work-008

n次正方行列 Hが $H^T = H$ を満たすとき、H を対称行列という。
n次正方行列 Uが $U^T = U^{-1}$ を満たすとき、U を直交行列という。

1. H の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交することを証明せよ。
2. 対称行列 H の正規化した固有ベクトルを列ベクトルとする行列 P は直交行列である事を証明せよ。(ヒント: $U^T U = I$ (I は単位行列))
3. 任意の $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ 対して $\|U\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{u}\|$ (直交行列のノルム普遍性) が成り立つことを証明せよ。ここで、$\| \boldsymbol{u} \| = \sqrt{\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{u}}$ である。