

2023 考研

高等数学

基础阶段讲义

主讲：唐五龙

原高校副教授，教学名师，双带头人，讲课比赛第一名获得者。考研数学辅导专家，已从事考研数学辅导十二年。其关于知识点的归纳与题型方法的总结成为学生应试的法宝，被历届学生称为宝藏老师。

第 0 章 导学部分

第一节 2023 考研数学基本常识

第二节 2023 考研数学复习策略与基础复习规划

一、2023 考研数学复习策略

1. 为什么自己认为做对了的题却不能得分, 造成估分 80 分, 实际 40 分? 问题何在? 如何攻克?

例 1 已知 $f(x) = (x-a)\varphi(x)$, 且 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 求 $f'(a)$.

例 2 (2005) 已知 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt + xf(x)}$.

2. 为什么有些题自己费了很长时间就是做不出来, 但是看了答案后瞬间明白? 问题何在? 如何攻克?

例 3 (2000) 计算 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx$.

例 4 已知 $a < b$, 且对于任意的 x 有: $f(a-x) = f(a+x)$, $f(b-x) = f(b+x)$. 证明

$f(x)$ 以 $2b-2a$ 为周期.

3. 考研数学客观题解题技巧

例 5 (2011) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$ ()

- (A) $-2f'(0)$ (B) $-f'(0)$ (C) $f'(0)$ (D) 0

例 6 (2020) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上可导, 且 $f'(x) > f(x) > 0$, 则 ()

- (A) $\frac{f(-2)}{f(-1)} > 1$ (B) $\frac{f(0)}{f(-1)} > e$ (C) $\frac{f(1)}{f(-1)} < e^2$ (D) $\frac{f(2)}{f(-1)} < e^3$

二、2023 考研数学基础复习规划

第三节 初等数学知识

一、三角函数初等知识汇总

二、常用代数公式

三、代数方程

四、初等几何

五、平面解析几何

六、常用初等数学不等式

七、数列初等知识

八、计数原理与排列组合（数学一三）

第四节 函 数

一、考试内容

1. 函数的概念 (定义、定义域、对应法则、值域)

定义域 (一般指自然域): 使表达式有意义的自变量的一切实数组成的集合.

2. 函数的性态

1) 单调性

定义: 单调增: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

单调不减: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

判定: (1) 定义

(2) 导数

2) 奇偶性

定义: 偶函数 $f(-x) = f(x)$; 奇函数 $f(-x) = -f(x)$.

判定: 用定义

3) 周期性

定义: $f(x+T) = f(x)$

判定: 用定义

4) 有界性

定义: 若 $\exists M > 0, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$; 则称 $f(x)$ 在 I 上有界.

判定: 用定义

3. 复合函数与反函数 (函数分解成简单函数的复合, 分段函数的复合) .

连续函数存在反函数 \Leftrightarrow 函数为连续单调函数.

4. 基本初等函数与初等函数

1) 基本初等函数:

常数, 幂函数, 指数, 对数, 三角, 反三角. 掌握它们定义域, 性质, 图形.
特别是函数图像务必熟记!!!

(1) 常值函数 $y = c$ (常数)

(2) 幂函数 $y = x^\mu$ (μ 常数)

(3) 指数函数 $y = a^x = e^{x \ln a}$ ($a > 0, a \neq 1$ 常数)

$$y = e^x \quad (e = 2.71828 \cdots \text{无理数})$$

(4) 对数函数 $y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ ($a > 0, a \neq 1$ 常数)

$$\text{自然对数 } y = \log_e x = \ln x$$

(5) 三角函数 $y = \sin x; y = \cos x; y = \tan x;$

$$y = \cot x; y = \sec x; y = \csc x.$$

(6) 反三角函数 $y = \arcsin x; y = \arccos x;$

$$y = \arctan x; y = \operatorname{arccot} x.$$

2) 初等函数:

由基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除和复合所得到且能用一个解析式表示的函数.

5. 分段函数

特别是隐含的分段函数: 最大最小函数, 绝对值函数, 取整函数等, 几乎所有情况下都要显示成分段函数再解题.

二、典型例题

例 1 求函数 $y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x}$ 的定义域.

例 2 设函数 $f(x) = \frac{x}{1+x}, x \in [0, 1]$ 定义函数列 $f_1(x) = f(x), f_2(x) = f(f_1(x)), \dots,$

$f_n(x) = f(f_{n-1}(x)), \dots,$ 求 $f_n(x)$ 的解析式.

例 3 设 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数, 且 $2f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, 求 $f(x)$ 的解析式.

例 4 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases}$, $g(x) = e^x$, 求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

例 5 已知 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 判断 $f(x)$ 的奇偶性.

例 6 证明 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 上无界.

例 7 下列函数可以由哪些基本初等函数的四则运算与复合运算而成.

(1) $y = (1 + \ln x)^5$;

(2) $y = \ln^2 \arcsin x^3$;

(3) $y = \sqrt{\ln(\sin x + \tan x)}$.

【章节小结】

第一章 函数 极限 连续

【考试内容】

函数的概念及表示法 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 复合函数、反函数、分段函数和隐函数 基本初等函数的性质及其图形 初等函数 函数关系的建立

数列极限与函数极限的定义及其性质 函数的左极限与右极限 无穷小量和无穷大量的概念及其关系 无穷小量的性质及无穷小量的比较 极限的四则运算 极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则 两个重要极限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

【考试要求】

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，并会建立应用问题的函数关系。
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性。
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念。
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念。
5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系。
6. 掌握极限的性质及四则运算法则。
7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法。
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限。
9. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型。
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质。

第一节 极 限

一、考试内容

1. 极限概念

1) 数列极限： $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A: \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0, \text{当 } n > N \text{ 时 } |a_n - A| < \varepsilon.$

2) 函数极限：

(1) 自变量趋于无穷大时函数的极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A: \quad \forall \varepsilon > 0, \exists X(\varepsilon) > 0, \text{当 } |x| > X \text{ 时 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 的定义与 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 类似。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$

(2) 自变量趋于有限值时函数的极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A : \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\text{左极限: } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0);$$

$$\text{右极限: } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$$

$$\text{几个值得注意的极限 (考虑左右极限): } \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}, \lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arccot} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x, \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x, \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccot} x, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

另外分段函数在分段点处的极限 (特别是隐含的分段函数: 最大最小函数, 绝对值函数, 取整函数等).

2. 极限性质

1) 唯一性.

2) 局部有界性: 另外需注意有界函数的和、积仍有界.

3) 保号性: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

(1) 如果 $A > 0$, 则存在 δ , 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) > 0$.

(2) 如果当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) \geq 0$, 那么 $A \geq 0$.

注意: 常与极值点和拐点, 单调区间, 凹凸区间, 零点定理结合出题.

4) 有理运算性质: 若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$.

$$\text{那么: } \lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B;$$

$$\lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B;$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

三个常用的结论: (1) $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在, $\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim f(x) = 0$;

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_n}, & m = n \\ 0, & m > n \\ \infty, & m < n \end{cases} \quad \text{其中 } a_n, b_m \neq 0.$$

注: 上面这种抓大头的方法大家务必会推广.

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $a^x (a > 1) \gg x^\mu (\mu > 0) \gg \ln x$ (指数函数 > 幂函数 > 对数函数)

5) 列与子列极限的关系

6) 函数值与极限值之间的关系:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \quad \text{其中 } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

3. 无穷小量

1) 无穷小量的概念: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 称 $f(x)$ 为无穷小量 ($x \rightarrow x_0$ 或 $x \rightarrow \infty$).

2) 无穷小量的性质: 无穷小量乘有界函数仍为无穷小量.

4. 无穷大量

1) 无穷大量的概念: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大量.

2) 无穷大量与无界变量的关系: 无穷大量 \Rightarrow 无界变量, 反之不一定成立.

3) 无穷大量与无穷小量的关系:

无穷大量的倒数是无穷小量; 非零的无穷小量的倒数是无穷大量.

注意: 关于无穷大的问题我们常取倒数, 转化成无穷小的问题.

5. 极限存在准则

1) 夹逼准则: 若存在 N , 当 $n > N$ 时, $y_n \leq x_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$,

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

2) 单调有界准则: 单调有界数列必有极限.

注: 当数列已递推式告之, 求其极限时, 务必先用准则 2 证其极限存在, 再设之.

6. 无穷小量的比较

1) 无穷小的比较: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$.

(1) 高阶: 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$; 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$;

(2) 同阶: 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$;

(3) 等价: 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$; 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

(4) 无穷小的阶: 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C \neq 0$, 称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

(5) 性质 $x \rightarrow 0$, $o(x^n) + o(x^m) = o(x^{\min\{n,m\}})$; $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$.

2) 常用的无穷小量的等价代换 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1;$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

7. 洛必达法则

1) 法则 1. ($\frac{0}{0}$ 型) 设

$$(1) \lim f(x) = 0, \quad \lim g(x) = 0$$

(2) x 变化过程中, $f'(x)$, $g'(x)$ 皆存在

$$(3) \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad (\text{或 } \infty)$$

$$\text{则 } \lim \frac{f(x)}{g(x)} = A \quad (\text{或 } \infty)$$

(注: 如果 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且不是无穷大量情形, 洛必达法则不能使用)

2) 法则 2. ($\frac{\infty}{\infty}$ 型) 设

$$(1) \lim f(x) = \infty, \quad \lim g(x) = \infty$$

(2) x 变化过程中, $f'(x)$, $g'(x)$ 皆存在

$$(3) \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \quad (\text{或 } \infty)$$

则 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A$ (或 ∞)

二、典型例题

例 1 同济大学第七版 P33, T3.

例 2 设 $f(x) = \begin{cases} 2 + \ln(1+x), & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ 2\cos x^2, & x > 0 \end{cases}$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

例 3 讨论 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的存在性.

例 4 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3}{x^2 - 5x + 4}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 5x + 4}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

例 5 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^3 - 2x - 1}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x + 1}{x + 2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{2022}}{(x+1)^k - x^k} = A (\neq 0, \infty), \text{ 求 } k \text{ 和 } A \text{ 的值.}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}{\sqrt[3]{8x^3 - x - 1}}$$

$$(6) (2007) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x)$$

例 6 求下列极限

$$(1) (2006) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x}$$

$$(2) (2005) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$(3) (2009) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+\sin x} - 1)}$$

例 7 (1995) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}$.

例 8 (2008) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}$.

例 9 (2011) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2 \sin x} - x - 1}{x \ln(1 + x)}$.

例 10 (2005) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} \right)$.

例 11 (2014) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1) - x]$.

例 12 求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + x + 1} + x]$.

例 13 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x \quad (a > 0)$.

例 14 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)$.

例 15 (1995) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$

例 16 (1988) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}$

例 17 (2003) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

例 18 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \right)$;

例 19 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+2^n+3^n}$;

例 20 设 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

【章节小结】

第二节 连续

一、考试内容

1. 连续的定义: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 称 $f(x)$ 在 x_0 处连续,

左右连续定义: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ 称 $f(x)$ 在 x_0 左连续

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ 称 $f(x)$ 在 x_0 右连续

$f(x)$ 连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 左连续且右连续

2. 间断点及其类型

1) 第一类间断点: 左, 右极限均存在的间断点

可去间断点: 左极限 = 右极限的间断点

跳跃间断点: 左极限 \neq 右极限的间断点

2) 第二类间断点: 左, 右极限中至少有一个不存在的间断点

无穷间断点: $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) \rightarrow \infty$

振荡间断点: $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 振荡

3. 连续函数的性质

- 1) 连续函数的和, 差, 积, 商 (分母不为零) 及复合仍连续性;
- 2) 初等函数在其定义区间内处处连续;
- 3) 闭区间上连续函数的性质

(1) 最值定理: 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上能够取到最大值与最小值, 即 $\exists \xi, \eta \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$, $f(\eta) = \min_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$.

(2) 零点定理: 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且有 $f(a)f(b) < 0$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

(3) 介值定理: 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, M 和 m 分别为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值, 若 c 满足 $m \leq c \leq M$, 则 $\exists \xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = c$.

二、典型例题

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} \cos x}{\arctan(1+x)}$.

例 2 (2002) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}}, & x < 0 \\ ae^{2x}, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

例 3 求函数 $f(x) = \frac{x}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的间断点并指出其类型.

