

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

FELIPE KÜHNE

**CONTROLE PREDITIVO DE ROBÔS
MÓVEIS NÃO HOLONÔMICOS**

Porto Alegre
2005

FELIPE KÜHNE

**CONTROLE PREDITIVO DE ROBÔS
MÓVEIS NÃO HOLONÔMICOS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Automação e Instrumentação Eletro-Eletrônica

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. Walter Fetter Lages

Porto Alegre
2005

FELIPE KÜHNE

**CONTROLE PREDITIVO DE ROBÔS
MÓVEIS NÃO HOLONÔMICOS**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: _____
Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr., UFRGS
Doutor pela Universidade Paul Sabatier – Toulouse, França

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Julio Elias Normey-Rico, UFSC
Doutor pela Universidade de Sevilla – Sevilla, Espanha

Prof. Dr. Jorge Otávio Trierweiler, UFRGS
Doutor pela Universidade de Dortmund – Dortmund, Alemanha

Prof. Dr. Romeu Reginatto, UFRGS
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC

Coordenador do PPGEE: _____
Prof. Dr. Carlos Eduardo Pereira

Porto Alegre, março de 2005.

DEDICATÓRIA

Aos meus pais João e Elisabeth e à minha namorada Luciana.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de deixar aqui meus profundos agradecimentos ao meu orientador, Prof. João Manoel, e ao meu co-orientador, Prof. Walter, pela inspiração, amizade e constante disponibilidade durante todo o curso de mestrado.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, PPGEE, pela oportunidade de realização de trabalhos em minha área de pesquisa, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, pela provisão da bolsa de mestrado e aos professores do DELET.

Agradeço também a todos os colegas do PPGEE e amigos da TOL. Especialmente, destaco os colegas Rodrigo, Fernando e Miguel como os principais incentivadores de tempo perdido e conversa jogada fora nos cafés do Bar do Antônio e nos almoços do RU.

Por fim, e não menos importante, gostaria de agradecer à minha namorada Luciana e aos meus pais, João e Elisabeth, a quem eu dedico este trabalho e sem os quais tudo isso não seria possível.

RESUMO

O controle de robôs móveis não holonômicos apresenta como principal desafio o fato de estes sistemas não serem estabilizáveis em um ponto através de uma realimentação de estados suave e invariante no tempo, conforme o Teorema de Brockett. Para contornar este resultado, técnicas clássicas utilizam leis de controle variante no tempo ou não suaves (descontínuas). Entretanto, estas técnicas não prevêm durante o cálculo da lei de controle restrições nas variáveis do sistema e assim, muitas vezes, geram entradas de controle que são incompatíveis com uma implementação real. Neste trabalho são desenvolvidos algoritmos de controle preditivo baseado em modelo (MPC) para o controle de robôs móveis não holonômicos dotados de rodas. No MPC, restrições nas variáveis de estado e de controle podem ser consideradas durante o cálculo da lei de controle de uma forma bastante direta. Além disso, o MPC gera implicitamente uma lei de controle não suave, respeitando assim as condições de Brockett. Como o modelo do robô é não linear, é necessário um algoritmo de MPC não linear (NMPC). Dois objetivos são estudados: (1) estabilização em um ponto e (2) rastreamento de trajetória. Através de extensivos resultados de simulação, é mostrada a eficácia da técnica. Referente ao primeiro problema, é feita uma análise comparativa com algumas leis clássicas de controle de robôs móveis, mostrando que o MPC aplicado aqui apresenta uma melhor performance com relação às trajetórias de estado e de controle. No problema de rastreamento de trajetória, é desenvolvida uma técnica linear, alternativa ao NMPC, utilizando linearizações sucessivas ao longo da trajetória de referência, a fim de diminuir o esforço computacional necessário para o problema de otimização. Para os dois problemas, análises referentes ao esforço computacional são desenvolvidas com o intuito de mostrar a viabilidade das técnicas de MCP apresentadas aqui em uma implementação real.

Palavras-chave: Sistemas não holonômicos, robôs móveis, controle preditivo baseado em modelo.

ABSTRACT

In what concerns to the control of non-holonomic mobile robots, the main challenge lies on the fact that these systems are not point stabilizable through a smooth, time invariant state feedback, as postulated by the Brockett Theorem. To overcome this result, classical approaches are the use of time variant or nonsmooth (discontinuous) control laws. However, these approaches do not take into account constraints on system's variables during the computation of the control signals. In doing so, it is often the case that classical techniques generate control inputs which are not feasible for actual implementations. In the present work, model-based predictive control (MPC) algorithms are developed for the control of nonholonomic wheeled mobile robots. By using MPC, constraints in both state and control variables become readily accountable during the computation of the control law in an straightforward way. Moreover, MPC implicitly generates a nonsmooth control law which, in turn, respects Brockett conditions. Since the model of the robot is nonlinear, a nonlinear MPC (NMPC) is needed. Studies are aimed towards two goals: (1) point stabilization and (2) trajectory tracking. Comprehensive simulation results assure the effectiveness of the proposed method. Furthermore, concerning the challenging problems forementioned, comparative studies show the MPC herein outperforms several classical approaches in what regards to both state and control trajectories. With respect to the problem of trajectory tracking, a linear alternative technique to NMPC is developed, in order to reduce the computational effort required to solve the optimization problem. For both problems, computational effort analyses are developed with the purpose of speculating the viability of the application of the proposed techniques in a real implementation.

Keywords: nonholonomic systems, mobile robots, model-based predictive control.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	15
LISTA DE TABELAS	23
LISTA DE ABREVIATURAS	25
LISTA DE SÍMBOLOS	27
1 INTRODUÇÃO	29
1.1 Organização do Documento	33
2 ROBÔS MÓVEIS DOTADOS DE RODAS	35
2.1 Introdução	35
2.2 Sistemas Mecânicos Não Holonômicos	35
2.2.1 Exemplo: Um Disco Rolando em um Plano	36
2.2.2 Exemplo: Um Carro Estacionando	37
2.3 Cinemática de Robôs Móveis Dotados de Rodas	38
2.3.1 Propriedades do Modelo Cinemático	40
2.4 Métodos Clássicos Para o Controle de Robôs Móveis	43
2.4.1 Controle Variante no Tempo	44
2.4.2 Controle Não Suave	50
3 FUNDAMENTOS DE CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO	57
3.1 Introdução	57
3.2 Perspectiva Histórica	57
3.3 Elementos Essenciais	60
3.4 Formulação do MPC Não Linear	61
3.5 Formulação do MPC Linear	63
3.6 MPC Aplicado a Robôs Móveis	66
4 MPC DE ROBÔS MÓVEIS: ESTABILIZAÇÃO EM UM PONTO	69
4.1 Introdução	69
4.2 Formulação do Problema	69
4.3 Função de Custo em Coordenadas Cartesianas	70
4.4 Função de Custo em Coordenadas Polares	76
4.5 MPC com Restrições no Controle	80
4.6 MPC Com Restrições no Controle e no Estado	84
4.7 Análises Comparativas	89

4.7.1	Comparação Entre o NMPC Com Função De Custo Em Coordenadas Polares e o NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001)	89
4.7.2	Comparação Entre o NMPC Com Função De Custo Em Coordenadas Polares e o Controle Variante No Tempo de (POMET et al., 1992)	92
4.7.3	Comparação Entre o NMPC Com Função De Custo Em Coordenadas Polares e o Controle Variante No Tempo de (SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991a)	93
4.7.4	Comparação Entre o NMPC Com Função De Custo Em Coordenadas Polares e o Controle Variante No Tempo De (TEEL; MURRAY; WALSH, 1995)	96
4.7.5	Comparação Entre o NMPC Com Função De Custo Em Coordenadas Polares e o Controle Descontínuo De (LAGES, 1998)	98
4.7.6	Comparação Entre o NMPC Com Função De Custo Em Coordenadas Polares e o Controle Descontínuo De (SØRDALEN, 1993a)	99
4.8	O Custo Computacional do NMPC	101
5	MPC DE ROBÔS MÓVEIS: RASTREAMENTO DE TRAJETÓRIA	107
5.1	Introdução	107
5.2	Formulação do Problema	108
5.3	Rastreamento de Trajetória com um MPC Não Linear	108
5.4	O Custo Computacional do NMPC	119
5.5	Rastreamento de Trajetória com um MPC Linear	121
5.5.1	O Algoritmo de Programação Quadrática	122
5.6	O Custo Computacional do LMPC	134
6	CONCLUSÃO	139
6.1	Trabalhos Futuros	140
	REFERÊNCIAS	143
	APÊNDICE A O ROBÔ MÓVEL TWIL	151

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1:	<i>PIG</i> : robô utilizado para inspeção, limpeza e reparos em tubulações. .	29
Figura 2:	O humanóide ASIMO, desenvolvido pela Honda do Japão.	30
Figura 3:	Robô móvel dotado de rodas.	30
Figura 4:	O robô-lagarta URBIE, subindo uma escada (MATTHIES et al., 2000). .	30
Figura 5:	Robô dotado de pernas, capaz de se locomover em ambientes não estruturados, como por exemplo um vulcão.	31
Figura 6:	Ilustração do efeito da saturação dos atuadores na entrada de controle. .	32
Figura 7:	Exemplo clássico de um sistema não holonômico: um disco rolando em um plano.	37
Figura 8:	Exemplo de trajetórias para um carro estacionando.	38
Figura 9:	Modelo geométrico de um robô móvel com acionamento diferencial. .	39
Figura 10:	A restrição não holonômica.	40
Figura 11:	Trajectoria no plano XY . Controle de (POMET et al., 1992).	45
Figura 13:	Entradas de controle v e w . Controle de (POMET et al., 1992).	46
Figura 12:	Estados x , y e θ . Controle de (POMET et al., 1992).	46
Figura 14:	Trajectoria no plano XY . Controle de (SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991a).	47
Figura 16:	Entradas de controle v e w . Controle de (SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991a).	48
Figura 15:	Estados x , y e θ . Controle de (SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991a).	48
Figura 17:	Trajectoria no plano XY . Controle de (TEEL; MURRAY; WALSH, 1995).	49
Figura 19:	Entradas de controle v e w . Controle de (TEEL; MURRAY; WALSH, 1995).	50
Figura 18:	Estados x , y e θ . Controle de (TEEL; MURRAY; WALSH, 1995). . .	50
Figura 20:	Coordenadas polares para o robô com acionamento diferencial. . . .	51
Figura 21:	Trajectoria no plano XY . Controle de (LAGES, 1998).	52
Figura 22:	Estados x , y e θ . Controle de (LAGES, 1998).	52
Figura 23:	Entradas de controle v e w . Controle de (LAGES, 1998).	53
Figura 24:	Transformação descontínua de coordenadas.	53
Figura 25:	Trajectoria no plano XY . Controle de (SØRDALEN, 1993a).	54
Figura 26:	Estados x , y e θ . Controle de (SØRDALEN, 1993a).	55
Figura 27:	Entradas de controle v e w . Controle de (SØRDALEN, 1993a). . . .	55
Figura 28:	O controle preditivo.	63

Figura 29:	Trajectoria no plano XY . NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.	70
Figura 30:	Estados x, y e θ . NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.	71
Figura 31:	Entradas de controle v e w . NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.	71
Figura 32:	Função de custo Φ . NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.	71
Figura 33:	Efeito do aumento do horizonte N no erro em regime do estado y . Linha contínua: $N = 5$; linha tracejada: $N = 10$; linha traço-ponto: $N = 20$; linha pontilhada: $N = 50$	72
Figura 34:	Trajectoria no plano XY . O ponto de equilíbrio é agora $\mathbf{x}_{ref} = [0 \ 0 \ \pi/2]^T$	73
Figura 35:	Trajectoria no plano XY . NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).	74
Figura 36:	Estados x, y e θ . NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001)	74
Figura 37:	Entradas de controle v e w . NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001)	75
Figura 38:	Detalhe da origem no plano XY . NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001)	75
Figura 39:	Comportamento do robô no plano XY para várias posições de saída e $\theta_0 = 0 \text{ rad}$. NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001)	76
Figura 40:	Detalhe da origem no plano XY para várias posições de saída e $\theta_0 = 0 \text{ rad}$. NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001)	76
Figura 41:	Coordenadas polares para o robô com acionamento diferencial.	77
Figura 42:	Trajectoria no plano XY . NMPC com função de custo em coordenadas polares.	78
Figura 43:	Estados x, y e θ . NMPC com função de custo em coordenadas polares.	78
Figura 44:	Entradas de controle v e w . NMPC com função de custo em coordenadas polares.	79
Figura 45:	Função de custo Φ . NMPC com função de custo em coordenadas polares.	79
Figura 46:	Detalhe na origem do plano XY . NMPC com função de custo em coordenadas polares.	79
Figura 47:	Trajectoria no plano XY . NMPC com função de custo em coordenadas polares.	81
Figura 48:	Estados x, y e θ . NMPC com função de custo em coordenadas polares.	81
Figura 49:	Entradas de controle v e w . NMPC com função de custo em coordenadas polares.	82
Figura 50:	Função de custo Φ . NMPC com função de custo em coordenadas polares.	82
Figura 52:	Estados x, y e θ . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; linha tracejada: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha traço-ponto: NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.	83
Figura 51:	Trajectoria no plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; linha tracejada: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha traço-ponto: NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.	83

Figura 53:	Entradas de controle v e w . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; linha tracejada: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha traço-ponto: NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.	84
Figura 54:	Função de custo Φ . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; linha tracejada: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha traço-ponto: NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.	84
Figura 55:	Espaço de configuração no plano XY : um corredor em "L".	85
Figura 56:	Trajetória no plano XY . NMPC com função de custo em coordenadas polares.	87
Figura 57:	Estados x , y e θ . NMPC com função de custo em coordenadas polares.	87
Figura 58:	Entradas de controle v e w . NMPC com função de custo em coordenadas polares.	88
Figura 59:	Função de custo Φ . NMPC com função de custo em coordenadas polares.	88
Figura 60:	Trajetória no plano XY . NMPC com função de custo em coordenadas polares. Linha contínua: com restrições nos estados; Linha tracejada: sem restrições nos estados.	88
Figura 61:	Trajetória no plano XY . NMPC com função de custo em coordenadas polares.	89
Figura 62:	Trajetória no plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).	90
Figura 63:	Estados x , y e θ . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).	90
Figura 64:	Entradas de controle v e w . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).	91
Figura 65:	Detalhe da origem no plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).	91
Figura 66:	Trajetória no plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (POMET et al., 1992).	92
Figura 67:	Estados x , y e θ . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (POMET et al., 1992).	92
Figura 68:	Entradas de controle v e w . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (POMET et al., 1992).	93
Figura 69:	Detalhe da origem do plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (POMET et al., 1992).	93
Figura 70:	Trajetória no plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991a).	94

Figura 71:	Estados x , y e θ . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991a).	94
Figura 72:	Entradas de controle v e w . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991a).	95
Figura 73:	Detalhe da origem do plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991a).	95
Figura 74:	Trajetória no plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (TEEL; MURRAY; WALSH, 1995).	96
Figura 75:	Estados x , y e θ . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (TEEL; MURRAY; WALSH, 1995).	96
Figura 76:	Entradas de controle v e w . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (TEEL; MURRAY; WALSH, 1995).	97
Figura 77:	Detalhe da origem do plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (TEEL; MURRAY; WALSH, 1995).	97
Figura 78:	Trajetória no plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (LAGES; HEMERLY, 1998).	98
Figura 79:	Estados x , y e θ . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (LAGES; HEMERLY, 1998).	98
Figura 80:	Entradas de controle v e w . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (LAGES; HEMERLY, 1998).	99
Figura 81:	Trajetória no plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (SØRDALEN, 1993a).	100
Figura 82:	Estados x , y e θ . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (SØRDALEN, 1993a).	100
Figura 83:	Entradas de controle v e w . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (SØRDALEN, 1993a).	101
Figura 84:	Trajetória no plano XY . NMPC com função de custo em coordenadas polares. Linha contínua: $N = 5$; linha tracejada: $N = 12$	104
Figura 85:	Estados x , y e θ . NMPC com função de custo em coordenadas polares. Linha contínua: $N = 5$; linha tracejada: $N = 12$	104
Figura 86:	Entradas de controle v e w . NMPC com função de custo em coordenadas polares. Linha contínua: $N = 5$; linha tracejada: $N = 12$	105
Figura 87:	Função de custo Φ . NMPC com função de custo em coordenadas polares. Linha contínua: $N = 5$; linha tracejada: $N = 12$	105

Figura 88:	Trajetoária do robô no plano XY para uma referência circular (linha traço-ponto). NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.	109
Figura 89:	Estados x , y e θ . NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas. A linha traço-ponto representa o estado de referência.	109
Figura 90:	Entradas de controle v e w . NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas. A linha traço-ponto representa a entrada de referência.	110
Figura 91:	Função de custo Φ . NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.	110
Figura 92:	Trajetoária do robô no plano XY para uma referência em U (linha traço-ponto). NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.	111
Figura 93:	Estados x , y e θ . NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas. A linha traço-ponto representa o estado de referência.	111
Figura 94:	Entradas de controle v e w . NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas. A linha traço-ponto representa a entrada de referência.	112
Figura 95:	Função de custo Φ . NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.	112
Figura 96:	Trajetoária do robô no plano XY para uma referência circular (linha traço-ponto). NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).	113
Figura 97:	Estados x , y e θ . NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001). A linha traço-ponto representa o estado de referência.	113
Figura 98:	Entradas de controle v e w . NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001). A linha traço-ponto representa a entrada de referência.	114
Figura 99:	Função de custo Φ . NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).	114
Figura 100:	Trajetoária do robô no plano XY para uma referência em U (linha traço-ponto).	115
Figura 101:	Estados x , y e θ . NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001). A linha traço-ponto representa o estado de referência.	115
Figura 102:	Entradas de controle v e w . NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001). A linha traço-ponto representa a entrada de referência.	116
Figura 103:	Função de custo Φ . NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).	116
Figura 104:	Trajetoária do robô no plano XY . Linha contínua: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha tracejada: NMPC com função de custo original; linha traço-ponto: trajetória de referência.	117
Figura 105:	Estados x , y e θ . Linha contínua: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha tracejada: NMPC com função de custo original; linha traço-ponto: trajetória de referência.	117
Figura 106:	Entradas de controle v e w . Linha contínua: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha tracejada: NMPC com função de custo original; linha traço-ponto: trajetória de referência.	118
Figura 107:	Função de custo Φ . Linha contínua: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha tracejada: NMPC com função de custo original. . .	118
Figura 108:	Função de custo Φ . Linha contínua: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001) com $N = 5$; linha tracejada: NMPC com função de custo original e $N = 20$	119

Figura 109:	Trajetória do robô no plano XY . Linha contínua: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001) com $N = 5$; linha tracejada: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001) com $N = 15$; linha traço-ponto: trajetória de referência.	120
Figura 110:	Trajetória do robô no plano XY para uma referência circular (linha traço-ponto). LMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.	125
Figura 111:	Estados x , y e θ . LMPC com função de custo em coordenadas cartesianas. A linha traço-ponto representa o estado de referência.	125
Figura 112:	Entradas de controle v e w . LMPC com função de custo em coordenadas cartesianas. A linha traço-ponto representa a entrada de referência.	126
Figura 113:	Função de custo Φ . LMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.	126
Figura 114:	Trajetória do robô no plano XY para uma referência em forma de U (linha traço-ponto). LMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.	127
Figura 115:	Estados x , y e θ . LMPC com função de custo em coordenadas cartesianas. A linha traço-ponto representa o estado de referência.	127
Figura 116:	Entradas de controle v e w . LMPC com função de custo em coordenadas cartesianas. A linha traço-ponto representa a entrada de referência.	128
Figura 117:	Função de custo Φ . LMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.	128
Figura 118:	Trajetória do robô no plano XY para uma referência circular (linha traço-ponto). LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).	129
Figura 119:	Estados x , y e θ . LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001). A linha traço-ponto representa o estado de referência.	130
Figura 120:	Entradas de controle v e w . LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001). A linha traço-ponto representa a entrada de referência.	130
Figura 121:	Função de custo Φ . LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).	130
Figura 122:	Trajetória do robô no plano XY para uma referência em forma de U (linha traço-ponto). LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).	131
Figura 123:	Estados x , y e θ . LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001). A linha traço-ponto representa o estado de referência.	131
Figura 124:	Entradas de controle v e w . LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001). A linha traço-ponto representa a entrada de referência.	132
Figura 125:	Função de custo Φ . LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).	132
Figura 126:	Trajetória do robô no plano XY . Linha contínua: LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha tracejada: LMPC com função de custo original; linha traço-ponto: trajetória de referência.	133
Figura 127:	Estados x , y e θ . Linha contínua: LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha tracejada: LMPC com função de custo original; linha traço-ponto: trajetória de referência.	133
Figura 128:	Entradas de controle v e w . Linha contínua: LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha tracejada: LMPC com função de custo original; linha traço-ponto: trajetória de referência.	134
Figura 129:	Função de custo Φ . Linha contínua: LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha tracejada: LMPC com função de custo original.	134

Figura 130:	Trajetoária do robô no plano XY . Linha contínua: NMPC; linha tra- cejada: LMPC; linha traço-ponto: trajetória de referência.	136
Figura 131:	Trajetoária do robô no plano XY . Linha contínua: NMPC; linha tra- cejada: LMPC; linha traço-ponto: trajetória de referência.	136
Figura 132:	Trajetoária do robô no plano XY . Linha contínua: NMPC; linha tra- cejada: LMPC; linha traço-ponto: trajetória de referência.	137

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Custo computacional de algumas leis clássicas de controle de robôs móveis.	102
Tabela 2:	Custo computacional do NMPC - estabilização na origem - caso 1. . .	102
Tabela 3:	Custo computacional do NMPC - estabilização na origem - caso 2. . .	103
Tabela 4:	Custo computacional do NMPC - estabilização na origem - caso 3. . .	103
Tabela 5:	Custo computacional do NMPC - rastreamento de trajetória.	120
Tabela 6:	Custo computacional do LMPC - rastreamento de trajetória.	135

LISTA DE ABREVIATURAS

CARIMA	<i>Controlled Autoregressive and Moving Average</i>
DMC	<i>Dynamic Matrix Control</i>
EPSAC	<i>Extended Prediction Self Adaptive Control</i>
flops	<i>floating-point operations per second</i>
GPC	<i>Generalized Predictive Control</i>
LMPC	<i>Linear Model-based Predictive Control</i>
MAC	<i>Model Algorithmic Control</i>
MPC	<i>Model-based Predictive Control</i>
mp-QP	<i>multi-parametric Quadratic Programming</i>
NMPC	<i>Nonlinear Model-based Predictive Control</i>
OPF	<i>Operações em Ponto Flutuante</i>
QDMC	<i>Quadratic Dynamic Matrix Control</i>
QP	<i>Quadratic Programming</i>
RHC	<i>Receding Horizon Control</i>
SPGPC	<i>Smith-Predictor Generalized Predictive Control</i>
UNECE	<i>United Nations Economic Commission for Europe</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbf{x}	Vetor de ordem n composto de elementos $x_i, i = 1 \dots n$. Diz-se então que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
\mathbf{x}^T	Vetor transposto de \mathbf{x}
$\dot{\mathbf{x}}$	Derivada temporal de \mathbf{x}
$\{O, X_o, Y_o\}$	Sistema de coordenadas cartesianas, formado pela origem O , um eixo horizontal X_o e um vertical Y_o
$\dim\{\mathbf{x}\}$	Dimensão de \mathbf{x}
$\text{inv } \Delta$	Fechamento involutivo de uma distribuição Δ
\mathbf{M}	Matriz de dimensão $n_1 \times n_2, \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$
$\text{rank}\{\mathbf{M}\}$	Posto da matriz \mathbf{M}
\mathcal{C}	Matriz de controlabilidade
\mathbf{x}_0	Condição inicial de \mathbf{x}
\mathbf{x}_f	Condição final de \mathbf{x}
k	Instante de amostragem
Φ	Função de custo do MPC
N_1	Início do horizonte de predição de estados
N_2	Fim do horizonte de predição de estados
N_u	Horizonte de controle
N	Horizonte de predição
\mathbf{Q}	Matriz de ponderação do erro de estado
\mathbf{R}	Matriz de ponderação do esforço de controle
$\mathbf{x}(a b)$	Valor de \mathbf{x} no instante a predito no instante b
\mathbf{x}^*	Valor ótimo da variável \mathbf{x}
$\min\{\mathbf{x}\}$	Valor mínimo da variável \mathbf{x}
\mathbf{x}_{ref}	Valor de referência da variável \mathbf{x}
Ω	Custo terminal
\mathbf{P}	Matriz de ponderação do custo terminal Ω

$\text{atan2}(y, x)$	Valor do arco tangente de y/x , usando os sinais dos dois argumentos para determinar o quadrante do valor retornado
$\text{diag}(a_1; \dots; a_n)$	Matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são a_i , $i = 1 \dots n$ e os outros elementos são zero.
\bar{x}	Limite de amplitude da variável x
\mathbf{I}	Matriz identidade de dimensão apropriada
$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$	O conjunto \mathbb{A} é um subconjunto do conjunto \mathbb{B}
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$	União dos conjuntos \mathbb{A} e \mathbb{B}
T	Período de amostragem
\tilde{x}	Variável de erro $x - x_{ref}$
$f_{\mathbf{x},a}$	Matriz jacobiana de f com relação a \mathbf{x} em torno de um ponto a

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, o uso de robôs para as mais variadas aplicações (industriais, comerciais ou residenciais) tem se tornado cada vez mais comum, dada a sua capacidade de executar tarefas com maior eficiência, ou aquelas que seres-humanos são incapazes de executar. O uso de robôs em ambientes industriais aumentou de 70 mil para 420 mil entre 1983 e 1991, considerando Japão, Estados Unidos e Europa (SCHRAFT, 1994). Para o ano de 2007, este número está estimado em um milhão unidades, o que, segundo a UNECE (*United Nations Economic Commission for Europe*) em seu relatório anual, ainda é uma estimativa bastante conservadora (WORLD ROBOTICS 2004, 2004).

Para garantir a qualidade e aumentar a produtividade, a indústria automobilística utiliza robôs manipuladores que realizam operações de soldagem e montagem. Em tubulações de petróleo ou gás natural, por exemplo, utiliza-se um tipo de robô chamado *PIG* (*Pipeline Inspection Gauge*, Figura 1) que realiza a limpeza e inspeção da tubulação pela sua parte interna. Existem também robôs capazes de realizar explorações em outros planetas, como no projeto *Mars Surveyor*, da Agência Espacial Norte-americana (NASA) (WEISBIN; LAVERY, 1994), e robôs cuja sua concepção é inspirada no comportamento de um ser humano, como o humanóide Asimo, da Honda (Figura 2) (SAKAGAMI et al., 2002). Em terremotos, são utilizados robôs-serpentes que são capazes de explorar os escombros, auxiliando na busca e resgate de sobreviventes. Enfim, a lista de aplicações de robôs atualmente é bastante vasta.

Dentro da categoria de robôs móveis, distinguem-se três tipos (LAGES, 1998): os *dotados de rodas* (Figura 3), os do tipo *lagarta* (Figura 4) e os *acionados por pernas* (Figura 5), os dois últimos reservados principalmente a ambientes externos e não estruturados, dada à maior capacidade que estes têm em transpor obstáculos e irregularidades do terreno. Os robôs móveis dotados de rodas comumente são utilizados em aplicações industriais e comerciais como, por exemplo, no transporte de cargas, robôs de segurança, cortadores de grama, aspiradores de pó, etc.

Robôs com rodas têm uma concepção mais fácil se comparada aos do tipo lagarta e aos

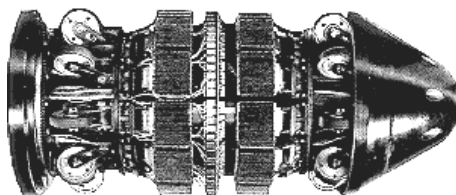


Figura 1: *PIG*: robô utilizado para inspeção, limpeza e reparos em tubulações.



Figura 2: O humanóide ASIMO, desenvolvido pela Honda do Japão.

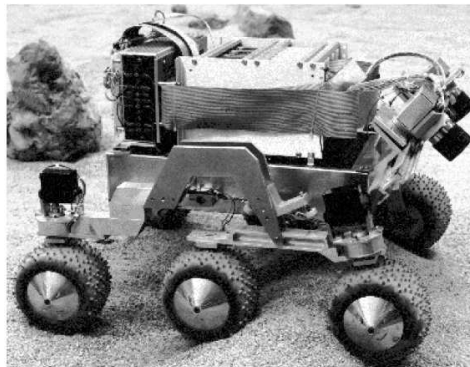


Figura 3: Robô móvel dotado de rodas.

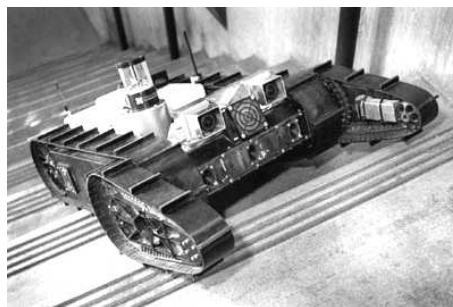


Figura 4: O robô-lagarta URBIE, subindo uma escada (MATTHIES et al., 2000).



Figura 5: Robô dotado de pernas, capaz de se locomover em ambientes não estruturados, como por exemplo um vulcão.

dotados de pernas, dada a sua simplicidade estrutural¹. Por outro lado, os robôs móveis com rodas comumente apresentam restrições ao seu movimento, como aquelas devidas ao não escorregamento das rodas. Assim, restrições que fazem com que a dimensão do espaço das velocidades seja menor que a dimensão do espaço de configuração do robô são chamadas de restrições *não holonômicas*. Um exemplo típico do efeito das restrições não holonômicas é a manobra que um carro precisa fazer para estacionar (vide seção 2.2.2). Por causa destas restrições, e pelo fato de ser um sistema não linear, os robôs móveis têm em seu controle um dos principais problemas, tornando a concepção de estratégias de controle para estes sistemas uma tarefa extremamente complicada e desafiadora.

Esta relativa dificuldade na síntese de controle depende não apenas da natureza da não holonomicidade do sistema mas também de quais objetivos deseja-se alcançar com tal controle (KOLMANOVSKY; MCCLAMROCH, 1995). Assim, o controle de robôs móveis pode ter como objetivo fazer com que o robô siga uma determinada trajetória (ou caminho) ou que o mesmo estabilize em uma postura (posição e orientação) fixa de referência. Para esta última tarefa, existem algumas limitações apresentadas por Brockett (BROCKETT, 1982) em que um sistema não holonômico sem deriva não pode ser estabilizado por meio de uma realimentação de estados suave (infinitamente diferenciável) e invariante no tempo. Entretanto, leis de controle *variantes no tempo* ou *não suaves* podem resolver este problema. Para alguns objetivos, abordagens clássicas de controle não linear (como o método de linearização por realimentação) são efetivas. Por exemplo, pode-se resolver o sub-problema de estabilizar apenas a postura do robô (desconsiderando-se a orientação) por uma linearização por realimentação de estados estática e suave (KÜHNE et al., 2004). Em alguns casos particulares, isto não é muito restritivo, visto que muitas vezes o corpo do robô possui uma geometria circular.

Obviamente, um robô móvel dotado de rodas é um sistema complexo, possuindo partes mecânicas (como o corpo, rodas e articulações), partes elétricas (como os sensores e circuitos eletrônicos) e partes eletromecânicas (como os atuadores). O movimento deste robô sobre o solo é realizado através do torque desenvolvido pelos motores, aplicado aos

¹Robôs-lagarta e robôs com pernas possuem articulações de difícil concepção, enquanto que os mecanismos responsáveis pelo movimento de robôs com rodas são constituídos de motores e rodas apenas.

eixos de rotação das rodas. E como qualquer sistema eletromecânico, estes motores estão sujeitos à saturação, levando assim, por exemplo, a um limite na amplitude do torque mecânico (e conseqüentemente da velocidade) que este motor pode desenvolver, o que pode ser considerado como uma restrição na amplitude das entradas de controle. Mesmo que o controlador calcule um determinado valor de controle, é possível que o mesmo não seja efetivamente aplicado, pois estará sempre sujeito às limitações físicas impostas, neste caso, pelo sistema de atuação (Figura 6).

Assim, as leis de controle são em geral concebidas esperando-se que o controle calculado nunca atinja o nível de saturação dos atuadores, embora isto não seja sempre possível. Por exemplo, a saturação pode ocorrer quando o robô encontra-se muito distante de seu objetivo, gerando assim sinais de controle muito elevados. O problema pode ser resolvido parcialmente através de parâmetros de ponderação como proposto, por exemplo, em (POMET et al., 1992; CANUDAS DE WIT; SØRDALEN, 1992; LAGES, 1998). Estes parâmetros permitem um ajuste na taxa de convergência do robô (ou seja, na rapidez com que o robô chega na configuração desejada), que pode fazer com que os sinais de controle diminuam e não saturem. De qualquer forma, nenhuma das estratégias clássicas de controle de robôs móveis permite que se considere de forma explícita o efeito das saturações durante o cálculo da lei de controle.

Uma alternativa para resolver este problema e que está recebendo cada vez mais atenção da comunidade acadêmica é a utilização do controle preditivo baseado em modelo (*Model-based Predictive Control*, MPC, ou *Receding Horizon Control*, RHC) (MAYNE et al., 2000). Com o MPC, todo o tipo de restrição, nas variáveis de estado, de saída e de controle, pode ser diretamente considerado durante o cálculo da lei de controle.

O MPC tem como principal característica a utilização de um modelo para prever o comportamento do sistema dentro de um determinado *horizonte* de tempo futuro. Uma função de custo, válida dentro deste horizonte, é minimizada com relação a certas variáveis de decisão, respeitando-se um conjunto de restrições impostas. Obtém-se assim, para cada instante atual, uma seqüência de controle ótima com relação à função de custo. Embora a predição e otimização sejam feitas dentro de toda a extensão do horizonte, apenas a ação de controle atual é efetivamente aplicada no sistema. O procedimento é então repetido no próximo instante de tempo, agora com o horizonte de predição deslocado um passo adiante e com os estados do sistema atualizados. Obtém-se assim uma estratégia de *horizonte deslizante* de controle.

Para sistemas complexos, multivariáveis e com restrições, o MPC tornou-se muito

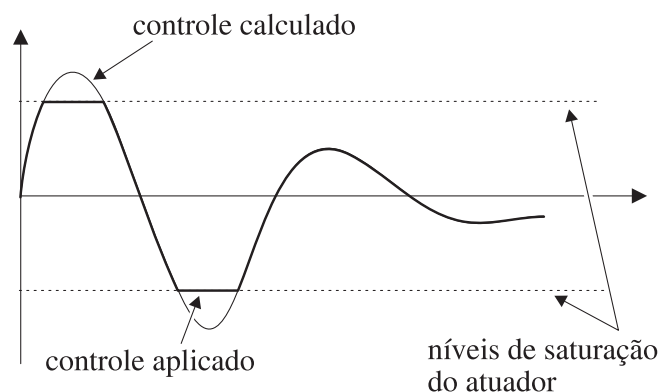


Figura 6: Ilustração do efeito da saturação dos atuadores na entrada de controle.

bem aceito (BEMPORAD et al., 2002), principalmente na indústria de processos onde as plantas a serem controladas são suficientemente lentas para permitirem a sua aplicação (MAYNE et al., 2000). Originalmente desenvolvido para refinarias de petróleo e usinas de energia, hoje em dia o MPC já pode ser encontrado em uma vasta gama de aplicações, como em indústrias de alimentos, automotiva, aeroespacial, metalurgia, etc. O interesse no uso do MPC pela indústria recai principalmente na capacidade que o mesmo tem de levar em conta as restrições durante o cálculo do controle. Assim sendo, a planta é capaz de operar em condições mais próximas de seus limites, aumentando a qualidade e a produtividade do processo. Uma extensa revisão de aplicações do MPC na indústria pode ser vista em (GARCÍA; PRETT; MORARI, 1989; HENSON, 1998; QIN; BADGWELL, 2000) e introduções teóricas podem ser vistas em (ALLGÖWER et al., 1999; CAMACHO; BORDONS, 1999).

Duas grandes vantagens do MPC sobre técnicas convencionais de controle então aparecem: a capacidade de considerar restrições durante o cálculo da lei de controle e a existência de um índice de desempenho, dado pela minimização de uma função de custo. Por outro lado, o MPC também apresenta algumas desvantagens. Uma delas é a necessidade de um modelo do sistema para o cálculo da lei de controle, pois a predição dos estados é utilizada no critério de minimização. Assim, uma modelagem imprecisa pode fazer com que o sistema em malha fechada tenha desempenho insatisfatório ou até mesmo causar instabilidade. Outra desvantagem é o alto custo computacional envolvido, já que um problema de otimização, muitas vezes não convexo, com restrições e de dimensões elevadas, precisa ser resolvido *on-line*. Em sistemas com dinâmicas rápidas ou não lineares, que é o caso de sistemas eletromecânicos como os robôs móveis, a implementação de controladores preditivos permanece essencialmente limitada em sua aplicabilidade, devido ao grande esforço computacional necessário. Contudo, com o desenvolvimento de computadores de maior capacidade e algoritmos numéricos mais eficientes, o uso do MPC em tais aplicações está se tornando possível.

Assim, a possibilidade de se considerar restrições durante o cálculo do controle faz do MPC uma alternativa bastante promissora às técnicas clássicas de controle de robôs móveis. Além disso, a lei de controle calculada com o MPC é não suave, satisfazendo assim as condições de Brockett para sistemas não holonômicos. Alguns trabalhos envolvendo MPC de robôs móveis já foram desenvolvidos, mas ainda são relativamente esparsos. Podem ser citados, por exemplo, (OLLERO; AMIDI, 1991; GÓMEZ-ORTEGA; CAMACHO, 1996; YANG et al., 1998; NORMEY-RICO; GÓMEZ-ORTEGA; CAMACHO, 1999; ESSEN; NIJMEIJER, 2001).

Este trabalho tem então como objetivo o estudo da aplicabilidade de algoritmos de MPC, lineares e não lineares, para o controle de robôs móveis sujeitos à restrições não holonômicas. Dois problemas são abordados: estabilização em um ponto e rastreamento de trajetória (estabilização ao longo de uma referência móvel). Restrições tanto nas entradas de controle quanto nas variáveis de estado serão consideradas. Resultados de simulação, desenvolvidos em Matlab, são extensivamente mostrados, provando a eficácia e a aplicabilidade do MPC em robôs não holonômicos.

1.1 Organização do Documento

Esta dissertação está organizada com segue:

No Capítulo 2 desenvolve-se uma rápida introdução teórica sobre sistemas sujeitos à restrições não holonômicas. Assim, em seguida é dado o modelo cinemático do robô

considerado neste trabalho. O robô Twil será utilizado como estudo de caso (dados construtivos e características físicas deste robô são mostrados no Apêndice A). Também são mostradas algumas propriedades com relação à controlabilidade e estabilizabilidade deste tipo de sistema. Ainda, algumas técnicas clássicas de controle, como o controle variante no tempo e o não suave, são brevemente apresentadas.

O Capítulo 3 aborda o método de controle preditivo baseado em modelo. Uma introdução ao MPC será dada, junto com uma breve perspectiva histórica do método. Os algoritmos para a solução do MPC nos casos não linear e linear são dados. No fim deste capítulo, é feita uma revisão sobre alguns trabalhos envolvendo MPC aplicado a robôs móveis.

No Capítulo 4, desenvolve-se a aplicação do MPC não linear (*Nonlinear Model-based Predictive Control, NMPC*) para o problema de estabilização do robô em uma postura fixa. É proposta uma função de custo com as variáveis de estado em coordenadas polares, e é visto que com esta função de custo o NMPC apresenta um significativo acréscimo de desempenho. Após, restrições nas variáveis de estado e nas entradas de controle passam a ser consideradas. Ainda, várias comparações com o NMPC desenvolvido aqui e com técnicas clássicas de controle de robôs não holonômicos são vistas. Na última seção deste capítulo, um estudo acerca do esforço computacional do NMPC para este problema é desenvolvido, a fim de mostrar a aplicabilidade do método em implementações reais.

O Capítulo 5 trata do problema de rastreamento de trajetória. Agora, dois métodos serão abordados: um com NMPC e outro que envolve a aplicação de linearizações sucessivas do modelo cinemático do robô ao longo de uma trajetória de referência, sendo possível assim o uso de um MPC linear (*Linear Model-based Predictive Control, LMPC*). Um estudo acerca do esforço computacional necessário para resolver este problema também é feito. É mostrado que o tempo computacional necessário para se resolver o problema de minimização é bastante menor, se comparado ao caso não linear, ao mesmo tempo que o desempenho apresentado é bem satisfatório.

No Capítulo 6, serão expostas então as conclusões e algumas sugestões para trabalhos futuros.

2 ROBÔS MÓVEIS DOTADOS DE RODAS

2.1 Introdução

A maioria dos trabalhos existentes na literatura que tratam do controle de robôs móveis dotados de rodas sujeitos a restrições não holonômicas utiliza o modelo cinemático de um robô com acionamento diferencial, do tipo *uniciclo*. Embora seja uma representação bastante simplificada do movimento do veículo, o modelo cinemático é suficiente para capturar as características não holonômicas do sistema.

Como salientado no Capítulo 1, o modelo do sistema a ser controlado é um dos elementos essenciais para a aplicação do MPC. Assim sendo, uma correta modelagem e um perfeito entendimento físico do sistema neste ponto é conveniente.

Então, para uma boa compreensão de como as restrições não holonômicas influenciam no movimento de sistemas mecânicos como os robôs móveis, é dado na primeira seção deste capítulo uma breve descrição de sistemas sujeitos a restrições não holonômicas. Na sequência, a modelagem cinemática baseada no robô Twil¹ é desenvolvida, e algumas propriedades de controlabilidade e estabilizabilidade para este sistema são apresentadas. Logo após, técnicas clássicas de controle de robôs móveis baseadas no modelo cinemático, como leis variantes no tempo e não suaves, são brevemente apresentadas.

2.2 Sistemas Mecânicos Não Holonômicos

Em muitos casos, o movimento de sistemas mecânicos é submetido a certas restrições que são permanentemente satisfeitas durante este movimento, e que tomam a forma de relações algébricas entre posições e velocidades de pontos particulares do sistema (CAMPION; BASTIN; D'ANDRÉA-NOVEL, 1991a). Considerando um sistema mecânico de ordem n representado por um vetor \mathbf{q} de coordenadas generalizadas e um vetor $\dot{\mathbf{q}}$ de velocidades generalizadas,

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix},$$

dois tipos distintos de restrições podem assim ser observadas (BARRAQUAND; LATOMBE, 1989; SØRDALEN, 1993a):

¹Maiores detalhes do robô Twil são descritos no Apêndice A.

- **Restrições geométricas:** são representadas por relações analíticas entre as coordenadas generalizadas \mathbf{q} de um sistema mecânico:

$$f_i(\mathbf{q}) = 0, \quad i = 1 \dots l \quad (1)$$

Quando o sistema é submetido a l restrições geométricas independentes, l coordenadas generalizadas podem ser eliminadas e $n - l$ coordenadas são suficientes para fornecer uma total descrição da configuração do sistema.

- **Restrições cinemáticas:** São representadas por relações analíticas entre as coordenadas \mathbf{q} e as velocidades $\dot{\mathbf{q}}$:

$$f_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0, \quad i = 1 \dots l$$

Na maioria dos casos, estas restrições são lineares com respeito às velocidades generalizadas. Ao contrário das restrições geométricas, restrições cinemáticas não necessariamente levam à eliminação de coordenadas generalizadas da descrição do sistema. Quando a restrição é integrável, ou *holonômica*, ela pode ser reduzida para a forma da expressão (1).

Quando uma restrição cinemática não pode ser integrada, esta não pode ser usada para eliminar qualquer coordenada generalizada, e diz-se então que esta é uma *restrição não holonômica*, e o sistema que possui estas restrições é chamado de *sistema não holonômico*. Neste caso, o número de graus de liberdade (ou o número de velocidades independentes) é igual ao número de coordenadas generalizadas independentes menos o número de restrições não holonômicas (NEIMARK; FUFÁEV, 1972). A seguir serão dados dois exemplos de sistemas com restrições não holonômicas: um disco rolando em um plano e um carro em movimento. Outros exemplos clássicos são o planímetro de A. N. Krylov (NEIMARK; FUFÁEV, 1972) e corpos girantes como naves espaciais e veículos subaquáticos onde a conservação do momento angular precisa ser respeitada (BULLO; LEONARD; LEWIS, 2000).

2.2.1 Exemplo: Um Disco Rolando em um Plano

Um exemplo clássico de um sistema mecânico não holonômico é um disco rolando em um plano horizontal (BLOCH; MCCLAMROCH, 1989; NEIMARK; FUFÁEV, 1972) percorrendo uma trajetória s , sem escorregamento (*derrapagem*), conforme a Figura 7.

