

CONTROLE EM COORDENADAS POLARES DE ROBÔS MÓVEIS COM RODAS

WALTER F. LAGES

*Depto. de Física, Fundação Universidade do Rio Grande
Av. Itália, Km 8, 96201-901 Rio Grande, RS, BRASIL
E-mail: w.fetter@ieee.org*

ELDER M. HEMERLY

*Depto. de Controle e Conversão de Energia, Instituto Tecnológico de Aeronáutica
CTA - ITA - IEEE, 12228-900 São José dos Campos, SP, BRASIL
E-mail: hemerly@ele.ita.cta.br*

Resumo- Sabe-se que transformações de coordenadas adequadas podem ser bastante úteis no desenvolvimento de controladores para sistemas não-holonômicos. A literatura mostra que a transformação para coordenadas polares permite o controle de robôs móveis com acionamento diferencial. No entanto, não existe um método para obtenção de tais transformações. Neste artigo propõe-se transformações de variáveis adicionais que permitem a obtenção de leis de controle para todas as classes de robôs móveis com rodas. As leis de controle obtidas garantem que a trajetória do robô converge assintoticamente para uma determinada posição e orientação.

Abstract- It is well known that a suitable coordinate transform can be very effective to the design of controllers for nonholonomic systems. A literature search shows that differential drive robots can be controlled in polar coordinates. Nonetheless, a method to obtain such transforms is not available. This paper proposes a set of further variable transforms that enable us to obtain control laws for all classes of wheeled mobile robot. The designed control laws ensure asymptotic convergence to specified position and orientation.

Keywords- mobile robots; nonlinear control; nonholonomic systems; automated guided vehicles; robotics

1 Introdução

Os principais métodos para controle de postura (posição e orientação) originam-se no fato de que um sistema não-holonômico sem deriva não pode ser estabilizado em um ponto através de uma realimentação suave invariante no tempo (Brockett, 1983).

Alguns métodos (Walsh et al, 1994 e Thuilot et al., 1996) abandonam a idéia de estabilização em um ponto e procuram obter convergência para uma trajetória. Outros métodos mantêm a exigência de convergência para um ponto às custas de leis de controle mais complexas, como realimentação não suave (Bloch et al., 1992 e Canudas de Wit e Sørдалen, 1992). Utilizando-se uma lei de controle suave, é possível obter-se convergência para um ponto se esta lei de controle for variante no tempo (McCloskey e Murray, 1997). No entanto, leis de controle variantes no tempo geralmente produzem trajetórias demasiadamente oscilantes.

Também são utilizadas leis de controle híbridas (Oelen et al., 1995). Estas leis diferenciam-se das demais por combinarem leis de controle de tempo contínuo e leis de controle de tempo discreto. Na maioria das vezes ocorre chaveamento entre uma lei de controle não suave e uma lei de controle variante no tempo.

Como sugerido em McCloskey e Murray (1997) e McClamroch e Kolmanovsky (1995), o uso de transformações de coordenadas não suaves seguido de uma realimentação suave é promissor. A idéia

nesta abordagem é fazer uma transformação de coordenadas de forma que o sistema transformado seja descontínuo, evitando-se assim as limitações impostas por Brockett (1983).

Neste artigo são propostas transformações adicionais que permitem generalizar os resultados de Aicardi et al. (1995) para todas as classes de robôs móveis com rodas. Uma transformação de coordenadas torna o modelo do sistema descontínuo na origem. Através de uma análise *Lyapunov-like*, é obtida uma lei de controle suave e invariante no tempo tal que, em malha fechada, o sistema seja contínuo também na origem.

2 Modelagem

Neste trabalho serão considerados apenas robôs com acionamento através de rodas. Será utilizado o modelo cinemático, obtido através de uma formulação semelhante a Campion et al. (1996).

