# CONTROLE LINEARIZANTE DE UMA PLATAFORMA MÓVEL EMPREGANDO REALIMENTAÇÃO VISUAL

Walter Fetter Lages* Elder M. Hemerly* Luís Fernando Alves Pereira**

*Instituto Tecnológico de Aeronáutica
CTA - ITA - IEEE
12228-900 - São José dos Campos - SP
E-mail: w.fetter@ieee.org

**Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
Av. Ipiranga, 6681
90610-000 - Porto Alegre - RS

**Resumo:** Apresenta-se neste artigo uma estratégia para a navegação de um veículo autônomo com restrições não-holonômicas. Em particular, discute-se a implementação de um esquema de controle linearizante por realimentação de estados empregando visão computacional para estimação da posição e orientação do veículo.
**Palavras chave:** veículo autônomo, controle linearizante, visão computacional.

**Abstract:** A method for autonomous vehicles navigation under nonholonomic restrictions is presented. A nonlinear state feedback linearizing control law is designed. Relevant variables, such as vehicle position and orientation, are estimated via computer vision.
**Keywords:** autonomous vehicle, linearizing control, computer vision.

## 1. INTRODUÇÃO

Um problema de relativa complexidade associado à navegação autônoma de veículos relaciona-se diretamente com a determinação precisa das coordenadas espaciais do mesmo. Esforços tem sido dispensados no sentido de desenvolver algoritmos eficazes para estimação de tais coordenadas. Em [1] utiliza-se um modelo do ambiente associado a sensores de ultra-som. Em [2] e [3] empregam-se algoritmos de processamento de imagens para estimativa de posição. Nestes trabalhos, leva-se em consideração apenas o equacionamento cinemático do veículo para geração do sinal de controle.

O modelo dinâmico de um veículo é descrito em detalhes em [4], onde técnicas de linearização por realimentação exata de estados [5] são empregadas para a determinação da lei de controle. Embora tais técnicas sejam comprovadamente efetivas, sabe-se que existe a necessidade da determinação e/ou do conhecimento preciso dos estados do sistema, aspecto não abordado em [4].

Neste trabalho utiliza-se o modelo dinâmico similar ao descrito em [4] para geração do algoritmo de controle linearizante, empregando-se para estimação do vetor de estados técnicas de processamento de imagens e *dead-reckoning* [1] combinadas através de um filtro de Kalman estendido.

## 2. MODELAGEM DA PLATAFORMA

Um esboço da plataforma móvel empregada pode ser visto na Figura 1.

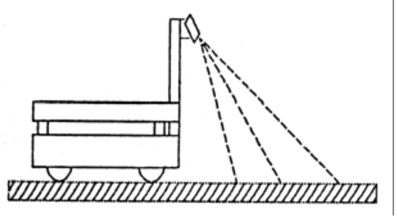

Figura 1: Esboço da plataforma móvel.

A plataforma é movimentada através de um sistema de duas rodas dianteiras operando em modo diferencial. Cada roda possui um *encoder* que permite a medição da sua velocidade. Na traseira da plataforma existe uma terceira roda, que gira livremente. Uma câmera de vídeo é montada na frente da plataforma e pode ser movimentada de modo a focalizar pontos do ambiente interessantes para controle e navegação.

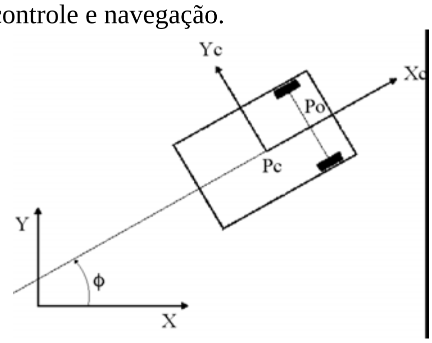


Figura 2: o sistema de coordenadas da plataforma.