As coordenadas de postura, que descrevem o movimento do disco com relação ao plano inercial global π_1 (espaço de configuração) são a posição, dada pelos eixos x e y , e a orientação, dada pelo ângulo θ . φ é o ângulo de rotação do disco com relação ao plano π_2 (plano de rotação do disco). Por causa da restrição de que o disco não derrapa, a velocidade no ponto C (ponto de contato do disco com o plano π_1) é zero. Logo, a magnitude da velocidade tangencial v do centro do disco é proporcional à velocidade angular $\dot{\varphi}$:

$$v = r\dot{\varphi},$$

onde r é o raio do disco. A direção da velocidade é perpendicular ao eixo de rotação do disco, isto é,

$$\dot{x} = v \cos \theta$$

$$\dot{y} = v \sin \theta$$

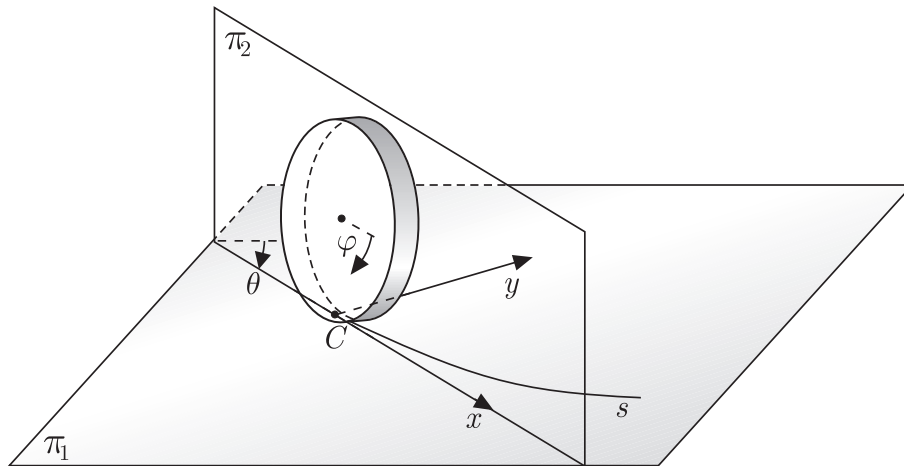


Figura 7: Exemplo clássico de um sistema não holonômico: um disco rolando em um plano.

Estas condições levam às seguintes restrições:

$$\begin{aligned}\dot{x} - r\dot{\varphi} \cos \theta &= 0 \\ \dot{y} - r\dot{\varphi} \sin \theta &= 0\end{aligned}$$

que não podem ser integradas para encontrar uma restrição holonômica da forma $f(x, y, \theta, \varphi) = 0$. Portanto são restrições *não holonômicas*.

2.2.2 Exemplo: Um Carro Estacionando

Um desenho de um carro estacionando é mostrado na Figura 8 (TEEL; MURRAY; WALSH, 1992). Na ausência de obstáculos, ele pode assumir qualquer configuração no plano. Logo, o espaço de configuração possui três graus de liberdade (dois para a posição e um para a orientação). Entretanto, assumindo que a componente da velocidade ortogonal ao plano de rotação π_2 das rodas é zero (na direção de y'), a velocidade no ponto central entre duas rodas ativas (o ponto P) é sempre tangente à orientação do carro (na direção de x'). Com isso, o espaço das velocidades, em qualquer configuração, terá apenas dois graus de liberdade. Se não existissem restrições ao seu movimento, o caminho tomado para chegar à configuração final seria, por exemplo, o dado pela linha tracejada. Agora, considerando as restrições, o carro deve seguir uma trajetória semelhante à mostrada pela linha contínua.

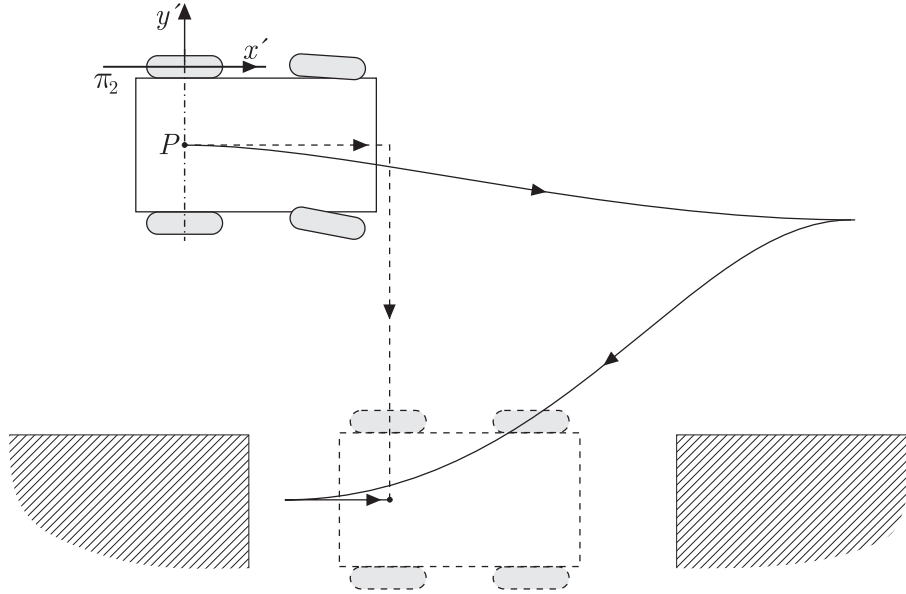


Figura 8: Exemplo de trajetórias para um carro estacionando.

2.3 Cinemática de Robôs Móveis Dotados de Rodas

Para facilitar o entendimento dos resultados apresentados neste e nos próximos capítulos, será considerado o modelo do robô móvel Twil (LAGES, 1998; LAGES; HEMERLY, 1998) a ser utilizado como estudo de caso neste trabalho. Os dados construtivos do mesmo podem ser vistos com mais detalhes no Apêndice A.

Considera-se que o robô é constituído de um corpo rígido e de rodas não deformáveis, e movimenta-se em um plano horizontal. O contato entre as rodas e o plano é puntual. O movimento do robô é realizado através de atuadores que fornecem torque para a rotação das rodas em uma configuração diferencial. Robôs móveis com acionamento diferencial aparecem em grande parte da literatura (CANUDAS DE WIT; SØRDALEN, 1992; INDIVIERI, 1999; LEE; LEE; TENG, 1999; SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991b; FUKAO; NAKAGAWA; ADACHI, 2000; ESSEN; NIJMEIJER, 2001).

Conforme esquematizado na Figura 9, a principal característica deste tipo de robô é que o mesmo possui duas rodas fixas centradas (rodas *ativas*) que compartilham o mesmo eixo de rotação, acionadas por dois motores independentes. Uma ou mais rodas orientáveis não centrada podem ser usadas a fim de equilibrar o robô, por isso chamadas de rodas *passivas*. Para isto, estas rodas precisam estar localizadas fora do eixo comum às duas rodas ativas.

Conforme (CAMPION; BASTIN; D'ANDRÉA-NOVEL, 1996), o *modelo cinemático de postura* de um robô com acionamento diferencial tem o seu comportamento descrito pelo seguinte vetor de estados:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix},$$

onde (x, y) e θ representam, respectivamente, a posição e a orientação do sistema de coordenadas do robô $\{C, X_c, Y_c\}$ com relação a um sistemas de coordenadas global inercial, $\{O, X, Y\}$. O ponto C na Figura 9 é o centro de massa do corpo do robô, e também é,

neste caso, o centro de rotação das rodas ativas.

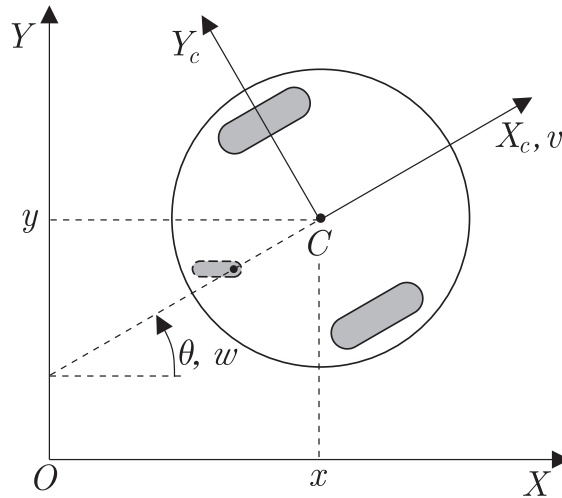


Figura 9: Modelo geométrico de um robô móvel com acionamento diferencial.

O modelo cinemático é então dado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = w \end{cases} \quad (2)$$

A entrada de controle é o vetor \mathbf{u} ,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix},$$

onde v é a velocidade linear, na direção de X_c , e w é a velocidade angular.

A seguinte restrição não holonômica aparece neste caso:

$$-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta = 0, \quad (3)$$

significando que a velocidade no centro de massa do robô é ortogonal ao eixo que liga as duas rodas ativas (Figura 10).

A expressão (3) pode ser reescrita da forma

$$G(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \eta(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \eta_i(\mathbf{x})\dot{x}_i,$$

onde n é a dimensão de \mathbf{x} .

Uma restrição cinemática é holonômica se, para qualquer i, j e k tal que $1 \leq i < j < k \leq n$, tem-se $\mathcal{A}_{ijk} = 0$ (BARRAQUAND; LATOMBE, 1989) com:

$$\mathcal{A}_{ijk} = \eta_i \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial q_j} - \frac{\partial \eta_j}{\partial q_k} \right) + \eta_j \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \eta_k}{\partial q_i} \right) + \eta_k \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial q_i} - \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} \right)$$

No caso da expressão (3), tem-se que o único caso é $i = 1, j = 2$ e $k = n = 3$, $\eta_1 = -\sin \theta$, $\eta_2 = \cos \theta$ e $\eta_3 = 0$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{123} &= -\sin \theta \sin \theta - \cos \theta \cos \theta \\ &= -1 \end{aligned}$$

e como $\mathcal{A}_{123} = -1 \neq 0$, conclui-se que a restrição cinemática da expressão (3) é não holonômica.

2.3.1 Propriedades do Modelo Cinemático

A expressão (2) pode ser escrita na seguinte forma compacta:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (4)$$

ou, na forma afim:

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^m f_i(\mathbf{x})u_i, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \quad (5)$$

com $n = 3$, $m = 2$ e

$$f_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Embora o modelo cinemático da expressão (2) seja um modelo bastante simplificado do movimento do veículo (dinâmicas dos motores, deformações elásticas e outros efeitos mecânicos são desprezados), o mesmo é suficiente para representar as propriedades não holonômicas presentes (CAMPION; BASTIN; D'ANDRÉA-NOVEL, 1996; CANUDAS DE WIT; SICILIANO; BASTIN, 1996). Ainda, propriedades importantes com relação à controlabilidade e estabilizabilidade de robôs móveis não holonômicos podem ser estabelecidas conforme será visto a seguir:

- **Controlabilidade.**

Definição 1. (SONTAG, 1990) *Um sistema é dito controlável quando, partindo de uma configuração inicial, o mesmo pode assumir qualquer configuração em um intervalo de tempo finito.*

Teorema 1. (CANUDAS DE WIT et al., 1993) *Uma condição suficiente para que um sistema não linear descrito pela expressão (4) seja controlável é que a dimensão do fechamento involutivo gerado pelos campos vetoriais f_1, \dots, f_m seja igual a n , $\forall \mathbf{x}$, i.e.,*

$$\dim\{\text{inv } \Delta\} = n, \quad \Delta = \text{span}\{f_1, \dots, f_m\}$$

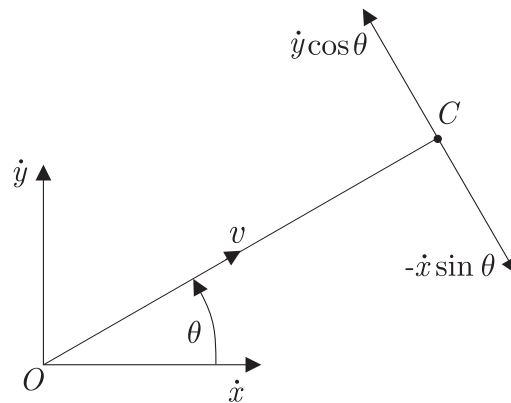


Figura 10: A restrição não holonômica.

Esta condição é equivalente, no caso de sistemas lineares, à condição de que a matriz de controlabilidade precisa ter posto completo.

A dimensão de uma distribuição é dada pelo posto desta distribuição. Para o sistema da expressão (5), tem-se que $\Delta = \text{span}\{f_1, f_2\}$ e o fechamento involutivo de Δ é definido, neste caso, como $\text{inv } \Delta = \{f_1, f_2, [f_1, f_2]\}$ (ISIDORI, 1995) e²

$$\text{rank}\{f_1, f_2, [f_1, f_2]\} = \text{rank} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & -\cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3,$$

Portanto, a partir do Teorema 1, $\dim\{\text{inv } \Delta\} = 3$, de onde conclui-se que o sistema é controlável.

• Linearização.

Para muitos sistemas não lineares, aproximações lineares podem ser usadas para uma primeira análise na síntese da lei de controle. A linearização pode também fornecer algumas indicações quanto à controlabilidade e estabilizabilidade do sistema não linear. Mais precisamente, se o sistema linearizado é controlável e estabilizável, então o sistema original não linear é controlável e estabilizável, pelo menos localmente. Entretanto, o inverso não pode ser aplicado (CANUDAS DE WIT et al., 1993).

No caso do modelo cinemático (2), a linearização em torno da origem ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$) resulta em

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad (6)$$

O sistema linear acima é não controlável pois o posto da matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não é completo. Observa-se entretanto que o sistema não linear é controlável, conforme visto pela aplicação do Teorema 1.

• Linearização por realimentação de estados.

Definição 2. (KHALIL, 1996) Um sistema não linear $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ é dito linearizável por realimentação de estados se existe uma mudança de coordenadas

$$\xi = T(\mathbf{x})$$

e uma realimentação de estados

$$\nu = a(\mathbf{x})\mathbf{u} + b(\mathbf{x})$$

que transforma o sistema original em um sistema linear.

² $[f_1, f_2]$ denota o colchete de Lie, i.e., $[f_1, f_2](x) = \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2(x)$.

Para sistemas sem deriva, tem-se então o seguinte resultado:

Teorema 2. (CANUDAS DE WIT et al., 1993) *Um sistema da forma (5) é localmente linearizável por realimentação de estados em torno de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se e somente se $\text{rank}[f_1(0) \ \dots \ f_m(0)] = n$.*

Para o caso do modelo cinemático da expressão (5), tem-se que

$$\text{rank}[f_1(0) \ f_2(0)] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} < n$$

e a linearização de todos os estados do sistema não linear não é possível. Esta condição é equivalente à condição de controlabilidade do sistema linearizado (6), que também não é satisfeita. Ainda assim, é possível linearizar parte dos estados, como por exemplo a posição apenas (KÜHNE et al., 2004). Muitas vezes isto não é muito restritivo, se o robô possui uma geometria circular e o objetivo é estabilizar apenas a posição, descartando a orientação do robô.

- **Estabilização através de realimentação estática e suave.**

O problema da estabilização através de uma lei de controle estática e suave pode ser formulada como encontrar um controle $\mathbf{u} = k(\mathbf{x})$, com $k(\mathbf{x})$ estática e suave, tal que o sistema em malha fechada $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})k(\mathbf{x})$ seja assintoticamente estável. Pode-se então enunciar o seguinte resultado a respeito das condições estudadas por Brockett:

Teorema 3. (BROCKETT, 1982) *Considerando novamente o sistema da expressão (5), com $m \leq n$. Se os campos vetoriais $f_i(0)$, $i = 1, \dots, m$ são linearmente independentes, i.e.,*

$$\text{rank}[f_1(0) \ f_2(0) \ \dots \ f_m(0)] = m,$$

então existe uma lei de controle estática e suave do tipo $\mathbf{u} = k(\mathbf{x})$ que estabiliza o sistema (5) se e somente se $m = n$.

Para o modelo cinemático da expressão (2), tem-se que $n = 3$, $m = 2$ e

$$f_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, $\text{rank}[f_1(0) \ f_2(0)] = 2$ e não existe lei de controle estática e suave $\mathbf{u} = k(\mathbf{x})$ para o sistema considerado. De fato, diferentemente dos sistemas lineares, a controlabilidade de um sistema não linear não implica na existência de leis suaves estáticas estabilizantes. O Teorema 3 corresponde a uma particularização das condições de Brockett (BROCKETT, 1982) para o caso de sistemas sem deriva.

2.4 Métodos Clássicos Para o Controle de Robôs Móveis

O controle de sistemas mecânicos não holonômicos, como os robôs móveis, tem sido objeto de um grande esforço de pesquisa da comunidade científica nos últimos anos. A razão para isto se dá basicamente pelo seguinte (AGUIAR; ATASSI; PASCOAL, 2000):

- existe um grande número de robôs, nas mais variadas aplicações, que possuem restrições não holonômicas;
- há um considerável desafio na síntese de leis de controle para sistemas não lineares que não podem ser transformados em sistemas lineares;
- conforme Brockett (BROCKETT, 1982), um sistema com restrições não holonômicas não pode ser estabilizado em um ponto de equilíbrio, por uma lei de controle suave e invariante no tempo.

Quanto ao objetivo, pode-se classificar as metodologias de controle em malha fechada para robôs móveis em basicamente três tipos:

- *Estabilização em um ponto.* Para um sistema linear invariante no tempo, se os autovalores instáveis são controláveis (i. e., se o sistema é estabilizável), um ponto de equilíbrio pode ser assintoticamente estabilizado por uma realimentação estática, suave e invariante no tempo. Entretanto, para sistemas não lineares e com restrições não holonômicas, isto não é mais possível (BROCKETT, 1982). Conseqüentemente, ferramentas lineares antes utilizadas não podem mais ser consideradas, nem localmente (KOLMANOVSKY; MCCLAMROCH, 1995), conforme mostrado nos Teoremas 1-3. Neste caso, usualmente, leis de controle variantes no tempo ou não suaves são utilizadas a fim de transpor as restrições de Brockett, como será estudado nas Seções 2.4.1, 2.4.2 e no Capítulo 4.

Além do controle variante no tempo e do controle não suave, outros métodos incluem ainda controle híbrido (combinação dos dois métodos) (POMET et al., 1992; CANUDAS DE WIT; BERGHUIS; NIJMEIJER, 1994; OELEN et al., 1995), controle adaptativo (considera incertezas do modelo) (LEE; LEE; TENG, 1999; FUKAO; NAKAGAWA; ADACHI, 2000; OYA; YU; KATOH, 2003) e linearização por realimentação dinâmica de estados (DONG; XU, 2001; ORIOLO; LUCA; VENDITTELLI, 2002; SUN, 2005). O interesse por esta última técnica baseia-se no fato de que, se a linearização do sistema existe, leis de controle lineares podem ser obtidas. Ainda, é possível obter-se uma descrição linear mais representativa do sistema não linear, ao contrário do obtido por expansão em séries de Taylor (LAGES, 1998; CHAVES, 2000).

- *Rastreamento de trajetória.* A fim de superar as limitações impostas pelo Teorema de Brockett, várias abordagens diferentes foram propostas. Alguns métodos abandonam a idéia da estabilização em um ponto e procuram obter convergência a uma trajetória de referência, parametrizada no tempo. Neste caso, o problema é resolvido em duas etapas distintas: primeiro uma trajetória é calculada *off-line* e em seguida uma lei de controle é projetada a fim de fazer com que o robô siga a trajetória calculada anteriormente. Usualmente, a existência de um robô de referência virtual é considerada, descrito, por exemplo, pelo modelo cinemático $\dot{\mathbf{x}}_r = f(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r)$. Assume-se então que, para entradas de referência não nulas,

deseja-se calcular uma lei de controle que faça que o erro entre o robô e a referência seja nula. Trabalhos neste sentido encontram-se em (YAMAMOTO; YUN, 1994; POMET et al., 1992; KANAYAMA; MIYAZAKI; NOGUCHI, 1990; CAMPION; BASTIN; D'ANDRÉA-NOVEL, 1991b; DENG; BRADY, 1993; YANG; KIM, 1999; DO; JIANG; PAN, 2002; SUN, 2005). Este caso será tratado com mais detalhes no Capítulo 5.

- *Seguimento de caminho.* Neste caso, à semelhança do caso acima, também deseja-se que o robô convirja para uma trajetória de referência, mas geralmente, este problema é menos restritivo, pois não há especificação temporal para que esta convergência seja alcançada. Ainda, usualmente considera-se que a velocidade linear é mantida constante e a convergência é obtida apenas através da velocidade angular. Trabalhos utilizando seguimento de caminho são encontrados em (SAMSON, 1995; SARKAR; YUN; KUMAR, 1993; ENCARNACÃO; PASCOAL, 2002). Este problema não será estudado neste trabalho.

A seguir serão apresentadas algumas técnicas existentes na literatura que foram escolhidas de forma a representar e abranger concisamente os trabalhos já desenvolvidos na área de controle de robôs móveis não holonômicos.

2.4.1 Controle Variante no Tempo

Leis de controle variantes no tempo utilizadas em sistemas não holonômicos foram estudadas primeiramente por (SAMSON, 1990). Nesta referência, o controle utilizado era, em sua versão mais simples, da forma:

$$\begin{aligned} v &= -k_1 x \\ w &= -g(t)y - k_3 \theta \end{aligned}$$

sendo v e w as entradas de controle. k_1 e k_3 são constantes reais positivas e $g(t)$ é escolhida tal que $\frac{\partial g}{\partial t}(t)$ não tende a zero quando o tempo t tende ao infinito. Por exemplo, $g(t) = \sin(t)$. Leis de controle variantes no tempo possuem a desvantagem de apresentar baixas taxas de convergência e trajetórias altamente oscilatórias (GURVITS; LI, 1993; CAMPION; BASTIN; D'ANDRÉA-NOVEL, 1996), o que, em uma implementação real, pode se tornar até não factível, dependendo das amplitudes e taxas de variação das entradas de controle. Outros trabalhos que utilizam controle variante no tempo podem ser citados: (TEEL; MURRAY; WALSH, 1992; TARÍN et al., 1999; MCCLOSKEY; MURRAY, 1997; DIXON et al., 1999; DO; JIANG; PAN, 2002).

Três exemplos de leis de controle variantes no tempo existentes na literatura serão apresentadas aqui. Todas elas utilizam o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = w \end{cases} \quad (7)$$

onde $[x \ y \ \theta]^T$ representa a configuração do robô com relação ao espaço de configuração e $[v \ w]^T$ são as velocidades linear e angular, respectivamente, conforme o modelo cinemático (7). O objetivo é estabilizar o robô em uma postura fixa que, sem perda de generalidade, é a origem: $x = 0, y = 0, \theta = 0$.

2.4.1.1 (POMET et al., 1992)

Neste trabalho a seguinte lei de controle é utilizada:

$$\begin{aligned} v &= -x \cos \theta - y \sin \theta \\ w &= -a \cos \frac{\theta}{a} \sin \frac{\theta}{a} + \\ &\quad + a\lambda \cos^2 \frac{\theta}{a} (-y(\sin t - \cos t) - y \sin \theta + x \cos \theta) \cos t \sin \theta, \end{aligned}$$

onde t é o tempo e a e λ são números reais positivos, com $a > 2$. A função de Lyapunov utilizada para provar a estabilidade desta lei de controle é a seguinte:

$$V = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2} \left(\tan \frac{\theta}{a} \lambda + x \cos t \right)^2$$

Os resultados são mostrados abaixo, para uma condição inicial $\mathbf{x}_0 = [x_0 \ y_0 \ \theta_0]^T = [2 \ 2 \ \pi]^T$ (identificada, no plano XY , pelo símbolo \odot ³) e constantes $a = 4$ e $\lambda = 2, 1$.

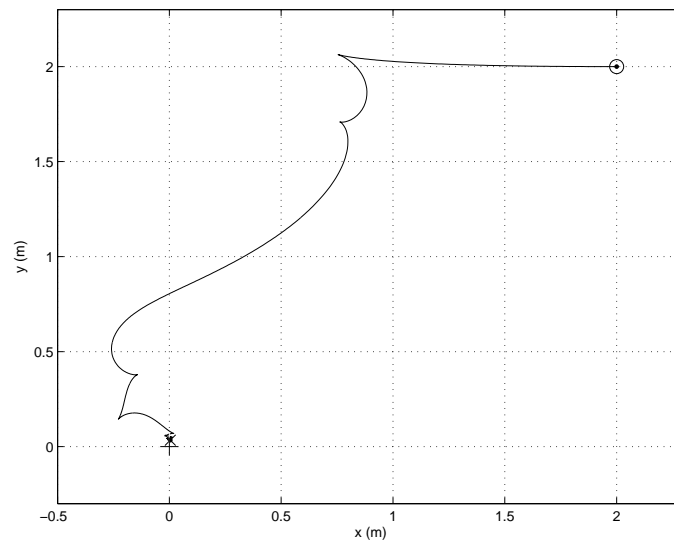


Figura 11: Trajetória no plano XY . Controle de (POMET et al., 1992).

³Durante todo este trabalho, nos gráficos da trajetória no plano XY , a posição inicial do robô é indicada por \odot , a posição final por \times e a origem por $+$.

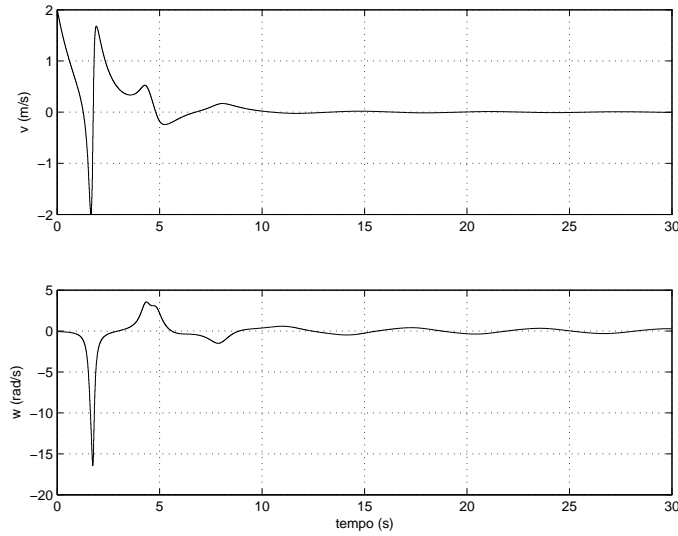


Figura 13: Entradas de controle v e w . Controle de (POMET et al., 1992).

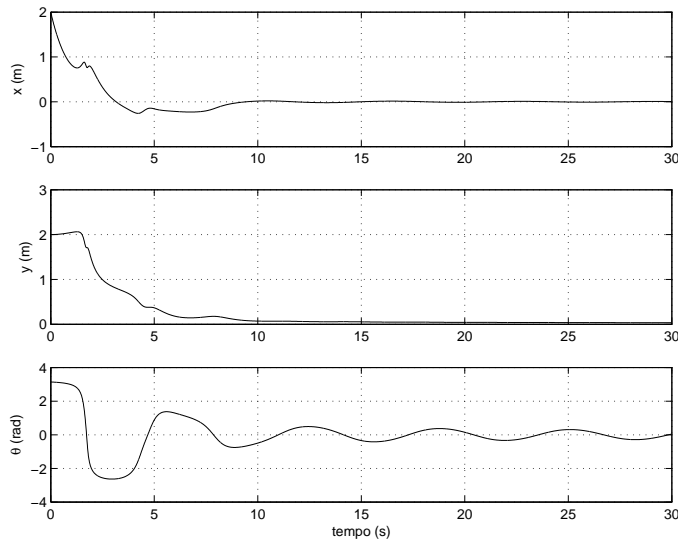


Figura 12: Estados x , y e θ . Controle de (POMET et al., 1992).

Na Figura 11 é mostrada a trajetória que o robô percorre no plano de configuração XY . Os estados e as entradas de controle são mostrados individualmente ao longo do tempo nas Figuras 12 e 13, respectivamente. Observa-se um comportamento altamente oscilatório e um tempo de acomodação elevado, características de leis variantes no tempo. Ainda, as amplitudes das entradas de controle, se consideradas as características do robô Twil (Apêndice A) tornam esta lei de controle proibitiva do ponto de vista prático. Os limites das velocidades linear e angular são de, respectivamente, $0,4712 \text{ m/s}$ e $3,7699 \text{ rad/s}$, valores estes que são largamente ultrapassados, como observa-se na Figura 13. Talvez a sintonia dos parâmetros a e λ pode fazer com que as amplitudes das entradas de controle sejam menores. Entretanto, não existe um método sistemático para escolher estes parâmetros de forma a melhorar o desempenho ou de levar em conta restrições nos estados ou nas entradas de controle. Os valores utilizados neste caso foram

obtidos através da análise de diversos casos, chegando então à melhor solução possível, para este caso, com relação às trajetórias de estado.

2.4.1.2 (SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991a)

Este trabalho apresenta uma lei de controle que estabiliza o sistema (7) assintoticamente. Fazendo uma transformação de coordenadas da base cartesiana (x, y, θ) para uma base variante no tempo (z_1, z_2, z_3)

$$\begin{aligned} z_1 &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ z_2 &= -x \sin \theta + y \cos \theta \\ z_3 &= \theta + f(z_2, t) \end{aligned}$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= v + z_2 w \\ \dot{z}_2 &= -z_1 w \\ \dot{z}_3 &= w - z_1 w \frac{\partial f}{\partial z_2} + \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \quad (8)$$

Escolhendo $f(z_2, t) = z_2 \sin t$, $\frac{\partial f}{\partial z_2} = \sin t$, $\frac{\partial f}{\partial t} = z_2 \cos t$ e a seguinte lei de controle resulta em estabilização assintótica para o sistema (8):

$$\begin{aligned} w &= -z_3 - \frac{\partial f}{\partial t} = -z_3 - z_2 \cos t \\ v &= -z_1 + z_3 w \frac{\partial f}{\partial z_2} = -z_1 + z_3 w \sin t \end{aligned}$$

E os resultados são mostrados abaixo, para uma condição inicial $\mathbf{x}_0 = [-2, 5 \ 1, 3 \ \pi/2]^T$.

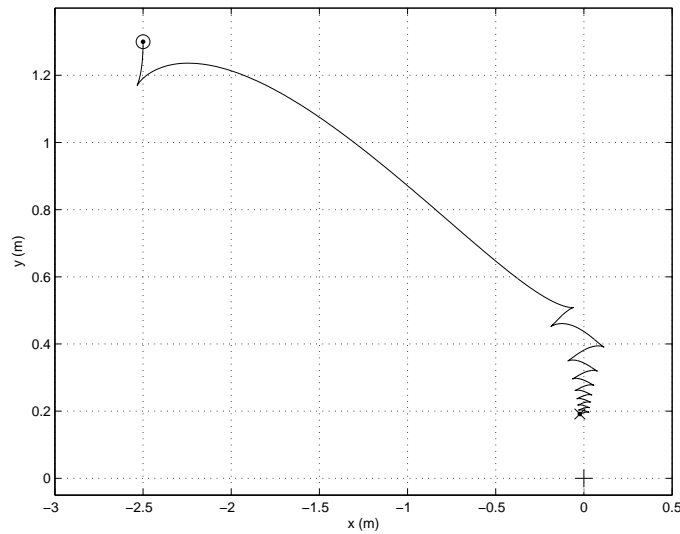


Figura 14: Trajetória no plano XY . Controle de (SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991a).

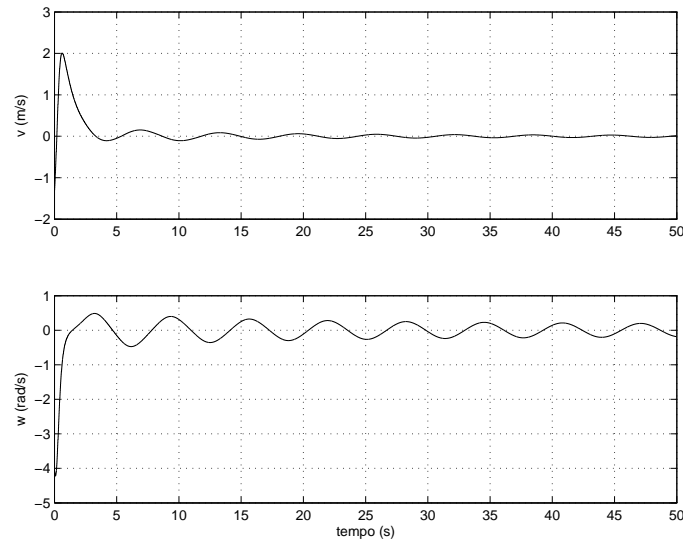


Figura 16: Entradas de controle v e w . Controle de (SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991a).

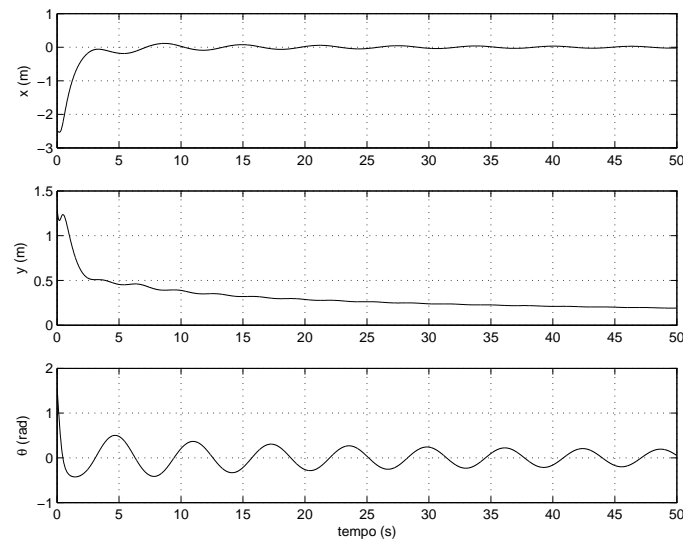


Figura 15: Estados x , y e θ . Controle de (SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991a).

A exemplo da lei de controle anterior, observa-se um movimento altamente oscilatório e um tempo de acomodação elevado. Da Figura 16, nota-se que os limites de amplitude das entradas de controle foram também ultrapassados. Talvez com outra escolha para a função $f(z_2, t)$, estes problemas possam ser minimizados.

2.4.1.3 (TEEL; MURRAY; WALSH, 1995)

Este trabalho utiliza uma transformação canônica do sistema para a forma encadeada. Trabalhos envolvendo controle de sistemas não holonômicos na forma encadeada são vistos em (BLOCH; MCCLAMROCH, 1989; MURRAY; SASTRY, 1990; TEEL; MURRAY; WALSH, 1992; CANUDAS DE WIT; BERGHUIS; NIJMEIJER, 1994; WU et al., 1999). A vantagem é que a lei de controle pode ser facilmente generalizada para vá-

rios tipos de sistemas não holonômicos (BLOCH; MCCLAMROCH, 1989; MURRAY; SASTRY, 1994; SØRDALEN, 1993b). Assim, fazendo

$$\begin{aligned} z_1 &= \theta \\ z_2 &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ z_3 &= x \sin \theta - y \cos \theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_1 &= w \\ u_2 &= v - z_3 w, \end{aligned}$$

tem-se que o sistema do modelo cinemático é transformado para a seguinte forma enca-deada:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= u_1 \\ \dot{z}_2 &= u_2 \\ \dot{z}_3 &= z_2 u_1 \end{aligned}$$

que é estabilizado através da seguinte lei de controle:

$$\begin{aligned} u_1 &= -z_1 + z_3 \cos t \\ u_2 &= -z_2 + z_3^2 \sin t \end{aligned}$$

A seguinte função de Lyapunov garante estabilidade para a lei de controle acima:

$$V = \left(z_1 - \frac{z_3}{2}(\cos t + \sin t) \right)^2 + \left(z_2 - \frac{z_3^2}{2}(\sin t - \cos t) \right)^2 + z_3^2$$

E os resultados são mostrados abaixo, para uma condição inicial $\mathbf{x}_0 = [0 \ -3, 2 \ \pi/4]^T$.

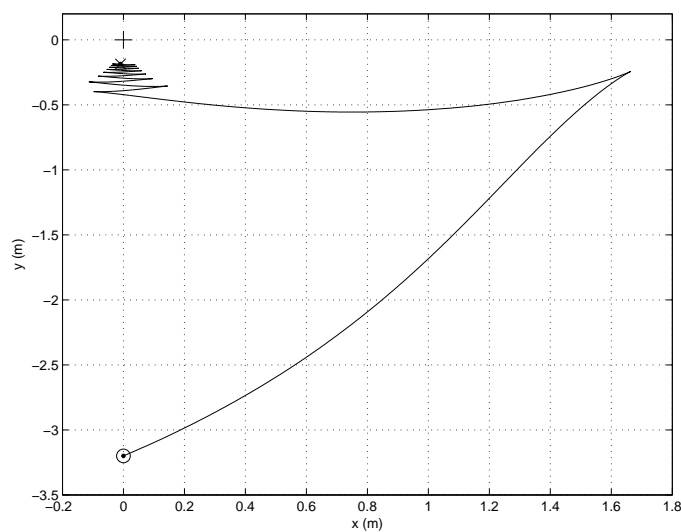


Figura 17: Trajetória no plano XY . Controle de (TEEL; MURRAY; WALSH, 1995).

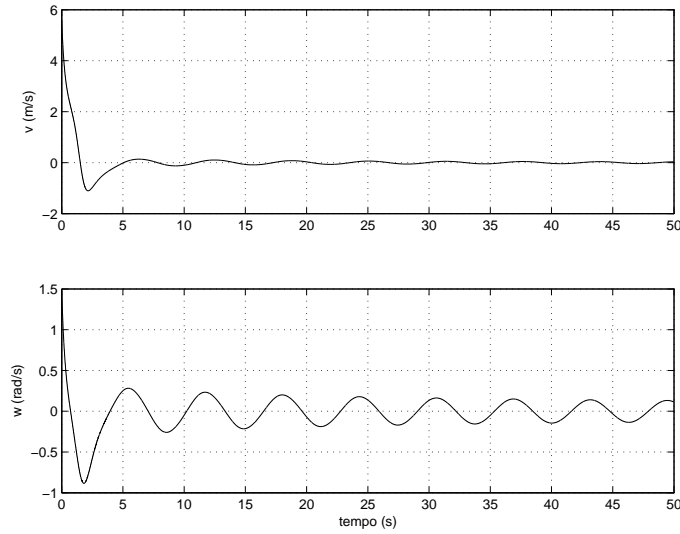


Figura 19: Entradas de controle v e w . Controle de (TEEL; MURRAY; WALSH, 1995).

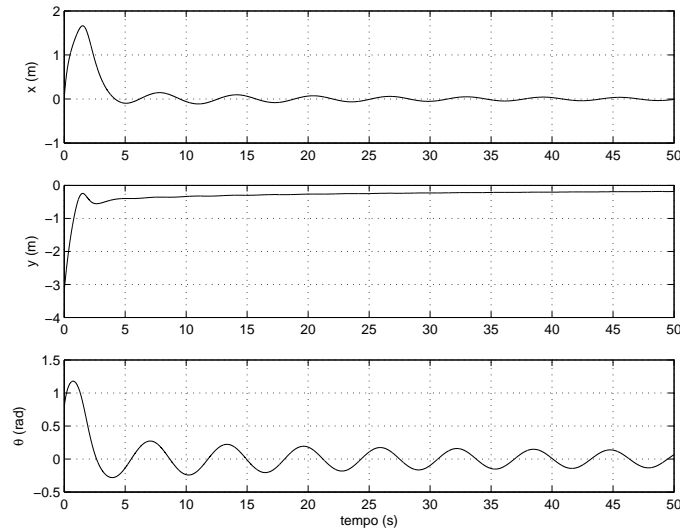


Figura 18: Estados x , y e θ . Controle de (TEEL; MURRAY; WALSH, 1995).

Novamente as características das leis de controle variantes no tempo são observadas: trajetórias de estado altamente oscilatórias e um elevado tempo de acomodação. Nota-se também que o limite aceitável da velocidade linear, para o robô Twil, é ultrapassado.

2.4.2 Controle Não Suave

As leis de controle não suaves podem ser subdivididas em leis contínuas por partes ou de modo deslizante. A vantagem do controle não suave é que o mesmo pode superar as desvantagens comumente associadas ao controle variante no tempo, ou seja, baixa taxa de convergência e trajetórias de estado oscilatórias. O trabalho pioneiro nesta técnica foi (BLOCH; MCCLAMROCH, 1989). Trabalhos subsequentes são encontrados em (BLOCH; REYHANOGU; MCCLAMROCH, 1992; CANUDAS DE WIT; SØRDAL, 1992; CHACAL; SIRA-RAMÍREZ, 1994; SU; STEPANENKO, 1994). Como

será visto, apesar de resolver os problemas apresentados pelas leis variantes no tempo, ainda não é possível com leis de controle descontínuas incluir restrições nos estados ou nas entradas de controle.

A exemplo da seção anterior, serão mostrados agora leis de controle não suaves existentes na literatura para o problema de estabilização do robô em um ponto.

2.4.2.1 (LAGES, 1998)

Neste trabalho e também em (ASTOLFI, 1994; LAGES; HEMERLY, 1998; INDIVIERI, 1999; CHWA, 2004), o modelo cinemático (7) é transformado em coordenadas polares através da seguinte transformação descontínua⁴, conforme a Figura 20:

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \text{atan2}(y, x) \\ \alpha &= \theta - \phi \end{aligned}$$

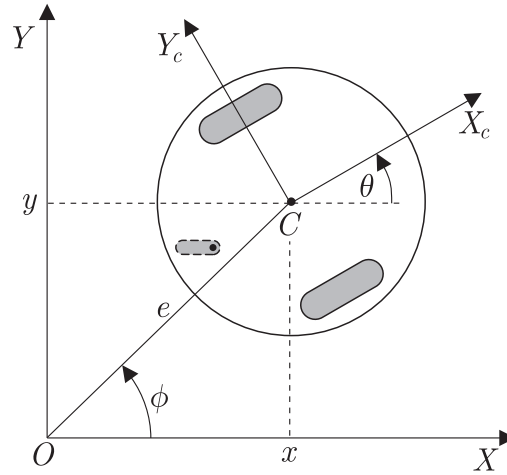


Figura 20: Coordenadas polares para o robô com acionamento diferencial.

Assim, o seguinte modelo cinemático é obtido:

$$\begin{cases} \dot{e} = v \cos \alpha \\ \dot{\phi} = +v \frac{\sin \alpha}{e} \\ \dot{\alpha} = -v \frac{\sin \alpha}{e} + w \end{cases}$$

Este sistema é não definido quando $e = 0$. Assim, o sistema na base polar de coordenadas torna-se descontínuo, sendo possível assim transpor as condições de Brockett e estabilizar o sistema acima na origem através de uma lei de controle suave e invariante no tempo. então, através da seguinte função de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} (\lambda e^2 + \alpha^2 + h\phi^2),$$

⁴A função $\text{atan2}(y, x)$ calcula o valor do arco tangente de y/x , usando os sinais dos dois argumentos para determinar o quadrante do valor retornado.

chega-se ao seguinte controle:

$$v = -\gamma_1 e \cos \alpha$$

$$w = -\gamma_2 \alpha - \gamma_1 \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} (\alpha - h\phi)$$

onde λ , h , γ_1 e γ_2 são constantes reais positivas. Esta lei de controle, quando transformada para base original de coordenadas cartesianas, torna-se descontínua (LAGES, 1998). Os resultados são mostrados abaixo, para uma condição inicial de $\mathbf{x}_0 = [-0,2 \ 3 \ 0]^T$ e $\gamma_1 = 0,1$, $\gamma_2 = 0,2$ e $h = 2$.

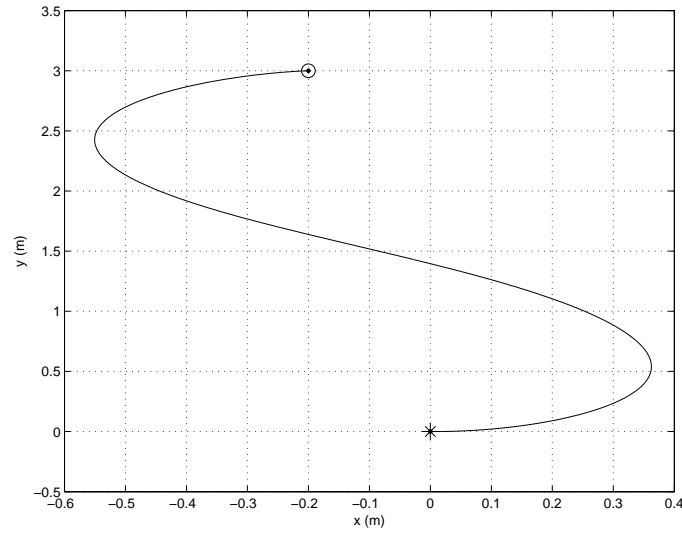


Figura 21: Trajetória no plano XY . Controle de (LAGES, 1998).

