# NumpyIncertitudes_3

August 27, 2021

Incertitudes-types et mesure

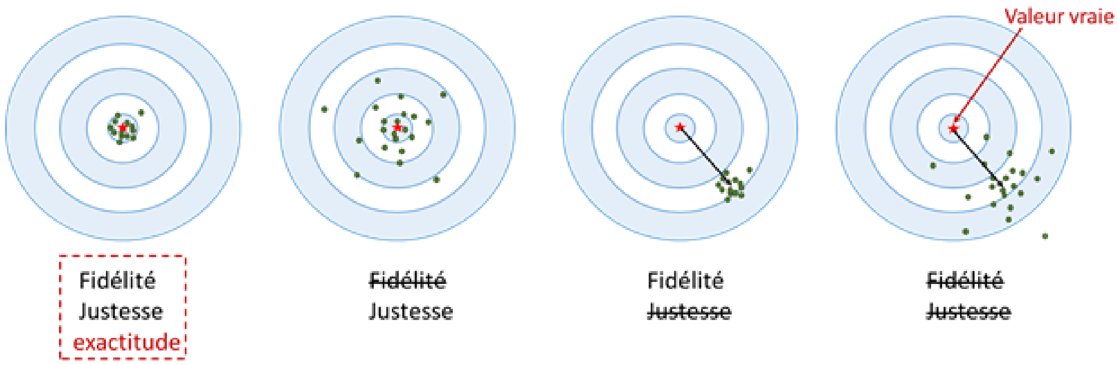
| | |
|---|---|
| Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude.<br>Incertitude-type. | Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure.<br>Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A).<br>Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B).<br>Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale. |
| Incertitudes-types composées. | Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient.<br>Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée.<br><br><u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée. |
| Écriture du résultat d'une mesure. | Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure. |

## 1 Fidélité et justesse d'un mesurage

Tout mesurage d'une grandeur physique est entâché d'une erreur.

Les erreurs sont classées en deux catégories :

- Les **erreurs aléatoires** qui dispersent les valeurs mesurées autour d'une valeur centrale. A chaque répétition de la mesure, l'erreur aléatoire prend une valeur différente.
- Les **erreurs systématiques** qui décalent la valeur mesurée d'une valeur constante (*ie* qui sera la même pour toutes les répétitions). Elles peuvent être dues à des défauts de conception de l'instrument, à son usure, à l'action d'une grandeur d'influence, …). Elles peuvent être corrigées en ré-étalonnant l'instrument par exemple.




On distingue deux qualités d'un protocole de mesure:

- La **fidélité d'un mesurage** est son aptitude à donner des mesures sans erreurs aléatoires.
- La **justesse d'un mesurage** est son aptitude à donner des mesures sans erreurs systématiques.

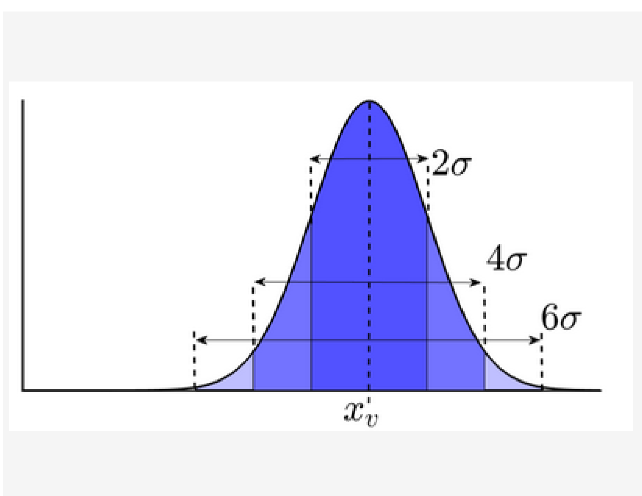
Les erreurs aléatoires ont pour origine les fluctuations imprévisibles de l'environnement, elles ne peuvent pas être corrigées mais peuvent être estimées : c'est l'objet du paragraphe suivant.

## 2 Notion d'incertitude-type

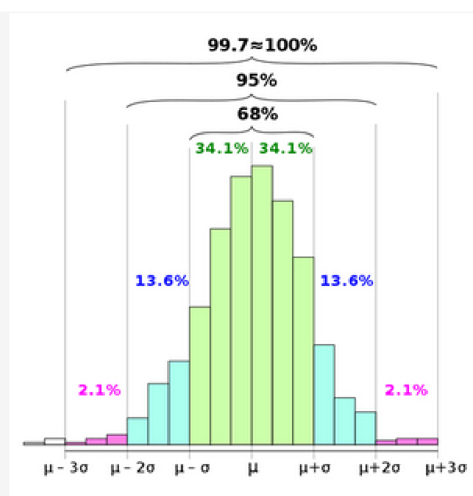
*Important* : dans toute la suite, on suppose que **les erreurs systématiques ont été corrigées**.

La *variabilité* d'une mesure fait partie intégrante du processus de mesurage.

Par exemple, les valeurs mesurées peuvent suivent un processus aléatoire décrit par une loi normale (=courbe de Gauss, cf figure ci-dessous).




loi gaussienne




plage de valeur à $\pm\sigma$, $\pm2\sigma$, $\pm3\sigma$

**Définition de l'incertitude-type**

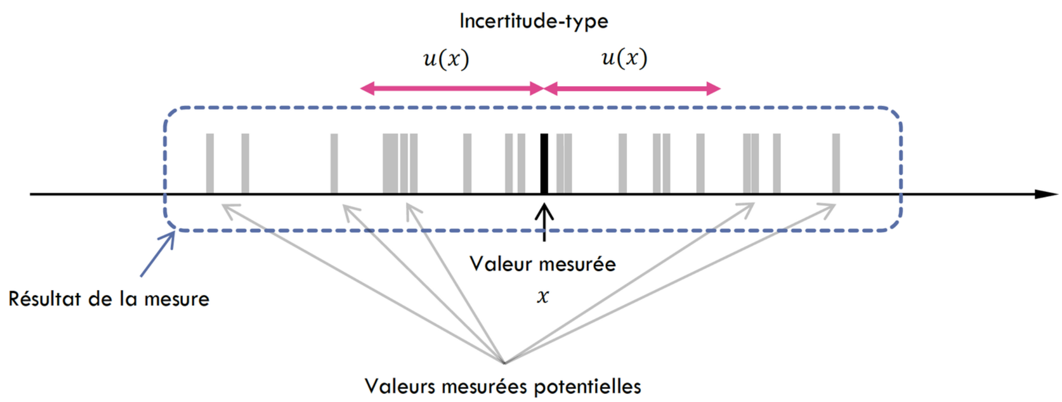
La grandeur physique qui quantifie la *variabilité* d'une mesure d'une grandeur $x$ est appelée **incertitude-type** et est notée $u(x)$.