例 4 证明方程 $x = a \sin x + b$ ($a > 0, b > 0$)，至少有一个正根，且它不超过 $a + b$ 。

例 5 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，且 $f(0) = 0$ ， $f(1) = 1$ ，证明存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f(\xi) = 1 - \xi$ 。

例 6 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续，且 $f(0) + f(1) + f(2) = 3$ ，求证存在 $\xi \in [0, 2]$ ，使 $f(\xi) = 1$

【章节小结】

第二章 导数与微分

【考试内容】

导数和微分的概念 导数的几何意义和物理意义(经济意义) 函数的可导性与连续性之间的关系 平面曲线的切线和法线 导数和微分的四则运算 基本初等函数的导数 复合函数、反函数、隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法 高阶导数 一阶微分形式的不变性

【考试要求】

1. 理解导数和微分的概念, 理解导数与微分的关系, 理解导数的几何意义, 会求平面曲线的切线方程和法线方程, 了解导数的物理意义, 会用导数描述一些物理量(了解导数的经济意义含边际与弹性的概念), 理解函数的可导性与连续性之间的关系.
2. 掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则, 掌握基本初等函数的导数公式. 了解微分的四则运算法则和一阶微分形式的不变性, 会求函数的微分.
3. 了解高阶导数的概念, 会求简单函数的高阶导数.
4. 会求分段函数的导数, 会求隐函数和由参数方程所确定的函数以及反函数的导数.

第一节 导数概念

一、考试内容

1. 导数定义:
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

左导数:
$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

右导数:
$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

可导 \Leftrightarrow 左右导数都存在且相等.

2. 导数的几何意义

如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处导数 $f'(x_0)$ 存在, 则在几何上 $f'(x_0)$ 表示曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率.

切线方程: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

法线方程: $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) (f'(x_0) \neq 0)$

3. 连续、可导之间的关系

可导一定连续, 连续不一定可导 (如 $y = |x|$ 在 $x = 0$ 处).

二、典型例题

例 1 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某领域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导的一个充分条件是 ()

(A) $\lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[f(a + \frac{1}{h}) - f(a) \right]$ 存在.

(B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + 2h) - f(a + h)}{h}$ 存在.

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a - h)}{2h}$ 存在.

(D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a - h)}{h}$ 存在.

例 2 (2011) 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f(0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$ ()

(A) $-2f'(0)$

(B) $-f'(0)$

(C) $f'(0)$

(D) 0

例 3 (2013 三) 设曲线 $y = f(x)$ 与 $y = x^2 - x$ 在点 $(1, 0)$ 处有公共切线,

$\lim_{n \rightarrow \infty} n f(\frac{n}{n+2}) =$ _____.

例 4 利用导数定义证明下列结论

- (1) (2015) 已知 $u(x), v(x)$ 均可导, 则 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;
- (2) 可导的奇 (偶) 函数 $f(x)$, 其导函数 $f'(x)$ 为偶 (奇) 函数;
- (3) 可导的周期函数 $f(x)$, 其导函数 $f'(x)$ 为同周期的周期函数.

例 5 (1999) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ x^2 g(x), & x \leq 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 为有界函数, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处()

- (A) 极限不存在
- (B) 极限存在但不连续
- (C) 连续但不可导
- (D) 可导

例 6 (2012) 设 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

例 7 设 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{2x} = -2$, 求曲线上 $y = f(x)$ 在点 $(1, 2)$ 处的法线方程.

例 8 (2004) 曲线 $y = \ln x$ 上与 $x + y = 1$ 垂直的切线方程为 .

【章节小结】

第二节 导数的计算

一、考试内容

1. 初等函数的导数

- (1) 基本初等函数的导数
- (2) 四则运算求导法则
- (3) 复合函数求导法则

设 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, 如果 $\varphi(x)$ 在 x 处可导, $f(u)$ 在对应点 u 处可导,

则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导, 且有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = f'[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

对应地 $dy = f'(u)du = f'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$, 由于公式 $dy = f'(u)du$ 不管 u 是自变量或中间变量都成立, 因此称为一阶微分形式不变性.

2. 反函数的导数

设 $y = f(x)$ 的反函数 $x = g(y)$, 两者皆可导, 且 $f'(x) \neq 0$

$$\text{则 一阶导数 } \frac{dx}{dy} = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'[g(y)]} \quad (f'(x) \neq 0)$$

$$\begin{aligned} \text{二阶导数 } \frac{d^2x}{dy^2} &= g''(y) = \frac{d[g'(y)]}{dy} = \frac{d\left[\frac{1}{f'(x)}\right]}{dx} \cdot \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \\ &= -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3} = -\frac{f''[g(y)]}{\{f'[g(y)]\}^3} \quad (f'(x) \neq 0) \end{aligned}$$

3. 分段函数的导数

分段点处的导数务必用 (左右) 导数的定义

4. 对数求导法

先对所给函数式的两边取对数, 然后再用隐函数求导方法得出导数 y' .

对数求导法主要用于:

- (1) 幂指函数求导数
- (2) 多个函数连乘除或开方求导数

关于幂指函数 $y = [f(x)]^{g(x)}$ 常用的一种方法 $y = e^{g(x)\ln f(x)}$ 这样就可以直接用复合函数运算法则进行.

5. 隐函数求导法

设 $y = y(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定, 求 y' 的方法如下:

把 $F(x, y) = 0$ 两边的各项对 x 求导, 把 y 看作中间变量, 用复合函数求导公式计算, 然后再解出 y' 的表达式 (一般表达式里面含有 x, y 两变量).

6. 参数方程求导法 (数学一、二)

设 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 确定函数 $y = y(x)$, 其中 $\varphi'(t), \psi'(t)$ 存在, 且 $\varphi'(t) \neq 0$,

则 一阶导数 $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad (\varphi'(t) \neq 0)$

$$\text{二阶导数 } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left[\frac{dy}{dx}\right]}{dx} = \frac{d\left[\frac{dy}{dx}\right]}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

7. 简单函数的高阶导数

常用方法:

- (1) 代公式 (直接或间接);
- (2) 求一阶 y' 、二阶 y'' , y''' 归纳 n 阶导数 $y^{(n)}$;
- (3) 利用泰勒级数 (求某一点的高阶导数);

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

常用公式:

$$(1) (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(2) (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(3) (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

二、典型例题

例 1 设 $y = a^{a^a} + x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}, (a > 0)$, 求 y' .

例 2 (2021) 若 $y = \cos e^{-\sqrt{x}}$, 则 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1} =$ _____.

例 3 已知 $y = f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$, $f'(x) = \arctan x^2$, 则 $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} =$ _____.

例 4 设 $y = (1+x^2)^{\sin x}$, 求 y' .

例 5 设 $y = \sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)}{x(1+x^2)}}$, 求 y' .

解 $\ln|y| = \frac{1}{3}[\ln|x+1| + \ln|x+2| - \ln|x| - \ln(1+x^2)]$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} - \frac{2x}{1+x^2} \right].$$

$$y' = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)}{x(1+x^2)}} \left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} - \frac{2x}{1+x^2} \right]$$

例 6 (2019) 已知 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0 \\ xe^x + 1, & x \leq 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

例 7 设函数 $y = y(x)$ 由 $y - xe^y = 1$ 所确定, 试求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$.

例 8 证明 $\frac{d^2 x}{dy^2} = -\frac{y''}{(y')^3}$.

例 9 (2015 数一、二) 已知 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = 3t + t^3 \end{cases}$, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1} =$ _____.

例 10 设 $f(x) = \frac{1}{1+x}$, 求 $f^{(n)}(0)$.

例 11 (2015) 求函数 $f(x) = x^2 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$.

【章节小结】

第三节 微分

一、考试内容

1. 微分概念

1) 定义: 若 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$, 则 $f(x)$ 称在 x_0 处可微.

$$dy|_{x=x_0} = f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x_0)dx$$

2) 几何意义

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 x_0 处相应于自变量增量 Δx 的纵坐标 $f(x_0)$ 的增量, 微分 $dy|_{x=x_0}$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 处切线的纵坐标相应的增量.

2. 可导与微分的关系

$f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处可导.

3. 微分的计算

方法一 $dy|_{x=x_0} = f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x_0)dx$

$dy = f'(x)dx$ 所以导数 $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ 也称为微商, 就是微分之商的含义.

方法二 微分的运算法则与一阶微分的不变性

二、典型例题

例 1 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 当自变量 x 由 x_0 增加到 $x_0 + \Delta x$ 时, 记 Δy 为 $f(x)$ 的增量, dy 为 $f(x)$ 的微分, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y - dy}{\Delta x}$ 等于 ()

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) ∞

例 2 (2000) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $2^{xy} = x + y$ 所确定, 则 $dy|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【章节小结】

第三章 微分中值定理与导数的应用

【考试内容】

微分中值定理 洛必达 (L'Hospital) 法则 函数单调性的判别 函数的极值 函数图形的凹凸性、拐点及渐近线 函数图形的描绘 函数的最大值与最小值 弧微分 曲率的概念 曲率圆与曲率半径

【考试要求】

1. 理解并会用罗尔 (Rolle) 定理、拉格朗日 (Lagrange) 中值定理和泰勒 (Taylor) 定理, 了解并会用柯西 (Cauchy) 中值定理.
 2. 掌握用洛必达法则求未定式极限的方法.
 3. 理解函数的极值概念, 掌握用导数判断函数的单调性和求函数极值的方法, 掌握函数最大值和最小值的求法及其应用.
 4. 会用导数判断函数图形的凹凸性(注: 在区间 (a, b) 内, 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数. 当 $f''(x) > 0$ 时, $f(x)$ 的图形是凹的; 当 $f''(x) < 0$ 时, $f(x)$ 的图形是凸的), 会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线, 会描绘函数的图形.
 5. 了解曲率、曲率圆和曲率半径的概念, 会计算曲率和曲率半径.
- (以上为数学一、二的大纲要求, 数学三的大纲要求有些许的区别)

第一节 微分中值定理

一、考试内容

1. 罗尔定理

(1) 定理: 如果函数 $f(x)$ 满足

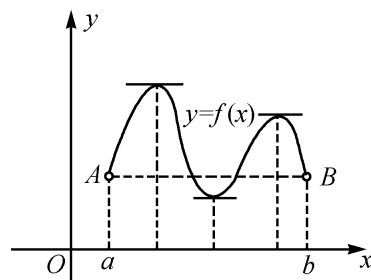
①在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

②在开区间 (a, b) 内可导;

③在区间端点处的函数值相等, $f(a) = f(b)$;

那么在 (a, b) 内至少存在一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$.

(2) 几何意义: 曲线 $y = f(x)$ 在点 A 和点 B 之间(不包括点 A 和点 B)至少有一点, 它的切线平行于 x 轴.



2. 拉格朗日中值定理

(1) 定理: 如果函数 $f(x)$ 满足

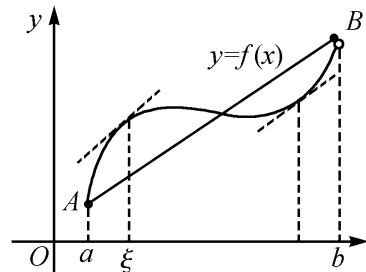
①在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

②在开区间 (a, b) 内可导;

在 (a, b) 内至少存在一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使等式

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \text{ 成立.}$$

(2) 几何意义: 曲线 $y = f(x)$ 在 A, B 之间(不包括点 A 和点 B), 至少有一点, 它的切线与割线 AB 是平行的



3. 柯西中值定理

(1) 定理: 如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足

①在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

②在开区间 (a, b) 内可导;

③对任一 $x \in (a, b)$, $F'(x) \neq 0$;

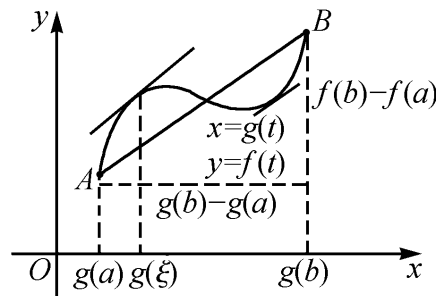
那么在 (a, b) 内至少存在一点 $\xi (a < \xi < b)$, 使等式

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \text{ 成立.}$$

(2) 几何意义: 考虑曲线 AB 的参数方程

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in [a, b], \text{ 点 } A(g(a), f(a)), \text{ 点 } B(g(b), f(b)).$$

曲线在 AB 上是连续曲线, 除端点外是光滑曲线, 那么在曲线上至少有一点, 它的切线平行于割线 \overline{AB} .



4. 泰勒中值定理

(1) 泰勒中值定理

设 $f(x)$ 在含有 x_0 的某开区间 I 内有直到 $(n+1)$ 阶导数, 则对于任一 $x \in I$, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

其中, 皮亚诺型余项: $R_n(x) = O[(x-x_0)^n]$;

拉格朗日型余项: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$, ξ 是 x_0 与 x 间的某个值.

(2) 麦克劳林公式

设 $f(x)$ 在含有 $x=0$ 的某开区间 I 内有直到 $(n+1)$ 阶导数, 则对于任一 $x \in I$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

其中, 皮亚诺型余项: $R_n(x) = O(x^n)$;

拉格朗日型余项: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$.

(3) 几个常见的麦克劳林公式 (熟记)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

二、典型例题

例 1 设 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, $(0, 3)$ 上可导, 且 $f(0) + f(1) + f(2) = 3$, $f(3) = 1$,

求证: 存在 $\xi \in (0, 3)$, 使 $f'(\xi) = 0$.