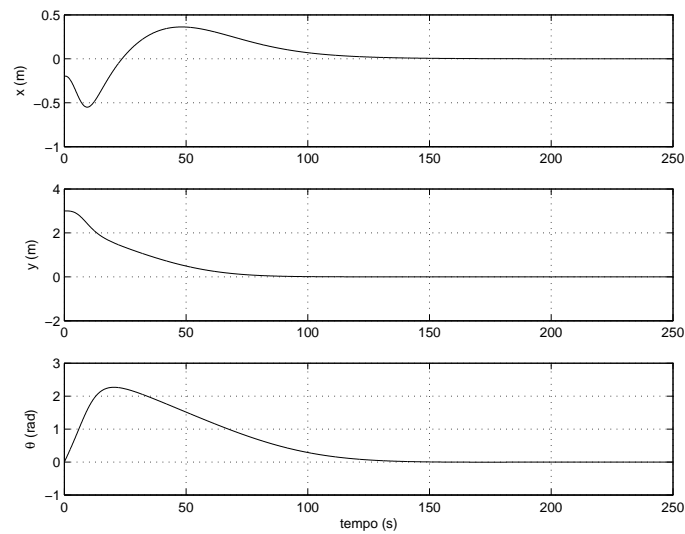


Figura 22: Estados x , y e θ . Controle de (LAGES, 1998).

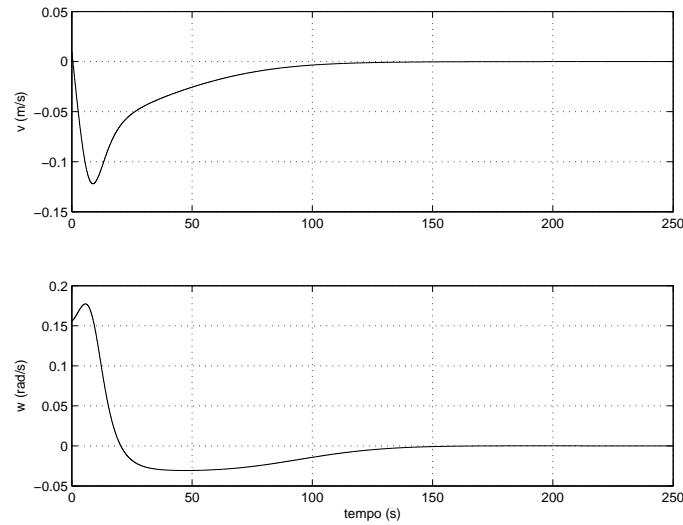


Figura 23: Entradas de controle v e w . Controle de (LAGES, 1998).

Nota-se aqui uma lei de controle que gera uma trajetória de estado bastante suave, como observa-se pelas figura 21 e 22. Ainda, as amplitudes das entradas de controle (Figura 23) são compatíveis com os limites definidos para o robô Twil. É claro que, com isso, o tempo com que o robô chega na origem é maior. Com a sintonia dos parâmetros existentes para esta lei de controle (h , γ_1 e γ_2), a taxa de convergência pode ser aumentada, diminuindo assim o tempo de acomodação. Entretanto, não existe método sistemático para isto e a modificação destes parâmetros pode gerar entradas de controle com amplitudes elevadas. A condição final do robô é $\mathbf{x}_f = [0 \ 0 \ 0]^T$.

2.4.2.2 (SØRDALEN, 1993a)

Este método também utiliza uma transformação descontínua de coordenadas (Figura 24).

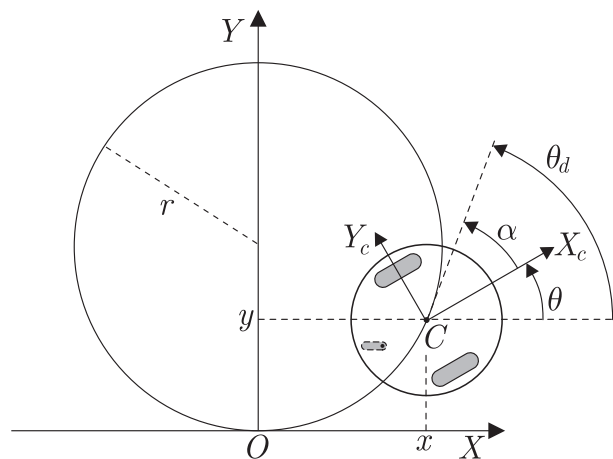


Figura 24: Transformação descontínua de coordenadas.

Assim, define-se:

$$a = r\theta_d$$

$$\alpha = e - 2\pi n(e)$$

onde

$$r = \frac{x^2 + y^2}{2y}$$

$$\theta_d = \begin{cases} 2 \operatorname{atan2}(y, x) & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$e = \theta - \theta_d$$

e $n(e) \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ é uma função que faz com que $\alpha \in [-\pi, \pi)$. A seguinte lei de controle estabiliza o robô na origem exponencialmente:

$$v = -\gamma b_1 a$$

$$w = -b_2 v - k\alpha$$

onde γ e k são constantes reais positivas e

$$b_1 = \cos \theta \left(\frac{\theta_d}{\beta} - 1 \right) + \sin \theta \left(\frac{\theta_d}{2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{1}{\beta} \right)$$

$$b_2 = \frac{2}{(1 + \beta^2)x} (\beta \cos \theta - \sin \theta)$$

com $\beta = y/x$.

Assim, os seguintes resultados são obtidos, para uma condição final de $\mathbf{x}_0 = [-0, 2 \ 3 \ 0]^T$.

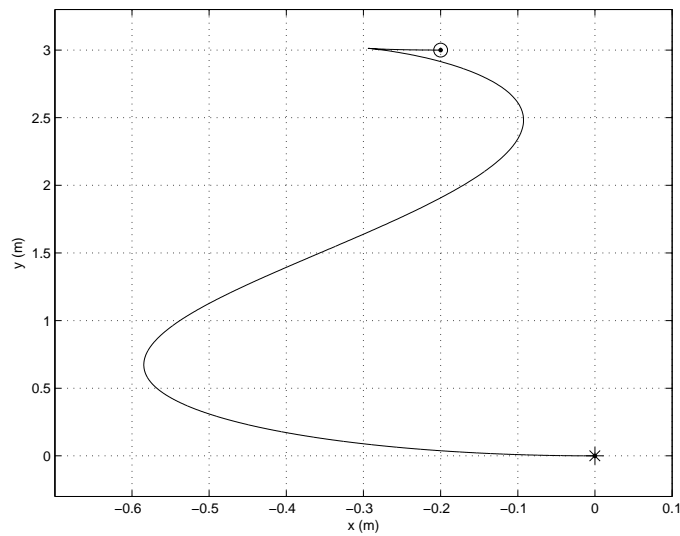


Figura 25: Trajetória no plano XY . Controle de (SØRDALEN, 1993a).

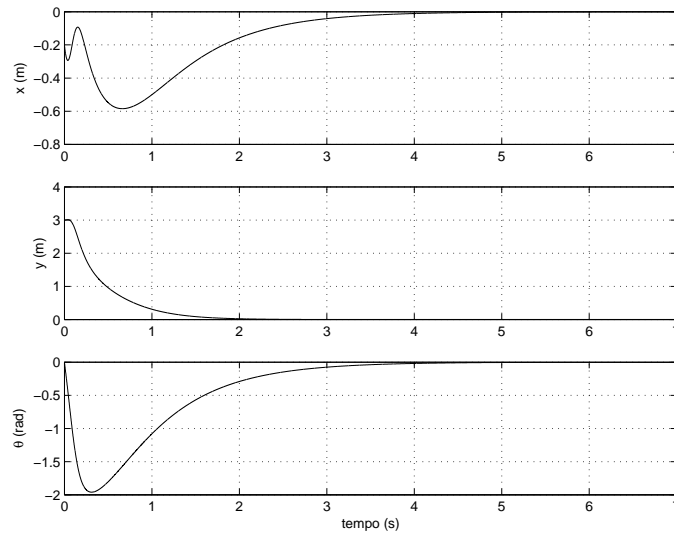


Figura 26: Estados x , y e θ . Controle de (SØRDALEN, 1993a).

Da mesma forma apresentada anteriormente, esta lei de controle também gera uma trajetória bastante suave, sem movimentos oscilatórios desnecessários e com uma taxa de convergência bastante elevada. O tempo com que o robô chega na origem é de apenas 4 segundos. Em (SØRDALEN, 1993a) é apresentado um roteiro de cálculo para os parâmetros γ e k que levam em conta os intervalos de tempo em que $a(t)$ e $\alpha(t)$ devem chegar a um determinado valor final. Assim, pode-se escolher um determinado tempo de acomodação e calcular γ e k para o caso desejado. Entretanto, este método não leva em consideração as amplitudes das entradas de controle, e conforme os valores dos parâmetros, estas amplitudes podem ser tais que ultrapassem os limites aceitáveis, o que efetivamente ocorre, neste caso, para o robô Twil⁵ (Figura 27).

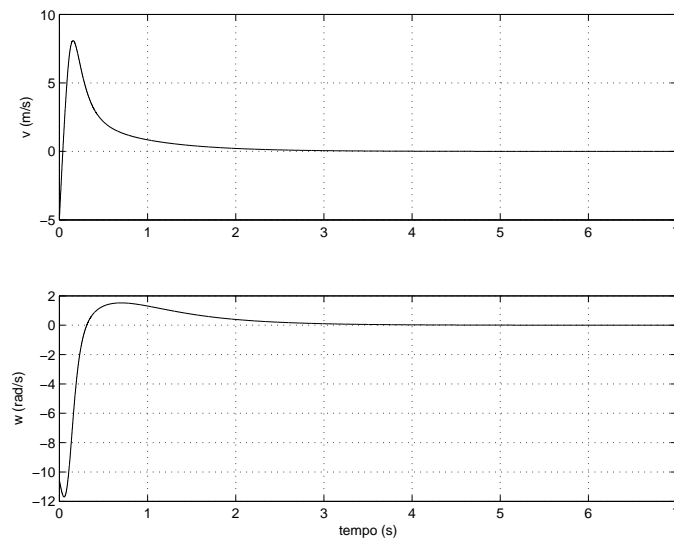


Figura 27: Entradas de controle v e w . Controle de (SØRDALEN, 1993a).

⁵Os limites para o robô Twil são de $0,4712 \text{ m/s}$ para a velocidade linear e de $3,7699 \text{ rad/s}$ para a velocidade angular. Maiores detalhes são descritos no Apêndice A.

3 FUNDAMENTOS DE CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO

3.1 Introdução

Desde os anos 70, o MPC tem recebido cada vez mais atenção, tanto da comunidade acadêmica quanto de empresas interessadas em aplicá-lo em suas plantas industriais. Embora estas duas vertentes tenham seguido, de certa forma, caminhos diferentes, estes caminhos convergem atualmente para objetivos bastante comuns. Inicialmente, questões de cunho mais teórico como garantia de estabilidade e robustez foram, em primeiro momento, deixadas de lado frente ao bom desempenho prático de tais leis. Por outro lado, a partir da década de 90, o grande interesse da indústria no MPC levou a comunidade acadêmica a desenvolver trabalhos teóricos, envolvendo provas de estabilidade, robustez, diferentes esquemas para modelagem dos sistemas e a utilização de observadores de estados, por exemplo.

Da mesma forma, a evolução dos computadores e de algoritmos numéricos de otimização têm feito com que o MPC possa ser considerado também para aplicações em sistemas de dinâmicas rápidas ou de dimensões elevadas. Em sistemas eletromecânicos, o interesse recai principalmente na possibilidade que o MPC proporciona em se considerar restrições nos estados e nas entradas de controle, bem como o fato de possuir um critério de otimização que faz com que a lei de controle calculada seja ótima no sentido de que minimiza este critério.

Neste capítulo uma descrição inicial do MPC será feita, juntamente com uma breve perspectiva histórica, situando o desenvolvimento do controle preditivo ao longo do tempo. Logo após, o MPC é formulado matematicamente em suas duas versões, linear e não linear, ambas discretas no tempo. A última seção deste capítulo trata de trabalhos já desenvolvidos onde o MPC é utilizado para controlar robôs móveis.

3.2 Perspectiva Histórica

O controle preditivo baseado em modelo, MPC, é uma forma de controle que pode ser usada em sistemas complexos, multivariáveis e com restrições nas entradas de controle e nos estados. Uma sequência de controle que minimiza uma função de custo é calculada *on-line*, a cada instante de amostragem, através da resolução de um problema de otimização com um horizonte finito de predição, usando o estado corrente da planta como condição inicial. Assim, obtém-se uma sequência ótima de controle dentro daquele horizonte sendo que apenas o primeiro elemento desta sequência é aplicada no processo (MAYNE et al., 2000). A seguir, estas etapas se repetem em uma política de horizonte deslizante

(*receding horizon*), o que confere uma característica de malha fechada à lei de controle gerada.

Em métodos de controle ótimo como o \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , uma solução analítica existe e pode ser calculada *off-line* através da resolução de equações de Ricatti (KWAKERNAAK; SIVAN, 1972). Entretanto, estes métodos são válidos apenas para sistemas lineares e sem restrições. Essencialmente, a diferença é que no MPC restrições existentes nos estados e nas entradas de controle são consideradas e a otimização é resolvida *on-line* para cada instante de amostragem. Torna-se assim necessário um horizonte finito para o cálculo da lei de controle. Assim, em princípio, não existe uma solução analítica e a lei de controle é dada implicitamente para cada instante de amostragem.

Uma técnica bastante recente, desenvolvida em (BEMPORAD et al., 2002; TØNDEL; JOHANSEN; BEMPORAD, 2003), garante uma expressão analítica explícita para o MPC considerando um sistema linear em tempo discreto, com um critério quadrático de minimização e com restrições em um horizonte finito de predição. Esta expressão analítica é obtida a partir de programação quadrática multi-paramétrica (*multi-parametric Quadratic Program, mp-QP*). Através da partição do espaço de estados em sub-regiões poliedrais convexas, uma solução linear afim e contínua por partes do tipo $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ é encontrada para cada sub-região do espaço de estados, onde \mathbf{K} é uma matriz de realimentação de estados e \mathbf{c} é um termo independente. Segundo os autores, esta técnica aumenta a confiabilidade do controle e a solução *on-line* do problema de otimização não precisa mais ser feita, já que a lei de controle é calculada *off-line*, diminuindo assim o esforço computacional e permitindo a sua aplicação em sistemas com dinâmicas bastante rápidas. Entretanto, o número de partições (sub-regiões) depende da dimensão do sistema, e mesmo para sistemas de ordem 2 a quantidade destas partições já é alto, conforme exemplo dos autores. Assim, para sistemas de ordem elevada são necessários mecanismos de busca em árvore bastante complexos.

Alguns pontos fortes bastante evidentes do MPC com relação a outras técnicas de controle podem ser citadas (CAMACHO; BORDONS, 1999):

- Os conceitos são intuitivos;
- Restrições e limites do sistema podem ser levados em consideração durante o cálculo da lei de controle de uma forma direta;
- Pode ser usado em uma ampla gama de processos, incluindo, por exemplo, sistemas multivariáveis, sistemas de fase não-mínima, com longos atrasos de tempo ou que são instáveis em malha aberta;
- Aplicável a processos onde se conhece os valores futuros de referência, como sistemas em lote (*batch processes*) ou em rastreamento de trajetória;
- Vários tipos de modelos podem ser utilizados: espaço de estados, função de transferência, resposta ao impulso, etc.

Entretanto, existem também alguns pontos fracos, a saber:

- Necessidade de um modelo preciso do sistema para o cálculo de valores futuros dos estados. A predição dos estados é feita com base neste modelo e é utilizada no critério de minimização;

- Alto custo computacional (em cada instante um problema de otimização é resolvido *on-line*). Para o caso não linear, o problema de otimização é não convexo, possui um maior número de variáveis de decisão e um mínimo global geralmente é impossível de se encontrar. Entretanto, se o sistema é linear, a função de custo é quadrática e as restrições são lineares, o problema de otimização pode ser transformado em um problema de programação quadrática (*Quadratic Programming, QP*), onde o problema é convexo e uma solução ótima sempre existe, pelo menos localmente.

Embora as principais aplicações do MPC tenham se desenvolvido mais recentemente e primeiramente na indústria, a idéia de se controlar um sistema através de uma seqüência de problemas de otimização *on-line* não é nova. Em 1967, (LEE; MARKUS, 1967) anteciparam o que viria a ser, atualmente, a essência do MPC:

Pode-se obter um controlador por realimentação através do conhecimento de vários controladores em malha aberta. Primeiramente mede-se o estado atual do processo e calcula-se muito rapidamente a lei de controle em malha aberta. A primeira porção deste controle é então aplicada no processo durante um curto período de tempo, depois do qual uma nova lei de controle é calculada baseada nas novas informações do processo. O procedimento então repete-se.¹

Esta idéia era, a princípio, impraticável, dada à alta quantidade de cálculos necessários. Contudo, com o advento da computação digital, algumas soluções começaram a ser implementadas, principalmente nas indústrias de processo e petroquímica, onde considerações econômicas (aumento da produtividade e da qualidade dos produtos) tornava necessário aproximar os pontos de operação das plantas de seus limites, sem que estes fossem, logicamente, ultrapassados. As primeiras aplicações industriais disponíveis comercialmente surgiram nas décadas de 70 e 80 com, por exemplo, o *Model Algorithmic Control, MAC* (RICHALET et al., 1976), o *Dynamic Matrix Control, DMC* (CUTLER; RAMACKER, 1980), o *Extended Prediction Self Adaptive Control, EPSAC* (DE KEISER; VAN CUAWENBERGHE, 1985), o *Quadratic Dynamic Matrix Control, QDMC* (GARCIA; MORSHEDI, 1986) e o *Generalized Predictive Control, GPC* (CLARKE; MOHTADI; TUFFS, 1987), todos para plantas lineares. Cabe ressaltar que, com exceção do GPC, todas as outras são aplicáveis somente em plantas estáveis em malha aberta.

Em aplicações industriais para processos não lineares, existem atualmente, por exemplo, o NOVA (DYNAMIC OPTIMIZATION TECHNOLOGY PRODUCTS, 1996) e o Process Perfector (MARTIN, 1997), mas por serem tecnologias proprietárias, detalhes dos algoritmos não existem na literatura.

Várias referências sobre o MPC quanto à teoria e aplicações industriais podem ser vistos em (GARCÍA; PRETT; MORARI, 1989; QIN; BADGWELL, 1997; MORARI; LEE, 1997; HENSON, 1998; ALLGÖWER et al., 1999; CAMACHO; BORDONS, 1999; QIN; BADGWELL, 2000; RAWLINGS, 2000; ROSSITER, 2003).

As primeiras versões do MPC na indústria não levavam em conta a estabilidade do sistema em malha fechada, mas obviamente sabia-se que esta era uma questão importante. Propriedades associadas a um controle com horizonte infinito eram garantidas restringindo a aplicação para plantas estáveis em malha aberta e escolhendo um horizonte de predição suficientemente grande. Assim, estimulada pelo grande sucesso do MPC na indústria, a comunidade acadêmica preocupou-se em abordar questões teóricas não

¹Traduzido do original em inglês pelo autor.

estudadas até então. Inicialmente, técnicas baseadas na teoria de Lyapunov foram negligenciadas, mas ganharam força com o trabalho de (CHEN; SHAW, 1982), que mostrou que a função de custo de um problema de controle ótimo com horizonte finito pode ser usada como uma função de Lyapunov para sistemas em tempo contínuo e sem restrições. Em (KEERTHI; GILBERT, 1988), estes resultados foram estendidos para sistemas não lineares em tempo discreto, variantes no tempo e com restrições. Depois destes trabalhos, vários outros abordando estabilidade do MPC foram desenvolvidos, como por exemplo (MAYNE; MICHALSKA, 1990; BITMEAD; GEVERS; WERTZ, 1990; MICHALSKA; MAYNE, 1993; CHEN; ALLGÖWER, 1998; MAYNE et al., 2000)

3.3 Elementos Essenciais

Uma analogia do MPC pode ser feita ao ato de se dirigir um automóvel (CAMACHO; BORDONS, 1999). O motorista sabe a trajetória de referência desejada para um horizonte finito: seu campo de visão da estrada. Levando em conta as características do carro (um *modelo mental* do carro e limitações de velocidade, aceleração e manobrabilidade) bem como possíveis obstáculos na estrada (como buracos, cruzamentos e outros carros), ele decidirá que ação tomar (aumentar ou diminuir a velocidade, girar a direção para um lado ou para outro) a fim de que a desejada trajetória seja percorrida. Esta ação de controle é então aplicada por um curto espaço de tempo e o procedimento se repete para a próxima ação de controle, agora com o seu campo de visão atualizado. Observa-se que, utilizando o modelo do carro, previsões de comportamento são utilizadas, baseadas no que o motorista está enxergando à sua frente.

Todas as versões de MPC possuem assim elementos comuns que podem ser escolhidos de diferentes formas, conforme as necessidades e a aplicação. Estes elementos são (CAMACHO; BORDONS, 1999):

- *Modelo de previsão.* O modelo do processo é a peça-chave do MPC. Seu uso é determinado pela necessidade de se *prever* os estados (ou saídas) do sistema em instantes de tempo no futuro. As diferentes estratégias de controle preditivo podem utilizar diferentes tipos de modelos para representar a relação entre as entradas de controle e os estados (ou saídas) do sistema, como modelos por resposta ao impulso (usado no MAC), resposta ao degrau (usado no DMC e QDMC), função de transferência (usado no GPC) e espaço de estados (que será utilizado neste trabalho). A vantagem deste último é que a formulação do MPC pode ser estendida para processos multivariáveis e não lineares de uma forma bastante direta.

Em situações realistas, onde geralmente existem diferenças entre o processo e seu modelo, é preciso identificar também um modelo para as incertezas, sendo assim as duas partes necessárias para a previsão.

- *Função de custo.* É o critério de desempenho com relação ao qual será feita a otimização da lei de controle. As várias formulações do MPC utilizam diferentes tipos de função de custo. A idéia predominante é que esta função de custo é formada por um somatório de termos dos estados (ou saídas) e das entradas de controle ao longo do horizonte. Assim, a minimização desta função implica na minimização do erro nas variáveis de estado e de controle. Esta função pode ainda incluir outros termos como penalizações na variação do esforço de controle e custo terminal dos estados.

- *Obtenção da lei de controle.* Para se obter uma seqüência de valores ótimos das variáveis de decisão dentro do horizonte de predição, realiza-se a minimização da função de custo, ou seja, o cálculo do valor mínimo desta função através da manipulação das variáveis de decisão. Para fazer isso, usa-se o modelo do sistema para calcular valores futuros dos estados ou das saídas. Geralmente as variáveis de decisão são as entradas de controle. No caso não linear, tanto os estados quanto o controle são variáveis de decisão. Se existirem restrições, a minimização da função de custo precisa respeitá-las. A lei de controle é então dada implicitamente pelo primeiro termo da seqüência calculada.
- *Horizonte deslizante.* Até a obtenção da lei de controle, o MPC funciona essencialmente como um método de controle em malha aberta: calcula uma lei de controle para o estado atual da planta através da minimização da função de custo. Entretanto, em sua totalidade, a estratégia funciona em malha fechada, pois, através da aplicação do controle calculado em cada instante de amostragem, os estados do sistema são atualizados e o processo de otimização e do cálculo da lei de controle se repete, agora com o instante de amostragem deslocado em uma unidade para o futuro, o que dá a característica de horizonte móvel ou deslizante.

Todas estas idéias são então expostas formalmente nas próximas seções.

3.4 Formulação do MPC Não Linear

Se o modelo do sistema é não linear ou se existirem restrições não lineares a serem respeitadas, o problema de minimização a ser resolvido em cada instante de amostragem é não linear, configurando-se assim um MPC não linear (*Nonlinear Model-based Predictive Control, NMPC*). No NMPC, as variáveis de decisão são as variáveis de estado e de controle, e o comportamento dinâmico do sistema é respeitado através da imposição de uma restrição não linear na forma do modelo deste sistema.

Assim, será considerado aqui um sistema com o seguinte modelo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (9)$$

onde \mathbf{x} é o vetor de estados de ordem n , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, \mathbf{u} é o vetor de entradas de controle de ordem m , $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ e t é o tempo. Em tempo discreto, o modelo acima pode ser representado pela seguinte equação de diferenças:

$$\mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \quad (10)$$

onde k é o instante de amostragem, $k = \{k | k \in \mathbb{N}, k \geq 0\}$.

A função de custo a ser minimizada tem a forma

$$\Phi(k) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \mathbf{x}^T(k+j|k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k+j|k) + \sum_{j=1}^{N_u} \mathbf{u}^T(k+j|k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k+j|k), \quad (11)$$

onde $N = N_2 - N_1 + 1$ é o *horizonte de predição* e N_u é o *horizonte de controle*. \mathbf{Q} e \mathbf{R} são matrizes de ponderação utilizadas para penalizar o erro de estado e o esforço de controle, respectivamente, com $\mathbf{Q} \geq 0$ e $\mathbf{R} > 0$.

Como dito anteriormente, na prática todo o sistema está sujeito às restrições, estas podendo surgir quando da existência de basicamente três tipos de limitações:

- *Limites físicos.* Quando existem barreiras físicas que não podem ser ultrapassadas, como por exemplo, faixas de atuação de atuadores e sensores, vazão máxima de tubulações, etc.;
- *Limites de segurança.* Limites que se ultrapassados podem levar a situações de perigo, como explosões ou desastres ambientais;
- *Limites operacionais.* Relativos ao desempenho do sistema e à qualidade do produto final. São restrições que, eventualmente, podem ser violadas a fim de se preservar as restrições relativas aos limites físicos ou de segurança.

Assim, definem-se, de uma forma geral, as seguintes expressões de restrição:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+j|k) &\in \mathbb{X}, \quad j \in [N_1, N_2] \\ \mathbf{u}(k+j|k) &\in \mathbb{U}, \quad j \in [0, N_u] \end{aligned}$$

onde \mathbb{X} , fechado e convexo, é o conjunto dos possíveis valores para os estados do sistema e \mathbb{U} , compacto e convexo, é o conjunto das possíveis entradas de controle. Se forem lineares com relação a \mathbf{x} e \mathbf{u} , as restrições podem ser escritas como:

$$\mathbf{C}\mathbf{x}(k+j|k) \leq \mathbf{c}, \quad j \in [N_1, N_2] \quad (12)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{u}(k+j|k) \leq \mathbf{d}, \quad j \in [0, N_u] \quad (13)$$

com $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{l_x \times n}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{l_x}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{l_u \times m}$ e $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{l_u}$.

Assim, o problema de otimização a ser resolvido em cada instante de amostragem k pode ser posto como encontrar uma seqüência de controle \mathbf{u}^* e uma seqüência de estados \mathbf{x}^* tal minimizem a função de custo $\Phi(k)$ e respeitem as restrições impostas, ou seja:

$$\mathbf{u}^*, \mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{u}, \mathbf{x}} \{\Phi(k)\} \quad (14)$$

sujeito à:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k|k) &= \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{x}(k+j|k) &= f(\mathbf{x}(k+j-1|k), \mathbf{u}(k+j-1|k)), \quad j \in [N_1, N_2] \\ \mathbf{C}\mathbf{x}(k+j|k) &\leq \mathbf{c}, \quad j \in [N_1, N_2] \\ \mathbf{D}\mathbf{u}(k+j|k) &\leq \mathbf{d}, \quad j \in [0, N_u] \end{aligned}$$

onde \mathbf{x}_0 é a condição inicial, ou seja, o valor medido de \mathbf{x} no instante k . O problema (14) é então resolvido para cada instante de amostragem k , resultando em uma seqüência ótima de controle

$$\mathbf{u}^* = \{\mathbf{u}^*(k|k), \mathbf{u}^*(k+1|k), \mathbf{u}^*(k+2|k), \dots, \mathbf{u}^*(k+N_u|k)\}, \quad (15)$$

uma seqüência ótima de estados

$$\mathbf{x}^* = \{\mathbf{x}^*(k+N_1|k), \mathbf{x}^*(k+N_1+1|k), \mathbf{x}^*(k+N_1+2|k), \dots, \mathbf{x}^*(k+N_2|k)\} \quad (16)$$

e um custo ótimo $\Phi^*(k)$. Assim, a lei de controle do MPC é dada implicitamente pelo primeiro termo da seqüência \mathbf{u}^* :

$$h(\delta) = \mathbf{u}^*(k|k), \quad (17)$$

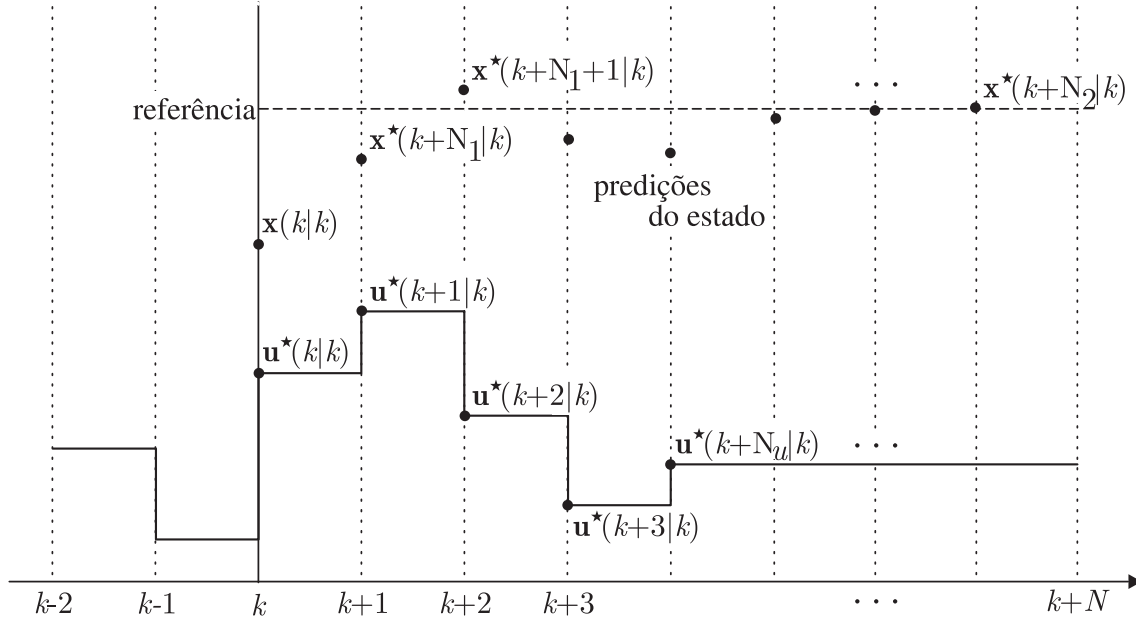


Figura 28: O controle preditivo.

onde $h(\delta)$ é contínua dentro de cada período de amostragem T , $\delta \in [kT, (k+1)T)$. O resto da seqüência \mathbf{u}^* é descartada. Logo, o sistema (9), em malha fechada, pode ser escrito como:

$$\dot{\mathbf{x}}(\delta) = f(\mathbf{x}(\delta), h(\delta)) \quad (18)$$

No próximo instante de amostragem $(k+1)$, todo o procedimento se repete, agora com os estados atualizados pela expressão (18) e uma janela de tempo deslocada em um instante de amostragem para frente (horizonte deslizante). O comportamento do MPC ao longo do horizonte pode ser visto genericamente na Figura 28.

O problema com otimizações não lineares é a sua não convexidade, existindo assim vários mínimos locais, o que faz com que, geralmente, seja impossível achar um mínimo global, gerando assim soluções sub-ótimas (HENSON, 1998). Ainda, o custo computacional é exponencialmente relacionado com o número de variáveis de decisão (HENRION; LASSERRE, 2004). Assim, dependendo da rapidez da dinâmica ou de sua dimensão, a aplicação do MPC em um sistema não linear pode tornar-se impraticável.

3.5 Formulação do MPC Linear

Se o modelo do sistema é linear e existirem apenas restrições lineares a serem respeitadas, pode-se formular o MPC de forma linear (*Linear Model-based Predictive Control, LMPC*). Assim, considerando as entradas de controle como as variáveis de decisão e tendo-se um critério quadrático de minimização, pode-se transformar o problema de minimização em um problema de programação quadrática, QP, para o qual algoritmos numéricos robustos e eficientes existem. Problemas de otimização deste tipo têm a vantagem, quando comparados com problemas não lineares, de serem convexos, o que faz com que sempre exista um mínimo global.

Assim, reescreve-se a expressão (10), referente ao modelo dinâmico do sistema, na

forma linear e invariante no tempo:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \quad (19)$$

onde \mathbf{A} é a matriz de transição de estados e \mathbf{B} é a matriz que relaciona os estados com as entradas de controle. Pode-se prever o estado do sistema para um instante de amostragem j no futuro através da aplicação recursiva da expressão (19):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1|k) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k|k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k|k) \\ \mathbf{x}(k+2|k) &= \mathbf{A}^2\mathbf{x}(k|k) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(k|k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+1|k) \\ \mathbf{x}(k+3|k) &= \mathbf{A}^3\mathbf{x}(k|k) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}(k|k) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+1|k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+2|k) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}(k+j|k) &= \mathbf{A}^j\mathbf{x}(k|k) + \sum_{i=0}^{j-1} \mathbf{A}^{j-1-i}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+i|k) \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade e a fim de simplificar a formulação matemática, escolhe-se, na expressão (11), $N_1 = 1$, $N_2 = N$ e $N_u = N - 1$ e tem-se a seguinte função de custo:

$$\Phi(k) = \sum_{j=1}^N \mathbf{x}^T(k+j|k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k+j|k) + \mathbf{u}^T(k+j-1|k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k+j-1|k)$$

Definido os seguintes vetores:

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1|k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1|k) \\ \mathbf{x}(k+2|k) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(k+N|k) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{u}}(k|k) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k|k) \\ \mathbf{u}(k+1|k) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k+N-1|k) \end{bmatrix},$$

pode-se reescrever a função de custo como:

$$\Phi(k) = \bar{\mathbf{x}}^T(k+1|k) \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{x}}(k+1|k) + \bar{\mathbf{u}}^T(k|k) \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{u}}(k|k),$$

onde

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{R} \end{bmatrix}$$

Fazendo

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1|k) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k|k) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k|k),$$

onde

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{N-1} \\ \mathbf{A}^N \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{N-3}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{N-4}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{N-3}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{B} \end{bmatrix},$$

tem-se que:

$$\Phi(k) = (\mathbf{x}^T(k|k)\bar{\mathbf{A}}^T + \bar{\mathbf{u}}^T(k|k)\bar{\mathbf{B}}^T) \bar{\mathbf{Q}} (\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k|k) + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k|k)) + \bar{\mathbf{u}}^T(k|k)\bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{u}}(k|k)$$

e

$$\begin{aligned} \Phi(k) = & \mathbf{x}^T(k|k)\bar{\mathbf{A}}^T\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k|k) + \mathbf{x}^T(k|k)\bar{\mathbf{A}}^T\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k|k) + \\ & + \bar{\mathbf{u}}^T(k|k)\bar{\mathbf{B}}^T\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k|k) + \bar{\mathbf{u}}^T(k|k)\bar{\mathbf{B}}^T\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k|k) + \bar{\mathbf{u}}^T(k|k)\bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{u}}(k|k) \end{aligned}$$

Os termos quadráticos em $\bar{\mathbf{u}}(k|k)$ são:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}^T(k|k)\bar{\mathbf{B}}^T\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k|k) + \bar{\mathbf{u}}^T(k|k)\bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{u}}(k|k) &= \bar{\mathbf{u}}^T(k|k) (\bar{\mathbf{B}}^T\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{R}}) \bar{\mathbf{u}}(k|k) \\ &= \frac{1}{2}\bar{\mathbf{u}}^T(k|k)\bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{u}}(k|k), \end{aligned}$$

os termos lineares em $\bar{\mathbf{u}}(k|k)$ são:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(k|k)\bar{\mathbf{A}}^T\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k|k) + \bar{\mathbf{u}}^T(k|k)\bar{\mathbf{B}}^T\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k|k) &= 2\mathbf{x}^T(k|k)\bar{\mathbf{A}}^T\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{u}}(k|k) \\ &= \mathbf{f}^T\bar{\mathbf{u}}(k|k) \end{aligned}$$

e o termo independente de $\bar{\mathbf{u}}(k|k)$ é $\mathbf{x}^T(k|k)\bar{\mathbf{A}}^T\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k|k)$. Assim, a função de custo pode ser escrita em uma forma quadrática padrão:

$$\Phi(k) = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{u}}^T(k|k)\bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{u}}(k|k) + \mathbf{f}^T\bar{\mathbf{u}}(k|k) + \mathbf{g}, \quad (20)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= 2 (\bar{\mathbf{B}}^T\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{R}}) \\ \mathbf{f} &= 2\bar{\mathbf{B}}^T\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k|k) \\ \mathbf{g} &= \mathbf{x}^T(k|k)\bar{\mathbf{A}}^T\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k|k) \end{aligned}$$

e \mathbf{g} é independente de $\bar{\mathbf{u}}(k|k)$ e não importa para o problema de minimização. Assim, define-se

$$\Phi'(k) = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{u}}^T(k|k)\bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{u}}(k|k) + \mathbf{f}^T\bar{\mathbf{u}}(k|k) \quad (21)$$

A expressão (21) é a forma padrão para se aplicar um algoritmo de QP. Assim, o seguinte problema de otimização é resolvido em cada instante de amostragem k :

$$\mathbf{u}^* = \arg \min_{\mathbf{u}} \{\Phi'(k)\}$$

sujeito à:

$$\mathbf{D}\mathbf{u}(k+j|k) \leq \mathbf{d}, \quad j \in [0, N-1]$$

Nota-se que agora, ao contrário do NMPC, a única variável de decisão existente, utilizada para minimizar $\Phi'(k)$, é a entrada de controle \mathbf{u} . Assim, todas as restrições a serem respeitadas precisam ser escritas com relação a esta variável. Ainda, a dinâmica linear do sistema (19) e a condição inicial $\mathbf{x}(k|k) = \mathbf{x}_0$ estão embutidas na forma quadrática da função de custo, expressão (20). Este fato simplifica de forma significativa o processo de minimização, diminuindo consideravelmente o esforço computacional.

A minimização de $\Phi'(k)$ leva a uma sequência ótima de controle

$$\mathbf{u}^* = \{\mathbf{u}^*(k|k), \mathbf{u}^*(k+1|k), \mathbf{u}^*(k+2|k), \dots, \mathbf{u}^*(k+N-1|k)\}$$

e um custo ótimo $\Phi^*(k) = \Phi^*(k) + g$. A lei de controle do MPC é dada implicitamente pelo primeiro termo da seqüência \mathbf{u}^* :

$$h(\delta) = \mathbf{u}^*(k|k),$$

onde $h(\delta)$ é contínua dentro de cada período de amostragem T , $\delta \in [kT, (k+1)T)$. O resto da seqüência \mathbf{u}^* é descartada. O sistema em malha fechada pode então ser escrito em tempo contínuo como:

$$\dot{\mathbf{x}}(\delta) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}h(\delta)$$

3.6 MPC Aplicado a Robôs Móveis

Como dito anteriormente, trabalhos envolvendo MPC de robôs móveis não holonômicos são relativamente raros e esparsos. Alguns são descritos brevemente a seguir.

Em (OLLERO; AMIDI, 1991) o GPC é aplicado ao problema de seguimento de caminho do robô CMU NavLab. Um modelo CARIMA (*Controlled Autoregressive and Moving Average*) em coordenadas locais linearizadas do robô é utilizado para o cálculo da distância do robô a uma trajetória de referência. O controle é realizado apenas através da velocidade angular, considerando que a velocidade linear permanece constante. Como o modelo utilizado é linear, trajetórias de aproximação do veículo à referência tornam-se necessárias quando o erro de orientação é muito grande. A função de custo envolve o erro de posição e orientação em coordenadas locais e incrementos do controle e uma restrição na velocidade linear de 30 km/h é imposta.

Em (GÓMEZ-ORTEGA; CAMACHO, 1996), algoritmos genéticos são utilizados para a otimização não linear, a fim de diminuir o esforço computacional e tornando possível assim a aplicação em tempo-real. O problema de rastreamento de trajetória é resolvido para um robô com modelo não linear e acionamento diferencial. A novidade neste trabalho é a inclusão, na função de custo, de um termo que penaliza a proximidade entre o robô e obstáculos fixos no ambiente. Assim, uma trajetória de referência é previamente calculada, levando em consideração apenas obstáculos conhecidos. O problema de rastreamento é então resolvido, agora então com obstáculos inesperados presentes no ambiente. O algoritmo foi aplicado ao robô LABMATE.

Em (YANG et al., 1998) um controle preditivo inteligente é desenvolvido. Um modelo cinemático em redes neurais é utilizado para a predição dos estados, onde as entradas de controle são as velocidades linear e angular. O tipo de robô utilizado é parecido com um carro, com duas rodas frontais orientáveis e duas rodas não-orientáveis traseiras motorizadas. Para corrigir erros existentes entre o modelo de predição e o robô real, uma rede neural é utilizada para ajustar este modelo de forma *on-line*. A função de custo envolve termos de erro entre a postura atual e a de referência e de esforço de controle. O problema de seguimento de caminho é resolvido e aplicado ao robô THMR-III.

(NORMEY-RICO; GÓMEZ-ORTEGA; CAMACHO, 1999) destaca algumas vantagens da utilização do MPC para o seguimento de caminho de robôs móveis, como por exemplo: a trajetória é previamente conhecida; o caminho percorrido é suave; há um aumento na autonomia do robô, já que o esforço de controle é minimizado. Este trabalho utiliza o GPC sem restrições para o seguimento de caminho de um modelo linearizado em coordenadas locais do robô, onde a velocidade linear é constante, a entrada de controle é a velocidade angular e as saídas são a orientação global e a posição y em coordenadas locais. A existência de atrasos de transporte no modelo é considerada. Através de um preditor de Smith, obtém-se um aumento da robustez do sistema em malha fechada. Um

novo algoritmo de controle preditivo (*Smith-Predictor Generalized Predictive Control, SPGPC*) é então proposto e aplicado ao robô LABMATE.

(ESSEN; NIJMEIJER, 2001) desenvolve um algoritmo não linear de MPC em espaço de estados aplicado a um robô móvel com acionamento diferencial para a estabilização em uma postura fixa e rastreamento de trajetória. Seu método é então comparado com leis de controle variantes no tempo e descontínuas, mostrando a eficiência do MPC. Algumas modificações na função de custo são propostas, a fim de aumentar a taxa de convergência sem restrições adicionais, entretanto detalhes do algoritmo não são fornecidos. Segundo afirmam os autores, os resultados de simulação mostram que não é possível a aplicação do MPC não linear em robôs móveis, dado o alto custo computacional necessário. O tempo para a solução do problema de otimização é cerca de 500 vezes maior que o permitido a uma aplicação em tempo-real, quando o algoritmo é executado em Matlab com um Pentium III de 500MHz. Entretanto, é claro que este tempo pode ser minimizado com processadores mais rápidos e com algoritmos em linguagem C, por exemplo.

Em alguns dos trabalhos citados acima, um modelo linear do robô em coordenadas locais é utilizado. Esta escolha é vantajosa pois permite o uso de algoritmos de otimização convexos e diminui consideravelmente o esforço computacional necessário. Entretanto, para o modelo linear ser válido, é necessário assumir que o incremento de orientação mantém-se pequeno para cada instante de amostragem (NORMEY-RICO; GÓMEZ-ORTEGA; CAMACHO, 1999). Sendo assim, este modelo não é válido para grandes variações de orientação e trajetórias de aproximação precisam ser usadas quando o robô encontra-se com uma orientação muito diferente da orientação de referência.

A presente dissertação tem como objetivo abranger tanto o problema de estabilização em uma postura fixa quanto o de rastreamento de trajetória para um robô móvel não holonômico dotado de rodas e com acionamento diferencial. No próximo capítulo o primeiro problema é resolvido através de um algoritmo de controle preditivo não linear. Alguns resultados mostrados em (ESSEN; NIJMEIJER, 2001) são melhorados através de uma transformação em coordenadas polares da função de custo a ser minimizada. No Capítulo 5, o segundo problema é tratado, primeiramente de forma não linear. Após isso, uma outra abordagem é desenvolvida, utilizando-se agora um método de linearizações sucessivas ao longo da trajetória de referência.

4 MPC DE ROBÔS MÓVEIS: ESTABILIZAÇÃO EM UM PONTO

4.1 Introdução

É bem conhecido o resultado do Teorema de Brockett (BROCKETT, 1982) em que não existe uma realimentação de estados suave e invariante no tempo que estabilize um sistema não holonômico sem deriva em uma dada postura fixa. Este problema pode ser resolvido através do MPC, que gera uma lei de controle (implícita) não suave, que pode ser então aplicada ao sistema em questão. As vantagens do MPC já foram descritas no capítulo anterior e em alguns dos trabalhos citados e serão abordadas agora através de extensivos resultados de simulação.

Primeiramente o NMPC é desenvolvido considerando-se uma função de custo em coordenadas cartesianas. Após, uma transformação em coordenadas polares é introduzida. As próximas seções tratam da inclusão de restrições nas entradas de controle e nas variáveis de estado. Após, testes comparativos com as leis clássicas de controle (Seção 2.4) são vistas, mostrando as significativas vantagens do NMPC para a estabilização do robô na origem. Por fim, algumas considerações importantes acerca do custo computacional do NMPC são mostradas na última seção.

Os algoritmos utilizados neste capítulo foram desenvolvidos em Matlab utilizando a função `fmincon` para a solução do problema de otimização não linear.