Par définition, l'incertitude-type est l'**écart-type** de la distribution des valeurs issues des répétitions de la mesure.

*Remarques*

1/ Tout se passe comme si le résultat d'une mesure est assimilé à la réalisation d'une variable aléatoire de loi normale de moyenne $\mu$ et d'écart type $\sigma$.

2/ Le résultat de la mesure n'est pas réductible à la connaissance de la seule valeur moyenne $\mu$ : il est indispensable de pouvoir quantitifier la *variabilité* de la mesure et donc de pouvoir estimer l'incertitude-type $\sigma$ associée à cette mesure.




### Représentation du résultat d'une mesure

- Le résultat d'une mesure est noté par convention $x \pm u(x)$.
- L'incertitude $u(x)$ sera donnée avec deux chiffres significatifs.
- Le nombre de chiffres significatifs du résultat $x$ dépend de l'incertidude.

*Exemple*

Supposons que l'on mesure l'intensité d'un courant électrique $I$ avec une précision $u(I)$ de $150\,\mu$A. Si la valeur affichée par l'appareil est $I = 97,876$ mA, on écrira pour le résultat de la mesure:

$$I = 97,88 \pm 0,15 \text{ mA}$$

Pour plus de clarté, on peut également écrire les deux valeurs séparément:

$$I = 97,88 \text{ mA} \quad \text{et} \quad u(I) = 0,15 \text{ mA}$$

### Incertitude-type relative

Le quotient de l'incertitude-type $u(x)$ par la valeur mesurée $x$ représente l'incertitude "relative":

$$u(x)/x$$

On l'exprime également en pourcentage.

*Exemple*

Dans le cas précédent, l'incertitude-type relative vaut $0,15/97,88 \approx 1,5\,10^{-3} = 0,15\%$ d'erreur.

# 3 Méthodes d'estimation des incertitudes-types

D'après ce qui précède, le résultat d'une mesure est assimilé à la réalisation d'une variable aléatoire de loi normale de moyenne $\mu$ et d'écart type $\sigma$.

On cherche à évaluer les meilleurs estimateurs $\overline{x}$ et u(x) de ces deux paramètres. Trois cas de figures se présentent :

- Il est possible d'effectuer de nombreuses répétitions de la mesure et obtenir une suite de résultats $x_i$ chacun entaché d'erreurs aléatoire. On parle d'**évaluation de type A**.
- On ne peut réaliser qu'une seule mesure (ex: longueur mesurée au mètre ruban). On va estimer l'intervalle des valeurs mesurées raisonnablement acceptables en se basant sur les informations à notre disposition (notice constructeur, certificat d'étalonnage, résolution d'un indicateur numérique, l'expérience personnelle, ...). On parle d'**évaluation de type B**.
- La grandeur dont on souhaite estimer l'incertitude n'est pas directement mesurée mais *résulte d'un calcul* mené à partir d'une ou plusieurs grandeurs mesurées. (ex : mesure de la résistance d'un conducteur ohmique à partir du rapport entre la tension à ses bornes et le courant que le traverse). On parle d'**incertitude-type composée**.

# 4 Estimations de type A des incertitudes-types de mesure

Il s'agit d'une méthode statistique s'appuyant sur le résultat de $N$ mesures.

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_N$, les résultats de $N$ mesures, on peut montrer que les relations:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k$$

et

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})^2}$$

fournissent les meilleurs estimateurs $\overline{x}$ de la valeur centrale et $\sigma_x$ de l'incertitude $u(x)$ de la mesure.

## 4.1 Exercice N3 n°1 Estimation de type A (exo corrigé)

Un opérateur effectue $N = 12$ mesures de la durée de chute libre d'un corps lâché sans vitesse initiale à 1 m de hauteur à l'aide d'un chronomètre à déclenchement manuel dont l'affichage est au millième de seconde.

| mesures | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| durées (s) | $0,432$ | $0,487$ | $0,472$ | $0,452$ | $0,454$ | $0,436$ | $0,492$ | $0,439$ | $0,440$ | $0,431$ | $0,518$ | $0,472$ |

**Questions**

a) Déterminer la moyenne de ces mesures et calculer l'incertitude-type associée.

b) Afficher le résultat de la mesure de la durée $\Delta t$ de chute avec les nombres corrects de chiffres significatifs.

**Correction**

[6]:
```
import numpy as np # import du module Numpy
## Saisie des données
xi = np.array([0.43174438, 0.48738268, 0.47292349, 0.4519076 , 0.4545177 ,
       0.43610964, 0.49176257, 0.4397923 , 0.4395974 , 0.43050934,
       0.51763649, 0.47245503])
print(" Estimateurs : moyenne = ",np.mean(xi),  # calcul de la moyenne
      ' s  écart-type = ',np.std(xi,ddof = 1))  # calcul de l'écart-type avec␣
 ↪le paramètre ddof = 1
```

```
 Estimateurs : moyenne =  0.4605282183333334  s  écart-type =
0.027893338002511647
```

D'après l'étude statistique, la durée $\Delta t$ de chute est

$$\Delta t = 0,461 \text{ s} \quad \text{(résultat arrondi à la milliseconde)}$$

avec

$$u(t) = 0,028 \text{ s} \quad \text{(deux chiffres significatifs sur l'incertitude-type)}$$

# 5 Estimations de type B des incertitudes-types de mesure

C'est le cas lorsque que l'on dispose d'une mesure unique ou / et que l'on est dans l'incapacité d'effectuer des répétitions de la mesure.

Il faut évaluer la **plage de valeurs mesurées raisonnablement acceptables** (c'est-à-dire dans laquelle la mesure se situe manifestement). Pour cela, on peut avoir besoin de la notice des appareils.

## 5.1 Précision $\Delta$ d'un mesurage

On appelle **précision** d'un mesurage (ou d'un instrument de mesure) **la demi-largeur $\Delta$ de l'intervalle de valeurs** dans lequel on peut raisonnablement indiquer que la mesure se situe.

*Exemples*

1. Avec une règle graduée au mm, on mesure une longueur $L = 157$ mm. La précision de la mesure avec cette règle vaut $\Delta = 0,5$ mm.

2. Sur la notice d'un multimètre, multimètre numérique, utilisé en voltmètre AC+DC, sur le calibre 1 V, la notice indique : « accuracy 0.3%rdg + 4digits ». La précision est donc de 0,3% de la valeur lue auquel on ajoute 3 fois la valeur de la plus faible décimale affichée.

