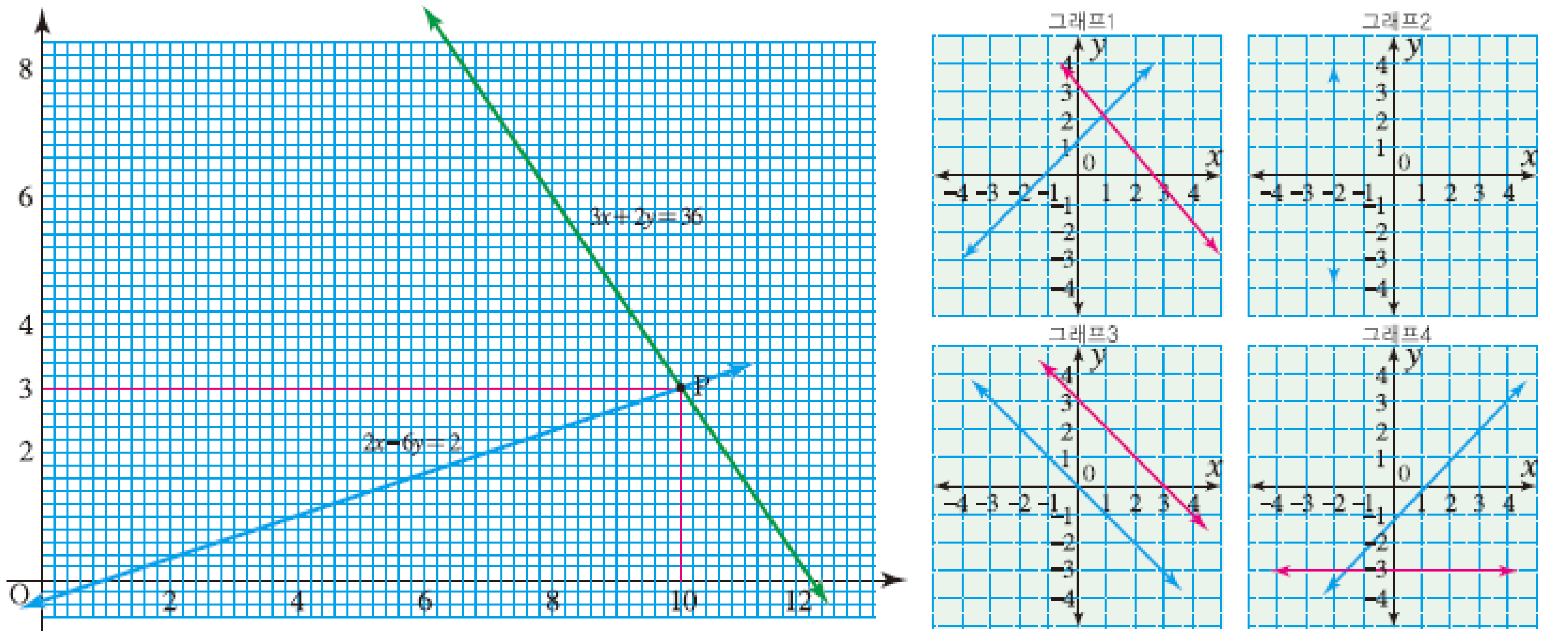
여기서 잠깐!!

〈선형과 비선형〉

$\sqrt{2}\,x+y=3 \longrightarrow$ 선형

$2\sqrt{x}+y=3 \longrightarrow$ 비선형

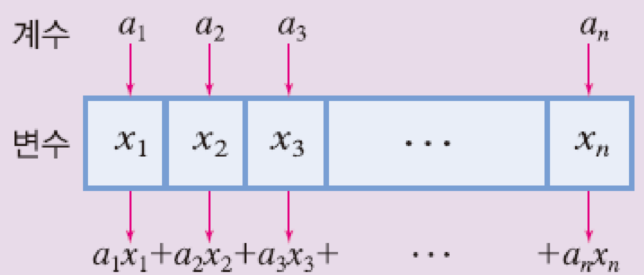
$\sqrt{2}$는 상수인 계수이므로 선형이고, $\sqrt{x}$는 $x^{\frac{1}{2}}$과 같은 지수 형태이므로 선형이 될 수 없다.



1.1 선형대수와 선형시스템

여기서 잠깐!!

선형결합이란 대응하는 계수와 변수를 곱하여 모두 합한 값



1.1 선형대수와 선형시스템

정의 ❶-2

선형방정식과 관련된 정의는 다음과 같다.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

와 같은 방정식을 **변수(unknown variable** 또는 **미지수)** $x_1, x_2, \cdots, x_n$과 **계수(coefficient)** $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 관한 **선형방정식(linear equation)**이라고 한다. 또한 이러한 등식을 성립시키는 변수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$의 값들을 **해(solution)**라고 한다.

예를 들어, $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13$이란 선형방정식에서 $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -4$를 각각 대입하면 $6(2) - 3(3) + 4(-4) = -13$이므로 $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -4$ 가 주어진 방정식의 해가 된다.