例 2 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $f(a) = b$, $f(b) = a$, a 与 b 同号. 求

证: $\exists \xi \in (a, b)$ 使 $f'(\xi) = \frac{-f(\xi)}{\xi}$.

例 3 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$.

求证: $\exists \xi \in (a, b)$ 使 $f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$.

例 4 (2011) 证明对任意的正整数 n , 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$.

例 5 证明 $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$.

例 6 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2 [x + \ln(1-x)]}$.

例 7 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin x^2}$.

例 8 (2015) 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + a \ln(1+x) + bx \sin x}{kx^3} = 1$, 求 a, b, k .

例 9 (2020) 求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) (n \geq 3)$.

【章节小结】

第二节 导数的应用

一、考试内容

1. 单调性

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, (a, b) 内可导, 如果恒有 $f'(x) \geq 0$ (≤ 0), 且导数等于 0 的点只有有限个, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内单调增加 (单调减少).

2. 极值与最值

1) 函数极值的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U^\circ(x_0)$ 内有定义, 如果对去心邻域 $U^\circ(x_0)$ 内的任一点 x , 有 $f(x) < f(x_0)$ (或 $f(x) > f(x_0)$), 那么就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值 (或极小值).

2) 极值的必要条件 (可导条件下): $f'(x_0) = 0$;

3) 极值的充分条件:

(1) 已知 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内连续, 在 $\overset{\circ}{U}(x_0)$ 内可导

若 $f'(x)$ 在 x_0 两侧变号, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值;

若 $f'(x)$ 在 x_0 两侧不变号, 则 $f(x)$ 在 x_0 处无极值;

(2) 若 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值. 当 $f''(x_0) > 0$ 时极小,

当 $f''(x_0) < 0$ 时极大.

注: 极值点(横坐标)除驻点外,还有可能在一阶导数不存在的地方取极值,只能用充分条件(1)来判断.

4) 最值: (1) 求连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最值;

(2) 应用题.

3. 曲线的凹凸性与拐点

1) 曲线的凸凹性

(1) 定义

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续,如果对 I 上任意两点 x_1, x_2 恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是(向上)凹的(或凹弧); 如果恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是(向上)凸的(或凸弧).

(2) 判别法: 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内具有一阶和二阶导数,那么

① 若在 (a, b) 内 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上图形是凹的;

② 若在 (a, b) 内 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上图形是凸的.

(3) 该判别法只是充分条件,并非必要条件.

2) 拐点(坐标)

(1) 定义

设 $y = f(x)$ 在区间 I 上连续,如果点 x_0 为 I 的内点,如果曲线 $y = f(x)$ 在经过 $(x_0, f(x_0))$ 时,曲线的凹凸性改变了,那么就称点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点.

(2) 拐点的求法: 若 $f''(x_0) = 0$ (或 $f''(x_0)$ 不存在但 $f(x)$ 在 x_0 点连续), 则当在 x_0 点的左、右邻域内 $f''(x)$ 异号时, $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一个拐点; 当在 x_0 点的左、右邻域内 $f''(x)$ 同号时, $(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的一个拐点. (完全仿照极值点处理)

4. 渐近线 (水平, 垂直, 斜渐近线).

1) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ (或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$)

那么 $y = A$ 是 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$)

那么 $x = x_0$ 是 $y = f(x)$ 的垂直渐近线.

3) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a, \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$. (或 $x \rightarrow -\infty, x \rightarrow +\infty$)

那么 $y = ax + b$ 是 $y = f(x)$ 的斜渐近线.

注: (1) 渐近线的定义单侧、双侧极限均可, 我们在求解的时候面临一个选择, 如何选择呢?

(2) 水平和斜渐近线都是在自变量同一趋势下定义的不同结果, 根据极限存在的唯一性可知, 水平与斜渐近线是不能共存的, 两者加起来最多 2 条.

5. 曲率与曲率半径 (数学一、二): 曲率 $K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$; (其中 $y = y(x)$)

$$K = \frac{|y''x' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}; \quad (\text{其中 } x = x(t), y = y(t))$$

$$\text{曲率半径 } R = \frac{1}{K}$$

6. 函数作图

函数作图的一般步骤

(1) 求出 $y = f(x)$ 的定义域, 判定函数的奇偶性和周期性.

(2) 求出 $f'(x)$, 令 $f'(x) = 0$ 求出驻点, 确定导数不存在的点, 再根据 $f'(x)$ 的符号找出函数的单调区间与极值.

(3) 求出 $f''(x)$, 确定 $f''(x)$ 的全部零点及 $f''(x)$ 不存在的点, 再根据 $f''(x)$ 的符号找出曲线的凹凸区间及拐点.

(4) 求出曲线的渐近线.

(5) 将上述“增减、极值、凹凸、拐”等特性综合列表, 必要时可用补充曲线上某些特殊点 (如与坐标轴的交点), 依据表中性态作出函数 $y = f(x)$ 的图形.

二、典型例题

例 1 设 $f(x), g(x)$ 是恒大于零的可导函数, 且

$$f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0, \text{ 则当 } a < x < b \text{ 时, 有 } (\quad)$$

$$(A) f(x)g(b) > f(b)g(x);$$

$$(B) f(x)g(a) > f(a)g(x);$$

$$(C) f(x)g(x) > f(b)g(b);$$

$$(D) f(x)g(x) > f(a)g(a).$$

例 2 证明下列不等式

(1) $e^x > 1+x, x > 0$;

(2) $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$.

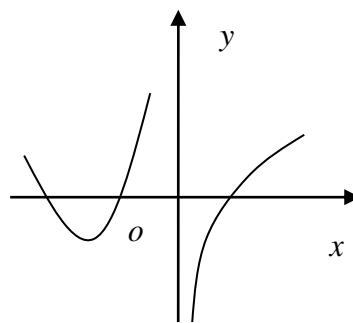
例 3 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} = 1$, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处 ().

- (A) 导数存在且 $f'(a) \neq 0$. (B) 取极大值.
(C) 取极小值. (D) 导数不存在.

例 4 试问 a 为何值时, 函数 $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取极值? 它是极大值还是极小值.

例 5 (2003) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导数的图形如图所示, 则 $f(x)$ 有 ()

- (A) 一个极小值点和两个极大值点;
(B) 两个极小值点和一个极大值点;
(C) 两个极小值点和两个极大值点;
(D) 三个极小值点和一个极大值点.



例 6 (2015) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其 $f''(x)$ 的图形如图所示, 则曲线

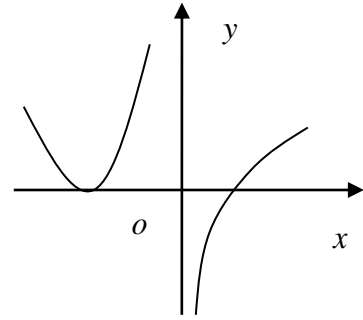
$y = f(x)$ 的拐点的个数为 ().

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3



例 7 (2017) 已知 $y = y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值.

例 8 (2010) 若曲线 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 有拐点 $(-1, 0)$, 求 a, b 的值.

例 9 证明 $x \ln x + y \ln y > (x + y) \ln \frac{x + y}{2}$, $(x > 0, y > 0, x \neq y)$.

例 10 求函数 $f(x) = (x - 1)\sqrt[3]{x^2}$ 在 $[-1, \frac{1}{2}]$ 上的最值.

例 11 (2012) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 的渐近线的条数为 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

例 12 (2007) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 的渐近线的条数为 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

例 13 作函数 $y = 1 - \frac{2x}{(x-1)^2}$ 的图形.





解: (1) 此函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$;

$$(2) f'(x) = -\frac{2(x+1)}{(x-1)^3}; \quad f''(x) = \frac{4(x+2)}{(x-1)^4}$$

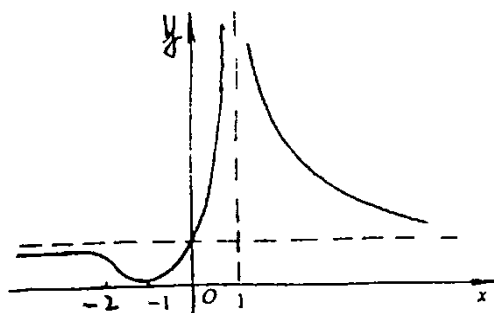
令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -1$; 令 $f''(x) = 0$, 得 $x_2 = -2$

(3) 点 $x_2 = -2$, $x_1 = -1$ 把 $f(x)$ 的定义域分成部分区间 $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$. 考察在每个部分区间内 $f'(x)$ 、 $f''(x)$ 的符号, 并由此确定函数图形的升降与凹凸、极值点与拐点, 填入下表.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	—	—	—	0	+	没定义	—
$f''(x)$	—	0	+	+	+		+

$y = f(x)$ 的图形		拐点		极小			
渐近线	水平： $y = 1$ ； 垂直： $x = 1$						

(4) 计算得 $f(-2) = \frac{5}{9}$, $f(-1) = \frac{1}{2}$; 函数图形与 y 轴的交点为 $(0,1)$; 又图形过点 $(2,5)$, $\left(3, \frac{5}{2}\right)$, $\left(4, \frac{17}{9}\right)$.



由上面得到的各种几何信息，可以画出函数的图形.

【章节小结】

第四章 不定积分

【考试内容】

原函数和不定积分的概念 不定积分的基本性质 基本积分公式 不定积分的换元积分法与分部积分法 有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分

【考试要求】

1. 理解原函数的概念, 理解不定积分的概念.
2. 掌握不定积分的基本公式、性质, 掌握不定积分的换元积分法与分部积分法.
3. 会求有理函数、三角函数有理式和简单无理函数的积分.

(以上为数学一、二的大纲要求, 数学三的大纲要求有些许的区别)

一、考试内容

1. 两个概念: 1) 原函数: $F'(x) = f(x)$

2) 不定积分: $\int f(x) dx = F(x) + C$

2. 基本积分公式

$$(1) \int k dx = kx + C \quad (k \text{ 是常数}), \quad (2) \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1),$$

$$(3) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad (4) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C,$$

$$(5) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad (6) \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$(7) \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad (8) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C,$$

$$(9) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C, \quad (10) \int \sec x \tan x dx = \sec x + C,$$

$$(11) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C \quad (12) \int e^x dx = e^x + C,$$

$$(13) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

(以下为补充的几个积分公式需要大家务必熟记):

$$(14) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$(15) \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

$$(16) \int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C.$$

3. 不定积分的性质

$$1) \left(\int f(x) dx \right)' = f(x), \text{ 或 } \int dF(x) = F(x) + C.$$

$$2) \text{ 设函数 } f(x)、g(x) \text{ 的原函数存在, 则 } \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

$$3) \text{ 设函数 } f(x) \text{ 的原函数存在, } k \text{ 为非零常数, 则 } \int kf(x) dx = k \int f(x) dx.$$

4. 三种基本积分法

1) 直接积分法: 利用恒等变形+积分性质+基本积分表

2) 换元法:

(a) 第一换元法 (凑微分法):

$$\text{若 } \int f(u) du = F(u) + C, \text{ 则 } \int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C$$

常用的几种凑微分形式:

$$(1) \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b) d(ax+b) \quad (a \neq 0)$$

$$(2) \int f(ax^n+b)x^{n-1} dx = \frac{1}{na} \int f(ax^n+b) d(ax^n+b) \quad (a \neq 0, n \neq 0)$$

$$(3) \int f(\ln x) \frac{dx}{x} = \int f(\ln x) d(\ln x)$$

$$(4) \int f\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^2} = - \int f\left(\frac{1}{x}\right) d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(5) \int f(\sqrt{x}) \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \int f(\sqrt{x}) d(\sqrt{x})$$

$$(6) \int f(a^x) a^x dx = \frac{1}{\ln a} \int f(a^x) d(a^x) \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int f(e^x) e^x dx = \int f(e^x) d(e^x)$$

$$(7) \int f(\sin x) \cos x dx = \int f(\sin x) d(\sin x)$$

$$(8) \int f(\cos x) \sin x dx = - \int f(\cos x) d(\cos x)$$

$$(9) \int f(\tan x) \sec^2 x dx = \int f(\tan x) d(\tan x)$$

$$(10) \int f(\cot x) \csc^2 x dx = - \int f(\cot x) d(\cot x)$$

$$(11) \int f(\sec x) \sec x \tan x dx = \int f(\sec x) d(\sec x)$$

$$(12) \int f(\csc x) \csc x \cot x dx = - \int f(\csc x) d(\csc x)$$

$$(13) \int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int f(\arcsin x) d(\arcsin x)$$

$$(14) \int \frac{f(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int f(\arccos x) d(\arccos x)$$

$$(15) \int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2} dx = \int f(\arctan x) d(\arctan x)$$

$$(16) \int \frac{f(\operatorname{arccot} x)}{1+x^2} dx = -\int f(\operatorname{arccot} x) d(\operatorname{arccot} x)$$

(b) 第二换元法:

$$\int f(x) dx \quad \underline{x = \varphi(t)} \quad \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(t) + C = F(\varphi^{-1}(x)) + C$$