Como detalhado na Fig. 1, as coordenadas de postura do robô descritas no sistema $\{X_0, Y_0\}$ e a matriz de rotação entre $\{X_c, Y_c\}$ e $\{X_0, Y_0\}$ serão

$$\xi_0 = [x_c \quad y_c \quad \theta]^T \quad (1)$$

$${}^c R_0 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

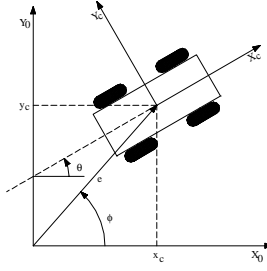


Figura 1 - Definição dos Sistemas de Coordenadas.

2.1 Descrição das Rodas

2.1.1 Rodas Convencionais Fixas

Da Fig.1 e das expressões (1) e (2), tem-se que a velocidade do robô, em relação ao sistema de coordenadas inercial, descrita no sistema de coordenadas $\{X_c, Y_c\}$ será

$$\dot{\xi}_c = {}^c R_0 \dot{\xi}_0 \quad (3)$$

Esta mesma velocidade, descrita em um sistema de coordenadas $\{X_w, Y_w\}$ associando ao centro da roda, conforme a Fig. 2, tem a forma

$$\dot{\xi}_w = {}^w R_c \dot{\xi}_c + I_w \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^w R_c \dot{\xi}_c \quad (4)$$

onde I_w é o braço de giro e ${}^w R_c$ é a matriz de rotação entre os sistemas de coordenadas $\{X_w, Y_w\}$ e $\{X_c, Y_c\}$.

Utilizando-se (3), (4) pode ser reescrita como

$$\dot{\xi}_w = \begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) & -l \cos \beta \\ \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l \sin \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^c R_0 \dot{\xi}_0$$

e considerando-se que $\dot{\xi}_w = [r\dot{\phi} \ 0 \ \dot{\theta}]^T$ chega-se à expressão

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & l \cos \beta \\ \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l \sin \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^c R_0 \dot{\xi}_0 + [r\dot{\phi} \ 0 \ -\dot{\theta}]^T = 0 \quad (5)$$

que representa as restrições ao movimento do robô devido à roda em questão.

2.1.2 Rodas Convencionais Orientáveis Centradas

Uma roda convencional orientável centrada é uma roda cujo plano pode ser rotacionado em torno de um eixo vertical passando pelo centro da roda. A descrição deste tipo de roda é a mesma utilizada para rodas fixas (caso anterior), porém o ângulo β não é constante, mas variável.

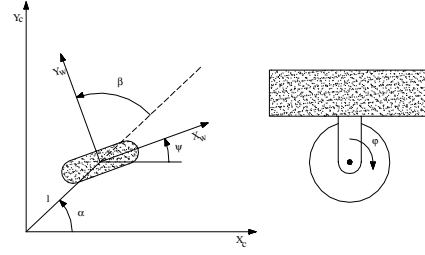


Figura 2 - Definição do Sistema de Coordenadas da Roda Convencional Fixa.

2.1.3 Rodas Convencionais Orientáveis Não-centradas

Neste tipo de roda, a rotação se dá em torno de um eixo vertical que não passa através do centro da roda, conforme a Fig. 3. Neste caso, a expressão (5) torna-se

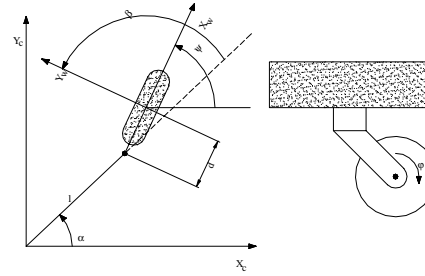


Figura 3 - Roda Convencional Orientável Não-centrada.

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & l \cos \beta \\ \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & d + l \sin \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^c R_0 \dot{\xi}_0 + [r\dot{\phi} \ 0 \ -\dot{\theta}]^T = 0 \quad (6)$$

2.1.4 Rodas Suecas

Para este tipo de roda, é necessário mais um parâmetro para caracterizar a direção, com relação ao plano da roda, do componente nulo da velocidade do ponto de contato. A Fig. 4 mostra a definição dos sistemas de coordenadas utilizados.