Com base no esquema da Figura 2, obtém-se as equações dinâmicas da plataforma, que podem ser representadas na forma [4]

$$M(q)\ddot{q} + V(q,\dot{q}) = W(q)\tau - A^T(q)F \qquad (1)$$

sendo

$$q = \begin{bmatrix} x_c & y_c & \phi & \theta_r & \theta_l \end{bmatrix}^T \qquad (2)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_N & F_r & F_l \end{bmatrix}^T, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_r & \tau_l \end{bmatrix}^T \qquad (3)$$

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & m_c d\,\mathrm{sen}\phi & 0 & 0 \\ 0 & m & -m_c d\cos\phi & 0 & 0 \\ m_c d\,\mathrm{sen}\phi & -m_c d\cos\phi & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w \end{bmatrix} \qquad (4)$$

$$V = \begin{bmatrix} m_c d\dot{\phi}^2\cos\phi & m_c d\dot{\phi}^2\mathrm{sen}\phi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \qquad (5)$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \qquad (6)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\mathrm{sen}\phi & \cos\phi & d & 0 & 0 \\ -\cos\phi & -\mathrm{sen}\phi & -b & r & 0 \\ -\cos\phi & -\mathrm{sen}\phi & b & 0 & r \end{bmatrix} \qquad (7)$$

onde:

$P_o$: intersecção entre os eixos de simetria e o eixo das rodas;

$P_c$: centro de massa da plataforma;

d: distância entre $P_o$ e $P_c$;

b: distância entre as rodas e o eixo de simetria;

r: raio da roda;

$m_c$: massa da plataforma sem considerar as rodas e os motores;

$m_w$: massa de cada conjunto roda/motor;

I: momento de inércia gerado por $m_c$ e $m_w$ com relação ao eixo vertical, a partir de $P_o$;

$I_w$: momento de inércia gerado pelo conjunto roda/motor, com relação ao eixo das rodas;

É então possível [4] determinar uma matriz S(q), tal que A(q) S(q) = 0 e que a seguinte relação se verifique

$$\dot{q} = S(q)\nu, \quad \nu = \begin{bmatrix} \theta_r & \theta_l \end{bmatrix}^T \qquad (8)$$

Diferenciando temporalmente (8), substituindo a expressão resultante em (1) e prémultiplicando o resultado por $S^T$ obtém-se

$$S^T\left(MS\dot{\nu} + M\dot{S}\nu + V\right) = \tau \qquad (9)$$

Definindo-se o vetor de estados

$$x = \begin{bmatrix} q \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c & y_c & \phi & \theta_r & \theta_l & \dot{\theta}_r & \dot{\theta}_l \end{bmatrix}^T \qquad (10)$$

pode-se escrever

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} S\nu \\ f_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \left(S^T MS\right)^{-1} \end{bmatrix}\tau \qquad (11)$$

com $f_2 = \left(S^T MS\right)^{-1}\left(-S^T M\dot{S}\nu - S^T V\right)$.

Tal equação de estados pode ser ainda representada por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} S\nu \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u \qquad (12)$$

se for aplicada a seguinte realimentação não-linear

$$\tau = S^T MS\left(u - f_2\right) \qquad (13)$$

## 3. CONTROLE LINEARIZANTE

Considere, ainda com base em [6], a classe de sistemas não-lineares multivariáveis com o mesmo número de entradas e saídas, da forma

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + \ldots + g_p(x)u_p \qquad (14)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(x) \\ &\vdots \\ y_p &= h_p(x) \end{aligned} \qquad (15)$$

com $x \in \Re^n$, $u \in \Re^p$ e $y \in \Re^p$, assumindo-se f, $g_i$, $h_j$ suaves. Diferenciando com relação ao tempo a saída $y_j$, obtém-se

$$\dot{y}_j = L_f h_j(x) + \sum_{i=1}^{p}(L_{g_i} h_j(x))u_i \qquad (16)$$

com $L_f h_j(x)$ representando a derivada de Lie da saída $h_j(x)$ com relação à f(x), dada por

$$L_f h_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_j(x)}{\partial x_i}\dot{x}_{i_f} \qquad (17)$$

$$L_g h_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_j(x)}{\partial x_i}\dot{x}_{i_g} \qquad (18)$$

onde $\dot{x}_{i_f}$ e $\dot{x}_{i_g}$ representam, respectivamente, as partes relativas à f(x) e g(x) da i-ésima equação de estado do processo representado por (14) (15).