①三角代换:

$$\text{i) } \sqrt{a^2 - x^2}, x = a \sin t (a \cos t) \quad \text{ii) } \sqrt{a^2 + x^2}, x = a \tan t \quad \text{iii) } \sqrt{x^2 - a^2}, x = a \sec t$$

②幂代换法: 多用在根号下是一次的 i) 令 $\sqrt[n]{ax+b} = t$ ii) 令 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$

③倒代换: 多用在分子的次数小于分母的次数比较多

④指数代换: 多用在被积函数中含指数函数

3) 分部积分法 $\int u dv = uv - \int v du$ “多适用于两类不同函数相乘”

$$\int p_n(x) e^{\alpha x} dx, \int p_n(x) \sin \alpha x dx, \int p_n(x) \cos \alpha x, \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx,$$

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx, \int p_n(x) \ln x dx, \int p_n(x) \arctan x dx, \int p_n(x) \arcsin x dx$$

5. 两类特殊函数积分

1) 有理函数积分 $\int \frac{R_n(x)}{Q_m(x)} dx$

(1) 部分分式法 (一般方法);

(2) 简单方法 (凑微分降幂);

2) 三角有理式积分 $\int R(\sin x, \cos x) dx$

(1) 万能代换 (一般方法) 令 $\tan \frac{x}{2} = t$ 等四部分构成

(2) 简单方法 (三角变形, 换元, 分部)

二、典型例题

例 1 利用直接积分法计算下列各不定积分

(1) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$

(2) $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$

(3) $\int \tan^2 x dx$

(4) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx$

(5) $\int 2^x (e^x - 5) dx$

例 2 利用换元法计算下列各不定积分

(1) $\int \cos(2x+3) dx$

(2) $\int \frac{1}{1+2x^2} dx$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx$

(4) $\int \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} dx$

(5) $\int x(1+x^2)^{50} dx$

(6) $\int \frac{x^3}{(1+x^4)^2} dx$

(7) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

(8) $\int \cos^4 x dx$

(9) $\int \sec x dx$

(10) $\int \sec^4 x dx$

(11) $\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx$

(12) $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$

$$(13) \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$(14) \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx$$

$$(15) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$(16) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$$

$$(17) \int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$$

$$(18) \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$$

例 3 利用分部积分法计算下列各不定积分

$$(1) \int \arctan x dx$$

$$(2) \int x \cos x dx$$

$$(3) \int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$(4) \int x \arccot x dx$$

$$(5) \int e^x \sin x dx$$

例 4 两类特殊函数的不定积分

$$(1) \int \frac{2x+1}{x^2-2x-3} dx$$

$$(2) \int \frac{2x+1}{x^2-2x+1} dx$$

$$(3) \int \frac{2x+1}{x^2-2x+3} dx$$

$$(4) \int \frac{1}{(1+x)(x^2-1)} dx$$

$$(5) \int \frac{3x+2}{x(x^2+1)} dx$$

$$(6) (2019) \int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 令 } \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} \\ &= \frac{A(x-1)(x^2+x+1) + B(x^2+x+1) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} \end{aligned}$$

$$\text{则 } 3x+6 = A(x-1)(x^2+x+1) + B(x^2+x+1) + (Cx+D)(x-1)^2$$

$$\text{解得 } A=-2, B=3, C=2, D=1$$

$$\begin{aligned} \text{故原式} &= -2 \int \frac{1}{x-1} dx + 3 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx \\ &= -2 \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \ln(x^2+x+1) + C \end{aligned}$$

$$(7) \int \frac{dx}{1 + \cos x}$$

$$(8) \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$$

【章节小结】

第五章 定积分

【考试内容】

定积分的概念和基本性质 定积分中值定理 积分上限的函数及其导数 牛顿-莱布尼茨 (Newton-Leibniz) 公式 定积分的换元积分法与分部积分法 反常 (广义) 积分

【考试要求】

1. 理解定积分的概念.
2. 掌握定积分的性质及定积分中值定理, 掌握换元积分法与分部积分法.
3. 理解积分上限的函数, 会求它的导数, 掌握牛顿-莱布尼茨公式.
4. 理解反常积分的概念, 了解反常积分收敛的比较判别法, 会计算反常积分.

第一节 定积分的概念与性质

一、考试内容

1. 定积分的定义

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 在 $[a, b]$ 中任意插入若干个分点把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

各个小区间的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \cdots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$), 作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ ($i=1, 2, \cdots, n$), 并作出和

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

记 $\lambda = \max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$, 如果不论对 $[a, b]$ 怎样划分, 也不论在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上 ξ_i 怎样选取, 只要当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 和 S 总趋于确定的极限 I , 那么称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 叫做被积函数, $f(x)dx$ 称为被积表达式, x 称为积分变量, a 叫做积分下限, b 叫做积分上限, $[a, b]$ 叫做积分区间.

2. 可积充分条件

- (1) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.
 (2) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

3. 定积分的几何意义

函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分是曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = a, x = b, x$ 轴所围成的曲边梯形面积的代数和.

- (1) $f(x) \geq 0$, $\int_a^b f(x) dx$ 表示曲边梯形面积;
 (2) $f(x) < 0$, $\int_a^b f(x) dx$ 表示曲边梯形面积的相反数.

4. 定积分的性质

(1) 约定

$$\textcircled{1} \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx, \text{ 由此可以得到 } \int_a^a f(x) dx = 0$$

(2) 定积分的性质

$$\textcircled{1} \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

$$\textcircled{2} \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ 是常数}).$$

$$\textcircled{3} \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

$$\textcircled{4} \text{ 如果在区间 } [a, b] \text{ 上 } f(x) \equiv 1, \text{ 则 } \int_a^b f(x) dx = b - a.$$

$$\textcircled{5} \text{ 如果在区间 } [a, b] \text{ 上, } f(x) \geq 0, \text{ 则 } \int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (a < b).$$

$$\text{推论 1: 如果在区间 } [a, b] \text{ 上, } f(x) \leq g(x), \text{ 则 } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (a < b).$$

$$\text{推论 2: } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

$\textcircled{6}$ 设 M 和 m 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值及最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

以上性质要求各定积分存在!

$\textcircled{7}$ 积分中值定理

如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上连续, 则在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

二、典型例题

例 1 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2}$.

例 2 (2012) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{1+n^2} + \frac{1}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right)$.

例 3 (2017) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$.

例 4 (2000) 计算 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx$.

例 5 计算 $\sin x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的平均值.

【章节小结】

第二节 微积分基本公式

一、考试内容

1. 积分上限的函数

(1) 积分上限的函数的定义

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则任取 $x \in [a, b]$, 定积分 $\int_a^x f(t)dt$ 有一个对应值, 所以它在区间 $[a, b]$ 上定义了一个函数, 记 $\Phi(x)$, $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ ($a \leq x \leq b$). 这个函数称为积分上限函数.

(2) 连续性: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上连续.

(3) 可导性: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上可导且

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$$

(4) 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 就是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数.

2. 变限积分函数求导问题

$$(1) \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt\right)' = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\phi(x))\phi'(x)$$

$$(2) \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} [f(x)+g(t)]h(t)dt\right)' \quad \text{如} \int_0^x (t-x)f(t)dt$$

$$(3) \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(g(x,t))dt\right)' \quad \text{如} \int_0^x f(x-t)dt$$

注: 被积函数要求连续, 变上下限函数要求可导. 变限积分函数的求导是考研的重中之重, 务必掌握上述三种形式的求导问题.

3. 变限积分函数的奇偶性

(1) 若 $f(x)$ 为连续奇函数, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 为偶函数.

(2) 若 $f(x)$ 为连续偶函数, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 为奇函数.

4. 牛顿-莱布尼茨公式

如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

5. 积分中值定理另一形式

如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上连续, 则在 (a, b) 上至少存在一点 ξ 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

二、典型例题

例 1 (2008) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明 $\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

例 2 求下列函数导数

(1) $f(x) = \int_0^{x^2} \ln(2+t)dt$

(2) $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ (2010)

(3) $f(x) = \int_0^x \sin(x-t)^2 dt$

例 3 (1998) $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x tf(x^2 - t^2)dt = (\quad)$.

A. $xf(x^2)$

B. $-xf(x^2)$

C. $2xf(x^2)$

D. $-2xf(x^2)$

例 4 求下列未定式的极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^4} dt}{1 - \cos x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t) \ln(1+t) dt}{(\tan x - \sin x) \cos x}$$

例 5 (2005) 已知函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt + xf(x)}$.

【章节小结】

第三节 定积分的计算

一、考试内容

1. 牛顿-莱布尼兹公式 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

2. 定积分的换元法

假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 函数 $x = \varphi(t)$ 满足条件:

① $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;

② $\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ (或 $[\beta, \alpha]$) 上具有连续导数, 且其值域 $R_\varphi = [a, b]$, 则有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

3. 定积分的分部积分法 $\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx$

4. 计算技巧

(1) 利用几何意义

(2) 利用对称区别 (特别奇偶性)

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad (f(x) \text{ 是奇函数}).$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad (f(x) \text{ 是偶函数}).$$

(3) 利用周期性

$$\text{设 } f(x) \text{ 以 } T \text{ 为周期, 对于任意的 } a, \text{ 则 } \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx$$

(4) 利用公式

$$\text{i) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数} \\ \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$\text{ii) } \int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$$

等等……

二、典型例题

例 1 利用常规方法计算下列定积分

$$(1) \int_0^2 \max\{x, x^2\} dx$$

$$(2) \int_0^1 \frac{x}{e^x} dx$$

$$(3) \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$(4) \text{ 计算 } \int_0^2 f(x-1) dx, \text{ 其中 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^x}, & x < 0 \\ \frac{1}{1+x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(5) \text{ 计算 } \int_0^1 f(x) dx, \text{ 其中 } f(x) = \frac{1}{1+x^2} + x^3 \int_0^1 f(x) dx.$$

例 2 利用技巧计算下列定积分

(利用几何意义、对称区间特别是奇偶性、周期函数, 三角函数相关定积分公式等计算技巧)

$$(1) (2017) \quad I = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2}) dx$$

$$(2) (1996) \quad I = \int_{-1}^1 \frac{2x^2 + \sin x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(3) \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^4 x dx$$

$$(4) \quad I = \int_0^{\pi} \sin^5 x dx$$

$$(5) \quad I = \int_0^{\pi} \cos^5 x dx$$

$$(6) \quad I = \int_0^{\pi} x \cos^2 x dx$$

【章节小结】

第四节 反常积分

一、考试内容

1. 无穷限的反常积分的定义

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 取 $t > a$, 如果极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx$ 存在, 则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的反常积分, 记作 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, 即 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx$. 这时, 也称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛; 如果上述极限不存在, 则函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 就没有意义, 习惯上称为反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散, 这时记号 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 就不再表示数值了.

类似地, 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, b]$ 上连续, 取 $t < b$, 如果极限 $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$ 存在, 则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, b]$ 上的反常积分, 记作 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$, 即 $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$. 这时, 也称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 收敛; 如果上述极限不存在, 这时称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ 发散.

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 如果反常积分 $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$ 和 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 均收敛, 则称上述两反常积分之和为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的反常积分, 记作 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, 即 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 f(x)dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f(x)dx$. 这时也称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛; 否则就称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

上述积分统称为无穷限的反常积分.

常用结论: $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \Rightarrow \begin{cases} P > 1 & \text{收敛} \\ P \leq 1 & \text{发散} \end{cases}, (a > 0)$

2. 无界函数的反常积分的定义

(1) 瑕点

如果函数 $f(x)$ 在点 a 的任一邻域都无界, 那么点 a 称为函数 $f(x)$ 的瑕点 (也称为无界间断点). 无界函数的反常积分又称为瑕积分.

(2) 无界函数的反常积分的定义

设函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上连续, 点 a 为 $f(x)$ 的瑕点. 取 $t > a$, 如果极限

$\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx$ 存在, 则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上的反常积分, 仍然记为 $\int_a^b f(x)dx$, 即 $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx$.

这时也称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛. 如果上述极限不存在, 则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

类似地, 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上连续, 点 b 为 $f(x)$ 的瑕点. 取 $t < b$, 如果极限

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上的反常积分, 仍然记为 $\int_a^b f(x)dx$, 即 $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx$. 这时也称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛. 如果上述极限不存在, 则称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上除 $c (a < c < b)$ 点外连续, 点 c 为 $f(x)$ 的瑕点. 如果两个反常积分 $\int_a^c f(x)dx$ 与 $\int_c^b f(x)dx$ 都收敛, 则定义

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x)dx.$$

否则, 就称反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 发散.

$$\text{常用结论: } \int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx \Rightarrow \begin{cases} P < 1 & \text{收敛} \\ P \geq 1 & \text{发散} \end{cases}$$

3. 无穷限的反常积分的审敛法

定理 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$. 若函数 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

定理 2 (比较审理原理) 设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续. 如果 $0 \leq f(x) \leq g(x) (a \leq x < +\infty)$, 并且 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛; 如果 $0 \leq g(x) \leq f(x) (a \leq x < +\infty)$, 并且 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也发散.