4.2 Formulação do Problema

O objetivo aqui é fazer com que o robô estabilize em um ponto fixo do espaço de configuração, ou seja, fazer com que

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{ref} = 0, \quad (22)$$

onde $\mathbf{x}_{ref} = [x_{ref} \ y_{ref} \ \theta_{ref}]^T$. Sem perda de generalidade, comumente \mathbf{x}_{ref} é considerado a origem.

O MPC é resolvido em tempo discreto. Assim, discretizando o modelo cinemático (2) pelo método de Euler, com $\dot{\mathbf{x}} \approx \frac{\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)}{T}$, tem-se que:

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + v(k) \cos \theta(k)T \\ y(k+1) = y(k) + v(k) \sin \theta(k)T \\ \theta(k+1) = \theta(k) + w(k)T \end{cases}, \quad (23)$$

ou, em uma forma mais compacta,

$$\mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)),$$

com $\mathbf{x}(k) = [x(k) \ y(k) \ \theta(k)]^T$ e $\mathbf{u}(k) = [v(k) \ w(k)]^T$. Neste trabalho, considera-se que não existe diferença entre o sistema real e o modelo e que todos os estados estão sempre disponíveis para medida.

4.3 Função de Custo em Coordenadas Cartesianas

Nesta seção o NMCP é resolvido através da solução do seguinte problema de otimização em cada instante de amostragem k :

$$\mathbf{u}^*, \mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{u}, \mathbf{x}} \{\Phi(k)\}$$

sujeito às restrições referentes à dinâmica do sistema (23) e da condição inicial¹:

$$\mathbf{x}(k|k) = \mathbf{x}_0,$$

$$\mathbf{x}(k+j|k) = f(\mathbf{x}(k+j-1|k), \mathbf{u}(k+j-1|k)),$$

e assumindo que $N_1 = 1$, $N_2 = N$ e $N_u = N-1$ na expressão (11), tem-se que $j \in [1, N]$ e a seguinte função de custo é utilizada:

$$\Phi(k) = \sum_{j=1}^N \mathbf{x}^T(k+j|k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k+j|k) + \mathbf{u}^T(k+j-1|k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k+j-1|k) \quad (24)$$

Assim, considerando os seguintes parâmetros de sintonia:

$$N = 5, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{x}_0 = [-0, 2 \ 3 \ 0]^T$ como configuração inicial do robô, obtém-se os resultados que são mostrados nas figuras a seguir.

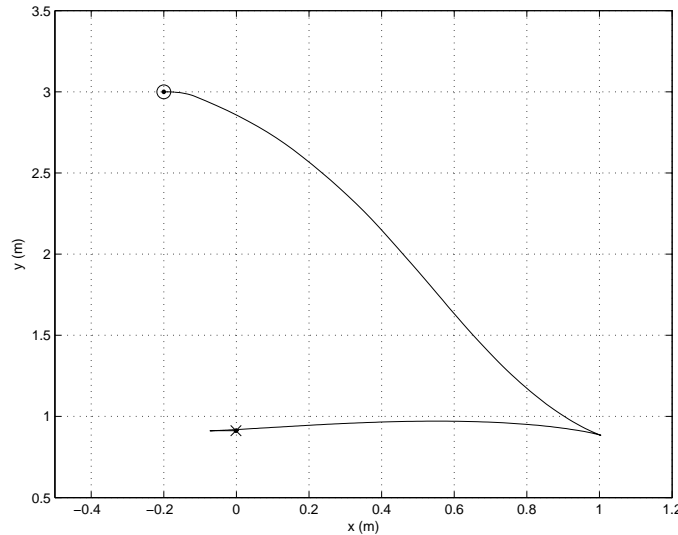


Figura 29: Trajetória no plano XY . NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.

¹Conforme mencionado anteriormente, o modelo cinemático da expressão (2) é suficiente para capturar as características não holonômicas do sistema. Assim, a restrição não holonômica da expressão (3) não precisa ser incluída no MPC. As restrições lineares referentes a \mathbf{x} e \mathbf{u} , respectivamente expressões (12) e (13), serão consideradas nas Seções 4.5 e 4.6.

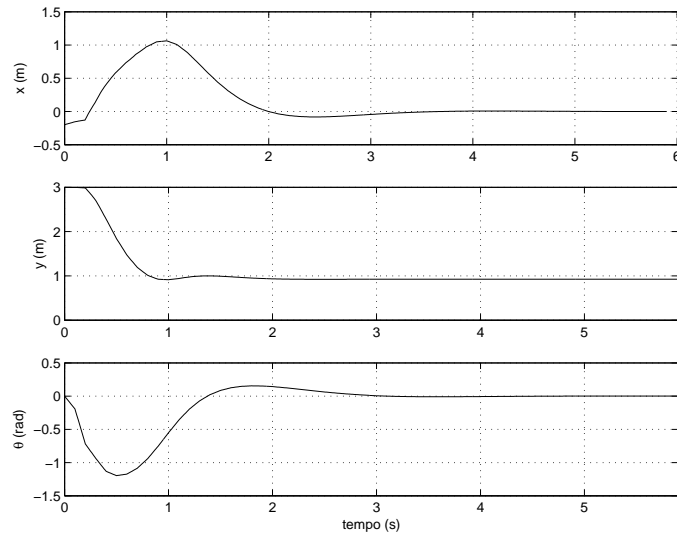


Figura 30: Estados x , y e θ . NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.

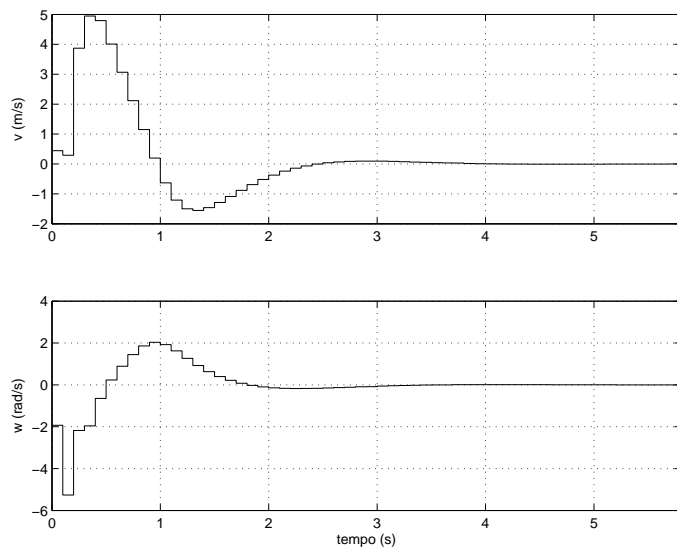


Figura 31: Entradas de controle v e w . NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.

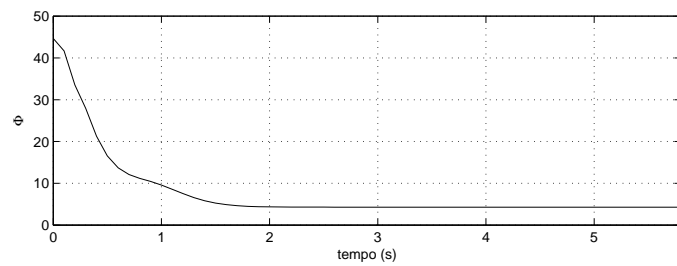


Figura 32: Função de custo Φ . NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.

A condição final é $\mathbf{x}_f = [0 \ 0 \ 91 \ 0]^T$. Nota-se um grande erro em regime na variável de estado y (Figuras 29 e 30) (as outras variáveis convergem para a origem). Uma possível explicação para este fato é que ambos os estados x e y dependem da velocidade linear v . Assim, quando x e v são minimizados, a função de custo atinge um valor (uma curva de nível da função de custo) que assume ser o seu mínimo, pelo menos com relação a x e v . Assim, para minimizar y , v e Φ teriam que aumentar de valor, o que não é possível dado ao comportamento monotônico da função de custo, ou seja, $\Phi(k) \leq \Phi(k-1)$ (Figura 32).

Na Figura 31 nota-se que os limite de velocidade, para o robô Twil, são ultrapassados². Para prevenir isto, restrições na amplitude dos sinais de controle serão consideradas na Seção 4.5.

O aumento do horizonte de predição parece fazer o erro diminuir assintoticamente (Figura 33). Por outro lado, deseja-se que o horizonte seja o menor possível, já que o seu tamanho é o principal responsável, neste caso, pelo crescimento do custo computacional (vide Seção 4.8).

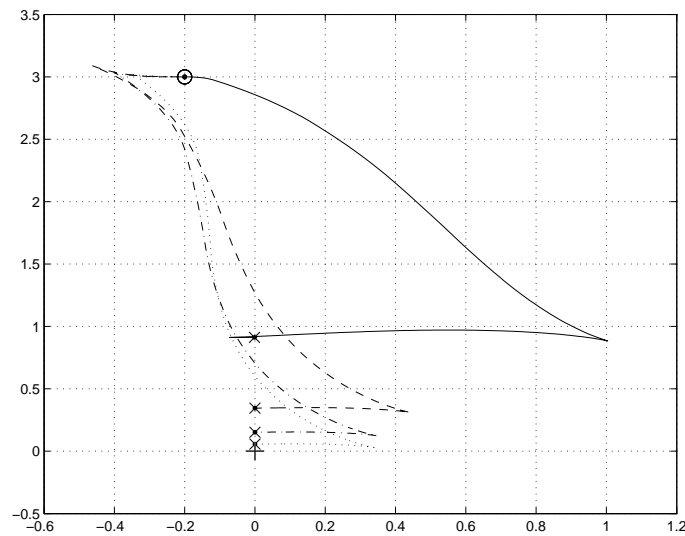


Figura 33: Efeito do aumento do horizonte N no erro em regime do estado y . Linha contínua: $N = 5$; linha tracejada: $N = 10$; linha traço-ponto: $N = 20$; linha pontilhada: $N = 50$.

Além disso, outra alternativa para contornar este problema seria aumentar o peso na variável y através da matriz \mathbf{Q} na função de custo da expressão (24). Entretanto, se o ponto de equilíbrio tiver sua orientação deslocada em $\pi/2$, o problema de erro em regime se transfere para a variável x , como pode ser observado pela Figura 34.

²Conforme definido no Apêndice A, os valores limites para v e w são de $\pm 0,4712 \text{ m/s}$ e $\pm 3,7699 \text{ rad/s}$, respectivamente.

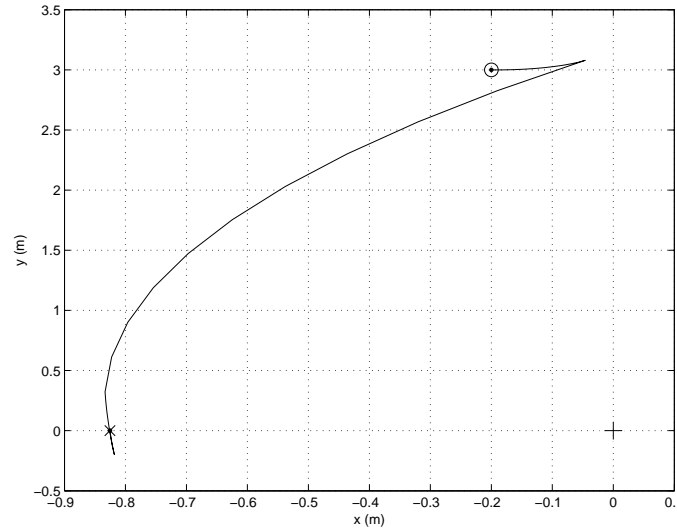


Figura 34: Trajetória no plano XY . O ponto de equilíbrio é agora $\mathbf{x}_{ref} = [0 \ 0 \ \pi/2]^T$.

Os parâmetros usados no MPC para o caso acima são os mesmos do caso anterior, exceto pela matriz de ponderação \mathbf{Q} e pelo ponto de equilíbrio, que agora são

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{ref} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi/2 \end{bmatrix}$$

A condição final dos estados para o caso apresentado acima é de $\mathbf{x}_f = [-0,83 \ 0 \ \pi/2]^T$. Observa-se então claramente que o erro em regime antes existente na variável de posição y transfere-se para x quando da rotação do ponto de equilíbrio em $\pi/2$, dada a simetria existente entre estas duas variáveis.

Sendo assim, torna-se necessária outra forma de fazer com que todos os estados converjam para a origem, sem o aumento do horizonte de predição.

Ao invés da adição de uma restrição terminal, como por exemplo $\mathbf{x}(k + N|k) = 0$ (o que pode tornar o problema de otimização não factível), em (ESSEN; NIJMEIJER, 2001) é proposta uma modificação na função de custo a ser minimizada:

$$\Phi(k) = \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{x}^T(k+j|k) \mathbf{Q}(j) \mathbf{x}(k+j|k) + \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}^T(k+j|k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k+j|k) + \Omega(\mathbf{x}(k+N|k)), \quad (25)$$

onde a matriz de ponderação $\mathbf{Q}(j)$ agora cresce exponencialmente dentro do horizonte e $\Omega(\mathbf{x}(k+N|k))$ é o chamado *custo terminal*,

$$\Omega(\mathbf{x}(k+N|k)) = \mathbf{x}^T(k+N|k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k+N|k)$$

e \mathbf{P} é uma matriz tal que aumenta o peso dos estados no final do horizonte, fazendo com que $\mathbf{x}(k+N|k)$ se aproxime mais da origem. Aqui, escolhe-se

$$\mathbf{Q}(j) = 2^{j-1} \mathbf{Q}, \quad \mathbf{P} = 50 \mathbf{Q}(N),$$

e

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Os resultados são mostrados abaixo, para uma condição inicial do robô de $\mathbf{x}_0 = [-0,2 \ 3 \ 0]^T$.

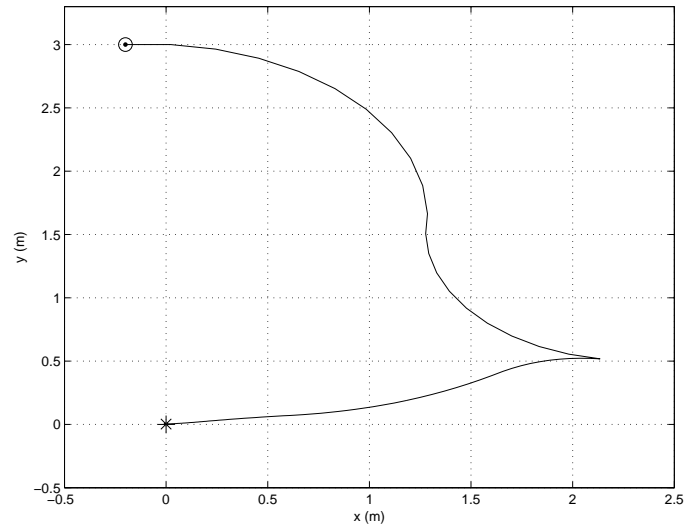


Figura 35: Trajetória no plano XY . NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).

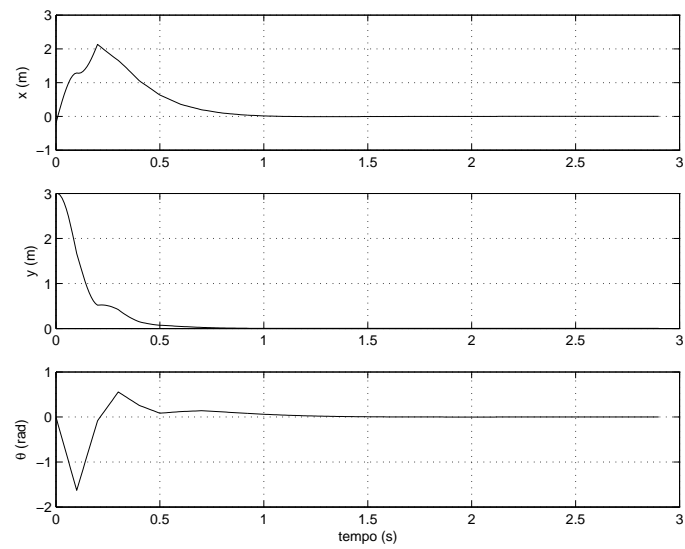


Figura 36: Estados x , y e θ . NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001)

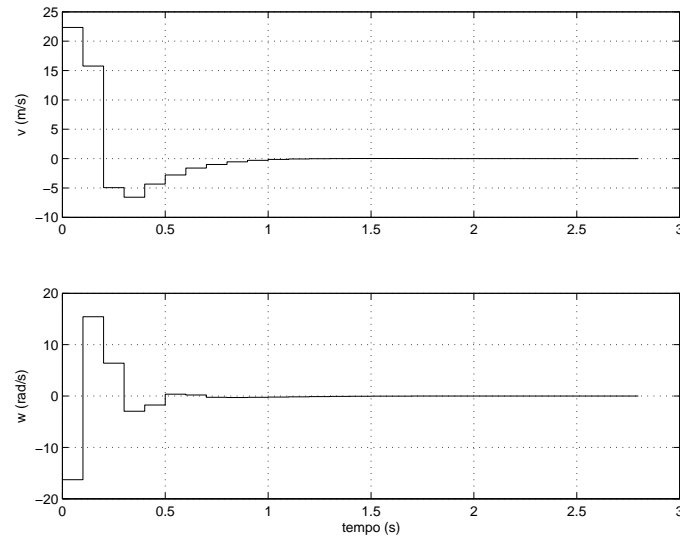


Figura 37: Entradas de controle v e w . NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001)

A condição final agora é de $\mathbf{x}_f = [0 \quad -0.003 \quad 0]^T$. Pelos gráficos acima, observa-se uma grande diminuição do erro no estado y . Apesar de o esforço de controle ter aumentado, o tempo de convergência também diminuiu bastante. No primeiro caso, o robô leva cerca de 4 segundos para convergir para a sua configuração final. Agora, isto acontece em pouco mais de um segundo.

Na Figura 38 é mostrado um detalhe da origem no plano XY . Observa-se que, apesar de o erro em y diminuir, ele não é nulo. Nas Figuras 39 e 40, é mostrado o comportamento do robô para diversas configurações iniciais e orientação inicial $\theta_0 = 0 \text{ rad}$.

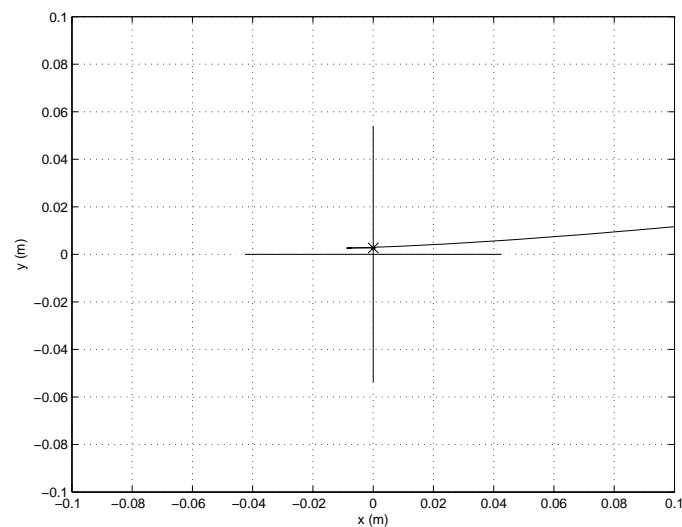


Figura 38: Detalhe da origem no plano XY . NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001)

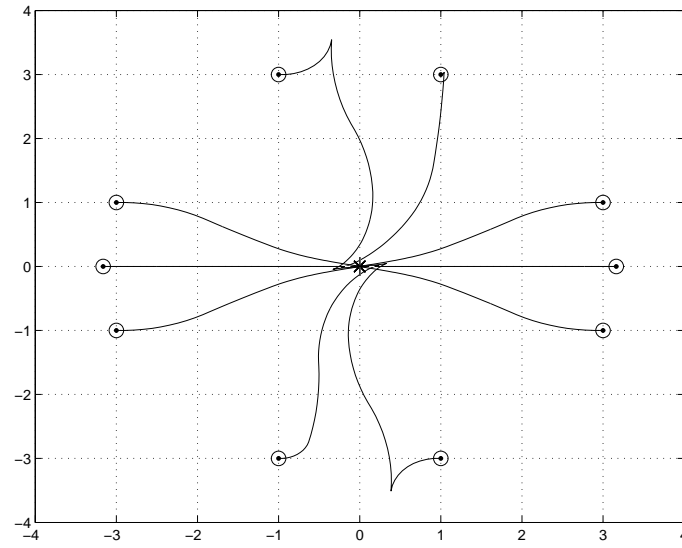


Figura 39: Comportamento do robô no plano XY para várias posições de saída e $\theta_0 = 0 \text{ rad}$. NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001)

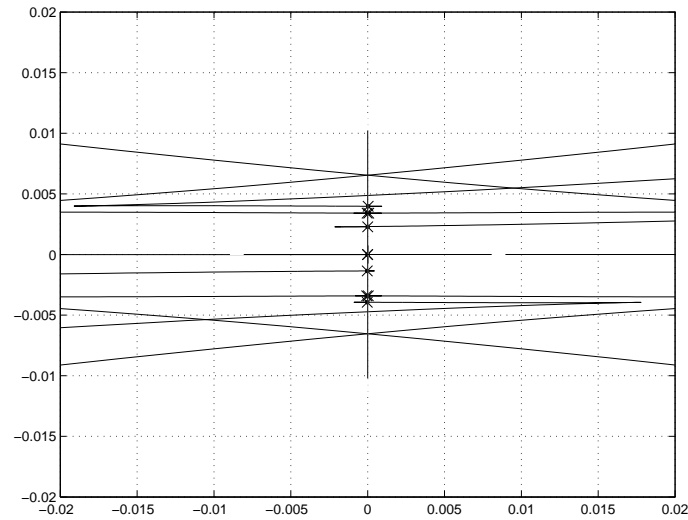


Figura 40: Detalhe da origem no plano XY para várias posições de saída e $\theta_0 = 0 \text{ rad}$. NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001)

4.4 Função de Custo em Coordenadas Polares

Foi visto que, com as modificações apresentadas em (ESSEN; NIJMEIJER, 2001), é possível diminuir consideravelmente o erro em regime existente em um dos estados de configuração. Entretanto, um erro de cerca de 0,003 m em y parece ser persistente, pelo menos nos casos apresentados.

E mais, ainda existe uma simetria entre os estados x e y , ambos dependendo da mesma entrada de controle. Para resolver isto, uma transformação de coordenadas do modelo cinemático do robô é utilizada. Em (LAGES; HEMERLY, 1998), a seguinte transformação

descontínua em coordenadas polares é introduzida (Figura 41):

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \text{atan2}(y, x) \\ \alpha &= \theta - \phi \end{aligned}$$

e o modelo cinemático do robô nesta base transforma-se em:

$$\begin{cases} \dot{e} = v \cos \alpha \\ \dot{\phi} = v \frac{\sin \alpha}{e} \\ \dot{\alpha} = -v \frac{\sin \alpha}{e} + w \end{cases} \quad (26)$$

onde o vetor de estados é $\mathbf{x}_p = [e \ \phi \ \alpha]^T$ e $\mathbf{u} = [v \ w]^T$ são as entradas de controle (velocidades linear e angular).

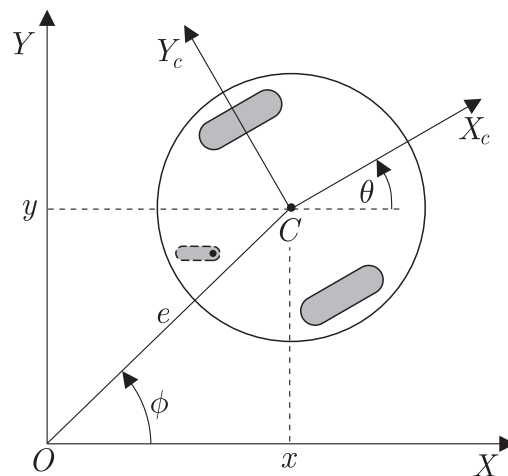


Figura 41: Coordenadas polares para o robô com acionamento diferencial.

(LAGES; HEMERLY, 1998) propõe também a seguinte função de Lyapunov que estabiliza o sistema (26) na origem:

$$V = \frac{1}{2} (\lambda e^2 + h \phi^2 + \alpha^2), \quad (27)$$

onde λ e h são constantes positivas.

Esta função de Lyapunov pode então ser utilizada como função de custo (CHEN; SHAW, 1982). Reescrevendo a expressão (27) em uma forma quadrática,

$$V = \mathbf{x}_p^T \mathbf{Q}_p \mathbf{x}_p, \quad \mathbf{Q}_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}h & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

e incluindo um termo de penalização do controle, tem-se a seguinte função de custo para o sistema em coordenadas polares:

$$\Phi_p(k) = \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_p^T(k+j|k) \mathbf{Q}_p \mathbf{x}_p(k+j|k) + \mathbf{u}^T(k+j-1|k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k+j-1|k) \quad (28)$$

considera-se então o seguinte problema de NMPC:

$$\mathbf{u}^*, \mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{u}, \mathbf{x}} \{\Phi_p(k)\}$$

sujeito à:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k|k) &= \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{x}(k+j|k) &= f(\mathbf{x}(k+j-1|k), \mathbf{u}(k+j-1|k)), \quad j \in [1, N] \end{aligned}$$

e com os seguintes parâmetros:

$$N = 5, \quad \lambda = 2, \quad h = 2, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

obtendo-se os resultados que seguem, para uma condição inicial de $\mathbf{x}_0 = [-0.2 \ 3 \ 0]^T$:

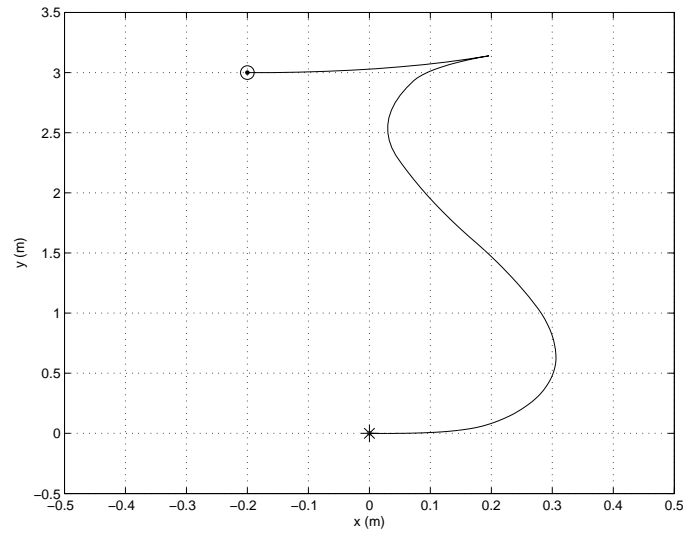


Figura 42: Trajetória no plano XY . NMPC com função de custo em coordenadas polares.

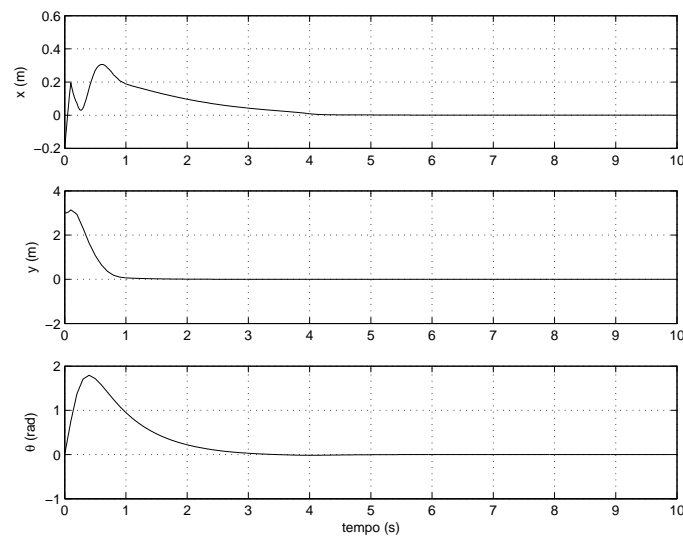


Figura 43: Estados x , y e θ . NMPC com função de custo em coordenadas polares.

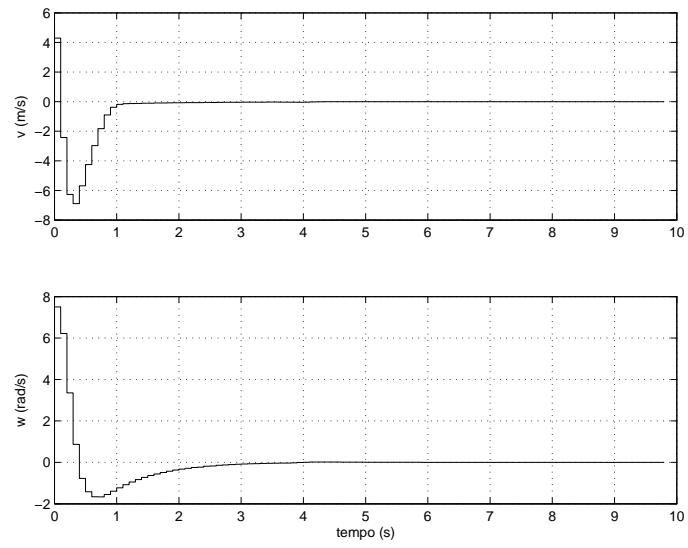


Figura 44: Entradas de controle v e w . NMPC com função de custo em coordenadas polares.

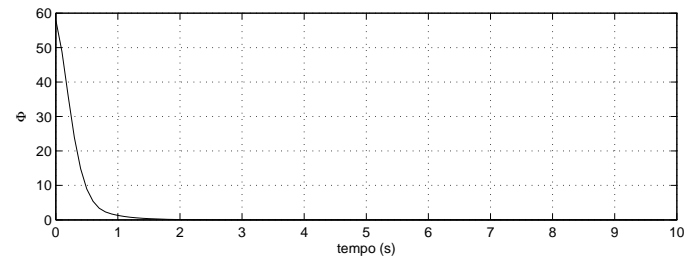


Figura 45: Função de custo Φ . NMPC com função de custo em coordenadas polares.

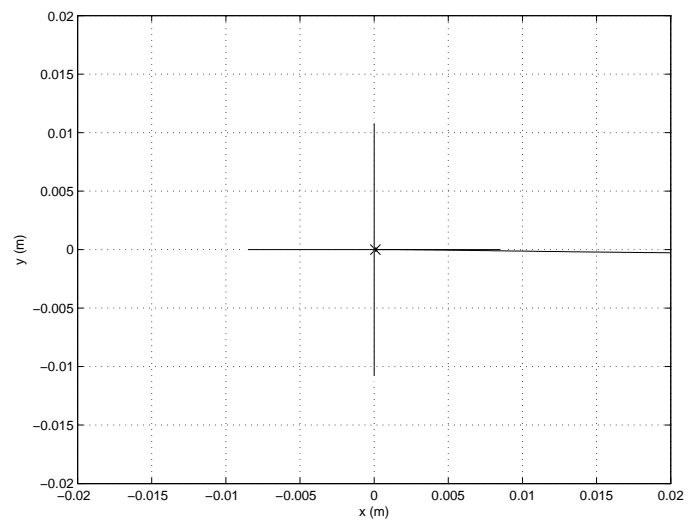


Figura 46: Detalhe na origem do plano XY . NMPC com função de custo em coordenadas polares.

Então, observa-se que, com a transformação em coordenadas polares na função de custo, sem aumentar o horizonte de predição e sem adição de outros termos, todos os estados convergem assintoticamente para a origem, sem apresentar erro em regime. Neste caso, o robô estabiliza exatamente na origem.

O motivo pelo qual o uso de uma função de custo em coordenadas polares resolve o problema apresentado no início deste capítulo ainda está em estudo. Entretanto, com base nos resultados, pode-se conjecturar o seguinte:

- Em (LAGES; HEMERLY, 1998) é visto que a convergência de um dos estados em coordenadas polares para zero faz com que todas as outras variáveis de estado também convergiam para zero. Assim, uma possível proposição é que esta propriedade também se estende para o caso do NMPC apresentado aqui;
- Com uma função de custo em coordenadas cartesianas, devido às restrições referentes ao modelo do sistema, o ponto ótimo encontrado pelo algoritmo de otimização não é único, fazendo com que o valor da função de custo fique preso em alguma curva de nível não nula. Com a mudança de base da função de custo para coordenadas polares, a estrutura da função de custo é modificada e provavelmente este problema é eliminado.

4.5 MPC com Restrições no Controle

Até aqui, a única restrição imposta no problema de otimização foi aquela referente à dinâmica do modelo cinemático do robô. Nesta seção, serão inseridos limites nas amplitudes das entradas de controle, a serem respeitados durante a minimização da função de custo. Levando em conta as características do robô Twil, definidas no Apêndice A, pode-se formular as seguintes restrições nas amplitudes das velocidades linear e angular:

$$\begin{aligned} -\bar{v} \leq v \leq \bar{v}, \quad \bar{v} &= 0,4712 \text{ m/s} \\ -\bar{w} \leq w \leq \bar{w}, \quad \bar{w} &= 3,7699 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Fazendo $\mathbf{u} = [v \ w]^T$, tem-se que $-\bar{\mathbf{u}} \leq \mathbf{u} \leq \bar{\mathbf{u}}$. Esta restrição pode ser reescrita na forma da desigualdade $\mathbf{D}\mathbf{u} \leq \mathbf{d}$ (expressão (13)) com:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0,4712 \text{ m/s} \\ 3,7699 \text{ rad/s} \\ 0,4712 \text{ m/s} \\ 3,7699 \text{ rad/s} \end{bmatrix}$$

Assim, tem-se o seguinte problema de otimização para o robô, utilizando a função de custo (28) em coordenadas polares:

$$\mathbf{u}^*, \mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{u}, \mathbf{x}} \{\Phi_p(k)\}$$

sujeito à:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k|k) &= \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{x}(k+j|k) &= f(\mathbf{x}(k+j-1|k), \mathbf{u}(k+j-1|k)), \quad j \in [1, N] \\ \mathbf{D}\mathbf{u}(k+j|k) &\leq \mathbf{d}, \quad j \in [0, N-1] \end{aligned}$$

com \mathbf{D} e \mathbf{d} definidos pela expressão (29). Utilizando-se os seguintes parâmetros de sintonia:

$$N = 5, \quad \lambda = 2, \quad h = 2, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

obtem-se então os seguintes resultados, para uma condição inicial de $\mathbf{x}_0 = [-0.2 \ 3 \ 0]^T$:

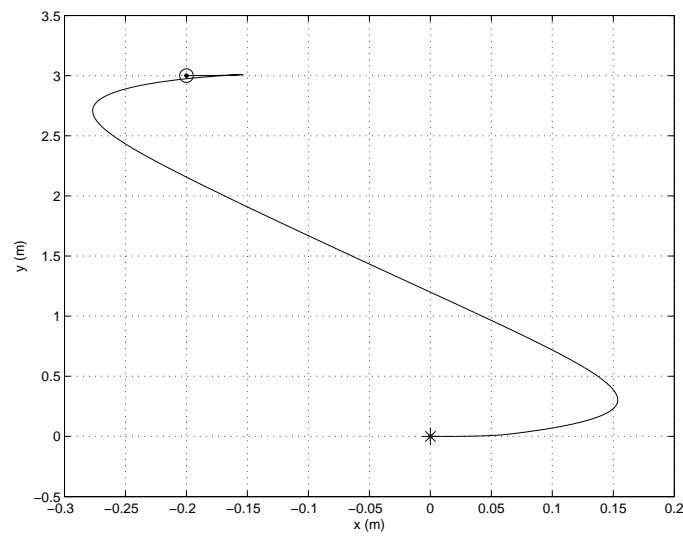


Figura 47: Trajetória no plano XY . NMPC com função de custo em coordenadas polares.

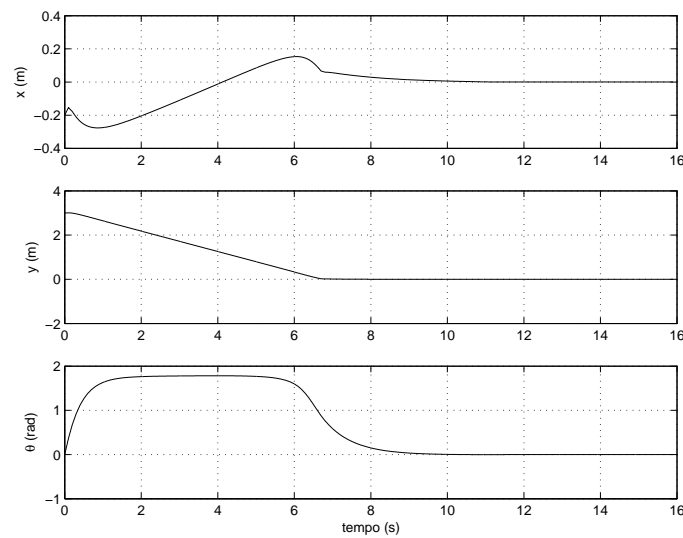


Figura 48: Estados x , y e θ . NMPC com função de custo em coordenadas polares.

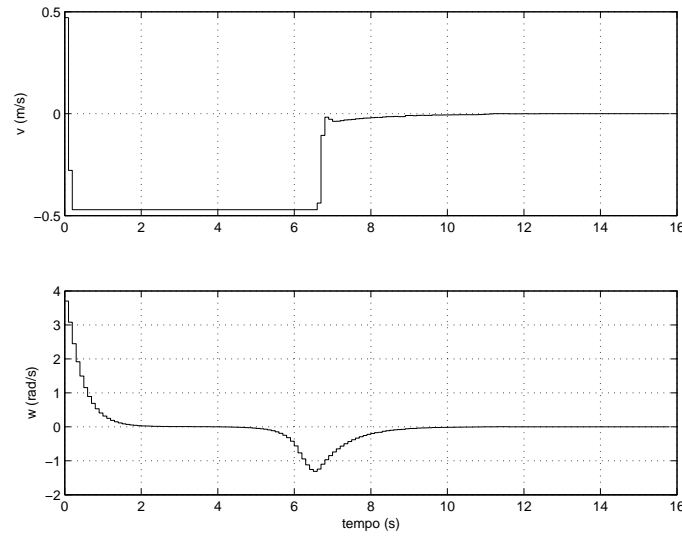


Figura 49: Entradas de controle v e w . NMPC com função de custo em coordenadas polares.

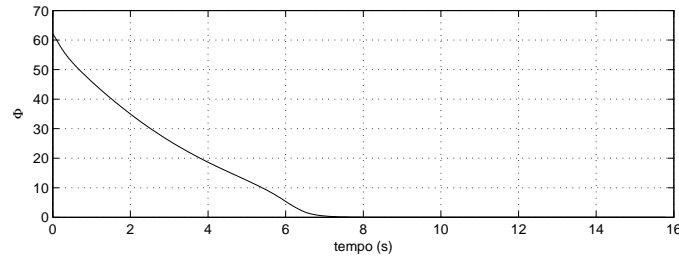


Figura 50: Função de custo Φ . NMPC com função de custo em coordenadas polares.

O ponto mais importante a ser ressaltado aqui é o de que a função de custo foi minimizada respeitando-se as restrições de amplitude das entradas de controle impostas pela expressão (29) nas velocidades linear e angular, o que pode ser claramente observado no gráfico da Figura 49.

Obviamente que, por causa destas restrições, as velocidades desenvolvidas estão muito abaixo das apresentadas nos casos anteriores, e por isso o robô demora um tempo maior para chegar ao seu objetivo. Por exemplo, no caso sem restrições da Figura 43 observa-se que o robô chega à origem em cerca de 4 segundos, o que agora acontece em pelo menos o dobro desse tempo.

Nos próximos gráficos, é feita uma comparação entre este último caso, com a função de custo em coordenadas polares da expressão (28), o caso do NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001) (função de custo da expressão (25)) e o caso com a função de custo original, em coordenadas cartesianas da expressão (24), sem a adição do custo terminal e com uma matriz \mathbf{Q} constante. Os resultados de cada caso são representados, nos gráficos abaixo, pelas linhas contínuas e tracejadas e traço-ponto, respectivamente. A matriz \mathbf{Q} ($\mathbf{Q} = \text{diag}(1; 1; 0, 5)$) e todos os parâmetros de sintonia são os mesmos para os três casos. A condição inicial do robô é $\mathbf{x}_0 = [3 \ 6 \ 0]^T$.

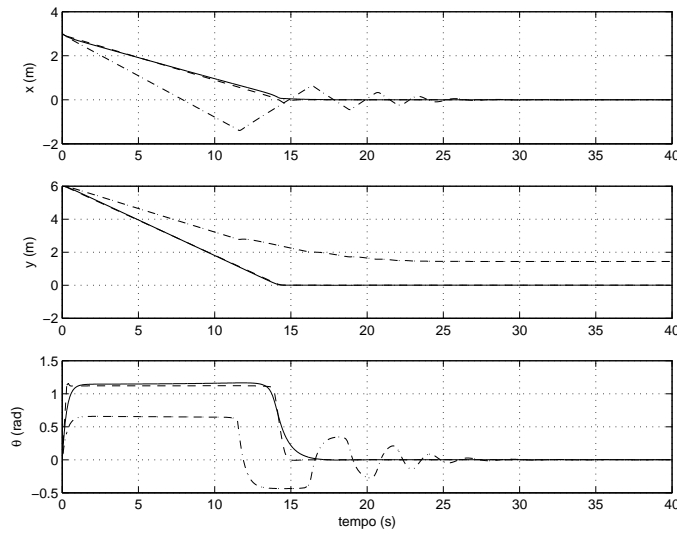


Figura 52: Estados x , y e θ . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; linha tracejada: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha traço-ponto: NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.

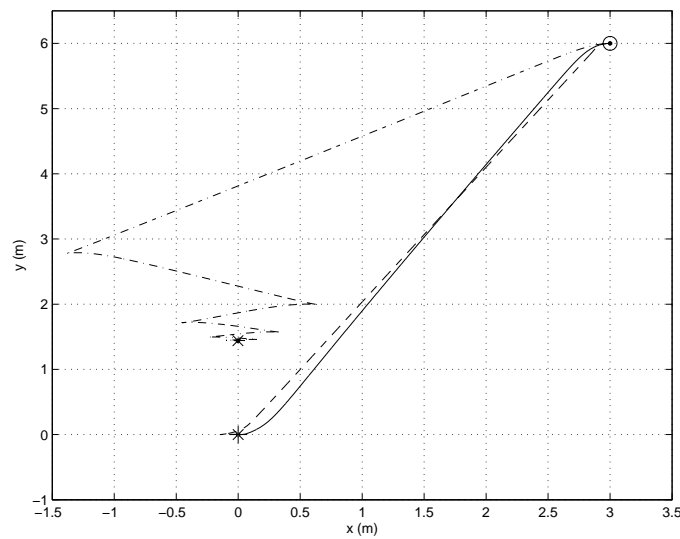


Figura 51: Trajetória no plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; linha tracejada: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha traço-ponto: NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.

Observa-se então, pelas Figuras 51 e 52, que existe um grande erro na variável y quando se usa a função de custo original, fato já constatado nos primeiros casos apresentados neste capítulo. A condição final para o NMPC com função de custo em coordenadas polares é $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{x}_0 = [0 \ 0,003 \ 0]^T$ para o NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001) e de $\mathbf{x}_0 = [-0,0022 \ 1,4407 \ 0,0014]^T$ para o NMPC com função de custo original. Ainda, a Figura 53 mostra que o esforço de controle é bem menor quando a função de custo é escrita em coordenadas polares. Todos os casos respeitam os limites impostos (Figura 53), mesmo com uma condição inicial relativamente longe da origem, se comparado com os casos anteriores.

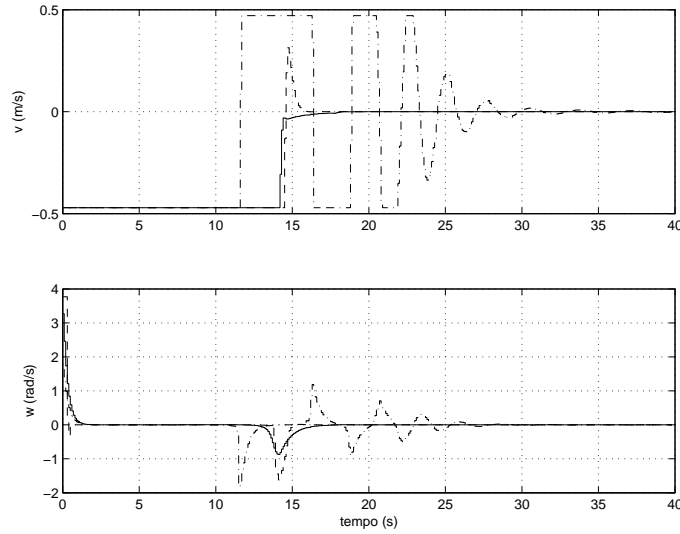


Figura 53: Entradas de controle v e w . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; linha tracejada: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha traço-ponto: NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.