De acordo com (16), se cada um dos termos $L_{g_i} h_j(x) = 0$ nenhuma das entradas não aparecerá na derivada temporal das saídas do processo. Define-se $\gamma_j$ como sendo o menor inteiro tal que no mínimo uma das entradas apareça em $y_j^{\gamma_j}$, i.e.,

$$y_j^{g_j} = L_f^{g_j} h_j(x) + \sum_{i=1}^{p} L_{g_i}(L_f^{g_j - 1} h_j(x))u_i \qquad (19)$$

sendo

$$L_f^{\gamma_j} h_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_f^{\gamma_j - 1} h_j(x)}{\partial x_i}\dot{x}_{i_f} \qquad (20)$$

$$L_g L_f^{\gamma_j-1} h_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L_g L_f^{\gamma_j-2} h_j(x)}{\partial x_i} \dot{x}_g \qquad (21)$$

com no mínimo um dos termos $L_{g_i}(L_f^{g_j-1} h_j(x)) \neq 0$ para todo x pertencente à região onde a linearização é válida. Definindo a matriz E(x) como

$$E(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{g_1-1} h_1(x) & \cdots & L_{g_p} L_f^{g_1-1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{g_p-1} h_p(x) & \cdots & L_{g_p} L_f^{g_p-1} h_p(x) \end{bmatrix} \qquad (22)$$

uma matriz quadrada de ordem p, pode-se reescrever a equação (19) na forma

$$\begin{bmatrix} y_1^{g_1} \\ \vdots \\ y_p^{g_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{g_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{g_p} h_p(x) \end{bmatrix} + E(x) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \qquad (23)$$

Naturalmente, se a matriz inversa de E(**x**) existir para todo x pertencente à região de interesse, a lei de controle por realimentação de estados

$$u(x) = -E^{-1}(x) \begin{bmatrix} L_f^{g_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{g_p} h_p(x) \end{bmatrix} + E^{-1}(x) v \qquad (24)$$

resulta, em malha fechada, o seguinte sistema,

$$\begin{bmatrix} y_1^{\gamma_1} \\ \vdots \\ y_p^{\gamma_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix} \qquad (25)$$

que é linear sob o ponto de vista entrada-saída.

### 3.1. EQUAÇÃO DE SAÍDA DA PLATAFORMA

Conforme [4], elege-se um ponto $P_r$ da plataforma, *a priori* arbitrário, como sendo o ponto de referência. O veículo deverá ser controlado de forma que o ponto $P_r$ siga uma trajetória desejada.

Considera-se $\left(x_r^c, y_r^c\right)$ as coordenadas de $P_r$ descritas com relação ao sistema de eixos $(X_c, Y_c)$. Tal ponto pode ser descrito no sistema de coordenadas globais (X,Y) através das relações

$$x_r = x_c + x_r^c \cos\phi - y_r^c \operatorname{sen}\phi \qquad (26)$$

$$y_r = y_c + x_r^c \operatorname{sen}\phi + y_r^c \cos\phi \qquad (27)$$

que são as equações de saída do sistema descrito por (12), ou seja

$$y = h(q) = \begin{bmatrix} x_r & y_r \end{bmatrix}^T \qquad (28)$$

que derivadas duas vezes pode ser representadas na forma (23) com

$$E(x) = \begin{bmatrix} E_{11}(x) & E_{12}(x) \\ E_{21}(x) & E_{22}(x) \end{bmatrix} \qquad (29)$$

onde

$$E_{11}(x) = c\left(\left(b - y_r^c\right)\cos\phi + \left(d - x_r^c\right)\operatorname{sen}\phi\right) \qquad (30)$$