Ainsi, si on lit pour la tension $U = 231,25$ mV,

la précision de la mesure avec cet appareil vaut

$$\Delta = 231,25 \times 0.003 + 0,04 = 0,693 + 0,04 = 0,72 \text{ mV}$$

3. Sur un vernier micrométrique au 1/50e de millimètre (soit 20 micromètres), la précision peut être de l'ordre de la cinquantaine de micromètre notamment parce que la lecture du vernier « à la graduation » près n'est pas toujours possible. On peut donc choisir $\Delta = 50\,\mu$m.

*Remarques*

L'évaluation de la précision peut relever d'un choix arbitraire qui dépend de l'expérimentateur. Dans ce cas, il importe de **bien préciser le choix qui fait** quant à la plage de valeurs acceptables pour la mesure.

> Ex : "Avec ce pied à coulisse, je considère que la plage de valeurs acceptables est de largeur 0,1 mm. Donc $\Delta =$ 0,1 / 2 $= 0,05$ mm.

### 5.2 Lien entre incertitude-type et précision

*Résultat (admis)*: Si on considère que la valeur mesurée est répartie uniformément sur un intervalle de largeur $2\Delta$, alors l'évaluation de type B de l'incertitude-type est

$$u(s) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

Note : le facteur $\sqrt{3}$ est issu d'une norme internationale.

### 5.3 Exercice N3 n°2 Estimation de type B (exo corrigé)

a) Evaluer l'incertitude-type pour les deux premiers exemples précédents (règle graduée, et multimètre numérique.

b) Donner le résultat de la mesure.

**Correction**

Il suffit de diviser la demi-largeur de valeurs acceptables par $\sqrt{3}$.

1. **Mesure à la règle graduée**

Pour la règle graduée au millimètre: $\Delta =$ 0,5 mm, l'incertitude-type sur la longueur $L$ est donc

$$u(L) = 0{,}5/\sqrt{3} \approx 0,29 \text{ mm}$$

Le résultat de cette mesure est donc

$$L = 157,0 \text{ mm} \quad \text{avec} \quad u(L) = 0,29 \text{ mm}$$

2. **Mesure au multimètre numérique**

Pour la multimètre : $\Delta =$ 0,72 mV, l'incertitude-type sur la tension $U$ est donc

$$u(U) = 0{,}72/\sqrt{3} \approx 0,42 \text{ mV}$$

Le résultat de cette mesure est donc

$$U = \text{ 231,25 V} \quad \text{avec} \quad u(U) = 0,42 \text{ V}$$

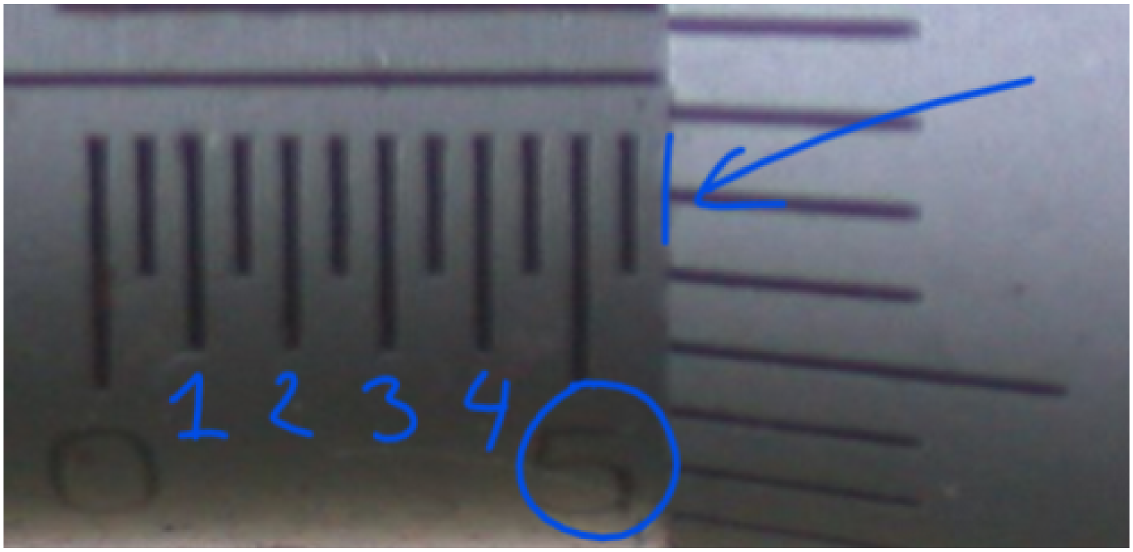
### 5.4 Exercice N3 n°3 Utilisation d'un vernier micrométrique (exo corrigé)

a) Déterminer le résultat de la mesure de position avec son incertitude (cf figure ci-dessous).


**Correction**

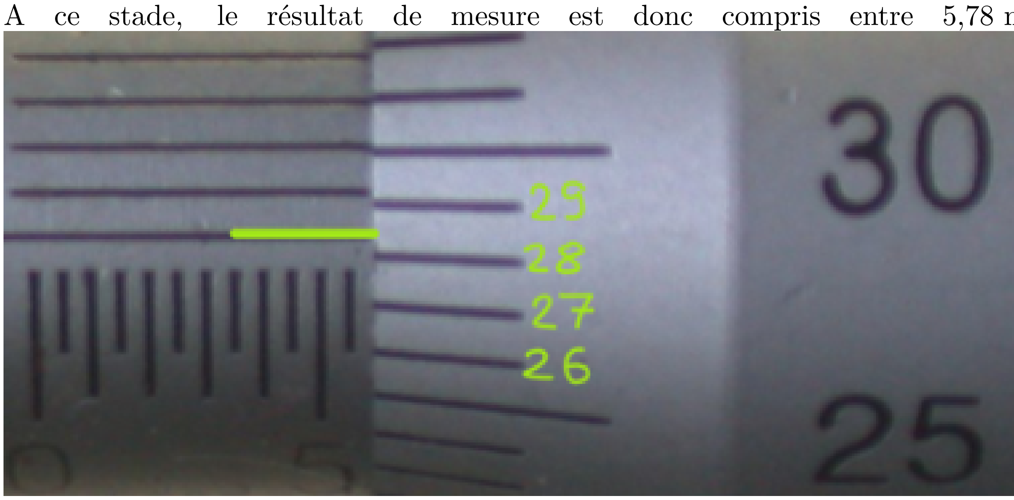
Méthode de lecture du vernier

1. On commence par la lire la valeur approximative en millimètre sur le repère principal (graduations veticales en bleues ci-dessous). On voit que la valeur est comprise entre 5,5 mm et 6 mm.