定理 3 (比较判别法 1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续 ($a > 0$), 且 $f(x) \geq 0$.

如果存在常数 $M > 0$ 及 $p > 1$, 使得 $f(x) \leq \frac{M}{x^p} (a \leq x < +\infty)$, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

收敛; 如果存在常数 $N > 0$, 使得 $f(x) \geq \frac{N}{x} (a \leq x < +\infty)$, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

定理 4 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续. 如果反常积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛.

4. 无界函数的反常积分的审敛法

同上, 请同学们类似的写出!

二、典型例题

例1 计算下列广义积分

$$(1) (2014) \int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx$$

$$(2) (2021) \int_{\sqrt{5}}^5 \frac{x}{\sqrt{|x^2 - 9|}} dx$$

例 2 (2019) 下列反常积分发散的是 ()

$$(A) \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$$

$$(B) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$(C) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$$

$$(D) \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$

例 3 (2016) 判断下列反常积分的敛散性

$$(1) \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^x dx \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$$

例 4 下列命题正确的是 ()

A 因为 $\frac{x}{1+x^2}$ 是奇函数, 所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = 0$

B $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sec^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2+\tan^2 x} d \tan x = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} \Big|_0^{\pi} = 0$

C 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $f(x)$ 是奇函数, 所以 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$

D $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2$

例 5 判断下列反常积分的敛散性

(1) $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$

(2) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x} dx$

(3) $\int_0^1 \ln^2 x dx$

(4) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{x^3}} dx$

【章节小结】

第六章 定积分的应用

【考试内容】

定积分的应用

【考试要求】

(数学一二) 掌握用定积分表达和计算一些几何量与物理量 (平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、压力、质心、形心等) 及函数的平均值.

(数学三) 会利用定积分计算平面图形的面积、旋转体的体积和函数的平均值, 会利用定积分求解简单的经济应用问题.

一、考试内容

1. 平面图形面积

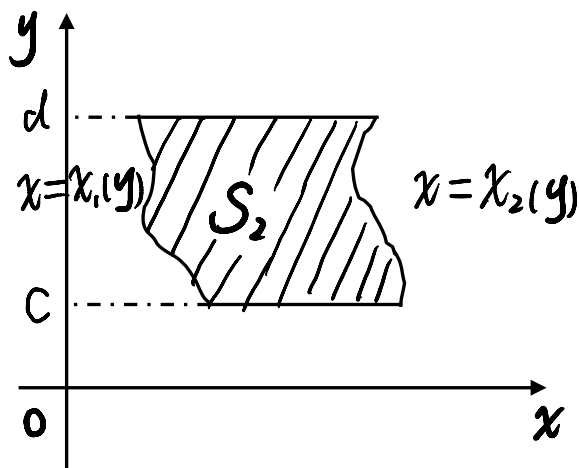
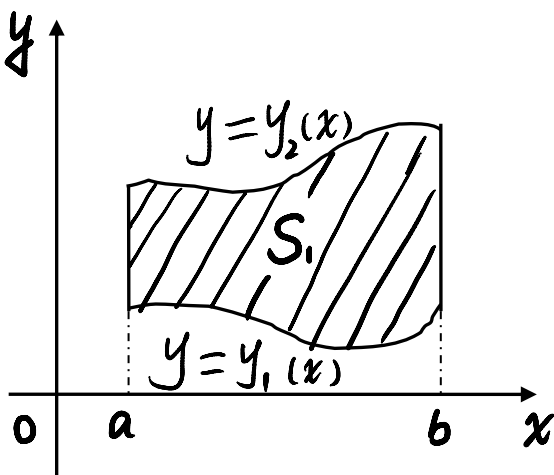
(1) 直角坐标系

$$\text{模型 I} \quad S_1 = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)] dx$$

$$\text{其中 } y_2(x) \geq y_1(x), \quad x \in [a, b]$$

$$\text{模型 II} \quad S_2 = \int_c^d [x_2(y) - x_1(y)] dy$$

$$\text{其中 } x_2(y) \geq x_1(y), \quad y \in [c, d]$$



注: 复杂图形分割为若干个小图形, 使其中每一个符合模型 I 或模型 II 加以计算, 然后再相加.

(2) 极坐标系

$$\text{模型 I} \quad S_1 = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta$$

$$\text{模型 II } S_2 = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)] d\theta$$

(3) 参数形式表出的曲线所围成的面积 (数学一、二)

设曲线 C 的参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, (\alpha \leq t \leq \beta) \varphi(\alpha) = a, \psi(\beta) = b, \varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$

(或 $[\beta, \alpha]$) 上有连续导数, 且 $\varphi'(t)$ 不变号, $\psi(t) \geq 0$ 且连续, 则曲边梯形面积 (曲线 C 与直线 $x = a, x = b$ 和 x 轴所围成)

$$S = \int_a^b y dx = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt$$

2. 平面曲线的弧长 (数学一、二)

(1) 直角坐标系

设光滑曲线 $y = y(x), (a \leq x \leq b)$ [也即 $y(x)$ 有连续的导数]

$$\text{弧长 } l = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

而 $ds = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$ 也称为弧微分

(2) 极坐标系

设光滑曲线 $r = r(\theta), (\alpha \leq \theta \leq \beta)$ [$r(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续导数]

$$\text{弧长 } l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[r'(\theta)]^2 + [r(\theta)]^2} d\theta$$

(3) 参数方程所表曲线的弧长

设光滑曲线 $C \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$ [$x(t), y(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的导数]

$$\text{曲线 } C \text{ 的弧长 } l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

注: 定积分中常用的几类特殊曲线

(1) 圆: 直角坐标方程 $L: x^2 + y^2 = a^2$, 极坐标形式为 $L: r = a$;

$$L: x^2 + y^2 = 2ax, \quad L: r = 2a \cos \theta;$$

$$L: x^2 + y^2 = 2ay, \quad L: r = 2a \sin \theta;$$

(2) 摆线 L (数学一二): $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases};$

(3) 心形线 $L: r = a(1 + \cos \theta) (a > 0);$

(4) 星形线 L (数学一二): $\begin{cases} x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases}, x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$

(5) 伯努利双纽线 L : $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), r^2 = a^2 \cos 2\theta.$

3. 特殊的空间图形的体积 (一般体积要用二重积分)

(1) 已知平行截面面积的立体体积

设空间一个立体由一个曲面和垂直于 z 轴两平面 $z = c$ 和 $z = d$ 所围成, z 轴每一点 $z(c \leq z \leq d)$ 且垂直于 z 轴的立体截面的面积 $S(z)$ 为已知的连续函数, 则立体体积

$$V = \int_c^d S(z) dz$$

(2) 绕坐标轴旋转的旋转体的体积

① 平面图形由曲线 $y = y(x) (\geq 0)$ 与直线 $x = a$, $x = b$ 和 x 轴围成

绕 x 轴旋转一周的体积 $V_x = \pi \int_a^b y^2(x) dx$

绕 y 轴旋转一周的体积 $V_y = 2\pi \int_a^b xy(x) dx$

② 平面图形由曲线 $x = x(y) (\geq 0)$ 与直线 $y = c$, $y = d$ 和 y 轴围成

绕 y 轴旋转一周的体积 $V_y = \pi \int_c^d x^2(y) dy$

绕 x 轴旋转一周的体积 $V_x = 2\pi \int_c^d yx(y) dy$

4. 绕坐标轴旋转的旋转曲面的面积 (数学一、二)

设平面曲线 $C = \widehat{AB}$ 位于 x 轴上方, 方程为 $y = y(x) (a \leq x \leq b)$, 它绕 x 轴一周所得旋转曲面的面积

$$S = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

5. 物理应用 (数学一、二)

(1) 变力做功; (2) 引力; (3) 压力.

二、典型例题

例 1 (2014) 求由 $xy+1=0$ 与 $y+x=0$ 及 $y=2$ 所围成有界区域的面积.

例 2 求 $l:r^2=a^2\cos 2\theta$ 与 x 轴在第一象限所围成的面积.

例 3 (2011) 曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$, 直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为 _____.

例 4 (2003) 过原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴所围成的平面图形 D.

(1) 求 D 的面积;

(2) 求 D 绕 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

(2) 答案 $V=\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3)$

例 5 (数一、二练习) 设星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ 求:

- 1) 它所用的面积;
- 2) 它的周长;
- 3) 它绕 x 轴旋转而成旋转体的体积和表面积.

解: 1) 面积:

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^a y dx = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a \sin^3 t (-3a \sin t \cdot \cos^2 t) dt \\ &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 (\sin^4 t - \sin^6 t) dt = \frac{3\pi a^2}{8} \end{aligned}$$

$$2) \text{ 弧长: } L = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \sin t \cdot \cos t dt = 6a$$

$$3) \text{ 体积: } V_x = 2 \int_0^a \pi y^2 dx = 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t (1 - \sin^2 t) dt = \frac{32}{105} \pi a^3$$

$$\text{旋转体表面积: } S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi y \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = 12\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt = \frac{12}{5} \pi a^2$$

例 6 (数一、二练习) 一容器由 $y = x^2$ 绕 y 轴旋转而成,其容积为 $72\pi m^3$,其中盛满水,现将水从容器中抽出 $64\pi m^3$,问需作多少功?

解 设容器深度为 h , 首先建立容积与深度 h 的关系

$$dV = \pi x^2 dy = \pi y dy, \quad V = \pi \int_0^h y dy = \frac{\pi}{2} h^2$$

$$\text{当 } V = 72\pi \text{ 时, } 72\pi = \frac{\pi}{2} h^2, \quad h = 12$$

$$\text{当 } V = 72\pi - 64\pi = 8\pi \text{ 时, } 8\pi = \frac{\pi}{2} h^2, \quad h = 4$$

$$dW = \rho g (12 - y) \pi y dy, \quad W = \rho g \pi \int_4^{12} y(12 - y) dy = \frac{640}{3} \pi \rho g.$$

【章节小结】

第七章 常微分方程

【考试内容】

常微分方程的基本概念 变量可分离的微分方程 齐次微分方程 一阶线性微分方程 可降阶的高阶微分方程 线性微分方程解的性质及解的结构定理 二阶常系数齐次线性微分方程 高于二阶的某些常系数齐次线性微分方程 简单的二阶常系数非齐次线性微分方程 微分方程的简单应用

【考试要求】

1. 了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念.
2. 掌握变量可分离的微分方程及一阶线性微分方程的解法, 会解齐次微分方程.
3. 会用降阶法解下列形式的微分方程: $y^{(n)} = f(x)$, $y'' = f(x, y')$ 和 $y'' = f(y, y')$.
4. 理解线性微分方程解的性质及解的结构定理.
5. 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法, 并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程.
6. 会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程.
7. 会用微分方程解决一些简单的应用问题.

(以上为数学二的大纲; 数学三的大纲去掉 3, 并增加一阶常系数线性差分方程的求解要求; 数学一的大纲增加了伯努利方程与欧拉方程的求解要求.)

一、考试内容

1. 基本概念

(1) 常微分方程

(2) 微分方程的阶

微分方程中未知函数的导数的最高阶数称为该微分方程的阶

(3) 微分方程的解、通解和特解

满足微分方程的函数称为微分方程的解;

通解就是含有独立常数的个数与方程的阶数相同的解;

(4) 微分方程的初始条件

要求自变量取某定值时, 对应函数与各阶导数取指定的值, 这种条件称为初始条件, 满足初始条件的解称为满足该初始条件的特解.

(5) 线性微分方程

如果未知函数和它的各阶导数都是一次项, 而且它们的系数只是自变量的函数或常数, 则称这种微分方程为线性微分方程. 不含未知函数和它的导数的项称为自由项, 自由项为零的线性方程称为线性齐次方程; 自由项不为零的方程为线性非齐次方程.

2. 一阶方程

(1) 分离变量 $y' = f(x)g(y)$

(2) 齐次 $y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$

令 $\frac{y}{x} = u.$

(3) 线性 $y' + P(x)y = Q(x)$

通解: $y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$ (熟记)

(4) 伯努利 (数一) $y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha$ ($\alpha \neq 0, 1$), 令 $y^{1-\alpha} = u$.

(5) 全微分 (数一)

● 方程形式: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, 满足条件 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

● 解法: 上述全微分方程通解为 $u(x, y) = C$, 求 $u(x, y)$ 的常用方法:

① 凑全微分法: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y)$, 利用一些二元函数的全微分公式, 有助于方程的求解.

② 特殊路径积分法: $u(x, y) = u(x_0, y_0) + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$
 $= u(x_0, y_0) + \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy.$

③ 偏积分法: 由 $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ 得 $u(x, y) = \int P(x, y)dx + C(y),$

对 y 求导, 得 $Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int P(x, y)dx \right] + C'(y)$, 求出 $C'(y)$, 然后积分可得.