$$E_{12}(x) = c\left(\left(b + y_r^c\right)\cos\phi - \left(d - x_r^c\right)\operatorname{sen}\phi\right) \qquad (31)$$

$$E_{21}(x) = c\left(\left(b - y_r^c\right)\operatorname{sen}\phi - \left(d - x_r^c\right)\cos\phi\right) \qquad (32)$$

$$E_{22}(x) = c\left(\left(b + y_r^c\right)\operatorname{sen}\phi + \left(d - x_r^c\right)\cos\phi\right) \qquad (33)$$

e

$$\begin{aligned} L_f^2 h_1(x) = {} & c^2\dot{\theta}_r^2\left(-\left(b - y_r^c\right)\operatorname{sen}\phi + \left(d - x_r^c\right)\cos\phi\right) + \\ & + c^2\dot{\theta}_r\dot{\theta}_l\left(\left(b - y_r^c\right)\operatorname{sen}\phi - \left(d - x_r^c\right)\cos\phi + \right. \\ & \left. -\left(b + y_r^c\right)\operatorname{sen}\phi - \left(d - x_r^c\right)\cos\phi\right) + \\ & + c^2\dot{\theta}_l^2\left(\left(b + y_r^c\right)\operatorname{sen}\phi + \left(d - x_r^c\right)\cos\phi\right) \end{aligned} \qquad (34)$$

$$\begin{aligned} L_f^2 h_2(x) = {} & c^2\dot{\theta}_r^2\left(\left(b - y_r^c\right)\cos\phi + \left(d - x_r^c\right)\operatorname{sen}\phi\right) + \\ & + c^2\dot{\theta}_r\dot{\theta}_l\left(-\left(b - y_r^c\right)\cos\phi - \left(d - x_r^c\right)\operatorname{sen}\phi + \right. \\ & \left. + \left(b + y_r^c\right)\cos\phi - \left(d - x_r^c\right)\operatorname{sen}\phi\right) + \\ & + c^2\dot{\theta}_l^2\left(-\left(b + y_r^c\right)\cos\phi + \left(d - x_r^c\right)\operatorname{sen}\phi\right) \end{aligned} \qquad (35)$$

sendo c=r/(2b), faltando determinar, na lei de controle (24), apenas o vetor de entradas equivalentes $v = [v_1\ v_2]^T$.

## 4. ESTIMAÇÃO DE ESTADOS

A estratégia de controle apresentada no seção 3 assume que os estados em (12) são completamente acessíveis. Embora esta seja uma hipótese comum na literatura [7][8][9], apresenta algumas limitações. Estas limitações estão em geral relacionadas com o fato de não ser possível medir diretamente alguns componentes do vetor de estados. Os estados que não podem ser diretamente medidos são reconstruídos e/ou estimados através dos componentes aos quais se tem acesso.

### 4.1. *DEAD-RECKONING*

Assumindo-se que o veículo percorre uma trajetória circular obtém-se [2]

$$\begin{aligned} x_c(k+1) = {} & x_c(k) + \Delta s(k)\cos\left(\phi(k) + \frac{\Delta\phi(k)}{2}\right) \\ & + d\Delta\phi(k)\operatorname{sen}\left(\phi(k) + \frac{\Delta\phi(k)}{2}\right) \end{aligned} \qquad (36)$$

$$\begin{aligned} y_c(k+1) = {} & y_c(k) + \Delta s(k)\operatorname{sen}\left(\phi(k) + \frac{\Delta\phi(k)}{2}\right) \\ & - d\Delta\phi(k)\cos\left(\phi(k) + \frac{\Delta\phi(k)}{2}\right) \end{aligned} \qquad (37)$$

$$\phi(k+1) = \phi(k) + \Delta\phi(k) \qquad (38)$$

com

$$\Delta s(k) = \Delta D(k) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta\phi(k)}{2}\right)}{\frac{\Delta\phi(k)}{2}} \qquad (39)$$