2. On lit ensuite les graduations horizontales de droite au centième de millimètre (en vert ci-dessous). Il y a 50 graduations réparties sur un tour. Un tour correspond à un demi-millimètre. La valeur lue est comprise en 28 et 29. On ajoute donc 0,28 mm à la valeur précédente.

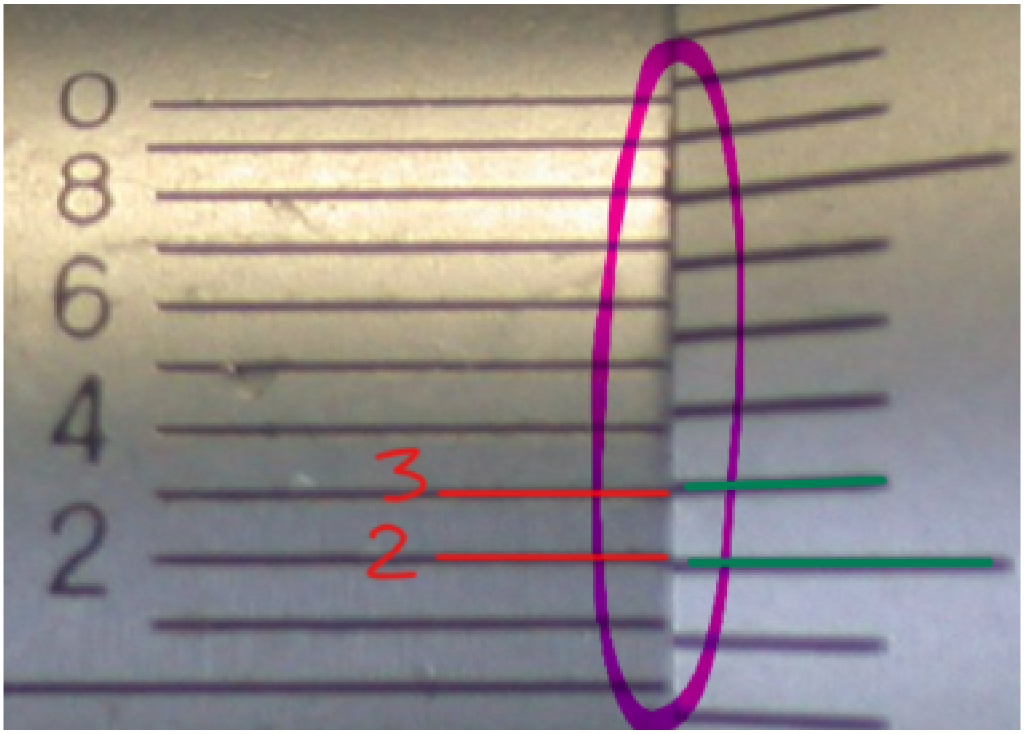
A ce stade, le résultat de mesure est donc compris entre 5,78 mm et 5,79 mm.




3. Enfin, on utilise les dix graduations verticales de gauche (en rouge ci-dessous) : le but est de faire correspondre les traits verts (à droite) avec traits rouges (à gauche).

On constate que les traits qui sont “le plus en face l’un de l’autre” correspondent aux graduations 2 et 3.

On peut **prendre la valeur 2,5** ce qui signifie que, parmi les *dix* graduations qui découpent le centième de millimètre, on ajoute $0,25$ centième de millimètre.




Conclusion : la valeur lue est donc $x = 5{,}7825$ mm.

*Evaluation de l'incertitude de type B*

On peut considérer que la **plage de valeurs acceptables** est de 2 graduations. Or, le vernier comporte 10 graduations pour un centième de millimètre. La précision est donc

$$\Delta = \frac{2/10 \times\ 0{,}01 \text{ mm}}{2} = 0{,}001 \text{ mm}$$

.

L'incertitude-type s'obtient en divisant la demi-largeur de la plage de valeurs acceptables par $\sqrt{3}$

$$u(x) = \frac{0{,}001 \text{ mm}}{\sqrt{3}} \approx 0,58\,\mu\text{m}$$

On peut écrire:

$$x = 5{,}7825 \text{ mm} \pm 0,58\,\mu\text{m}$$

Remarque

- Le terme « **précision de la mesure** » est très ambigu du point du vue métrologique bien que, dans l'usage courant, dire qu'une mesure est précise signifie que son incertitude-type est faible et que l'erreur de mesure est faible. Les termes métrologiques corrects sont l'*exactitude du mesurage* et la *précision d'un appareil*.

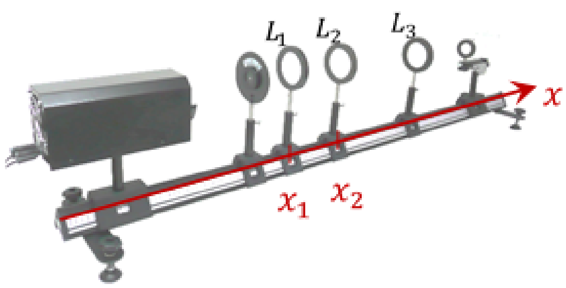
# 6 Estimations “de type C” des incertitudes-types de mesure : composition

*Exemples*

1. On mesure la résistance $R$ d'un dipôle à l'aide du rapport $R = U/I$ de la tension à ses bornes et de l'intensité du courant qui le parcourt. Les incertitudes sur les grandeurs $U$ et $I$ engendrent ainsi des incertitudes sur la valeur de la résistance $R$ qui découle du calcul

2. On mesure la distance $d$ entre deux positions d'une lentille sur un banc optique. Les positions étant repérées par leurs abscisses $x_1$ et $x_2$ sur un rail gradué au millimètre (cf figure ci-dessous). La distance s'obtient par la relation

$$d = x_2 - x_1$$





Les incertitudes sur les grandeurs $x_1$ et $x_2$ engendrent ainsi des incertitudes sur la valeur de la distance $d$ qui découle du calcul.

## 6.1 Propagation des incertitudes-types

Envisageons deux cas particulier de type somme ou produit.

### 6.1.1 Incertitudes-type composé de type “somme”

*Propriété (admise)*: Si on calcule $y(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$ avec $x_1$, $x_2$ des grandeurs mesurées d'incertitudes-types $u(x_1)$, $u(x_2)$ et $\alpha$, $\beta$ des constantes alors l'incertitude-type de $y$ résultant des variabilités des grandeurs $x_1$, $x_2$ est donnée par

$$u(y) = \sqrt{(\alpha u(x_1))^2 + (\beta u(x_2))^2}$$

### 6.1.2 Exercice N3 n°4 Mesure d'une distance sur un banc d'optique (exo corrigé)

$x_1$ et $x_2$ sont les positions repérées sur un rail gradué dont la précision $\Delta$ est estimée à 1 mm.

a) Déterminer la distance $d$ sépérant les deux positions $x_1 = 23,7$ mm et $x_2 = 44{,}8$ mm avec l'incertitude de cette mesure.