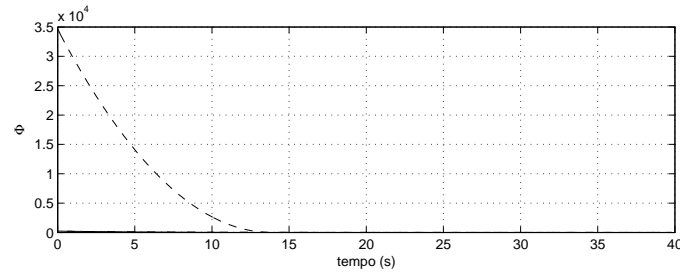


Figura 54: Função de custo Φ . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; linha tracejada: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha traço-ponto: NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.

4.6 MPC Com Restrições no Controle e no Estado

Nesta seção será mostrado um exemplo ilustrativo onde o objetivo é fazer com que o robô cruze um corredor sem tocar nas paredes. A existência de restrições de amplitude nas entradas de controle e nas variáveis de estado é então considerada. Assim, na Figura 55 tem-se o espaço de configuração, no plano XY , no qual está inserido o robô.

Os polígonos cinzas indicam a existência de paredes, ou seja, pontos onde o robô é impedido de cruzar.

De uma forma geral, a seguinte restrição na amplitude dos estados é formulada:

$$\mathbf{x}(k + j|k) \in \mathbb{X}, \quad j \in [0, N],$$

onde \mathbb{X} é um conjunto convexo de possíveis estados e contém o ponto de equilíbrio em seu interior (MAYNE et al., 2000). Entretanto, nota-se na Figura 55 que a região de configuração no plano XY não é mais convexa, dada a existência das paredes do corredor.

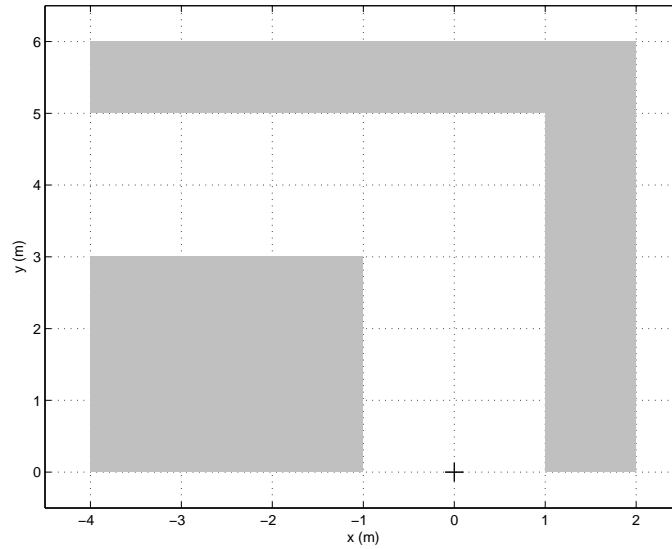


Figura 55: Espaço de configuração no plano XY : um corredor em "L".

Isto pode ser solucionado se o problema for tratado de forma *multi-objetiva*, ou seja, separa-se o conjunto \mathbb{X} em subregiões de forma que estas subregiões sejam convexas e contenham um ponto de equilíbrio em seu interior. Neste caso, definem-se $\mathbb{X}_1 \subseteq \mathbb{X}$ e $\mathbb{X}_2 \subseteq \mathbb{X}$ tal que:

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \cup \mathbb{X}_2$$

No caso considerado, tem-se que:

$$\mathbb{X}_1 = \{\mathbf{x} \mid x \leq -1; 3 \leq y \leq 5\} \quad (30)$$

$$\mathbb{X}_2 = \{\mathbf{x} \mid -1 \leq x \leq 1; y \leq 5\} \quad (31)$$

Os pontos de equilíbrio em \mathbb{X}_1 e \mathbb{X}_2 são, respectivamente,

$$\mathbf{x}_{ref,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{ref,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, enquanto o robô estiver se movimentando dentro da região pertencente a \mathbb{X}_1 , o seu objetivo será estabilizar em $\mathbf{x}_{ref,1}$ respeitando as restrições de estado referentes à expressão (30). Atingido um ponto pertencente à região \mathbb{X}_2 , o objetivo será então estabilizar na origem respeitando-se as restrições referentes à expressão (31). Neste caso, adotou-se $x = -1$ como fronteira entre as duas subregiões, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\in \mathbb{X}_1, & \text{se } x < -1, \\ \mathbf{x} &\in \mathbb{X}_2, & \text{se } x \geq -1, \end{aligned}$$

ou, reescrevendo na forma da desigualdade (12),

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{x} &\leq \mathbf{c}_1, & \text{se } x < -1, \\ \mathbf{C}\mathbf{x} &\leq \mathbf{c}_2, & \text{se } x \geq -1 \end{aligned}$$

com

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ \infty \\ \infty \\ -3 \\ \infty \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ \infty \\ 1 \\ \infty \\ \infty \end{bmatrix},$$

onde ∞ indica que a variável correspondente não possui restrição.

Assim, o MPC, para este caso, é resolvido da seguinte maneira, para cada instante de amostragem k :

$$\mathbf{u}^*, \mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{u}, \mathbf{x}} \{\Phi_p(k)\}$$

sujeito à:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k|k) &= \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{x}(k+j|k) &= f(\mathbf{x}(k+j-1|k), \mathbf{u}(k+j-1|k)), \quad j \in [1, N] \\ \mathbf{C}\mathbf{x}(k+j|k) &\leq \mathbf{c}_1, \quad \text{se } x(k|k) < -1, \quad j \in [0, N] \\ \mathbf{C}\mathbf{x}(k+j|k) &\leq \mathbf{c}_2, \quad \text{se } x(k|k) \geq -1, \quad j \in [0, N] \\ \mathbf{D}\mathbf{u}(k+j|k) &\leq \mathbf{d}, \quad j \in [0, N-1] \end{aligned}$$

com a seguinte função de custo:

$$\Phi_p(k) = \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{x}}_p^T(k+j|k) \mathbf{Q}_p \tilde{\mathbf{x}}_p(k+j|k) + \mathbf{u}^T(k+j-1|k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k+j-1|k),$$

onde

$$\tilde{\mathbf{x}}_p = \begin{bmatrix} \tilde{e} \\ \tilde{\phi} \\ \tilde{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(x - x_{ref,i})^2 + (y - y_{ref,i})^2} \\ \text{atan2}(y - y_{ref,i}, x - x_{ref,i}) \\ \theta - \theta_{ref,i} - \phi \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2$$

Então, com

$$N = 5, \quad \lambda = 2, \quad h = 2, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

obtem-se os seguintes resultados, para um condição final de $\mathbf{x}_0 = [-4 \ 4 \ \pi]^T$:

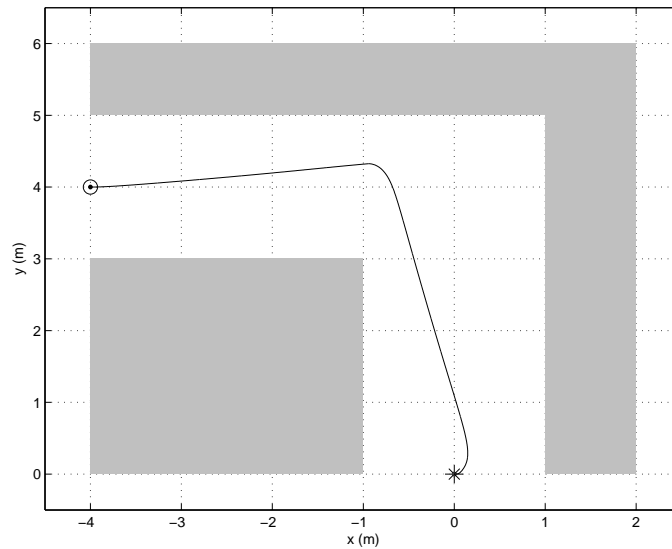


Figura 56: Trajetória no plano XY . NMPC com função de custo em coordenadas polares.

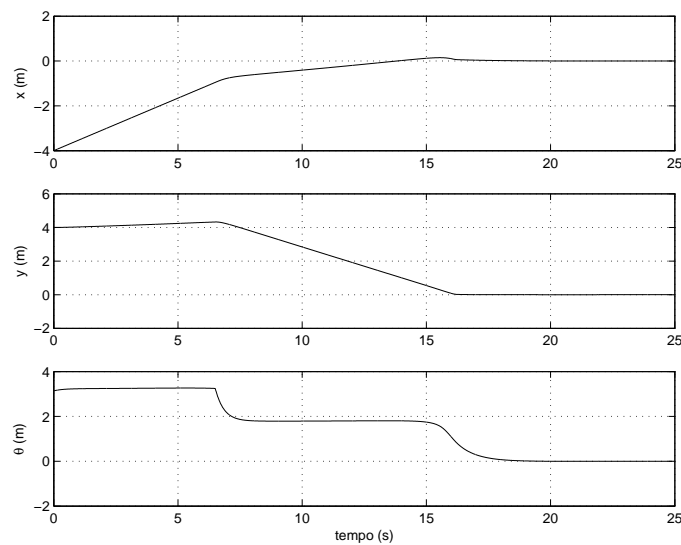


Figura 57: Estados x , y e θ . NMPC com função de custo em coordenadas polares.

Nota-se então pelas Figuras 56 a 59 que o resultado é bastante satisfatório. A condição final é do robô $\mathbf{x}_f = [0 \ 0 \ 0]^T$. o movimento do robô é bastante suave e o choque com as paredes do corredor é evitado com sucesso. As restrições de amplitude das entradas de controle são respeitadas. Observa-se também na Figura 59 que, como o ponto ao qual o robô deve convergir muda durante o percorrer da trajetória, a função de custo não é monotonicamente decrescente.

Agora, da Figura 60, observa-se que, se não existissem as restrições nos estados x e y , o robô iria de encontro à parede (linha tracejada do gráfico), provocando seu choque com a mesma.

E na Figura 61 é mostrado um caso semelhante ao anterior, mas agora com o corredor invertido em relação ao eixo Y e com condição inicial em $\mathbf{x}_0 = [4 \ 4.3 \ \pi]^T$.

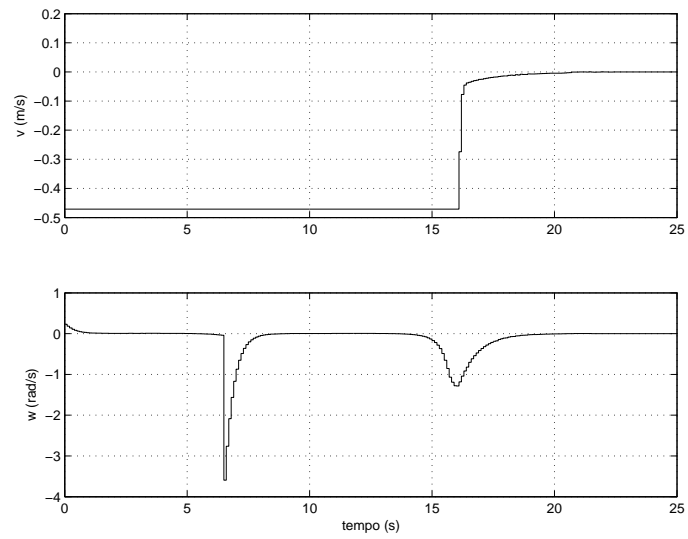


Figura 58: Entradas de controle v e w . NMPC com função de custo em coordenadas polares.

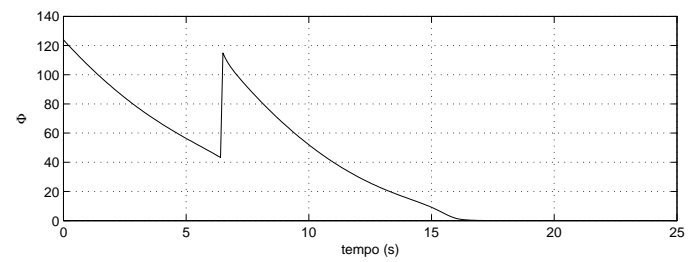


Figura 59: Função de custo Φ . NMPC com função de custo em coordenadas polares.

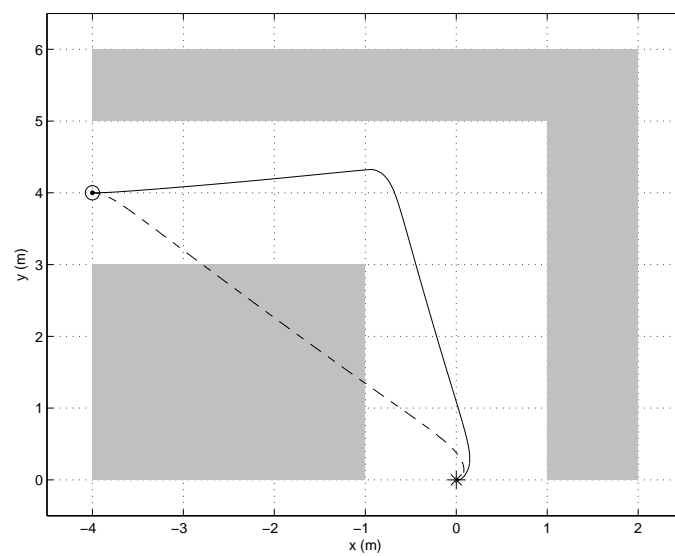


Figura 60: Trajetória no plano XY . NMPC com função de custo em coordenadas polares. Linha contínua: com restrições nos estados; Linha tracejada: sem restrições nos estados.

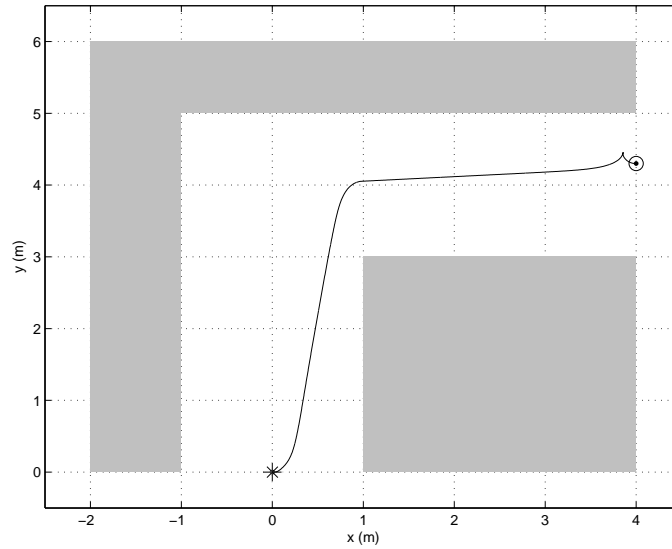


Figura 61: Trajetória no plano XY . NMPC com função de custo em coordenadas polares.

4.7 Análises Comparativas

Nesta seção várias análises comparativas serão mostradas. Primeiramente as duas técnicas de NMPC desenvolvidas durante este capítulo serão mostradas, e após as comparações serão feitas entre o NMPC com função de custo em coordenadas polares e com restrição de amplitude nas entradas de controle e as leis de controle variantes no tempo e não suaves apresentadas das Seções 2.4.1 e 2.4.2.

Dentro desta seção, a restrição nas entradas de controle da expressão (29) é considerada e os seguintes parâmetros são utilizados no NMPC com função de custo em coordenadas polares: $\lambda = 2$, $h = 2$, $N = 5$ e

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

4.7.1 Comparação Entre o NMPC Com Função De Custo Em Coordenadas Polares e o NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001)

Para o NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001), definido na Seção 4.3, os parâmetros utilizados são os seguintes: $N = 5$, $\mathbf{Q}(j) = 2^{j-1}\mathbf{Q}$, $\mathbf{P} = 50\mathbf{Q}(N)$ e

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

e para ambos os casos, restrições nas entradas de controle conforme a expressão (29) são consideradas.

Os resultados são mostrados abaixo para uma condição inicial de $\mathbf{x}_0 = [-2 \ 2 \ \pi/2]^T$.

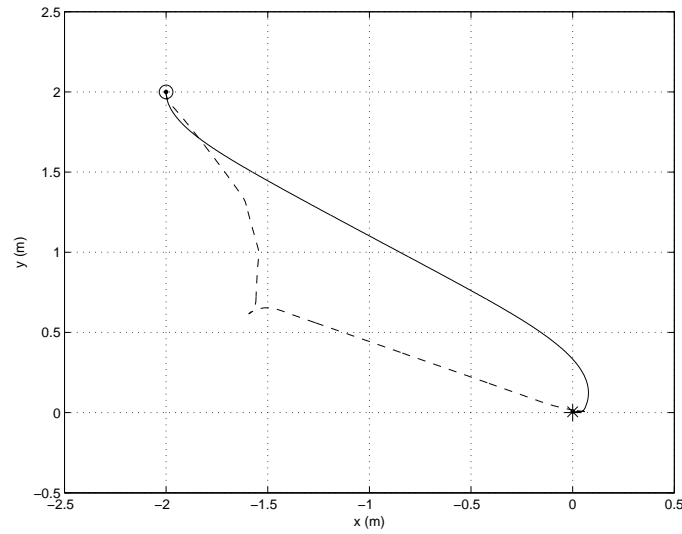


Figura 62: Trajetória no plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).

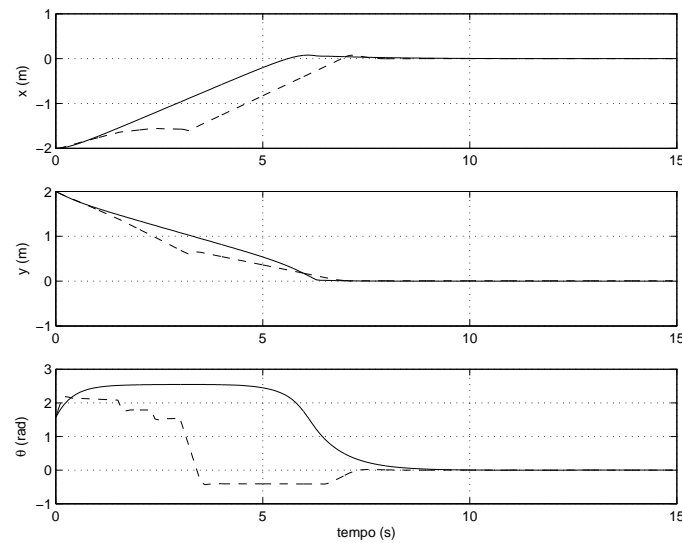


Figura 63: Estados x , y e θ . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).

Das Figuras 62 e 63, nota-se que, quando utilizada a função de custo em coordenadas polares, o resultado é uma trajetória de estado mais suave, além de todos os estados convergirem exatamente para a origem. No caso do NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001), o estado y ainda apresenta um pequeno erro, de 0,0068. A Figura 64 mostra que o controle gerado pelo NMPC proposto aqui é significativamente mais suave. A Figura 65 mostra um detalhe da origem do plano XY , onde é fácil de se observar que o robô converge para o seu objetivo suavemente e sem erro em regime quando é aplicada a função de custo em coordenadas polares.

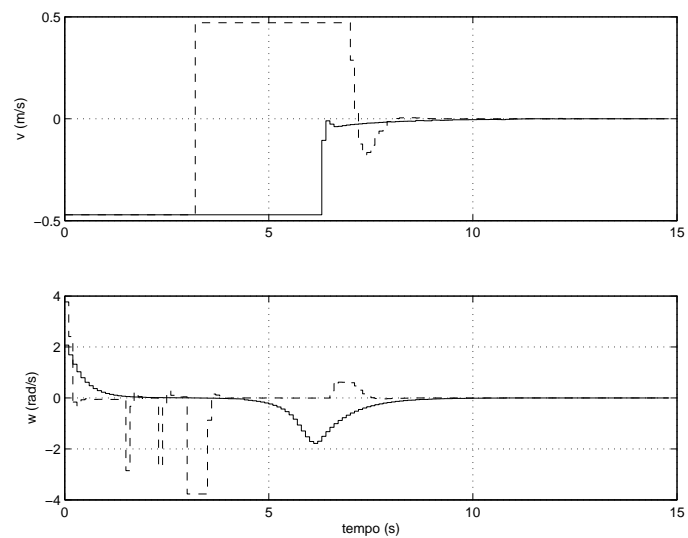


Figura 64: Entradas de controle v e w . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).

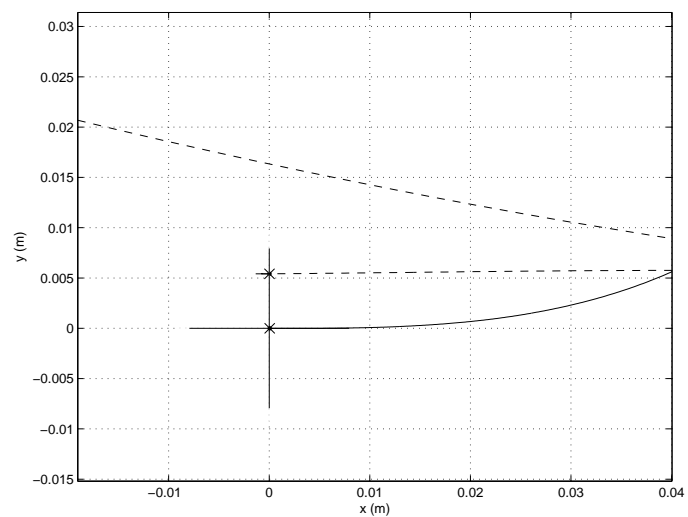


Figura 65: Detalhe da origem no plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).

4.7.2 Comparação Entre o NMPC Com Função De Custo Em Coordenadas Polares e o Controle Variante No Tempo de (POMET et al., 1992)

Para o controle de (POMET et al., 1992), definido na Seção 2.4.1.1, os seguintes parâmetros são utilizados: $a = 4$, $\lambda = 2, 1$ (escolhidos de forma a apresentar uma melhor trajetória de estados). Os seguintes resultados são obtidos, para uma condição inicial de $\mathbf{x}_0 = [2 \ 2 \ 0]^T$:

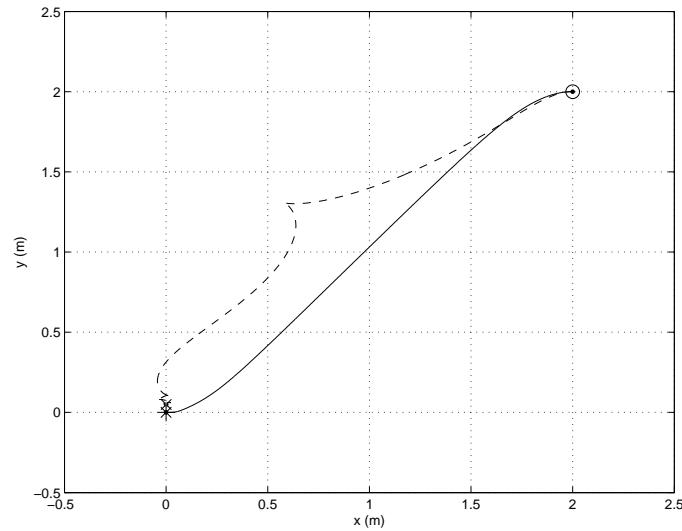


Figura 66: Trajetória no plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (POMET et al., 1992).

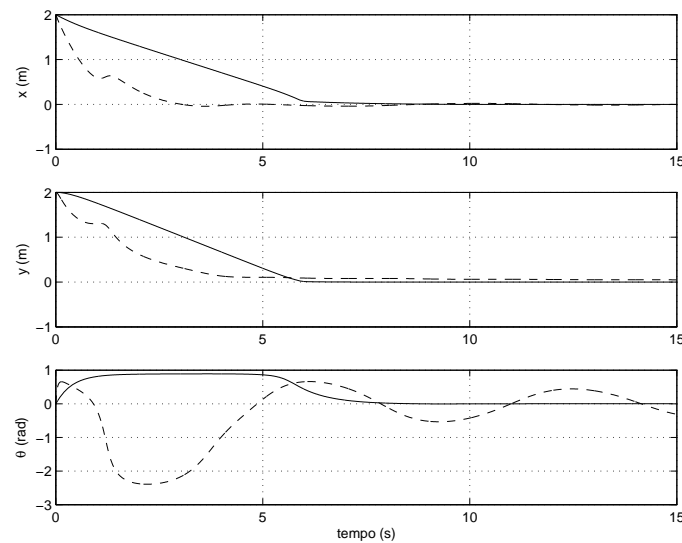


Figura 67: Estados x , y e θ . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (POMET et al., 1992).

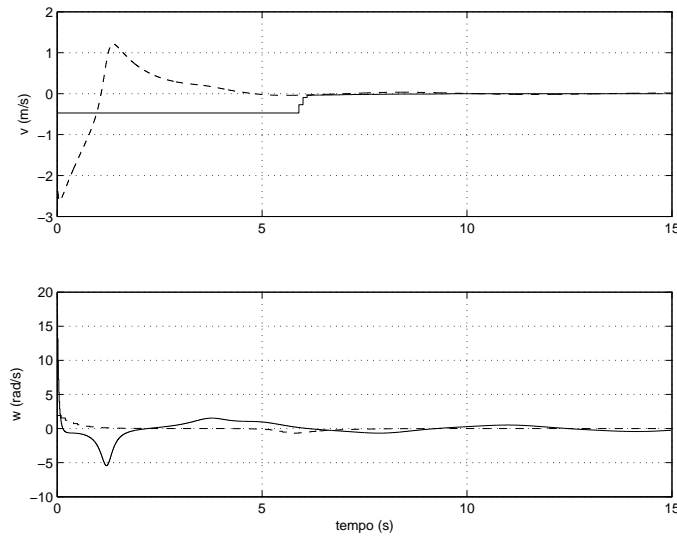


Figura 68: Entradas de controle v e w . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (POMET et al., 1992).

Na Figura 68 observa-se a diferença mais marcante: enquanto que a lei de controle gerada pelo NMPC (linha contínua) permanece dentro dos limites impostos pelas restrições, a lei de controle variante no tempo (linha tracejada) ultrapassa e muito estes limites. Na Figura 69 é visto o detalhe da origem no plano XY . Nota-se a baixa taxa de convergência e o comportamento oscilatório gerado pela lei de controle variante no tempo.

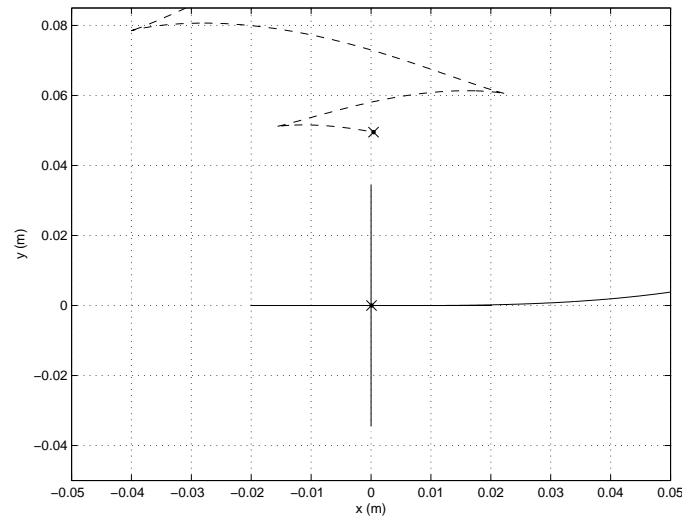


Figura 69: Detalhe da origem do plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (POMET et al., 1992).

4.7.3 Comparação Entre o NMPC Com Função De Custo Em Coordenadas Polares e o Controle Variante No Tempo de (SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991a)

A lei de controle de (SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991a) foi definida na Seção 2.4.1.2. Os resultados da comparação com o NMPC, para uma condição inicial de $\mathbf{x}_0 = [-2, 5 \ 1, 3 \ 0]^T$, são mostrados abaixo.

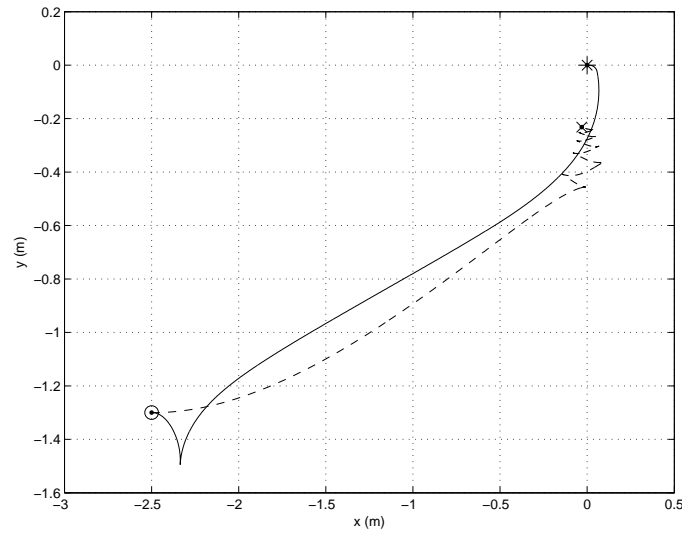


Figura 70: Trajetória no plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991a).

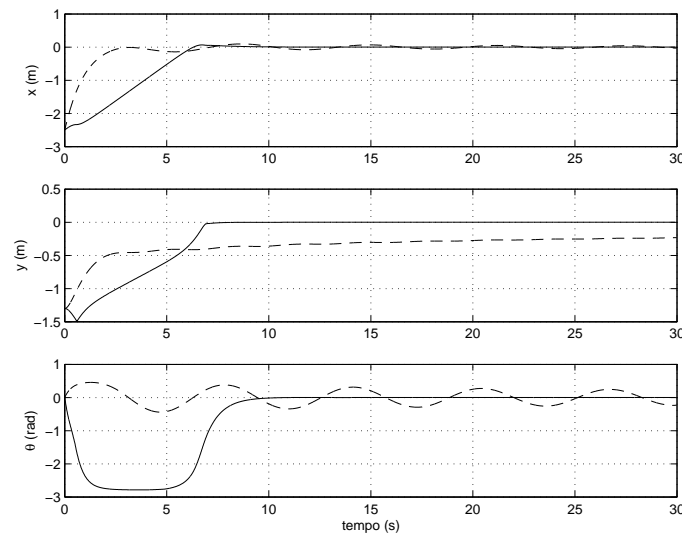


Figura 71: Estados x , y e θ . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991a).

Novamente, observa-se o comportamento característico do controle variante no tempo para a lei de (SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991a): trajetórias altamente oscilatórias e uma baixa taxa de convergência. As amplitudes das entradas de controle também ultrapassam os limites do robô Twil, enquanto que para o NMPC estes limites são respeitados (Figura 72). A taxa de convergência para o NMPC também é maior, sendo que o robô atinge o seu objetivo em cerca de 10 segundos. Na Figura 73, um detalhe da origem do plano XY é mostrado. Observa-se assim que, com o NMPC, o robô aproxima-se suavemente da origem. Com a lei de (SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991a), esta aproximação é feita de forma demasiadamente lenta e oscilatória.

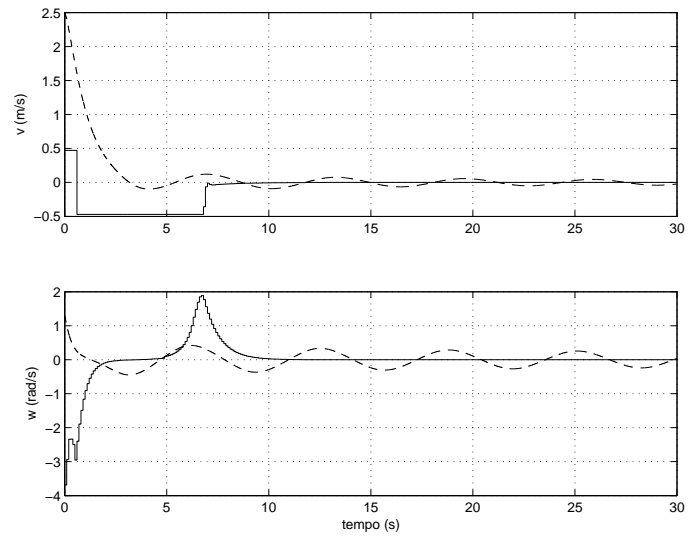


Figura 72: Entradas de controle v e w . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991a).

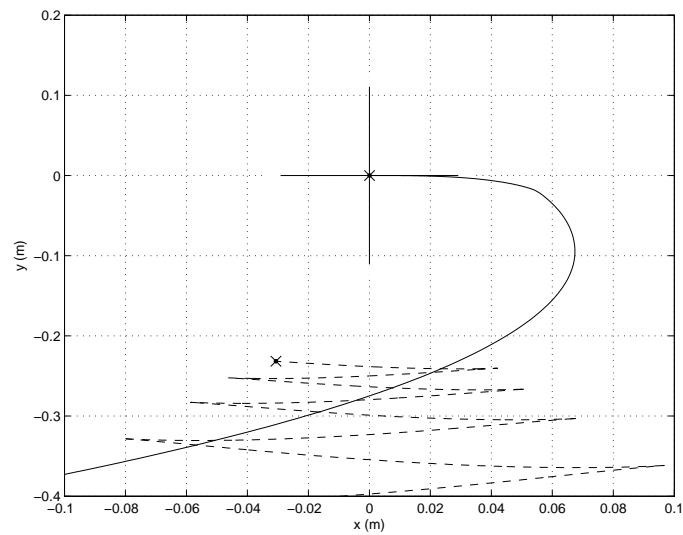


Figura 73: Detalhe da origem do plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991a).

4.7.4 Comparação Entre o NMPC Com Função De Custo Em Coordenadas Polares e o Controle Variante No Tempo De (TEEL; MURRAY; WALSH, 1995)

A lei de controle variante no tempo de (TEEL; MURRAY; WALSH, 1995) foi definida na Seção 2.4.1.3. Os resultados da comparação desta lei de controle e do NMPC com função de custo em coordenadas polares da seção 4.4 são mostrados nas figuras a seguir, para uma condição inicial de $\mathbf{x}_0 = [0 \quad -3,2 \quad \pi/4]^T$.

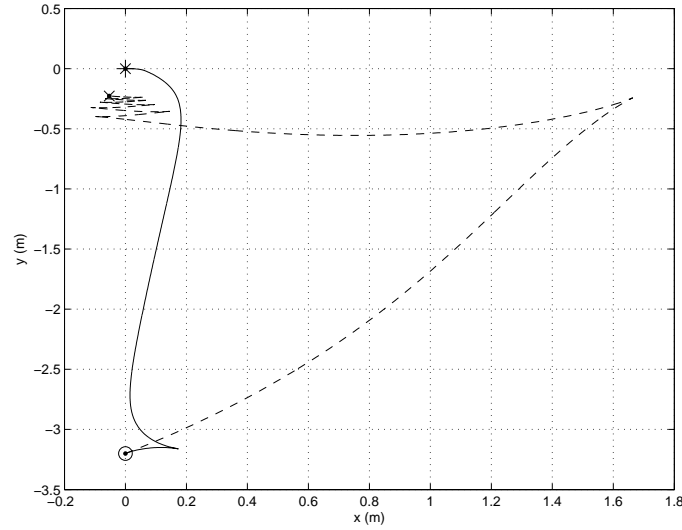


Figura 74: Trajetória no plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (TEEL; MURRAY; WALSH, 1995).

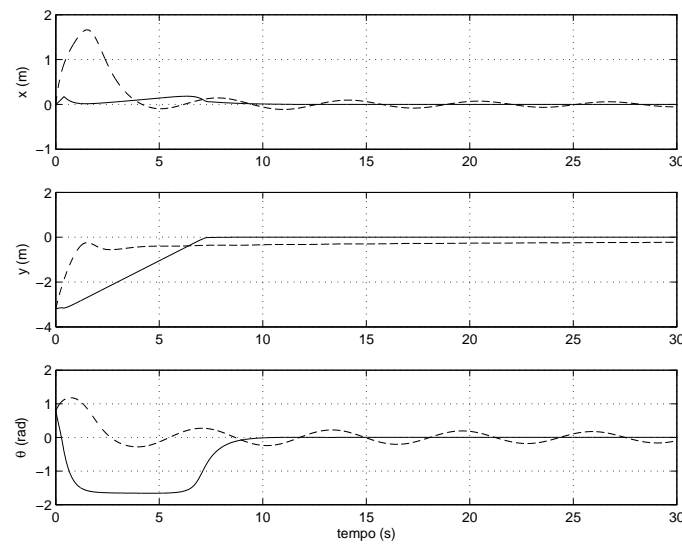


Figura 75: Estados x , y e θ . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (TEEL; MURRAY; WALSH, 1995).

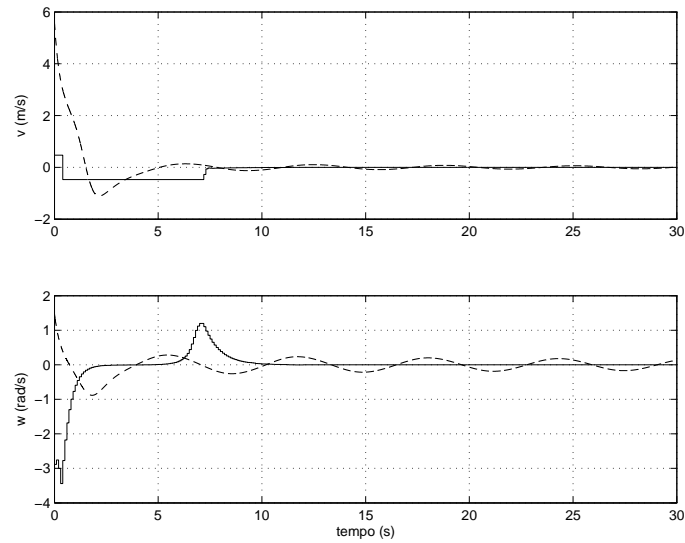


Figura 76: Entradas de controle v e w . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (TEEL; MURRAY; WALSH, 1995).

Novamente, observam-se trajetórias oscilatórias e uma baixa taxa de convergência para a lei variante no tempo de (TEEL; MURRAY; WALSH, 1995). Ainda, o estado x , para esta lei de controle, desenvolve uma amplitude muito maior se comparado com o NMPC (Figura 74). A amplitude da velocidade linear é largamente ultrapassado para a lei de (TEEL; MURRAY; WALSH, 1995), enquanto que a velocidade angular permanece dentro do intervalo aceitável para o robô Twil (Figura 76). Para o NMPC, todas as restrições de controle são respeitadas. Novamente a taxa de convergência para o NMPC é significativamente maior, cerca de 10 segundos. Na Figura 77, nota-se um detalhe da origem do plano XY .

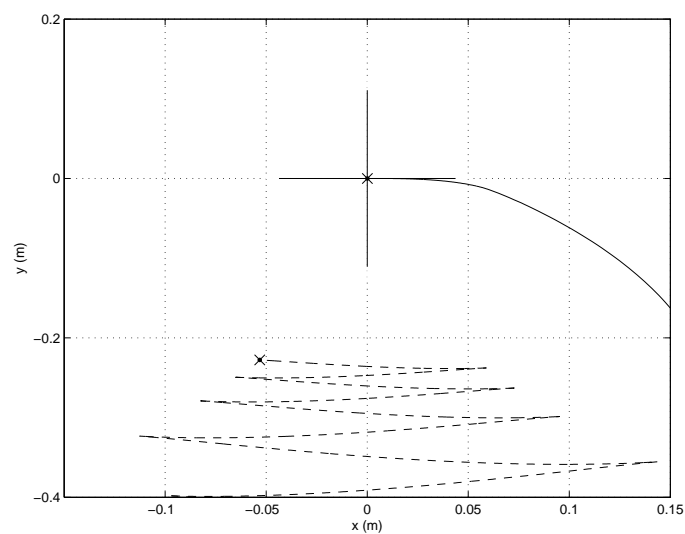


Figura 77: Detalhe da origem do plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (TEEL; MURRAY; WALSH, 1995).

4.7.5 Comparação Entre o NMPC Com Função De Custo Em Coordenadas Polares e o Controle Descontínuo De (LAGES, 1998)

Para o controle em coordenadas polares de (LAGES; HEMERLY, 1998), os seguintes parâmetros são utilizados: $\gamma_1 = 0,1$, $\gamma_2 = 0,2$, $\lambda = 2$ e $h = 2$. Esta lei de controle é definida na Seção 2.4.2.1.

Os resultados são mostrados abaixo para uma condição inicial de $\mathbf{x}_0 = [0 \ 4 \ 0]^T$.

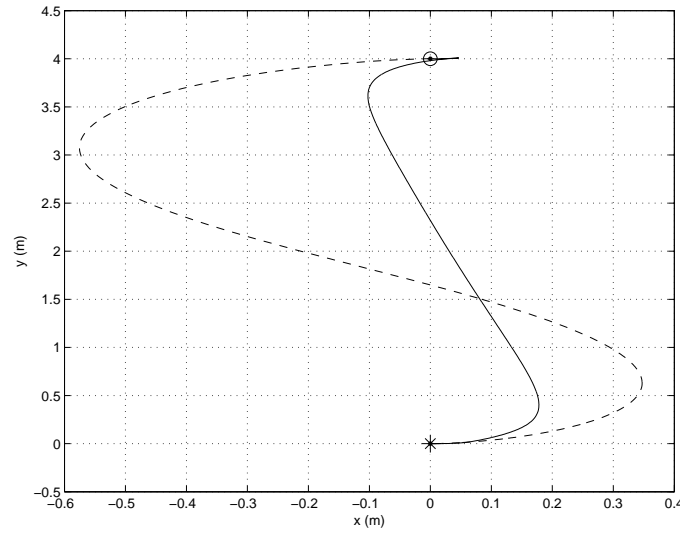


Figura 78: Trajetória no plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (LAGES; HEMERLY, 1998).

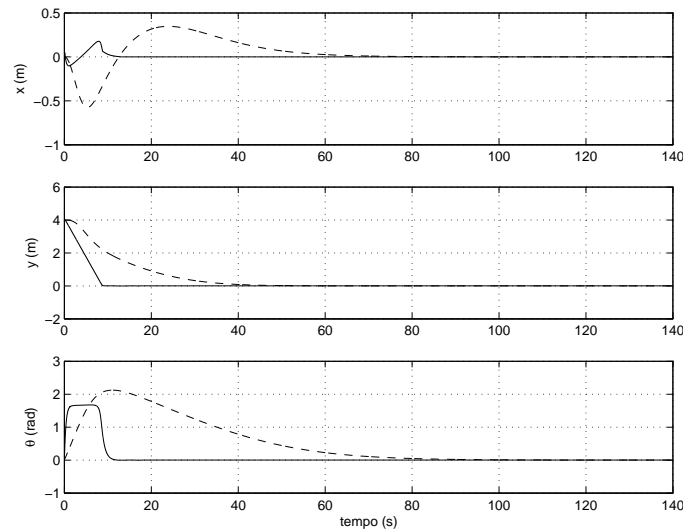


Figura 79: Estados x , y e θ . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (LAGES; HEMERLY, 1998).

Pelos gráficos acima, observa-se que o robô, quando aplicado o controle de (LAGES; HEMERLY, 1998), leva cerca de 80 segundos para atingir a origem. Nota-se ainda que as amplitudes das entradas de controle estão dentro do intervalo admissível, respeitando

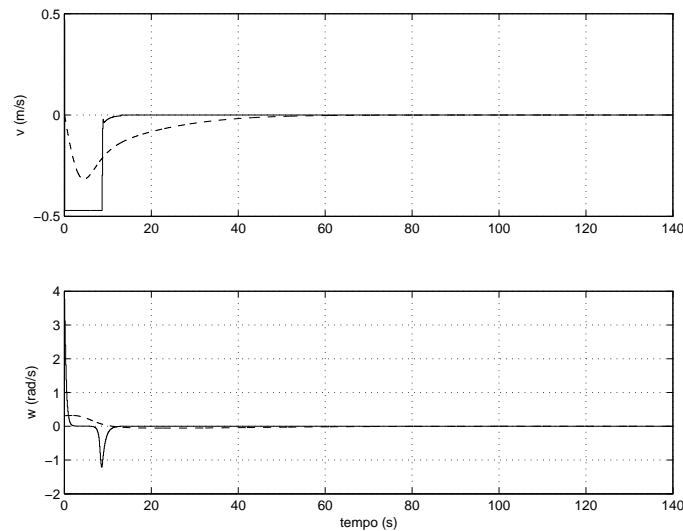


Figura 80: Entradas de controle v e w . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (LAGES; HEMERLY, 1998).

os limites do robô Twil (Figura 80), e por isso esta lei de controle, com estes parâmetros, pode ser aplicada neste robô. Entretanto, como já visto anteriormente, com o NMPC pode-se limitar o controle através de restrições nestas variáveis. Assim, é possível fazer com que as velocidades desenvolvidas sejam maiores, fazendo com que o robô atinga seu objetivo cerca de 10 vezes mais rápido, e ainda assim fazer com que as amplitudes destas velocidades estejam dentro dos limites impostos pelas restrições. Observa-se também pela Figura 78 que, com o controle descontínuo, o estado x desenvolve uma amplitude muito maior se comparada com a trajetória gerada pelo NMPC. Ambas as leis de controle fazem com que o robô aproxime-se suavemente da origem.

4.7.6 Comparação Entre o NMPC Com Função De Custo Em Coordenadas Polares e o Controle Descontínuo De (SØRDALEN, 1993a)

Esta lei de controle é definida na Seção 2.4.2.2. A condição inicial do robô é de $\mathbf{x}_0 = [0, 5 \ 1 \ -\pi/2]^T$ e os resultados são mostrados abaixo.