$$\Delta D(k) = \frac{\Delta D_r(k) + \Delta D_l(k)}{2} \tag{40}$$

$$\Delta\phi(k) = \frac{\Delta D_r(k) - \Delta D_l(k)}{2b} \tag{41}$$

onde $\Delta D_r(k)$ e $\Delta D_l(k)$ representam, respectivamente, os deslocamentos lineares das rodas direita e esquerda da plataforma entre o instante de tempo k e o instante de tempo k+1 e são dados por

$$\Delta D_r(k) = 2\pi r \frac{NP_r(k)}{\Pi} \tag{42}$$

$$\Delta D_l(k) = 2\pi r \frac{NP_l(k)}{\Pi} \tag{43}$$

sendo $\Pi$ o número de pulsos por revolução dos *encoders* das rodas e $NP_r(k)$ e $NP_l(k)$ os números de pulsos detectados no intervalo de tempo de k à k+1.

Lembrando que

$$\theta_r(k+1) = \theta_r(k) + \Delta\theta_r(k) \tag{44}$$

$$\theta_l(k+1) = \theta_l(k) + \Delta\theta_l(k) \tag{45}$$

é possível, utilizando as expressões (36)-(45), recompor o estado do sistema definido por (10).

No entanto, as expressões (36), (37) e (38) são exatas apenas se a trajetória do veículo for circular ou reta. Existem também erros de modelagem, pois os raios das rodas e a distância entre elas não são conhecidos com absoluta exatidão, o solo não é perfeitamente plano, o escorregamento das rodas não é zero, etc.

## 4.2. VISÃO COMPUTACIONAL

A estimação de posição do veículo através de visão computacional consiste em obter-se uma ou mais imagens que contenham pontos conhecidos (posição e orientação conhecidas) do ambiente.

O sistema de processamento de imagens utilizado neste trabalho é baseado em *landmarks* como os apresentados na Figura 3, que são fixados nas paredes do ambiente de trabalho da plataforma. A escolha deste tipo de *landmark* foi motivada por [3].

Figura 3: *Landmark* utilizado pelo sistema de visão.

Ao serem vistos em perspectiva pela plataforma, estes *landmarks* sofrem distorções nos eixos vertical e horizontal. Como os *landmarks* são fixados à altura da câmera, a distorção no eixo vertical é devida apenas à distância da câmera ao *landmark*, enquanto a distorção no eixo horizontal é se dá devido à distância e à orientação da câmera com relação ao *landmark*. No caso geral, o *landmark* aparecerá na imagem como uma elipse. A posição e os eixos desta elipse são detectados na imagem através da transformada de Hough generalizada [10].

A posição e a orientação do *landmark* em relação à câmera obtidas através transformação de perspectiva são dadas por

$$Z = \lambda\left(1 + \frac{r_l}{a_y}\right) \quad \text{e} \quad \Theta = \pm a\cos\left(\frac{a_x}{a_y}\right) \tag{46}$$

onde Z é distância da câmera ao *landmark*, $\lambda$ é a distância focal da câmera, $r_l$ é raio do *landmark*, $a_x$ e $a_y$ são respectivamente os semi-eixos horizontal e vertical da elipse e $\Theta$ é a orientação entre a câmera e o *landmark*.

A matriz de transformação homogênea entre o sistema de coordenadas global e o sistema de coordenadas centrado em $x_c$ e $y_c$ (Fig. 2) será dada por

$${}^gT_c = {}^gT_l.{}^lT_v.{}^vT_c \tag{47}$$

onde ${}^gT_l$ é a matriz de transformação homogênea entre o sistema de coordenadas localizado no centro do *landmark* e o sistema de coordenadas global, ${}^lT_v$ é a matriz de transformação homogênea entre a câmera e o *landmark* e ${}^vT_c$ é a matriz de transformação homogênea entre sistema de coordenadas centrado em $x_c$ e $y_c$ e a câmera.