**Correction**

La distance $d$ est donnée par la différence entre les deux mesures $x_1$ et $x_2$

$$d = x_2 - x_1$$

Il s'agit donc d'une estimation d'incertitude-type de type composé.

- incertitudes-types sur les mesures $u(x_1) = u(x_2) = \Delta/\sqrt{3} = 0{,}58$ mm.
- Propagation des incertitudes : $d = x_2 - x_1$, on applique la formule générale avec les coefficients constants $\alpha = 1$ et $\beta = -1$, il vient:

$$u(d) = \sqrt{(\alpha u(x_1))^2 + (\beta u(x_2))^2}$$

soit

$$u(d) = \sqrt{(1 \times 0,58)^2 + (1 \times 0,58)^2} = \sqrt{2} \times 0,58 = 0{,}82 \text{ mm}$$

- La distance $d$ vaut donc

$$d = x_2 - x_1 = 21{,}1 \text{ mm} \quad \text{avec} \quad u(d) = 0{,}82 \text{ mm}$$

[68]:
```
## Feuille de calcul O3 n°4
x1, x2 = 23.7, 44.8 # mm
delta_x = 1 # mm
u_x1 =  delta_x/3**(0.5) # division par racine carré de 3
u_x2 =  delta_x/3**(0.5) # division par racine carré de 3

## Calcul de la distance
d = x2 - x1

## Propagation des incertitudes-types : somme ou différence
u_d = ( u_x1**2+ u_x2**2 ) **(0.5) # formule de type "Pythagore"

print("d = ",d," u_d = ",u_d)
```

```
d =  21.099999999999998  u_d =  0.8164965809277261
```

### 6.1.3 Incertitudes-type composé de type "produit"

*Propriété (admise)*: Si on calcule $y(x_1, x_2) = a x_1^{\alpha} \beta x_2^{\beta}$ avec $x_1$, $x_2$ des grandeurs mesurées d'incertitudes-types $u(x_1)$, $u(x_2)$ et $a$, $\alpha$, $\beta$ des constantes alors l'incertitude-type de $y$ résultant des variabilités des grandeurs $x_1$, $x_2$ est donnée par

$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\alpha \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\beta \frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$$

*Remarques*

- cas d'un produit : si $y = x_1 x_2$ alors, comme $\alpha = 1$, $\beta = 1$, il vient:

$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$$

- cas d'un quotient : si $y = x_1/x_2$ alors, comme $\alpha = 1$, $\beta = -1$, il vient:

$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$$

### 6.1.4 Exercice N3 n°5 Mesure d'une résistance par méthode voltampèremétrique (exo corrigé)

On mesure la résistance $R$ d'un résistor à l'aide du rapport entre la tension $U$ à ses bornes et l'intensité $I$ du courant qui le traverse.

Les grandeurs mesurées sont les suivantes (données avec leurs écarts-types):

- $U = 1{,}45\ \pm 0{,}02$ V
- $I = 1{,}468\ \pm 0{,}025$ mA

a) Déterminer la valeur $R$ de ce résistor avec l'incertitude de cette mesure.

**Correction**

La résistance $R$ est donnée par le quotient entre les deux mesures $U$ et $I$

$$R = \frac{U}{I}$$

Il s'agit donc d'une estimation d'incertitude-type de type composé.

- La valeur de la résistance est $R = 1,45/1,468\,10^{-3} = 987,738\,\Omega$. A ce stade, on garde volontairement un grand nombre de chiffres significatifs : ces chiffres vont servir pour le calcul mais seront retirés pour la présentation du résultat final pour rester en accord avec la précision de la mesure.

- L'incertitude-type relative sur $R$, $u(R)/R$ se calcule par la formule de propagation des incertitudes-types:

$$\frac{u(R)}{R} = \sqrt{\left(\frac{u(U)}{U}\right)^2 + \left(\frac{u(I)}{I}\right)^2}$$

soit

$$\frac{u(R)}{R} = \sqrt{\left(\frac{0,02}{1,45}\right)^2 + \left(\frac{0,025}{1,468}\right)^2} = 0,0219$$

- L'incertitude-type absolue se déduit en multipliant cette dernière valeur par $R$:

$$u(R) = 0{,}021 \times 987,738 = 21,64\,\Omega$$

*Affichage du résultat de la mesure*

Attention aux chiffres significatifs

- on ne garde que deux chiffres significatifs pour l'incertitude-type, soit $u(R) = 22\,\Omega$ (arrondi au plus proche).
- on garde un nombre de chiffres compatibles avec l'incertitude-type, ici le chiffre d'incertitude-type le plus petit est celui des ohms. En conséquence, l'affichage du résultat se fait "à l'ohm près" (à la rigueur à la dizaine d'ohms près).

La valeur de résistance est donc

$$R = 988 \pm\ 22\,\Omega$$

[69]:
```
## Feuille de calcul O3 n°5
U, I = 1.45, 1.468 # V , mA
```

```
R = U/I*1e3 # en Ohm
uR_R = ( (0.02/1.45)**2 + (0.025/1.468)**2)**(0.5) # incertitude relative
uR = R*uR_R        # incertitude absolue
print(R,uR_R, uR) # affichage des valeurs
```

```
987.7384196185286 0.02191505589019081 21.646342670828798
```

# 7 Propagation des incertitudes - cas général : la simulation numérique

Lorsque qu'une grandeur $y(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ dépend de plusieurs grandeurs mesurées et dont les incertitudes-types $u(x_1)$, $u(x_2)$,..., $u(x_k)$ sont connues alors la grandeur $y$ découlant du calcul à partir des $x_i$ possède également sa propre *variabilité* dont l'on peut quantifier la dispersion par l'incertitude-type $u(y)$.

La **méthode générale** est de recourir à une simulation numérique au cours de laquelle on effectue des tirages des grandeurs $x_i$ selon une distribution statistique (ex : normale ou uniforme) et de calculer pour chaque jeu des valeurs $\{x_i\}$ la valeur $y_i$ correspondante. La variabilité de $y$ s'obtient en prenant l'écart-type des $yi$.

En Python, cette simulation s'obtient par les instructions suivantes:

```
N = 50000 # nb d'échantillons
x1i = np.random.normale(x1, u_x1, N) # tirage selon une loi normale
x2i = np.random.uniform(x2-delta_x2,x2 + delta_x2, N) # tirage selon une loi uniforme
yi = ... # expression de yi en fonction des x1i, x2i, ...
y_moy = np.mean(yi) # valeur centrale = moyenne
y_sigma = np.std(yi,ddof = 1) # estimateur non biaisé de l'écart-type
```

Remarque: on peut également visualiser la distribution des $y_i$ en traçant un histogramme.