2. 可降阶方程: (数一、二)

1) $y'' = f(x)$

2) $y'' = f(x, y')$ 令 $y' = P, y'' = \frac{dP}{dx}$

3) $y'' = f(y, y')$ 令 $y' = P, y'' = P \frac{dP}{dy}$

3. 高阶线性方程:

(1) 变系数: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 非齐次

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 齐次

解的结构 ① 齐次通解 $= c_1 y_1 + c_2 y_2$, 其中 y_1, y_2 为齐次两线性无关特解

② 非齐次通解 = 齐次通解 + 非齐次特解

③ 非齐次特解 I — 非齐次特解 II = 齐次特解

④ 叠加原理

(2) 常系数:

① 齐次 $y'' + py' + qy = 0$

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$

设 r_1, r_2 是特征方程两个根

i 不等实根: $r_1 \neq r_2$, $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

ii 相等实根: $r_1 = r_2 = \rho$, $y = e^{\rho x} (C_1 + C_2 x)$;

iii 共轭复根: $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$;

(推导需要欧拉公式, 大家记住就好, 另外欧拉公式可以推和差化积 (积化和差) 公式)

② 非齐次 $y'' + py' + qy = f(x)$

1° $f(x) = P_n(x)e^{ux}$

令 $y^* = x^k Q_n(x)e^{ux}$ k 等于 u 作为特征方程根的重数.

2° $f(x) = e^{\alpha x} [P_l(x) \cos \beta x + P_m(x) \sin \beta x]$

令 $y^* = x^k e^{\alpha x} [Q_n(x) \cos \beta x + W_n(x) \sin \beta x]$. $n = \max\{l, m\}$

3° 上面两种情形的组合: 利用叠加原理.

(3) 欧拉方程 (仅数一要求)

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

令 $x = e^t$, $x^k y^{(k)} = D(D-1) \cdots (D-k+1)y$

4. 差分方程 (数学三)

(1) 一阶常系数线性齐次差分方程

$$y_{t+1} + a y_t = 0, \quad (a)$$

通解为 $y_c(t) = C \cdot (-a)^t$,

(2) 一阶常系数线性非齐次差分方程

$$y_{t+1} + ay_t = f(t), \quad (b)$$

通解为 $y_t = y_c(t) + y_t^*$.

其中 y_t^* 是非齐次差分方程 (b) 的特解.

1) $f(t) = P_m(t)$,

(1) 若 $a \neq -1$, 令 $y_t^* = Q_m(t)$;

(2) 若 $a = -1$, 令 $y_t^* = tQ_m(t)$;

2) $f(t) = d^t \cdot P_m(t)$, ($d \neq 0$)

(1) 若 $a + d \neq 0$, 令 $y_t^* = d^t \cdot Q_m(t)$;

(2) 若 $a + d = 0$, 令 $y_t^* = td^t \cdot Q_m(t)$;

例 差分方程 $y_{t+1} - y_t = t \cdot 2^t$ 的通解为_____.

【 $y_t^* = 2^t(At + B)$, 代入得 $y_t^* = 2^t(t - 2)$ 】

$y_t = y_c(t) + y_t^* = C + 2^t(t - 2).$ 】

二、典型例题

例 1 求下列一阶微分方程的通解.

(1) $x(1 + y^2)dx - y(1 + x^2)dy = 0$

(2) $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$

(3) $\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$$

例 2 练习下列考研题中关于一阶微分方程求解的小题.

(1) (2006) 求 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解.

(2) (2019) 求微分方程 $2yy' - y^2 - 2 = 0$ 满足条件 $y(0) = 1$ 的特解.

(3) (1999) 求方程 $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$ ($x > 0$) 满足条件 $y|_{x=1} = 0$ 的解.

(4) (2011) 求 $y' + y - e^{-x} \cos x = 0$ 满足条件 $y|_{x=0} = 0$ 的解.

(5) (2012) $ydx + (x - 3y^2)dy = 0$ 满足 $y|_{x=1} = 1$ 的解.

例 3 已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x) = \int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right) dt + e^{2x}$, 求 $f(x)$.

例 4 求解下列高阶微分方程 (数一、二 可降价)

(1) 求微分方程 $(1+x^2)y'' = 2xy'$ 的通解.

(2) 求微分方程 $\begin{cases} yy'' + y'^2 = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$ 的特解.

例 5 (1989) 设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解, C_1, C_2 为任意常数, 则该非齐次方程通解是 ()

A) $C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$

B) $C_1y_1 + C_2y_2 - (C_1 + C_2)y_3$

C) $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$

D) $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$

例 6 求解下列高阶齐次线性微分方程

(1) $y'' + y' - 2y = 0$

(2) $y'' - 2y' + y = 0$

(3) $y'' - 2y' + 5y = 0$

例 7（2010）求 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的通解.

例 8 求 $y'' - y = e^x \cos 2x$ 的通解.

例 9 方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的特解形式可设为 ()

A) $ax^2 + bx + c + A\sin x$

B) $ax^2 + bx + c + B\cos x$

C) $ax^2 + bx + c + A\sin x + B\cos x$

D) $ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x)$

【章节小结】

第八章 多元函数微分法及其应用

【考试内容】

多元函数的概念 二元函数的几何意义 二元函数的极限与连续的概念 有界闭区域上二元连续函数的性质 多元函数的偏导数和全微分 多元复合函数、隐函数的求导法 二阶偏导数 多元函数的极值和条件极值、最大值和最小值

【考试要求】

1. 了解多元函数的概念, 了解二元函数的几何意义.
2. 了解二元函数的极限与连续的概念, 了解有界闭区域上二元连续函数的性质.
3. 了解多元函数偏导数与全微分的概念, 会求多元复合函数一阶、二阶偏导数, 会求全微分, 了解隐函数存在定理, 会求多元隐函数的偏导数.
4. 了解多元函数极值和条件极值的概念, 掌握多元函数极值存在的必要条件, 了解二元函数极值存在的充分条件, 会求二元函数的极值, 会用拉格朗日乘数法求条件极值, 会求简单多元函数的最大值和最小值, 并会解决一些简单的应用问题.

(以上为数学二与数学三的大纲, 数学一的大纲还要求空间几何方面的应用等)

第一节 多元函数的基本概念

一、考试内容

1. 二元函数的定义

设 D 是 R^2 的一个非空子集, 称映射 $f: D \rightarrow R$ 为定义在 D 上的二元函数, 通常记为 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ 或 $z = f(P)$, $P \in D$. 其中点集 D 称为该函数的定义域, x, y 称为自变量, z 称为因变量.

注意 $z = f(x, y)$ 的图形为空间一块曲面, 它在 xOy 平面上的投影域就是定义域 D .

2. 重极限

设二元函数 $f(P) = f(x, y)$ 的定义域为 D , $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点, 如果存在常数 A , 对于任意给定的正数 ε , 总存在正数 δ , 使得当点 $P(x, y) \in D \cap \overset{\circ}{U}(P_0, \delta)$ 时, 都有 $|f(P) - A| = |f(x, y) - A| < \varepsilon$ 成立, 那么称常数 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时的极限, 记作 $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$ 或 $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$

注意 (1) $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 是以“任意方式”

(2) 证明重极限不存在常用方法:

沿两种不同路径极限不同 (通常可取过点 (x_0, y_0) 的直线)

3. 连续

(1) 定义: 若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ 则称 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续.

(2) 一切多元初等函数在其定义域内是连续的.

(3) 闭区域上连续函数的性质

定理 1 (有界性定理) 设 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, 则 $f(x, y)$ 在 D 上一定有界.

定理 2 (最大值最小值定理) 设 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, 则 $f(x, y)$ 在 D 上一定有最大值和最小值.

定理 3 (介值定理) 设 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上连续, M 为最大值, m 为最小值. 若 $m \leq C \leq M$, 则存在 $(x_0, y_0) \in D$, 使得 $f(x_0, y_0) = C$.

二、典型例题

例 1 求下列二重极限

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3xy}{\sqrt{xy+1}-1}$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

例 2 讨论下列极限是否存在. 存在算出结果, 不存在说明理由.

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

例 3 求极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

【章节小结】

第二节 偏导数与全微分

一、考试内容

1. 偏导数的定义

设二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域有定义, 当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时, 相应的函数有增量 $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$, 如果 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在, 则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数, 记作 $f'_x(x_0, y_0)$, $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$, $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ 或 $z'_x \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$.

类似地, 如果极限 $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$ 存在, 则称此极限为函数

$z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数. 记作 $f'_y(x_0, y_0)$, $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$, $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ 或 $z'_y \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$.

2. 偏导数的几何意义

$f'_x(x_0, y_0)$ 表示曲面 $z = f(x, y)$ 与平面 $y = y_0$ 的截线在点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的切线关于 x 轴的斜率; $f'_y(x_0, y_0)$ 表示曲面 $z = f(x, y)$ 与平面 $x = x_0$ 的截线在点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的切线关于 y 轴的斜率.

3. 二元函数的二阶偏导数

设 $z = f(x, y)$, 则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

4. 如果函数 $z = f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 都在区域 D 内连续, 那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

5. 全微分

(1) 定义 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的某邻域内有定义, 如果函数在点 (x, y)

处的全增量 $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ 可表为 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$. 其中

A, B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. 则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微

分, 而 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分, 记作 dz , 即

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

(2) 判定

① 必要条件: a) $f'_x(x_0, y_0)$ 与 $f'_y(x_0, y_0)$ 都存在; b) 在 (x_0, y_0) 处连续.

② 充分条件: $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.

③ 用定义判定:

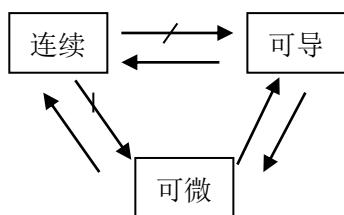
a) $f'_x(x_0, y_0)$ 与 $f'_y(x_0, y_0)$ 是否都存在?

b) $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta z - [f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ 是否为零?

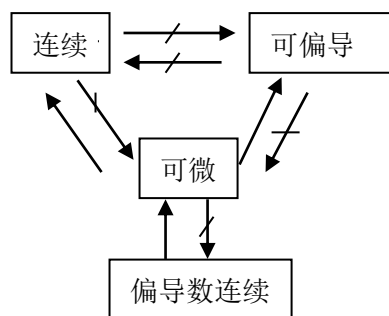
(3) 计算: 若 $f(x, y)$ 可微, 则 $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$.

(4) 连续、可导、可微的关系

一元函数



多元函数



6. 偏导数与全微分的计算

(1) 多元复合函数的求导法则 (链式法则)

① 一元函数与多元函数复合的情形: 如果函数 $u = \varphi(t)$ 及 $v = \psi(t)$ 都在点 t 可导, 函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 具有连续偏导数, 则复合函数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ 在点 t 可导, 且有 $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt}$.

② 多元函数与多元函数复合的情形: 如果函数 $u = \varphi(x, y)$ 和 $v = \psi(x, y)$ 在点 (x, y) 具有对 x 及对 y 的偏导数, 函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 具有连续偏导数, 则复合函数 $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ 在点 (x, y) 的两个偏导数都存在, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

(2) 全微分形式不变性

设 $z = f(u, v), u = u(x, y), v = v(x, y)$ 都有连续一阶偏导数. 则

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

(3) 隐函数求导法

① 由一个方程所确定的隐函数

设 $F(x, y, z)$ 有连续一阶偏导数, $F'_z \neq 0, z = z(x, y)$ 由 $F(x, y, z) = 0$ 所确定.

方法:

公式法、等式两边同时求偏导法、利用微分形式不变性

② 由方程组所确定的隐函数 (数学一)

设 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 由 $\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ 所确定

$$\text{等式两边求导} \quad \begin{cases} F'_x + F'_u \frac{\partial u}{\partial x} + F'_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ G'_x + G'_u \frac{\partial u}{\partial x} + G'_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

二、典型例题

例 1 讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处的连续性、偏导存在性.

例 2 已知函数 $z = \ln(1 + xy^2)$, 则 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(0, 1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

例 3 (2020) 已知 $z = \arctan[xy + \sin(x+y)]$, 则 $\left. dz \right|_{(0,\pi)} =$ _____.

例 4 (2016) 已知函数 $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$, 则 ()

A) $f'_x - f'_y = 0$

B) $f'_x + f'_y = 0$

C) $f'_x - f'_y = f$

D) $f'_x + f'_y = f$

例 5 (2017) 设函数 $f(u, v)$ 具有偏导数, $y = f(e^x, \cos x)$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$.

例 6 设 $z = f(x^2 + y^2, \frac{y}{x})$, 其中 f 具有二阶连续偏导, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

例 7 (2000) 设 $z = f(xy, \frac{x}{y}) + g(\frac{y}{x})$, 其中 f, g 均二阶可偏导, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

例 8 设 $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$ 都是由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的具有连续偏导数的函数, 证明: $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$.