Como ${}^gT_c$ é constante pois depende somente da posição do *landmark* sendo observado, e ${}^vT_c$ depende apenas da geometria da plataforma e ${}^lT_v = \left({}^vT_l\right)^{-1}$ tem-se que

$${}^gT_c = {}^gT_l.\left({}^vT_l\right)^{-1}.{}^vT_c \tag{48}$$

Por outro lado, da Figura 2 pode-se facilmente obter

$${}^gT_c = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\phi & 0 & x_c \\ \text{sen}\phi & \cos\phi & 0 & y_c \\ 0 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{49}$$

onde $d_1$ é a altura do ponto $x_c$,$y_c$. Portanto, tem-se

$$x_c = \left({}^gT_c\right)_{14} \qquad y_c = \left({}^gT_c\right)_{24} \tag{50}$$

$$\phi = a\tan 2\left(\left({}^gT_c\right)_{11}, \left({}^gT_c\right)_{21}\right) \tag{51}$$

É importante observar que, devido à ambigüidade do sinal de $\Theta$ em (46), serão obtidos dois conjuntos de valores $x_c$, $y_c$ e $\phi$ para um mesmo *landmark*. Esta ambigüidade pode ser removida observando-se dois ou mais *landmarks*, veja-se [2][3] para maiores detalhes.

## 4.3. FUSÃO DAS ESTIMATIVAS

Como os dois sistemas para estimação de posição são independentes e possuem características diferentes, parece razoável supor-se que a fusão dos dados obtidos pelos dois sistemas produzirá uma estimativa de melhor qualidade. Esta fusão de dados pode ser feita utilizando-se o filtro de Kalman estendido. Definindo-se

$$U(k) = \begin{bmatrix} \Delta D_r(k) \\ \Delta D_l(k) \end{bmatrix} \quad e \quad X(k) = \begin{bmatrix} x_c(k) \\ y_c(k) \\ \phi(k) \end{bmatrix} \tag{52}$$

pode-se escrever (36) - (38) na forma

$$X(k+1) = f\big(X(k), U(k) + \omega(k)\big) \tag{53}$$

onde $\omega(k)$ representa perturbações como escorregamento das rodas, incertezas nos parâmetros do modelo e erros nos *encoders*.

A saída do sistema de processamento de imagens, dada pelas expressões (50) (51), é o vetor

$$y(k) = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ \phi \end{bmatrix} + v(k), \quad v(k) = \begin{bmatrix} erro_{x_c} \\ erro_{y_c} \\ erro_{\phi} \end{bmatrix} \tag{54}$$

considerado como um processo de observação de (53) que contém um erro de medida.

Fazendo-se as suposições usuais, o filtro de Kalman estendido pode ser utilizado para combinar as estimativas de posição obtidas pelos sistemas de *dead-reckoning* e processamento de imagens.

Expandindo-se f(.) em (53) em série de Taylor em torno do ponto $\big(\hat{X}(k), U(k)\big)$ onde $\hat{X}(k)$ é a estimativa de X(k) no instante k e desprezando os termos de ordem superior, resulta

$$\begin{aligned} f\big(X(k), U(k) + \omega(k)\big) &= f\big(\hat{X}(k), U(k)\big) \\ &+ F_k\big(X(k) - \hat{X}(k)\big) + G_k\omega(k) \end{aligned} \tag{54}$$

onde

$$F_k = \left.\frac{\partial f(X(k), U(k))}{\partial X(k)}\right|_{X(k)=\hat{X}(k)} \tag{55}$$

$$G_k = \left.\frac{\partial f(X(k), U(k))}{\partial U(k)}\right|_{X(k)=\hat{X}(k)} \tag{56}$$

substituindo-se (56) e (57) em (53)

$$\begin{aligned} X(k+1) &= F_k X(k) + G_k\omega(k) \\ &+ f\big(\hat{X}(k), U(k)\big) - F_k\hat{X}(k) \end{aligned} \tag{57}$$