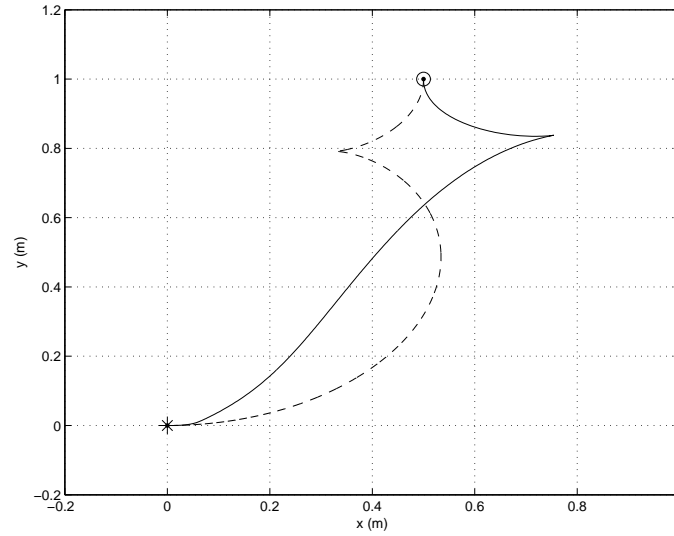


Figura 81: Trajetória no plano XY . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (SØRDALEN, 1993a).

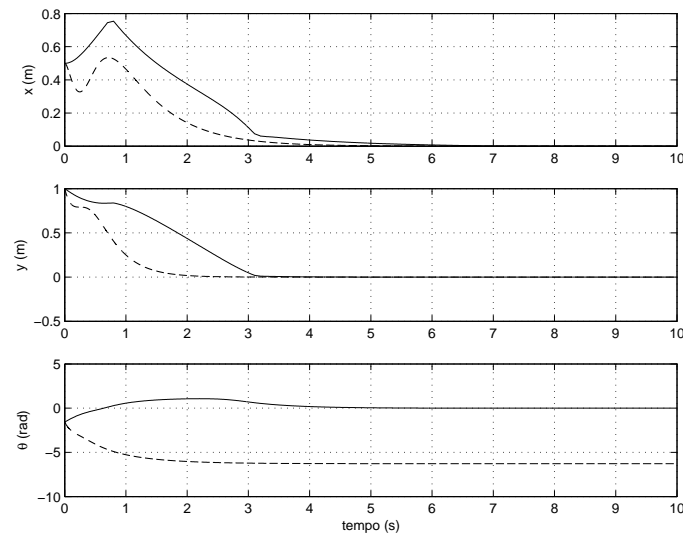


Figura 82: Estados x , y e θ . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (SØRDALEN, 1993a).

Neste caso observa-se que ambas as leis de controle geram uma trajetória de estado bastante suave, fazendo com que o robô se aproxime suavemente da origem. Ambas apresentam um tempo de estabilização praticamente igual: cerca de 7 segundos, sendo que o controle de (SØRDALEN, 1993a) força a convergência da orientação em 2π (O ponto de equilíbrio para esta lei de controle é $\{(x, y, \theta) | x = 0, y = 0, \theta = 2\pi n\}$, $n \in 0, \pm 1, \pm 2 \dots$, conforme definido na Seção 2.4.2.2). Entretanto, pela Figura 83, a lei de controle descontínua de (SØRDALEN, 1993a) ultrapassa largamente os limites do robô Twil, enquanto que o NMPC gera um controle que respeita as restrições. Talvez a amplitude do controle descontínuo possa ser diminuída através da sintonia adequada dos parâmetros. Entretanto, não existe um método sistemático com o qual isso possa ser feito.

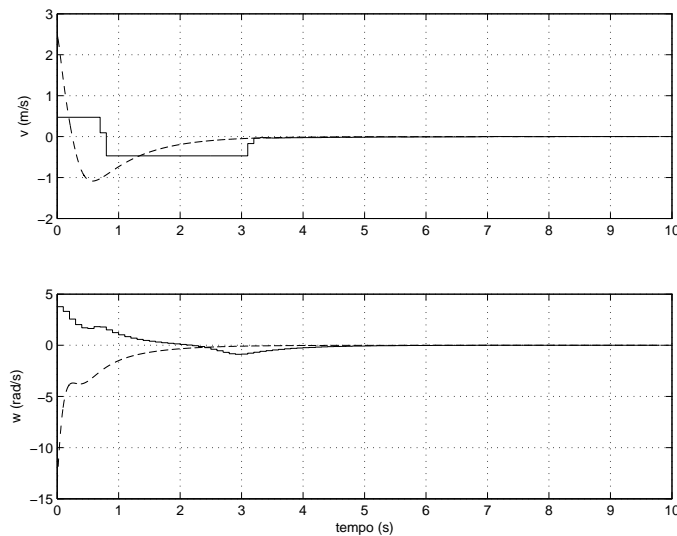


Figura 83: Entradas de controle v e w . Linha contínua: NMPC com função de custo em coordenadas polares; Linha tracejada: controle de (SØRDALEN, 1993a).

4.8 O Custo Computacional do NMPC

É bem conhecido o fato de os algoritmos de controle preditivo necessitarem de um grande esforço computacional para a cálculo da lei de controle. Este problema se agrava mais ainda quando se tem um MPC não linear, onde o problema de otimização é não convexo. Tanto é que, em seus primórdios, o MPC era aplicado apenas em plantas lineares e com grandes constantes de tempo. Entretanto, o rápido avanço das capacidades dos processadores atuais e dos algoritmos de otimização fazem com que o uso do MPC em sistemas com dinâmicas rápidas e não lineares seja cada vez mais possível.

Nesta seção, serão vistas então algumas considerações acerca do custo computacional envolvido na resolução do problema de estabilização em um ponto através do NMPC. Para isto, o critério utilizado será o número de operações em ponto flutuante realizadas em cada período de amostragem, que neste caso é de 0,1 segundo. Assim, com base nestas informações, é possível avaliar a viabilidade de uma aplicação em tempo real dos algoritmos desenvolvidos aqui.

Atualmente existem softwares capazes de estimar o número de operações em ponto flutuante por segundo (*floating-point operations per second, flops*) realizados por um computador (ABURTO, 1992). Neste caso, tomando por base um computador com um processador Athlon XP 2600+, tem-se que este número é de 576 Mflops, ou 576.000.000 de flops. Assim, considerando-se o período de amostragem utilizado aqui, $T = 0,1$ segundo, tem-se que, para uma aplicação em tempo real ser possível, o número máximo de operações em ponto flutuante, OPF, por período de amostragem não pode ser maior que 57.600.000. Este número será utilizado como base comparativa no estudo desenvolvido nesta seção. A contagem das operações em ponto flutuante por período de amostragem é realizada através da função `flops` do Matlab.

Na Seção 2.4 foram vistas diversas leis de controle clássicas o problema de estabilização em um ponto. Para todas elas existe uma forma analítica da lei de controle. Assim, em princípio, o custo computacional envolvido neste caso é muito baixo, sendo capaz de se implementar estas leis de controle em computadores de menor capacidade computa-

cional ou até mesmo em microprocessadores. Na Tabela 1 são mostrados o número de operações em ponto flutuante realizadas por período de amostragem para o cálculo do controle através destas leis.

Tabela 1: Custo computacional de algumas leis clássicas de controle de robôs móveis.

Lei de controle	No. OPF por período de amostragem
(POMET et al., 1992)	46
(SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991a)	35
(TEEL; MURRAY; WALSH, 1995)	35
(LAGES, 1998)	32
(SØRDALEN, 1993a)	67

Nota-se então, pelos dados acima, que o esforço computacional realizado por estas leis de controle é cerca de 1.000.000 de vezes menor que o máximo permitido.

Agora o NMPC será analisado. Os três casos vistos anteriormente são aqui identificados como:

- *Caso 1.* O NMPC original, com função de custo quadrática em coordenadas cartesianas (expressão (24)).;
- *Caso 2.* O NMPC desenvolvido por (ESSEN; NIJMEIJER, 2001), com função de custo com custo terminal e matriz Q crescente exponencialmente (Expressão (25));
- *Caso 3.* O NMPC desenvolvido neste trabalho (Seção 4.4), com função de custo quadrática e com as variáveis de estado em coordenadas polares (Expressão (28)).

Em todos os casos acima a restrição de amplitude das entradas de controle, $|\mathbf{u}| \leq \mathbf{d}$, será considerada e a condição inicial do robô é $\mathbf{x}_0 = [1 \ 1 \ 0]^T$. Os parâmetros de sintonia do MPC são iguais em todos os estados. Conforme foi observado no início deste capítulo, o NMPC em seu formato original (Caso 1) falha quando é utilizado para a estabilização do robô na origem, dadas as características do modelo cinemático utilizado. Um aumento do horizonte de predição poderia diminuir este efeito (Figura 33), mas isso implica no aumento do custo computacional, como observa-se na Tabela 2 abaixo.

Tabela 2: Custo computacional do NMPC - estabilização na origem - caso 1.

Horizonte	No. OPF por período de amostragem	Condição final do robô
5	640.970	$[0 \ 0,85 \ 0]^T$
10	11.399.000	$[0 \ 0,62 \ 0]^T$
12	24.589.000	$[0 \ 0,52 \ 0]^T$
15	62.619.000	$[0 \ 0,40 \ 0]^T$

Observa-se então que um horizonte de $N \geq 15$ já torna o NMPC não implementável para este caso, além de o erro em y ainda persistir. Ainda, nota-se uma incrível diferença no número de OPF entre o NMPC e as leis clássicas de controle (Tabela 1). A fim de resolver o problema do erro em regime que o NMPC apresenta, (ESSEN; NIJMEIJER, 2001) propõe a sua versão do NMPC (Caso 2), com uma função de custo quadrática e a inclusão de um custo terminal (forçando os estados no fim do horizonte a convergirem para a origem) e uma matriz de ponderação de estados que cresce exponencialmente ao longo do horizonte, $Q(j)$. Os resultados são mostrados na Tabela 3 abaixo.

Tabela 3: Custo computacional do NMPC - estabilização na origem - caso 2.

Horizonte	No. OPF por período de amostragem	Condição final do robô
5	1.401.900	$[0 \ 0,0018 \ 0]^T$
10	38.388.000	$[0 \ 0,0001 \ 0]^T$
12	92.569.000	$[0 \ 0 \ 0]^T$
15	607.710.000	$[0 \ 0 \ 0]^T$

Os autores destacam ainda que este método não aumenta o custo computacional do algoritmo. Mas não é isso que se observa nos dados da Tabela 3 acima. Apesar de o erro na origem ser eliminado para $N \geq 10$, o custo computacional é consideravelmente maior que no caso anterior, e para $N \geq 12$ o problema mostra-se não mais implementável para este caso. Além disso, o custo computacional parece crescer mais rapidamente à medida que se aumenta o horizonte.

Nota-se então que a modificação da função de custo aplicada por (ESSEN; NIJMEIJER, 2001) faz com que o custo computacional seja mais elevado. Além disso, ainda existe um acoplamento entre os estados x e y .

A seguir serão mostrados os resultados com respeito ao esforço computacional para o Caso 3: o NMPC com função de custo em coordenadas polares dos estados. Já foram estudados, na Seção 4.4, diversos exemplos de simulação que mostram a eficácia do método para o problema tratado aqui, com relação aos dois casos anteriores. Os resultados são então mostrados na Tabela 4 abaixo.

Tabela 4: Custo computacional do NMPC - estabilização na origem - caso 3.

Horizonte	No. OPF por período de amostragem	Condição final do robô
5	816.800	$[0 \ 0 \ 0]^T$
10	12.827.000	$[0 \ 0 \ 0]^T$
12	43.442.000	$[0 \ 0 \ 0]^T$
15	139.210.000	$[0 \ 0 \ 0]^T$

Comparando-se os número acima com os mostrados nos Casos 1 e 2 observa-se que, além de o NMPC com função de custo em coordenadas polares levar o robô exatamente para a origem para qualquer horizonte, o custo computacional é consideravelmente menor do que no Caso 2.

Ainda, este método mostrou-se bem satisfatório para qualquer valor do horizonte de predição. No Caso 1, por exemplo, observou-se que para $N = 50$ o erro em regime quase desaparece (Figura 33), mas da Tabela 2 nota-se que $N \geq 15$ já torna este NMPC não implementável. Assim sendo, é possível, no Caso 3, manter um valor baixo para o horizonte, mantendo-se assim também um bom compromisso entre o esforço computacional e o desempenho com relação à trajetória desempenhada pelo robô. Nas figuras 84 a 87 é mostrado o resultado do NMPC com função de custo em coordenadas polares do Caso 3, para dois valores do horizonte de predição, $N = 5$ e $N = 12$.

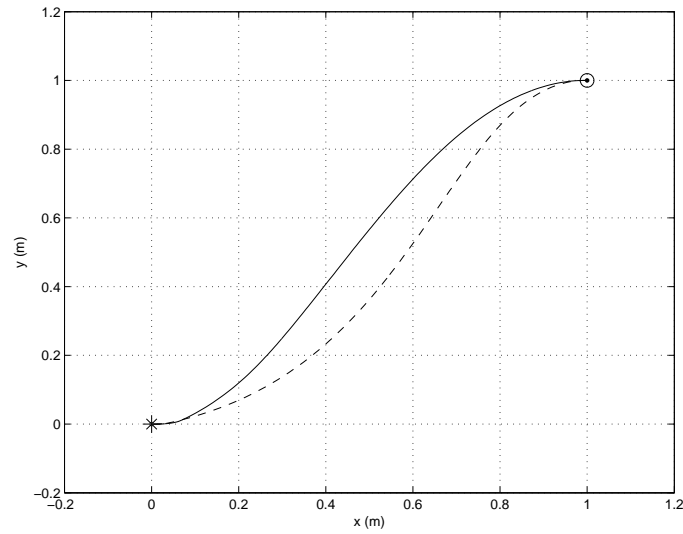


Figura 84: Trajetória no plano XY . NMPC com função de custo em coordenadas polares. Linha contínua: $N = 5$; linha tracejada: $N = 12$.

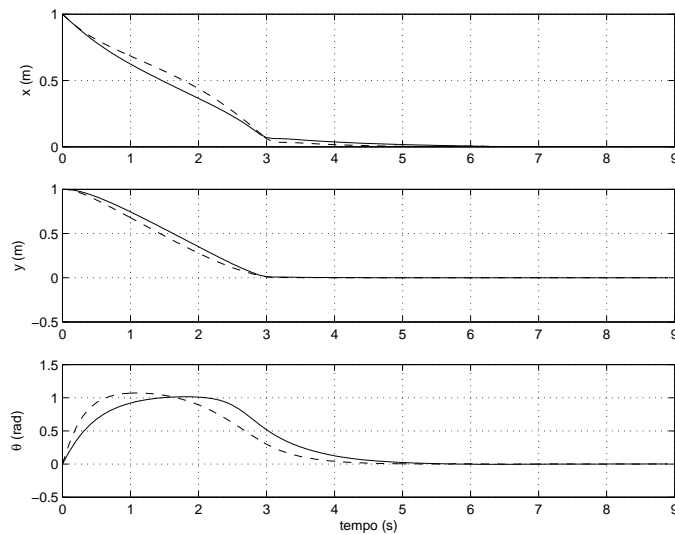


Figura 85: Estados x , y e θ . NMPC com função de custo em coordenadas polares. Linha contínua: $N = 5$; linha tracejada: $N = 12$.

Assim, observa-se nas figuras acima que o aumento do horizonte de predição, no caso apresentado, não é justificável, visto que não existe um significativo aumento de desempenho ao aumentar o horizonte de $N = 5$ (linha contínua) para $N = 12$ (linha tracejada).

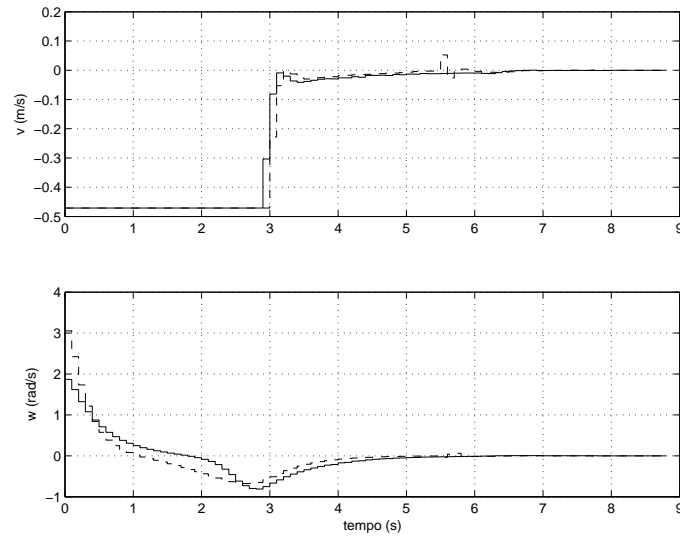


Figura 86: Entradas de controle v e w . NMPC com função de custo em coordenadas polares. Linha contínua: $N = 5$; linha tracejada: $N = 12$.

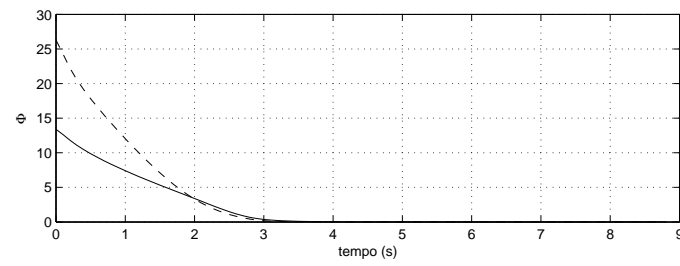


Figura 87: Função de custo Φ . NMPC com função de custo em coordenadas polares. Linha contínua: $N = 5$; linha tracejada: $N = 12$.

5 MPC DE ROBÔS MÓVEIS: RASTREAMENTO DE TRAJETÓRIA

5.1 Introdução

No Capítulo 2 o problema do controle de robôs móveis dotados de rodas foram brevemente expostos, e alguns exemplos foram mostrados. No Capítulo 4 o problema de estabilização em um ponto foi discutido e resolvido através de um algoritmo de NMPC, e diversas comparações com leis clássicas de controle de robôs móveis foram feitas, provando-se a eficácia e as vantagens do NMPC para este problema. Neste capítulo será estudado o problema de rastreamento de trajetória, onde uma trajetória de referência é determinada previamente e indica o *caminho* no qual o robô deve se movimentar. Tem-se então agora um robô *virtual* de referência que move-se ao longo do tempo.

O problema de rastreamento de trajetória já foi previamente abordado na literatura que trata de controle de robôs móveis (por exemplo, (MURRAY; SASTRY, 1990; KANAYAMA; MIYAZAKI; NOGUCHI, 1990; YANG et al., 1998; LEE; LEE; TENG, 1999; NORMEY-RICO; GÓMEZ-ORTEGA; CAMACHO, 1999; RAMÍREZ et al., 1999; DONG; XU, 2001)). Este método torna-se vantajoso quando o robô movimenta-se em um ambiente onde existem obstáculos conhecidos e uma trajetória de referência previamente calculada. Novamente, com exceção daqueles que utilizam MPC, em nenhum dos trabalhos existentes é possível considerar restrições nos estados ou entradas de controle de uma forma direta, como é feito com o MPC. Ainda, como destacado em (CAMACHO; BORDONS, 1999), o MPC é bastante vantajoso quando aplicado a processos onde as evoluções das referências são conhecidas *a priori*, como na robótica e na indústria de processamento em lote, pois assim o sistema pode reagir com antecedência às futuras mudanças das referências.

Na próxima seção é dada então a formulação do problema de rastreamento de trajetória tratado aqui, seguido do desenvolvimento de um algoritmo de MPC não linear aplicado a este problema. Após, um estudo relativo ao esforço computacional do NMPC é feito. Como dito anteriormente, o cálculo de uma lei de controle através do NMPC requer um alto custo computacional. Assim, a fim de minimizar este problema, na seção subsequente é mostrada uma abordagem onde, através de linearizações sucessivas do modelo cinemático do robô ao longo da trajetória de referência, é possível transformar o problema de otimização do MPC em um problema de programação quadrática, o qual é computacionalmente mais simples de se resolver. Por fim, considerações acerca do custo computacional relativo ao MPC linear são feitas.

5.2 Formulação do Problema

O problema aqui é bem parecido com o tratado no capítulo anterior, quando o objetivo era estabilizar o robô na origem. A diferença é que agora o objetivo é fazer com que o robô siga uma trajetória de referência pré determinada e variante no tempo, que pode ser formulado então como fazer com que

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{ref}(k) = 0, \quad \mathbf{x}_{ref}(k) = \begin{bmatrix} x_{ref}(k) \\ y_{ref}(k) \\ \theta_{ref}(k) \end{bmatrix} \quad (32)$$

onde $\mathbf{x}_{ref}(k)$ é a trajetória de referência.

Nota-se que a expressão (32) é bem semelhante à expressão (22), definida no Capítulo 4 para o problema de estabilização em um ponto. A diferença é que agora o ponto onde o robô deve convergir move-se ao longo do tempo. Assim, comumente associa-se à trajetória de referência um robô de referência *virtual*, que possui o mesmo modelo cinemático do robô a ser controlado:

$$\begin{cases} x_{ref}(k+1) = x_{ref}(k) + v_{ref}(k) \cos \theta_{ref}(k)T \\ y_{ref}(k+1) = y_{ref}(k) + v_{ref}(k) \sin \theta_{ref}(k)T \\ \theta_{ref}(k+1) = \theta_{ref}(k) + w_{ref}(k)T \end{cases},$$

ou, em uma forma mais compacta,

$$\mathbf{x}_{ref}(k+1) = f(\mathbf{x}_{ref}(k), \mathbf{u}_{ref}(k)),$$

onde $\mathbf{u}_{ref}(k) = [v_{ref}(k) \ w_{ref}(k)]^T$ são as entradas de controle de referência.

5.3 Rastreamento de Trajetória com um MPC Não Linear

Definindo

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k) &= \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{ref}(k) \\ \tilde{\mathbf{u}}(k) &= \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}_{ref}(k), \end{aligned}$$

e novamente assumindo que $N_1 = 1$, $N_2 = N$ e $N_u = N - 1$ na expressão (11), tem-se que $j \in [1, N]$ e a seguinte função de custo é utilizada:

$$\Phi(k) = \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{x}}^T(k+j|k) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}(k+j|k) + \tilde{\mathbf{u}}^T(k+j-1|k) \mathbf{R} \tilde{\mathbf{u}}(k+j-1|k) \quad (33)$$

e o NMPC em cada instante de amostragem k para o problema de seguimento de trajetória é resolvido de forma idêntica ao caso de estabilização na origem:

$$\mathbf{u}^*, \mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{u}, \mathbf{x}} \{\Phi(k)\}$$

sujeito às restrições da dinâmica do sistema (23) e da amplitude da entrada de controle:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+j|k) &= f(\mathbf{x}(k+j-1|k), \mathbf{u}(k+j-1|k)), & j \in [1, N] \\ \mathbf{D}\mathbf{u}(k+j|k) &\leq \mathbf{d}, & j \in [0, N-1] \end{aligned}$$

onde os valores utilizados na matriz \mathbf{D} no vetor \mathbf{d} são referentes aos limites do robô Twil, definidos no Apêndice A.

Considerando-se então os seguintes parâmetros:

$$N = 5, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

e os mesmos \mathbf{D} e \mathbf{d} definidos pela expressão (47) relativos aos limites do robô Twil, obtém-se os seguintes resultados, para uma condição inicial de $\mathbf{x}_0 = [-0,5 \ -2,5 \ 0]^T$ e uma trajetória de referência circular:

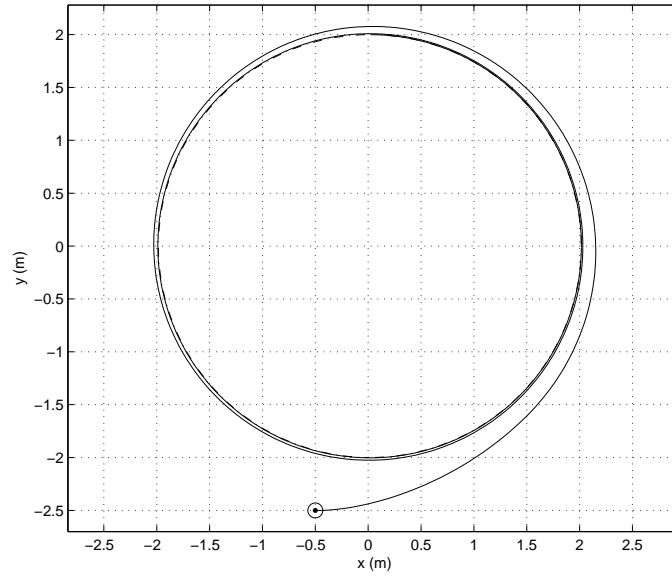


Figura 88: Trajetória do robô no plano XY para uma referência circular (linha traço-ponto). NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.

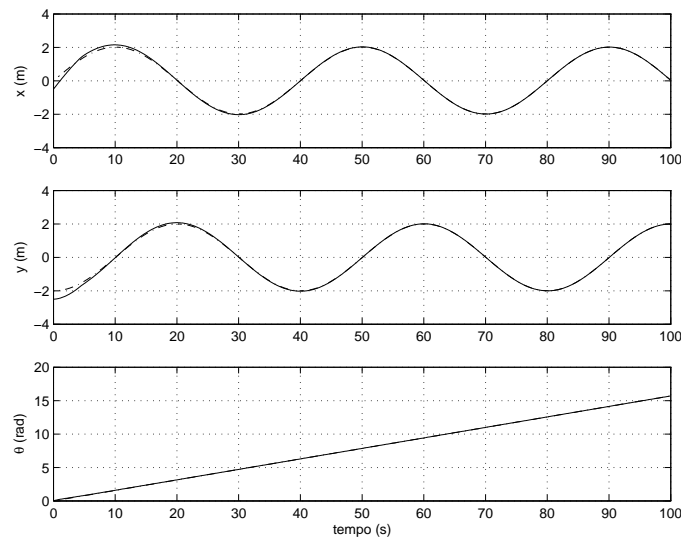


Figura 89: Estados x , y e θ . NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas. A linha traço-ponto representa o estado de referência.

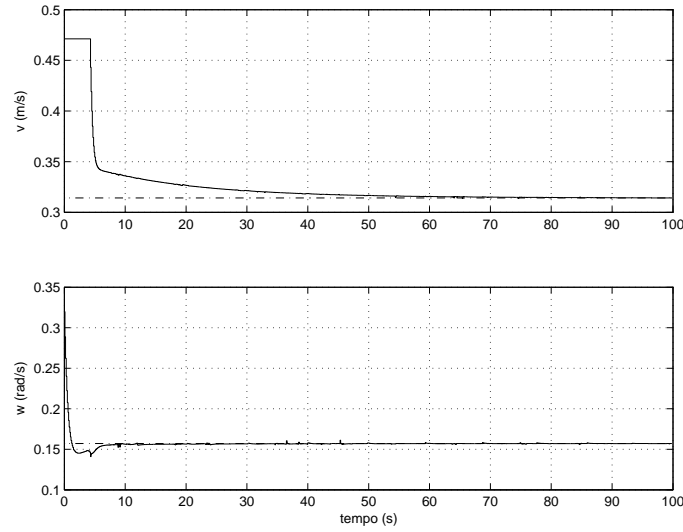


Figura 90: Entradas de controle v e w . NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas. A linha traço-ponto representa a entrada de referência.

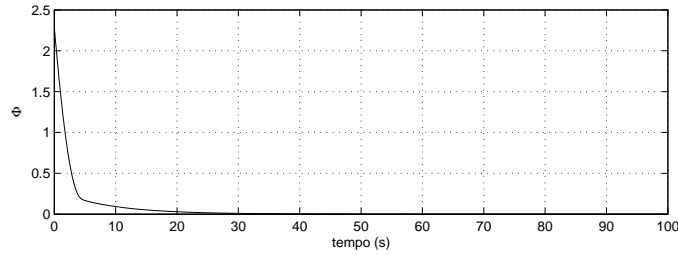


Figura 91: Função de custo Φ . NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.

A referência utilizada aqui é uma trajetória circular, com um raio de dois metros e centrada na origem. O tempo para percorrer uma volta da trajetória é de 40 segundos, fazendo com que a velocidade linear de referência seja igual a $0,3142 \text{ m/s}$ e a velocidade angular de referência seja de $0,1571 \text{ rad/s}$.

Nota-se então nas figuras 88 a 91 acima que o robô segue a referência, mas com uma baixa taxa de convergência, levando cerca de 40 segundos, ou uma volta, para convergir para a trajetória.

No capítulo anterior, quando o problema da estabilização em um ponto foi tratado, existia um grande erro em regime. Entretanto, este problema agora desaparece, aparentemente pelo fato de agora existir uma referência que se move ao longo do tempo. Assim, o algoritmo de MPC consegue minimizar tanto o erro em x quanto o erro em y , mesmo estes dois estados sendo dependentes da mesma entrada de controle. Observa-se também que a restrição na amplitude das entradas de controles é perfeitamente respeitada (Figura 90).

Os resultados são novamente mostrados abaixo, agora para uma trajetória de referência em forma de U e com os mesmos dados do NMPC utilizados anteriormente. A condição inicial do robô é $\mathbf{x}_0 = [-1 \ -1 \ 0]^T$.

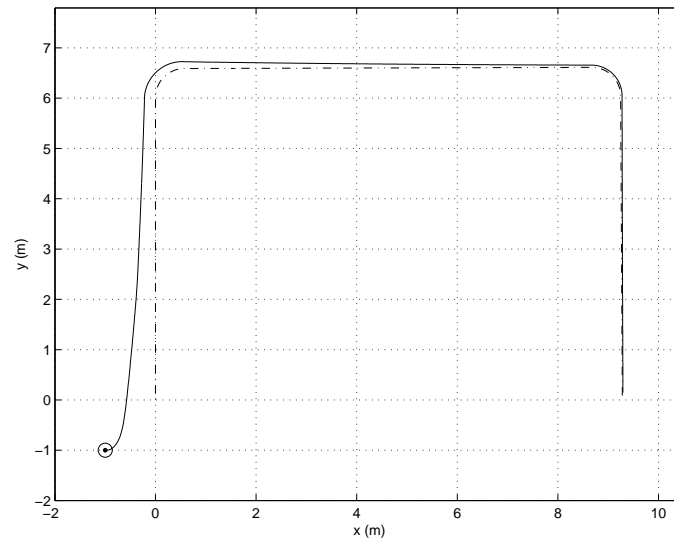


Figura 92: Trajetória do robô no plano XY para uma referência em U (linha traço-ponto). NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.

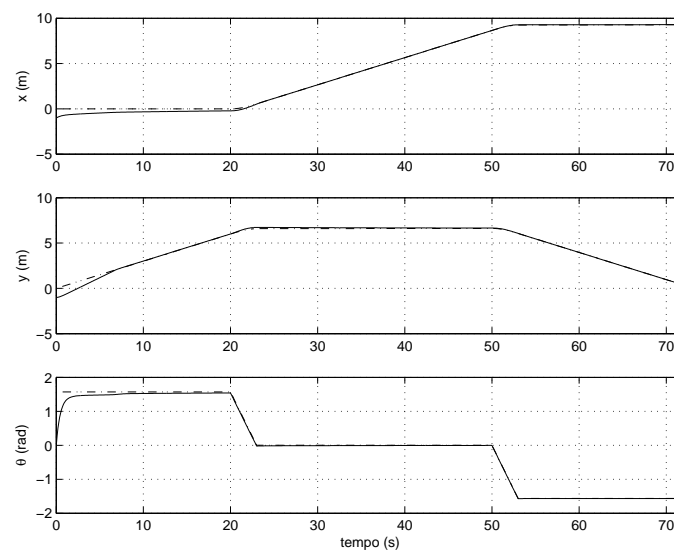


Figura 93: Estados x , y e θ . NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas. A linha traço-ponto representa o estado de referência.

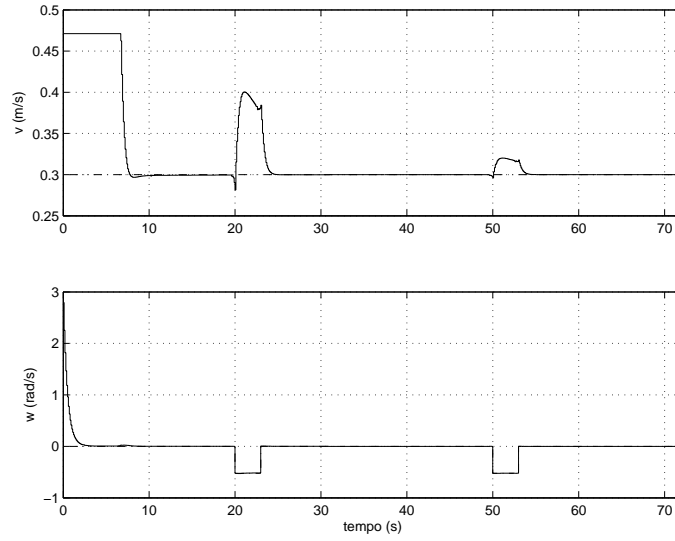


Figura 94: Entradas de controle v e w . NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas. A linha traço-ponto representa a entrada de referência.

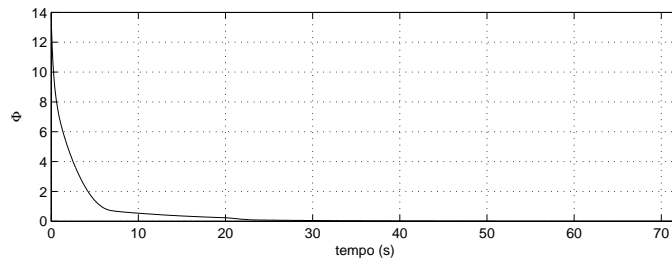


Figura 95: Função de custo Φ . NMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.

Novamente para este caso observa-se uma baixa taxa de convergência, de forma que o robô converge para a referência apenas no fim da trajetória, como observa-se na Figura 92.

No Capítulo anterior mostrou-se que, através da inclusão de um custo terminal e de um peso de estados exponencialmente crescente na função de custo (ESSEN; NIJMEIJER, 2001), a taxa de convergência pode ser drasticamente aumentada sem a necessidade de se aumentar o horizonte de predição. Assim, a fim de, ao mesmo tempo, manter um baixo custo computacional com um bom desempenho de controle, a seguinte função de custo é utilizada:

$$\Phi(k) = \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{\mathbf{x}}^T(k+j|k) \mathbf{Q}(j) \tilde{\mathbf{x}}(k+j|k) + \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\mathbf{u}}^T(k+j|k) \mathbf{R} \tilde{\mathbf{u}}(k+j|k) + \Omega(\tilde{\mathbf{x}}(k+N|k)),$$

onde

$$\Omega(\tilde{\mathbf{x}}(k+N|k)) = \tilde{\mathbf{x}}^T(k+N|k) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}(k+N|k)$$

e \mathbf{P} é uma matriz tal que aumenta o peso dos estados no final do horizonte, fazendo com que $\mathbf{x}(k+N|k)$ se aproxime mais da origem. Aqui, escolhe-se

$$\mathbf{Q}(j) = 2^{j-1} \mathbf{Q}, \quad \mathbf{P} = 30 \mathbf{Q}(N)$$

Mantendo-se um horizonte de $N = 5$ e as mesmas matrizes de ponderação utilizadas anteriormente, obtém-se os seguintes resultados, para uma condição inicial de $\mathbf{x}_0 = [-0,5 \quad -2,5 \quad 0]^T$ na trajetória de referência circular:

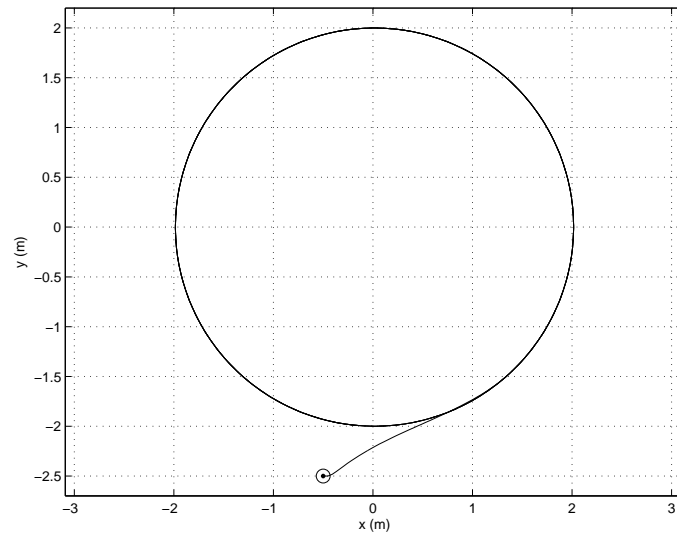


Figura 96: Trajetória do robô no plano XY para uma referência circular (linha traço-ponto). NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).

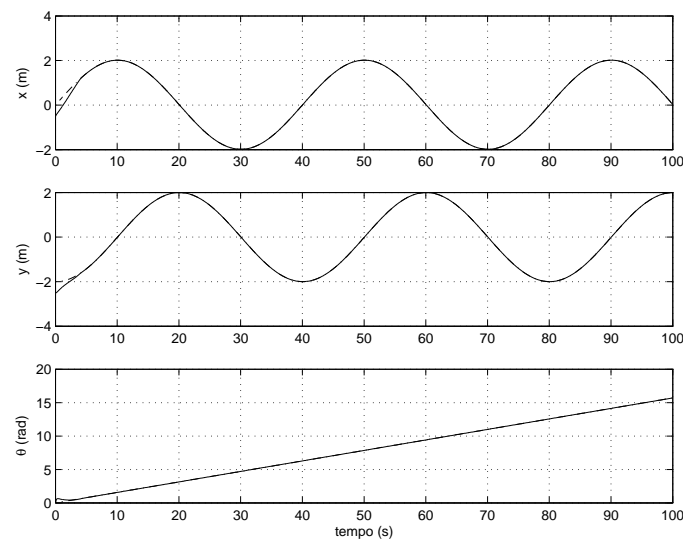


Figura 97: Estados x , y e θ . NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001). A linha traço-ponto representa o estado de referência.

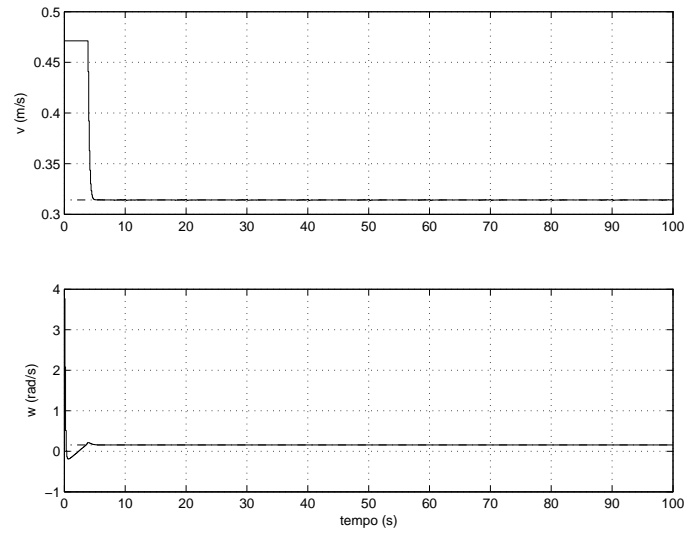


Figura 98: Entradas de controle v e w . NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001). A linha traço-ponto representa a entrada de referência.

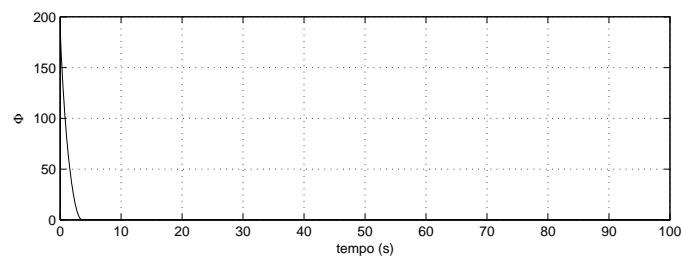


Figura 99: Função de custo Φ . NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).

Agora, repetindo-se o mesmo problema para a trajetória de referência em forma de U e com uma condição inicial de $\mathbf{x}_0 = [-1 \quad -1 \quad \pi/2]^T$, obtém-se os seguintes resultados:

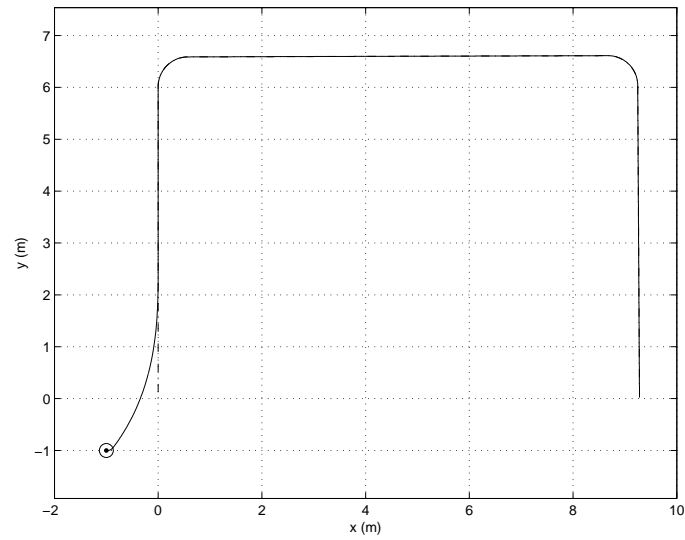


Figura 100: Trajetória do robô no plano XY para uma referência em U (linha traço-ponto).

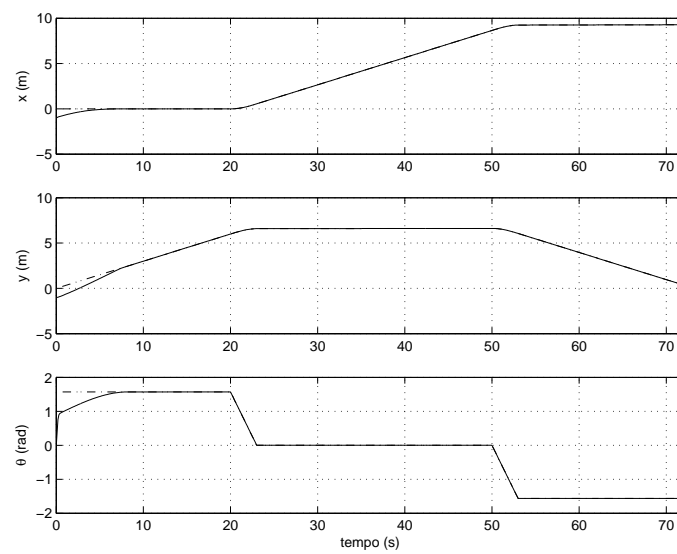


Figura 101: Estados x , y e θ . NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001). A linha traço-ponto representa o estado de referência.

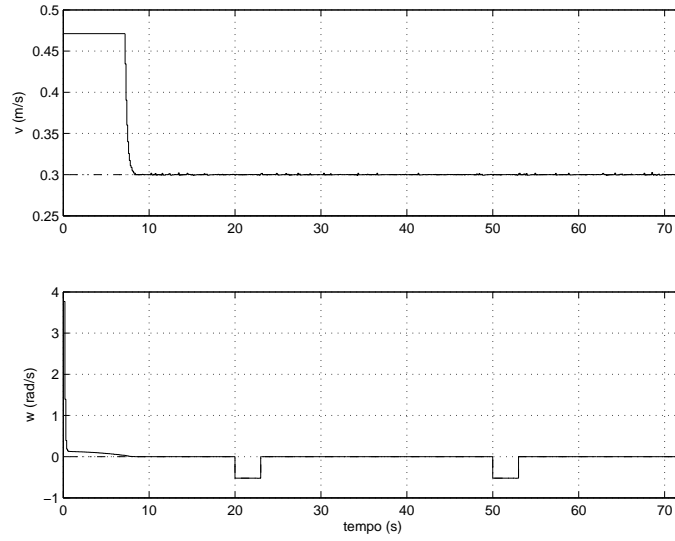


Figura 102: Entradas de controle v e w . NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001). A linha traço-ponto representa a entrada de referência.

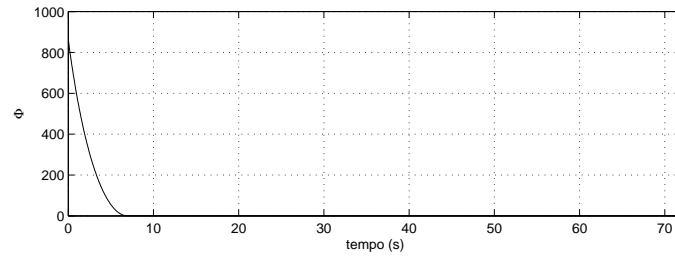


Figura 103: Função de custo Φ . NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).