1.1 선형대수와 선형시스템

정의 ❶-3 | 변수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 관한 유한개의 선형방정식의 집합을 **선형시스템(linear system)**이라고 한다. $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \cdots, x_n = s_n$이 선형시스템 내의 모든 방정식의 해일 때 수열 $s_1, s_2, \cdots, s_n$을 선형시스템의 해(solution)라고 하며, 선형시스템의 모든 해의 집합을 **해집합(solution set)**이라고 한다.

1.1 선형대수와 선형시스템

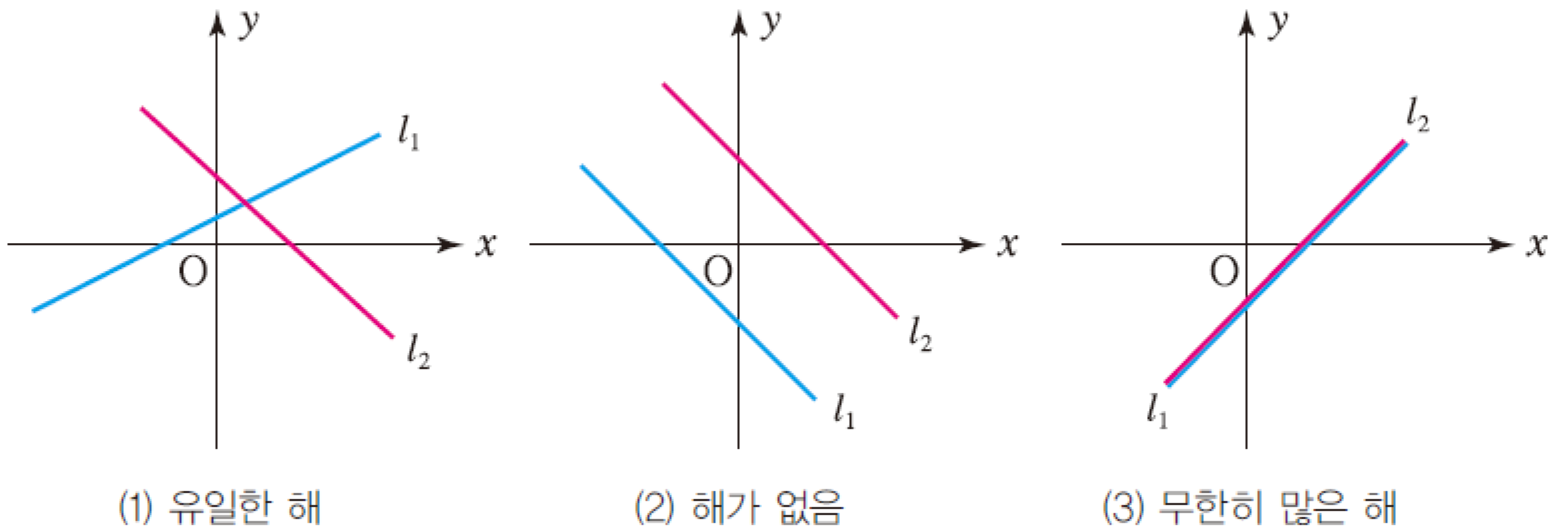
정의 ❶-4

만약 $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$일 경우 위의 식을 **동차선형시스템(homogeneous system)**이라고 한다. $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$은 항상 이 동차선형시스템의 해가 되는데 이러한 경우를 **자명해(trivial solution, 自明解)**라고 한다. 한편 동차선형시스템에서 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 중 어느 하나라도 0이 아닌 경우의 해를 **비자명해(nontrivial solution, 非自明解)**라고 한다. 또한 어떤 선형방정식들이 똑같은 해를 가질 때 두 식이 **동치(equivalent)**라고 한다.

여기서 잠깐 !!

엄밀한 의미에서 선형방정식은 하나의 선형식을 나타내는데, 여러 개로 이루어진 선형방정식을 선형시스템, 선형연립방정식 또는 선형일차방정식이라고 한다. 그러나 여러 개의 선형방정식도 흔히 그냥 선형방정식으로 혼용하여 사용하는 경우도 있다.