que juntamente com (54) forma um sistema linear variante no tempo com entrada $f\big(\hat{X}(k), U(k)\big) - F_k\hat{X}(k)$, que pode ser perfeitamente determinada no instante k e portanto é uma entrada determinística. Portanto pode-se utilizar o seguinte algoritmo para o filtro de Kalman estendido [11]

$$K(k) = \big(F_k P(k) F_k^{\,T}\big)\big(P(k) + R\big)^{-1} \tag{58}$$

$$\begin{aligned} \hat{X}(k+1) &= f\big(\hat{X}(k), U(k)\big) \\ &+ K(k)\big(y(k+1) - \hat{X}(k)\big) \end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned} P(k+1) &= F_k P(k) F_k^{\,T} + G_k Q G_k^{\,T} \\ &- K(k)\big(P(k) + R\big)K(k)^T \end{aligned} \tag{60}$$

com condições iniciais P(0) e $\hat{X}(0)$.

## 5. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Para exemplificar a efetividade do método proposto analisa-se a trajetória do veículo empregando três técnicas distintas para obtenção dos estados. Em todas estas técnicas considera-se como vetor de entradas equivalentes

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{y}_{m_1} + \alpha_1\big(\dot{y}_{m_1} - \dot{x}_r\big) + \alpha_2\big(y_{m_1} - x_r\big) \\ \ddot{y}_{m_2} + \alpha_3\big(\dot{y}_{m_2} - \dot{y}_r\big) + \alpha_4\big(y_{m_2} - y_r\big) \end{bmatrix} \tag{61}$$

onde $y_{m_1}$ e $y_{m_2}$ são as saídas dos modelos de referência associados a cada componente de (28), descritos pelas seguintes funções de transferência

$$G_{m_1}(s) = \frac{\alpha_1}{s^2 + \alpha_2 s + \alpha_1} \tag{62}$$

$$G_{m_2}(s) = \frac{\alpha_3}{s^2 + \alpha_4 s + \alpha_3} \tag{63}$$

com $\alpha_1 = \alpha_2 = 49$ e $\alpha_3 = \alpha_4 = 9.8$.

Na Figura 4 apresenta-se o comportamento da plataforma supondo o acesso completo aos estados com $x_r(0)$=0.0m e $y_r(0)$=0.5m.

Na Figura 5 apresenta-se a trajetória realizada pela plataforma com realimentação supondo acesso completo aos estados e a trajetória estimada por *dead-reckoning*.

Observa-se que a trajetória obtida por *dead reckoning* coincide com a trajetória realizada apenas nos instantes iniciais. Este comportamento deve-se ao efeito integral intrínseco à esta técnica, o que inviabiliza por completo a realimentação dos estados obtidos por *dead reckoning* na estratégia de controle linearizante.

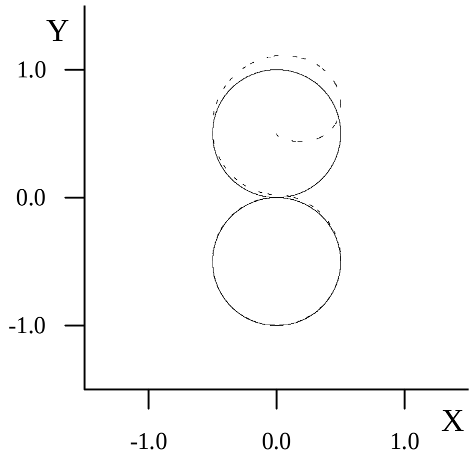


Figura 4: Trajetória de referência (sólida) e trajetória realizada pela plataforma com acesso completo aos estados (pontilhada).

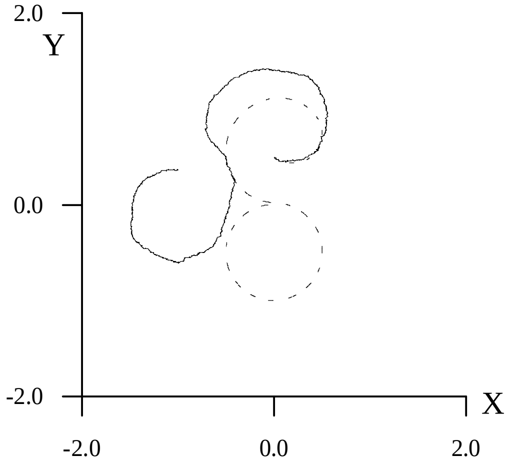


Figura 5: Trajetória com acesso completo aos estados (pontilhada) e trajetória estimada por *dead-reckoning* (sólida).