## 7.1 Simulation d'incertitudes (1) : mesure de distance sur un rail millimétré

Les données sont les mêmes que dans l'exercice **O3 n°4**

$x_1$ et $x_2$ sont les positions repérées sur un rail gradué dont la précision $\Delta_x$ est estimée à 1 mm.

a) Déterminer la distance $d$ sépérant les deux positions $x_1 = 23,7$ mm et $x_2 =$ 44,8 mm avec l'incertitude de cette mesure.

**Hypothèse du tirage aléatoire**

On va supposer que les grandeurs $x_1$ et $x_2$ sont aléatoirement distribuées sur des intervalles

$$I_1 = [\,\overline{x_1} - \Delta_x\,;\,\overline{x_1} + \Delta_x]$$

et

$$I_2 = [\,\overline{x_2} - \Delta_x\,;\,\overline{x_2} + \Delta_x]$$

**Génération des jeux de $N$ valeurs**

On utilise la fonction `random.uniform(a,b,N)` du module Numpy.

[70]:
```python
import numpy as np # import du module numpy

## Valeur numériques
x1, x2 = 23.7 , 44.8 # mm
deltax = 1 # mm

## Simulation des tirages aléatoires selon des lois uniformes
N = 50000 # nb de tirages
x1i = np.random.uniform(x1 - deltax, x1 + deltax, N) # 1ère variable
x2i = np.random.uniform(x2 - deltax, x2 + deltax, N) # 2ème variable

## Calcul de la distance
di = x2i - x1i # toutes ces variables sont des tableaux Numpy

## Estimations statistiques
d_moy = np.mean(di) # moyenne
d_sigma = np.std(di, ddof = 1) # écart-type

print("d_moy = ",d_moy , " mm d_sigma = ",d_sigma," mm") # affichage avec les␣
 ↪unités
```

```
d_moy =  21.098610650127586  mm d_sigma =  0.81677473030625  mm
```

**Conclusion :** On retrouve le même résultat que par la formule de propagation d'erreurs:

$$d = 21,1 \pm\ 0{,}82\,\mathrm{mm}$$

### 7.2 Exercice N3 n°6 Progapation des incertitudes dans un calcul (exo corrigé)

Un étudiant mesure un angle à l'aide d'un rapporteur gradué au degré. Il note "$\alpha = 87°$ à 1 degré près".

a) Quelle est la précision $\Delta_\alpha$ de la mesure de l'angle ?

b) Quelle est l'incertitude-type $u(\alpha)$ sur l'angle ?

c) Simuler numériquement les valeurs de l'angle $\alpha$ en utilisant une loi de distribution adaptée (uniforme ou normale). On justifiera.

d) En déduire l'incertitude-type

$$u(\sin(\alpha))$$

sur la valeur du sinus de l'angle $\sin(\alpha)$, tracer l'histogramme des valeurs de sinus et donner le résultat sur la mesure de $\sin(\alpha)$ avec le nombre correct de chiffres significatifs.

e) Quelle remarque peut-on faire quant aux nombres de chiffres significatifs du sinus ?

**Correction**

a) On peut considérer que l'angle est connu à 1° degré près signifie que la plage de valeurs acceptables est de $\pm 1°$. Ainsi, la précision angulaire est $\Delta_\alpha = 1°$. Ce choix est subjetif : on aurait éventuellement prendre une valeur deux fois plus faible !).

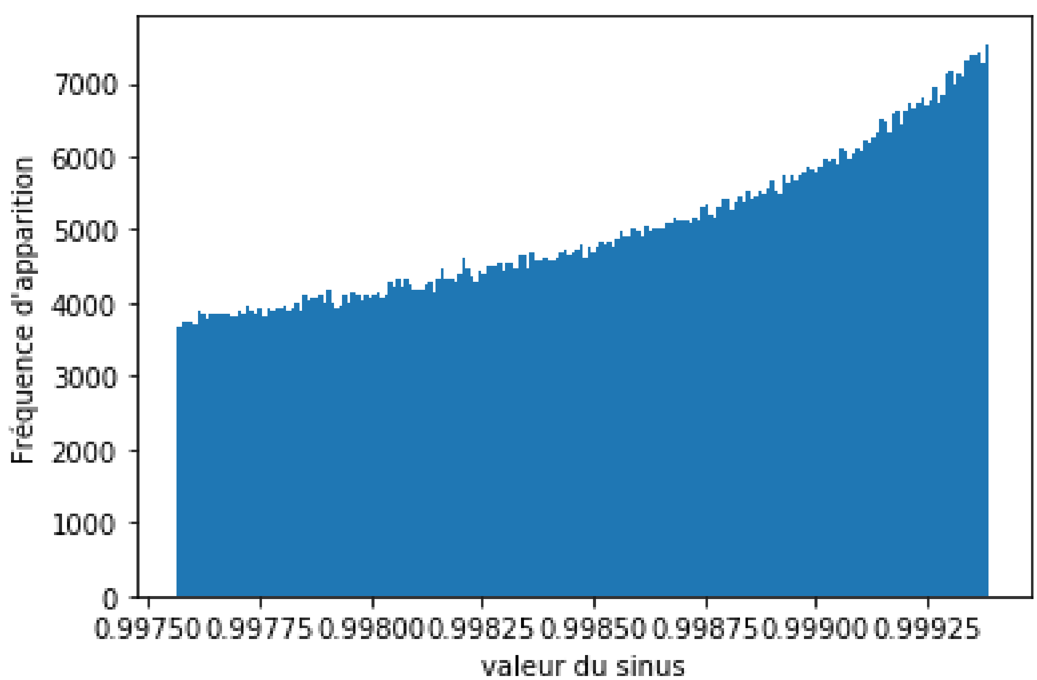
b) L'incertitude-type est égale à la précision divisée par racine carré de 3 :

$$u(\alpha) = \Delta_\alpha/\sqrt{3} = 0,58°$$

[71]:

```
import matplotlib.pyplot as plt # pour le tracé de l'histogramme

## c) simulation des tirages de l'angle alpha
N = 10**6 # grand nombre de tirages
alphai = np.random.uniform(86,88,N) # valeurs uniformément réparties dans␣
 ↪l'intervalle [86 ; 88]
                                    # car toute les valeurs appartenant à la␣
 ↪plage de valeurs
                                    # acceptables sont équiprobables

## d) incertitudes-types et histogramme des valeurs et
sin_alpha = np.sin(alphai*np.pi/180) # calcul du sinus ATTENTION à la␣
 ↪conversion en radians
moy_sin = np.mean(sin_alpha) # moyenne
sigma_sin = np.std(sin_alpha, ddof =1) # écart-type
plt.hist(sin_alpha, bins = 'rice') # tracé de l'histogramme des sinus
plt.xlabel("valeur du sinus")
plt.ylabel("Fréquence d'apparition")

print("sin_alpha = ", moy_sin, " incertitude-type = ", sigma_sin) # affichage␣
 ↪des résultats
```

```
sin_alpha =  0.9985794050222141  incertitude-type =  0.0005294301957803587
```



On constate que l'incertitude-type sur le sinus est $u(\sin(\alpha)) = 0{,}00053$.