1.1 선형대수와 선형시스템



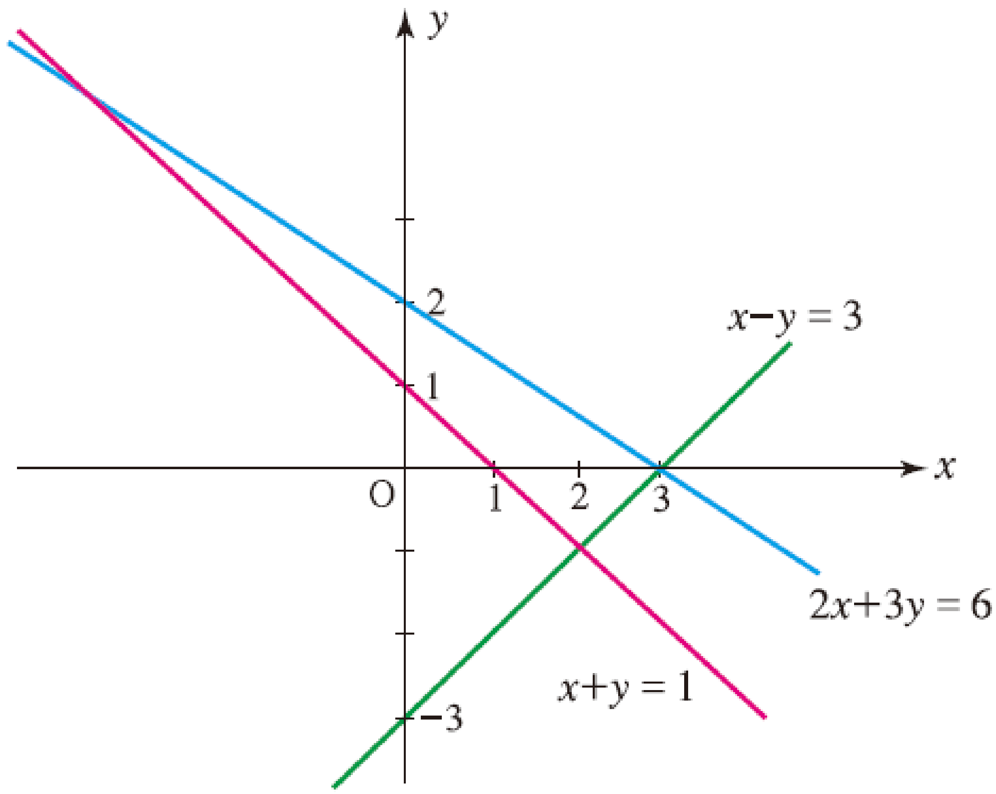
〈그림 1.4〉 선형방정식의 기하학적 해

여기서 잠깐!! 선형방정식의 기하학적 풀이는 통상 2개나 3개의 변수가 있는 경우에 국한된다. 왜냐하면 3차원을 넘는 공간에서는 우리 눈에 잘 보이지 않기 때문이다.

예제 ❶-1 다음 선형시스템의 해가 몇 개인지를 직선의 그래프를 이용하여 알아보자.

$$\begin{aligned} x \quad - y &= 3 \\ x + \quad y &= 1 \\ 2x + 3y &= 6 \end{aligned}$$

풀이 위의 식에서 〈그림 1.5〉와 같이 3개의 직선을 그린 결과 한곳에서 만나는 점이 없다. 따라서 해가 없다는 결론을 얻을 수 있다. ■

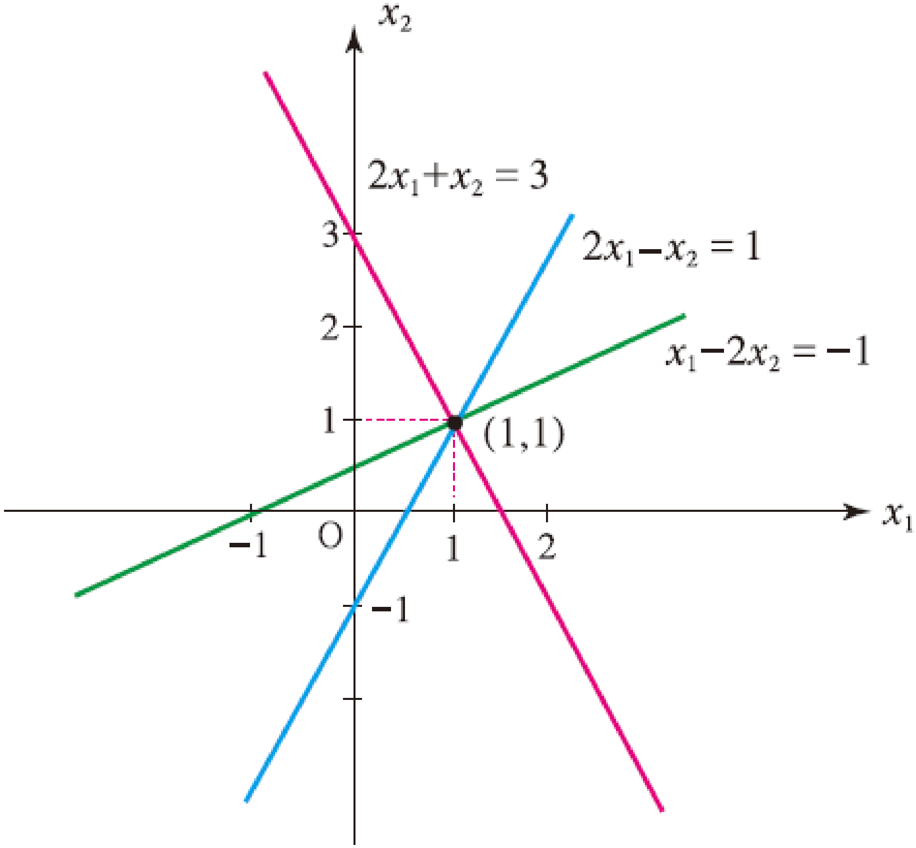


〈그림 1.5〉 선형시스템의 그래프

예제 ❶-2 다음과 같이 주어진 3개의 선형방정식을 그래프를 이용하여 해를 구해 보자.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