A Figura 6 mostra a trajetória descrita pela plataforma empregando-se, na recomposição dos estados, dados obtidos por processamento de imagens e *dead-reckoning*, fundidos através do filtro de Kalman estendido.

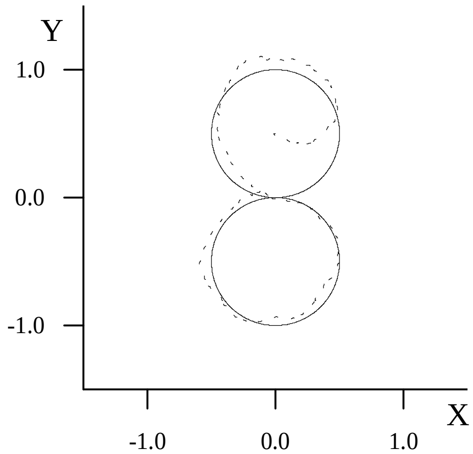


Figura 6: Trajetória de referência (sólida) e trajetória estimada por fusão de dados via filtro de Kalman estendido (pontilhada).

## 6. CONCLUSÕES

Foi apresentado neste artigo uma estratégia para navegação de veículos autônomos empregando o equacionamento dinâmico e cinemático do veículo, utilizado para determinação de uma estratégia de controle linearizante por realimentação de estados. O problema da reconstrução dos estados necessários para o cálculo do sinal de controle é detalhadamente abordado. A estimação dos estados é realizada através da fusão via filtro de Kalman estendido de dados obtidos por processamento de imagens e *dead-reckoning*.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


[1] HOLLESTEIN, A. A., *Aufdatierung der Position und der Orientierung eines mobilen Roboters.* Zürich, 1992, ETH Doktor Abhandlung.

[2] MURATA, S.; HIROSE, T., On Board Locating System Using Real-Time Image Processing for a Self-Navigating Vehicle, *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, v. 40, n. 1, 1993.

[3] BYLER, E.; WENDELL, C.; HOFF, W.; LAYNE, D., Autonomous Hazardous Waste Drum Inspection Vehicle, *IEEE Robotics & Automation Magazine*, v. 2, n. 1, p. 6-17, 1995.

[4] YAMAMOTO, Y.; YUN, X., Coordinating Locomotion and Manipulation of a Mobile Manipulator, *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. 39, n. 6, 1994.

[5] ISIDORI, A. *Nonlinear Control Systems - An Introduction*, Berlin, Springer-Verlag, 1989.

[6] SASTRY, S.; ISIDORI, A., Adaptive Control of Linearizable Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. 34, n. 11, 1989.

[7] AICARDI, M.; CASALINO, G.; BICCHI, A.; BALESTRINO, A., Loop Steering of Unicycle-like Vehicles via Lyapunov Techniques, *IEEE Robotics & Automation Magazine*, v. 2, n. 1, 1995.

[8] BLOCH, A.; REYHANOGLU, M.; McCLAMROCH, N., Control and Stabilization of Nonholonomic Dynamic Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. 37, n. 11, 1992.

[9] CANUDAS de WIT, C.; SØRDALEN, O. J., Exponential Stabilization of Mobile Robots with Nonholonomic Constraints, *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. 37, n. 11, 1992.

[10] BALLARD, D. H., Generalizing the Hough Transform to Detect Arbitrary Shapes, *Pattern Recognition*, v. 13, p. 111-122, 1981.

[11] GOODWIN, G.; SIN, K. *Adaptive Filtering Prediction and Control*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1984.