Observa-se assim, pelas figuras 96 a 103, que a trajetória do robô alcança a trajetória de referência mais rapidamente, com uma aproximação bastante suave. Nota-se também que as amplitudes das entradas de controle respeitam perfeitamente as restrições impostas para o robô Twil.

Nas figuras a seguir é feita uma comparação entre o NMPC com função de custo original e o NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001). A trajetória de referência é formada por três segmentos de retas, estes ligados por duas curvas. A condição inicial do robô é $\mathbf{x}_0 = [0 \ 2 \ -\pi/2]^T$.

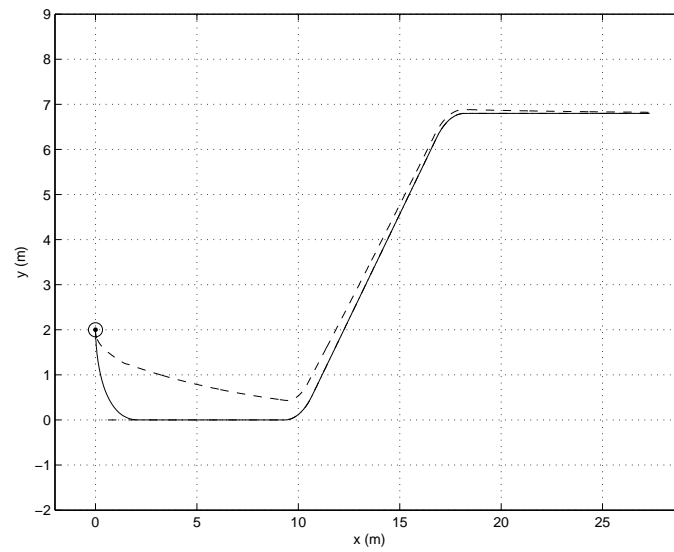


Figura 104: Trajetória do robô no plano XY . Linha contínua: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha tracejada: NMPC com função de custo original; linha traço-ponto: trajetória de referência.

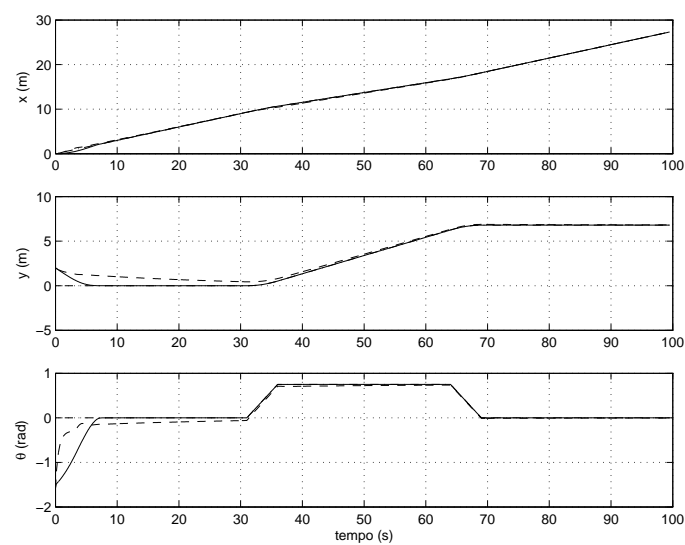


Figura 105: Estados x , y e θ . Linha contínua: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha tracejada: NMPC com função de custo original; linha traço-ponto: trajetória de referência.

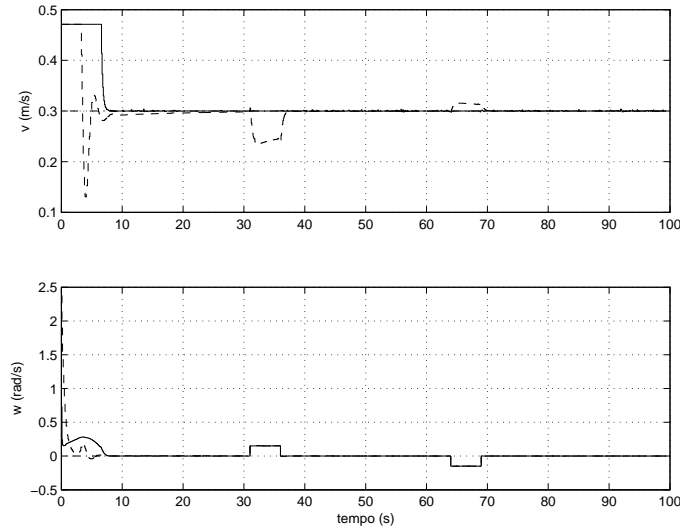


Figura 106: Entradas de controle v e w . Linha contínua: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha tracejada: NMPC com função de custo original; linha traço-ponto: trajetória de referência.

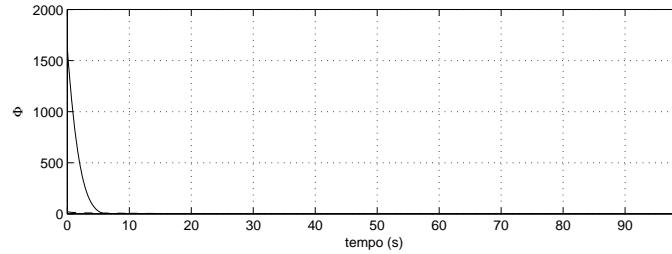


Figura 107: Função de custo Φ . Linha contínua: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha tracejada: NMPC com função de custo original.

Assim, observa-se claramente que o robô Twil cumpre com resultados bem satisfatórios a tarefa de rastreamento de trajetória para qualquer tipo de trajetória de referência, respeitando os limites de amplitude impostos nas entradas de controle.

Como dito anteriormente, a modificação da função de custo proposta por (ESSEN; NIJMEIJER, 2001) faz com que o aumento no horizonte de predição não seja necessário para se aumentar a performance, quando comparado com o NMPC com a função de custo em seu formato original (expressão (33)). Nota-se, na Figura 108, o desempenho do robô no plano XY com $N = 20$ para o NMPC original e $N = 5$ para o NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001), para uma referência circular e uma condição inicial de $\mathbf{x}_0 = [0 \quad -1 \quad 0]^T$.

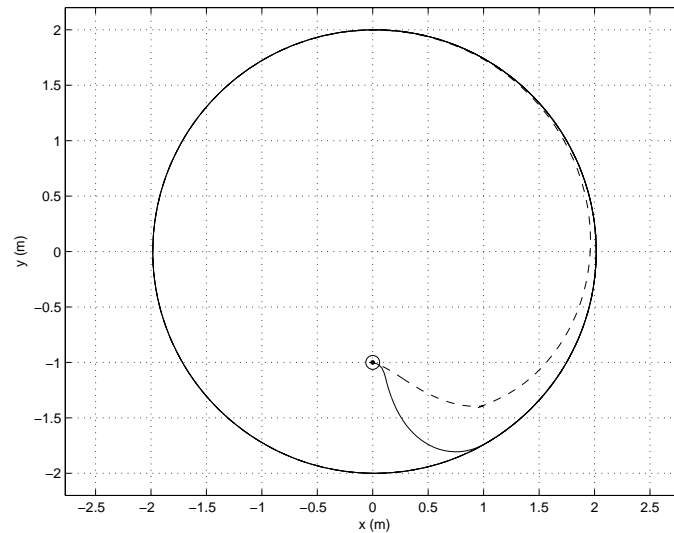


Figura 108: Função de custo Φ . Linha contínua: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001) com $N = 5$; linha tracejada: NMPC com função de custo original e $N = 20$.

Na próxima seção um estudo do custo computacional para este problema é desenvolvido.

5.4 O Custo Computacional do NMPC

A exemplo do capítulo anterior, nesta seção será feita uma análise quanto ao esforço computacional necessário para a resolução dos algoritmos de NMPC para o problema de rastreamento de trajetória, a fim de ser verificada a viabilidade destes algoritmos em uma aplicação em tempo-real.

Assim, utilizando-se do mesmo critério (o número de operações em ponto flutuante, OPF, realizadas por período de amostragem) e tomando por base o valor estimado por (ABURTO, 1992) para um computador com processador Athlon XP 2600+, tem-se que o número de flops executados é de 576.000.000. Assim, como o período de amostragem é de $T = 0,1$ segundo, tem-se que o máximo custo computacional permitido é de 57.600.000 de operações em ponto flutuante por período de amostragem.

Dois casos de NMPC são então estudados:

- *Caso 1.* O NMPC com função de custo original (Expressão (33));
- *Caso 2.* O NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001), com função de custo com custo terminal e matriz \mathbf{Q} crescente exponencialmente ao longo do horizonte.

Nos dois casos acima a restrição de amplitude das entradas de controle, $\mathbf{D}\mathbf{u} \leq \mathbf{d}$, é considerada e a condição inicial do robô é $\mathbf{x}_0 = [-0,5 \quad -2,5 \quad 0]^T$. Como referência, é utilizada a trajetória circular apresentada anteriormente. O número de OPF por período de amostragem foi medido através da função `flops` do Matlab. Os resultados são mostrados na Tabela 5.

Tabela 5: Custo computacional do NMPC - rastreamento de trajetória.

Horizonte	No. OPF por período de amostragem	
	Caso 1	Caso 2
5	624.000	1.109.800
10	5.178.300	50.156.000
15	12.371.000	536.410.000
20	28.265.000	—

Novamente, a inclusão de um custo terminal e de uma matriz de ponderação de estados crescente exponencialmente como desenvolvido por (ESSEN; NIJMEIJER, 2001) faz com que o custo computacional aumente consideravelmente com o aumento do horizonte de predição. Entretanto, o aumento do horizonte é não justificável quando se analisa o desempenho desenvolvido pelo robô quando se aplica a função de custo de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001), conforme pode-se observar pelo gráfico da Figura 109. Assim, com um horizonte igual a 5 é possível manter um bom compromisso entre desempenho e custo computacional.

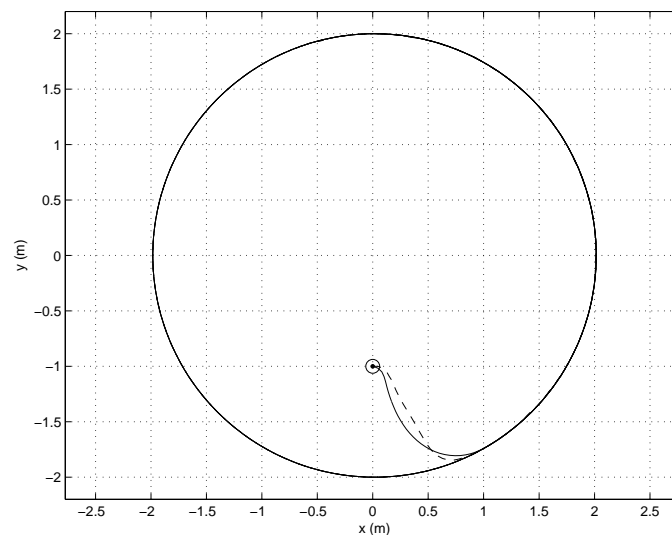


Figura 109: Trajetória do robô no plano XY . Linha contínua: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001) com $N = 5$; linha tracejada: NMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001) com $N = 15$; linha traço-ponto: trajetória de referência.

Entretanto, dependendo do computador utilizado, este NMPC pode não ser implementável em tempo real até mesmo para horizontes menores que 5. Então, uma outra abordagem que não a utilização de um MPC não linear é desejável. Assim, na próxima seção deste capítulo será visto que, ao contrário do problema de estabilização na origem, para o problema de rastreamento de trajetória é possível utilizar um MPC linear através da linearização sucessiva do modelo cinemático do robô ao longo da trajetória de referência. Como se sabe, um MPC linear possui a vantagem de considerar um problema convexo de otimização e de ter um menor número de variáveis de decisão, diminuindo assim o esforço computacional necessário.

5.5 Rastreamento de Trajetória com um MPC Linear

Se o sistema é linear, as restrições são lineares e a função de custo é quadrática, o problema de otimização de um MPC pode ser transformado em um problema de programação quadrática¹, e para isso algoritmos de solução numérica robustos existem. Como o problema é convexo, é possível o cálculo do mínimo global (MORARI; LEE, 1997). Agora, se o sistema é não linear ou existem restrições não lineares, o problema de otimização torna-se significativamente mais custoso computacionalmente e mais difícil de se resolver, pois agora tem-se um maior número de variáveis de decisão e o problema é não convexo, o que geralmente leva a soluções sub-ótimas (HENSON, 1998).

Assim, desenvolve-se nesta seção um algoritmo de MPC linear, ou LMPC (*Linear Model-based Predictive Control*) para a solução do problema de rastreamento de trajetória. Como a referência é conhecida para qualquer instante de amostragem futuro, é possível, através de linearizações sucessivas ao longo da trajetória de referência, obter-se uma descrição linear e variante no tempo do modelo do sistema (HENSON, 1998; TRIERWEILER; SECCHI, 2000; DURAIKI; TRIERWEILER, 2001). Então, considerando as entradas de controle como sendo as variáveis de decisão, pode-se transformar o problema de minimização da função de custo em um problema de QP.

Tem-se novamente o seguinte modelo cinemático do robô:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = w \end{cases}$$

que é escrito na forma compacta

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (34)$$

Um modelo linearizado pode ser obtido considerando-se um modelo de erro entre o robô e o robô de referência virtual (KÜHNE; LAGES; GOMES DA SILVA JR., 2004). Este é descrito pelo mesmo modelo cinemático descrito acima. Então,

$$\dot{\mathbf{x}}_{ref} = f(\mathbf{x}_{ref}, \mathbf{u}_{ref}) \quad (35)$$

Expandindo o lado direito da expressão (34) em séries de Taylor em torno do ponto $(\mathbf{x}_{ref}, \mathbf{u}_{ref})$ e desconsiderando termos de ordem superior, segue-se que:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}_{ref}, \mathbf{u}_{ref}) + f_{\mathbf{x},ref}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ref}) + f_{\mathbf{u},ref}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{ref}), \quad (36)$$

onde $f_{\mathbf{x},ref}$ e $f_{\mathbf{u},ref}$ representam os jacobianos de $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ com relação a \mathbf{x} e \mathbf{u} , respectivamente, em torno da referência:

$$f_{\mathbf{x},ref} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{ref} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_{ref}}}, \quad f_{\mathbf{u},ref} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{ref} \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_{ref}}}$$

Assim, substituindo a expressão (35) em (36), e fazendo $\mathbf{A} = f_{\mathbf{x},ref}$ e $\mathbf{B} = f_{\mathbf{u},ref}$, tem-se que:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}} \quad (37)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{ref}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{ref}$$

¹Abordado com detalhes na Seção 5.5.1.

e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v_{ref} \sin \theta_{ref} \\ 0 & 0 & v_{ref} \cos \theta_{ref} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{ref} & 0 \\ \sin \theta_{ref} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Do Teorema 1, foi visto que o modelo cinemático não linear do robô móvel, sistema (2), é controlável, ou seja, pode ser levado de uma configuração inicial a uma configuração final em um intervalo de tempo finito e com entradas de controle finitas. Entretanto, é fácil de notar que, quando o robô não está se movendo (ou seja, as entradas de controle são nulas), a linearização em torno de um ponto estacionário torna o sistema não controlável. Contudo, esta linearização torna-se controlável à medida que o robô permanece em movimento. A matriz de controlabilidade para o sistema linear sobre cada ponto da trajetória de referência é dada por:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{ref} & 0 & 0 & -v_{ref} \sin \theta_{ref} & 0 & 0 \\ \sin \theta_{ref} & 0 & 0 & v_{ref} \cos \theta_{ref} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e claramente observa-se que para o sistema ser controlável a velocidade linear de referência v_{ref} precisa ser não nula, caso contrário o posto de \mathcal{C} não seria completo. Ainda, a velocidade angular de referência w_{ref} não precisa ser diferente de zero, permitindo assim ao robô seguir trajetórias retas.

Então, pode-se dizer que o modelo linearizado deduzido acima pode ser utilizado para o problema de rastreamento de trajetória de um robô móvel não holonômico.

Discretizando a expressão (37) pelo método de Euler, tem-se o seguinte modelo linear variante no tempo em tempo discreto, que será utilizado no LMPC:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}(k)\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}(k)\tilde{\mathbf{u}}(k), \quad (38)$$

com $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{ref}(k)$, $\tilde{\mathbf{u}}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}_{ref}(k)$ e

$$\mathbf{A}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -v_{ref}(k) \sin \theta_{ref}(k)T \\ 0 & 1 & v_{ref}(k) \cos \theta_{ref}(k)T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(k) = \begin{bmatrix} \cos \theta_{ref}(k)T & 0 \\ \sin \theta_{ref}(k)T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix},$$

onde T é o período de amostragem.

5.5.1 O Algoritmo de Programação Quadrática

Aqui, a mesma função de custo dos casos anteriores para o problema de rastreamento de trajetória será utilizada:

$$\Phi(k) = \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{x}}^T(k+j|k) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}(k+j|k) + \tilde{\mathbf{u}}^T(k+j-1|k) \mathbf{R} \tilde{\mathbf{u}}(k+j-1|k) \quad (39)$$

Assim, definindo:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k+1|k) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+2|k) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+N-1|k) \\ \tilde{\mathbf{x}}(k+N|k) \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{u}}(k) &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}(k|k) \\ \tilde{\mathbf{u}}(k+1|k) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{u}}(k+N-2|k) \\ \tilde{\mathbf{u}}(k+N-1|k) \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (40)$$

a função de custo pode ser reescrita como

$$\bar{\Phi}(k) = \bar{\mathbf{x}}^T(k+1)\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{x}}(k+1) + \bar{\mathbf{u}}^T(k)\bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{u}}(k), \quad (41)$$

onde

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{R} \end{bmatrix}$$

Ainda, com o modelo linear variante no tempo da expressão (38), pode-se escrever:

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}(k)\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{B}}(k)\bar{\mathbf{u}}(k), \quad (42)$$

com

$$\bar{\mathbf{A}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(k) \\ \mathbf{A}(k)\mathbf{A}(k+1) \\ \vdots \\ \alpha(k, 0, 2) \\ \alpha(k, 0, 1) \end{bmatrix}$$

e

$$\bar{\mathbf{B}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(k) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}(k+1)\mathbf{B}(k) & \mathbf{B}(k+1) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha(k, 1, 2)\mathbf{B}(k) & \alpha(k, 2, 2)\mathbf{B}(k+1) & \cdots & \mathbf{0} \\ \alpha(k, 1, 1)\mathbf{B}(k) & \alpha(k, 2, 1)\mathbf{B}(k+1) & \cdots & \mathbf{B}(k+N-1) \end{bmatrix}$$

onde $\alpha(k, j, l)$ é definido como:

$$\alpha(k, j, l) = \prod_{i=j}^{N-l} \mathbf{A}(k+i)$$

Então, pela dedução feita na Seção 3.5 e substituindo (42) em (41), tem-se que a função de custo pode ser escrita na forma quadrática padrão:

$$\bar{\Phi}(k) = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{u}}^T(k)\mathbf{H}(k)\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{f}^T(k)\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{g}(k), \quad (43)$$

com

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(k) &= 2 \left(\bar{\mathbf{B}}(k)^T \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{B}}(k) + \bar{\mathbf{R}} \right) \\ \mathbf{f}(k) &= 2 \bar{\mathbf{B}}^T(k) \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{A}}(k) \tilde{\mathbf{x}}(k|k) \\ \mathbf{g}(k) &= \tilde{\mathbf{x}}^T(k|k) \bar{\mathbf{A}}^T(k) \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{A}}(k) \tilde{\mathbf{x}}(k|k)\end{aligned}$$

Ainda, como $\mathbf{g}(k)$ é independente da variável de decisão $\tilde{\mathbf{u}}$, define-se

$$\bar{\Phi}'(k) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}^T(k) \mathbf{H}(k) \bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{f}^T(k) \bar{\mathbf{u}}(k)$$

e o seguinte LMPC é resolvido, em cada instante de amostragem k , para o problema de seguimento de trajetória do robô:

$$\tilde{\mathbf{u}}^* = \arg \min_{\tilde{\mathbf{u}}} \{ \bar{\Phi}'(k) \}$$

sujeito à restrição de amplitude com relação a $\tilde{\mathbf{u}}$:

$$\mathbf{D} \tilde{\mathbf{u}}(k+j|k) \leq \mathbf{d}, \quad j \in [0, N-1], \quad (44)$$

resultando assim em uma seqüência ótima de controle:

$$\tilde{\mathbf{u}}^* = \{ \tilde{\mathbf{u}}^*(k|k), \tilde{\mathbf{u}}^*(k+1|k), \tilde{\mathbf{u}}^*(k+2|k), \dots, \tilde{\mathbf{u}}^*(k+N-1|k) \}$$

Observa-se então que agora não é mais necessário uma restrição da dinâmica do sistema, como é feito no caso não linear do MPC. Agora, o comportamento dinâmico do sistema está inserido no problema de minimização, já que a função de custo da expressão (43) é obtida substituindo-se o modelo (42) em (41).

É importante observar também que a variável de decisão, utilizada para minimizar a função de custo, é o vetor $\bar{\mathbf{u}}(k)$ (expressão (40)). Assim, as restrições devem ser escritas com relação a esta variável. Neste caso, serão consideradas apenas restrições na amplitude da entrada de controle \mathbf{u} . Assim, como $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{ref}$, tem-se que:

$$-\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_{ref}(k+j) \leq \tilde{\mathbf{u}}(k+j|k) \leq \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_{ref}(k+j), \quad j \in [0, N-1]$$

Logo, a desigualdade (44) é escrita, para este problema de minimização, como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}(k|k) \\ \tilde{\mathbf{u}}(k+1|k) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{u}}(k+N-1|k) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_{ref}(k) \\ \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_{ref}(k) \\ \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_{ref}(k+1) \\ \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_{ref}(k+1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_{ref}(k+N-1) \\ \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_{ref}(k+N-1) \end{bmatrix}, \quad (45)$$

Assim, através da função `quadprog` do Matlab, agora aplica-se o algoritmo de QP desenvolvido acima para a solução do problema de rastreamento de trajetória de um robô móvel. A restrição na amplitude das entradas de controle da forma da expressão (45) é imposta, considerando-se os limites definidos no Apêndice A para o robô Twil. Os seguintes parâmetros são utilizados:

$$N = 5, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

e os seguintes resultados são obtidos, para uma trajetória de referência circular e uma condição inicial do robô de $\mathbf{x}_0 = [-0,5 \ -2,5 \ 0]^T$:

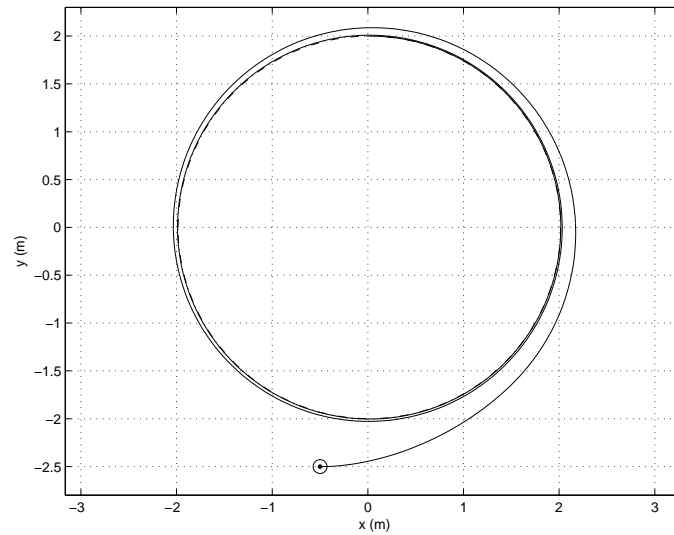


Figura 110: Trajetória do robô no plano XY para uma referência circular (linha traço-ponto). LMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.

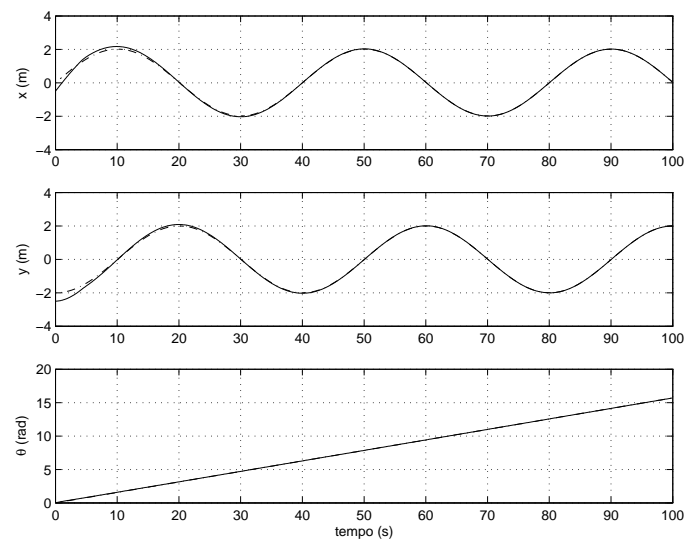


Figura 111: Estados x , y e θ . LMPC com função de custo em coordenadas cartesianas. A linha traço-ponto representa o estado de referência.

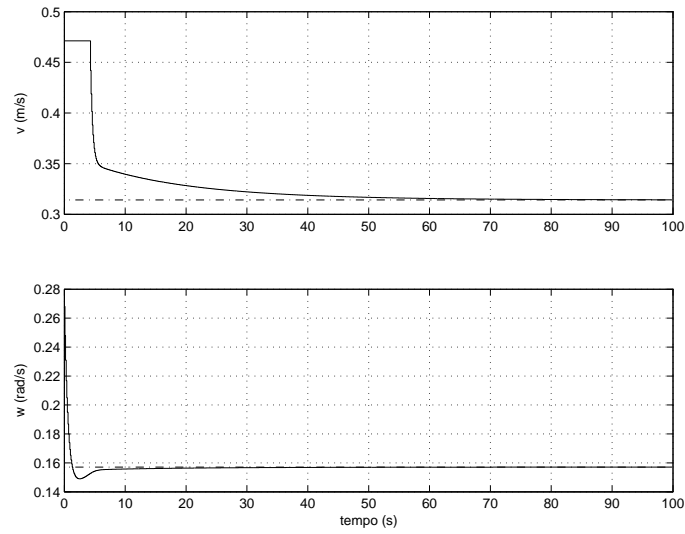


Figura 112: Entradas de controle v e w . LMPC com função de custo em coordenadas cartesianas. A linha traço-ponto representa a entrada de referência.

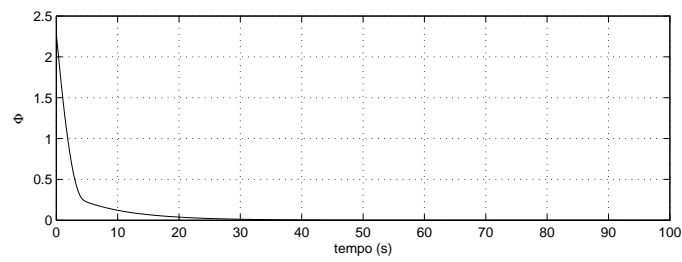


Figura 113: Função de custo Φ . LMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.

Agora, para uma referência em forma de U e utilizando-se os mesmos parâmetros e um condição inicial de $\mathbf{x}_0 = [-1 \quad -1 \quad \pi/2]^T$, os resultados são vistos abaixo.

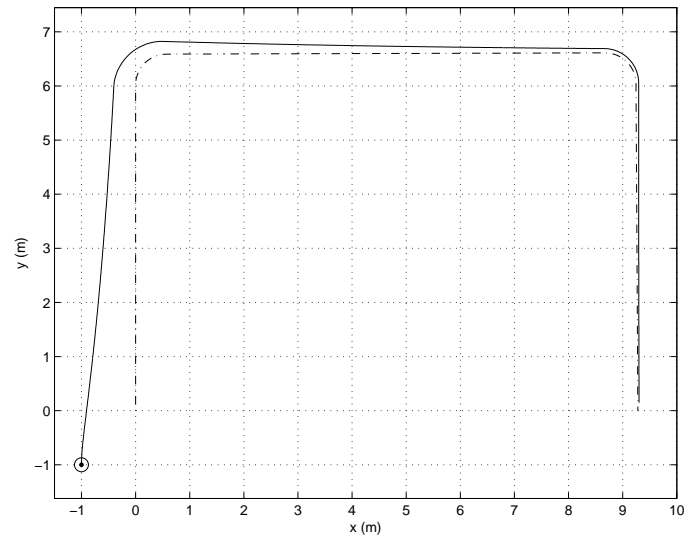


Figura 114: Trajetória do robô no plano XY para uma referência em forma de U (linha traço-ponto). LMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.

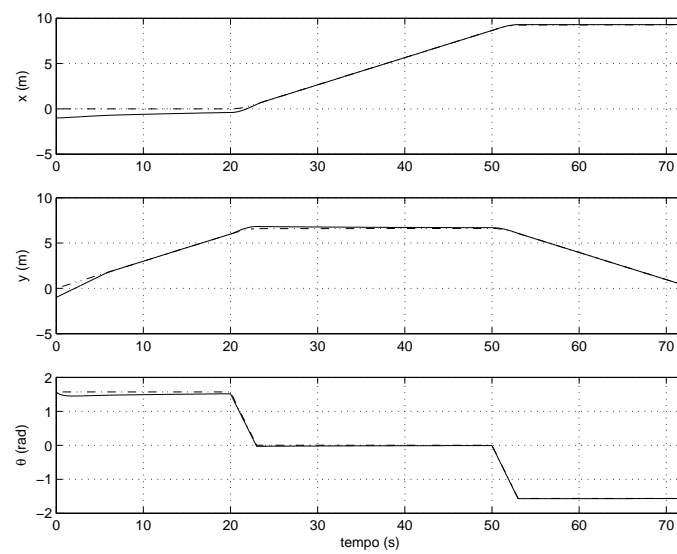


Figura 115: Estados x , y e θ . LMPC com função de custo em coordenadas cartesianas. A linha traço-ponto representa o estado de referência.

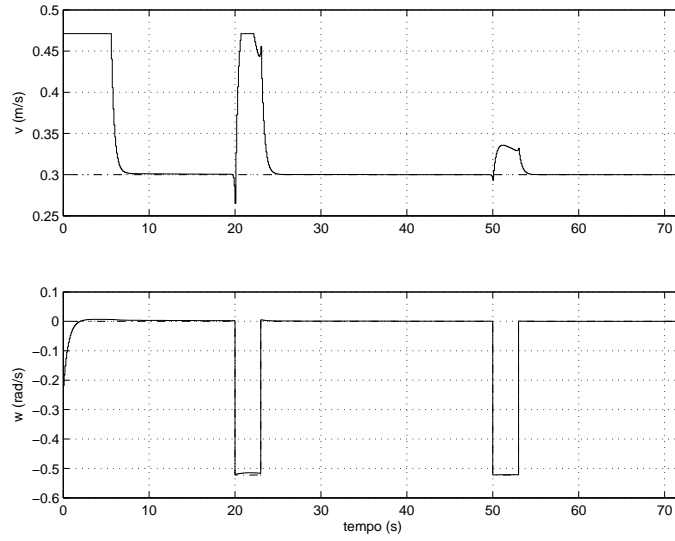


Figura 116: Entradas de controle v e w . LMPC com função de custo em coordenadas cartesianas. A linha traço-ponto representa a entrada de referência.

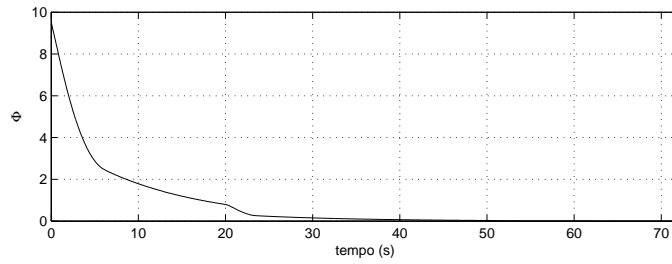


Figura 117: Função de custo Φ . LMPC com função de custo em coordenadas cartesianas.

Então, pelas figuras acima, nota-se que o desempenho do LMPC para o seguimento de trajetória é satisfatória. Entretanto, como visto também anteriormente, existe uma taxa de convergência bastante baixa, e para a trajetória em U o robô encontra a referência apenas no fim da mesma.

Assim, para aumentar a taxa de convergência, pode-se novamente aplicar a idéia desenvolvida em (ESSEN; NIJMEIJER, 2001), onde um custo terminal e uma matriz de ponderação de estado crescente exponencialmente ao longo do horizonte são utilizados. Tem-se então a seguinte função de custo:

$$\Phi(k) = \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{\mathbf{x}}^T(k+j|k) \mathbf{Q}(j) \tilde{\mathbf{x}}(k+j|k) + \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\mathbf{u}}^T(k+j|k) \mathbf{R} \tilde{\mathbf{u}}(k+j|k) + \Omega(\tilde{\mathbf{x}}(k+N|k)), \quad (46)$$

onde $\Omega(\tilde{\mathbf{x}}(k+N|k)) = \tilde{\mathbf{x}}^T(k+N|k) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}(k+N|k)$. Esta função de custo pode ser igualmente transformada na forma da expressão (43), com a qual o problema de LMPC pode ser transformado para um problema de QP. Assim, utilizando na função de custo (46) os seguintes parâmetros:

$$N = 5, \quad \mathbf{Q}(j) = 2^{j-1} \mathbf{Q}, \quad \mathbf{P} = 30 \mathbf{Q}(N), \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

tem-se que $\bar{\mathbf{Q}}$ é escrita como:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 2^0 \mathbf{Q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2^1 \mathbf{Q} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2^2 \mathbf{Q} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & 2^{N-2} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & 30 \times 2^{N-1} \mathbf{Q} \end{bmatrix}$$

e considerando uma restrição na amplitude das entradas de controle da forma da expressão (45), os seguintes resultados são obtidos, para uma trajetória de referência circular e condição inicial do robô de $\mathbf{x}_0 = [-0,5 \ -2,5 \ 0]^T$:

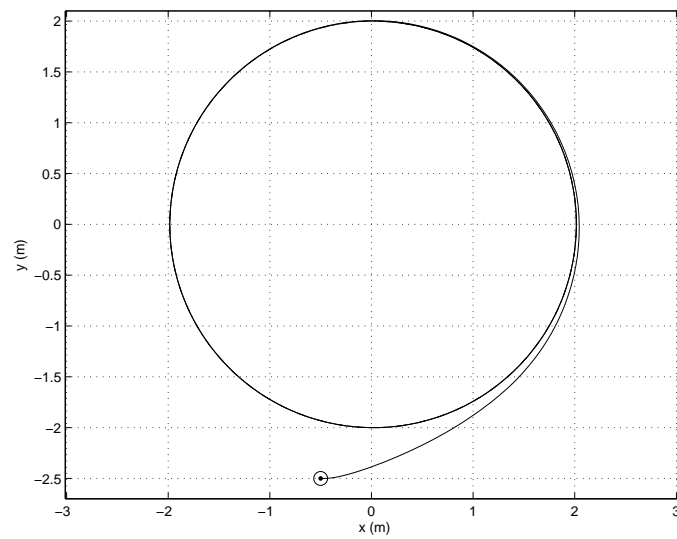


Figura 118: Trajetória do robô no plano XY para uma referência circular (linha traço-ponto). LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).

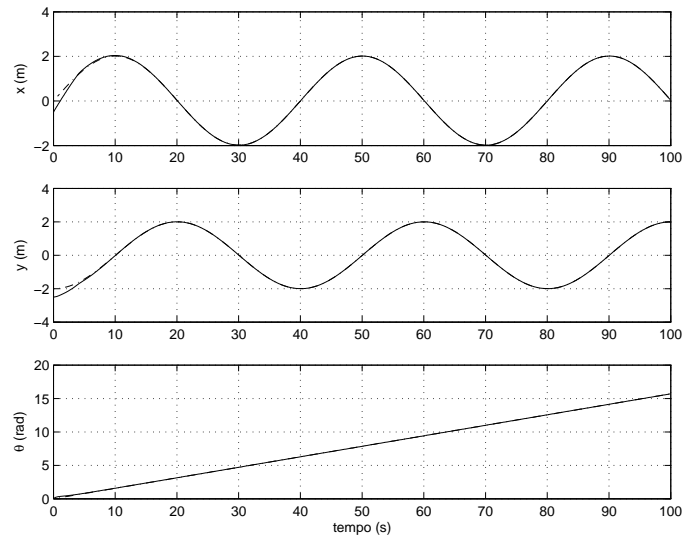


Figura 119: Estados x , y e θ . LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001). A linha traço-ponto representa o estado de referência.

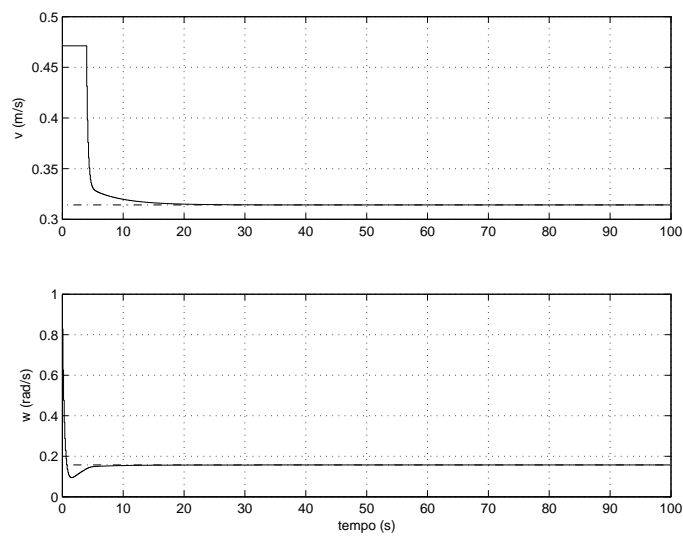


Figura 120: Entradas de controle v e w . LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001). A linha traço-ponto representa a entrada de referência.

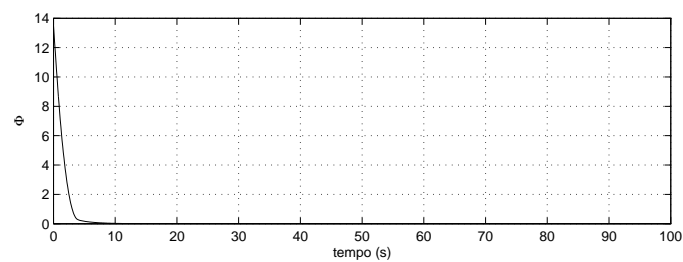


Figura 121: Função de custo Φ . LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).

Com os mesmos parâmetros na função de custo, para uma trajetória de referência em forma de U e condição inicial do robô de $\mathbf{x}_0 = [-1 \quad -1 \quad \pi/2]^T$, obtém-se os seguintes resultados:

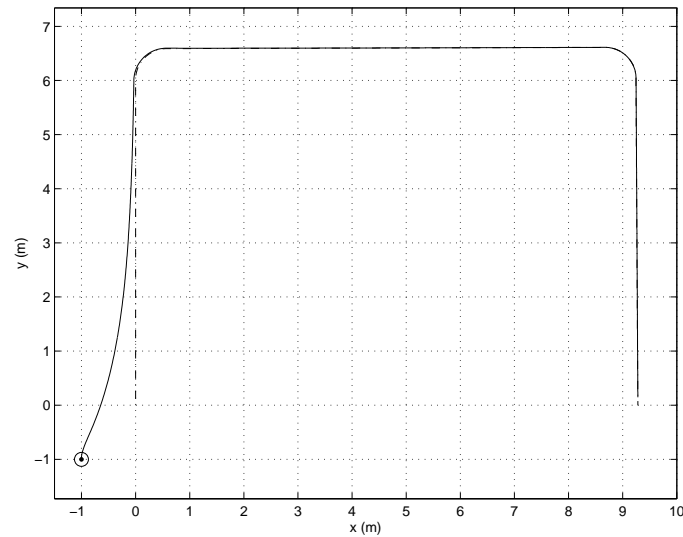


Figura 122: Trajetória do robô no plano XY para uma referência em forma de U (linha traço-ponto). LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).

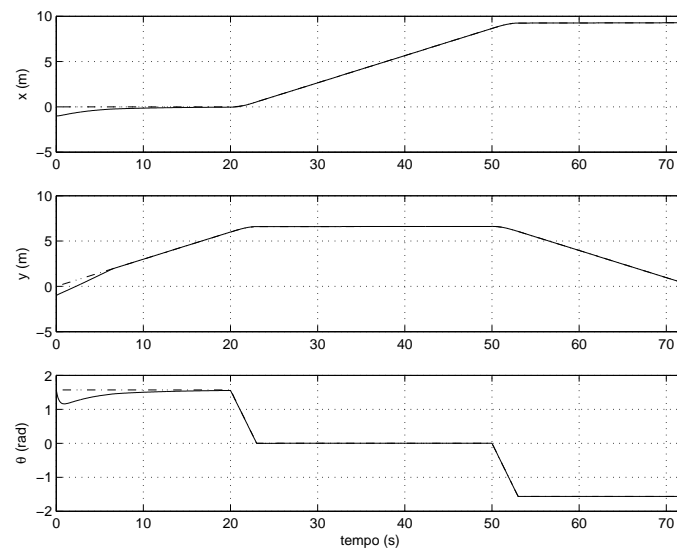


Figura 123: Estados x , y e θ . LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001). A linha traço-ponto representa o estado de referência.

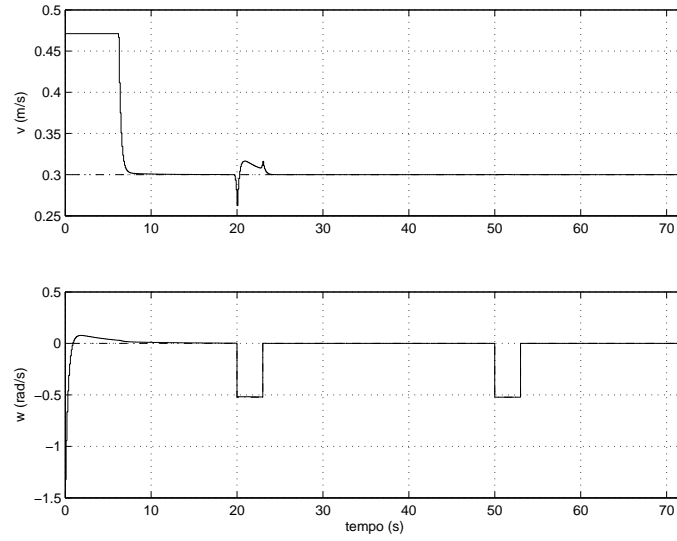


Figura 124: Entradas de controle v e w . LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001). A linha traço-ponto representa a entrada de referência.

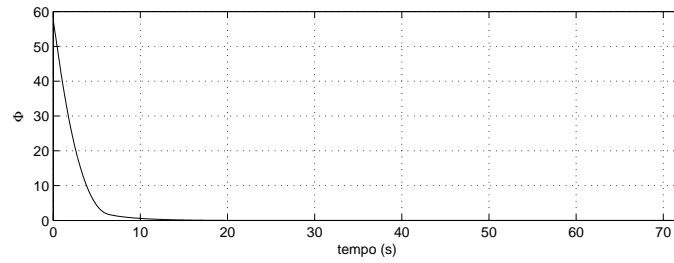


Figura 125: Função de custo Φ . LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001).

Assim, como observado pelos dois casos apresentados nas figuras 118 a 125, o LMPC com a função de custo de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001) apresenta resultados bastante satisfatórios. Além de acelerar a taxa com que o robô se aproxima da trajetória, esta aproximação é feita de forma bastante suave e as entradas de controle são tais que respeitam os limites de amplitude impostos.

Nas figuras a seguir, apresenta-se uma comparação entre o desempenho do robô para o problema apresentado aqui em dois casos: o LMPC com função de custo original e o LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001). A trajetória de referência é formada por três segmentos de retas, estes ligados por duas curvas. A condição inicial do robô é $\mathbf{x}_0 = [0 \ 2 \ -\pi/2]^T$.

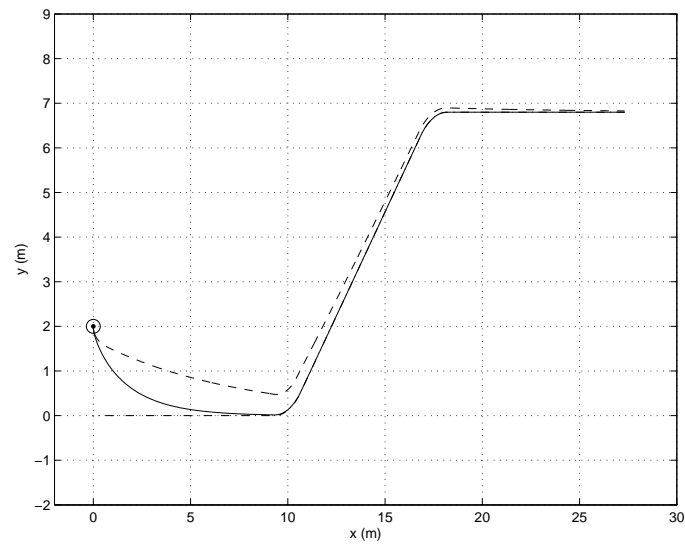


Figura 126: Trajetória do robô no plano XY . Linha contínua: LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha tracejada: LMPC com função de custo original; linha traço-ponto: trajetória de referência.