풀이 〈그림 1.6〉과 같이 3개의 직선이 점 (1, 1)에서 만나므로 유일한 해는 $x_1 = 1$, $x_2 = 1$이다. ■



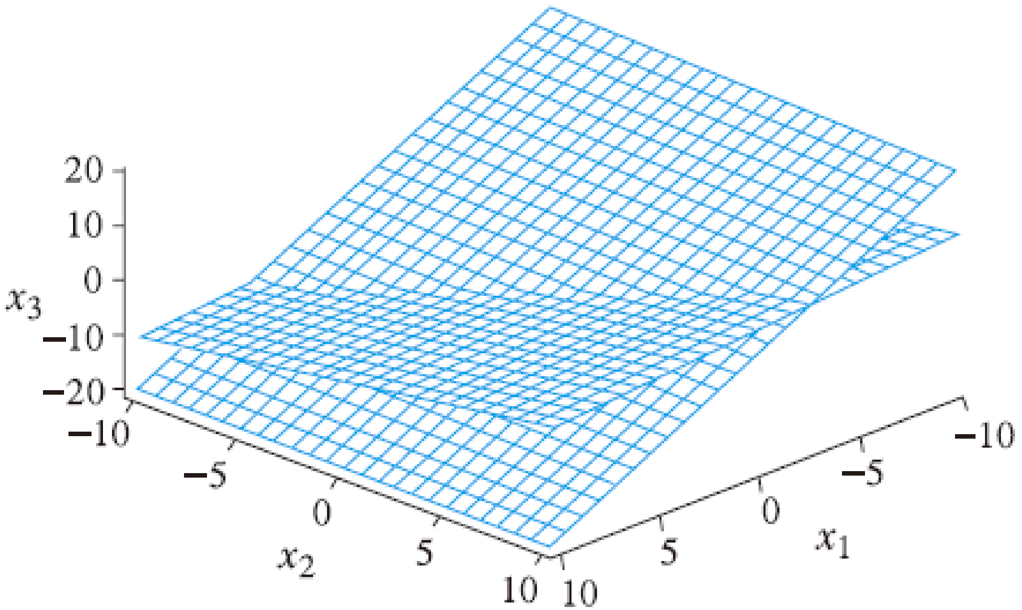
〈그림 1.6〉 세 직선이 한 점에서 만나는 그래프

예제 ❶-3

다음 2개의 선형방정식의 만남을 그래프로 표현해 보자.

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\
2x_1 \qquad\quad + x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

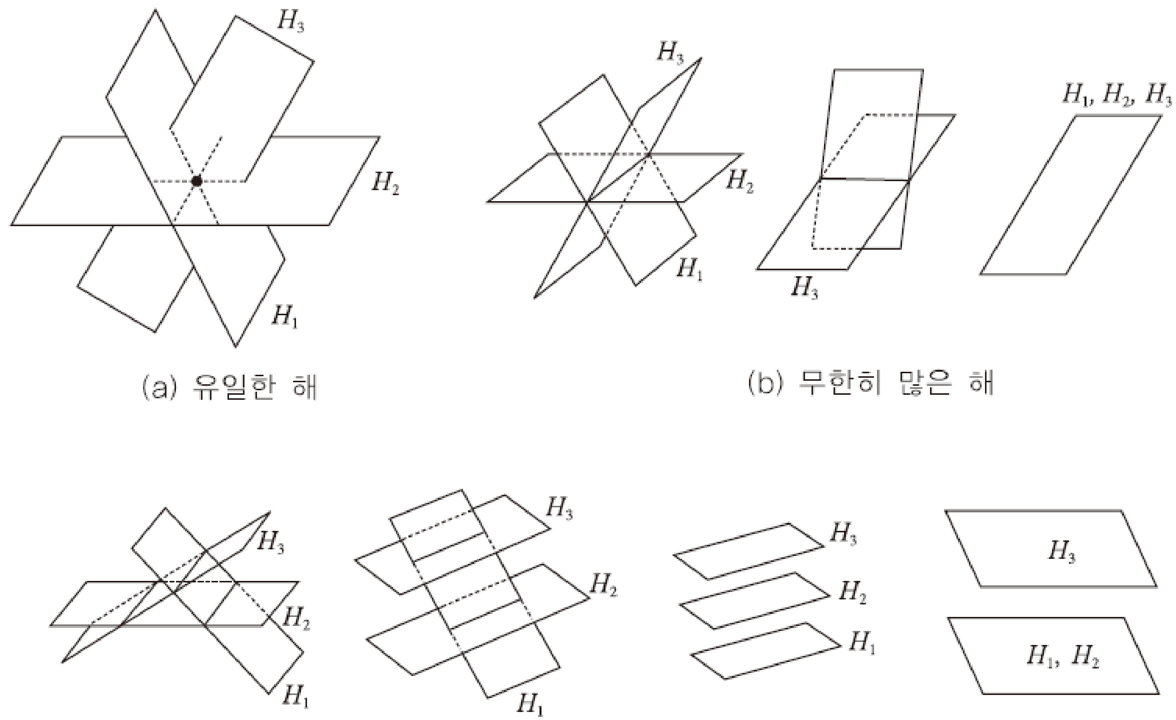
풀이 그래프로 나타내면 〈그림 1.7〉과 같이 한 평면과 한 직선이 만나는 것으로 표현될 수 있다. ■



〈그림 1.7〉 한 평면과 한 직선이 만나는 그래프

선형대수와 선형시스템

3차원 공간에서 평면들이 만나는 그래프를 통해 선형시스템의 해를 구할 경우에도 〈그림 1.8〉과 같이 (1) 유일한 해를 가지거나, (2) 해를 가지지 않거나, (3) 무한히 많은 해를 가진다. 이 3개의 방정식들은 3차원 공간에서 평면 H_1, H_2, H_3에 대응한다.



