Из уравнения (80) и условий (81) находим:

$$X_1(x) = C\sin\frac{\omega}{\alpha}x, X_2(x) = D\sin\frac{\omega}{\alpha}(l-x);$$

условия сопряжения (82) дают:

$$C\sin\frac{\omega}{\alpha}x_0 - D\sin\frac{\omega}{\alpha}(l-x_0) = 0,$$
$$C\frac{\omega}{\alpha}\cos\frac{\omega}{\alpha}x_0 + D\frac{\omega}{\alpha}\cos\frac{\omega}{\alpha}(l-x_0) = \frac{A}{\kappa}.$$

Определяя отсюда коэфициенты C и D, получаем:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1 = \frac{Aa}{\kappa\omega}\frac{\sin\frac{\omega}{\alpha}(l-x_0)}{\sin\frac{\omega}{\alpha}l}\sin\frac{\omega}{\alpha}x\cos(\omega t) \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ u_2 = \frac{Aa}{\kappa\omega}\frac{\sin\frac{\omega}{\alpha}x_0}{\sin\frac{\omega}{\alpha}l}\sin\frac{\omega}{\alpha}(l-x)\cos(\omega t) \text{ при } x_0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Аналогично записывается решение при $f(t) = A\sin\omega t$.

Итак, получено решение для случая $f(t) = A\cos\omega t$ или $f(t) = A\sin\omega t$. Если f(t) - периодическая функция, равная

$$f(t) = \frac{\alpha_u}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(\omega nt) + \beta_n\sin(\omega nt)$$

(ω - наименьшая частота), то, очевидно,

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1 = \frac{1}{k}\left\{\frac{\alpha_0 x}{2}(1-\frac{x_0}{l}) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\sin\frac{\omega n}{\alpha}(l-x_0)}{\omega n\sin\frac{\omega n}{\alpha}l}\sin\frac{\omega nx}{\alpha}\times\right. \\ \times(a_n\cos(\omega nt) + \beta_n\sin(\omega nt),\ 0 \leqslant x \leqslant x_0 \\ u_2 = \frac{1}{k}\left\{\frac{\alpha_0 x_0}{2}(1-\frac{x_0}{l}) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\sin\frac{\omega n}{\alpha}l}{\omega n\sin\frac{\omega n}{\alpha}l}\sin\frac{\omega n(l-x)}{\alpha}\times\right. \\ \times(a_n\cos(\omega nt) + \beta_n\sin(\omega nt),\ x_0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Если функция f(t) непериодическая, то, представляя её в виде интерала Фурье, аналогичным методом можно получить решение в итегральной форме.

Если знаменатель у этих функций (83) равен нулю

$$\sin\frac{\omega nl}{\alpha} = 0,$$
$$\omega n = \frac{\pi m}{l} = \omega_m.$$

т.е. если спектр частот возбуждающей силы содержит одну из частот собственных колебаний (резонанс), то установившегося решения не существует.

Если точка приложения силы x_0 является одним из узлов стоячей волны, соответсвующей свободному колебанию с частотой ω_m, то

$$\sin\frac{\omega_m}{\alpha}x_0 = 0,$$
$$\sin\frac{\omega_m}{\alpha}(l - x_0) = 0.$$

При этом числители соответствующих слагаемых для u обращаются в нуль, и явление резонанса не имеет места. Если же точка приложения силы, действующей с частотой ω_m, является пучностью соответсвующей стоячей волны с частотой ω_m, то

$$\sin\frac{\omega_m \alpha}{x\ \ _0} = 1,$$

и явление резонанса будет выражено наиболее резко.

Отсюда следует правило, что для возбуждения резонанса струны при действии на неё сосредоточенной силой надо. чтобы частота её ω была равна одной из собственных частот струны, а точка приложения силы совпадала с одной из пучностей стоячей волны.

9. Общая схема метода разделения переменных. Метод разделения переменных применим не только для уравнения колебаний однородной струны, но и для уравнения колебаний неоднородной струны. Рассмотрим следующую задачу:

найти решение уравнения

удовлетворяющее условиям