例 9 (2015) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 确定, 则 $dz|_{(0,0)} =$ _____.

例 10 (2016) 设函数 $f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 确定, 则 $dz|_{(0,1)} =$ _____.

例 11（1996） 讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处的连续性、偏导存在性、可微性.

【章节小结】

第三节 多元函数的极值

一、考试内容

1. 无条件极值

(1) 多元函数的极值的定义

设函数 $f(x, y)$ 的定义域为 D , $P_0(x_0, y_0)$ 为 D 的内点, 若存在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0) \subset D$, 使得对于该邻域内异于 P_0 的任何点 (x, y) , 都有 $f(x, y) < f(x_0, y_0)$, 则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有极大值 $f(x_0, y_0)$, 点 (x_0, y_0) 称为函数 $f(x, y)$ 的极大值点; 若对该邻域内异于 P_0 的任何点 (x, y) , 都有 $f(x, y) > f(x_0, y_0)$, 则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有极小值 $f(x_0, y_0)$, 点 (x_0, y_0) 称为函数 $f(x, y)$ 的极小值点.

(2) 极值判定的必要条件

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 具有偏导数, 且在点 (x_0, y_0) 处有极值, 则 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$.

注: 二元函数的极值点不一定是驻点, 例如函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在 $(0, 0)$ 处的偏导数不存在, 但 $(0, 0)$ 是极值点. 另外二元函数的极值点与偏导数不存在的点不一定是极值点.

(3) 极值判定的充分条件

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内连续, 且有一阶及二阶连续偏数, 又 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$, 令 $f''_{xx}(x_0, y_0) = A, f''_{xy}(x_0, y_0) = B, f''_{yy}(x_0, y_0) = C$,

则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处是否取得极值的条件如下:

- ① $AC - B^2 > 0$ 时具有极值, 且当 $A < 0$ 时有极大值, 当 $A > 0$ 时有极小值;
- ② $AC - B^2 < 0$ 时没有极值;
- ③ $AC - B^2 = 0$ 时可能有极值, 也可能没有极值, 需另作讨论 (一般用定义).

2. 条件极值

方法一 条件可直接解出代入目标函数化成一元函数

由 $\varphi(x, y) = 0$ 解出 $y = g(x)$ 代入 $z = f(x, y)$ 即可化为一元函数 $z = f[x, g(x)]$ 的极值的问题.

方法二 条件可写成参数方程带入目标函数转化成一元函数.

方法三 拉格朗日乘数法

(1) 函数 $f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 条件下的极值.

$$\text{令 } L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$$

$$\text{解方程组 } \begin{cases} L'_x = f'_x(x, y) + \lambda \varphi'_x(x, y) = 0, \\ L'_y = f'_y(x, y) + \lambda \varphi'_y(x, y) = 0, \text{ 求驻点.} \\ L'_\lambda = \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

PK 所有驻点处的函数值, 部分题需考研边界点.

(2) 函数 $f(x, y, z)$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = 0, \psi(x, y, z) = 0$ 条件下的条件极值.

$$\text{令 } L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) + \mu \psi(x, y, z), \text{ 同上.}$$

3. 最大最小值

求连续函数 $f(x, y)$ 在有界闭域 D 上的最大最小值三部曲.

(1) 求 $f(x, y)$ 在 D 内部可能的极值点.

(2) 求 $f(x, y)$ 在 D 的边界上的可能极值点 (条件极值).

(3) PK 所有的函数值.

二、典型例题

例 1 求函数 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ 的极值.

例 2（2009）求函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

例 3 求表面积为 a^2 ，体积取最大时长方体的长、宽、高分别为多少？

例 4（2010）求 $M = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值和最小值.

【章节小结】

第九章 二重积分

【考试内容】

二重积分的概念、基本性质和计算

【考试要求】

理解二重积分的概念,了解二重积分的基本性质,了解二重积分的积分中值定理,掌握二重积分的计算方法(直角坐标、极坐标).

(以上为数学二的大纲,数学一的大纲还要求三重积分曲线曲面积分等,数学三的大纲还要求无界区域上简单的反常二重积分.)

一、考试内容

1. 二重积分的定义

设函数 $f(x, y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数.将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$, 其中, $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域,也表示它的面积.在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i) , 作乘积 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ ($i=1, 2, \dots, n$), 并作和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$.

如果各个小闭区域的直径中的最大值 λ 趋于零时,这的和的极限总存在,则称此极限为函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的二重积分,记作 $\iint_D f(x, y)d\sigma$, 即

$\iint_D f(x, y)d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$. 其中, $f(x, y)$ 叫做被积函数, $f(x, y)d\sigma$ 叫做被积表达式, $d\sigma$ 叫面积元素, x 与 y 叫做积分变量, D 叫做积分区域, $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 叫做积分和.

2. 二重积分的几何意义

当 $f(x, y)$ 为闭区域 D 上的连续函数,且 $f(x, y) \geq 0$, 则二重积分 $\iint_D f(x, y)d\sigma$ 表示以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶,侧面以 D 的边界曲线为准线,母线平行于 z 轴的曲顶柱体的体积; 当 $f(x, y) < 0$ 时, $\iint_D f(x, y)d\sigma$ 表示相应曲顶柱体体积的负值.

3. 二重积分的性质

$$(1) \iint_D kf(x, y)d\sigma = k \iint_D f(x, y)d\sigma \quad (k \text{ 为常数}).$$

$$(2) \iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)]d\sigma = \iint_D f(x, y)d\sigma \pm \iint_D g(x, y)d\sigma.$$

(3) 如果区域 D 分为两个闭区域 D_1, D_2 除去公共边界外 D_1 与 D_2 不重叠, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

(4) 如果在区域 D 上, $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则 $\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma$,

特殊情况有 $\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma$.

(5) 设 m, M 分别为 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上的最小值和最大值, σ 是 D 的面积, 则

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma.$$

(6) (积分中值定理) 设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, σ 为 D 的面积, 则存在

$(\xi, \eta) \in D$, 使得 $\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)\sigma$.

4. 二重积分的计算

(1) 在直角坐标系中

模型 I 设有界闭区域

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

其中 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

模型 II 设有界闭区域

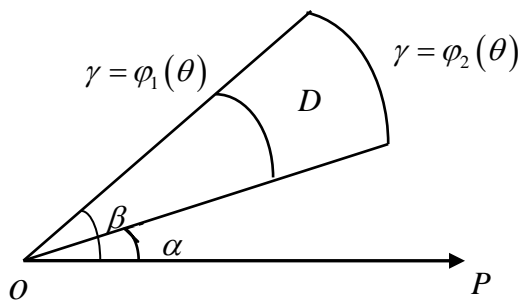
$$D = \{(x, y) | \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y), c \leq y \leq d\}$$

其中 $\varphi_1(y), \varphi_2(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续, $f(x, y)$ 在 D 上连续则

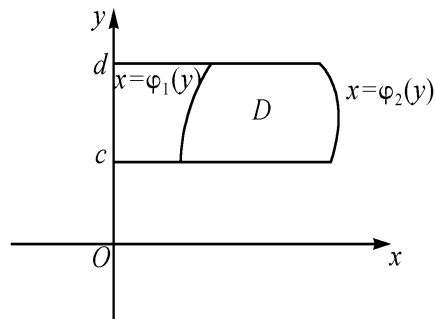
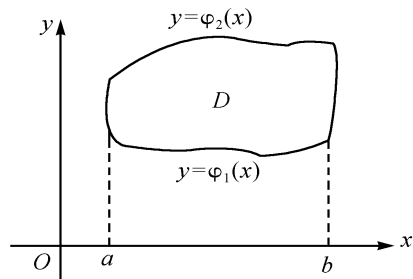
$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx.$$

(2) 在极坐标系中

模型 I 设有界闭区域 $D = \{(\gamma, \theta) | \alpha \leq \theta \leq \beta, \varphi_1(\theta) \leq \gamma \leq \varphi_2(\theta)\}$



其中 $\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, $f(x, y) = f(\gamma \cos \theta, \gamma \sin \theta)$ 在 D 上连续, 则



$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) d\sigma &= \iint_D f(\gamma \cos \theta, \gamma \sin \theta) \gamma d\gamma d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\gamma \cos \theta, \gamma \sin \theta) \gamma d\gamma\end{aligned}$$

模型 II 设有界闭区域 $D = \{(\gamma, \theta) | \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq \gamma \leq \varphi(\theta)\}$

其中 $\varphi(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, $f(x, y) = f(\gamma \cos \theta, \gamma \sin \theta)$ 在

$$\begin{aligned}D \text{ 上连续. 则 } \iint_D f(x, y) d\sigma &= \iint_D f(\gamma \cos \theta, \gamma \sin \theta) \gamma d\gamma d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\gamma \cos \theta, \gamma \sin \theta) \gamma d\gamma.\end{aligned}$$

注意一般而言适合用极坐标系计算的二重积分有如下特点:

i) 适合用极坐标计算的被积函数: $f(\sqrt{x^2 + y^2}), f(\frac{y}{x}), f(\frac{x}{y})$;

ii) 适合用极坐标的积分区域 (直线与圆弧构成的区域).

5. 计算技巧

(1) 利用奇偶性

①若积分域 D 关于 y 轴对称, 则:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_{x \geq 0}} f(x, y) d\sigma & f(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数.} \\ 0 & f(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数.} \end{cases}$$

②若积分域关于 x 轴对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 2 \iint_{D_{y \geq 0}} f(x, y) d\sigma & f(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数.} \\ 0 & f(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数.} \end{cases}$$

(2) 利用对称性

$$\text{若 } D \text{ 关于 } y = x \text{ 对称, 则 } \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma = \frac{1}{2} \iint_D [f(x, y) + f(y, x)] d\sigma$$

(3) 形心公式

$$\iint_D x d\sigma = \bar{x} S, \quad \iint_D y d\sigma = \bar{y} S$$

二、典型例题

例 1 (2005) 比较 $I_1 = \iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ 、 $I_2 = \iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy$ 、 $I_3 = \iint_D \cos(x^2 + y^2)^2 dx dy$ 的大小关系, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

例 2 设 $f(x)$ 连续, 则 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_0^r t f(r^2 - t^2) dt}{\iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} \cos(x + y) d\sigma} = \underline{\hspace{2cm}}$.

例 3 写出下列区域的 X 型与 Y 型不等式

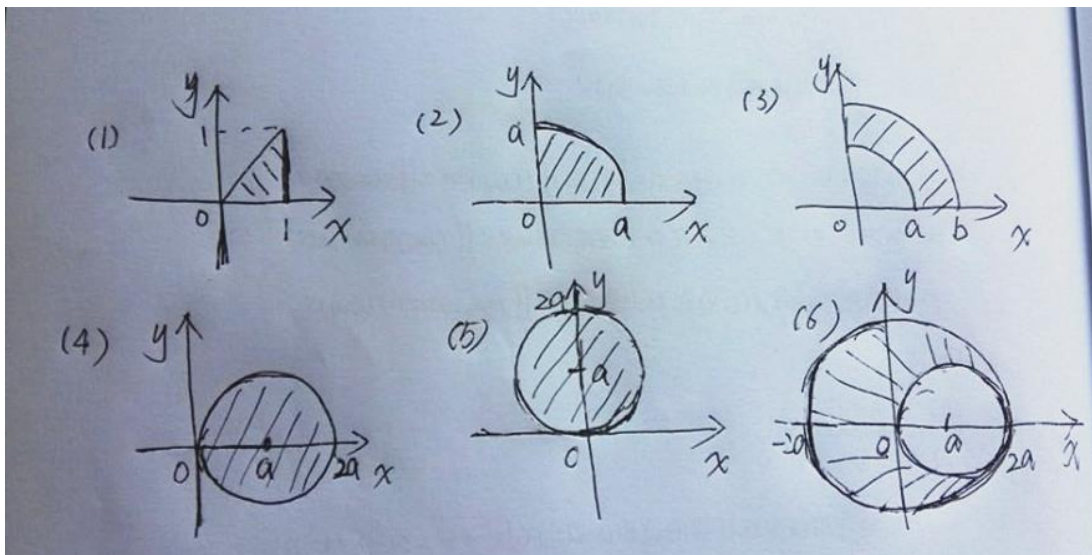
- (1) D_1 : 由 $y = x$ 与 $y = x^2$ 所围成的封闭区域;
- (2) D_2 : 由 $y = x$ 与 $y = 2x$ 及 $y = 2$ 所围成的封闭区域;
- (3) D_3 : 由 $y = x + 1$ 与 $y = (x - 1)^2$ 所围成的封闭区域.

例 4 改变下列二次积分的积分次序

- (1) $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx$;
- (2) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy$.

例 5 (2008) 计算 $\iint_D \max\{xy, 1\} d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

例 6 写出下列区域的 θ, r 不等式



例 7 计算 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

例 8 计算下列累次积分

1) $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy;$

2) $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy.$

例 9 设 D 是 xOy 平面上以 $(1, 1)$, $(-1, 1)$ 和 $(-1, -1)$ 为顶点的三角形区域, D_1 是 D 在第一象限的部分, 则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy = (\quad)$.