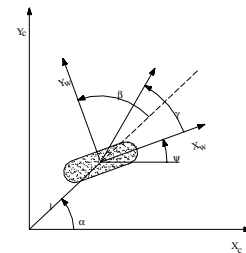


Figura 4 - Definição do Sistema de Coordenadas para Roda Sueca.

Com esta definição de sistemas de coordenadas, a matriz de rotação entre os sistemas de coordenadas $\{X_w, Y_w\}$ e $\{X_c, Y_c\}$ será

$${}^w\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta + \gamma) & -\cos(\alpha + \beta + \gamma) & 0 \\ \cos(\alpha + \beta + \gamma) & \sin(\alpha + \beta + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Por outro lado, tem-se que a velocidade do robô descrita no sistema de coordenadas $\{X_w, Y_w\}$ é dada por

$$\dot{\xi}_w = \begin{bmatrix} r\dot{\phi} \cos \gamma & \dot{\xi}_{wy} & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T$$

Como se trata de uma roda sueca, o componente de velocidade normal é desconhecido, pois a velocidade do ponto de contato nesta direção não é nula. Com isto, a restrição de movimento da roda pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \beta + \gamma) \\ \cos(\alpha + \beta + \gamma) \\ 1 \cos(\beta + \gamma) \end{bmatrix}^T {}^c\mathbf{R}_0 \dot{\xi}_0 + r \cos \gamma \dot{\phi} = 0 \quad (8)$$

Assume-se que para uma roda sueca $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$, pois neste caso a roda estaria sujeita a uma restrição idêntica a qual está sujeita uma roda convencional, perdendo o benefício de ser uma roda sueca.

2.2 Restrições à Mobilidade do Robô

Considere-se um robô que possua N rodas, sendo N_f rodas convencionais fixas, N_c rodas centradas, N_{oc} rodas não centradas e N_{sw} rodas suecas. Então, as equações que descrevem as restrições (6-8) podem ser escritas na forma matricial:

$$\mathbf{J}_1(\beta_c, \beta_{oc}) {}^c\mathbf{R}_0 \dot{\xi} + \mathbf{J}_2 \dot{\phi} = 0 \quad (9)$$

$$\mathbf{C}_1(\beta_c, \beta_{oc}) {}^c\mathbf{R}_0 \dot{\xi} + \mathbf{C}_2 \dot{\beta}_{oc} = 0 \quad (10)$$

Considerando-se apenas as primeiras ($N_f + N_c$) restrições de (10) tem-se

$$\mathbf{C}_1^*(\beta_c) {}^c\mathbf{R}_0 \dot{\xi} = 0 \quad (11)$$

sendo $\mathbf{C}_1^*(\beta_c) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1f} & \mathbf{C}_{1c}(\beta_c) \end{bmatrix}^T$ e portanto, ${}^c\mathbf{R}_0 \dot{\xi}$ pertence ao espaço nulo de $\mathbf{C}_1^*(\beta_c)$.

Define-se *grau de mobilidade* como

$$\delta_m = \dim \mathcal{N}(\mathbf{C}_1^*(\beta_c))$$

O *grau de dirigibilidade* é definido como o número de rodas convencionais orientáveis centradas que podem ser orientadas independentemente para dirigir o robô e é dado por

$$\delta_s = \rho(\mathbf{C}_{1c}(\beta_c))$$

Se o robô estiver equipado com mais de δ_s rodas convencionais orientadas centradas, o movimento de $N_c - \delta_s$ rodas deverá ser coordenado com as demais, de

forma a garantir a existência do centro de rotação instantâneo.

Pode ser provado (Campion et al., 1996) que a configuração das rodas de um robô móvel deve ser tal que as seguintes restrições sejam satisfeitas:

$$1 \leq \delta_m \leq 3, 0 \leq \delta_s \leq 2 \text{ e } 2 \leq \delta_m + \delta_s \leq 3 \quad (12)$$

Verifica-se que apenas cinco classes de robôs com rodas, caracterizadas pelo par (δ_m, δ_s) satisfazem as restrições (12): as classes (3,0), (2,0), (2,1), (1,1) e (1,2).

2.3 Modelo no Espaço de Estados

De (11) tem-se que ${}^c\mathbf{R}_0 \dot{\xi}$ pertence ao espaço nulo de $\mathbf{C}_1^*(\beta_c)$. Portanto, lembrando que ${}^c\mathbf{R}_0^{-1} = {}^c\mathbf{R}_0^T = \mathbf{0} \mathbf{R}_c$, pode-se escrever

$$\dot{\xi} = \mathbf{0} \mathbf{R}_c \Sigma(\beta_c) \eta \quad (13)$$

onde as colunas de $\Sigma(\beta_c)$ formam uma base do espaço nulo de $\mathbf{C}_1^*(\beta_c)$. Pode-se verificar facilmente que as dimensões de $\Sigma(\beta_c)$ e η serão sempre $3 \times \delta_m$ e $\delta_m \times 1$. Tem-se então o modelo no espaço de estados do sistema, com as coordenadas de postura ξ como variáveis de estado. Como entradas do sistema tem-se η e β_c . Se o robô não possui rodas orientáveis centradas ($N_c=0$), a matriz Σ não dependerá de β_c e as entradas (lineares, neste caso) do sistema serão apenas η .

Pode ser provado (Campion et al., 1996) que este modelo é irredutível, ou seja, não existe uma transformação de coordenadas tal que uma das coordenadas é identicamente nula.

3 Transformação de Coordenadas

Nesta seção o modelo descrito pela expressão (13) será convertido para coordenadas polares. Consequentemente, a posição do robô será representada através de coordenadas polares (e, ϕ). Observando-se a Fig. 1 é facilmente verificado que

$$e = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} \quad (14)$$

$$\phi = \text{atan2}(y_c, x_c) \quad (15)$$

$$x_c = e \cos \phi \quad (16)$$

$$y_c = e \sin \phi \quad (17)$$

derivando-se (14) e (15) e substituindo-se (16) e (17) obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\frac{\sin \phi}{e} & \frac{\cos \phi}{e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \end{bmatrix} \quad (18)$$

Definindo-se $\alpha = \theta - \phi$ e $z = [e \ \phi \ \alpha]^T$ pode-se de (13) e (18) escrever o modelo em coordenadas polares

$$\dot{z} = D(z, \beta_c) \eta \quad (19)$$

$$\text{com } D(z, \beta_c) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\frac{\sin \phi}{e} & \frac{\cos \phi}{e} & 0 \\ \frac{\sin \phi}{e} & -\frac{\cos \phi}{e} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{0} \mathbf{R}_c \Sigma(\beta_c).$$

4 Leis de Controle

As leis de controle propostas neste artigo baseiam-se em uma análise do tipo de Lyapunov e Barbalat. Sem perda de generalidade, é assumido que deseja-se a convergência de e , ϕ e α para zero.

4.1 Classe (3,0)

Considere-se a seguinte candidata à função de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} \lambda e^2 + \frac{1}{2} (\alpha^2 + h\phi^2) \quad (20)$$

onde λ e h são constantes positivas.

Derivando-se (20) em relação ao tempo e substituindo-se \dot{e} , $\dot{\phi}$, e $\dot{\alpha}$ de (19) tem-se

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$$

sendo

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \lambda e \cos \alpha \eta_1 + h\phi \frac{\cos \alpha}{e} \eta_2 \\ \dot{V}_2 &= \alpha \left(\eta_3 - \left(\lambda e \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \frac{\cos \alpha}{e} \right) \eta_2 - \frac{\sin \alpha}{e\alpha} (\alpha - h\phi) \eta_1 \right) \end{aligned}$$

Este particionamento é feito de forma a deixar em \dot{V}_1 os termos que não são identicamente nulos quando α é nulo, ou seja, os termos que não são função explícita de α ou $\sin \alpha$ e em \dot{V}_2 os demais termos.

Pode-se verificar facilmente que \dot{V}_1 pode ser tornado não positivo fazendo-se

$$\eta_1 = -\gamma_1 e \cos \alpha$$

$$\eta_2 = -\gamma_2 \phi e \cos \alpha$$

onde γ_1 e γ_2 são constantes positivas. Com isto tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\lambda \gamma_1 e^2 \cos^2 \alpha - h\phi^2 \cos^2 \alpha \leq 0 \\ \dot{V}_2 &= \alpha \left(\eta_3 + \gamma_2 \phi \cos \alpha \left(\lambda e^2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \cos \alpha \right) + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_1 \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} (\alpha - h\phi) \right) \end{aligned}$$

Logo, fazendo-se

$$\begin{aligned} \eta_3 &= -\gamma_3 \alpha - \gamma_2 \phi \cos \alpha \left(\lambda e^2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \cos \alpha \right) \\ &\quad - \gamma_1 \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} (\alpha - h\phi) \end{aligned}$$

sendo γ_3 uma constante positiva, tem-se

$$\dot{V} = -\lambda \gamma_1 e^2 \cos^2 \alpha - h\gamma_2 \phi^2 \cos^2 \alpha - \gamma_3 \alpha^2 \leq 0 \quad (21)$$

que juntamente com o fato de que V é contínua e não negativa, garante a estabilidade do sistema em malha fechada. Por outro lado, considerando-se que V é inferiormente limitada e \dot{V} é uniformemente contínua, tem-se pelo lema de Barbalat que \dot{V} tende a zero e portanto, pode-se verificar pela expressão (21) que e , ϕ e α também tendem a zero.

4.2 Classe (2,0)

Agindo-se de forma semelhante ao caso anterior, a candidata a função de Lyapunov é paricionada em

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \lambda e \cos \alpha \eta_1 \\ \dot{V}_2 &= \alpha \left(\eta_2 - \frac{\sin \alpha}{e\alpha} (\alpha - h\phi) \eta_1 \right) \end{aligned}$$

de onde obtém-se

$$\eta_1 = -\gamma_1 e \cos \alpha$$

$$\eta_2 = -\gamma_2 \alpha - \gamma_1 \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} (\alpha - h\phi)$$

resultando

$$\dot{V} = -\lambda \gamma_1 e^2 \cos^2 \alpha - \gamma_2 \alpha^2 \leq 0$$

Portanto, através dos mesmos argumentos utilizados no caso anterior, pode-se concluir que e e α tendem a zero. A convergência de ϕ para zero pode ser provada observando-se as equações do sistema em malha fechada:

$$\begin{cases} \dot{e} = -\gamma_1 e \cos^2 \alpha \\ \dot{\phi} = -\gamma_1 \sin \alpha \cos \alpha \\ \dot{\alpha} = -\gamma_2 \alpha + \gamma_1 h\phi \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} \end{cases} \quad (22)$$

Considerando-se a convergência para zero de e e α , conclui-se facilmente de (22) que $\dot{\phi}$ também tende a zero. A convergência de $\dot{\phi}$ para zero, por sua vez, faz com que $\dot{\alpha}$ convirja para algum valor constante dado por $\gamma_1 h\phi^*$. Por outro lado, a continuidade uniforme de $\dot{\alpha}$ juntamente com a convergência para zero de α , garante, pelo lema de Barbalat, que $\dot{\alpha}$ tende a zero. Portanto, ϕ^* tem, necessariamente, que ser zero.

4.3 Classe (2,1)

Neste caso, toma-se como candidata à função de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} \lambda e^2 + \frac{1}{2} (\alpha^2 + h\phi^2 + g\beta_c^2)$$

onde λ , h e g são constantes positivas.

Diferentemente dos casos anteriores, agora \dot{V} é parcionada em três. \dot{V}_2 contém os termos que são nulos quando α é nulo e \dot{V}_3 contém os termos que são nulos quando β_c é nulo e \dot{V}_1 contém os demais termos. Ou seja,

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \lambda e \cos(\alpha + \beta_c) \eta_1 \\ \dot{V}_2 &= \alpha \left(\eta_2 - \cos \beta_c \frac{\sin \alpha}{e \alpha} \eta_1 (\alpha - h\phi) \right) \\ \dot{V}_3 &= g \beta_c \left(\zeta - \cos \alpha \frac{\sin \beta_c}{e \beta_c} \eta_1 (\alpha - h\phi) \right)\end{aligned}$$

e portanto, seguindo o mesmo procedimento utilizado nas classes anteriores tem-se

$$\begin{aligned}\eta_1 &= -\gamma_1 e \cos(\alpha + \beta_c) \\ \eta_2 &= -\gamma_2 \alpha - \gamma_1 \cos \beta_c \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos(\alpha + \beta_c) (\alpha - h\phi) \\ \eta_3 &= -\gamma_3 \beta_c - \gamma_1 \cos \alpha \frac{\sin \beta_c}{\beta_c} \cos(\alpha + \beta_c) (\alpha - h\phi)\end{aligned}$$

consequentemente,

$$\dot{V} = -\lambda \gamma_1 e^2 \cos^2(\alpha + \beta_c) - \gamma_2 \alpha^2 - g \gamma_3 \beta_c^2 \leq 0$$

de onde pode-se concluir que e , α e β_c convergem para zero. A convergência de ϕ para zero é provada considerando-se as equações dinâmicas do sistema, como na classe (2,0).

4.4 Classe (1,1)

Definindo-se

$$u_1 = \eta \sin \beta_c \quad e \quad u_2 = \eta \cos \beta_c$$

o modelo (19) assume a forma

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \cos \alpha & 0 \\ \frac{d \sin \alpha}{e} & 0 \\ -\frac{d \sin \alpha}{e} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

que exceto pela constante d , é a mesma forma do modelo para a classe (2,0). Logo, obtém-se

$$\begin{aligned}u_1 &= -\gamma_1 d \cos \alpha \\ u_2 &= -\gamma_2 \alpha - \gamma_1 d^2 \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} (\alpha - h\phi)\end{aligned}$$

Obviamente, as entradas η e β_c podem ser obtidas de u_1 e u_2 através das expressões

$$\eta = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \quad e \quad \beta_c = \text{atan2}(u_1, u_2)$$

4.5 Classe (1,2)

Com procedimento similar ao adotado para a classe (1,1), para esta classe também serão definidas novas variáveis de entrada:

$$u_1 = \eta \sin(\beta_{c1} + \beta_{c2}) \quad (23)$$

$$u_2 = 2\eta \sin \beta_{c1} \sin \beta_{c2} \quad (24)$$

$$u_3 = \eta \sin(\beta_{c1} - \beta_{c2}) \quad (25)$$

portanto, o modelo do sistema pode ser escrito na forma

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \cos \alpha & -L \sin \alpha & 0 \\ L \frac{\sin \alpha}{e} & L \frac{\cos \alpha}{e} & 0 \\ -L \frac{\sin \alpha}{e} & -L \frac{\cos \alpha}{e} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

que é bastante semelhante ao modelo para a classe (3,0). Logo, através de análise semelhante obtém-se

$$\begin{aligned}u_1 &= -\gamma_1 L e \cos \alpha \\ u_2 &= -\gamma_2 L e \phi \cos \alpha \\ u_3 &= -\gamma_3 \alpha - \gamma_2 L^2 \phi \cos \alpha \left(\lambda e^2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \cos \alpha \right) \\ &\quad - \gamma_1 L^2 \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} (\alpha - h\phi)\end{aligned}$$

Para obter-se η e β_{c1} e β_{c2} , divide-se (24) pela diferença e pela soma de (23) e (25) obtendo-se

$$\beta_{c1} = \text{atan2}(u_2, u_1 - u_3) \quad (26)$$

$$\beta_{c2} = \text{atan2}(u_2, u_1 + u_3) \quad (27)$$

Elevando ao quadrado (23)-(25) e somando as três expressões pode-se obter

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{2(\sin^2 \beta_{c1} + \sin^2 \beta_{c2})}}$$

que pode ser calculado após β_{c1} e β_{c2} serem obtidos através de (26)-(27). Convém ressaltar que esta expressão não é válida quando $\beta_{c1} = n_1 \pi$ e simultaneamente $\beta_{c2} = n_2 \pi$, $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$. No entanto, para estas condições, o próprio modelo (13) não é válido, pois $\delta_m = \dim \mathcal{N}(C_1^*(\beta_c))$ será igual a 2 e não mais igual a 1 como é necessário para que o robô pertença a classe (1,2). Ou seja, nesta situação, o robô degenera para um robô pertencente à classe (2,0). O sinal correto de η pode ser determinado de (23) e (25) observando-se que $\sin(\beta_{c1} + \beta_{c2})$ e $\sin(\beta_{c1} - \beta_{c2})$ serão simultaneamente nulos apenas se $\beta_{c1} = \beta_{c2} = 0$. Além disso, tem-se que $\text{sgn}(a/b) = \text{sgn}(ab)$. Portanto, pode-se escrever

$$\text{sgn}(\eta) = \begin{cases} \text{sgn}(u_1 \sin(\beta_{c1} + \beta_{c2})), \\ |u_1 \sin(\beta_{c1} + \beta_{c2})| > |u_3 \sin(\beta_{c1} - \beta_{c2})| \\ \text{sgn}(u_3 \sin(\beta_{c1} - \beta_{c2})), \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

5 Resultados de Simulação

As leis de controle obtidas na seção anterior foram simuladas para um robô típico de cada classe. As condições iniciais foram $x_c(0) = 4\text{m}$, $y_c(0) = 4\text{m}$ e

$\theta(0)=\pi/2$ e deseja-se estabilizar o robô na origem. A convergência das variáveis de posição e orientação pode ser verificada na Fig. 5.

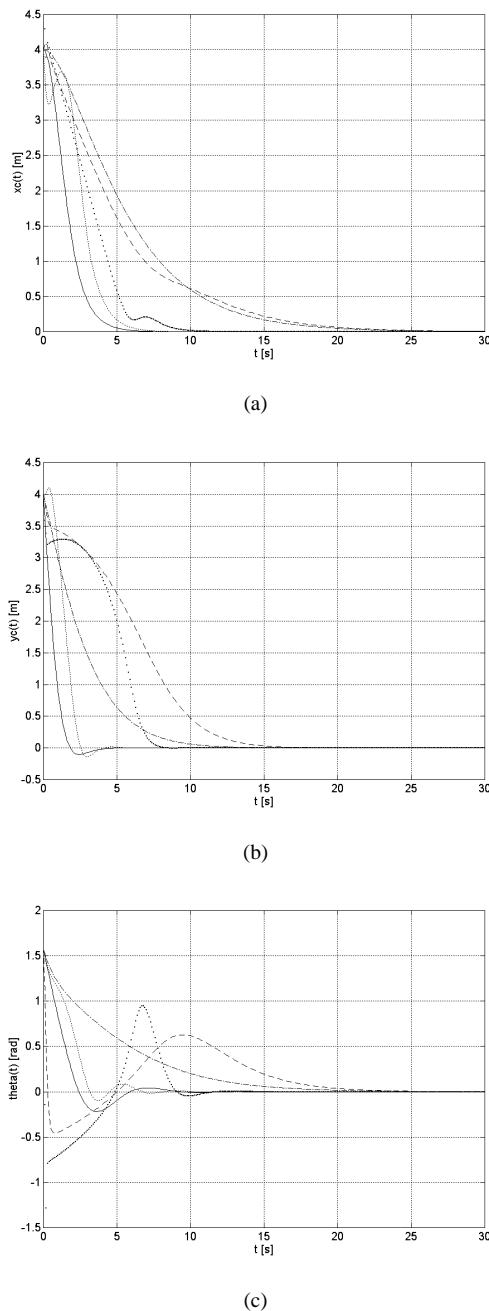


Figura 5 - Resultados de Simulação para Robô Classe (3,0) (pontos grandes), Classe (2,0) (contínuo), Classe (2,1) (pontos pequenos), Classe (1,1) (traço ponto) e Classe (1,2) (tracejado). a) Resposta de $x_c(t)$, b) Resposta de $y_c(t)$, c) Resposta de $\theta(t)$.

6 Conclusão

A técnica apresentada neste artigo permite que se obtenha leis de controle que garantam a convergência para um ponto e não apresentem oscilações excessivas. Além disso, as leis de controle obtidas são contínuas e suaves. No entanto, não se pode obter conclusões acerca de qual classe de robô apresenta melhor desempenho, pois a trajetória obtida pode ser

bastante diferente, em função dos parâmetros de projeto utilizados no cálculo da lei de controle.

Como considera-se apenas o modelo cinemático dos robôs, as variáveis de entrada são homogêneas a velocidades ou posição. Portanto, a utilização prática das leis de controle apresentadas aqui depende da existência de malhas de controle internas que garantam que as velocidades ou posições comandadas sejam efetivamente aplicadas nas rodas. Isto pode ser feito, por exemplo, utilizando-se controladores PID convencionais.

Referências Bibliográficas

- Aicardi, M., Casalino, G., Bicchi, A., Balestrino, A. (1995). Loop Steering of Unicycle-like Vehicles via Lyapunov Techniques, *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 2(1):27-35.
- Bloch, A. M., Reyhanoglu, M. & McClamroch, N. H. (1992). Control and Stabilization of Nonholonomic Dynamic Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37(11):1746-1756.
- Brockett, R. W. (1983). Asymptotic Stability and Feedback Stabilization in *Differential Geometric Control Theory*. Brockett, Millman & Sussman, Eds, Boston, MA: Birkhauser, pp. 181-208.
- Campion, G., Bastin, G., D'Andréa-Novel, B. (1996). Structural Properties and Classification of Kinematic and Dynamical Models of Wheeled Mobile Robots, *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 12(1):47-62.
- Canudas de Wit, C. & Sørđalen, O. J. (1992). Exponential Stabilization of Mobile Robots with Nonholonomic Constraints, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 37(11):1791-1797.
- McClamroch, N. H. & Kolmanovsky, I. (1995). Developments in Nonholonomic Control Problems, *IEEE Control Systems Magazine*, 15(6):20-36.
- McCloskey, R. T. & Murray, R. M. (1997). Exponential Stabilization of Driftless NonLinear Control Systems Using Homogeneous Feedback, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 42(5):614-628.
- Oelen, W., Berghuis, H., Nijmeijer, H. & Canudas de Wit, C. (1995). Hybrid Stabilizing Control on a Real Mobile Robot, *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 2(2):16-23.
- Thuijot, B., Andréa-Novel, B. & Micaelli, A. (1996). Modeling and Feedback Control of Mobile Robots Equipped with Several Steering Wheels, *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 12(3):375-390.
- Walsh, G., Tilbury, D., Sastry, S., Murray, R. & Laumond, J. P. (1994). Stabilization of Trajectories for Systems with Nonholonomic Constraints, *IEEE Trans. on automatic Control*, 39(1):216-222.