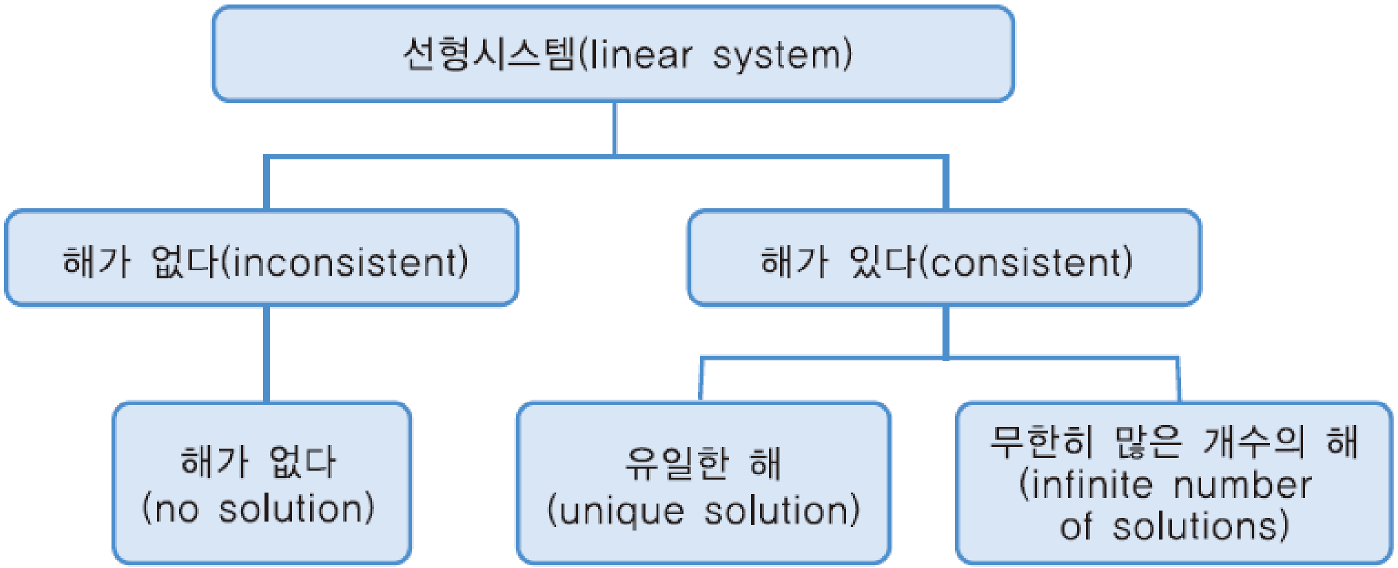
(a) 유일한 해

(b) 무한히 많은 해

(c) 해가 없음

〈그림 1.8〉 3차원 공간에서의 해

일반적으로 선형시스템 L의 해의 개수는 해가 없거나, 유일한 해를 가지거나, 무한히 많은 개수의 해를 가지는데, 이것을 도표로 나타내면 〈그림 1.9〉와 같다.



〈그림 1.9〉 선형시스템의 해

1.2 선형방정식의 소거법

정의 ❶-5 선형시스템에서는 다음과 같은 3가지 기본 연산에 의해 원래의 식과 동치인 선형 방정식으로 변환할 수 있다.

(1) 한 방정식에 0이 아닌 상수를 곱한다.

(2) 방정식들의 위치를 서로 교환한다.

(3) 한 방정식에 0이 아닌 상수를 곱하여 다른 방정식에 더한다.

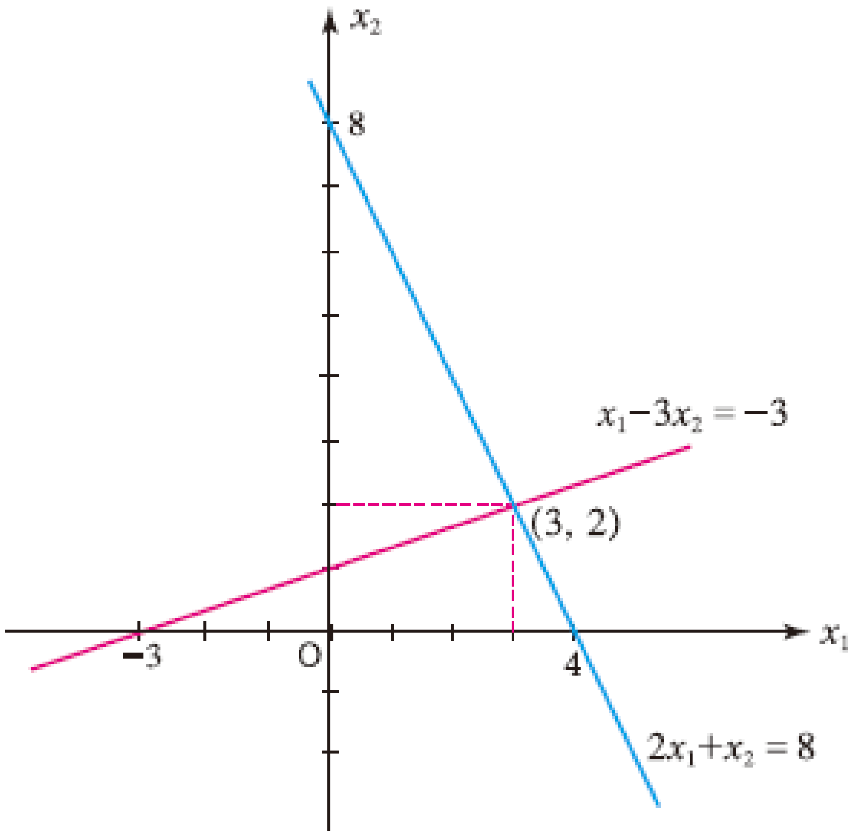
C program

예제 ❶-4 다음과 같은 2개의 변수를 가진 간단한 선형시스템의 해를 구해 보자.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 &= 8 \end{aligned}$$

풀이 먼저 x_1을 소거하기 위해 첫 번째 식에다 (-2)를 곱하여 두 번째 식에 더함으로써 x_1항이 없는 방정식을 만들 수 있다. 즉, $7x_2 = 14$이고 $x_2 = 2$란 값을 얻는다. 이것을 첫 번째 식에 대입하면 $x_1 = 3$이란 해를 얻을 수 있다. 따라서 $x_1 = 3$, $x_2 = 2$가 주어진 선형시스템의 유일한 해가 된다.

이것은 기하학적으로 〈그림 1.12〉와 같이 방정식으로 표현된 두 직선이 한 점 (3, 2)에서 만나는 것을 뜻한다. ■



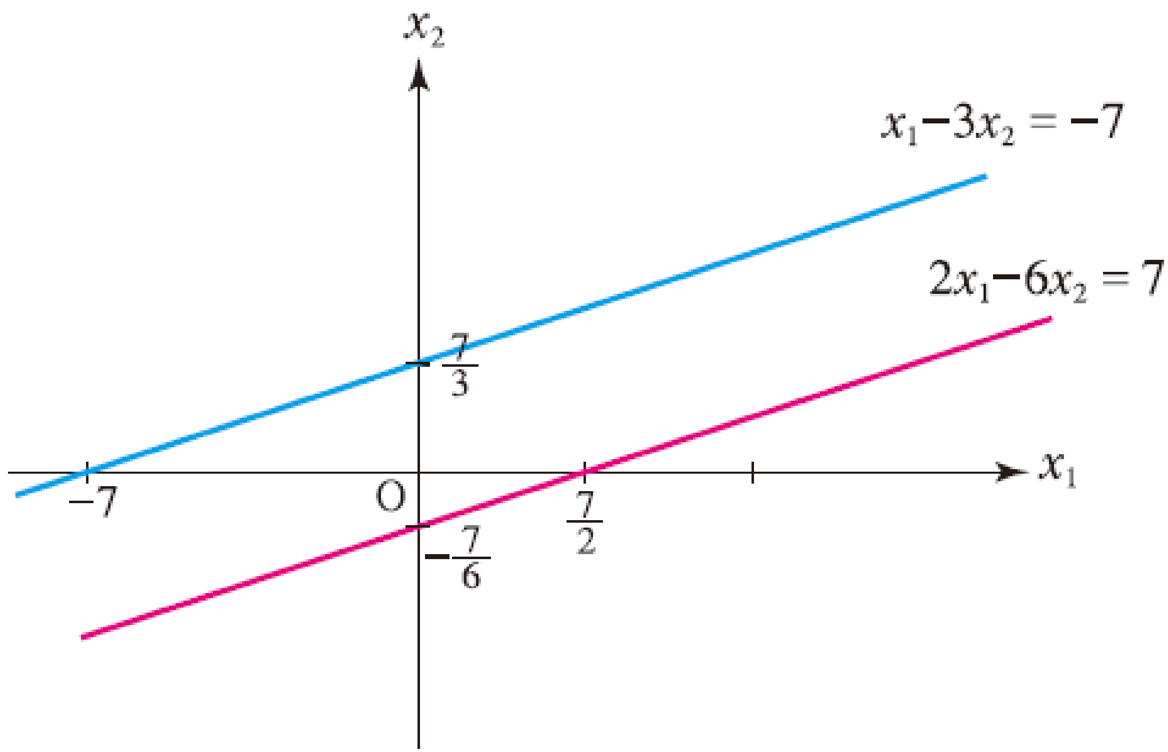
〈그림 1.12〉 두 개의 직선이 만나는 경우

예제 1-5 다음과 같은 선형 시스템을 살펴보자.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= -7 \\ 2x_1 - 6x_2 &= 7 \end{aligned}$$

풀이 먼저 x_1을 소거한다. x_1을 소거하기 위해 첫 번째 식에다 (-2)를 곱하여 두 번째 식에 더하면 $0=21$이라는 모순된 결론을 얻는다. 이 경우에는 식이 해를 가지지 않는다고 한다.

이것은 기하학적으로 〈그림 1.13〉과 같이 원래 시스템의 방정식에 대응하는 두 직선이 평행하여 서로 만나지 않는다는 것을 뜻한다. ■



〈그림 1.13〉 두 개의 직선이 평행인 경우

1.2 선형방정식의 소거법

예제 ❶-6 다음과 같은 선형 시스템에서 해의 개수를 알아보자.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ 6x + 9y &= 18 \end{aligned}$$

풀이 첫 번째 식에다 (-3)을 곱하여 두 번째 식에 더함으로써 두 번째 방정식의 x를 소거하여 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

두 번째 식은 x, y의 값과는 관계가 없으므로 제외하고, 첫 번째 식만으로 해를 구한다.

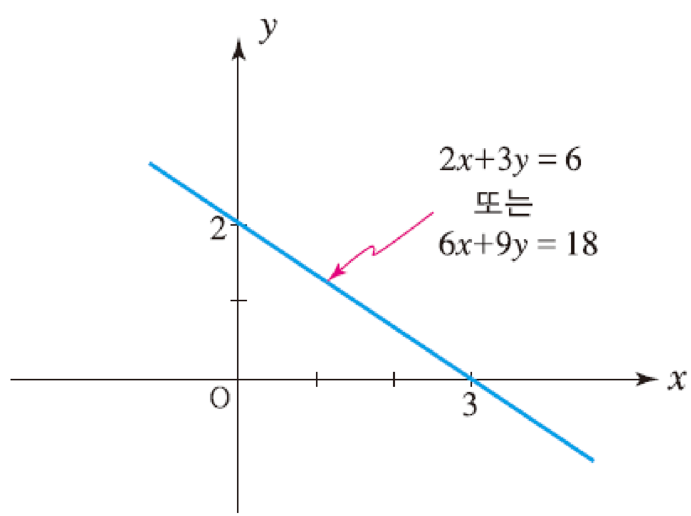
$$2x + 3y = 6$$

이 경우는 〈그림 1.14〉와 같이 기하학적으로 볼 때 두 직선이 서로 일치하는 경우로 볼 수 있으므로 임의의 변수를 사용하여 표현하는 것이 좋다. 예를 들어, $y = r$로 놓고 r에 대해 x를 풀면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$2x + 3r = 6$$

$$x = -\frac{3}{2}r + 3, \ y = r$$

여기서 r 대신에 특정한 값 $r = 0$을 대입하면 해는 $x = 3$, $y = 0$이 되고, $r = 2$인 경우의 해는 $x = 0$, $y = 2$가 된다. 즉, 좌표상으로는 점 (3, 0)과 점 (0, 2)가 해가 될 수 있다. 그 외에도 r의 값에 따라 $x = 1$, $y = \frac{4}{3}$ 등 무한히 많은 해를 가질 수 있다. ■



〈그림 1.14〉 두 개의 직선이 일치하는 경우

1.2 선형방정식의 소거법

정의 ❶−6 가우스 소거법 과정에서 각 식의 가장 앞에 있는 0이 아닌 계수(coefficient)를 피벗(pivot)으로 정할 수 있다.

예를 들어, (예제 ❶−7)의 경우 $2x_1$, $4x_1$, $-2x_1$의 계수인 2, 4, −2 중에서 피벗을 정할 수 있는데, 소거를 할 경우에는 피벗을 축으로 소거하는 것이 매우 편리하다.

1.2 선형방정식의 소거법

예제 ❶-7 다음 선형시스템에서 가우스-조단의 방법으로 해를 구해 보자.

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\
4x_1 & - & 6x_2 & & & = & -2 \\
-2x_1 & + & 7x_2 & + & 2x_3 & = & 9
\end{array}
$$

풀이 전향 소거법과 역대입법 과정을 통하여 해를 구한다.

(1) 전향 소거법 단계

첫 번째 식의 x_1의 계수 2를 피벗으로 삼아 소거를 시작한다.

먼저, 두 번째 식의 x_1을 소거하기 위하여 첫 번째 식에다 (-2)를 곱하여 두 번째 식에다 더한다.

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\
 & & -8x_2 & - & 2x_3 & = & -12 \\
-2x_1 & + & 7x_2 & + & 2x_3 & = & 9
\end{array}
$$

세 번째 식의 x_1을 소거하기 위하여 첫 번째 식을 세 번째 식에 더한다.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ -8x_2 - 2x_3 &= -12 \\ 8x_2 + 3x_3 &= 14 \end{aligned}$$

세 번째 식의 x_2를 소거하기 위하여 두 번째 식을 세 번째 식에다 더한다.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ -8x_2 - 2x_3 &= -12 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(2) 역대입법 단계

세 번째 식에서 $x_3 = 2$임을 확인한다.

세 번째 식의 값인 $x_3 = 2$를 두 번째 식에 대입하여 $x_2 = 1$을 구한다.

x_1과 x_2의 값을 첫 번째 식에 대입하여 $x_1 = 1$을 구한다. ■

1.2 선형방정식의 소거법

예제 ❶-8 다음에서 3개의 변수를 가진 선형시스템을 살펴보자.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\
2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 14 \\
3x_1 + x_2 - x_3 &= -2
\end{aligned}
$$

풀이 첫 번째 식의 x_1의 계수 1을 피벗으로 삼아 소거를 시작한다.

먼저, 첫 번째 식에다 (-2)를 곱하여 두 번째 식과 더한다.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ -7x_2 - 4x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$$

또한 첫 번째 식에다 (−3)을 곱하여 세 번째 식과 더함으로써 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ -7x_2 - 4x_3 &= 2 \\ -5x_2 - 10x_3 &= -20 \end{aligned}$$

세 번째 식에다 $\left(-\frac{1}{5}\right)$을 곱하면

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ -7x_2 - 4x_3 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

가 된다. x_2를 소거하기 위해 세 번째 식에다 7을 곱하여 두 번째 식에 더하면 $10x_3 = 30$이 되므로 $x_3 = 3$이 구해진다.

x_3의 값인 3을 세 번째 식에 대입하면 $x_2 = -2$가 구해지며, x_2와 x_3을 첫 번째 식에 대입하여 $x_1 = 1$을 얻는다.

따라서 구하는 최종 해는 $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$이다. ■

1.2 선형방정식의 소거법

예제 ❶-9

다음 선형시스템의 해를 구하시오.

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

풀이 주어진 선형시스템에서 첫 번째 식과 세 번째 식을 교환한다.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

첫 번째 식을 2로 나누어 1을 피벗으로 삼는다.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

첫 번째 식에 (− 3)을 곱하여 두 번째 식에 더한다.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad - x_3 &= \quad 1 \\ -x_2 - 2x_3 &= -2 \\ 2x_2 + \quad x_3 &= \quad 1 \end{aligned}$$

두 번째 식에 2를 곱하여 세 번째 식에 더한다.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad - x_3 &= \quad 1 \\ -x_2 - 2x_3 &= -2 \\ -3x_3 &= -3 \end{aligned}$$

따라서 $x_3 = 1$이다. 이 값을 두 번째 식에 대입하면 $x_2 = 0$이며, x_3과 함께 x_2를 첫 번째 식에 대입하면 $x_1 = 2$이다. 따라서 구하는 해는 $x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$이다. ■

예제 1-10 다음 선형시스템의 해를 구해 보자.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 9x_4 &= 9 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 + 17x_4 &= 7 \end{aligned}$$

풀이 가우스 소거법을 사용한다. 첫 번째 식의 x_1의 계수 1을 피벗으로 사용하여 두 번째 식과 세 번째 식의 x_1을 소거한다. 첫 번째 식에 (-2)를 곱하여 두 번째 식에 더한다. 그리고는 첫 번째 식에 (-3)을 곱하여 세 번째 식에 더한다. 그 결과 다음과 같은 식이 만들어진다.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 4 \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ -4x_2 - 6x_3 + 2x_4 &= -5 \end{aligned}$$

여기서 두 번째 식에서 x_2의 계수인 2를 피벗으로 삼아 두 번째 식에 2를 곱하여 세 번째 식에 더함으로써 x_2를 소거한다. 그 결과 모든 변수들의 계수들이 0이 되는 식이 나온다.

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -3$$

이 결과는 각 변수에 어떤 값이 들어가더라도 모순이 된다. 따라서 더 이상의 진행은 의미가 없으며 주어진 선형시스템은 해를 가지지 않는다. ■

선형대수와 선형방정식의 생활속의 응용1

- 게임 이론 - 어떤 게임에서 자신에게 유리한 전략을 세우거나 자신의 이익을 극대화시킬 수 있는 여러 가지 경우를 선형방정식으로 세워서 풀 수 있다.

- 경영학에서 어느 기업이 어떤 재료를 얼마만큼 사용하여 어느 정도의 양을 생산하면 최대한의 이익을 얻을 수 있는지를 선형방정식을 풀어서 응용할 수 있다. 이때 가격 책정도 선형방정식의 변수로 넣어서 풀 수 있다.

- 물리학, 화학, 컴퓨터공학, 전기공학, 전자공학, 건축학, 토목학 등 여러 가지 공학을 전공하는 엔지니어들에게 선형방정식의 개념과 풀이는 기초 및 응용의 바탕이 된다.

선형대수와 선형방정식의 생활속의 응용2

- 수학을 전공하는 수학도에게는 수학을 탐구하는 굳건한 기초가 됨은 지극히 당연하다.

- 사회생활에서 일어나는 여러 가지 복잡한 관계에서의 의사결정에 쓰인다. 한정된 시간 내에 해야 할 일들의 중요성에 가중치를 두어서 선형방정식을 만들어서 해결한다.

- 천문학에의 응용 - 가우스는 팔라스(Pallas) 소행성을 연구하던 중 1803년부터 6년 동안 행성의 궤도를 면밀히 관찰한 결과 변수가 6개인 선형방정식을 만들었으며, 그가 개발한 가우스 소거법을 이용하여 해를 구함으로써 천문학에 크게 기여하였다.