

Felipe Kühne

# TRABALHO INDIVIDUAL



Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Felipe Kühne

Trabalho Individual

# **Modelagem e Controle de Robôs Móveis Não Holonômicos**

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. Walter Fetter Lages

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Departamento de Engenharia Elétrica

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Porto Alegre

Fevereiro 2004

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Sistemas Mecânicos Não Holonômicos</b>	<b>5</b>
2.1	Introdução . . . . .	5
2.2	Equações não holonômicas . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Cinemática e Dinâmica de Robôs Móveis</b>	<b>10</b>
3.1	Introdução . . . . .	10
3.2	Cinemática de robôs móveis . . . . .	11
3.3	Descrição das rodas . . . . .	12
3.4	Restrições à mobilidade de um robô móvel . . . . .	15
3.5	Modelo cinemático de postura . . . . .	20
3.6	Modelo cinemático de configuração . . . . .	24
3.7	Modelo dinâmico de configuração . . . . .	26
3.8	Modelo dinâmico de postura . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Controle de Robôs Móveis</b>	<b>32</b>
4.1	Introdução . . . . .	32
4.2	Classificações . . . . .	35
4.2.1	Classificação quanto ao modelo utilizado . . . . .	35
4.2.2	Classificação quanto à metodologia de controle . . . . .	35
4.2.3	Classificação quanto à malha de controle . . . . .	37
4.2.4	Classificação quanto ao objetivo do controle em malha fechada . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Exemplo: Robô Móvel com Acionamento Diferencial</b>	<b>40</b>
5.1	Introdução . . . . .	40

5.2	Modelos cinemático e dinâmico . . . . .	40
5.2.1	Definição das restrições não holonômicas . . . . .	41
5.2.2	Definição da classe do robô . . . . .	42
5.2.3	Modelo cinemático de postura . . . . .	43
5.2.4	Modelo cinemático de configuração . . . . .	43
5.2.5	Modelo dinâmico de configuração . . . . .	44
5.3	Linearização entrada-saída por realimentação estática de estados . . . . .	46
5.3.1	Linearização do modelo cinemático de postura . . . . .	47
5.4	Linearização dinâmica entrada-saída . . . . .	49
5.5	Controle em coordenadas polares . . . . .	53
5.6	Controle cinemático variante no tempo . . . . .	55
5.6.1	Lei de controle linear . . . . .	56
5.6.2	Lei de controle não linear . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>58</b>
<b>A</b>	<b>Definições Matemáticas</b>	<b>60</b>
A.1	Geometria diferencial . . . . .	60
A.2	Teoremas . . . . .	64
A.3	Estabilizabilidade e controlabilidade . . . . .	65

# Capítulo 1

## Introdução

Atualmente, o uso de robôs para as mais variadas aplicações (industriais, comerciais ou residenciais) tem se tornado cada vez mais comum, dada a sua capacidade de executar tarefas com maior eficiência, ou aquelas que seres-humanos são incapazes de executar. O uso de robôs em ambientes industriais aumentou de 70 mil para 420 mil entre 1983 e 1991, considerando Japão, Estados Unidos e Europa [38]. Para o ano de 2003, este número está estimado em 900 mil robôs<sup>1</sup>.

Para garantir a qualidade e aumentar a produtividade, a indústria automobilística utiliza robôs manipuladores que realizam operações de soldagem e montagem. Em tubulações de petróleo ou gás natural, por exemplo, utiliza-se um tipo de robô chamado *PIG* (*Pipeline Inspection Gauge*, Figura 1.1) que realiza a limpeza e inspeção da tubulação pela sua parte interna, tarefa que obviamente seria impossível de uma pessoa realizar. Existem também robôs capazes de realizar explorações em outros planetas, como no projeto *Mars Surveyor*, da Agência Espacial Norte-Americana (NASA), e robôs cuja sua concepção é inspirada no comportamento de um ser humano (Figura 1.2). Em terremotos, são utilizados robôs-serpentes que são capazes de explorar os escombros, auxiliando na busca e resgate de sobreviventes. Enfim, a lista de aplicações de robôs atualmente é bastante vasta.

Dentro da categoria de robôs móveis, distinguem-se três tipos: os *dotados de rodas* (que será aqui abordado com maior profundidade), os do tipo *lagarta* (Figura 1.3) e os *acionados por pernas* (Figura 1.4), os dois últimos reservados principalmente a ambientes externos e não estruturados, dada à maior capacidade que estes têm de transpor obstáculos e irregularidades do terreno. Um exemplo de um robô móvel dotado de rodas é mostrado na Figura 1.5. Os robôs móveis dotados de rodas são utilizados, por exemplo, no transporte de cargas, robôs de segurança, cortadores de grama, aspiradores de pó, etc. Robôs deste tipo têm uma concepção mais fácil se comparada aos do tipo lagarta e aos dotados com pernas, dada a sua simplicidade estrutural<sup>2</sup>. Contudo, estes robôs móveis possuem restrições ao seu movimento, como aquelas devidas ao não escorregamento das rodas, como será visto adiante. Por causa destas restrições (que podem ser *holonômicas* ou *não holonômicas*), e pelo fato de ser um sistema não linear, os robôs móveis têm em seu controle um

---

<sup>1</sup>Retirado de <http://www.ferret.com.au/articles/14/0c01b114.asp>, em novembro de 2003.

<sup>2</sup>Robôs-lagarta e robôs dotados de pernas possuem articulações de difícil concepção, enquanto que os mecanismos responsáveis pelo movimento de robôs dotados de rodas são constituídos de motores e rodas apenas.

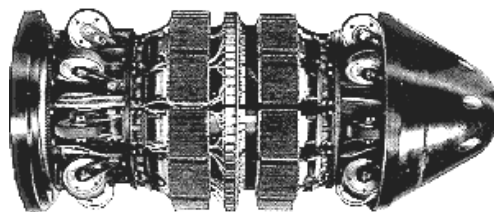


Figura 1.1: PIG: robô utilizado para inspeção, limpeza e reparos em tubulações.



Figura 1.2: O humanóide ASIMO, desenvolvido pela Honda do Japão.

dos principais problemas, tornando a concepção de leis de controle para estes sistemas uma tarefa extremamente complicada. Assim, os métodos desenvolvidos para robôs manipuladores, que não possuem estas restrições, não podem ser aplicados neste caso.

Esta relativa dificuldade na síntese de controle depende não apenas da natureza da não holonicidade do sistema mas também de quais objetivos deseja-se alcançar com tal controle [26]. Para alguns objetivos, abordagens clássicas de controle não linear (como por exemplo linearização por realimentação) são efetivas. O controle de robôs móveis pode ter como objetivo fazer com que o robô siga uma determinada trajetória (ou caminho) ou que o mesmo estabilize em uma dada postura (posição e orientação) de referência. Para esta última tarefa, existem algumas limitações apresentadas por Brockett [8] em que um sistema não holonômico sem deriva<sup>3</sup> não pode ser estabilizado por meio de uma realimentação de estados suave (infinitamente diferenciável) e invariante no tempo. Entretanto, leis de controle *variantes no tempo* ou *descontínuas* podem resolver este problema, como desenvolvido em, por exemplo, [17, 32, 36, 42, 43, 48].

As funções desempenhadas por um robô móvel para que o mesmo possua características de locomoção autônoma pode ser esquematizado, de uma forma geral, como mostrado na Figura 1.6

---

<sup>3</sup>Do inglês, *drift*. O sistema  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  é dito sem deriva quando  $f(x) = 0$ .

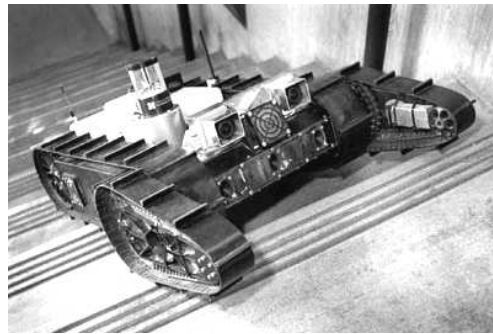


Figura 1.3: O robô-lagarta URBIE, subindo uma escada.



Figura 1.4: Robô dotado de pernas, capaz de se locomover em ambientes não estruturados, como por exemplo um vulcão.

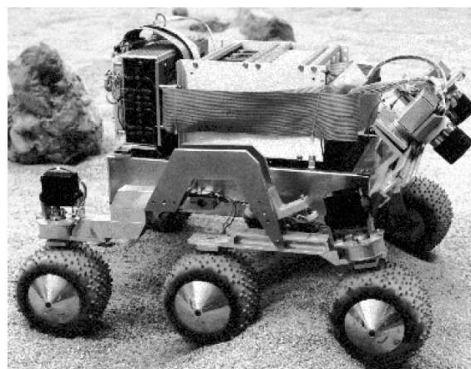


Figura 1.5: Robô móvel dotado de rodas.

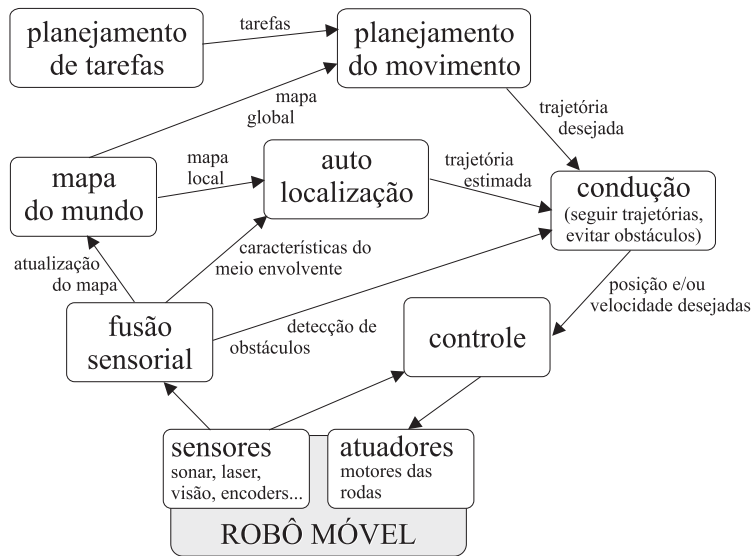


Figura 1.6: *Funções desempenhadas por um robô móvel autônomo.*

[34].

Este trabalho trata basicamente de um estudo da modelagem e de técnicas de controle aplicadas a robôs móveis dotados de rodas e sujeitos a restrições não holonômicas. Importantes trabalhos existentes na literatura se destacam: Campion et al. [9, 11, 12], Barraquand e Latombe [5], Kolmanovsky e McClamroch [26], Bloch et al. [7] e Canudas de Wit et al. [14]. Até meados da década de 90, vários trabalhos foram desenvolvidos tratando da modelagem cinemática e dinâmica de robôs móveis [5, 47], pesquisa que culminou com o artigo de Campion et al. [12], onde o assunto é tratado de forma sistemática. É mostrado que, para uma grande classe de possíveis configurações, os robôs móveis dotados de rodas podem ser classificados em cinco tipos distintos, caracterizados por estruturas genéricas das equações diferenciais dos modelos matemáticos. Paralelamente, trabalhos tratando do controle destes sistemas foram desenvolvidos, sendo motivante para isto os artigos de Bloch et al. [6, 7]. Uma revisão completa pode ser encontrada em [26]. Atualmente, esforços estão concentrados em métodos robustos e adaptativos, considerando controle cinemático e dinâmico para a estabilização em uma trajetória ou caminho e em um ponto de equilíbrio [27, 28, 21, 32].

Este documento está organizado como segue: no Capítulo 2 é dada uma breve descrição matemática de sistemas não holonômicos. No capítulo seguinte é apresentada a descrição estrutural de robôs móveis, considerando a sua cinemática e dinâmica, com base no trabalho desenvolvido por Campion et al. em [12]. No Capítulo 4 é feito um estudo das técnicas de controle encontradas na literatura. No capítulo seguinte é dado como exemplo o desenvolvimento de equações para a cinemática e a dinâmica de um robô móvel dotado de rodas e com acionamento diferencial. É apresentado também algumas técnicas de controle para este tipo de robô. O trabalho termina então com a conclusão e com sugestões para trabalhos futuros.



## Capítulo 2

# Sistemas Mecânicos Não Holonômicos

### 2.1 Introdução

Em muitos casos, o movimento de sistemas mecânicos é submetido a várias restrições que são permanentemente satisfeitas durante este movimento, e que tomam a forma de relações algébricas entre posições e velocidades de pontos particulares do sistema [10]. Seja então um sistema mecânico de ordem  $n$  representado pelas coordenadas generalizadas  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Pode-se ter assim dois tipos distintos de restrições:

**Restrições geométricas:** são representadas por relações analíticas entre as coordenadas generalizadas  $q$  de um sistema mecânico, como:

$$f_i(q_1, \dots, q_n; t) = 0 \quad i = 1 \dots, m \quad (2.1)$$

Quando o sistema é submetido a  $m$  restrições geométricas independentes,  $m$  coordenadas generalizadas podem ser eliminadas e  $n - m$  coordenadas são suficientes para fornecer uma total descrição da configuração do sistema.

**Restrições cinemáticas:** São representadas por relações analíticas entre as coordenadas  $q$  e as velocidades  $\dot{q}$ , como:

$$f_i(q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n; t) = 0 \quad i = 1 \dots, m$$

Na maioria dos casos, estas restrições são lineares com respeito às velocidades generalizadas. Ao contrário das restrições geométricas, restrições cinemáticas não necessariamente levam à eliminação de coordenadas generalizadas da descrição do sistema. Como será visto, esta eliminação apenas é possível quando a restrição é *holonômica*, ou integrável, e pode ser reduzida para a forma da equação (2.1).

Um exemplo clássico de um sistema mecânico não holonômico é um disco rolando em um plano horizontal, conforme uma trajetória  $s$ , sem escorregamento (*derrapagem*), conforme Figura 2.1.

As coordenadas que descrevem o movimento são: posição, dada pelos eixos  $x$  e  $y$ , orientação

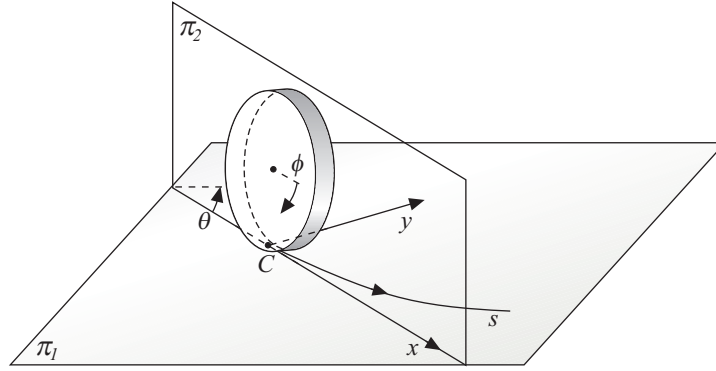


Figura 2.1: *Exemplo clássico de um sistema não holonômico: um disco rolando em um plano.*

dada pelo ângulo  $\theta$  e o ângulo de rotação  $\phi$ .  $\pi_1$  é o espaço de configuração e  $\pi_2$  é o plano de rotação do disco. Por causa da restrição de que o disco não derrapa (a velocidade no ponto de contato  $C$  do disco com o plano  $\pi_1$  é zero), a magnitude da velocidade  $v$  do centro do disco é proporcional à velocidade angular  $\dot{\phi}$ :

$$v = r\dot{\phi},$$

onde  $r$  é o raio do disco. A direção da velocidade é perpendicular ao eixo de rotação do disco, isto é,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \sin \theta \\ \dot{y} &= -v \cos \theta\end{aligned}$$

Estas condições levam às seguintes restrições:

$$\begin{aligned}\dot{x} - r \sin \theta \dot{\phi} &= 0 \\ \dot{y} + r \cos \theta \dot{\phi} &= 0\end{aligned}$$

Estas restrições não podem ser integradas para encontrar uma restrição holonômica da forma  $f(x, y, \theta, \phi) = 0$ . Portanto são restrições *não holonômicas*.

Outro exemplo: um carro é um sistema mecânico não holonômico. Um desenho de um carro estacionando é mostrado na Figura 2.2. Na ausência de obstáculos, ele pode assumir qualquer configuração no plano. Logo, o espaço de configuração possui três graus de liberdade (dois para a posição um para a orientação). Entretanto, assumindo que a componente da velocidade ortogonal ao plano de rotação  $\pi_2$  das rodas é zero (na direção de  $y'$ ), a velocidade no ponto central entre duas rodas ativas (o ponto  $P$ ) é sempre tangente à orientação do carro (na direção de  $x'$ ). Com isso, o espaço das velocidades, em qualquer configuração, terá apenas dois graus de liberdade. Se não existissem restrições ao seu movimento, o caminho tomado para chegar à configuração final seria, por exemplo, o dado pela linha tracejada. Agora, considerando as restrições, o carro deve seguir uma trajetória como a mostrada pela linha contínua. Contudo, robôs omnidirecionais, que podem assumir qualquer postura instantaneamente, podem realizar a trajetória que para robôs com restrições seria impossível. Um exemplo deste tipo de robô encontra-se na Figura 3.6.

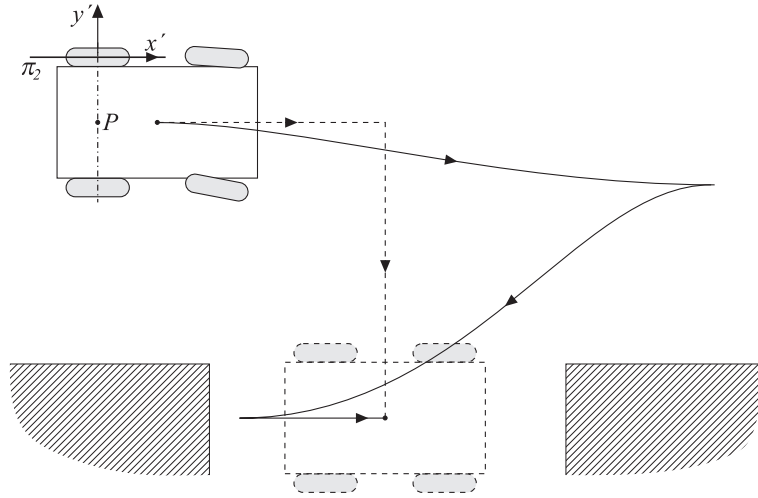


Figura 2.2: *Exemplo de trajetórias para um carro estacionando.*

## 2.2 Equações não holonômicas

A dedução de modelos para sistemas dinâmicos com restrições não holonômicas é feita com base em equações clássicas de Euler-Lagrange, sujeitas a um conjunto de restrições não integráveis [10] e envolvendo conceitos avançados de geometria diferencial e teoria de sistemas não lineares. Frente a isto, é dada nesta seção uma breve e superficial descrição da matemática envolvida em sistemas com estas restrições<sup>1</sup>. Restrições deste tipo são causadas geralmente quando existem contatos girantes (por exemplo, rodas) entre dois corpos rígidos e expressam que a velocidade relativa entre dois pontos de contato é zero [5]. Isto faz com que a dimensão do espaço das velocidades seja menor que a dimensão do espaço de configuração do sistema não holonômico.

Um sistema mecânico de ordem  $n$  cuja configuração pode ser descrita por um vetor

$$q = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n]^T$$

de coordenadas generalizadas, pode ser submetido a  $m$  restrições cinemáticas independentes ( $m < n$ ) da forma:

$$a_j(q)\dot{q} = 0, \quad (2.2)$$

onde  $a_1, a_2, \dots, a_m$  são campos vetoriais suaves pertencentes ao  $\mathbb{R}^n$ . Seja agora a matriz  $A(q)$  de dimensão  $(m \times n)$  formada por estes vetores, como segue:

$$A(q) = [a_1(q) \ a_2(q) \ \cdots \ a_m(q)]^T \quad (2.3)$$

Como as restrições são linearmente independentes,  $A(q)$  tem posto  $m$  para todo  $q \in \mathbb{R}^n$ . O número de graus de liberdade do sistema é definido como a diferença entre o número de coordenadas generalizadas e o número de restrições independentes ( $n - m$ ) [9].

<sup>1</sup>Uma descrição mais detalhada pode ser encontrada em [7].

Das equações (2.2) e (2.3), vê-se que a matriz  $A$  define uma base para o espaço nulo das velocidades lineares, ou seja,  $A^T(q)\dot{q} = 0$ . Define-se então uma distribuição suave  $\Delta$ , de dimensão  $n - m$ , associada às restrições em (2.2)<sup>2</sup>:

$$\Delta(q) = \mathcal{N}\{A(q)\}$$

As restrições são holonômicas ou completamente integráveis se e somente se  $\Delta$  é integrável, ou, pelo Teorema de Frobenius, se  $\Delta$  é *involutiva* (veja o Apêndice A). Do contrário as restrições são não holonômicas. Seja um conjunto  $\bar{\Delta}$  de dimensão  $n - \bar{m}$ , onde  $\bar{\Delta}$  é completamente integrável e  $\dim(\Delta) \leq \dim(\bar{\Delta})$ . Dependendo da dimensão de  $\bar{\Delta}$ , tem-se, conforme [10]:

- a) Se  $\bar{m} = m$ , o sistema é completamente holonômico, e todas as  $m$  restrições são integráveis. O espaço de configuração é caracterizado por apenas  $n - m$  coordenadas generalizadas.
- b) Se  $\bar{m} = 0$  (ou seja,  $\dim(\bar{\Delta}) = n$ ), as restrições são completamente não holonômicas. A caracterização do espaço de coordenadas é feita com  $n$  coordenadas generalizadas.
- c) Se  $0 < \bar{m} < m$ , é possível eliminar  $\bar{m}$  coordenadas do sistema. Então, o espaço de configuração tem dimensão  $n - \bar{m}$ .

Considerando que existam  $k$  restrições holonômicas independentes e continuamente diferenciáveis em um sistema, então  $k$  coordenadas generalizadas podem ser resolvidas em termos das outras  $n - k$  coordenadas [49].

Usando o formalismo de Euler-Lagrange, o comportamento dinâmico de um sistema mecânico não holonômico pode ser escrito como [37, 48, 13]:

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) = E(q)u - A^T(q)\lambda \quad (2.4)$$

$$A(q)\dot{q} = 0 \quad (2.5)$$

onde  $M(q)$  é uma matriz de inércia de ordem  $n$  simétrica e positiva-definida,  $V(q, \dot{q})$  é um vetor de ordem  $n$  de torques causados pelas forças centrífugas e de Coriolis,  $A(q)$  é a matriz de ordem  $(n \times m)$  de restrições não holonômicas,  $\lambda$  é um vetor de ordem  $m$  de multiplicadores de Lagrange associados às restrições (que podem ser interpretados fisicamente como sendo as forças lineares atuantes),  $E(q)$  é uma matriz de ordem  $(n \times r)$  e  $u$  é o vetor de forças externas aplicadas ao sistema, de ordem  $r$ .

As equações (2.4)–(2.5) fornecem uma completa descrição do comportamento dinâmico do sistema. Entretanto, é conveniente manipular algebricamente estas expressões com o objetivo de obter uma representação na forma de espaço de estados, onde as características associadas às restrições de deslocamento sejam mapeadas em um vetor de velocidades a ser utilizado para descrever o modelo [26]. Além disso, a representação das equações do modelo dinâmico na forma de espaço de estados é desejável para a determinação de estratégias de controle.

Seja então um conjunto de  $n - m$  vetores continuamente diferenciáveis e linearmente independentes  $s_1(q), \dots, s_{n-m}(q)$  que formam uma matriz  $S(q)$  de ordem  $((n - m) \times n)$  tal que  $S(q) =$

---

<sup>2</sup> $\mathcal{N}\{A\}$  significa o núcleo, ou o espaço nulo, de  $A$ .

$[s_1(q) \ s_2(q) \ \cdots \ s_{n-m}(q)]^T$ . Admitindo que  $S(q) \in \mathcal{N}\{A(q)\}$ , tem-se:

$$A(q)S(q) = 0 \quad (2.6)$$

As restrições (2.2) e (2.6) implicam na existência de um vetor integrável  $\eta(q, \dot{q})$ , de ordem  $n-m$ , que satisfaz

$$\dot{q} = S(q)\eta. \quad (2.7)$$

Pré-multiplicando (2.4) por  $S^T(q)$  e usando (2.6), pode-se eliminar os multiplicadores de Lagrange  $\lambda$ , pois  $S^T(q)A^T(q) = 0$ . Assim:

$$S^T(q)M(q)\ddot{q} + S^T(q)V(q, \dot{q}) = S^T(q)E(q)u \quad (2.8)$$

Diferenciando (2.7), tem-se  $\ddot{q} = S(q)\dot{\eta} + \dot{S}(q)\eta$ . substituindo em (2.8) e assumindo que a matriz  $S^T(q)E(q)$  tem posto completo<sup>3</sup>, tem-se que (ignorando os argumentos para simplificar as expressões)

$$S^TMS\dot{\eta} + S^TM\dot{S}\eta + S^TV = S^TEu$$

Pré-multiplicando por  $(S^TMS)^{-1}$ , chega-se a:

$$\dot{\eta} + (S^TMS)^{-1} [S^TM\dot{S}\eta + S^TV] = (S^TMS)^{-1}S^TEu$$

Escolhendo o vetor de estados como  $x = [q \ \eta]^T$  é possível representar as equações de movimento e de restrições que descrevem o sistema na forma de espaço de estados:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} S\eta \\ f_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \end{bmatrix} u, \quad (2.9)$$

onde

$$\begin{aligned} f_1 &= -(S^TMS)^{-1}(S^TM\dot{S}\eta + S^TV) \\ f_2 &= (S^TMS)^{-1}S^TE \end{aligned}$$

Assumindo que o número de atuadores de entrada é maior ou igual ao número de graus de liberdade do sistema mecânico ( $r \geq n-m$ ), e  $f_2$  possui posto  $n-m$ , é possível aplicar a seguinte realimentação não linear:

$$u = \left[ (S^TMS)^{-1}S^TE \right]^{-1} (v - f_1)$$

Assim, a equação em espaço de estados (2.9) pode ser reescrita da forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)v,$$

onde

$$f(x) = \begin{bmatrix} S(q)\eta \\ 0 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix},$$

onde  $I$  é uma matriz identidade de dimensão  $n-m$ .

---

<sup>3</sup>isto não é restritivo, visto que apenas significa que o sistema possui atuadores de forma que este seja realmente (fisicamente) controlável com estes atuadores [10].

## Capítulo 3

# Cinemática e Dinâmica de Robôs Móveis

### 3.1 Introdução

Um robô móvel é um exemplo típico de um sistema mecânico não holonômico. É considerado aqui um robô que se move em um plano horizontal, constituído de um corpo rígido e rodas não deformáveis. O contato entre as rodas e o plano é considerado puntual. Considera-se também que:

- as rodas *não derrapam* (ou seja, a componente da velocidade do ponto de contato da roda com o plano, no plano de rotação da roda, é zero) e
- as rodas *não deslizam* (ou seja, a componente da velocidade do ponto de contato, ortogonal ao plano de rotação da roda, é zero<sup>1</sup>)

O movimento do robô é realizado através de atuadores que fornece torque para a rotação e/ou orientação de algumas das rodas (rodas *ativas*).

Este capítulo é baseado no desenvolvimento feito por Campion et al. em [12], que trata o assunto da modelagem cinemática e dinâmica de robôs móveis dotados de rodas de uma forma sistemática. O objetivo com isto é mostrar as propriedades estruturais dos modelos cinemáticos e dinâmicos, levando em conta as restrições que os robôs sofrem em seu movimento. É mostrado também que, dentre os tipos de robôs considerados (os quais englobam boa parte dos robôs comercialmente disponíveis), estes podem ser divididos essencialmente em cinco classes distintas.

Os modelos de robôs móveis podem ser divididos em quatro tipos:

- a) *modelo cinemático de postura*: é o modelo mais simples capaz de descrever um robô móvel globalmente. É visto que em todas as as cinco classes, este modelo tem uma estrutura genérica, que permite um melhor entendimento das propriedades de locomoção do robô;

---

<sup>1</sup>Também pode ser dito que a velocidade no centro de massa do robô é ortogonal ao eixo que liga as duas rodas ativas [26].

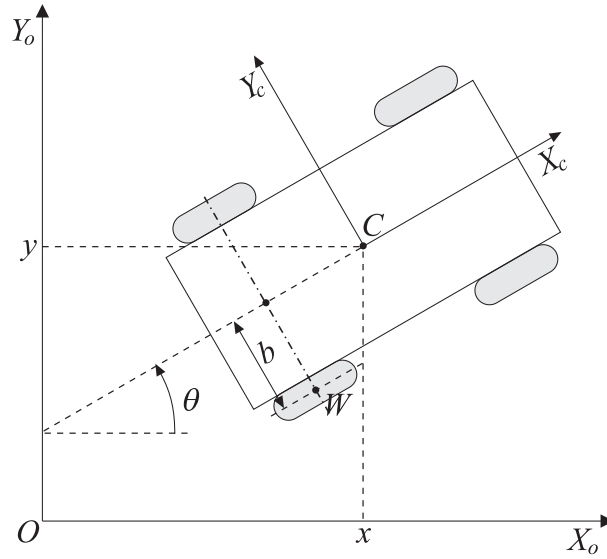


Figura 3.1: Sistemas de coordenadas de um robô dotado de rodas.

- b) *modelo cinemático de configuração*: usado para a análise do comportamento do robô conforme a teoria de sistemas não holonômicos;
- c) *modelo dinâmico de configuração*: é o modelo mais geral. Dá uma descrição completa da dinâmica do sistema incluindo as forças fornecidas pelos atuadores;
- d) *modelo dinâmico de postura*: equivalente ao modelo dinâmico de configuração. Útil para analisar propriedades como *irreduzibilidade*, *controlabilidade* e *estabilizabilidade*.

### 3.2 Cinemática de robôs móveis

A configuração (posição e orientação) do robô é descrito conforme a Figura 3.1. Define-se um sistema de coordenadas global  $\{O, X_o, Y_o\}$  e um sistema de coordenadas móvel, associado ao centro de massa do robô  $\{C, X_c, Y_c\}$ . Então, a configuração do robô com relação ao sistema global pode ser dada por

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix},$$

onde  $\theta$  é a orientação do robô com relação ao eixo  $X_o$ . A matriz de rotação que leva do sistema global para o sistema do centro do robô, ou seja,  $\xi_c = R_O^C \xi$ , é dada por:

$$R_O^C = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A fim de equacionar as restrições com respeito ao movimento do robô, precisa-se fazer uma descrição das rodas do mesmo, como segue.

### 3.3 Descrição das rodas

Assume-se aqui que o plano de cada roda permanece vertical e as mesmas possuem rotação em torno de seu eixo horizontal, onde a orientação deste com relação ao sistema de coordenadas do robô pode ser fixa ou variável. Duas classes de rodas podem ser explicitadas: as rodas *convencionais* e as *universais*, ou *suecas*. Para as rodas convencionais existem duas restrições com relação ao plano de rolamento, ou seja, as rodas *não derrapam* e *não deslizam*. Isto significa que, no ponto de contato da roda com o plano, as componentes paralela e ortogonal da velocidade são nulas. Para as rodas universais, apenas uma destas restrições é satisfeita, que é a de rotação pura da roda (não derrapam).

Agora então será feita a descrição matemática do movimento de cada tipo de roda.

- **Rodas convencionais fixas**

Neste caso, o centro da roda, denotado  $W$ , é fixo. Associa-se a este ponto o sistema de coordenadas  $\{W, X_w, Y_w\}$ . A posição deste ponto em relação ao sistema  $\{C, X_c, Y_c\}$  do robô é dado em coordenadas polares por  $(l, \alpha)$ , conforme Figura 3.2. A orientação do plano da roda com relação a  $l$  é constante e dada pelo ângulo  $\beta$ . A rotação da roda em torno de seu eixo horizontal é dado por  $\varphi(t)$  e o raio da roda é dado por  $r$ .

A velocidade do robô em relação ao sistema de coordenadas inercial, descrita com relação ao sistema do robô, é dada por:

$$\dot{\xi}_c = R_O^C \dot{\xi}$$

Descrevendo esta velocidade em relação ao sistema  $\{W, X_w, Y_w\}$ , cuja origem é o centro da roda, tem-se<sup>2</sup>:

$$\dot{\xi}_w = R_C^W \dot{\xi}_c + l_w \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_C^W \dot{\xi}_c, \quad (3.1)$$

onde  $l_w$  é o braço de giro e  $R_C^W$  é a matriz de rotação entre o centro da roda e o centro de massa do robô, como segue:

$$l_w = \begin{bmatrix} -l \sin \beta \\ -l \cos \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$R_C^W = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

---

<sup>2</sup> $A \times B$  significa o produto vetorial entre  $A$  e  $B$ .



Sendo que  $\psi = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}$ , pode-se escrever a equação (3.3) como:

$$R_C^W = \begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) & 0 \\ \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Logo, substituindo as equações (3.2) e (3.4) em (3.1), temos que a velocidade da roda com relação ao centro da mesma é dada por:

$$\dot{\xi}_w = \begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) & -l \cos \beta \\ \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l \sin \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_O^C \dot{\xi}$$

Como  $\dot{\xi}_w = [r\dot{\varphi} \ 0 \ \dot{\theta}]^T$ , pode-se escrever as restrições do movimento do robô com respeito a este tipo de roda como:

$$[-\sin(\alpha + \beta) \ \cos(\alpha + \beta) \ l \cos \beta] R_O^C \dot{\xi} + r\dot{\varphi} = 0 \quad (3.5)$$

$$[\cos(\alpha + \beta) \ \sin(\alpha + \beta) \ l \sin \beta] R_O^C \dot{\xi} = 0, \quad (3.6)$$

onde (3.5) representa a restrição do movimento ao longo do plano da roda e (3.6) representa a restrição do movimento ortogonal ao plano da roda.

- **Rodas convencionais orientáveis centradas**

A descrição matemática para este tipo de roda é análoga à desenvolvida para as rodas convencionais fixas. A diferença é que agora a orientação do plano da roda, dada pelo ângulo  $\beta$ , não é mais fixa. As equações de restrição são idênticas às apresentadas anteriormente, pelas equações (3.5) e (3.6).

- **Rodas convencionais orientáveis não centradas**

A particularidade desta roda é que o seu centro de rotação não passa pelo centro da roda, como vê-se na Figura 3.3. Neste caso, as equações que descrevem precisam de mais parâmetros. O centro da roda é dado por  $W$ , que é conectado ao corpo do robô por uma haste rígida  $AW$

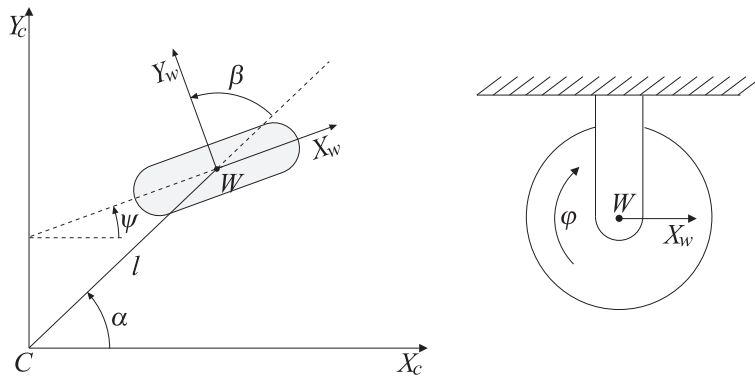


Figura 3.2: Roda convencional fixa em seu sistema de coordenadas.

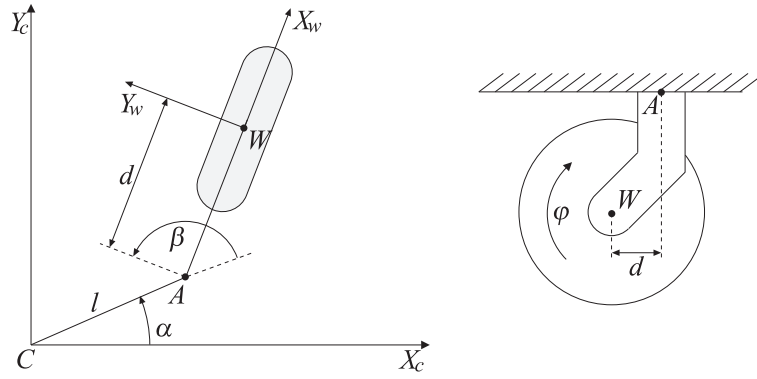


Figura 3.3: Roda convencional orientável não centrada e seu sistema de coordenadas.

de comprimento constante  $d$ . O ponto  $W$  pode rotacionar em torno do eixo vertical no ponto fixo  $A$ , especificado em coordenadas polares por  $(l, \alpha)$ . O plano da roda é alinhado ao longo de  $AW$ .

A posição da roda é descrita por quatro constantes,  $\alpha$ ,  $l$ ,  $r$  e  $d$  e seu movimento por dois ângulos,  $\beta(t)$  e  $\varphi(t)$ . Com isto, temos as seguintes equações representando as restrições ao movimento para este tipo de roda:

$$[-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l \cos \beta] R_O^C \dot{\xi} + r \dot{\varphi} = 0 \quad (3.7)$$

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad d + l \sin \beta] R_O^C \dot{\xi} + d \dot{\beta} = 0, \quad (3.8)$$

Nota-se que as equações são bastante semelhantes com as dadas em (3.5) e (3.6) para as rodas convencionais fixas.

#### • Rodas universais

A posição da roda universal (ou roda *sueca*) com relação ao robô é descrita por três parâmetros constantes,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $l$ . Um parâmetro adicional é necessário para determinar a direção, com respeito ao plano da roda, da componente nula da velocidade no ponto de contato da roda com o plano de rolagem, representado pelo ângulo  $\gamma$ , conforme a Figura 3.4.

A orientação da roda com relação ao sistema de coordenadas do robô pode ser escrita como  $\psi = \alpha + \beta + \gamma - \frac{\pi}{2}$ . Então temos as seguintes equações:

$$l_w = \begin{bmatrix} -l \sin(\beta + \gamma) \\ -l \cos(\beta + \gamma) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_O^W = \begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta + \gamma) & -\cos(\alpha + \beta + \gamma) & 0 \\ \cos(\alpha + \beta + \gamma) & \sin(\alpha + \beta + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

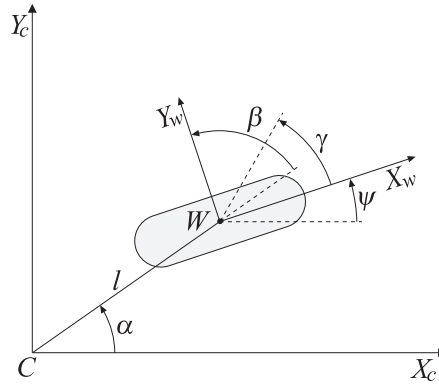


Figura 3.4: Roda universal e seu sistema de coordenadas.

Agora, o vetor de velocidade  $\dot{\xi}_w$  é diferente dos casos anteriores, pois a restrição de *não deslizamento* das rodas não existe mais (a não ser quando  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , pois assim o movimento desta roda seria idêntico ao da roda convencional fixa<sup>3</sup>). Então:

$$\dot{\xi}_w = [r\dot{\varphi} \cos \gamma \quad * \quad \dot{\theta}]^T,$$

onde \* não é conhecido, mas não será necessário para a determinação da restrições.

Usando novamente a equação (3.1), temos a seguinte restrição para o movimento do robô referente à roda universal:

$$[-\sin(\alpha + \beta + \gamma) \quad \cos(\alpha + \beta + \gamma) \quad l \cos(\beta + \gamma)] R_O^C \dot{\xi} + r \cos \gamma \dot{\varphi} = 0 \quad (3.9)$$

### 3.4 Restrições à mobilidade de um robô móvel

Considera-se agora um robô equipado com  $N$  rodas dos quatro tipos descritos acima, conforme a seguinte expressão:

$$N = N_f + N_c + N_{oc} + N_{sw}, \quad (3.10)$$

onde  $N_f$  é o número de rodas convencionais fixas,  $N_c$  é o número de rodas orientáveis centradas,  $N_{oc}$  é o número de rodas orientáveis não centradas e  $N_{sw}$  é o número de rodas universais. Os subscritos são então assim definidos:  $f$  para rodas convencionais fixas,  $c$  para rodas orientáveis centradas,  $oc$  para rodas orientáveis não centradas e  $sw$  para rodas universais.

A configuração do robô é completamente descrita pelos seguintes vetores de coordenadas:

- *Coordenadas de postura* (posição no plano de rolagem):

$$\xi(t) \triangleq [x(t) \quad y(t) \quad \theta(t)]^T;$$

- *Coordenadas angulares*:  $\beta_c(t)$  para rodas orientáveis centradas e  $\beta_{oc}(t)$  para rodas orientáveis não centradas;

<sup>3</sup>o valor  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  significa que a direção da componente nula da velocidade é ortogonal ao plano da roda.

- *Coordenadas de rotação* (rotação da roda em torno do eixo horizontal de rotação):

$$\varphi(t) \triangleq [\varphi_f^T(t) \ \varphi_c^T(t) \ \varphi_{oc}^T(t) \ \varphi_{sw}^T(t)]^T$$

Então, a postura completa do robô é dada pelas seguintes *coordenadas de configuração*:  $\xi$ ,  $\beta_c$ ,  $\beta_{oc}$  e  $\varphi$ , e o número total de coordenadas de configuração será  $N_f + 2N_c + 2N_{oc} + N_{sw} + 3$ .

Com as notações expostas acima, pode-se escrever as restrições, de uma forma generalizada, como:

$$J_1(\beta_c, \beta_{oc}) R_O^C \dot{\xi} + J_2 \dot{\varphi} = 0 \quad (3.11)$$

$$C_1(\beta_c, \beta_{oc}) R_O^C \dot{\xi} + C_2 \dot{\beta}_{oc} = 0 \quad (3.12)$$

com as seguintes definições:

$$J_1(\beta_c, \beta_{oc}) \triangleq \begin{bmatrix} J_{1f} \\ J_{1c}(\beta_c) \\ J_{1oc}(\beta_{oc}) \\ J_{1sw} \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

onde  $J_{1f}$ ,  $J_{1c}$ ,  $J_{oc}$  e  $J_{sw}$  são, respectivamente, matrizes de dimensão  $(N_f \times 3)$ ,  $(N_c \times 3)$ ,  $(N_{oc} \times 3)$  e  $(N_{sw} \times 3)$ , cujas formas são derivadas das restrições dadas pelas equações (3.5) (para rodas convencionais fixas e orientáveis centradas), (3.7) e (3.9).  $J_2$  é uma matriz constante de dimensão  $(N \times N)$  cujos elementos na diagonal principal são os raios das rodas, exceto pelos raios das rodas universais, que são multiplicados por  $\cos \gamma$ .

$$C_1(\beta_c, \beta_{oc}) \triangleq \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1c}(\beta_c) \\ C_{1oc}(\beta_{oc}) \end{bmatrix} \quad C_2 \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{2oc} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

onde  $C_{1f}$ ,  $C_{1c}$  e  $C_{1oc}$  são, respectivamente, matrizes de dimensão  $(N_f \times 3)$ ,  $(N_c \times 3)$  e  $(N_{oc})$  cujas colunas são obtidas das equações (3.6) (para rodas convencionais fixas e orientáveis centradas) e (3.8).  $C_{2oc}$  é uma matriz onde os elementos da diagonal principal são iguais a  $d$  para as rodas orientáveis não centradas.

Sejam agora as  $(N_f + N_c)$  restrições dadas por (3.12), e escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C_{1f} R_O^C \dot{\xi} &= 0 \\ C_{1c}(\beta_c) R_O^C \dot{\xi} &= 0 \end{aligned}$$

As equações acima podem ser escritas de uma forma mais compacta como:

$$C_1^*(\beta_c) R_O^C \dot{\xi} = 0, \quad (3.15)$$

onde  $C_1^*(\beta_c) = [C_{1f} \ C_{1c}(\beta_c)]^T$ , de dimensão  $((N_f + N_c) \times 3)$ . Portanto, o vetor  $R_O^C \dot{\xi}$  pertence ao espaço nulo da matriz  $C_1^*(\beta_c)$ , ou seja,

$$R_O^C \dot{\xi} \in \mathcal{N}\{C_1^*(\beta_c)\}$$

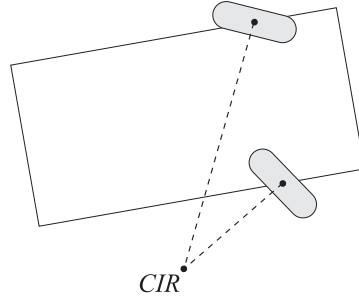


Figura 3.5: Exemplo de um robô móvel e seu centro instantâneo de rotação (*CIR*).

Da equação (3.15), vê-se que<sup>4</sup>  $\rho\{C_1^*(\beta_c)\} \leq 3$ . Se  $\rho\{C_1^*(\beta_c)\} = 3$ ,  $R_O^C \dot{\xi} = 0$ , o que impossibilita qualquer movimento do robô no plano, pois  $\dot{\xi} = 0$ . Portanto, a mobilidade do robô está relacionada ao posto de  $C_1^*(\beta_c)$ , e obviamente este valor depende da concepção do robô. Neste sentido, tem-se a seguinte definição:

**Definição 1.**

Define-se o grau de mobilidade  $\delta_m$  de um robô como

$$\begin{aligned}\delta_m &= \dim(\mathcal{N}\{C_1^*(\beta_c)\}) \\ &= 3 - \rho\{C_1^*(\beta_c)\}\end{aligned}$$

□

É examinado agora o caso em que  $\rho\{C_{1f}\} = 2$ , o que implica o robô ter ao menos duas rodas fixas e, se tiver mais que duas, os seus eixos são concorrentes com o *centro instantâneo de rotação*, ou *CIR* (Figura 3.5), cuja posição em relação ao corpo do robô é fixa. Neste caso, o único movimento possível é a rotação em torno do *CIR* fixo. Obviamente esta restrição não pode ser aceita na prática, sendo necessário que o posto de  $C_{1f}$  seja menor que 2, ou seja,  $\rho\{C_{1f}\} \leq 1$ .

Assume-se também que o robô é *não degenerado*, como segue:

**Proposição 1.**

Um robô é não degenerado se:

- i)  $\rho\{C_{1f}\} \leq 1$ ;
- ii)  $\rho\{C_1^*(\beta_c)\} = \rho\{C_{1f}\} + \rho\{C_{1c}(\beta_c)\} \leq 2$

◇

A proposição acima é equivalente às seguintes condições:

1. Se o robô tem mais que uma roda convencional fixa, então estas estão em um único e comum eixo de rotação;

---

<sup>4</sup> $\rho\{A\}$  significa o posto, ou *rank*, de A.

2. Os centros de rotação das rodas orientáveis centradas não pertencem ao eixo comum das rodas fixas;
3. O número  $\rho\{C_{1c}(\beta_c)\} \leq 2$  é o número de rodas orientáveis centradas que podem ser orientadas independentemente, a fim de *guiar* o robô. Desta forma é definido o *grau de dirigibilidade*.

**Definição 2.**

O grau de dirigibilidade  $\delta_s$  de um robô móvel é dado por:

$$\delta_s = \rho\{C_{1c}(\beta_c)\}$$

□

Se um robô possuir mais que  $\delta_s$  rodas orientáveis centradas ( $N_c > \delta_s$ ), o movimento destas rodas extras pode ser coordenado para garantir a existência do centro instantâneo de rotação *CIR*.

Com isto, as estruturas de interesse para um robô móvel podem então ser descritas em cinco casos, conforme a configuração das rodas:

1. o grau de mobilidade  $\delta_m$  satisfaz  $1 \leq \delta_m \leq 3$  (o limite superior é óbvio. O limite inferior significa que considera-se apenas casos onde o movimento do robô é possível, ou seja,  $\delta_m \neq 0$ );
2. o grau de dirigibilidade satisfaz  $0 \leq \delta_s \leq 2$  ( $\delta_s = 2$  acontece apenas para robôs sem rodas fixas ( $N_f = 0$ ), e o limite inferior acontece apenas para robôs sem rodas orientáveis centradas, ou seja,  $N_c = 0$ );
3. A seguinte inequação é satisfeita:  $2 \leq \delta_m + \delta_s \leq 3$  (o caso  $\delta_m + \delta_s = 1$  não é aceitável, pois isto corresponde à rotação do robô em torno de um *CIR* fixo. Os casos  $\delta_m \geq 2$  e  $\delta_s = 2$  são excluídos, pois  $\delta_s = 2$  implica em  $\delta_m = 1$ ).

Então, considerando as condições anteriores, existem apenas cinco classes de robôs dotados de rodas, correspondentes a cinco pares de valores para  $\delta_m$  e  $\delta_s$ , de acordo com a Tabela 3.1 a seguir.

Tabela 3.1: Valores aceitáveis para  $\delta_m$  e  $\delta_s$ .

$\delta_m$	3	2	2	1	1
$\delta_s$	0	0	1	1	2

Na sequência, cada estrutura será denominada *robô móvel da classe*  $(\delta_m, \delta_s)$ .

As principais características de cada classe serão agora explicitadas.

- **Classe (3,0)**  $\delta_m = \dim(\mathcal{N}\{C_1^*(\beta_c)\}) = 3$ , e  $\delta_s = 0$ . Estes robôs não possuem rodas convencionais fixas ( $N_f = 0$ ) e rodas orientáveis centradas ( $N_c = 0$ ). São os chamados robôs

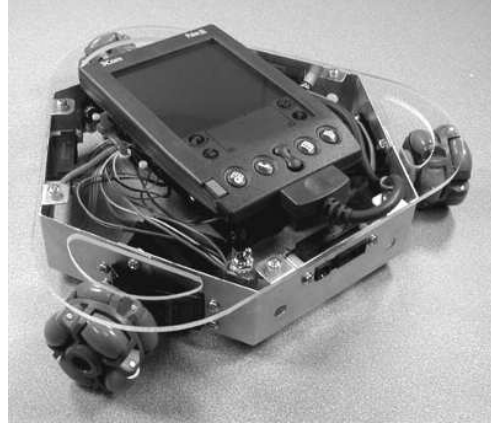


Figura 3.6: Exemplo de um robô omnidirecional, com três rodas universais.

*omnidirecionais*, pois têm uma completa mobilidade no plano, significando que podem se mover para qualquer ponto sem a necessidade de se reorientar. Em contraste, as outras quatro classes de robôs possuem uma mobilidade restrita ( $\delta_m \leq 3$ ). Um exemplo deste tipo de robô é mostrado na Figura 3.6<sup>5</sup>.

- **Classe (2,0)**  $\delta_m = \dim(\mathcal{N}\{C_1^*(\beta_c)\}) = \dim(\mathcal{N}\{C_{1f}\}) = 2$ , e  $\delta_s = 0$ . Estes robôs não possuem nenhuma roda orientável centrada ( $N_c = 0$ ), e possuem ou uma roda convencional fixa ou várias rodas convencionais fixas em um eixo comum de rotação. Esta classe de robô é bastante comum na literatura, onde geralmente são utilizados robôs com acionamento diferencial.
- **Classe (2,1)**  $\delta_m = \dim(\mathcal{N}\{C_1^*(\beta_c)\}) = \dim(\mathcal{N}\{C_{1c}(\beta_c)\}) = 2$ , e  $\delta_s = 1$ . Estes robôs não possuem rodas convencionais fixas ( $N_f = 0$ ) e possuem pelo menos uma roda orientável centrada ( $N_c \geq 1$ ). Se há mais de uma roda orientável centrada, as orientações devem ser coordenadas de modo que  $\rho\{C_{1c}(\beta_c)\} = \delta_s = 1$ .
- **Classe (1,1)**  $\delta_m = \dim(\mathcal{N}\{C_1^*(\beta_c)\}) = 1$ , e  $\delta_s = 1$ . Este tipo de robô possui uma ou várias rodas convencionais fixas em um eixo comum de rotação. Possuem também uma ou várias rodas orientáveis centradas, com a condição que uma destas não está localizada no eixo das rodas convencionais fixas e as suas orientações devem ser coordenadas de forma que  $\rho\{C_{1c}(\beta_c)\} = \delta_s = 1$ . A velocidade  $\dot{\xi}(t)$  pertence a uma distribuição unidimensional parametrizada pelo ângulo de orientação de alguma roda orientável centrada. Um exemplo é mostrado na Figura 3.7 [13].
- **Classe (1,2)**  $\delta_m = \dim(\mathcal{N}\{C_1^*(\beta_c)\}) = \dim(\mathcal{N}\{C_{1c}(\beta_c)\}) = 1$ , e  $\delta_s = 2$ . Este tipo de robô não possui roda convencional fixa ( $N_f = 0$ ). Possui pelo menos duas rodas orientáveis centradas ( $N_c \geq 2$ ). Se há mais que duas rodas orientáveis centradas, as orientações destas rodas devem ser coordenadas de forma que  $\rho\{C_{1c}(\beta_c)\} = \delta_s = 2$ . A velocidade  $\dot{\xi}(t)$  pertence a uma distribuição unidimensional parametrizada pela orientação de duas rodas orientáveis centradas arbitrariamente escolhidas.

<sup>5</sup>foto retirada de <http://www.acroname.com> em dezembro de 2003.



Figura 3.7: Exemplo de um robô do tipo (1,1).

### 3.5 Modelo cinemático de postura

Foi visto que, qualquer que seja o tipo do robô, a velocidade  $\dot{\xi}(t)$  pertence a uma distribuição  $\Delta_c$  de dimensão  $(3 \times \delta_m)$ , definida como

$$\dot{\xi}(t) \in \Delta_c \triangleq \text{span}\{\text{col}(R_C^O \Sigma(\beta_c))\}, \quad \forall t,$$

onde as colunas da matriz  $\Sigma(\beta_c)$  formam uma base para o núcleo de  $[C_1^*(\beta_c)]$ , ou seja,  $\mathcal{N}\{[C_1^*(\beta_c)]\} = \text{span}\{\text{col}(\Sigma(\beta_c))\}$  e lembrando que  $(R_O^C)^{-1} = (R_O^C)^T = R_C^O$ . Então, para todo  $t$ , existe um vetor variante no tempo  $\eta(t)$ , de dimensão  $(1 \times \delta_m)$ , tal que:

$$\dot{\xi}(t) = R_C^O \Sigma(\beta_c) \eta(t) \quad (3.16)$$

A dimensão da distribuição  $\Delta_c$  e do vetor  $\eta(t)$  é o grau de mobilidade  $\delta_m$  do robô. Para o caso onde o robo não possui rodas orientáveis centradas ( $\delta_s=0$ ), a matriz  $\Delta$  é constante e a expressão (3.16) reduz-se a

$$\dot{\xi}(t) = R_C^O \Sigma \eta(t) \quad (3.17)$$

No caso em que  $\delta_s \geq 1$ , a matriz  $\Delta$  depende explicitamente das coordenadas angulares  $\beta_c$  e a expressão (3.16) pode ser aumentada, como segue:

$$\dot{\xi}(t) = R_C^O \Sigma(\beta_c) \eta(t) \quad (3.18)$$

$$\dot{\beta}_c(t) = \zeta(t) \quad (3.19)$$

As expressões (3.17) ou (3.18)–(3.19) podem ser pensadas como uma representação em espaço de estados do sistema (chamado *modelo cinemático de postura*), com as coordenadas de postura  $\xi$  e possivelmente as coordenadas angulares  $\beta_c$  como variáveis de estado, enquanto  $\eta$  e  $\zeta$  podem ser interpretadas como entradas de controle. Entretanto, esta representação precisa ser tomada com cautela, pois na verdade as entradas de controle serão os torques fornecidos aos motores. O modelo cinemático em espaço de estados é portanto apenas um subsistema do modelo dinâmico geral, que será apresentado mais adiante.



Considerando então o vetor de estados  $z \triangleq [\xi \ \beta_c]^T$  e o vetor de entrada  $u \triangleq [\eta \ \zeta]^T$ , pode-se reescrever (3.18)–(3.19) na seguinte forma compacta:

$$\dot{z} = B(z)u, \quad (3.20)$$

onde

$$B(z) \triangleq \begin{bmatrix} R_C^O \Sigma(\beta_c) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

onde  $I$  é uma matriz identidade.

O modelo cinemático de postura para cada tipo de robô móvel é mostrado abaixo.

- **Classe (3,0):**

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = I$$

- **Classe (2,0):**

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Classe (2,1):**

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta + \beta_c) & 0 & 0 \\ \cos(\theta + \beta_c) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \zeta_1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma(\beta_c) = \begin{bmatrix} -\sin \beta_{c1} & 0 \\ \cos \beta_{c1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Classe (1,1)<sup>6</sup>:**

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \sin \theta \sin \beta_c & 0 \\ b \cos \theta \sin \beta_c & 0 \\ \cos \beta_c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \zeta_1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma(\beta_c) = \begin{bmatrix} 0 \\ b \sin \beta_c \\ \cos \beta_c \end{bmatrix}$$

- **Classe (1,2):**

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{c1} \\ \dot{\beta}_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b[\sin \beta_{c1} \cos(\theta + \beta_{c2}) + \sin \beta_{c2} \sin(\theta + \beta_{c1})] & 0 & 0 \\ b[\sin \beta_{c1} \cos(\theta + \beta_{c2}) + \sin \beta_{c2} \cos(\theta + \beta_{c1})] & 0 & 0 \\ \sin(\beta_{c2} - \beta_{c1}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma(\beta_c) = \begin{bmatrix} -2b \sin \beta_{c1} \sin \beta_{c2}, \\ b \sin(\beta_{c1} + \beta_{c2}) \\ \sin(\beta_{c2} - \beta_{c1}) \end{bmatrix}$$

---

<sup>6</sup> $b$  é a distância entre o centro da roda e o centro de rotação do corpo do robô. Veja Figura 3.1.

Para todo o robô móvel não degenerado, sempre é possível escolher um ponto de referência  $C$  e uma base  $\{X_c, Y_c\}$  de tal modo que o modelo cinemático de postura corresponda a um dos modelos acima, como segue.

- Para um robô da Classe (3,0), o ponto  $C$  e a base  $\{X_c, Y_c\}$  podem ser escolhidos arbitrariamente;
- Para um robô da Classe (2,0),  $C$  é escolhido como um ponto do eixo comum das rodas fixas, com  $X_c$  ao longo deste eixo;
- Para um robô da Classe (2,1),  $C$  é escolhido como o centro de alguma das rodas orientáveis centradas, com  $\{X_c, Y_c\}$  escolhida arbitrariamente;
- Para um robô da Classe (1,1),  $C$  é escolhido na intersecção do eixo das rodas fixas e da menor reta ligando este eixo e o centro de uma das rodas orientáveis centradas;
- Para um robô da Classe (1,2), escolhe-se duas rodas orientáveis centradas.  $C$  está a meia distância do centro destas duas rodas, com  $X_c$  alinhado ao longo da linha que une os dois centros.  $b$  é a distância entre o centro de uma destas rodas e o ponto  $C$ .

O modelo cinemático de postura da equação (3.20) permite uma melhor análise da *manobrabilidade* de cada classe de robô móvel. Em face disto, é feita a seguinte definição:

**Definição 3.**

O grau de manobrabilidade  $\delta_M$  é o número de graus de liberdade que podem ser manipulados pelas entradas  $\eta$  e  $\zeta$ , e é calculado como:

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s$$

□

Dois robôs com o mesmo  $\delta_M$ , mas diferentes  $\delta_m$ , não são equivalentes. Para robôs com  $\delta_M = 3$ , é possível alocar o centro instantâneo de rotação (*CIR*) livremente, como é o caso dos robôs omnidirecionais (Figura 3.6), os quais possuem máxima manobrabilidade. Similarmente, um robô com mesmo  $\delta_m$ , mas diferentes  $\delta_M$ , não são equivalentes.

**Propriedades do modelo cinemático de postura**

Serão mostradas agora importantes propriedades do modelo cinemático de postura (equação 3.20). Para maiores detalhes, consultar o Apêndice A.

**Irreduzibilidade:**

Um modelo em espaço de estados é *reduzível* se existe uma transformação de coordenadas de forma que alguma das novas coordenadas seja nula ao longo da trajetória do sistema. No caso do sistema não-linear (3.20), a reduzibilidade está relacionada com o conjunto involutivo  $\bar{\Delta}$  da distribuição  $\Delta$ , expressa em coordenadas locais como  $\Delta(z) \triangleq \text{span}\{\text{col}(B(z))\}$ , e pelo Teorema de Frobenius, o sistema é reduzível apenas se  $\dim(\bar{\Delta}) \leq \dim(z)$ . Com base nisto, tem-se a seguinte propriedade relacionada com a irreduzibilidade do modelo cinemático de postura dos robôs móveis:

**Propriedade 1.**

Para o modelo descrito por  $\dot{z} = B(z)u$ , tem-se que:

- a) a matriz  $B(z)$  tem posto completo, isto é,  $\rho\{B(z)\} = \delta_m + \delta_s, \forall z$ ;
- b) a distribuição involutiva  $\bar{\Delta} \triangleq \text{inv}(\text{span}\{\text{col}(B(z))\})$  possui máxima dimensão constante dada por  $\dim(\bar{\Delta}(z)) = 3 + \delta_s, \forall z$ .

Com base nesta propriedade, tem-se que o modelo cinemático de postura para robôs móveis é irreduzível.  $\triangle$

**Controlabilidade:**

Seja uma aproximação linear em torno de um estado de equilíbrio arbitrário  $\bar{z} \triangleq (\bar{\xi}, \bar{\beta}_c)$ , com velocidade nula ( $\bar{u} = 0$ ). Tem-se assim a seguinte propriedade:

**Propriedade 2.**

O posto de controlabilidade de um modelo cinemático de postura  $\dot{z} = B(z)u$  nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio é  $\delta_m + \delta_s$ . De fato, a aproximação linear em torno de  $(\bar{z}, \bar{u} = 0)$  é escrita como:

$$\frac{d}{dt}(z - \bar{z}) = B(\bar{z})u,$$

e segue-se que a matriz de controlabilidade reduz-se a  $B(\bar{z})$ , que tem posto  $\delta_m + \delta_s, \forall \bar{z}$ , conforme a Propriedade 1.  $\triangle$

Assim, tem-se que o modelo cinemático de postura  $\dot{z} = B(z)u$  de robôs móveis é sempre controlável, visto que a distribuição involutiva  $\bar{\Delta}(z)$  tem posto máximo constante, o que implica na controlabilidade para sistemas sem deriva<sup>7</sup>.

Na prática, isto significa que um robô móvel pode ser *guiado* de qualquer postura inicial  $\xi_0$  para qualquer postura final  $\xi_f$ , em um tempo finito, manipulando as entradas de controle  $u = [\eta \ \zeta]^T$ . Isto vale inclusive para robôs com mobilidade restrita ( $\delta_m \leq 3$ ).

**Linearizabilidade:**

Considera-se agora a existência de uma realimentação de controle  $u(z)$  que *lineariza* o robô em um estado particular  $z^*$ .

Para robôs omnidirecionais, a lei de controle

$$u(z) = B(z)^{-1}A(z - z^*),$$

com  $A$  arbitrária e *Hurwitz*<sup>8</sup>, é uma lei de controle suave e linearizante que estabiliza o estado do robô a  $z^*$  exponencialmente. Note que, para robôs omnidirecionais, a matriz  $B(z)$  é sempre inversível. De fato, o sistema em malha fechada é escrito como

$$\frac{d}{dt}(z - z^*) = A(z - z^*)$$

<sup>7</sup>vide Apêndice A para maiores detalhes em geometria diferencial.

<sup>8</sup>uma matriz é *Hurwitz* quando todos os autovetores desta matriz têm parte real negativa.

Robôs móveis com mobilidade restrita ( $\delta_M \leq 3$ ) não são completamente (*full state*) linearizáveis. Entretanto, pode-se definir um subsistema que pode ser linearizável por uma realimentação estática de controle (vide exemplo prático na Seção 5.3.1, ou ainda quando o modelo cinemático de postura é completamente linearizável por realimentação dinâmica de estados (Seção 5.4. Assim, tem-se as seguintes propriedades:

**Propriedade 3.**

- a) A dimensão do maior subsistema do modelo cinemático de postura que pode ser linearizável por realimentação estática é  $\delta_m + \delta_s$ ;
- b) O modelo cinemático de postura de robôs com mobilidade restrita é um sistema flat diferenciável. Isto implica que este sistema é completamente linearizável por realimentação dinâmica, com  $\eta$  entradas não nulas.

△

**Estabilizabilidade:**

Outro problema interessante é de se ter uma lei de controle suave que faz com que o robô vá de um estado  $z_0 = [\xi_0 \ \beta_{c0}]^T$  a um dado equilíbrio  $\bar{z} = [\bar{\xi} \ \bar{\beta}]^T$ , e fazer com que este equilíbrio seja atrativo e estável. Novamente, para robôs omnidirecionais o resultado é trivial, mas para robôs com mobilidade têm-se as seguintes propriedades:

**Propriedade 4.**

- a) Para robôs com mobilidade restrita o modelo cinemático de postura não é estabilizável por uma realimentação de estados contínua, estática e invariante  $u(z)$ .  
De fato, a condição necessária de Brockett [8] não é satisfeita: o mapeamento  $(z, u) \rightarrow B(z)u$  não leva à vizinhança do equilíbrio  $\bar{z} = [\bar{\xi}^T \ \bar{\beta}_c^T]^T$ ,  $\bar{u} = 0$ ;
- b) O modelo cinemático de postura é estabilizável por uma realimentação estática contínua e variante no tempo  $u(z, t)$ .

△

### 3.6 Modelo cinemático de configuração

Até agora, foram abordadas apenas as restrições relativas às rodas convencionais fixas e orientáveis centradas, expressas no sistema (3.15). O restante das restrições é agora usado para obter equações para as velocidades angulares e de rotação,  $\dot{\beta}_{oc}$  e  $\dot{\varphi}$ , que não aparecem no modelo cinemático de postura (3.18)–(3.19).

De (3.11)–(3.12), tem-se que:

$$\dot{\beta}_{oc} = D(\beta_{oc})\Sigma(\beta_c)\eta \quad (3.21)$$

$$\dot{\varphi} = E(\beta_c, \beta_{oc})\Sigma(\beta_c)\eta, \quad (3.22)$$

onde

$$\begin{aligned} D(\beta_{oc}) &\triangleq -C_{2oc}^{-1}C_{1oc}(\beta_{oc}) \\ E(\beta_c, \beta_{oc}) &\triangleq -J_2^{-1}J_1(\beta_c, \beta_{oc}) \end{aligned}$$

Definindo as coordenadas de configuração como:

$$q \triangleq [\xi^T \quad \beta_c^T \quad \beta_{oc}^T \quad \varphi^T]^T,$$

pode-se escrever uma expressão compacta para  $\dot{q}$ , de (3.18), (3.19), (3.21) e (3.22). Tem-se então o seguinte *modelo cinemático de configuração*:

$$\dot{q} = S(q)u, \quad (3.23)$$

onde

$$S(q) \triangleq \begin{bmatrix} R_C^O \Sigma(\beta_c) & 0 \\ 0 & I \\ D(\beta_{oc}) \Sigma(\beta_c) & 0 \\ E(\beta_c, \beta_{oc}) \Sigma(\beta_c) & 0 \end{bmatrix}, \quad u \triangleq \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

De forma análoga à desenvolvida anteriormente para o modelo cinemático de postura, a redutibilidade de (3.23) está diretamente relacionada à dimensão do conjunto involutivo da distribuição  $\Delta_1$ , tal que:

$$\Delta_1(q) \triangleq \text{span}\{\text{col}(S(q))\}$$

Então, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta_m + N_c &= \dim(\Delta_1) \leq \dim(\text{inv}(\Delta_1)) \leq \dim(q) \\ &= 3 + N_c + N_{oc} + N \end{aligned}$$

Com isto, formula-se a seguinte definição:

**Definição 4.**

O grau de não holonomicidade  $M$  de um robô móvel é dado por:

$$M = \dim(\text{inv}(\Delta_1)) - (\delta_m + N_c)$$

□

Este número representa a quantidade de restrições de velocidade que não são integráveis e não podem ser eliminadas. Este número depende particularmente da estrutura, e não tem relação com a classe do robô. Portanto, dois robôs pertencentes a uma mesma classe podem ter diferentes graus de não holonomicidade.

Por outro lado, para um conjunto particular de coordenadas generalizadas, o número de equações que podem ser eliminadas por integração (restrições holonômicas) é igual à diferença entre  $\dim(q)$  e  $\dim(\text{inv}(\Delta_1))$ .

Assim, tem-se a seguinte propriedade:

**Propriedade 5.**

- a) o modelo cinemático de configuração  $\dot{q} = S(q)u$  de um robô móvel dotado de rodas é não holonômico, isto é,  $M > 0$ , para todas as classes de robôs;
- b) O modelo cinemático de configuração de um robô móvel é redutível, isto é,  $\dim(q) > \dim(\text{inv}(\Delta_1))$ , para todas as classes de robôs.

△

**3.7 Modelo dinâmico de configuração**

O modelo dinâmico de configuração descreve as relações dinâmicas existentes entre as coordenadas de configuração  $\xi$ ,  $\beta_c$ ,  $\beta_{oc}$  e  $\varphi$  e os torques desenvolvidos pelos motores. Este modelo é constituído de seis tipos de equações de estados: uma para cada coordenada de configuração  $\xi$ ,  $\beta_c$ ,  $\varphi$ ,  $\beta_{oc}$ , e uma para cada coordenada interna,  $\eta$  e  $\zeta$ .

É assumido que o robô é equipado de motores que forçam a orientação das rodas orientáveis (coordenadas angulares  $\beta_c$  e  $\beta_{oc}$ ) e a rotação das rodas (coordenadas  $\varphi$ ). Os torques providos aos motores são:  $\tau_\varphi$  para a rotação das rodas,  $\tau_{oc}$  para a orientação das rodas não centradas e  $\tau_c$  para a orientação das rodas centradas.

Usando o formalismo de Lagrange, a dinâmica de robôs móveis é descrita pelas seguintes  $(3 + N_{oc} + N + N_c)$  equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = R_C^O J_1^T(\beta_c, \beta_{oc}) \lambda + R_C^O C_1^T(\beta_c, \beta_{oc}) \mu \quad (3.25)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}_{oc}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \beta_{oc}} = C_2^T \mu + \tau_{oc} \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = J_2^T \lambda + \tau_\varphi \quad (3.27)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}_c} \right) - \frac{\partial T}{\partial \beta_c} = \tau_c, \quad (3.28)$$

onde  $T$  representa a energia cinética e  $\lambda$ ,  $\mu$  representa os coeficientes de Lagrange associados às restrições (3.11) e (3.12), respectivamente.

Para eliminar os coeficientes de Lagrange, as três primeiras equações, (3.25), (3.26) e (3.27), são pré-multiplicadas por  $\Sigma^T(\beta_c) R_O^C$ ,  $\Sigma^T(\beta_c) D(\beta_{oc})$  e  $\Sigma^T(\beta_c) E(\beta_c, \beta_{oc})$ , respectivamente e somadas. Então, das expressões (3.21) e (3.22), tem-se que:

$$\Sigma^T(\beta_c) R_O^C [T]_\xi + D(\beta_{oc}) [T]_{\beta_{oc}} + E(\beta_c, \beta_{oc}) [T]_\varphi = \Sigma^T(\beta_c) \{ D^T(\beta_{oc}) \tau_{oc} + E^T(\beta_c, \beta_{oc}) \tau_\varphi \} \quad (3.29)$$

$$[T]_{\beta_c} = \tau_c \quad (3.30)$$

com a seguinte notação:

$$[T]_\psi \triangleq \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi}$$

A energia cinética de robôs móveis pode ser expressa como:

$$T = \dot{\xi}^T R_C^O \left[ M(\beta_{oc}) R_O^C \dot{\xi} + 2V(\beta_{oc}) \dot{\beta}_{oc} + 2W \dot{\beta}_c \right] + \dot{\beta}_{oc} I_{oc} \dot{\beta}_{oc} + \dot{\varphi} I_\varphi \dot{\varphi} + \dot{\beta}_c I_c \dot{\beta}_c$$

com definições apropriadas para as matrizes  $M(\beta_{oc})$ ,  $V(\beta_{oc})$ ,  $W$ ,  $I_{oc}$ ,  $I_\varphi$  e  $I_c$ , que são dependentes da distribuição de massa e dos momentos de inércia dos vários corpos rígidos (corpo e rodas) que constituem o robô. As equações de estado para  $\eta$  e  $\zeta$  são então obtidas substituindo a expressão da energia cinética  $T$  nas equações dinâmicas (3.29) e (3.30) e eliminando as velocidades  $\dot{\xi}$ ,  $\dot{\beta}_{oc}$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\beta}_c$  e as acelerações  $\ddot{\xi}$ ,  $\ddot{\beta}_{oc}$ ,  $\ddot{\varphi}$ ,  $\ddot{\beta}_c$  com o uso das equações cinemáticas (3.18), (3.19), (3.21), (3.22) e suas derivadas.

O modelo dinâmico de configuração em espaço de estados de robôs móveis tem então a seguinte forma geral:

$$\dot{\xi} = R_C^O \Sigma(\beta_c) \eta \quad (3.31)$$

$$\dot{\beta}_c = \zeta \quad (3.32)$$

$$\dot{\beta}_{oc} = D(\beta_{oc}) \Sigma(\beta_c) \eta \quad (3.33)$$

$$H_1(\beta_c, \beta_{oc}) \dot{\eta} + \Sigma^T(\beta_c) V(\beta_{oc}) \dot{\zeta} + f_1(\beta_c, \beta_{oc}, \eta, \zeta) = \Sigma^T(\beta_c) [D^T(\beta_{oc}) \tau_{oc} + E^T(\beta_c, \beta_{oc}) \tau_\varphi] \quad (3.34)$$

$$V^T(\beta_{oc}) \Sigma(\beta_c) \dot{\eta} + I_c \dot{\zeta} + f_2(\beta_c, \beta_{oc}, \eta, \zeta) = \tau_c \quad (3.35)$$

$$\dot{\varphi} = E(\beta_{oc}, \beta_c) \Sigma(\beta_c) \eta, \quad (3.36)$$

com

$$H_1(\beta_c, \beta_{oc}) \triangleq \Sigma^T(\beta_c) [M(\beta_{oc}) + D^T(\beta_{oc}) V^T(\beta_{oc}) + V(\beta_{oc}) D(\beta_{oc}) + D^T(\beta_{oc}) I_{oc} D(\beta_{oc}) + E^T(\beta_c, \beta_{oc}) I_\varphi E(\beta_c, \beta_{oc})] \Sigma(\beta_c)$$

### Configuração da motorização

Será explicitado agora as configurações de motores que levam à total manobrabilidade de robôs móveis, quando este número é limitado. No modelo dinâmico de configuração apresentado em (3.31)–(3.36), os vetores  $\tau_\varphi$ ,  $\tau_{oc}$  e  $\tau_c$  representam os torques que podem ser potencialmente aplicados às rodas dos robôs. Entretanto, na prática apenas o número mínimo de motores será usado, o que significa que algumas das componentes de  $\tau_\varphi$ ,  $\tau_{oc}$  e  $\tau_c$  serão nulas.

Todas as rodas orientáveis centradas precisam de um motor para a sua orientação, do contrário, estas desempenhariam apenas a função de rodas fixas. Conseqüentemente, o vetor  $\tau_c$  não pode possuir componentes identicamente nulos. Ainda, para garantir uma total mobilidade,  $N_m$  motores adicionais (com  $N_m > \delta_m$ ) para a rotação e/ou orientação de algumas das rodas seriam necessários. O vetor de torques desenvolvidos por estes motores é denotado como  $\tau_m$  e tem-se:

$$\begin{bmatrix} \tau_{oc} \\ \tau_\varphi \end{bmatrix} = P \tau_m, \quad (3.37)$$

onde  $P$  é uma matriz de dimensão  $((N_{oc} + N) \times N_m)$ , a qual seleciona as componentes de  $\tau_{oc}$  e  $\tau_\varphi$  efetivamente utilizadas como entradas de controle.

É apresentada agora exemplos para a mínima motorização admissível para as várias classes de robôs móveis:

- **Classe (3,0).** Por exemplo, o robô omnidirecional com três rodas universais, apresentado na Figura 3.6. Neste caso, a matriz  $B$  em (3.20) é constante a reduzida a:

$$B = \Sigma^T E^T = -J_3^{-1} J_1 = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & b \\ 0 & -1 & b \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & b \end{bmatrix},$$

que é não singular. Conclui-se que a mínima motorização admissível é equipar cada roda com um motor.

- **Classe (2,0).** Por exemplo, um robô com duas rodas fixas e uma roda orientável não centrada. A matriz  $B(\beta_{oc})$  é da forma:

$$B(\beta_{oc3}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{d} \cos \beta_{oc3} & -\frac{1}{r} & \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} \sin \beta_{oc3} \\ -\frac{1}{d}(d + b \sin \beta_{oc3}) & \frac{b}{r} & -\frac{b}{r} & -\frac{b}{r} \cos \beta_{oc3} \end{bmatrix}$$

Várias configurações são possíveis. Por exemplo, uma solução bastante comum são dois motores para a rotação das rodas fixas. Neste caso a matriz  $P$  em (3.37) seria:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Classe (2,1).** Por exemplo, um robô com uma roda orientável centrada e duas rodas orientáveis não centradas. Neste caso, é necessário um motor para a orientação da roda centrada. A matriz  $B(\beta_c, \beta_{oc})$  é da forma:

$$B(\beta_c, \beta_{oc}) = \Sigma^T(\beta_c) [D^T(\beta_{oc}) \quad E^T(\beta_c, \beta_{oc})],$$

com

$$\Sigma^T(\beta_c) = \begin{bmatrix} 0 & b \sin \beta_{c3} & \cos \beta_{c3} \\ b & 0 & -1 \end{bmatrix}, D^T(\beta_{oc}) = \begin{bmatrix} \cos \beta_{oc1} & -\cos \beta_{oc3} \\ \sin \beta_{oc1} & \sin \beta_{oc2} \\ d + b \sin \beta_{oc1} & d + b \sin \beta_{oc2} \end{bmatrix}$$

e

$$E^T(\beta_c, \beta_{oc}) = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \beta_{c3} & -\sin \beta_{oc1} & b \sin \beta_{oc2} \\ \sin \beta_{c3} & \cos \beta_{oc1} & -\cos \beta_{oc2} \\ b \cos \beta_{c3} & b \cos \beta_{oc1} & b \cos \beta_{oc2} \end{bmatrix}$$

As colunas 1 e 3 de  $B(\beta_c, \beta_{oc})$  são independentes se  $d > b\sqrt{2}$ . O mesmo vale para as colunas 2 e 3. então duas motorizações admissíveis são obtidas usando um segundo motor para a rotação



da roda centrada e um terceiro motor para a orientação de uma das rodas não centradas. A matriz  $P$  seria então:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dependendo do caso.

- **Classe (1,1).** Por exemplo, um robô com duas rodas fixas e uma roda orientável centrada. Neste caso, é necessário um motor para a orientação da roda centrada. A matriz  $B(\beta_c)$  reduz-se a

$$B(\beta_c) = [\sin \beta_{c3} + \cos \beta_{c3} \quad -\sin \beta_{c3} + \cos \beta_{c3} \quad 1]$$

Como  $\delta_m = 1$ , um segundo motor é necessário para a rotação de uma das rodas fixas. assim, a matriz  $P$  é  $P = [0 \ 0 \ 1]^T$ .

- **Classe (1,2).** Por exemplo, um robô com duas rodas orientáveis centradas e uma roda orientável não centrada. Dois motores são necessários para a orientação das rodas centradas. A matriz  $B(\beta_c, \beta_{oc})$  é da forma

$$B(\beta_c, \beta_{oc}) = \Sigma^T(\beta_c) [D^T(\beta_{oc}) \quad E^T(\beta_c, \beta_{oc})],$$

com

$$\Sigma(\beta_c) = \begin{bmatrix} -2b \sin \beta_{c1} \sin \beta_{c2} \\ b \sin(\beta_{c1} + \beta_{c2}) \\ 2 \sin \beta_{c2} \cos \beta_{c1} - \sin(\beta_{c1} + \beta_{c2}) \end{bmatrix}, D^T(\beta_{oc}) = \begin{bmatrix} -d^{-1} \sin \beta_{oc3} \\ d^{-1} \cos \beta_{oc3} \\ -1 - bd^{-1} \sin \beta_{oc3} \end{bmatrix}$$

e

$$E^T(\beta_c, \beta_{oc}) = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\sin \beta_{c1} & \sin \beta_{c2} & \cos \beta_{oc3} \\ \cos \beta_{c1} & -\cos \beta_{c2} & \sin \beta_{oc3} \\ b \cos \beta_{c1} & b \cos \beta_{c2} & b \cos \beta_{oc3} \end{bmatrix}$$

Como  $\delta_m = 1$ , é suficiente que  $B(\beta_c, \beta_{oc})$  tenha apenas uma coluna diferente de zero para todas as possíveis configurações. Mas como todas as colunas são não nulas, são necessários ainda dois motores adicionais para as rotações das rodas centradas. A matriz  $P$  será

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, chega-se à seguinte tabela, resumizando os resultados acima:

Tabela 3.2: Configuração da motorização para as diversas classes de robôs móveis consideradas.

Classe ( $\delta_m, \delta_s$ )	Número de motores $N_m + N_c$
(3,0)	3 ou 4
(2,0)	2
(2,1)	3
(1,1)	2
(1,2)	4

### 3.8 Modelo dinâmico de postura

O modelo dinâmico de configuração visto anteriormente pelas equações (3.31)–(3.36) pode ser reescrito de uma forma mais compacta:

$$\dot{q} = S(q)u \quad (3.38)$$

$$H(\beta)\dot{u} + f(\beta, u) = F(\beta)\tau_0 \quad (3.39)$$

com as seguintes definições:

$$\beta \triangleq \begin{bmatrix} \beta_c \\ \beta_{oc} \end{bmatrix}^T, \quad q \triangleq \begin{bmatrix} \xi \\ \beta \\ \varphi \end{bmatrix}^T, \quad u \triangleq \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}^T, \quad H(\beta) \triangleq \begin{bmatrix} H_1(\beta_c, \beta_{oc}) & \Sigma^T(\beta_c)V(\beta_{oc}) \\ V^T(\beta_{oc})\Sigma(\beta_c) & I_c \end{bmatrix},$$

$$f(\beta, u) \triangleq \begin{bmatrix} f_1(\beta_c, \beta_{oc}, \eta, \zeta) \\ f_2(\beta_c, \beta_{oc}, \eta, \zeta) \end{bmatrix}, \quad F(\beta) \triangleq \begin{bmatrix} B(\beta_c, \beta_{oc})P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \tau_0 \triangleq \begin{bmatrix} \tau_m \\ \tau_c \end{bmatrix}$$

Assume-se que a matriz  $B(\beta_c, \beta_{oc})P$  é de posto completo. Portanto, fica claro que  $F(\beta)$  também o é. Esta propriedade é importante para a análise do comportamento de robôs móveis e também para a síntese de lei de realimentação de controle. Através de uma lei de controle estática e suave, é possível transformar o modelo em uma forma mais simples, como segue.

#### Propriedade 6.

O modelo dinâmico de configuração do sistema (3.38)–(3.39) pode ser reescrito, através de uma realimentação estática, suave e invariante no tempo, como:

$$\dot{q} = S(q)u$$

$$\dot{u} = v,$$

onde  $v$  representa um conjunto de  $\delta_m$  entradas auxiliares de controle.

De fato, segue-se da Propriedade 1 que a seguinte realimentação é bem definida em todo o espaço de estados:

$$\tau_0 = F^*(\beta) [H(\beta)v + f(\beta, u)], \quad (3.40)$$

onde  $F^*$  denota a inversa à esquerda de  $F$ .

△

No contexto de planejamento de trajetória, fica claro que o usuário estará essencialmente interessado em controlar a postura do robô (coordenadas  $\xi(t)$ ) através do controle  $v$ . Neste caso, o controle das coordenadas internas  $\beta_{oc}$  e  $\varphi$  pode ser ignorado, restringindo a atenção para o seguinte *modelo dinâmico de postura*:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= B(z)u \\ \dot{u} &= v,\end{aligned}$$

onde  $z \triangleq [\xi^T \ \beta_c^T]^T$  e  $u \triangleq [\eta^T \ \zeta^T]^T$ .

O modelo dinâmico de postura descreve completamente a dinâmica do sistema entre a entrada de controle  $v$  e a postura  $\xi$ . Aparentemente, as coordenadas  $\beta_{oc}$  e  $\varphi$  desapareceram, mas na verdade elas estão *escondidas* na realimentação (3.40).

Tem-se assim o seguinte conjunto de propriedades para o modelo dinâmico de postura:

**Propriedade 7.**

- a) *O modelo dinâmico de postura é genérico e irreduzível;*
- b) *O modelo dinâmico de postura é Small Time Locally Controllable<sup>9</sup>;*
- c) *Para robôs com mobilidade restrita, o modelo dinâmico de postura não pode ser estabilizado por uma lei de controle estática, suave e invariante no tempo. Porém, pode ser estabilizável por uma lei de controle estática, suave e variante no tempo, ou descontínua e invariante no tempo;*
- d) *A dimensão do maior subsistema do modelo dinâmico de postura linearizável por uma realimentação estática é  $2(\delta_m + \delta_s)$ . Robôs omnidirecionais são completamente linearizáveis por realimentação de estados;*
- e) *O modelo dinâmico de postura é um sistema flat diferenciável.*

△

---

<sup>9</sup>vide Apêndice A.

## Capítulo 4

# Controle de Robôs Móveis

### 4.1 Introdução

Uma vez que sistemas automatizados estão cada vez mais sendo usados na indústria, técnicas de controle cada vez mais avançadas são necessárias para atender a todos os requisitos existentes. Com isso, métodos tradicionais, como controle PID, em muitos casos são incapazes de atender a estas necessidades. Desta forma, para que se possa obter um ótimo desempenho dos sistemas automatizados, é necessária a utilização de estratégias de controle mais elaboradas, tais como: *controle robusto*, *controle adaptativo*, *controle inteligente*, entre outros [39, 13].

O controle de sistemas mecânicos não holonômicos, como os robôs móveis, tem sido objeto de um grande esforço da comunidade científica nos últimos anos. A razão para isto se dá basicamente pelo seguinte [1]:

- Existe um grande número de robôs, nas mais variadas aplicações, que possuem restrições não holonômicas;
- Há um considerável desafio na síntese de leis de controle de sistemas não lineares que não podem ser linearizados de maneira significativa;
- Conforme Brockett [8], um sistema com restrições não holonômicas não pode ser estabilizado em um ponto de equilíbrio, por uma lei de controle suave e invariante no tempo.

Além disso, sistemas mecânicos não holonômicos como os robôs móveis dotados de rodas da Classe (2,0), por exemplo, possuem dois graus de liberdade para o controle (velocidades linear e angular – quando o modelo a ser controlado é cinemático) e três graus de liberdade para o seu posicionamento (posição  $x$  e  $y$  e orientação  $\theta$ ). Portanto, são sistemas *sub atuados* [24]. Conforme já visto, robôs da Classe (3,0) possuem restrições holonômicas, as quais podem ser eliminadas do modelo do sistema.

A fim de superar as limitações impostas pelo Teorema de Brockett, várias abordagens diferentes foram propostas. Alguns métodos de controle abandonam a idéia da estabilização em um ponto e

procuram obter a convergência a uma trajetória (*variedade de equilíbrios*). Neste caso, o problema de movimentação entre dois pontos é resolvido em duas etapas: primeiro uma trajetória (que obedeça as restrições não holonômicas) é calculada *off-line* e em seguida uma lei de controle é projetada a fim de fazer com que o robô siga a trajetória calculada anteriormente [27].

### Análise da estabilidade por funções de Liapunov

Em vários trabalhos uma análise baseada na teoria da estabilidade de Liapunov é utilizada para demonstrar a convergência (assintótica ou exponencial, local ou global) de uma lei de controle. Exemplos são encontrados em [17, 32, 48, 24, 18], entre outros. A título de ilustração, será mostrada aqui a solução aplicada por Fukao et al. em [21]. Define-se um sistema de erro que dá a diferença entre a configuração do robô e a configuração de referência como:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ref} - x \\ y_{ref} - y \\ \theta_{ref} - \theta \end{bmatrix}$$

As entradas que levam o vetor  $[e_1 \ e_2 \ e_3]^T$  para zero são dadas por:

$$\begin{aligned} v &= v_{ref} \cos e_3 + K_1 e_1 \\ w &= w_{ref} + v_{ref} K_2 e_2 + K_3 \sin e_3, \end{aligned}$$

onde  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$  são constantes positivas. A equação dinâmica do erro pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} e_2 \\ -e_1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{ref} \cos e_3 \\ v_{ref} \sin e_3 \\ w_{ref} \end{bmatrix}$$

A seguinte função de Liapunov, positiva definida e radialmente ilimitada, pode ser usada:

$$V = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2) + \frac{1 - \cos e_3}{K_2}$$

A sua derivada é:

$$\dot{V} = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + \dot{e}_3 \frac{\sin e_3}{K_2} = -K_1 e_1^2 - \frac{K_3 \sin^2 e_3}{K_2} \leq 0$$

Como  $\dot{V} \leq 0$ , o sistema é assintoticamente estável no sentido de Liapunov [25].

### Transformações canônicas

Transformar o sistema em forma encadeada ou de potência têm se mostrado uma técnica efetiva para a síntese de leis de controle para sistemas mecânicos não holonômicos. Diversos trabalhos utilizam uma transformação do modelo cinemático para a forma encadeada, como [32, 46, 31]. De um modo geral, sistemas mecânicos não holonômicos podem ser transformados para as formas

encadeada ou de potência. Considerando sistemas de ordem  $n$  com duas entradas, estes podem ser descritos pela seguinte forma encadeada [45]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_2 u_1 \\ \dot{x}_4 &= x_3 u_1 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= x_{n-1} u_1\end{aligned}$$

ou na forma de potência:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 u_2 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{2} x_1^2 u_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \frac{1}{(n-2)!} x_1^{n-2} u_2\end{aligned}$$

Esta forma especial é vantajosa para explicitamente obter-se leis de controle estabilizantes. O espaço é dividido em um espaço linear  $(y, \dot{y})$  e uma seção não linear  $z$  cuja dinâmica é inteiramente controlada pelos movimentos no espaço de  $y$ .

Por exemplo, considerando um robô cuja cinemática é descrita por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega\end{aligned}$$

Utilizando a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{aligned}x_1 &= \theta \\ x_2 &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ x_3 &= x \sin \theta - y \cos \theta \\ u_1 &= \omega \\ u_2 &= v - x_3 \omega\end{aligned}$$

o modelo cinemático pode ser transformado para a forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_2 u_1,\end{aligned}$$

Outra transformação de coordenadas que leva ao mesmo sistema na forma encadeada é a seguinte:

$$\begin{aligned}x_1 &= x \\x_2 &= \tan \theta \\x_3 &= y \\u_1 &= v \cos \theta \\u_2 &= \frac{\omega}{\cos^2 \theta}\end{aligned}$$

## 4.2 Classificações

### 4.2.1 Classificação quanto ao modelo utilizado

Para todas as técnicas, o modelo a ser controlado pode ser tanto *cinemático* (quando as entradas de controle são as velocidades nas rodas) quanto *dinâmico* (quando as entradas de controle são as torques e forças aplicadas nas rodas). Restrições cinemáticas geralmente aparecem quando há pontos de contato entre a máquina e o ambiente, como rodas em contato com o solo. Portanto, há uma forte relação entre as restrições não holonômicas e as forças desenvolvidas pelo robô em seu movimento, e o controle das forças do modelo a nível dinâmico é pelo menos tão importante quanto o controle cinemático de postura [32]. Também, com o modelo dinâmico, restrições quanto à aceleração e potência máxima do motor podem ser consideradas, levando assim a velocidades e acelerações compatíveis com aplicações reais [2]. Controle baseado no modelo cinemático é visto em, por exemplo, [22]. O controle baseado no modelo dinâmico é visto em [42].

### 4.2.2 Classificação quanto à metodologia de controle

A seguir são mostradas, sucintamente, os diversos métodos de controle utilizados.

**Controle variante no tempo.** Trabalhos que lidam com este tipo de controle são, por exemplo, [17, 43, 36, 16]. Leis de controle variantes no tempo têm a desvantagem de gerar trajetórias muito oscilatórias, com taxas de convergência apenas assintóticas, no sentido de Liapunov. Contudo, Sørdaalen em [41] desenvolveu leis de controle variantes no tempo garantindo convergência exponencial global (em um sentido diferente do usual, exposto por Khalil [25]) do sistema a um ponto de equilíbrio, e também para o sistema seguir trajetórias composta de arcos e linhas.

**Controle descontínuo.** O controle descontínuo pode ser feito através de leis parcialmente suaves ou por modo deslizante. Trabalhos utilizando estas duas técnicas são encontrados, por exemplo, em [42, 48, 14]. A vantagem do controle descontínuo é que este pode superar desvantagens comumente associadas ao controle variante no tempo, como taxa lenta de convergência, complexidade na síntese da lei de controle e trajetórias altamente oscilatórias [1]. A desvantagem desta estratégia é que, em implementações reais, os chaveamentos causados pela lei de controle descontínua podem gerar vibrações mecânicas, o que pode não ser aceitável, dependendo do tipo de aplicação e da

trajetória a ser seguida pelo robô. A maioria dos trabalhos utiliza modelos em sistemas de coordenadas cartesianas. Contudo, Indivieri [22] utilizou uma mudança de coordenadas descontínua, sendo possível obter uma lei de controle suave e invariante no tempo para a cinemática de um robô móvel. Dado o seguinte modelo cinemático em coordenadas cartesianas  $\dot{x} = v \cos \theta$ ,  $\dot{y} = v \sin \theta$  e  $\dot{\theta} = \omega$ , faz-se a transformação para coordenadas polares com:

$$e = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \phi = \text{atan2}(y_c, x_c) \quad \alpha = \phi - \theta$$

onde  $\text{atan2}(y_c, x_c) \in (-\pi, \pi]$ . Então o sistema diferencial em coordenadas polares é:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= -u \cos \alpha \\ \dot{y} &= -\omega + u \frac{\sin \alpha}{e} \\ \dot{\phi} &= u \frac{\sin \alpha}{e} \end{aligned}$$

e claramente, o estado não é definido para  $e = 0$ . Assim, é possível transpor a restrição de Brockett e um controle suave e invariante no tempo pode ser obtido para estabilizar o sistema globalmente. Vale ressaltar que, embora o sistema acima seja descontínuo em malha aberta, pode se tornar contínuo em malha fechada.

O controle híbrido diferencia-se por combinar leis de controle de tempo contínuo e não contínuo. Na maioria das vezes, ocorre um chaveamento entre uma lei de controle não suave e outra variante no tempo. Pomet et al. [33] utilizou uma estratégia híbrida para estabilizar um robô móvel com acionamento diferencial em um ponto. A técnica baseia-se em utilizar um controle descontínuo enquanto o robô estiver longe da origem. Quando o robô aproximar-se suficientemente do ponto de equilíbrio, o controle utilizado é uma lei variante no tempo. Com isso, elimina-se o problema de trajetórias altamente oscilatórias proveniente do controle variante no tempo [33].

**Controle adaptativo.** Um outro ponto pouco estudado, mas que hoje vem recebendo bastante atenção é o controle de sistemas não holonômicos com incertezas [48]. Embora o controle adaptativo seja usado já a algum tempo para manipuladores robóticos, a sua utilização em robôs móveis não é muito difundida [27]. Trabalhos deste tipo compreendem métodos como redes neurais [20], controle inteligente e lógica nebulosa (*fuzzy*). No entanto, estas técnicas mostram-se mais úteis para os níveis hierárquicos mais altos do controle, como controle de missão e negociação de ambiente. Para os níveis mais baixos de controle, como estabilização em uma trajetória ou em um ponto, métodos de controle mais tradicionais devem ser utilizados, pois nestes níveis o controle lida diretamente com forças e torques que são aplicados aos atuadores. Portanto uma falha poderia gerar potências mecânicas não compatíveis em aplicações reais, comprometendo assim a integridade física do robô e do ambiente. A falta de trabalhos nesta área deve-se à utilização, no controle, de modelos cinemáticos apenas. Como para este tipo de modelo os parâmetros estão relacionados à forma física do robô, geralmente são bem conhecidos e são constantes durante a vida do robô, não são necessárias estratégias adaptativas. Tendo em vista que, fisicamente, as entradas de controle reais são os torques e forças aplicadas às rodas, o controle considerando o modelo dinâmico torna-se



essencial. Parâmetros relacionados com o modelo dinâmico são, por exemplo, massas e inércias. Estes, ao contrário dos parâmetros físicos, podem sofrer variações, por exemplo, devidas a alterações na distribuição da massa (consumo de combustível). Como estes valores são difíceis de se obter por processos de calibração, torna-se interessante a utilização de métodos de controle adaptativo, visto que a estrutura do modelo dinâmico de um robô móvel é bem conhecida [27]. Trabalhos mais recentes neste sentido encontram-se em [28, 21, 32].

Jiang et al. [23] propôs um controle adaptativo variante no tempo usando a técnica de *backstepping* para uma classe especial de sistema não holonômico em forma encadeada. Oya et al. [32] trata do assunto do controle dinâmico de um sistema não holonômico considerando incertezas de modelagem, onde é obtida a estabilização assintótica global com base em análise de uma função de Liapunov. Fierro et al. [20] utilizou redes neurais para desenvolver uma estrutura integrando controles cinemático e dinâmico. Para isso, foi utilizada a técnica do torque calculado e *backstepping*. A rede neural utilizada é capaz de compensar perturbações e erros de modelagem. Três objetivos de controle são atendidas: estabilização em um ponto, rastreamento de trajetória e seguimento de caminho.

**Controle linearizante.** Geralmente neste caso considera-se apenas variáveis que representam a posição e a orientação do robô. Sendo assim, o controle é feito em nível cinemático. O interesse por uma estratégia linearizante deve-se ao fato de que, se a linearização do sistema é possível, leis de controle podem ser obtidas através de técnicas disponíveis para sistemas lineares. Considerando que os parâmetros do modelo e os estados são bem conhecidos, é possível obter-se uma descrição linear exata do sistema não linear, ao contrário do obtido por expansão em séries de Taylor [27]. Controle por realimentação linearizante podem ser encontrados em [27, 13], entre outros. A linearização entrada-saída é mostrada com detalhes na Seção 5.3, onde o robô considerado é da Classe (2,0), com acionamento diferencial.

### 4.2.3 Classificação quanto à malha de controle

Quanto ao tipo de malha de controle, as estratégias podem ser classificadas em *malha aberta* e *malha fechada*. O controle em malha aberta é utilizado quando o objetivo é apenas guiar o robô de um ponto a outro, sem se preocupar com o caminho percorrido entre estes dois pontos. Para isto as velocidades e torques são previamente calculados, com base nas configurações inicial e final do robô. Este caminho pode ser projetado conforme vários critérios, como prevenção a colisões, caminho mais curto e mínimo esforço de controle, por exemplo. Com este método, a compensação do controle por perturbações e erros de modelagem não é possível. Métodos de controle em malha fechada, entretanto, podem ser utilizados a fim de solucionar este problema e outros encontrados em implementações reais [41].

### 4.2.4 Classificação quanto ao objetivo do controle em malha fechada

Quanto ao objetivo, pode-se classificar as metodologias de controle em malha fechada para robôs móveis não holonômicos basicamente em dois tipos:

- estabilização em um ponto
- estabilização em uma trajetória ou caminho

Para um sistema linear e invariante no tempo, se os autovalores instáveis são controláveis, um ponto de equilíbrio pode ser assintoticamente estabilizado por uma realimentação de estados estática, suave e invariante no tempo. Entretanto, para sistemas não holonômicos, isto não é mais possível, dada a restrição imposta pelo Teorema de Brockett [8]. Conseqüentemente, ferramentas lineares antes utilizadas não podem mais ser consideradas, nem localmente [26].

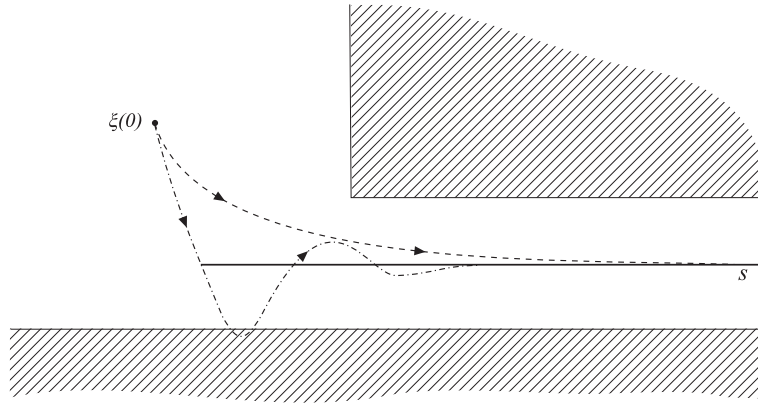


Figura 4.1: Movimentação de um robô em um corredor: comparação entre estratégias de rastreamento de trajetória (linha traço-ponto) e seguimento de caminho (linha tracejada).

O problema de estabilização em uma trajetória subdivide-se em dois casos distintos : *rastreamento de trajetória* (*path following*) e *seguimento de caminho* (*trajectory tracking*). Para o problema de seguimento de caminho, deseja-se que o robô convirja para uma determinada trajetória de referência sem nenhuma especificação temporal. Para o problema de rastreamento de trajetória, o tempo é considerado um dos parâmetros de controle, agora sendo importante que o robô esteja em determinada configuração em um determinado instante de tempo. Cada estratégia tem, obviamente, suas vantagens e desvantagens. Quando o robô precisa convergir o mais rápido possível para a trajetória, é mais interessante utilizar rastreamento de trajetória, onde a trajetória é parametrizada no tempo. Entretanto, isto pode causar oscilações no caminho realizado pelo robô, fazendo com que o mesmo se distancie demasiadamente da trajetória antes de convergir a ela. Se o robô está se movimentando, por exemplo, em um corredor, a transição do robô para a trajetória de referência deve acontecer em um espaço fisicamente limitado. Neste caso, seguimento de caminho é aconselhado, pois gera uma transição menos oscilatória para a referência, porém mais lenta. Neste tipo de controle, geralmente assume-se que a velocidade linear do veículo é constante, e o controle é feito sobre a orientação do robô para guiar o mesmo para a trajetória de referência [19]. Além disso, o esforço de controle necessário para este caso é menor se comparado com rastreamento de trajetória, que pode levar à saturação dos atuadores. Trabalhos envolvendo seguimento de caminho são encontrados em [37, 35], enquanto que o problema de rastreamento de trajetória é encontrado em [32, 36, 15], entre outros. Uma comparação entre os dois métodos é feita no desenho da Figura 4.1. Inicialmente o robô encontra-se na configuração  $\xi(0)$ . Nota-se que o rastreamento de trajetória

(linha traço-ponto) gera uma movimentação oscilatória, causando a colisão do robô com a parede. No caso do seguimento de caminho (linha tracejada), apesar de a convergência ser mais lenta, o robô converge em direção à trajetória de referência  $s$ , suavemente e sem colisão.

## Capítulo 5

# Exemplo: Robô Móvel com Acionamento Diferencial

### 5.1 Introdução

Robôs móveis com acionamento diferencial aparecem em grande parte da literatura [22, 28, 14, 36, 44, 21]. A principal característica deste tipo de robô é que o mesmo possui duas rodas fixas centradas (rodas *ativas*) que compartilham o mesmo eixo de rotação, acionadas por dois motores independentes. Uma ou mais rodas orientáveis não centrada podem ser usadas a fim de equilibrar o robô, por isso chamadas de rodas *passivas*. Para isto, estas rodas precisam estar localizadas fora do eixo comum às duas rodas ativas. São portanto pertencentes à Classe (2,0), como será visto e provado na dedução feita nas próximas seções. Veja Figura 5.1.

### 5.2 Modelos cinemático e dinâmico

Para maior clareza, são repetidas aqui as seguintes equações:

$$N = N_f + N_c + N_{oc} + N_{sw} \quad (5.1)$$

$$J_1(\beta_c, \beta_{oc})R_O^C \dot{\xi} + J_2 \dot{\varphi} = 0 \quad (5.2)$$

$$C_1(\beta_c, \beta_{oc})R_O^C \dot{\xi} + C_2 \dot{\beta}_{oc} = 0, \quad (5.3)$$

encontradas na Seção 3.4 como as equações (3.10), (3.11) e (3.12), respectivamente.

Para o caso em questão, tem-se duas rodas fixas ( $N_f = 2$ ) e uma roda orientável não centrada ( $N_{oc} = 1$ ). Portanto,  $N = N_f + N_{oc} = 3$ . As coordenadas de configuração são formadas pelas coordenadas de postura  $(x, y, \theta)$ , pela coordenada angular de orientação da roda não centrada ( $\beta_{oc}$ ) e pelas coordenadas de rotação de todas as rodas ( $\varphi_f = [\varphi_R \ \varphi_L]^T, \varphi_{oc}$ ). Então, o vetor de coordenadas de configuração total será:

$$q = [x \ y \ \theta \ \beta_{oc} \ \varphi_R \ \varphi_L \ \varphi_{oc}]^T,$$

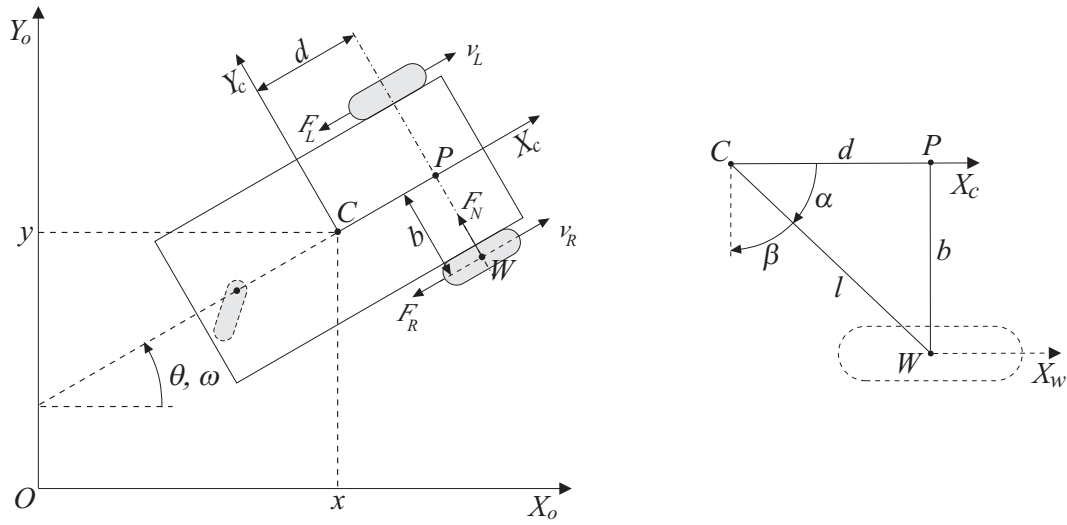


Figura 5.1: À esquerda, o modelo geométrico de um robô móvel com acionamento diferencial, e a representação de suas velocidades e forças. À direita, a representação dos ângulos e distâncias entre o centro do robô e o centro das rodas convencionais fixas.

de acordo com a equação  $N_f + N_{oc} + 3 = 7$ . Os subscritos  $R$  e  $L$  significam as rodas direita e esquerda, respectivamente. Considerando que a roda não centrada é passiva, ou seja, não possui nenhum atuador, pode-se desconsiderar os estados referentes a esta roda. Teremos então o seguinte vetor de estados para a configuração do robô:

$$q = [x \ y \ \theta \ \varphi_R \ \varphi_L]^T,$$

### 5.2.1 Definição das restrições não holonômicas

No caso do robô apresentado na Figura 5.1, o sistema de coordenadas de cada roda ativa,  $\{W, X_w, Y_w\}$ , tem a mesma orientação do sistema de coordenadas do centro do robô,  $\{C, X_c, Y_c\}$ . Logo, das Figuras 3.2 e 5.1, tem-se que  $\alpha + \beta = 90^\circ$ ,  $l \cos \beta = b$  e  $l \sin \beta = d$ . Vale lembrar que as equações a seguir são deduzidas com base nas restrições causadas pelas rodas ativas apenas, visto que as restrições com respeito à roda passiva são sempre satisfeitas.

A equação (3.5) (restrição ao longo do plano da roda) é reescrita, no caso da roda fixa esquerda, como  $[-1 \ 0 \ b] R_O^C \dot{\xi} + r \dot{\varphi}_L = 0$ , o que resulta em

$$[-\cos \theta \ -\sin \theta \ b] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + r \dot{\varphi}_L = 0,$$

que é igual a

$$-\dot{x} \cos \theta - \dot{y} \sin \theta + b \dot{\theta} + \dot{\varphi}_L = 0 \quad (5.4)$$

Analogamente, para a roda fixa direita,

$$-\dot{x} \cos \theta - \dot{y} \sin \theta - b \dot{\theta} + \dot{\varphi}_L = 0 \quad (5.5)$$

Reescrevendo a equação (3.6) (restrição ortogonal ao plano da roda), tem-se que  $[0 \ 1 \ d] R_O^C \dot{\xi} = 0$ . Então

$$[-\sin \theta \ \cos \theta \ d] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0,$$

logo

$$-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta + b\dot{\theta} = 0 \quad (5.6)$$

### 5.2.2 Definição da classe do robô

Seguindo as expressões (5.2) e (5.3), e segundo as equações para as restrições (5.4), (5.5) e (5.6), define-se as seguintes matrizes:

$$J_1(\beta_c, \beta_{oc}) = \begin{bmatrix} J_{1f} \\ J_{1oc}(\beta_{oc}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -b \\ -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$C_1(\beta_c, \beta_{oc}) = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1oc}(\beta_{oc}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Agora, considerando as primeiras  $(N_f + N_c)$  restrições de (5.3), referentes às rodas fixas e orientáveis centradas, tem-se que:

$$\begin{aligned} C_{1f} R_O^C \dot{\xi} &= 0 \\ C_{1c}(\beta_c, \beta_{oc}) R_O^C \dot{\xi} &= 0, \end{aligned}$$

o que significa que o vetor  $R_O^C \dot{\xi}$  pertence ao núcleo da seguinte matriz:

$$C_1^*(\beta_c) = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1c}(\beta_c) \end{bmatrix},$$

que neste caso será<sup>1</sup>:

$$C_1^* = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

---

<sup>1</sup>lembrando que não existem rodas orientáveis centradas ( $N_c = 0$ ). Portanto,  $C_{1c}(\beta_c) = 0$ .

Obviamente, se o posto da matriz  $C_1^*(\beta_c)$  fosse completo, seria impossível qualquer movimentação do robô. Neste caso, temos que  $\rho\{C_1^*\} = 1$ , que é o aceitável na prática para o robô ter uma mobilidade suficiente para desempenhar movimentos de translação e rotação [12]. Da Definição 1, temos que o grau de mobilidade deste robô é  $\delta_m = \mathcal{N}\{C_1^*\} = 2$ .

Como não existem rodas orientáveis centradas, a matriz  $C_{1c}(\beta_c)$  será nula, assim como o seu posto. Da Definição 2, tem-se que o grau de dirigibilidade é  $\delta_s = \rho\{C_1^*\} = 0$ .

Com isto, chega-se à conclusão de que este robô pertence à *Classe (2,0)*.

Da Definição 3, tem-se que o grau de manobrabilidade deste robô é  $\delta_M = \delta_m + \delta_s = 2$ . Com isso, o centro instantâneo de rotação (*CIR*) se restringe a pertencer ao longo do eixo de rotação das rodas fixas, e a distância deste ponto a P (centro do eixo de rotação) será determinada pela diferença de velocidade entre as rodas fixas direita e esquerda. Este é um resultado fisicamente intuitivo, já que as rodas fixas produzem torque para a movimentação do robô e não possuem orientação variável.

### 5.2.3 Modelo cinemático de postura

Para o caso de um robô da Classe (2,0), o vetor de estados é formado pelas coordenadas de postura:

$$\xi = [x \ y \ \theta]^T$$

Como  $R_O^C \dot{\xi}$  pertence ao núcleo da matriz  $C_1^*$ , pode-se escrever:

$$\dot{\xi} = R_C^O \Sigma \eta,$$

onde  $\Sigma$  tem dimensão  $3 \times \delta_m$  e  $\eta$  tem dimensão  $1 \times \delta_m$ . Neste caso, fazendo  $d = 0$  na matriz  $C_1^*$  (equação 5.11), tem-se que:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e o modelo cinemático de postura  $\dot{z} = B(z)u$  reduz-se a:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix},$$

onde  $z = \xi$  e  $u = [v \ w]^T$ .  $v$  é a velocidade tangencial na direção do eixo  $X_c$  e  $w$  é a velocidade rotacional. Ambas estão relacionadas com as velocidades das rodas direita e esquerda ( $v_R$  e  $v_L$ , respectivamente) pelas expressões:

$$v = \frac{v_R + v_L}{2} \quad w = \frac{v_L - v_R}{2b}$$

### 5.2.4 Modelo cinemático de configuração

Neste modelo, aparecem as variáveis relativas às rotações  $\varphi$  das rodas, que não são consideradas no modelo cinemático de postura.

Seja o seguinte vetor de estados:

$$q = [\xi \ \varphi_f]^T = [x \ y \ \theta \ \varphi_R \ \varphi_L]^T,$$

onde  $\varphi_R$  e  $\varphi_L$  correspondem às rotações das rodas direita e esquerda, respectivamente. O modelo cinemático de configuração pode ser escrito, de forma compacta, como:

$$\dot{q} = S(q)u,$$

onde

$$S(q) \triangleq \begin{bmatrix} R_C^O \Sigma(\beta_c) & 0 \\ 0 & I \\ D(\beta_{oc}) \Sigma(\beta_c) & 0 \\ E(\beta_c, \beta_{oc}) \Sigma(\beta_c) & 0 \end{bmatrix}, \quad u \triangleq \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

com

$$D(\beta_{oc}) \triangleq -C_{2oc}^{-1} C_{1oc}(\beta_{oc}) \quad (5.13)$$

$$E(\beta_c, \beta_{oc}) \triangleq -J_2^{-1} J_1(\beta_c, \beta_{oc}) \quad (5.14)$$

A roda orientável não centrada não é considerada nas equações, pois as restrições com respeito a esta roda são sempre satisfeitas. Então,  $D(\beta_{oc})$  será nulo, pois  $C_{2oc} = 0$ . Ainda, desconsiderando a linha nula de  $J_1$  (equação (5.7)) a coluna nula de  $J_2$  (equação (5.8)), tem-se que

$$J_1 = J_{1f} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -b \\ -1 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix},$$

Assim,

$$E(\beta_c, \beta_{oc}) = E = -J_2^{-1} J_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 & \frac{b}{r} \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{b}{r} \end{bmatrix}$$

e o produto  $E\Sigma$  resulta em:

$$E\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{b}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{b}{r} \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz  $S(q)$  e o vetor  $u$  reduzem-se a:

$$S(q) = \begin{bmatrix} R_C^O \Sigma \\ E\Sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & \frac{b}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{b}{r} \end{bmatrix}, \quad u = \eta$$

### 5.2.5 Modelo dinâmico de configuração

O modelo dinâmico é escrito na forma de Euler-Lagrange como:

$$M(\xi)\ddot{\xi} + V(\xi, \dot{\xi}) = E(\xi)\tau - A^T(\xi)\lambda \quad (5.15)$$



O vetor de estados é  $\xi = [x \ y \ \theta \ \varphi_R \ \varphi_L]^T$ , onde  $(x, y)$  dá a posição com relação sistema inercial  $\{O, X_o, Y_o\}$ ,  $\theta$  dá a orientação com relação a  $\{O, X_o, Y_o\}$  e  $\varphi_R$  e  $\varphi_L$  dão a posição angular das rodas centradas direita e esquerda, respectivamente. As entradas de controle são os torques aplicados nas rodas direita e esquerda,  $\tau = [\tau_R \ \tau_L]^T$ . Os multiplicadores de Lagrange  $\lambda$  são as forças de contato do robô com o solo, que podem ser escritas como  $\lambda = [F_N \ F_R \ F_L]$ , força normal, na direção de  $X_c$  e na direção de  $Y_c$ , respectivamente. As equações de Lagrange são:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + md(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) - F_N \sin \theta - (F_R + F_L) \cos \theta &= 0 \\ m\ddot{y} + md(-\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta}^2 \sin \theta) + F_N \cos \theta - (F_R + F_L) \sin \theta &= 0 \\ m_c d(\ddot{x} \sin \theta - \ddot{y} \cos \theta) + I\ddot{\theta} + F_N d + b(F_L - F_R) &= 0 \\ I_w \ddot{\varphi}_R + F_R r &= \tau_R \\ I_w \ddot{\varphi}_L + F_L r &= \tau_L \end{aligned}$$

com  $m = m_c + 2m_w$  e  $I = I_c + 2m_w(d^2 + b^2) + 2I_m$ .  $m_c$  é a massa da plataforma do robô sem considerar os motores e as rodas,  $m_w$  é a massa de cada conjunto motor-roda,  $I_c$  é o momento de inércia da plataforma sem considerar os motores e as rodas,  $I_w$  é o momento de inércia de cada conjunto motor-roda no eixo horizontal de rotação da roda e  $i_m$  é o momento de inércia de cada conjunto motor-roda com relação ao diâmetro da roda.

Pode-se escrever as equações de Lagrange na forma matricial da equação (5.15), com:

$$\begin{aligned} M(\xi) &= \begin{bmatrix} m & 0 & m_c d \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & m & -m_c d \cos \theta & 0 & 0 \\ m_c d \sin \theta & m_c d \cos \theta & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w \end{bmatrix} \\ V(\xi, \dot{\xi}) &= \begin{bmatrix} m_c d \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ m_c d \dot{\theta}^2 \sin \theta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad E(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Reescrevendo (5.4), (5.5) e (5.6) na forma matricial, tem-se a equação  $A(\xi)\dot{\xi} = 0$ , ou

$$\begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & d & 0 & 0 \\ -\cos \theta & -\sin \theta & -b & r & 0 \\ -\cos \theta & -\sin \theta & b & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}_R \\ \dot{\varphi}_L \end{bmatrix} = 0$$

### 5.3 Linearização entrada-saída por realimentação estática de estados

Seja o sistema não linear multivariável com igual número de entradas e saídas ( $n = p$ ) descrito na forma de espaço de estados como

$$\begin{aligned}\dot{q} &= f(q) + g_1(q)u_1 + g_2(q)u_2 + \cdots + g_p(q)u_p \\ z_1(q) &= h_1(q) \\ &\vdots \\ z_p(q) &= h_p(q),\end{aligned}$$

onde  $q \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$ ,  $z \in \mathbb{R}^p$ ,  $f(q)$  e  $g_1(q), \dots, g_p(q)$  são campos vetoriais suaves e  $h_1(q), \dots, h_p(q)$  são funções suaves.

Diferenciando-se a saída  $z_j$  com relação ao tempo, obtém-se:

$$\dot{z}_j = L_f h_j + \sum_{i=1}^p (L_{g_i} h_j) u_i \quad (5.16)$$

Analisando-se a expressão acima, nota-se que se os termos  $L_{g_i} h_j$  forem nulos, o efeito das entradas não aparecerão em (5.16). O método de linearização entrada-saída consiste em derivar a equação de saída até que a entrada apareça na expressão derivada. Define-se então  $\gamma_j$  como sendo o menor valor inteiro tal que pelo menos uma das entradas apareça na saída  $z_j^{(\gamma_j)}$ , isto é<sup>2</sup>,

$$z_j^{(\gamma_j)} = L_f^{\gamma_j} h_j + \sum_{i=1}^p L_{g_i} (L_f^{\gamma_j-1} h_j) u_i, \quad (5.17)$$

onde pelo menos um dos termos  $L_{g_i} (L_f^{\gamma_j-1} h_j) \neq 0$ , para todo  $q$  pertencente à região onde a linearização é válida. Desta maneira, pode-se definir uma matriz  $E(q)$ , de dimensão  $p \times p$ , como

$$E(q) = \begin{bmatrix} L_{g_1} (L_f^{\gamma_1-1} h_1) & \cdots & L_{g_p} (L_f^{\gamma_1-1} h_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} (L_f^{\gamma_p-1} h_p) & \cdots & L_{g_p} (L_f^{\gamma_p-1} h_p) \end{bmatrix}$$

e então reescrever (5.17) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} z_1^{\gamma_1} \\ \vdots \\ z_p^{\gamma_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^{\gamma_1} h_1 \\ \vdots \\ L_f^{\gamma_p} h_p \end{bmatrix} + E(q) \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$$

Se a matriz  $E(q)$  for não singular para todo  $x$  pertencente à região de interesse, então a lei de controle por realimentação de estados

$$u = -E^{-1}(q) \begin{bmatrix} L_f^{\gamma_1} h_1 \\ \vdots \\ L_f^{\gamma_p} h_p \end{bmatrix} + E^{-1}(q)v$$

---

<sup>2</sup> $L_f h_j$  e  $L_{g_i} h_j$  representam, respectivamente, a derivada de Lie de  $h_j(q)$  com relação a  $f(q)$  e a  $g_i(q)$ , respectivamente.

resulta, em malha fechada, no sistema linear

$$\begin{bmatrix} z_1^{\gamma_1} \\ \vdots \\ z_p^{\gamma_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix},$$

onde  $v = [v_1 \ \cdots \ v_p]^T$  pode ser qualquer lei de controle linear.

### 5.3.1 Linearização do modelo cinemático de postura

Pode-se desenvolver também uma realimentação linearizante para o modelo cinemático de postura do robô. Para isto, reescreve-se o sistema não linear multivariável na forma afim:

$$\dot{q} = f(q) + G(q)u \quad (5.18)$$

Da Propriedade 3, tem-se que a dimensão do maior subsistema que pode ser linearizável por realimentação estática de estados é  $\delta_m + \delta_s$ . Neste caso,  $\delta_m + \delta_s = 2$ . Assim sendo, escolhe-se os estados que representam a posição do robô,  $(x, y)$ , com relação ao sistema global. Em muitos casos, isto é perfeitamente aceitável, dependendo do objetivo do controle e da geometria do robô.

Elege-se ainda um ponto, *a priori* arbitrário, do corpo do robô como ponto de referência. Então, agora a posição do robô é tomada como sendo a posição deste ponto, e não mais o centro  $C$ . A este ponto de referência, associa-se um novo sistema de coordenadas,  $\{R, X_r, Y_r\}$ , como mostrado na Figura 5.2. A representação deste ponto com relação ao sistema global  $\{O, X_o, Y_o\}$  é dada por:

$$q_r = R_C^o q_r^c + q_c = \begin{bmatrix} x_c + x_r^c \cos \theta - y_r^c \sin \theta \\ y_c + x_r^c \sin \theta + y_r^c \cos \theta \\ \theta \end{bmatrix}$$

Reescrevendo (5.18) e considerando a saída com relação a  $R$ , tem-se:

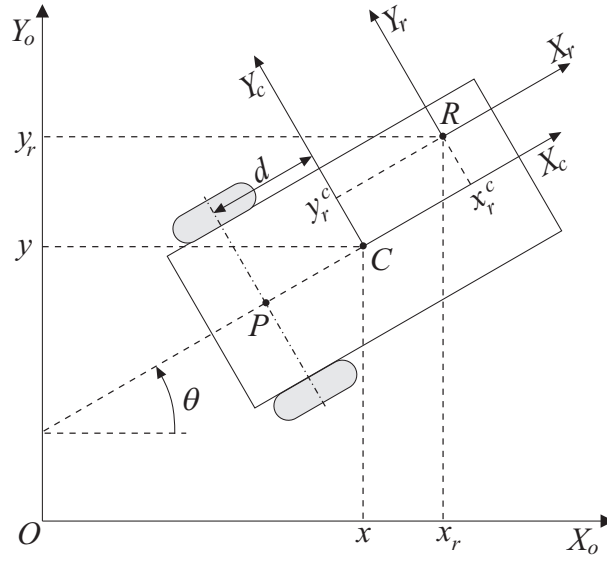
$$\begin{aligned} \dot{q} &= f(q) + g_1(q)u_1 + g_2(q)u_2 \\ z_1(q) &= h_1(q) \\ z_2(q) &= h_2(q), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} f(q) &= 0 \\ g_1(q) &= [\cos \theta \ \sin \theta \ 0]^T \\ g_2(q) &= [0 \ 0 \ 1]^T \\ h_1(q) &= x_c + x_r^c \cos \theta - y_r^c \sin \theta \\ h_2(q) &= y_c + x_r^c \sin \theta + y_r^c \cos \theta \end{aligned}$$

A primeira derivada de  $z(q)$  com relação a  $h_1(q)$  resulta em:

$$\dot{z}_1(q) = L_f h_1 + L_{g_1} h_1 u_1 + L_{g_2} h_1 u_2$$

Figura 5.2: Sistemas de coordenadas do robô móvel com o ponto de referência  $R$ .

com

$$L_f h_1 = \frac{\partial h_1}{\partial q} f(q) = 0 \quad L_{g_1} h_1 = \frac{\partial h_1}{\partial q} g_1(q) = \cos \theta \quad L_{g_2} h_1 = \frac{\partial h_1}{\partial q} g_2(q) = -(x_r^c \sin \theta + y_r^c \cos \theta)$$

A primeira derivada de  $z(q)$  com relação a  $h_2(q)$  resulta em:

$$\dot{z}_2(q) = L_f h_2 + L_{g_1} h_2 u_1 + L_{g_2} h_2 u_2$$

com

$$L_f h_2 = \frac{\partial h_2}{\partial q} f(q) = 0 \quad L_{g_1} h_2 = \frac{\partial h_2}{\partial q} g_1(q) = \sin \theta$$

$$L_{g_2} h_2 = \frac{\partial h_2}{\partial q} g_2(q) = x_r^c \cos \theta - y_r^c \sin \theta$$

Como as entradas já aparecem em  $\dot{z}_1(q)$  e  $\dot{z}_2(q)$ , a saída não pode mais ser derivada. Define-se então uma matriz  $\beta(q)$  de dimensão  $p \times p$ , como:

$$\beta(q) = \begin{bmatrix} L_{g_1} h_1 & L_{g_2} h_1 \\ L_{g_1} h_2 & L_{g_2} h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -(x_r^c \sin \theta + y_r^c \cos \theta) \\ \sin \theta & x_r^c \cos \theta - y_r^c \sin \theta \end{bmatrix}$$

e escreve-se o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \beta(q) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Logo, a realimentação que lineariza o sistema (5.19) é a seguinte:

$$u = \beta(q)^{-1} v,$$

onde  $v$  é uma lei de controle linear do tipo  $v = Le$ , com

$$L = \begin{bmatrix} l_x & 0 \\ 0 & l_y \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{ref} - x_c \\ y_{ref} - y_c \end{bmatrix}$$

É interessante verificar a existência da inversa de  $\beta(q)$ , que para existir, precisa ter determinante diferente de zero. Não é difícil de ver que, para isto acontecer, o valor de  $x_r^c$  precisa ser diferente de zero, ou seja, o ponto de referência  $R$  não pode estar sobre o eixo comum às rodas fixas (sobre a reta  $\overline{WP}$ , na Figura 3.1). Isto ocorre devido ao fato de que pontos sobre este eixo podem mover-se instantaneamente em apenas uma direção, enquanto que os demais pontos podem mover-se em duas direções [27].

Tem-se então o seguinte sistema em diagrama de blocos:

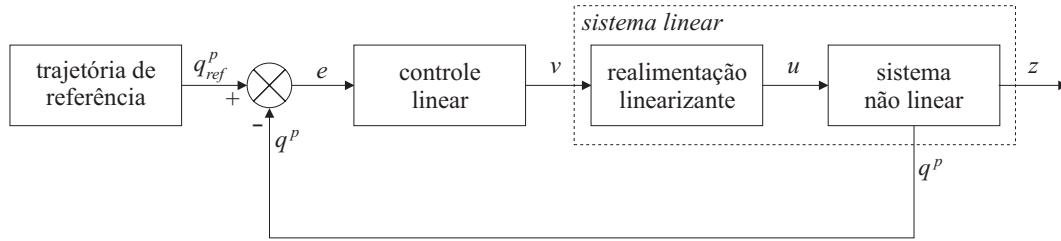


Figura 5.3: Diagrama de blocos do sistema com a realimentação linearizante estática.

Observou-se então, em resultados de simulação, que para diversos valores de  $l_x$  e  $l_y$  e para diversas trajetórias a lei de controle e a linearização funcionaram perfeitamente, fazendo com que o robô convergisse assintoticamente para a trajetória de referência. Nas figuras abaixo, o comportamento do robô para  $l_x = l_y = 3$  para uma trajetória em forma de oito e para uma trajetória na forma de um quadrado. Os algoritmos foram implementados em linguagem de programação C++ e executados em computadores com sistema operacional Linux.

## 5.4 Linearização dinâmica entrada-saída

Seja o vetor de estados igual a  $\xi = [x \ y \ \theta \ \varphi_R \ \varphi_L \ \dot{\varphi}_R \ \dot{\varphi}_L]^T$ . Deseja-se encontrar uma realimentação estática de estados

$$u = f_2^{-1}(v - f_1)$$

para o sistema

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} S\eta \\ f_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \end{bmatrix} u \quad (5.20)$$

com

$$f_1 = - \left[ (S^T M S)^{-1} (S^T M \dot{S} \eta + S^T V) \right] \quad (5.21)$$

$$f_2 = (S^T M S)^{-1} S^T E \quad (5.22)$$

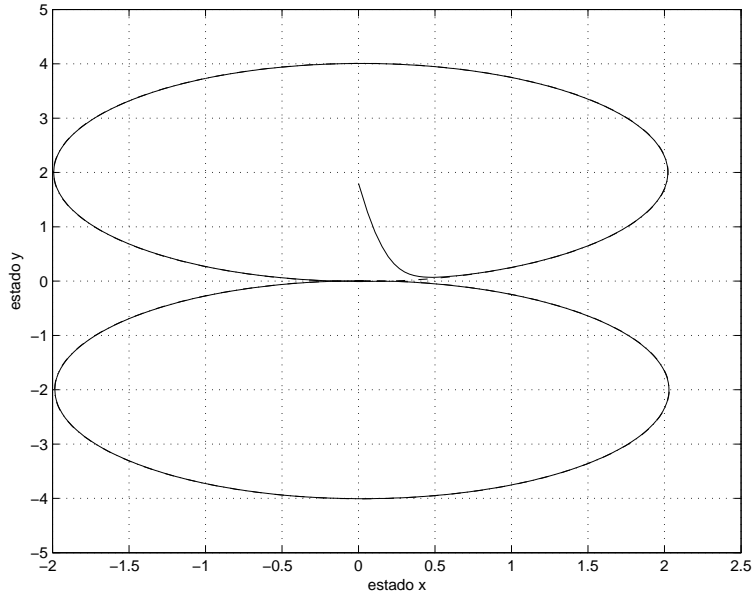


Figura 5.4: *Comportamento do robô para uma trajetória de referência em forma de oito.*

É necessário achar uma matriz  $S(\xi)$  tal que  $A(\xi)S(\xi) = 0$ . Escrevendo esta expressão como

$$\begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & d & 0 & 0 \\ -\cos \theta & -\sin \theta & -b & r & 0 \\ -\cos \theta & -\sin \theta & b & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix} = 0$$

Fazendo

$$s_3 = \frac{(s_4 - s_5)}{r} 2b$$

e definindo  $c \triangleq \frac{r}{2b}$  e fazendo  $s_4 = 1$ ,  $s_5 = 0$ , tem-se  $s_3 = c$ . Então:

$$s_1 = c(d \sin \theta + b \cos \theta)$$

$$s_2 = c(b \sin \theta - d \cos \theta)$$

Similarmente, faz-se  $s_4 = 0$ ,  $s_5 = 1$ , e tem-se  $s_3 = -c$ . Então:

$$s_1 = c(b \cos \theta - d \sin \theta)$$

$$s_2 = c(b \sin \theta + d \cos \theta)$$

Com isto tem-se a matriz  $S(\xi)$  como

$$S(\xi) = \begin{bmatrix} c(d \sin \theta + b \cos \theta) & c(b \cos \theta - d \sin \theta) \\ c(b \sin \theta - d \cos \theta) & c(b \sin \theta + d \cos \theta) \\ c & -c \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

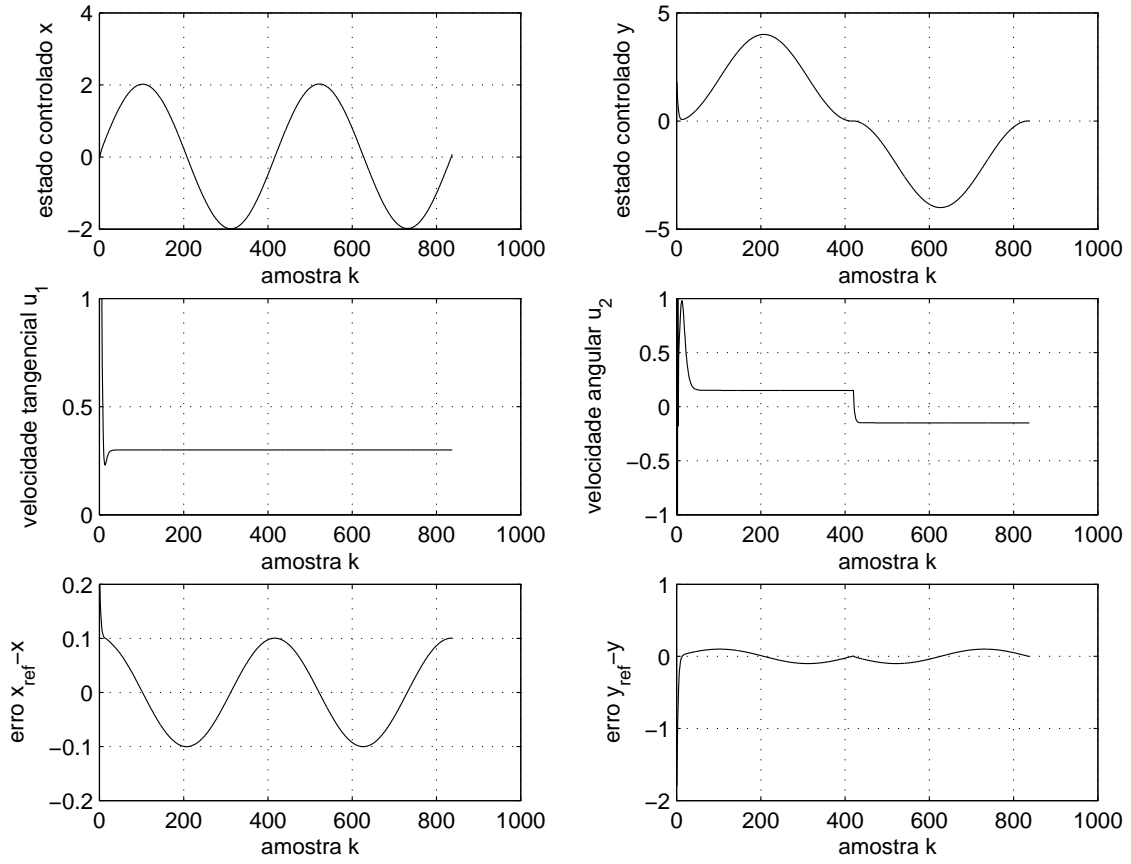


Figura 5.5: Comportamento do robô para uma trajetória de referência em forma de oito.

Esta matriz satisfaz  $A(\xi)S(\xi) = 0$ . Assim, existe um vetor de entradas de controle  $u$  tal que  $\dot{\xi} = S(\xi)u$ .

Nota-se que neste caso,  $S^T(\xi)E(\xi) = I$ . Então, tem-se que  $u = S^T MS(v - f_1)$  e o modelo em malha fechada é o seguinte:

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} S(\xi)\eta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} v,$$

com

$$S(\xi)\eta = \begin{bmatrix} c[\varphi_R(d \sin \theta + b \cos \theta) + \varphi_L(b \cos \theta - d \sin \theta)] \\ c[\varphi_R(b \sin \theta - d \cos \theta) + \varphi_L(b \sin \theta + d \cos \theta)] \\ c(\varphi_R - \varphi_L) \\ \varphi_R \\ \varphi_L \end{bmatrix}$$

Deseja-se achar uma realimentação linearizante entrada-saída para os seguintes estados:

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Para achar uma lei de controle, utiliza-se a teoria de sistemas não lineares para realimentação

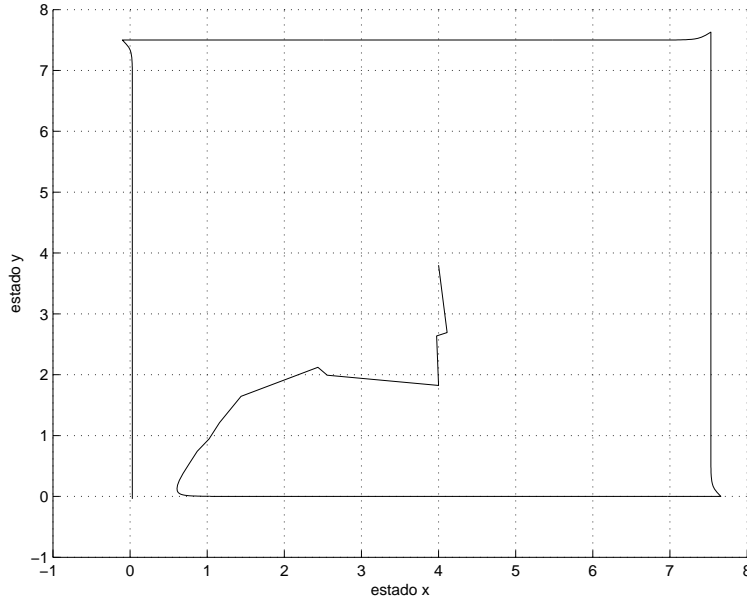


Figura 5.6: Comportamento do robô para uma trajetória de referência em forma de quadrado.

entrada-saída (encontrada em [25]). Derivando a saída uma vez,

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} S(\xi)\eta$$

Vê-se que a primeira derivada da saída é independente da entrada. Então, deriva-se mais uma vez. Assim, tem-se:

$$\ddot{z} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_R c^2 (\dot{\varphi}_R - \dot{\varphi}_L) (d \cos \theta - b \sin \theta) - \dot{\varphi}_L c^2 (\dot{\varphi}_R - \dot{\varphi}_L) (b \sin \theta + d \cos \theta) \\ \dot{\varphi}_R c^2 (\dot{\varphi}_R - \dot{\varphi}_L) (b \cos \theta + d \sin \theta) - \dot{\varphi}_L c^2 (\dot{\varphi}_R - \dot{\varphi}_L) (b \cos \theta - d \sin \theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c(d \sin \theta + b \cos \theta) & c(b \cos \theta - d \sin \theta) \\ c(b \sin \theta - d \cos \theta) & c(b \sin \theta + d \cos \theta) \end{bmatrix} u$$

A entrada  $u$  aparece na segunda derivada. A equação acima pode ser reescrita como

$$\ddot{z} = f_1(\xi) + f_2(\xi)u$$

Então, a realimentação que lineariza o sistema para  $\ddot{z} = [x \ y]^T$  será da forma:

$$u = f_2^{-1}(\xi) (v - f_1(\xi))$$

Para a inversa de  $f_2(\xi)$  existir, tem-se que  $\det(f_2(\xi)) \neq 0$ . Então:

$$\det(f_2(\xi)) = \frac{r}{2b}d,$$

de onde conclui-se que, para  $f_2^{-1}(\xi)$  existir,  $d$  precisa ser diferente de zero, ou seja, o centro de gravidade (ou qualquer ponto de referência no corpo do robô) não pode estar sobre o eixo que liga



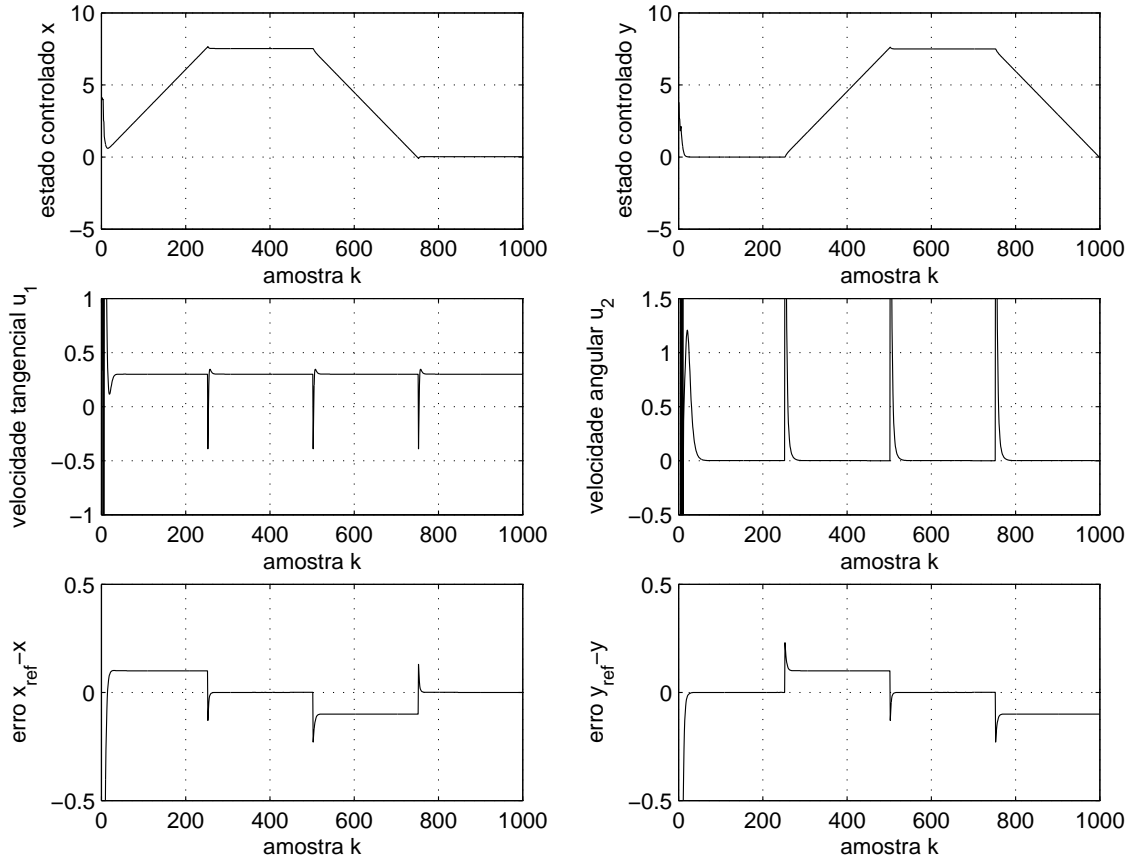


Figura 5.7: Comportamento do robô para uma trajetória de referência em forma de quadrado.

as duas rodas ativas, ao longo da reta  $\overline{WP}$ . Intuitivamente, é um resultado óbvio, pois sobre este eixo o robô não possui movimento na direção de  $Y_c$ , por causa da restrição não holonômica. Pontos sobre este eixo podem mover-se, instantaneamente, em apenas uma dimensão (apenas em  $X_c$ ), enquanto que pontos em posições diferentes no corpo do robô podem mover-se em duas dimensões.

## 5.5 Controle em coordenadas polares

Apresenta-se nesta seção um exemplo de controle para robôs móveis com acionamento diferencial onde o seu modelo cinemático é transformado para um modelo descontínuo através da mudança para coordenadas polares.

Considera-se o seguinte modelo cinemático de um robô móvel com acionamento diferencial:

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}^T. \quad (5.23)$$

As coordenadas de configuração são dadas por  $\xi = [x \ y \ \theta]^T$  e as entradas de controle são dadas por  $[v \ \omega]^T$ , onde  $v$  é a velocidade translacional e  $\omega$  é a velocidade rotacional.

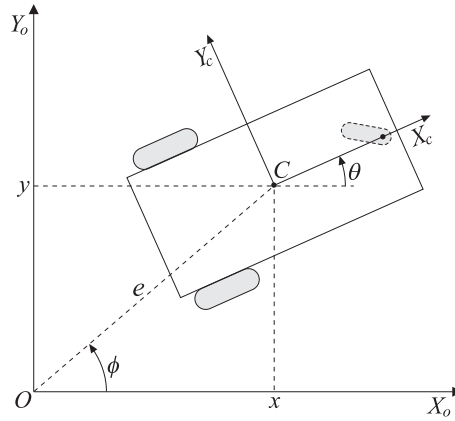


Figura 5.8: Modelo geométrico de um robô móvel com acionamento diferencial em coordenadas polares.

Da Figura 5.8, tem-se que

$$e = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \phi = \text{atan2}(y, x) \quad x = e \cos \phi \quad y = e \sin \phi,$$

onde  $\text{atan2}(y, x) \in (-\pi, \pi]$ . Diferenciando-se as expressões de  $e$  e  $\phi$ , tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} \cos \phi + \dot{y} \sin \phi \\ \dot{\phi} &= \frac{1}{e} (\dot{x} \sin \phi + \dot{y} \cos \phi) \end{aligned}$$

Considerando  $\alpha = \theta - \phi$ , tem-se o seguinte sistema em coordenadas polares representando o modelo cinemático do robô:

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 \\ \frac{\sin \alpha}{e} & 0 \\ -\frac{\sin \alpha}{e} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Claramente, o modelo não está definido para  $e = 0$ , e o sistema torna-se descontínuo. Agora, o Teorema de Brockett não vale mais, e uma lei de controle suave e invariante no tempo pode ser obtida para estabilizar o sistema, Nota-se que, se esta lei de controle for levada para a base do sistema (5.23), esta será descontínua.

O objetivo do controle é que os valores de  $e$ ,  $\theta$  e  $\alpha$  converjam para zero. Para analisar a estabilidade do controle, considera-se a seguinte função de Liapunov:

$$V = \frac{1}{2} \lambda e^2 + \frac{1}{2} (\alpha^2 + h \phi^2),$$

onde  $\lambda$  e  $h$  são constantes positivas.

Derivando-se a função acima, temos

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2, \quad (5.25)$$

com

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \lambda e \cos \alpha \eta_1 \\ \dot{V}_2 &= \alpha \left[ \eta_2 - \frac{\sin \alpha}{e \alpha} (\alpha + h \phi \eta_1) \right]\end{aligned}$$

Das equações acima, temos as expressões para lei de controle:

$$\eta_1 = \gamma_1 e \cos \alpha \quad (5.26)$$

$$\eta_2 = -\gamma_2 \alpha - \gamma_1 \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} (\alpha - h \phi) \quad (5.27)$$

com  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $h$  sendo constantes positivas. Substituindo estas expressões em (5.25), tem-se que

$$\dot{V} = -\gamma_1 \lambda e^2 \cos^2 \alpha - \gamma_2 \alpha^2,$$

que será sempre negativa semi-definida. Como  $V$  é definida positiva e radialmente ilimitada, o sistema é estável em malha fechada.  $\dot{V}$  é não crescente e uniformemente contínua (pois  $\ddot{V}$  é limitada – Lema de Barbalat), então  $e$  e  $\alpha$  convergirão para zero.

Usando (5.26) e (5.27), o sistema em malha fechada é escrito como:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= -\gamma_1 e \cos^2 \alpha \\ \dot{\phi} &= -\gamma_1 \sin \alpha \cos \alpha \\ \dot{\alpha} &= -\gamma_2 \alpha + \gamma_1 h \phi \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha}\end{aligned}$$

Analisando o sistema em malha fechada acima, e considerando que  $e \rightarrow 0$  e  $\alpha \rightarrow 0$ , pode-se concluir também que  $\dot{e} \rightarrow 0$  e  $\dot{\phi} \rightarrow 0$ . Deste modo, tem-se que  $\dot{\alpha}$  converge para algum valor constante dado por  $\gamma_1 h \phi^*$ . Novamente pelo Lema de Barbalat, tem-se que  $\dot{\alpha} \rightarrow 0$ . Logo,  $\phi^* \rightarrow 0$ .

## 5.6 Controle cinemático variante no tempo

O problema de rastreamento de trajetória é usualmente formulado a partir da introdução de um *modelo de referência* descrito pela configuração  $\xi_{ref} = [x_{ref} \ y_{ref} \ \theta_{ref}]^T$  e pelas velocidades  $v_{ref}$  e  $\omega_{ref}$ , que são limitadas, com derivadas limitadas, e dada a limitação de Brockett [8], são diferentes de zero para  $t \rightarrow 0$ , onde  $t$  é o tempo.

O objetivo do controle é então fazer com que as diferenças  $x - x_{ref}$ ,  $y - y_{ref}$  e  $\theta - \theta_{ref}$  convergiam para zero. O erro pode ser expressado, em uma forma matricial, como [21, 34]:

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_{ref} \\ y - y_{ref} \\ \theta - \theta_{ref} \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Diferenciando (5.28) e introduzindo a seguinte mudança de entradas:

$$\begin{aligned}u_1 &= v_{ref} \cos e_3 - v \\ u_2 &= \omega_{ref} - \omega,\end{aligned}$$

temos o seguinte sistema dinâmico não linear:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} o & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin e_3 \\ 0 \end{bmatrix} v_{ref} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

onde  $u_1$  e  $u_2$  são as variáveis de controle.

Duas soluções são agora desenvolvidas: a primeira é a que usa uma lei de controle linear, onde considera-se o sistema linearizado em torno do equilíbrio ( $e = 0, u = 0$ ). A segunda utiliza o modelo não linear para a obtenção de uma lei de controle não linear.

### 5.6.1 Lei de controle linear

Linearizando o sistema (5.29) em torno do equilíbrio ( $e = 0, u = 0$ ), temos o seguinte sistema linear e variante no tempo:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} o & \omega_{ref}(t) & 0 \\ -\omega_{ref}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

Assumindo  $v_{ref}(t) = v_{ref}$  e  $\omega_{ref}(t) = \omega_{ref}$ , temos a seguinte matriz de controlabilidade para o sistema 5.30:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\omega_{ref}^2 & v_{ref}\omega_{ref} \\ 0 & 0 & -\omega_{ref} & v_{ref} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema é controlável se o posto da matriz  $\mathcal{C}$  é completo. Claramente, nota-se que, se o sistema de referência estiver parado, ou seja,  $v_{ref} = \omega_{ref} = 0$ , a matriz  $\mathcal{C}$  não terá posto completo. Conclui-se então que o sistema (5.23) não pode ser estabilizado em um ponto de equilíbrio. O sistema apenas estabiliza quando o sistema de referência mantém-se em movimento.

Para evitar o problema da falta de controlabilidade, escolhe-se uma lei de controle tal que os pólos do sistema em malha fechada dependam dos valores das velocidades de referência  $v_{ref}$  e  $\omega_{ref}$ . Assim, os pólos em malha fechada são dados por:

$$(s + 2\xi a)(s^2 + 2\xi a s + a^2) = 0,$$

onde

$$a = \sqrt{\omega_{ref}^2 + b v_{ref}^2}. \quad (5.31)$$

Tem-se assim a seguinte lei de controle:

$$\begin{aligned} u_1 &= -k_1 e_1 \\ u_2 &= k_2 \text{sign}(v_{ref}) e_2 - k_3 e_3, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= 2\xi a \\ k_2 &= b |v_{ref}| \\ k_3 &= 2\xi a \end{aligned}$$

e a função  $\text{sign}(x)$  é definida como:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0 \end{cases}$$

### 5.6.2 Lei de controle não linear

Considerando o sistema (5.29), temos a seguinte lei de controle não linear:

$$\begin{aligned} u_1 &= -k_1(v_{ref}, \omega_{ref}) e_1 \\ u_2 &= -k_4 v_{ref} \frac{\sin e_3}{e_3} e_2 - k_3(v_{ref}, \omega_{ref}) e_3, \end{aligned}$$

onde  $k_4$  é uma constante positiva e  $k_1$  e  $k_3$  são funções contínuas e estritamente positivas. Considerando:

$$\begin{aligned} k_1(v_{ref}, \omega_{ref}) &= k_3(v_{ref}, \omega_{ref}) = 2\xi a \\ k_4 &= b, \end{aligned}$$

onde  $a$  é dado pela equação (5.31).

Este controle tem a propriedade de estabilizar assintoticamente e globalmente a origem  $e = 0$ . A prova para isto pode ser feita baseada em funções de Liapunov [34].

## Capítulo 6

# Conclusões

Foram temas tratados neste trabalho:

- *Modelagem de robôs móveis não holonômicos dotados de rodas.*

Baseado no trabalho desenvolvido por Campion et al. em [12], onde o assunto é tratado de forma sistemática. Foi visto que, considerando o interesse em implementações reais e factíveis, os robôs móveis podem ser classificados em cinco classes distintas, conforme o seu grau de mobilidade,  $\delta_m$ , e o seu grau de dirigibilidade,  $\delta_s$ , que definem a capacidade que um robô possui de se movimentar em um plano de configuração. São desenvolvidos então os modelos cinemáticos de postura e de configuração e os modelos dinâmicos de postura e de configuração. No modelo cinemático aparecem explicitamente as restrições ao movimento do robô, já que estas se dão com respeito à velocidade do mesmo. As entradas deste modelo são as velocidades das rodas. No modelo dinâmico, as entradas são os torques aplicados nos atuadores das rodas, o que é mais realista. Com este modelo, é possível considerar restrições quanto à potência máxima dos atuadores, evitando a saturação dos mesmos. Também é possível, com o modelo dinâmico, desenvolver estratégias adaptativas de controle, quando os parâmetros são variáveis ou desconhecidos, o que geralmente não acontece a nível cinemático, pois os parâmetros para este modelo são relacionados à construção do robô, e são fáceis de calcular e calibrar.

- *Controle de robôs móveis.*

A síntese de leis de controle para sistemas mecânicos não holonômicos esbarra na imposição dada pelo Teorema de Brockett [8], em que um sistema deste tipo não pode ser estabilizado em um ponto de equilíbrio por uma lei de controle estática suave e invariante no tempo. Com isto, técnicas usuais de controle não linear não podem ser mais utilizadas. Para transpor esta restrição, diversos métodos são propostos, como controle variante no tempo, controle descontínuo (não suave), controle adaptativo, controle inteligente (redes neurais, lógica difusa). Com base na literatura existente, foi possível as seguintes classificações no que diz respeito ao controle de robôs móveis: quanto ao tipo de modelo (cinemático ou dinâmico), quanto à metodologia de controle (variante no tempo, descontínuo, adaptativo, inteligente, linearizante), quanto ao tipo de malha de controle (malha aberta ou fechada) e quanto ao objetivo

(estabilização em um ponto, rastreamento de trajetória ou seguimento de caminho).

No Capítulo 5, utilizou-se um modelo de robô móvel com acionamento diferencial, frequentemente encontrado na literatura. Referenciando o Capítulo 3, foi analisada a classe do robô, onde chegou-se à conclusão de que o mesmo pertence à Classe  $(2,0)$ . Foram desenvolvidos, então, os modelos cinemático de postura e configuração, e o modelo dinâmico de configuração. Algumas técnicas de controle em malha fechada, como controle linearizante, e controle variante no tempo, foram então mostradas. Provavelmente este será o tipo de robô utilizado no trabalho de dissertação, caso este inclua algum tipo de implementação prática. A título ilustrativo, foi mostrado um controle por realimentação estática de estados, para o modelo cinemático, onde considerou-se o controle apenas nos estados de posição do robô, desconsiderando a orientação do mesmo. Esta é uma situação bem aceitável, visto que para alguns objetivos de controle, e dependendo da geometria do robô, este último estado não interfere na convergência do robô para a trajetória.

O autor considera o presente trabalho incompleto, mas suficiente para o propósito do mesmo, dado o desconhecimento por parte do autor em geometria diferencial e controle não linear, que são as bases do assunto. Foi possível o desenvolvimento teórico tanto em modelagem quanto em controle de robôs móveis, e tentou-se obter uma visão geral das diversas metodologias de controle utilizadas, visto que o assunto ainda não está estruturado de forma organizada na literatura.

A pretensão para o trabalho de dissertação de mestrado é de aprofundar conceitos em controle de sistemas não lineares e geometria diferencial, sendo assim possível propor alguma técnica de controle para um robô móvel dotado de rodas.

# Apêndice A

## Definições Matemáticas

### A.1 Geometria diferencial

#### Campo vetorial

Um mapeamento  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $D \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio<sup>1</sup>, é dito ser um *campo vetorial* em  $D$ .

Ainda, seja  $T_x D$  o espaço tangente a  $D$  em um ponto  $x \in D$ . Um campo vetorial em  $D$  é um mapeamento suave que relaciona um vetor tangente  $f(x)$  a cada ponto  $x \in D$ .

Em coordenadas locais, um campo vetorial é representado por um vetor-linha de ordem  $n$ ,  $f(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ \cdots \ f_n(x)]^T$ .

#### Campo covetorial

O espaço transposto de um campo vetorial é chamado de *campo covetorial*, formado por um vetor-coluna de ordem  $n$ ,  $f(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ \cdots \ f_n(x)]$ .

#### Produto interno

Se  $f$  e  $g$  são, respectivamente, um campo vetorial e um campo covetorial em  $D$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , então o *produto interno*  $\langle g, f \rangle$  é definido como:

$$\langle g, f \rangle = g(x)f(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x)f_i(x)$$

#### Diferencial

Seja  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ . A *diferencial* de  $h$  é um campo covetorial definido por

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x} = \left[ \frac{\partial h}{\partial x_1} \ \cdots \ \frac{\partial h}{\partial x_n} \right]$$

---

<sup>1</sup> $D$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ .



### Derivada de Lie

Seja  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . A *derivada de Lie* de  $h$  com relação a  $f$ , ou ao longo de  $f$ , é definida como

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x)$$

Assim, usa-se as seguintes notações:

$$\begin{aligned} L_f^0 h(x) &= h(x) \\ L_f^2 h(x) &= L_f L_f h(x) = \frac{\partial (L_f h)}{\partial x} f(x) \\ L_f^k h(x) &= L_f L_f^{k-1} h(x) = \frac{\partial (L_f^{k-1} h)}{\partial x} f(x) \\ L_g L_f h(x) &= \frac{\partial (L_f h)}{\partial x} g(x) \end{aligned}$$

### Colchetes de Lie

Seja  $f$  e  $g$  dois campos vetoriais em  $D \subset \mathbb{R}^n$ . O *colchete de Lie*<sup>2</sup> de  $f$  e  $g$ , denotado por  $[f, g]$ , é um terceiro campo vetorial definido como

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

onde  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial g}{\partial x}$  são matrizes jacobianas. A seguinte notação é utilizada:

$$\begin{aligned} ad_f^0 g(x) &= g(x) \\ ad_f g(x) &= [f, g](x) \\ ad_f^k g(x) &= [f, ad_f^{k-1} g](x) \end{aligned}$$

Os colchetes de Lie apresentam ainda as seguintes propriedades:

- Bilinearidade: sejam  $f_1, f_2, g_1$  e  $g_2$  campos vetoriais e  $\alpha, \beta$  números reais. Então,

$$\begin{aligned} [\alpha f_1 + \beta f_2, g_1] &= \alpha [f_1, g_1] + \beta [f_2, g_1] \\ [f_1, \alpha g_1 + \beta g_2] &= \alpha [f_1, g_1] + \beta [f_1, g_2] \end{aligned}$$

- Comutatividade:

$$[f, g] = -[g, f]$$

- Identidade de Jacobi: se  $f$  e  $g$  são campos vetoriais e  $h$  é uma função real, então

$$L_{[f, g]} h(x) = L_f L_g h(x) - L_g L_f h(x)$$

---

<sup>2</sup>Do inglês, *Lie bracket*.

## Difeomorfismo

Um mapeamento  $T : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um *difeomorfismo* em  $D$  se  $T$  é inversível em  $D$ , ou seja, existe um função  $T^{-1}(x)$  tal que  $T^{-1}(T(x)) = x$  para todo  $x \in D$ , e ambas as funções  $T(x)$  e  $T^{-1}(x)$  são diferenciáveis. Se a matriz jacobiana  $\frac{\partial T}{\partial x}$  é não singular em um ponto  $x_0 \in D$ , então existe uma vizinhança  $N$  de  $x_0$  tal que  $T$ , restrita a  $N$ , é um difeomorfismo em  $N$ .  $T$  é dito ser um *difeomorfismo global* se  $T$  é um difeomorfismo em  $\mathbb{R}^n$  e  $T(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ , ou

1.  $\frac{\partial T}{\partial x}$  é não singular para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ;
2.  $T$  é *própria*, ou seja,  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|T(x)\| = \infty$ .

O conceito de difeomorfismo pode ser visto como uma generalização do conceito de transformação de coordenadas. Pode ser utilizado para transformar um sistema não linear em outro sistema não linear, cuja dinâmica passa a ser descrita por um novo conjunto de estados.

## Distribuição

Seja  $f_1, f_2, \dots, f_k$  campos vetoriais em  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Para qualquer ponto fixo  $x \in D$ , os campos vetoriais  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$  são vetores pertencentes a  $\mathbb{R}^n$  e

$$\Delta(x) = \text{span} \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\}$$

é um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ . Para cada ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ , atribui-se um subespaço  $\Delta(x)$ , definido como

$$\Delta = \text{span} \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$$

A este subespaço chama-se *distribuição*. Em outras palavras,  $\Delta$  é o conjunto de todos os espaços vetoriais  $\Delta(x)$  para  $x \in D$ .

A dimensão de  $\Delta(x)$  é dada por

$$\dim(\Delta(x)) = \rho[f_1(x) \ f_2(x) \ \cdots \ f_k(x)],$$

e esta dimensão pode variar com  $x$ , mas se  $\Delta' = \text{span}\{f_1, \dots, f_r\}$  e  $f_1, \dots, f_r$  são linearmente independentes para todo  $x \in D$ , então  $\dim(\Delta'(x)) = r$  para todo  $x \in D$ . Neste caso, diz-se que  $\Delta'$  é uma *distribuição não singular* em  $D$ , gerada por  $f_1, \dots, f_r$ .

## Codistribuição

*Codistribuições* são duais às distribuições. São definidas utilizando campos covetoriais e possuem as mesmas propriedades. Uma codistribuição de interesse particular é a *aniquiladora* da distribuição  $\Delta$ , escrita como  $\Delta^\perp$  e definida como

$$\Delta^\perp(x) = \{\omega \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle \omega, v \rangle = 0, \forall v \in \Delta(x)\},$$

onde  $(\mathbb{R}^n)^*$  é um espaço de vetores-coluna de dimensão  $n$ .

### Distribuição involutiva

Uma distribuição  $\Delta$  é *involutiva* se é fechada no colchete de Lie:

$$g_1 \in \Delta \text{ e } g_2 \in \Delta \Rightarrow [g_1, g_2] \in \Delta$$

Se  $\Delta$  é uma distribuição não singular em  $D$ , gerada pelos campos vetoriais linearmente independentes  $f_1, \dots, f_r$ , então  $\Delta$  é involutiva se e somente se

$$[f_i, f_j] \in \Delta, \quad \forall 1 \leq i, j \leq r,$$

ou

$$[f_i, f_j](x) = \sum_{k=1}^r \alpha_{ijk}(x) f_k(x), \quad \forall i, j,$$

onde  $\alpha_{ijk} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são funções escalares.

Involutividade significa que, se formado o colchete de Lie de qualquer par de campos vetoriais  $f_i, f_j$  do conjunto  $f_1, \dots, f_r$ , então o campo vetorial resultante pode ser expresso como combinação linear dos campos vetoriais originais. Note que:

- Campos vetoriais constantes são sempre involutivos. De fato, o colchete de Lie de dois campos vetoriais constantes,  $[f_{c1}, f_{c2}]$ , é simplesmente o vetor zero, que pode ser trivialmente expresso como combinação linear de  $f_{c1}$  e  $f_{c2}$ ;
- Um conjunto composto de apenas um campo vetorial é involutivo. De fato,

$$[f, f] = \frac{\partial f}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} f = 0$$

- Para uma distribuição ser involutiva, a seguinte condição deve ser atendida:

$$\rho[f_1(x) \cdots f_r(x)] = \rho[f_1(x) \cdots f_r(x) [f_i, f_j](x)],$$

para todos  $i, j$  e  $x$ .

### Integrabilidade completa

Seja  $\Delta$  uma distribuição não singular pertencente a  $D$ , gerada por  $f_1, \dots, f_r$ . Então,  $\Delta$  é *completamente integrável* se para cada  $x_0 \in D$ , existe uma vizinhança  $N$  de  $x_0$  e  $n - r$  funções reais e suaves  $h_1, \dots, h_{n-r}$  que satisfazem a seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial h_j}{\partial x} f_i(x) = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq r \text{ e } 1 \leq j \leq n - r$$

e os campos covetoriais  $dh_j(x)$  são linearmente independentes para todo  $x \in D$ . Isto equivale a

$$\Delta \perp = \text{span}\{dh_1, \dots, dh_{n-r}\}$$

## A.2 Teoremas

### Brockett

FALTA COISA AQUI !!!!!!!!

O Teorema de Brockett fornece condições necessárias e suficientes para a estabilizabilidade de sistemas não holonômicos [3].

**Teorema 1.** *Seja o seguinte sistema,  $\dot{x} = f(x)u$ , com  $f(x_0)u_0 = 0$ , sendo  $f(\cdot)$  uma função continuamente diferenciável em uma vizinhança de  $x_0$  e  $f(x)$  sendo uma distribuição de posto constante em uma vizinhança de  $x_0$ .*

*Então existe uma lei de controle continuamente diferenciável que faz com que  $(q_0, u_0)$  seja assintoticamente estável se e somente se  $\dim(x) = \dim(u)$ .*  $\square$

### Frobenius

O Teorema de Frobenius é uma importante ferramenta quando se utiliza realimentação linearizante de sistemas não lineares. Ele dá condições necessárias e suficientes para a solução de uma classe especial de equações parciais diferenciais, e vem diretamente das definições de distribuição involutiva e distribuição completamente integrável.

**Teorema 2.** *Uma distribuição  $\Delta$  formada por um conjunto de campos vetoriais linearmente independentes  $f_1, \dots, f_r$  é integrável se e somente se  $\Delta$  é involutiva.*  $\square$

### Barbalat

**Teorema 3.** *Seja uma função diferenciável  $x(t)$  e limitada ( $t \rightarrow \infty : x < \infty$ ). Se  $\dot{x}(t)$  é uniformemente contínua (ou seja, a sua derivada é limitada), então  $\dot{x}(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ .*  $\square$

#### Uso do Lema de Barbalat na análise de estabilidade:

Para aplicar o resultado do Lema de Barbalat na análise de sistemas dinâmicos, usualmente são utilizados os seguintes corolários [40]:

**Corolário:** Se a função diferenciável  $x(t)$  é limitada, e se  $\ddot{x}(t)$  existe e é limitada, então  $\dot{x}(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ .

**Corolário:** Se existe uma função escalar  $V(x, t)$  que satisfaz as seguintes condições:

1.  $V(x, t)$  é limitada inferiormente;
2.  $\dot{V}(x, t)$  é negativa semi-definida;
3.  $\dot{V}(x, t)$  é uniformemente contínua no tempo,

então  $\dot{V}(x, t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow \infty$ .

### A.3 Estabilizabilidade e controlabilidade

Esta seção é baseada no Capítulo 1 de [4]. Considera-se agora o sistema

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \Omega \quad (\text{A.1})$$

onde  $x$  é o estado do sistema,  $\Omega$  é uma região aberta e conexa tal que  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}^m$  é a entrada do sistema (A.1).

O problema da **estabilizabilidade** pode ser dada da seguinte maneira: seja  $x_0 \in \Omega$ . Quer-se achar condições para a existência de uma lei de controle  $u = u(x)$  definida em uma vizinhança de  $x_0$  tal que o sistema em malha fechada

$$\dot{x} = f(x, u(x)) = F(x)$$

possui um *ponto de equilíbrio estável* em  $x = x_0$ . Se  $u(x)$  existe, o sistema (A.1) é estaticamente estabilizável em  $x_0$ , e  $u(x)$  é chamada de *lei de realimentação estática estabilizante*, ou simplesmente, um *estabilizador*.

De uma forma mais geral, diz-se que (A.1) é *dinamicamente estabilizável* em  $x_0$  se existe um inteiro  $\nu$ , um ponto  $\xi \in \mathbb{R}^\nu$  e uma função  $g : \Omega \times \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}^\nu$  tal que o novo sistema de controle

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (\text{A.2})$$

$$\dot{\xi} = g(x, \xi) \quad (\text{A.3})$$

é estabilizável em  $(x_0, \xi_0)$  por uma realimentação da forma  $u = u(x, \xi)$ . O sistema (A.3) é usualmente chamado de *compensador* para (A.1). O par formado por (A.2)–(A.3) é chamado de *estabilizador dinâmico*.

Pode-se reescrever o sistema (A.1) na forma *afim*,

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x),$$

onde  $u = (u_1, \dots, u_m)$  e  $f_0, \dots, f_m$  são campos vetoriais pertencentes ao  $\mathbb{R}^n$ . ( $f_0$  descreve o comportamento do sistema quando nenhum controle é aplicado, chamado *termo de deriva*<sup>3</sup>). Ainda, sobre  $u(x)$ , diz-se que  $f(0, u(0)) = f(0, 0) = 0$ .

#### Definição 5.

*É dito que o sistema (A.1) é localmente continuamente estabilizável ou ele admite um estabilizador contínuo local se existe uma realimentação de controle  $u = u(x)$ , contínua em uma vizinhança  $\Omega_0$  da origem, onde  $\Omega_0 \in \Omega$ , fazendo com que o sistema em malha fechada tenha: (a): uma única solução para cada condição inicial  $\bar{x} \in \Omega_0$ ,  $\bar{x} \neq 0$ , e (b): um equilíbrio localmente assintoticamente estável na origem  $x = 0$ .* □

Tem-se ainda as seguintes definições para estabilizabilidade:

---

<sup>3</sup>Do inglês, *drift term*.

**Definição 6.**

É dito que o sistema (A.1) é localmente  $\mathbf{C}^r$ -estabilizável se existe  $u = u(x)$  da classe  $\mathbf{C}^s$  ( $s \geq r$ ) em uma vizinhança  $\Omega_0$  da origem, onde  $\Omega_0 \in \Omega$ .

Quando um sistema é  $\mathbf{C}^r$ -estabilizável para algum  $r \geq 1$ , mas não há necessidade de saber exatamente o valor de  $r$ , é dito que o sistema é suavemente estabilizável. Em outras palavras, o termo "suave" pode ser usado como um sinônimo de "pelo menos  $\mathbf{C}^1$ ".  $\square$

**Definição 7.**

É dito que o sistema (A.1) é localmente linearmente estabilizável se da origem puder ser feito um equilíbrio assintoticamente estável por meio de uma realimentação estática do tipo  $u = Kx$ , onde  $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . O resultado é local pois  $u \in \Omega_0$ , que é um subsistema de  $\Omega$ .  $\square$

Todos os resultados acima podem ser estendidos para o caso global caso  $\Omega_0 = \Omega$ . Definições adicionais podem ainda ser usadas, como *estabilidade fraca* (quando o item (a) da Definição 5 não é satisfeito), ou *quase estabilidade* (quando (b) da Definição 5 não é satisfeito, ou seja, não há regularidade para  $x = 0$  na função de controle).

O seguinte resultado relaciona a estabilizabilidade de sistemas lineares e sistemas não lineares, como segue.

**Definição 8.**

Considerando o sistema (A.1) e assumindo que  $f(0, u(0)) = f(0, 0) = 0$ . Associa-se a (A.1) o sistema linear

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (\text{A.4})$$

onde

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(0,0)}$$

Se (A.4) é estabilizável, então qualquer realimentação linear  $u = Kx$  que estabiliza (A.4) também estabilizará localmente o sistema não linear (A.1). Obviamente, o resultado é apenas local, pois (A.4) trata-se de uma aproximação linear em série de Taylor, desprezando-se os termos de ordem superior.

As afirmações acima permitem dizer que o sistema (A.1) é linearmente estabilizável, e ainda, exponencialmente estabilizável (i. e., as trajetórias convergem para o equilíbrio com taxas exponenciais). este resultado pode ser invertido, dizendo que a condição de estabilizabilidade do sistema linearizado (A.4) é necessária para que o sistema não linear seja exponencialmente estável.  $\square$

A noção de **controlabilidade** pode ser estendida sob vários aspectos, de sistemas lineares para sistemas não lineares [4]. Contudo, geralmente esta extensão recai no conceito de *alcançabilidade* a um determinado ponto.

Como no caso linear, diz-se que um ponto  $x_0$  pode *alcançar* um ponto  $x_1$  em um tempo finito  $T$  se existe um controle em malha aberta  $u(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  que faça com que o sistema com condição inicial  $x_0$  seja igual a  $x_1$  para o tempo  $t = T$ . O conjunto de pontos que podem ser alcançados

a partir de  $x_0$  em um dado tempo  $T$  é chamado *conjunto alcançável* e é denotado por  $R(T, x_0)$ . Assim, tem-se que  $R(0, x_0) = \{x_0\}$ .

**Definição 9.**

Seja  $\Delta$  um subconjunto de  $\Omega$  e seja  $x_0 \in \Delta$ . É dito que o sistema (A.1) é  $\Delta$ -controlável a partir de  $x_0$  se  $\Delta = R(x_0)$ . Ainda, é dito que o sistema (A.1) é completamente controlável a partir de  $x_0$  se o sistema é  $\Omega$ -controlável a partir de  $x_0$ .  $\square$

Em particular, controlabilidade completa tem o mesmo significado que controlabilidade para o caso linear: na região  $\Omega$  onde o sistema (A.1) é definido, todo o ponto  $x_1$  pode ser alcançado de qualquer outro ponto inicial,  $x_0$ , em qualquer tempo  $T$ . O conceito exposto na Definição 9 refere-se à controlabilidade global. Isto induz à próxima definição.

**Definição 10.**

Seja  $x_0 \in \Omega$ . Diz-se que o sistema A.1 é localmente controlável (ou **Small Time Locally Controllable**) em  $x_0$  quando  $x_0$  pertence ao interior de  $R(t, x_0)$ , para  $t > 0$ .  $\square$

FALTA ALGUMA COISA SOBRE STLCL!!!!!!!

# Referências Bibliográficas

- [1] A. P. Aguiar, A. N. Atassi, and A. M. Pascoal. Regulation of a nonholonomic dynamic wheeled mobile robot with parametric uncertainty using lyapunov functions. In *IEEE Conference on Decision and Control*. Sydney, Australia, dez. 2000.
- [2] J. R. Asensio and L. Montano. A kinematic and dynamic model-based motion controller for mobile robots. *IFAC Triennial World Congress*, 2002.
- [3] A. Astolfi. On the stabilization of nonholonomic systems. In *IEEE American Conference on Decision and Control*, pages 3481–3486, dez. 1994.
- [4] A. Bacciotti. *Local stabilization of nonlinear control systems*. World Scientific, 1992.
- [5] J. Barraquand and J. C. Latombe. On nonholonomic mobile robots and optimal maneuvering. In *IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pages 340–347, 1989.
- [6] A. M. Bloch and N. H. McClamroch. Control of mechanical systems with classical nonholonomic constraints. In *IEEE American Conference on Decision and Control*, pages 201–205, dez. 1989.
- [7] A. M. Bloch, M. Reyhanoglu, and N. H. McClamroch. Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(11):1746–1757, nov. 1992.
- [8] R. W. Brockett. *New directions in applied mathematics*. Springer-Verlag, 1982.
- [9] G. Campion, G. Bastin, and B. D’Andréa-Novel. Modelling and control of nonholonomic wheeled mobile robots. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1130–1135, abr. 1991.
- [10] G. Campion, G. Bastin, and B. D’Andréa-Novel. Modelling and state feedback control of nonholonomic mechanical systems. In *IEEE European Conference on Decision and Control*, pages 1184–1189, dez. 1991.
- [11] G. Campion, G. Bastin, and B. D’Andréa-Novel. Dynamic feedback linearization of nonholonomic wheeled mobile robots. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 2527–2532, mai. 1992.



- [12] G. Campion, G. Bastin, and B. D'Andréa-Novel. Structural properties and classifications of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 12(1):47–62, fev. 1996.
- [13] L. F. Chaves. Projeto, construção, modelagem e controle de um robô móvel. Master's thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, nov. 2000.
- [14] C. Canudas de Wit and O. J. Sørдалen. Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomical constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(11):1791–1797, nov. 1992.
- [15] Z. Deng and M. Brady. Dynamic tracking of a wheeled mobile robot. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 1295–1298, jul. 1993.
- [16] W. E. Dixon, D. M. Dawson, F. Zhang, and E. Zergeroglu. Global exponential setpoint control of mobile robots. In *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, pages 683–688, set. 1999.
- [17] K. D. Do, Z. P. Jiang, and J. Pan. A universal saturation controller design for mobile robots. In *IEEE American Conference on Decision and Control*, pages 2044–2049, dez. 2002.
- [18] W. Dong and W. L. Xu. Adaptive tracking control of uncertain nonholonomic dynamic system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(3):450–454, mar. 2001.
- [19] P. Encarnação and A. Pascoal. Combined trajectory tracking and path following control for dynamic wheeled mobile robots. *IFAC Triennial World Congress*, 2002.
- [20] R. Fierro and F. L. Lewis. Control of a nonholonomic mobile robot using neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9(4):589–600, mai. 1998.
- [21] T. Fukao, H. Nakagawa, and N. Adachi. Adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(5):609–615, out. 2000.
- [22] G. Indivieri. Kinematic time-invariant control of a 2d nonholonomic vehicle. In *IEEE American Conference on Decision and Control*, pages 2112–2117, dez. 1999.
- [23] Z. P. Jiang and J. B. Pomet. Global stabilization of parametric chained-form systems by time-varying dynamic feedback. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 10:47–59, 1996.
- [24] Y. Kanayama, Y. Kimura and F. Miyazaki, and T. Noguchi. A stable tracking control method for an autonomous mobile robot. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1990.
- [25] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- [26] I. Kolmanovsky and N. H. McClamroch. Developments in nonholonomic control problems. *IEEE Control Systems Magazine*, 15(6):20–36, dez. 1995.

- [27] W. F. Lages. *Controle e estimação de posição e orientação de robôs móveis*. PhD thesis, Instituto Tecnológico da Aeronáutica, 1998.
- [28] T. C. Lee, C. H. Lee, and C. C. Teng. Adaptive tracking control of nonholonomic mobile robots by computed torque. In *IEEE American Conference on Decision and Control*, pages 1254–1259, dez. 1999.
- [29] R. Murray and S. Sastry. Nonholonomic motion planning: Steering using sinusoids, 1993. Disponível on-line em [citeseer.nj.nec.com/murray93nonholonomic.html](http://citeseer.nj.nec.com/murray93nonholonomic.html).
- [30] R. M. Murray and S. S. Sastry. Steering nonholonomic systems using sinusoids. In *IEEE American Conference on Decision and Control*, pages 2097–2101, dez. 1990.
- [31] W. Oelen, H. Berghuis, H. Nijmeijer, and C. Canudas de Wit. Hybrid stabilizing control on a real mobile robot. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, pages 16–23, jun. 1995.
- [32] M. Oya, C. H. Yu, and R. Katoh. Robust adaptive motion/force tracking control of uncertain nonholonomic mechanical systems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 19(1):175–181, fev. 2003.
- [33] J. B. Pomet, B. Thuilot, G. Bastin, and G. Campion. A hybrid strategy for the feedback stabilization of nonholonomic mobile robots. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 129–134, mai. 1992.
- [34] M. I. Ribeiro and P. Lima. Nonlinear control of wheeled mobile robots. Technical report, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal, mai. 2002. Disponível on-line em <http://omni.isr.ist.utl.pt/~mir/cadeiras/robmoveel/Guidance.pdf>.
- [35] C. Samson. Control of chained systems: application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(1):64–77, jan. 1995.
- [36] C. Samson and K. Ait-Abderrahim. Feedback stabilization of a nonholonomic wheeled mobile robot. *IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems*, pages 1242–1247, nov. 1991.
- [37] N. Sarkar, X. Yun, and V. Kumar. Dynamic path following: a new control algorithm for mobile robots. In *IEEE American Conference on Decision and Control*, pages 2670–2675, dez. 1993.
- [38] R. D. Schraft. Mechatronics and robotics for service applications. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 1(4), dez. 1994.
- [39] B. Siciliano. Control in robotics: Open problems and future directions. In *IEEE International Conference on Control Applications*, pages 81–84, set. 1998.
- [40] J.-J. E. Slotine and W. Li. *Applied nonlinear controle*. Prentice-Hall, 1997.

- [41] O. J. Sørдалen. *Feedback control of nonholonomic mobile robots*. PhD thesis, The Norwegian Institute of Technology, 1993.
- [42] C. Y. Su and Y. Stepanenko. Robust motion/force control of mechanical systems with classical nonholonomic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(3):609–614, mar. 1994.
- [43] C. Tarín, H. Brugger, B. Tibken, and E. P. Hofer. Adaptive self-tuning path control system for an autonomous mobile robot. In *IEEE American Conference on Decision and Control*, pages 3886–3887, dez. 1999.
- [44] C. Tarín, H. Brugger, B. Tibken, and E. P. Hofer. Optimal feedback position control for an autonomous mobile robot. In *IEEE American Conference on Decision and Control*, pages 1491–1492, jun. 2000.
- [45] A. R. Teel, R. M. Murray, and G. Walsh. Nonholonomic control systems: from steering to stabilization with sinusoids. In *IEEE American Conference on Decision and Control*, pages 1603–1609, dez. 1992.
- [46] W. Wu, H. Chen, Y. Wang, and P. Woo. Adaptive exponential stabilization of mobile robots with uncertainties. In *IEEE American Conference on Decision and Control*, pages 3484–3489, dez. 1999.
- [47] Y. Yamamoto and X. Yun. Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator. In *IEEE American Conference on Decision and Control*, pages 2643–2648, dez. 1992.
- [48] J. M. Yang and J. H. Kim. Sliding mode control for trajectory tracking of nonholonomic wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 15(3):578–587, jun. 1999.
- [49] X. Yun and N. Sarkar. Unified formulation of robotic systems with holonomic and nonholonomic constraints. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 14(4):640–650, ago. 1998.