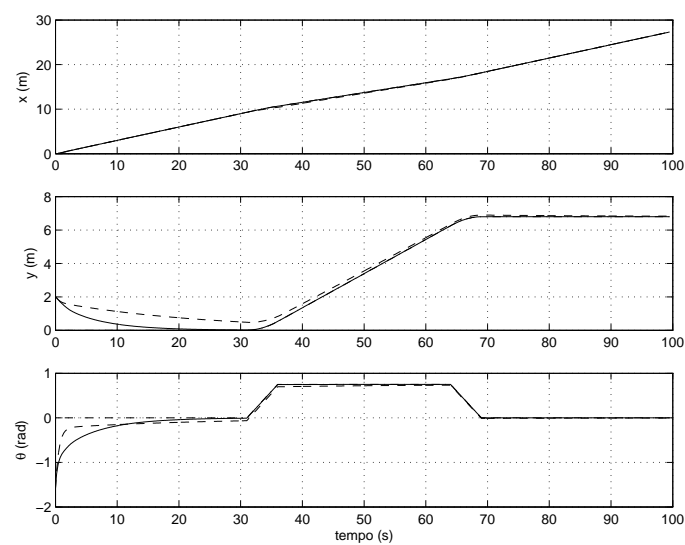


Figura 127: Estados x , y e θ . Linha contínua: LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha tracejada: LMPC com função de custo original; linha traço-ponto: trajetória de referência.

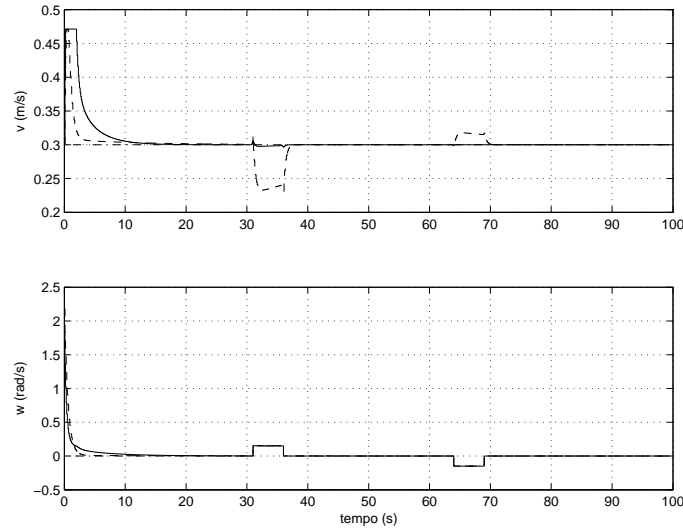


Figura 128: Entradas de controle v e w . Linha contínua: LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha tracejada: LMPC com função de custo original; linha traço-ponto: trajetória de referência.

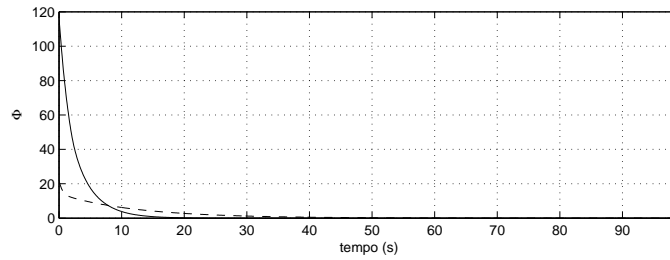


Figura 129: Função de custo Φ . Linha contínua: LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001); linha tracejada: LMPC com função de custo original.

5.6 O Custo Computacional do LMPC

O objetivo da seção anterior foi apresentar um método de solução alternativa à apresentada pelo MPC não linear. Foi desenvolvido um algoritmo de programação quadrática, QP, para a solução do problema de rastreamento de trajetória através de um MPC linear. Conforme destacado anteriormente, a solução de algoritmos de otimização não linear geralmente envolve um alto esforço computacional. Entretanto, este problema diminui consideravelmente se o MPC é linear, pois o problema de otimização agora é convexo e existem um número menor de variáveis de decisão. Para o caso não linear, o número de variáveis de decisão é de $N \times (n + m)$, onde N é o horizonte, n é o número de estados e m é o número de entradas de controle. Entretanto, como visto, através da transformação do problema de MPC em QP as variáveis de decisão são apenas as entradas de controle, pois a dinâmica do sistema está incluída na função de custo (expressão (43)) e não é mais necessária uma restrição referente ao modelo cinemático do robô. Assim, o número de variáveis de decisão para o caso linear é de apenas $N \times m$.

Novamente, como nas seções 4.8 e 5.4, será feito um estudo com relação ao esforço

computacional necessário para a solução no MPC, agora para o caso linear de rastreamento de trajetória.

Assim, novamente utilizando-se como critério o número de operações em ponto flutuante, ou OPF, realizadas por período de amostragem e tomando por base o valor estimado por (ABURTO, 1992) para um computador com processador Athlon XP 2600+, tem-se que o valor de flops é de 576.000.000. Assim, como o período de amostragem é de $T = 0,1$ segundo, tem-se que o máximo custo computacional permitido é de 57.600.000 operações em ponto flutuante por período de amostragem.

Dois casos do LMPC para rastreamento de trajetória são então estudados:

- *Caso 1.* O LMPC com função de custo original (Expressão (39));
- *Caso 2.* O LMPC de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001), com função de custo com custo terminal e matriz Q crescente exponencialmente ao longo do horizonte (expressão (46)).

Nos dois casos acima a restrição de amplitude das entradas de controle, $Du \leq d$, é considerada e a condição inicial do robô é $x_0 = [-0,5 \quad -2,5 \quad 0]^T$. Como referência, é utilizada a trajetória circular apresentada anteriormente. Os resultados são mostrados na Tabela 6.

Tabela 6: Custo computacional do LMPC - rastreamento de trajetória.

Horizonte	No. OPF por período de amostragem	
	Caso 1	Caso 2
5	16.431	16.546
10	101.080	94.792
15	329.700	352.360
20	790.320	908.010

Observa-se então, através dos dados apresentados na tabela acima, que o LMPC para o problema de rastreamento de trajetória é satisfatoriamente resolvido dentro dos limites de custo computacional. Até mesmo para um horizonte de predição alto, como $N = 20$, o limite de 57.600.000 de OPF não é alcançado.

A necessidade de se desenvolver uma alternativa linear ao NMPC aparece então quando deseja-se reduzir o custo computacional envolvido no problema de otimização. Obviamente, com o LMPC, o desempenho não será o mesmo, pois, como já salientado, o modelo linearizado do robô é válido apenas em regiões próximas da trajetória de referência, o que acaba limitando a sua aplicabilidade. Entretanto, pode-se ser visto nas figuras a seguir que o LMPC ainda assim possui um bom desempenho, quando comparado com o caso não linear. Nos exemplos abaixo, tanto o LMPC quanto o NMPC utilizam a função de custo de (ESSEN; NIJMEIJER, 2001), com os mesmos parâmetros de sintonia, para todos os casos. Na Figura 130 a condição inicial do robô é de $x_0 = [-0,5 \quad -2,5 \quad 0]^T$, na Figura 131, $x_0 = [1 \quad -1 \quad \pi]^T$ e na Figura 132 é de $x_0 = [-1 \quad 1 \quad \pi]^T$.

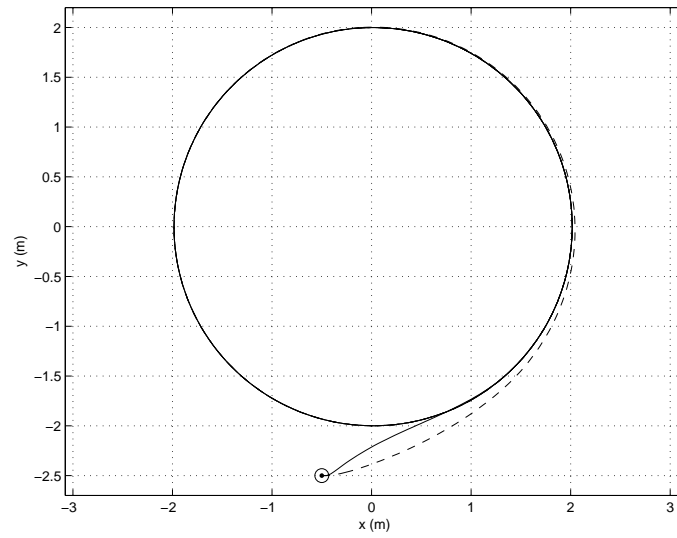


Figura 130: Trajetória do robô no plano XY . Linha contínua: NMPC; linha tracejada: LMPC; linha traço-ponto: trajetória de referência.

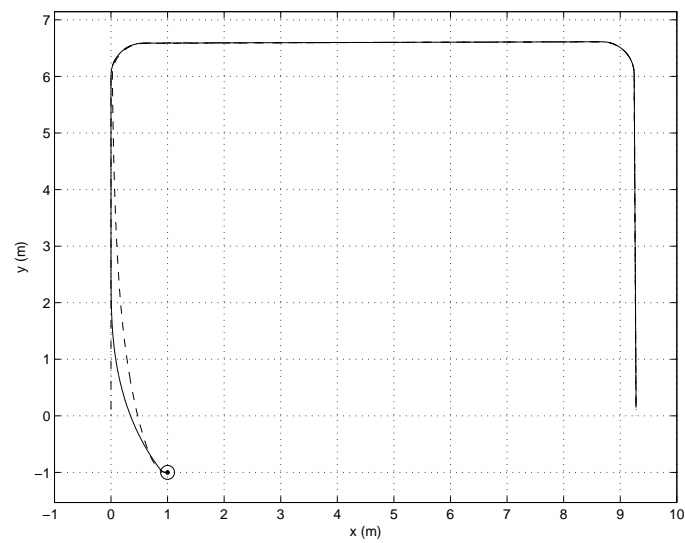


Figura 131: Trajetória do robô no plano XY . Linha contínua: NMPC; linha tracejada: LMPC; linha traço-ponto: trajetória de referência.

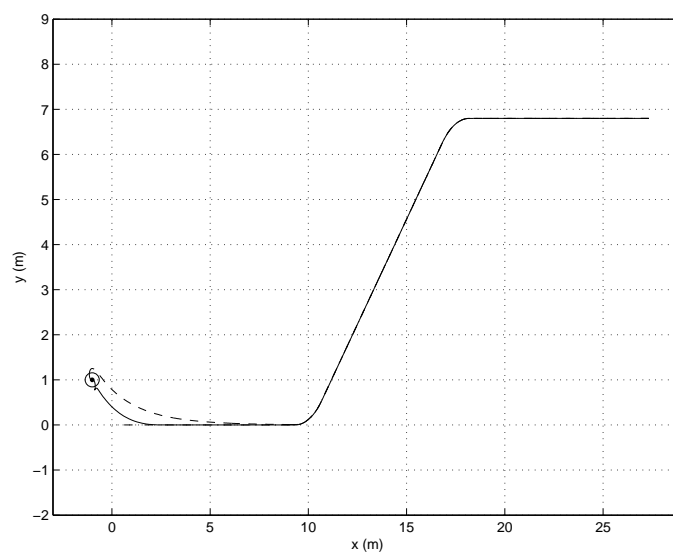


Figura 132: Trajetória do robô no plano XY . Linha contínua: NMPC; linha tracejada: LMPC; linha traço-ponto: trajetória de referência.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram apresentados diversos algoritmos de controle preditivo baseado em modelo para o controle de um robô móvel dotado de rodas e com restrições não holonômicas. Com base no modelo cinemático do robô, dois objetivos foram abordados: estabilização em um ponto e rastreamento de trajetória.

Em (BROCKETT, 1982) foi visto que um sistema sem deriva sujeito à restrições não holonômicas não pode ser estabilizado em um ponto fixo através de uma realimentação de estados suave e invariante no tempo. Este resultado é bem conhecido, e para contorná-lo, comumente utilizam-se leis de controle variantes no tempo ou não suaves. Entretanto, estas técnicas apresentam desvantagens típicas, como trajetórias desnecessariamente oscilatórias, convergência lenta e a escolha de certos parâmetros de sintonia do controle não é intuitiva. Além disso, não é possível considerar, pelo menos de uma forma explícita, limites nas variáveis de estado ou de controle, o que pode gerar leis de controle não factíveis para uma implementação real.

Assim, o MPC aparece como uma boa alternativa, já que o mesmo apresenta várias vantagens com relação às leis clássicas acima expostas: a existência de um critério de performance (a função de custo), a geração de trajetórias que são ótimas com relação a este critério, a capacidade com que o MPC tem de considerar restrições de uma forma explícita e a escolha dos parâmetros de sintonia pode ser feita de uma forma bastante intuitiva, já que os mesmos se relacionam diretamente com as variáveis do sistema. Ainda, o controle gerado pelo MPC é tal que respeita as condições impostas por Brockett (BROCKETT, 1982).

O problema de estabilização em um ponto foi resolvido através de um algoritmo de MPC não linear. Com relação à minimização da função de custo, foi identificado que um erro em regime em uma dos estados invariavelmente aparece, em razão da simetria existente entre dois estados de configuração. Assim, foi proposta uma transformação em coordenadas polares da função de custo, o que tornou possível desacoplar os estados e fazer com que o problema fosse satisfatoriamente resolvido. Foi visto também que a abordagem proposta apresentou um desempenho bastante superior com relação à trajetória de estados e de controle desenvolvidas pelo robô se comparado com técnicas clássicas de controle para estes sistemas. Com o NMPC, todas as restrições impostas foram respeitadas, ao passo que, com as leis clássicas de controle, sinais de controle incompatíveis com uma implementação real foram gerados.

Após, o problema de rastreamento de trajetória foi abordado. Primeiramente, através de um algoritmo de MPC não linear. Uma modificação da função de custo a ser minimizada, apresentada originalmente em (ESSEN; NIJMEIJER, 2001), foi estudada. Diferentes trajetórias de referência foram utilizadas, provando a eficácia da técnica.

Várias considerações acerca do esforço computacional foram mostradas, visando a

implementação experimental do método. Uma desvantagem do MPC refere-se ao esforço computacional necessário para o cálculo da lei de controle, já que um problema de otimização precisa ser resolvido *on-line*, em cada instante de amostragem. Entretanto, foi visto que, dado o desenvolvimento de eficientes algoritmos computacionais e de processadores mais rápidos, o MPC pode ser aplicado na prática para o controle de robôs como o utilizado aqui. Assim, através do cálculo do número de operações em ponto flutuante por instante de amostragem, foi mostrado que o MPC pode ser perfeitamente implementado em uma aplicação em tempo-real. Foi visto também que o algoritmo de MPC proposto aqui necessita de um menor esforço computacional se comparado com outros métodos de MPC para robôs móveis, já que o mesmo não necessita de um longo horizonte de predição e mantém a forma original da função de custo.

Para o problema de rastreamento de trajetória, foi proposta uma abordagem alternativa ao MPC não linear. Através de linearizações sucessivas do modelo cinemático do robô ao longo da trajetória de referência, foi obtido um modelo linear variante no tempo, o qual foi utilizado para a solução de um algoritmo de programação quadrática. Foi possível reduzir consideravelmente o esforço computacional utilizado no problema de otimização, o que pode permitir assim a aplicação desta técnica em sistemas de menor capacidade computacional. Verificou-se também que esta alternativa linear mantém um excelente desempenho, se comparado com a abordagem não linear.

6.1 Trabalhos Futuros

Todos os resultados apresentados mostram que o MPC aplicado a robôs móveis é factível, tanto do ponto de vista de desempenho quanto de uma implementação real. Entretanto, não foi estabelecida aqui nenhuma prova formal de estabilidade assintótica do sistema para tais estratégias de controle. Técnicas que exploram o comportamento monotonicamente decrescente da função de custo (MAYNE et al., 2000) são bastante usuais, e deverão ser utilizadas neste caso para provar a estabilidade do sistema em malha fechada. Neste caso, deve-se considerar a adição de um custo terminal e uma restrição terminal de estados no problema de otimização a fim de satisfazer os requisitos de monotonicidade da função de custo em coordenadas polares. Outras técnicas que garantem a estabilidade do MPC são, por exemplo, o *dual-mode* MPC (MICHALSKA; MAYNE, 1993) e o MPC contrativo (DE OLIVEIRA KOTHARE; MORARI, 2000).

Um outro ponto a ser considerado futuramente é a inclusão de trajetórias de aproximação para o caso linear de rastreamento de trajetória. Como dito, o modelo linearizado do robô é válido apenas em uma região próxima do ponto de referência, o que limita bastante a aplicabilidade da técnica. Métodos já existentes, como o *pure pursuit* (NORMEY-RICO; GÓMEZ-ORTEGA; CAMACHO, 1999), podem vir a serem aplicados neste caso.

O enfoque desta dissertação foi, primordialmente, o desenvolvimento de algoritmos e estudo da viabilidade da aplicação do MPC em robôs móveis não holonômicos. Através dos resultados de simulação aqui apresentados, pôde-se ver que esta técnica apresenta desempenho superior quando comparado com técnicas clássicas de controle para este tipo de sistema. Além disso, foi mostrado que, mesmo necessitando de um esforço computacional elevado, a técnica mostrou-se potencialmente implementável em tempo-real. Assim sendo, trabalhos relativos à implementação destas técnicas precisam ser desenvolvidas a fim de ser realizada a validação experimental das mesmas.

Durante todo este trabalho, foi considerado que o modelo cinemático era idêntico ao sistema real do robô. Obviamente que, em uma implementação real, isto não é verdade.

Ainda, é interessante fazer uma extensão dos algoritmos desenvolvidos aqui para o modelo dinâmico do robô. Os parâmetros cinemáticos devem ter seus valores conhecidos com bastante precisão, pois interferem diretamente nas informações lidas dos sensores. Os parâmetros dinâmicos são variantes com a carga útil do robô, e assim não podem ser determinados por calibração. Ainda, existe a incerteza dada pela precisão de sensores e atuadores. Assim, técnicas de MPC utilizando observadores de estado devem ser desenvolvidas neste caso, como o filtro de Kalman (KÜHNE et al., 2004) e o *Moving Horizon State Estimation, MHE* (ALLGÖWER et al., 1999).

REFERÊNCIAS

ABURTO, A. **FLOPS C Program (Double Precision) V2.0 18 Dec 1992**. Disponível *on-line* em <ftp://ftp.nosc.mil/pub/aburto/flops>. Acesso em Jan. 2005.

AGUIAR, A. P.; ATASSI, A. N.; PASCOAL, A. M. Regulation of a Nonholonomic Dynamic Wheeled Mobile Robot with Parametric Uncertainty using Lyapunov Functions. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 39., 2000, Sydney, Australia. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2000.

ALLGÖWER, F.; BADGWELL, T. A.; QIN, J. S.; RAWLINGS, J. B.; WRIGHT, S. J. Nonlinear Predictive Control and Moving Horizon Estimation: an introductory overview. In: FRANK, P. M. (Ed.). **Advances in Control: Highlights of ECC'99**. New York: Springer-Verlag, 1999. p.391–449.

ASTOLFI, A. On The Stabilization of Nonholonomic Systems. In: IEEE AMERICAN CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 33., 1994, Lake Buena Vista, FL. **Proceedings...** IEEE Control Systems Society, 1994. p.3481–3486.

BARRAQUAND, J.; LATOMBE, J. C. On Nonholonomic Mobile Robots and Optimal Maneuvering. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON INTELLIGENT CONTROL, 1989, Albany, NY. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1989. p.340–347.

BEMPORAD, A.; MORARI, M.; DUA, V.; PISTIKOPOULOS, E. N. The Explicit Linear Quadratic Regulator for Constrained Systems. **Automatica**, New York, v.38, n.1, p.3–20, Jan. 2002.

BITMEAD, R. R.; GEVERS, M.; WERTZ, V. **Adaptive Nonlinear Control: the thinking man's gpc**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1990.

BLOCH, A. M.; MCCLAMROCH, N. H. Control of Mechanical Systems with Classical Nonholonomic Constraints. In: IEEE AMERICAN CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 28., 1989, Tampa, FL. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1989. p.201–205.

BLOCH, A. M.; REYHANOGLU, M.; MCCLAMROCH, N. H. Control and Stabilization of Nonholonomic Dynamic Systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], v.37, n.11, p.1746–1757, Nov. 1992.

BROCKETT, R. W. **New Directions in Applied Mathematics**. New York: Springer-Verlag, 1982.

BULLO, F.; LEONARD, N. E.; LEWIS, A. D. Controllability and Motion Algorithms for Underactuated Lagrangian Systems on Lie Groups. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], v.45, n.8, p.1437–1454, Aug. 2000.

CAMACHO, E. F.; BORDONS, C. **Model Predictive Control**. London: Springer-Verlag, 1999. (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing).

CAMPION, G.; BASTIN, G.; D'ANDRÉA-NOVEL, B. Modelling and State Feedback Control of Nonholonomic Mechanical Systems. In: IEEE EUROPEAN CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 30., 1991, Brighton, England. **Proceedings...** IEEE Control Systems Society, 1991. p.1184–1189.

CAMPION, G.; BASTIN, G.; D'ANDRÉA-NOVEL, B. Modelling and Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION, 1991, Sacramento, CA. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1991. p.1130–1135.

CAMPION, G.; BASTIN, G.; D'ANDRÉA-NOVEL, B. Structural Properties and Classifications of Kinematic and Dynamic Models of Wheeled Mobile Robots. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, New York, v.12, n.1, p.47–62, Fev. 1996.

CANUDAS DE WIT, C.; BERGHUIS, H.; NIJMEIJER, H. Practical Stabilization of Nonlinear Systems in Chained Form. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 33., 1994, Lake Buena Vista, FL. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1994. v.4, p.3475–3480.

CANUDAS DE WIT, C.; KHENNOUF, H.; SAMSON, C.; SØRDALEN, O. J. **Nonlinear Control Design for Mobile Robots**. [S.l.]: World Scientific Publisher, 1993. p.121–157. (World Scientific Series in Robotics and Intelligent Systems).

CANUDAS DE WIT, C.; SICILIANO, B.; BASTIN, G. **Theory of Robot Control**. London: Springer-Verlag, 1996.

CANUDAS DE WIT, C.; SØRDALEN, O. J. Exponential Stabilization of Mobile Robots with Nonholonomic Constraints. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.37, n.11, p.1791–1797, Nov. 1992.

CHACAL, J. A.; SIRA-RAMÍREZ, H. On the Sliding Mode Control of Wheeled Mobile Robots. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS, MAN & CYBERNETICS – HUMANS, INFORMATION AND TECHNOLOGY, 1994, New York. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1994. p.1938–1943.

CHAVES, L. F. **Projeto, Construção, Modelagem e Controle de um Robô Móvel**. 2000. Dissertação (Mestrado em engenharia elétrica) — Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS.

CHEN, C. C.; ALLGÖWER, F. A Quasi-Infinite Horizon Nonlinear Model Predictive Control with Guaranteed Stability. **Automatica**, [S.l.], v.34, n.10, p.1205–1217, Oct. 1998.

CHEN, C. C.; SHAW, L. On Receding Horizon Feedback Control. **Automatica**, New York, v.18, n.3, p.349–352, May 1982.

CHWA, D. Sliding-Mode Tracking Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots in Polar Coordinates. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, Piscataway, NJ, v.12, n.4, p.637–644, Jul. 2004.

CLARKE, D. W.; MOHTADI, C.; TUFFS, P. S. Generalised Predictive Control – Part I. the basic algorithm. **Automatica**, New York, v.23, n.2, p.137–148, Mar. 1987.

CUTLER, C. R.; RAMACKER, B. L. Dynamic Matrix Control: a computer control algorithm. In: JOINT AUTOMATIC CONTROL CONFERENCE, 1980, San Francisco, CA. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1980. p.1119–1167.

DE KEISER, R. M. C.; VAN CUAWENBERGHE, A. R. Extended Prediction Self-Adaptive Control. In: IFAC SYMPOSIUM ON IDENTIFICATION AND SYSTEMS PARAMETER ESTIMATION, 1985, York, UK. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1985.

DE OLIVEIRA KOTHARE, S. L.; MORARI, M. Contractive Model Predictive Control for Constrained Nonlinear Systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.45, n.6, p.1053–1071, Jun. 2000.

DENG, Z.; BRADY, M. Dynamic Tracking of a Wheeled Mobile Robot. In: IEEE/RSJ INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT ROBOTS AND SYSTEMS, 1993, Yokohama, Japan. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1993. p.1295–1298.

DIXON, W. E.; DAWSON, D. M.; ZHANG, F.; ZERGEROGLU, E. Global Exponential Setpoint Control of Mobile Robots. In: IEEE/ASME INTERNATIONAL CONFERENCE ON ADVANCED INTELLIGENT MECHATRONICS, 1999, Atlanta, GA. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1999. p.683–688.

DO, K. D.; JIANG, Z. P.; PAN, J. A Universal Saturation Controller Design for Mobile Robots. In: IEEE AMERICAN CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 41., 2002, Las Vegas, NV. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2002. p.2044–2049.

DONG, W.; XU, W. L. Adaptive Tracking Control of Uncertain Nonholonomic Dynamic System. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.46, n.3, p.450–454, Mar. 2001.

DURAISKI, R. G.; TRIERWEILER, J. O. **Controle Preditivo Não Linear Utilizando Linearizações Sucessivas ao Longo da Trajetória**. 2001. Dissertação (Mestrado em engenharia química) — Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS.

DYNAMIC OPTIMIZATION TECHNOLOGY PRODUCTS. Technical Description of NOVA Nonlinear Controller. **Hydrocarbon Processing, Issue on Advanced Control and Information Systems**, Houston, TX, 1996.

ENCARNAÇÃO, P.; PASCOAL, A. Combined Trajectory Tracking and Path Following Control for Dynamic Wheeled Mobile Robots. In: IFAC TRIENNIAL WORLD CONGRESS, 15., 2002, Barcelona, Spain. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2002.

ESSEN, H. V.; NIJMEIJER, H. Non-Linear Model Predictive Control of Constrained Mobile Robots. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 2001, Porto, Portugal. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2001. p.1157–1162.

FUKAO, T.; NAKAGAWA, H.; ADACHI, N. Adaptive Tracking Control of a Nonholonomic Mobile Robot. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.16, n.5, p.609–615, Oct. 2000.

GARCÍA, C. E.; PRETT, D. M.; MORARI, M. Model Predictive Control: theory and practice – a survey. **Automatica**, New York, v.25, n.3, p.335–348, May 1989.

GARCIA, C. E.; MORSHEDI, A. M. Quadratic Programming Solution of Dynamic Matrix Control (QDMC). **Chemical Engineering Communications**, New York, p.73–87, 1986.

GÓMEZ-ORTEGA, J.; CAMACHO, E. F. Mobile Robot Navigation in a Partially Structured Static Environment Using Neural Predictive Control. **Control Engineering Practice**, Oxford, v.4, n.12, p.1669–1679, Dec. 1996.

GURVITS, L.; LI, Z. Smooth Time-Periodic Feedback Solutions for Nonholonomic Motion Planning. In: LI, Z.; CANNY, J. (Ed.). **Nonholonomic Motion Planning**. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 1993. p.53–108. (Kluwer International Series in Engineering and Computer Science, 192, v.26).

HENRION, D.; LASSERRE, J.-B. Solving Nonconvex Optimization Problems. **IEEE Control Systems Magazine**, New York, v.24, n.3, p.72–83, Jun. 2004.

HENSON, M. A. Nonlinear Model Predictive Control: current status and future directions. **Computers and Chemical Engineering**, [S.l.], v.23, n.2, p.187–202, Dez. 1998.

INDIVIERI, G. Kinematic Time-Invariant Control of a 2D Nonholonomic Vehicle. In: IEEE AMERICAN CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 38., 1999, Phoenix, AZ. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1999. p.2112–2117.

ISIDORI, A. **Nonlinear Control Systems**. 3rd.ed. New York: Springer Verlag, 1995.

KANAYAMA, Y.; MIYAZAKI, Y. K. F.; NOGUCHI, T. A Stable Tracking Control Method for an Autonomous Mobile Robot. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION, 1990, Cincinnati, OH. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1990.

KEERTHI, S. S.; GILBERT, E. G. Optimal, Infinite Horizon Feedback Laws for a General Class of Constrained Discrete Time Systems: stability and moving-horizon approximations. **Journal of Optimization Theory and Application**, [S.l.], v.57, p.265–293, 1988.

KHALIL, H. K. **Nonlinear Systems**. 2..ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.

KÜHNE, F.; CLARO, C.; SUESS, S. R.; LAGES, W. F. Estimação e Controle da Posição de um Robô Móvel Utilizando Filtro de Kalman Descentralizado. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 15., 2004, Gramado, RS. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2004.

KÜHNE, F.; LAGES, W. F.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Model Predictive Control of a Mobile Robot Using Linearization. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON MECHATRONICS AND ROBOTICS, 4., 2004, Aachen, Germany. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2004.

KOLMANOVSKY, I.; MCCLAMROCH, N. H. Developments in Nonholonomic Control Problems. **IEEE Control Systems Magazine**, New York, v.15, n.6, p.20–36, Dec. 1995.

KWAKERNAAK, H.; SIVAN, R. **Linear Optimal Control Systems**. New York: Wiley Interscience, 1972.

LAGES, W. F. **Controle e Estimação de Posição e Orientação de Robôs Móveis**. 1998. Tese (Doutorado em engenharia eletrônica e computação) — Instituto Tecnológico da Aeronáutica, São José dos Campos, SP.

LAGES, W. F.; HEMERLY, E. F. Smooth Time-Invariant Control of Wheeled Mobile Robots. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON SYSTEMS SCIENCE, 13., 1998, Wrocław, Poland. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1998.

LEE, E. B.; MARKUS, L. **Foundations of Optimal Control Theory**. New York: John Wiley and Sons, 1967.

LEE, T. C.; LEE, C. H.; TENG, C. C. Adaptive Tracking Control of Nonholonomic Mobile Robots by Computed Torque. In: IEEE AMERICAN CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 38., 1999, Phoenix, AZ. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1999. p.1254–1259.

MARTIN, G. Nonlinear Model Predictive Control with Integrated Steady-State Model-based Optimization. In: ALCHE NATIONAL MEETING, 1997, Houston, TX. **Anais...** [S.l.: s.n.], 1997.

MATTHIES, L.; XIONG, Y.; HOGG, R.; ZHU, D.; RANKIN, A.; KENNEDY, B. A Portable, Autonomous, Urban Reconnaissance Robot. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT AUTONOMOUS SYSTEMS, 6., 2000, Venice, Italy. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2000. Disponível *on-line* em <http://robotics.jpl.nasa.gov/tasks/tmr/papers/UrbanRobotPaper0700.pdf>. Acesso em Fev. 2005.

MAYNE, D. Q.; MICHALSKA, H. Receding Horizon Control of Nonlinear Systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.35, n.7, p.789–814, Jul. 1990.

MAYNE, D. Q.; RAWLINGS, J. B.; RAO, C. V.; SCOKAERT, P. O. M. Constrained Model Predictive Control: stability and optimality. **Automatica**, New York, v.36, n.6, p.789–814, Jun. 2000.

MCCLOSKEY, R. T.; MURRAY, R. M. Exponential Stabilization of Driftless Control Systems Using Homogeneous Feedback. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.42, n.5, p.614–628, Mai. 1997.

MICHALSKA, H.; MAYNE, D. Q. Robust Receding Horizon Control of Constrained Nonlinear Systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.38, n.11, p.1623–1632, Nov. 1993.

MORARI, M.; LEE, J. H. Model Predictive Control: past, present and future. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON PROCESS SYSTEMS ENGINEERING AND 30TH EUROPEAN SYMPOSIUM ON COMPUTER AIDED PROCESS ENGINEERING, 6., 1997, Trondheim, Norway. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1997.

MURRAY, M.; SASTRY, S. S. Nonholonomic Motion Planning: steering using sinusoids. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.38, n.5, p.700–717, Mai. 1994.

MURRAY, R. M.; SASTRY, S. S. Steering Nonholonomic Systems Using Sinusoids. In: IEEE AMERICAN CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 29., 1990, Phoenix, AZ. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1990. p.2097–2101.

NEIMARK, J. I.; FUFÁEV, F. A. Dynamics of Nonholonomic Systems. **American Mathematical Society Translations of Mathematical Monographs**, [S.l.], v.33, p.330–374, 1972.

NORMEY-RICO, J. E.; GÓMEZ-ORTEGA, J.; CAMACHO, E. F. A Smith-Predictor-Based Generalised Predictive Controller for Mobile Robot Path-Tracking. **Control Engineering Practice**, [S.l.], v.7, n.6, p.729–740, Jun. 1999.

OELLEN, W.; BERGHUIS, H.; NIJMEIJER, H.; CANUDAS DE WIT, C. Hybrid Stabilizing Control on a Real Mobile Robot. **IEEE Robotics & Automation Magazine**, New York, v.2, n.2, p.16–23, Jun. 1995.

OLLERO, A.; AMIDI, O. Predictive Path Tracking of Mobile Robots: application to the CMU Navlab. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ADVANCED ROBOTICS, 5., 1991, Pisa, Italy. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1991. p.1081–1086.

ORIOLO, G.; LUCA, A. D.; VENDITTELLI, M. WMR Control Via Dynamic Feedback Linearization: design, implementation and experimental validation. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, New York, v.10, n.6, p.835–852, Nov. 2002.

OYA, M.; YU, C. H.; KATO, R. Robust Adaptive Motion/Force Tracking Control of Uncertain Nonholonomic Mechanical Systems. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, New York, v.19, n.1, p.175–181, Feb. 2003.

POMET, J. B.; THUILOT, B.; BASTIN, G.; CAMPION, G. A Hybrid Strategy for the Feedback Stabilization of Nonholonomic Mobile Robots. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION, 1992, Nice, France. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1992. p.129–134.

QIN, S. J.; BADGWELL, T. A. An Overview of Industrial Model Predictive Control Technology. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON CHEMICAL PROCESS CONTROL, 5., 1997, Tahoe City, CA. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1997. p.232–256. (AIChE Symposium Series 316, v.93).

QIN, S. J.; BADGWELL, T. A. An Overview of Nonlinear Model Predictive Control Applications. In: ALLGÖWER, F.; ZHENG, A. (Ed.). **Nonlinear Model Predictive Control**. Basel, Switzerland: Birkhäuser Verlag, 2000. p.369–393. (Progress in Systems and Control Theory, v.26).

RAMÍREZ, D. R.; LIMÓN, D.; GÓMEZ-ORTEGA, J.; CAMACHO, E. F. Nonlinear MBPC for Mobile Robots Navigation Using Genetic Algorithms. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS & AUTOMATION, 1999, Detroit, MI. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1999.

RAWLINGS, J. B. Tutorial Overview of Model Predictive Control. **IEEE Control Systems Magazine**, New York, v.20, n.3, p.38–52, Jun. 2000.

RICHALET, J.; RAULT, A.; TESTUD, J. L.; PAPON, J. Algorithmic Control of Industrial Processes. In: IFAC SYMPOSIUM ON IDENTIFICATION AND SYSTEM PARAMETER ESTIMATION, 4., 1976, Tucson, AZ. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1976. p.1119–1167.

ROSSITER, J. A. **Model Based Predictive Control**: a practical approach. Boca Ratón, FL: CRC Press, 2003.

SAKAGAMI, Y.; WATANABE, R.; AOYAMA, C.; MATSUNAGA, S.; HIGAKI, N.; FUJIMURA, K. The Intelligent ASIMO: system overview and integration. In: IEEE/RSJ INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT ROBOTS AND SYSTEMS, 2002, Lausanne, Switzerland. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 2002.

SAMSON, C. Velocity and Torque Feedback Control of a Nonholonomic Cart. In: INTERNATIONAL WORKSHOP IN ADAPTIVE AND NONLINEAR CONTROL: ISSUES IN ROBOTICS, 1990, Grenoble, France. **Proceedings...** Springer-Verlag, 1990.

SAMSON, C. Control of Chained Systems: application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.40, n.1, p.64–77, Jan. 1995.

SAMSON, C.; AIT-ABDERRAHIM, K. Feedback Control of a Nonholonomic Wheeled Cart in Cartesian Space. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION, 1991, Sacramento, CA. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1991. p.1136–1141.

SAMSON, C.; AIT-ABDERRAHIM, K. Feedback Stabilization of a Nonholonomic Wheeled Mobile Robot. In: IEEE/RSJ INTERNATIONAL WORKSHOP ON INTELLIGENT ROBOTS AND SYSTEMS, 1991, Osaka, Japan. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1991. p.1242–1247.

SARKAR, N.; YUN, X.; KUMAR, V. Dynamic Path Following: a new control algorithm for mobile robots. In: IEEE AMERICAN CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 32., 1993, San Antonio, TX. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1993. p.2670–2675.

SCHRAFT, R. D. Mechatronics and Robotics for Service Applications. **IEEE Robotics & Automation Magazine**, New York, v.1, n.4, p.31–35, Dez. 1994.

SONTAG, E. D. **Mathematical Control Theory. Deterministic Finite Dimensional Systems**. New York: Springer-Verlag, 1990.

SØRDALEN, O. J. **Feedback Control of Nonholonomic Mobile Robots**. 1993. Tese (Dr. ing.) — The Norwegian Institute of Technology.

SØRDALEN, O. J. Conversion of the Kinematics of a Car with n Trailers Into a Chained Form. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION, 1993, Atlanta, GA. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1993. p.382–387.

SU, C. Y.; STEPANENKO, Y. Robust Motion/Force Control of Mechanical Systems with Classical Nonholonomic Constraints. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.39, n.3, p.609–614, Mar. 1994.

SUN, S. Designing Approach on Trajectory-Tracking Control of Mobile Robot. **Robotics and Computer-Integrated Manufacturing**, [S.l.], v.21, n.1, p.81–85, Feb. 2005.

TARÍN, C.; BRUGGER, H.; TIBKEN, B.; HOFER, E. P. Adaptive Self-Tuning Path Control System for an Autonomous Mobile Robot. In: IEEE AMERICAN CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 38., 1999, Phoenix, AZ. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1999. p.3886–3887.

TEEL, A. R.; MURRAY, R. M.; WALSH, G. Nonholonomic Control Systems: from steering to stabilization with sinusoids. In: IEEE AMERICAN CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 31., 1992, Tucson, AZ. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1992. p.1603–1609.

TEEL, A. R.; MURRAY, R. M.; WALSH, G. C. Non-holonomic Control Systems: from steering to stabilization with sinusoids. **International Journal of Control**, [S.l.], v.62, n.4, p.849–870, 1995.

TØNDEL, P.; JOHANSEN, T. A.; BEMPORAD, A. An Algorithm for Multi-Parametric Quadratic Programming and Explicit MPC Solutions. **Automatica**, New York, v.39, n.3, p.489–497, Mar. 2003.

TRIERWEILER, J. O.; SECCHI, A. R. Exploring the Potentiality of Using Multiple Model Approach in Nonlinear Model Predictive Control. In: ALLGÖWER, F.; ZENG, A. (Ed.). **Nonlinear model predictive control**. Basel, Switzerland: Birkhäuser Verlag AG, 2000. p.191–203. (Progress in Systems and Control Theory, v.26).

WEISBIN, C. R.; LAVERY, D. NASA Rover and Telerobotics Technology Program. **IEEE Robotics & Automation Magazine**, New York, v.1, n.4, p.14–21, Dez. 1994.

WORLD ROBOTICS 2004. Geneva, Switzerland: United Nations Economic Commission for Europe, UNECE, 2004.

WU, W.; CHEN, H.; WANG, Y.; WOO, P. Adaptive Exponential Stabilization of Mobile Robots with Uncertainties. In: IEEE AMERICAN CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 38., 1999, Phoenix, AZ. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1999. p.3484–3489.

YAMAMOTO, Y.; YUN, X. Coordinating Locomotion and Manipulation of a Mobile Manipulator. **IEEE Transactions on Automatic Control**, New York, v.39, n.6, p.1326–1332, Jun. 1994.

YANG, J. M.; KIM, J. H. Sliding Mode Control for Trajectory Tracking of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, New York, v.15, n.3, p.578–587, Jun. 1999.

YANG, X.; HE, K.; GUO, M.; ZHANG, B. An Intelligent Predictive Control Approach to Path Tracking Problem of Autonomous Mobile Robot. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS, 1998, San Diego, CA. **Proceedings...** [S.l.: s.n.], 1998.

APÊNDICE A O ROBÔ MÓVEL TWIL

Toda a modelagem realizada neste trabalho é baseada no robô móvel Twil (LAGES, 1998; LAGES; HEMERLY, 1998), mostrado na Figura 133. Este robô foi desenvolvido no Departamento de Controle e Conversão de Energia do Instituto Tecnológico da Aeronáutica, CTA-ITA-IEEE.

Este robô possui duas rodas ativas, ambas com um raio de $7,5\text{ cm}$, e uma distância entre rodas de 25 cm . Assim, conforme a Figura 134, define-se:

$$r = 0,075\text{ m} \quad b = 0,25\text{ m}$$



Figura 133: O robô móvel Twil.

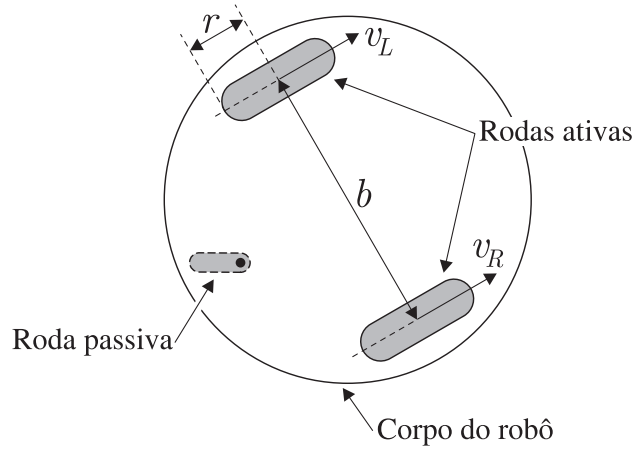


Figura 134: Aspectos estruturais do robô Twil.

Como já mencionado, no controle preditivo é possível definir restrições nas variáveis de entrada do sistema a ser controlado, utilizando então estas restrições durante o cálculo da lei de controle. E é bem sabido o fato de que a saturação de atuadores eletromecânicos invariavelmente existe. Frente a isto, alguns dados construtivos do robô tornam-se necessários, a fim de se calcular um limite nas velocidades do robô para que estas saturações não ocorram. Pode-se usar estas restrições também para fazer com que as condições não holonômicas existentes sejam válidas (neste caso, para que as rodas não derrapem – expressão (3)).

Então, para evitar a saturação dos atuadores, cada motor do robô Twil pode desenvolver uma velocidade máxima de 1 rotação por segundo¹. Logo, a velocidade angular máxima será de $\bar{\varphi} = 2\pi \text{ rad/s}$. Considerando que as rodas não derrapam, as velocidades tangenciais desenvolvidas na roda esquerda, v_L , e direita, v_R , são proporcionais à velocidade angular: $v_L = v_R = \varphi r$. Assim:

$$\begin{aligned}\bar{v}_L &= \bar{\varphi} r \\ &= 2\pi \text{ rad/s} \times 0.075 \text{ m} & \bar{v}_R &= \bar{v}_L \\ &= 0.4712 \text{ m/s}\end{aligned}$$

onde \bar{v}_L e \bar{v}_R são as velocidades tangenciais máximas nas rodas esquerda e direita, respectivamente.

Entretanto, o modelo cinemático (2) possui como entradas de controle a velocidade linear v e a velocidade angular w , que se relacionam com v_L e v_R da seguinte maneira:

$$v = \frac{v_L + v_R}{2} \quad w = \frac{v_L - v_R}{b}$$

O valor máximo da velocidade linear é dado quando as duas rodas desenvolvem a velocidade tangencial máxima no mesmo sentido. Assim:

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{\bar{v}_L + \bar{v}_R}{2} \\ &= 0.4712 \text{ m/s}\end{aligned}$$

¹ Considera-se que os motores das rodas ativas esquerda e direita são iguais e possuem os mesmos limites de velocidade.

A máxima velocidade angular é desenvolvida quando as duas rodas operam a máxima velocidade tangencial, mas com sentidos opostos. Assim:

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \frac{\bar{v}_L + \bar{v}_R}{b} \\ &= 3,7699 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

De uma forma geral, as restrições no MPC podem ser representadas pela seguinte expressão:

$$\mathbf{D}\mathbf{u} \leq \mathbf{d},$$

onde \mathbf{u} é o vetor das entradas de controle. Para este caso, $\mathbf{u} = [v \ w]^T$. A matriz \mathbf{D} e o vetor \mathbf{d} são definidos fazendo

$$\begin{aligned}-\bar{v} &\leq v \leq \bar{v}, \\ -\bar{w} &\leq w \leq \bar{w},\end{aligned}$$

de onde tem-se que:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0,4712 \text{ m/s} \\ 3,7699 \text{ rad/s} \\ 0,4712 \text{ m/s} \\ 3,7699 \text{ rad/s} \end{bmatrix} \quad (47)$$