Cette valeur est très faible et nous oblige à garder **4 chiffres significatifs** sur la valeur du sinus.

$$\sin(\alpha) = 0,9986 \quad \text{avec} \quad u(\sin(\alpha)) = 0{,}00053$$

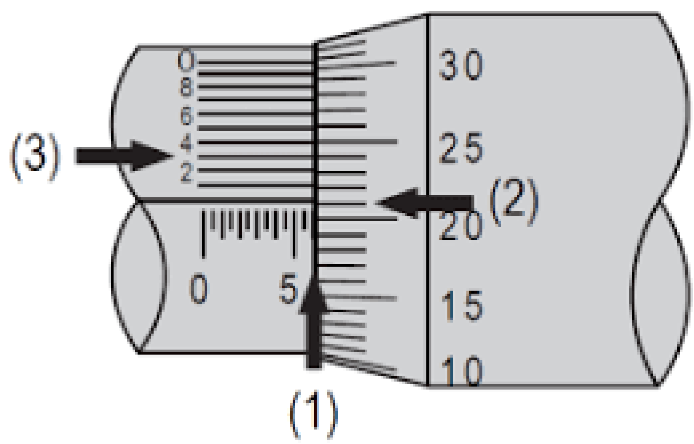
e) Le nombre de chiffres significatifs du résultat (ici 4 chiffres) est plus important que le nombre de chiffres significatifs de la grandeur initiale $\alpha$ (connu avec 2 chiffres).

Cela peut paraître surprenant! Cela découle de la non-linéarité de la fonction sinus et de la valeur d'angle $\alpha$ proche de 90°.

Exercices d'entraînement

### 7.3 Exercice N3 n°7 Utilisation d'un vernier micrométrique (à chercher)

Déterminer le résultat de la mesure de position avec son incertitude (cf figure ci-dessous).




**Correction**

On lit :

(1) 6 mm

(2) 21 centièmes

(3) La graduation de vernier est située ntre 2 et 4.

Donc $x = 6 + \frac{21}{100} + \frac{3}{1000} = 6{,}213$ mm

La demi-largeur de la plage de valeurs acceptables est $\Delta = 1/1000$ mm $= 1\,\mu$m

Le résultat de la mesure est donc

$$x = 6{,}213 \text{ mm} \quad \text{avec} \quad u(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58\,\mu\text{m}$$

### 7.4 Exercice N3 n°8 Progapation des incertitudes dans un calcul (à chercher)

Pour déterminer la dose d'un traitement à appliquer à son patient, un médecin doit déterminer le volume d'une tumeur. Pour cela, il fait passer une IRM à son patient et observe sur l'image une tache de 12 mm de long, 6 mm de large et 3 mm d'épaisseur. Chaque distance est déterminée avec une incertitude de 10 %.

a) En estimant que de la tumeur occupe 60 % du volume du parallélépipède ayant les dimensions indiquées ci-dessus, quelle est le volume de la tumeur avec son incertitude-type ?

b) Calculer l'incertitude-type relative, $u(V)/V$ sur le volume de cette tumeur.

*Notes* :

- Quand on dit que les distances sont déterminées "à 10 %", on supposera qu'il s'agit d'une distribution uniforme à ±10% de la valeur mesurée.

On proposera deux méthodes : - La première basée sur une simulation numériques consistant à tirer trois variables aléatoires `long`, `larg`, `epais` et à effectuer l'analyse statistique des données.

- La seconde utilisant les lois de composition dans le cas du produit

$$y(x_1, x_2, x_3) = a x_1 x_2 x_3$$

pour lequel la formule théorique est

$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{u(x_3)}{x_3}\right)^2}$$

**Correction de N3 n°8**

[65]:
```python
## Méthode 1
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Valeurs numériques
long, larg, epais = 12, 6, 3 # en mm

# Tirages aléatoires
N = 10**6 # grand nombre de valeurs
longi = np.random.uniform(long*0.9, long*1.1, N) # borne inférieure = -10% ;␣
↪borne supérieure = +10%
largi = np.random.uniform(larg*0.9, larg*1.1, N) # borne inférieure = -10% ;␣
↪borne supérieure = +10%
epaisi = np.random.uniform(epais*0.9, epais*1.1, N) # borne inférieure = -10% ;␣
↪borne supérieure = +10%

# Calculs statistiques
Vi = 0.6*longi*largi*epaisi # volume = 60% du volume du parallèlépipède
V_moy, V_sigma = np.mean(Vi), np.std(Vi, ddof = 1) # moyenne et écart-type
print("Estimateurs : moyenne = ",V_moy, "mm3 ; écart-type = ",V_sigma) #␣
↪résultats
```

```
print("incertitude-type relative = ",V_sigma/V_moy)
```

```
Estimateurs : moyenne =  129.59888021379552 mm3 ; écart-type =
12.98590962473499
incertitude-type relative =  0.10020078571136194
```

Conclusion :

$$V = 130 \text{ mm}^3 \pm 13 \text{ mm}^3$$

L'incertitude-type relative vaut 16 %

[67]:
```
## Méthode 2
# Précision des mesures
delta_long  = 0.1*long  # 10% de la valeur mesurée
delta_larg  = 0.1*larg  # 10% de la valeur mesurée
delta_epais = 0.1*epais # 10% de la valeur mesurée

# Incertitudes types des mesures
u_long = delta_long/np.sqrt(3) # division par racine carré de 3
u_larg = delta_larg/np.sqrt(3) # division par racine carré de 3
u_epais = delta_epais/np.sqrt(3) # division par racine carré de 3

# Formule de propagation donnant l'incertitude-type relative
ur_V = np.sqrt( (u_long/long)**2 + (u_larg/larg)**2 + (u_epais/epais)**2)

V = 0.6*long*larg*epais
# Incertitude absolue sur le volume
uV = ur_V*V
print(" V = ",V," mm3 u(V) = ",uV, " mm3 ur(V)  = ",ur_V)
```

```
 V =  129.6  mm3 u(V) =  12.960000000000004  mm3 ur(V)  =  0.10000000000000003
```

Conclusion : les deux méthodes donnent les mêmes estimations.

