수치적분

안녕하세요 수치 적분 파트를 맡은 22조 이정안입니다

발표 시작하겠습니다.

🖱

개념과 수치적분을 쓰는 이유

먼저 적분이라고 하면은 독립변수 x에 대해서 fx가 주어졌을 때 그 특정 구간 범위 내에서 x축과 fx가 이루는 사이 면적을 적분이라고 합니다.

적분은 결국 면적을 구하는 것으로 생각을 할수가 있습니다.

일반적으로 적분을 수행할 때는 부정적분과 정적분처럼 해석적으로 적분이 가능합니다.

하지만 현실에서 실험이나 관측을 통해 얻는 이산적인 성격의 데이터들은 해석적으로 적분이 불가능하거나 구하기 매우 복잡하기 때문에 적분을 통하여 정확한 값을 구하기 힘듭니다.

따라서 정확한 값은 아니지만 이에 근사하는 값을 적분하여 얻기 위해 **수치 적분**을 수행합니다.

🖱

방법 설명

대표적인 수치적분 방법이 몇가지 있는데 먼저 노드가 고르게 퍼져있는지 혹은 선택되는지로 2가지 타입으로 나뉩니다.

(뉴턴 코츠 방법, 가우시안 쿼드래처 방법)이 있습니다.

🖱

먼저 노드가 선택되는 가우시안 쿼드래처 방법은 특정 구간에서의 함수값의 가중치 합으로 계산하는 수치적분 방식입니다.

식으로 표현하면 다음과 같습니다. (식 보여주기)

🖱

다음으로 노드가 퍼져있는 뉴턴 코츠 방법입니다.

뉴턴 코츠 방법은 **폐구간 적분**과 **개구간 적분**이 있습니다.

먼저 폐구간 적분은 우리가 흔히 보는 적분의 시작점과 끝점의 함숫값을 알 수 있을 때 하는 적분이고

개구간 적분은 만약 적분의 시작점과 끝점이 무한대 값처럼 함숫값을 구하기 어렵거나 불가능할 때 이 때 개구간적분을 사용합니다.

먼저 폐구간 적분에는 사다리꼴 공식과 심슨 공식이 있는데 사다리꼴 공식을 먼저 살펴보겠습니다.

🖱

사다리꼴 공식

(그림과 식 보여주면서) 사다리꼴 공식은 다음 그림과 같이 2개의 점을 1차 보간다항식인 직선으로 이어 만들어지는 함수의 영역을 적분하는 방법입니다.

이때 면적의 형태가 사다리꼴 형태이기에 사다리꼴 적분이라고 부릅니다.

주어진 함수 fx와 사다리꼴 사이에 빈 공간에 해당하는 영억은 실제 적분 값과의 오차인데 오차를 줄이기 위해 적분 구간을 잘게 쪼개어 계산을 하게 됩니다. 이를 합성 사다리꼴 공식이라고 합니다.

심슨 공식

다음은 심슨 공식입니다.

사다리꼴 공식과 다르게 점과 점 사이를 2차 보간다항식 또는 3차 보간다항식으로 이어 만들어지는 함수의 영역을 적분하는 방법입니다.

이때 2차 보간다항식에 기초한 수치 적분은 심슨 3분의 1 적분이라고 하고 3차 보간다항식에 기초한 수치 적분은 심슨 8분의 3적분이라고 합니다.

미드 포인트 공식

다음으로는 뉴턴 코츠 방법의 개구간 적분에 해당하는 미드 포인트 공식입니다.

위에 설명했던 공식들과는 다르게 미드 포인트 공식에서는

예제

다음으로 예제를 보겠습니다. 방금 설명한 미드 포인트 방법을 활용하여 적분을 해보겠습니다.

주어진 함수 fx가 x^2 이고 구간이 0부터 6일 때 정적분으로 구한 값을 알아보고 미드 포인트가 1개 있을 때와 미드 포인트가 2개 있을 때 구한 값을 비교해보겠습니다.

먼저 정적분으로 계산을 해보면 이 식은 3분의 1 x세제곱 0부터 6까지 계산을 하면 3분의 1 곱하기 6세제곱 약분하고 계산해보면 이렇게 72가 됩니다.

이제 미드 포인트가 1개 있을 때 0과 6사이의 중점을 구해보면 x가 3일 때 중점입니다 따라서 6빼기 0에 f(3)을 곱하면 54가 나옵니다.

그 다음으로 미드 포인트가 2개 있을 때 0과 6사이를 3등분하여 간격을 구해보면 2가 나옵니다.

따라서 미드 포인트는 x가 2일 때와 x가 4일 때입니다.

이제 6빼기 0을 2로 나눈 값에 f(2)와 f(4)를 더한 값을 계산을 해보면 60이 나옵니다.

따라서 구간을 더 쪼갤수록 정확해지는 것을 알 수 있습니다. 이상으로 발표 마치겠습니다 감사합니다.