- A) $2 \iint_{D_1} \cos x \sin y dx dy$; B) $2 \iint_{D_1} xy dx dy$;
C) $4 \iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dx dy$; D) 0.

例 10 计算 $\iint_D (|x| + ye^{x^2}) d\sigma$, 其中 D 由曲线 $|x| + |y| = 1$ 所围成.

例 11 设区域 D 为 $x^2 + y^2 \leq R^2$, 则 $\iint_D (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}$.

例 12 (2005) 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x)$ 为 D 上正值连续函数, a, b 为常数, 则 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma = (\quad)$.

- A) $ab\pi$, B) $\frac{ab}{2}\pi$, C) $(a+b)\pi$, D) $\frac{a+b}{2}\pi$.

例 13 计算 $\iint_D y dx dy$, 其中 D 是由 $x = -2$, $y = 0$, $y = 2$, 以及曲线 $x = -\sqrt{2y - y^2}$ 所围成.

例 14 (2001) 计算 $\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$.

例 15 (2014) 计算 $\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$.

【章节小结】

1. 二重积分的计算步骤:

第一步: 画出 D 的草图

第二步: 观察 D 看能否简化计算 (对称奇偶性、轮换性、形心公式)

第三步: 选定坐标系

第四步: 选定积分次序

第五步: 计算

注意: 如果被积函数为分段函数 (特别隐含的分段函数), 先用积分性质:
对区域的可加性分块积分.

第十章 无穷级数 (数一、三)

【考试内容】

常数项级数的收敛与发散的概念 收敛级数的和的概念 级数的基本性质与收敛的必要条件 几何级数与 p 级数及其收敛性 正项级数收敛性的判别法 任意项级数的绝对收敛与条件收敛 交错级数与莱布尼茨定理 幂级数及其收敛半径、收敛区间 (指开区间) 和收敛域 幂级数的和函数 幂级数在其收敛区间内的基本性质 简单幂级数的和函数的求法 初等函数的幂级数展开式

【考试要求】

1. 理解常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念, 掌握级数的基本性质及收敛的必要条件.
2. 掌握几何级数与 p 级数的收敛与发散的条件.
3. 掌握正项级数收敛性的比较判别法、比值判别法、根值判别法, 会用积分判别法.
4. 掌握交错级数的莱布尼茨判别法.
5. 了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系.
6. 理解幂级数收敛半径的概念, 并掌握幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域的求法.
7. 了解幂级数在其收敛区间内的基本性质 (和函数的连续性、逐项求导和逐项积分), 会求一些幂级数在其收敛区间内的和函数.
8. 掌握 $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x)$ 及 $(1+x)^\alpha$ 的麦克劳林 (Maclaurin) 展开式, 会用它们将一些简单函数间接展开为幂级数.

(以上为数学三的大纲要求, 数学一的大纲要求多了傅里叶级数)

第一节 常数项级数

一、考试内容

1. 级数的定义

一般的, 如果给定一个数列 $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, 由这个数列构成的表达式

$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ 叫做 (常数项) 无穷级数, 简称 (常数项) 级数, 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项.

2. 级数收敛与发散的定义

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 有极限 s , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$. 则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

收敛, 这时极限 s 叫做这级数的和, 并写成 $s = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$. 如果 $\{s_n\}$ 没有极

限,则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

3. 收敛级数的性质

(1) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于和 s , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ 也收敛, 且其和为 ks .

(2) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s 、 σ , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 且其和为 $s \pm \sigma$.

① 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 不一定发散.

② 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 必发散.

(3) 改变级数的有限项不改变级数的敛散性. 当改变收敛级数的有限项时, 一般其和会改变.

(4) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则对这级数的项任意加括号后所成的级数仍收敛, 且其和不变.

① 收敛级数去括号后所得的级数不一定收敛.

② 发散级数加括号后所得的级数不一定发散.

③ 发散级数去括号后所得的级数一定发散.

(5) (级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

(6) 两类重要的级数

① 等比级数(几何级数) $\sum_{n=0}^{\infty} a q^n$ ($a \neq 0$),

当 $|q| < 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = \frac{a}{1-q}$ 收敛; 当 $|q| \geq 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a q^n$ 发散.

② P 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$,

当 $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛; 当 $p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散.

4. 正项级数

(1) 正项级数的定义

(2) 正项级数收敛的充要条件: 它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界.

(3) 比较判别法

① 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数, 且 $u_n \leq v_n$ ($n=1, 2, \dots$), 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 反之, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

② 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, 则

i 若 $0 < l < +\infty$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 有相同的敛散性;

ii 若 $l = 0$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时, 必有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

iii 若 $l = +\infty$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时, 必有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

(4) 比值判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$, 则当 $\rho < 1$ 时级数收敛; $\rho > 1$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$) 时级数发散; $\rho = 1$ 时级数可能发散也可能收敛.

(5) 根值判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则当 $\rho < 1$ 时级数收敛; $\rho > 1$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = +\infty$) 时级数发散; $\rho = 1$ 级数可能发散也可能收敛.

(6) 积分判别法

设 $f(x)$ 为 $[1, +\infty)$ 上非负减函数, 那么正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 同时收敛或同时发散.

5. 交错级数

(1) 交错级数的定义

(2) 莱布尼茨定理

如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 满足:

$$\textcircled{1} u_{n+1} \leq u_n (n=1,2,3,\cdots)$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 收敛, 且和 $s \leq u_1$, 其余项 $|r_n| \leq u_{n+1}$.

6. 任意项级数 ($\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, u_n 为任意实数)

(1) 绝对收敛与条件收敛概念

$\textcircled{1} \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 也收敛, 此时称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛;

$\textcircled{2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 此时称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛.

(2) 绝对收敛和条件收敛的基本结论

$\textcircled{1}$ 绝对收敛的级数一定收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$\textcircled{2}$ 条件收敛级数的所有正项 (或负项) 构成的级数一定发散.

即: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n + |u_n|}{2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n - |u_n|}{2}$ 发散.

(3) 任意项级数的比值 (根值) 判别法类似与正项级数的比值 (根值) 判别法

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$), 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $\begin{cases} \text{绝对收敛, } \rho < 1, \\ \text{发 散, } \rho > 1, \\ \text{失 效, } \rho = 1, \end{cases}$

7. 一类重要的级数

$$\text{级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p},$$

(1) 当 $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 是绝对收敛的;

(2) 当 $0 < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 是条件收敛的;

(3) 当 $p \leq 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 是发散的.

二、典型例题

例 1 用定义判断下列级数的敛散性

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} ar^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right); \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

例 2 判定下列正项级数的敛散性.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \qquad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(1+n)}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \qquad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\sqrt{\pi}}{n}\right) \qquad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!} \qquad (8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \qquad (10) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

例 3 判定下列交错级数的敛散性

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$$

例 4 讨论 a , 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n n^p}$ ($p > 0$) 是绝对收敛, 条件收敛还是发散?

例 5 (2015) 下列级数中发散的是 ()

$$A. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

$$B. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$C. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n}$$

$$D. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

【章节小结】

第二节 幂级数

一、考试内容

1. 函数项级数的定义

如果给定一个区间 I 上的函数列 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$, 则由这函数列构成的表达式

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (1)$$

称为定义在区间 I 上的 (函数项) 无穷级数.

2. 收敛(发散)点, 收敛(发散)域的定义

对于每一个确定的值 $x_0 \in I$, 函数项级数 (1) 成为常数项级数

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \quad (2)$$

如果级数 (2) 收敛, 就称点 x_0 是函数项级数的收敛点; 如果级数 (2) 发散, 则称点 x_0 是函数项级数的发散点. 函数项级数的收敛点的全体称为它的收敛域, 发散点全体称为它的发散域.

3. 和函数

在收敛域上, 函数项级数的和是 x 的函数 $s(x)$, 通常称 $s(x)$ 为函数项级数的和函数. 这时, 函数的定义域就是级数的收敛域, 并写成

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots.$$

4. 幂级数的定义

函数项级数各项都是幂函数的函数项级数称为幂级数, 记为:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots, \text{ 其中 } a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \text{ 叫做幂级数的系数.}$$

5. 阿贝尔定理

定理 1 (阿贝尔定理)

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_0 (x_0 \neq 0)$ 时收敛, 则当 $|x| < |x_0|$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_0$ 时发散, 则当 $|x| > |x_0|$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

6. 幂级数的收敛半径和区域

如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不是仅在 $x=0$ 一点收敛,也不是在整个数轴上都收敛,则

必有一个确定的正数 R 存在,使得

当 $|x| < R$ 时,幂级数绝对收敛;

当 $|x| > R$ 时,幂级数发散;

当 $x = R$ 与 $x = -R$ 时,幂级数可能收敛也可能发散;

这时,正数 R 通常叫做幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径.开区间 $(-R, R)$ 叫做幂级数的收敛区间.再由幂级数在 $x = \pm R$ 处的敛散性就可以决定它的收敛域是 $(-R, R), [-R, R), (-R, R], [-R, R]$ 这四个之一.

7. 定理 2

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$). 其中 a_n, a_{n+1} 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的相邻两项的系数,则这幂级数的收敛半径

$$R = \begin{cases} +\infty, & \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0 \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases}.$$

(定理 2 使用的前提是幂级数不缺项,建议大家直接用任意项级数的比值或根值判别法来求收敛域相关问题).

8. 幂级数的运算

(1)加法与减法: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$, 当等式左边的两个幂级数的收敛半径不相等时,右边的和(差)级数在原来两个收敛域中较小的那个上面收敛;当两个幂级数的收敛半径相等时,和(差)级数的收敛半径有可能扩大.

(2)乘法: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + \dots$,

乘积级数在两个乘积因式级数收敛区间中较小的那个上面收敛.

(3)除法: $\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, 可由 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right)$, 根据幂级数的乘

法将右边展开后比较两边同次幂的系数求 c_n , 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的收敛区间可能比等式左边两个幂级数的收敛区间小得多.

9. 幂级数的性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$, $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 为和函数, 则

(1) 和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上连续.

(2) 和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上可积, 并有逐项积分公式:

$$\int_0^x s(x) dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \text{ 逐项积分后所得的幂级数和原来的幂级数}$$

有相同的收敛半径.

(3) 和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上可导, 并有逐项求导公式:

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \text{ 逐项求导后所得的幂级数和原来的幂}$$

级数有相同的收敛半径.

10. 将函数展成幂级数

(1) 泰勒级数的定义

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内能展开成幂级数, 即有

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots, x \in U(x_0) \quad (1)$$

那么, 根据和函数的性质, 可知 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 具有任意阶导数, 且

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + (n+1)! a_{n+1}(x-x_0) + \frac{(n+2)!}{2!} a_{n+2}(x-x_0)^2 + \cdots$$

由此可得 $f^{(n)}(x_0) = n! a_n$, 于是 $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ ($n=0, 1, 2, \cdots$), 即该幂级数必为

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (2)$$

而展开式必为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, x \in U(x_0) \quad (3)$$

幂函数(2)叫做函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒级数. 展开式(3)叫做函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒展开式.

(2) 函数展成幂级数的条件: 设 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内有任意阶导数,

则在该邻域内能展成泰勒级数的充分必要条件是在该邻域内 $f(x)$ 的泰勒公式的余项 $R_n(x)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限为零, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, x \in U(x_0)$.

(3) 将函数展成幂级数的方法:

① 直接展开法: 按公式 $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, 计算幂级数的系数, 并验证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

② 间接展开法: 利用一些已知的函数展开式, 通过幂级数的运算(如四则运算, 逐项求导, 逐项积分)以及变量代换等, 将所给函数展成幂级数.

③ 技巧: 先积分再求导; 先求导再积分.

(4) 几个常用的幂级数展开式

$$\textcircled{1} \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots; \quad (-1 < x < 1)$$

$$\textcircled{2} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\textcircled{3} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\textcircled{4} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\textcircled{5} \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \cdots \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$\textcircled{6} (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots$$

二、典型例题

例 1 求下列幂级数的收敛域

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{n}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n \cdot 2^n}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n} \quad (\text{仅求收敛区间})$$

例 2 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=-4$ 处发散, 则幂级数的收敛域为_____.

例 3 求下列幂级数的收敛域与和函数

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^n$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 x^n$$

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+3)x^n$$

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 3n^2 + n + 1}{n(n+1)} x^n$$

例 4 求常数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)2^n}$ 的和.

例5 将下列函数展开为 x 的幂级数.

(1) $f(x) = a^x$;

(2) $f(x) = \frac{12-5x}{6-5x-x^2}$;

(3) $f(x) = \ln(1-x-2x^2)$

例6 将下列函数在指定点展成幂级数.

(1) $f(x) = e^x$ 在 $x=1$ 处;

(2) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x-4}$ 在 $x=1$ 处.

【章节小结】