## 7.5 Exercice N3 n°9 masse surfacique d'une feuille de papier

Un étudiant chercher à déterminer la masse surfacique d'une feuille de papier.

Il mesure sa longueur et sa largeur au pied à coulisse (au 1/10e de millimètre). Il trouve $29,70$ cm et $21,00$ cm.

A l'aide d'une balance, il lit la valeur $m = 5,0$ g à 0,1 g près. La précision de la balance est « accuracy 0.8%rdg + 2digits ».

a) Calculer la masse surfacique (en kg.m$^{-2}$), notée $\sigma$, de cette feuille et déterminer son incertitude-type $u(\sigma)$. On précisera les hypothèses effectuées.

b) Il recommence en pesant cette fois la masse de 10 feuilles. Sur la même balance, il lit $m = 249.6$ g

c) Son professeur lui suggère de pèser directement une ramette de 500 feuilles. Sur la même balance, il lit $m = 2494.2$ g. En déduire la masse surfacique à l'aide de cette seconde mesure.

d) Conclure en comparant la précision des trois modes opératoires.

**Note:**

- L'exercice peut être résolu de deux manières (par les formules de propagation d'erreur ou par simulation numérique). On demande de faire, *a minima*, la simulation numérique.

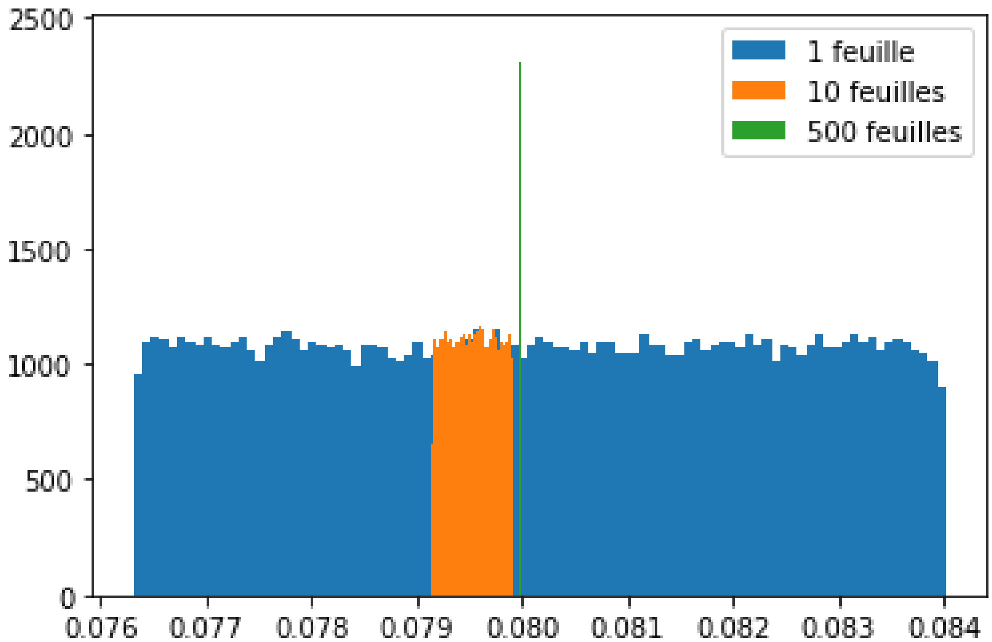
**Correction de N3 n°9**

[126]:
```
## Import des modules
import numpy as np

## Tirages aléatoires
N = 10**5
deltax = 0.1/50 # précision sur les mesures de distance en cm
L = np.random.uniform(29.7 - deltax, 29.7 + deltax,N) # longueur en cm à +/- 1/
↪20 mm
l = np.random.uniform(21 - deltax, 21 + deltax ,N) # longueur à +/- 1/20 mm
delta_m = 0.8/100*5 + 2*0.1 # précision de la mesure de masse 0.8% de la valeur␣
↪lue + 2 digits
m = np.random.uniform(5-delta_m,5 + delta_m,N) # hypothèse de loi uniforme pour␣
↪la masse

## a) Cacul de la masse surfacique pour la méthode 1
s = m/(l*L)*1e-3/(1e-2)**2 # masse divisée par la surface conversion en kg/m2
## Statistique
print('s = ',np.mean(s)," kg/m2 ; écart-type = ", np.std(s)," kg/m2")

## b) Nouvelle mesure de masse, 10 feuilles ensemble
m2 = np.random.uniform(49.6-delta_m,49.6 + delta_m,N) # hypothèse de loi␣
↪uniforme pour la masse
## Masse surfacique d'une feuille:
s2 = m2/(l*L)*1e-3/(1e-2)**2/10 # on divise par le nb de feuilles (valeur en kg/
↪m2)
## Statistique
print('s2 = ',np.mean(s2)," kg/m2 ; écart-type = ", np.std(s2)," kg/m2")

## c) Nouvelle mesure de masse
m3 = np.random.uniform(2494.2-delta_m,2494.2 + delta_m,N) # hypothèse de loi␣
↪uniforme pour la masse
## Masse surfacique d'une feuille:
s3 = m3/(l*L)*1e-3/(1e-2)**2/500 # on divise par le nb de feuilles (valeur en␣
↪kg/m2)

## Statistique
print('s3 = ',np.mean(s3)," kg/m2 ; écart-type = ", np.std(s3)," kg/m2")
```

```
s =  0.0801613646327087  kg/m2 ; écart-type =  0.002224982490363711  kg/m2
s2 =  0.07952579715450606  kg/m2 ; écart-type =  0.00022191853508490944  kg/m2
```

```
s3 =  0.07998076293467385  kg/m2 ; écart-type =  6.981249873778257e-06  kg/m2
```

[130]:
```python
## d) Comparaison des méthodes
# Tracé des histogrammes
plt.hist(s,bins = 'rice',label='1 feuille')
plt.hist(s2,bins='rice',label='10 feuilles')
plt.hist(s3,bins='rice',label='500 feuilles')
plt.legend()
plt.show()
# Rapport des incertitudes-types
print("La méthode 2 est ", np.std(s)/np.std(s2), ' fois plus précise que la␣
 ↪méthode 1.')
print("La méthode 3 est ", np.std(s)/np.std(s3), ' fois plus précise que la␣
 ↪méthode 1.')
```




```
La méthode 2 est  10.02612282706534  fois plus précise que la méthode 1.
La méthode 3 est  318.70833025484427  fois plus précise que la méthode 1.
```

[ ]: