

**VINÍCIUS MENEZES DE OLIVEIRA**

**TÉCNICAS DE CONTROLE DE ROBÔS MÓVEIS**

**FLORIANÓPOLIS**

**2001**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
ELÉTRICA**

**TÉCNICAS DE CONTROLE DE ROBÔS MÓVEIS**

Dissertação submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

**Vinícius Menezes de Oliveira**

Florianópolis, fevereiro de 2001.

# TÉCNICAS DE CONTROLE DE ROBÔS MÓVEIS

Vinícius Menezes de Oliveira

‘Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Controle, Automação e Informática Industrial*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.’

---

Prof. Edson Roberto de Pieri, Dr.  
Orientador

---

Prof. Walter Fetter Lages, Dr.  
Co-orientador

---

Prof. Aguinaldo dos Santos Silva, Dr.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

---

Prof. Edson Roberto de Pieri, Dr.  
Presidente

---

Prof. Walter Fetter Lages, Dr.

---

Prof. Werner Kraus Jr., PhD.

---

Prof. Julio Elias Normey-Rico, Dr.

*À Letícia, cujo reflexo a vida já fez a magia de confundir-se com o meu.*

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a meus pais por toda ajuda, carinho e amor que me deram durante toda a vida.

Agradeço ao Obelheiro pela amizade e pelas muitas conversas que tivemos durante o curso.

Também ao César pela amizade construída.

Aos colegas do LCMI, por fazerem do laboratório um ambiente de trabalho alegre e descontraído.

Ao Edson pela confiança no meu trabalho e pela amizade. Ao Walter por todo o apoio durante este período, pelos ensinamentos técnicos e pela disponibilidade em ajudar.

Por último, a **Deus**, por ter colocado em minha vida todas essas pessoas.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

## **TÉCNICAS DE CONTROLE DE ROBÔS MÓVEIS**

**Vinícius Menezes de Oliveira**

Fev./2001

Orientador: Dr. Edson Roberto de Pieri

Co-orientador: Dr. Walter Fetter Lages

Área de Concentração: Controle, Automação e Informática Industrial

Palavras-chave: sistemas não-holonômicos, sistemas não-lineares, redes neurais, controle.

Número de Páginas: 110

Este trabalho tem como objetivo projetar leis de controle de robôs móveis não-holonômicos com acionamento diferencial. Descreve-se aqui as propriedades estruturais dos robôs móveis, bem como a descrição dos tipos de rodas, as restrições de movimento associadas a cada uma delas e a caracterização de robôs móveis em cinco classes distintas. O controle de robôs móveis com acionamento diferencial pode ser dividido em controle da cinemática seguido pelo controle da parte dinâmica do sistema. Por isso são apresentados, neste trabalho, quatro diferentes malhas de controle para a cinemática e uma única malha de controle para a dinâmica, baseada em redes neurais artificiais.

Serão apresentadas, durante este trabalho, duas classes de tarefas para robôs móveis, a saber: rastreamento de trajetória de referência e convergência a um ponto. Para a primeira categoria foram utilizados dois controladores para a cinemática do sistema, sendo um descrito em coordenadas cartesianas e o outro descrito por meio de coordenadas polares. Para a tarefa de convergência a um ponto escolheu-se um controlador com realimentação suave variante no tempo e outro com lei de controle descontínua, baseado na técnica de modos deslizantes.

Uma vez que os parâmetros do modelo dinâmico do robô podem variar com o tempo e que são de difícil medição, desenvolveu-se uma estratégia de controle baseada em redes neurais artificiais. Neste trabalho, utilizou-se um algoritmo de ajuste *on-line* dos pesos da rede neural e apresentou-se, também, a prova de estabilidade deste controlador tendo por base a teoria de Lyapunov.

Resultados provenientes de simulação e de experimentos práticos foram apresentados com o intuito de validar os esquemas de controle propostos.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering.

## **CONTROL TECHNIQUES FOR MOBILE ROBOTS**

**Vinícius Menezes de Oliveira**

Feb./2001

Advisor: Dr. Edson Roberto de Pieri

Co-advisor: Dr. Walter Fetter Lages

Area of Concentration: Control, Automation and Industrial Computing

Keywords: Nonholonomic systems, nonlinear systems, neural networks, control

Number of Pages: 110

This work focuses on the control of a nonholonomic mobile robot with a differential drive. It shows the structural properties of wheeled mobile robots, characterizes the robots according to the wheels in five different classes and describes the restrictions of movement for each wheel. The control of mobile robots with differential drive can be divided in the control of the kinematics followed by the control of the dynamics. Due to this fact four kinematics control loops are proposed and an artificial neural network controller is presented to control the dynamics.

It is shown, in this work, two classes of reference trajectories that can be performed by mobile robots: trajectory tracking and point stabilization. To the first task two controllers are used, one based on cartesian coordinates and the other based on polar coordinates. The controllers selected to the point stabilization task are time-varying feedback controller and a discontinuous sliding mode controller.

Since the parameters of the robot dynamic model can be time-varying and are difficult to be measured, a neural network strategy is developed. In this work an online weight adjustment is used and the stability of this controller is developed based on Lyapunov theory.

Results from simulation and from practical experiments are shown to validate the proposed control schemes.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Descrição Cinemática e Dinâmica de Robôs Móveis</b>	<b>5</b>
2.1	Descrição das Rodas . . . . .	8
2.1.1	Rodas Convencionais Fixas . . . . .	8
2.1.2	Rodas Convencionais Orientáveis Centradas . . . . .	10
2.1.3	Rodas Convencionais Orientáveis Não-centradas . . . . .	11
2.1.4	Rodas Suecas . . . . .	11
2.2	Restrições de Mobilidade de um Robô Móvel . . . . .	12
2.3	Modelo Cinemático de Postura . . . . .	17
2.4	Modelo Cinemático de Configuração . . . . .	20
2.5	Modelo Dinâmico de Configuração . . . . .	22
2.6	Modelo Dinâmico de Postura . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Controle Cinemático de Robôs Móveis</b>	<b>27</b>
3.1	Controle em Coordenadas Cartesianas . . . . .	28
3.1.1	Erro de Postura . . . . .	28
3.1.2	Estrutura do Controlador . . . . .	28
3.1.3	Prova de Estabilidade . . . . .	29
3.1.4	Resultados de Simulação . . . . .	31
3.2	Controle em Coordenadas Polares . . . . .	35
3.2.1	Obtenção da Lei de Controle . . . . .	37
3.2.2	Resultados Obtidos por Simulação . . . . .	38
3.3	Controle com Realimentação Variante no Tempo . . . . .	42
3.3.1	Modelo Cinemático na Forma Canônica Encadeada . . . . .	42



3.3.2	Prova de Estabilidade do Controlador . . . . .	43
3.3.3	Resultados Obtidos por Simulação . . . . .	46
3.4	Controle via Modos Deslizantes . . . . .	50
3.4.1	Esquema de Controle . . . . .	51
3.4.2	Lei de Controle . . . . .	54
3.4.3	Resultados Obtidos . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Controle Dinâmico via Redes Neurais</b>	<b>59</b>
4.1	Redes Neurais Artificiais . . . . .	59
4.2	Estrutura de Controle . . . . .	61
4.3	Prova de Estabilidade do Controlador Neural . . . . .	66
4.4	Resultados Experimentais . . . . .	70
4.4.1	Controlador em Coordenadas Cartesianas . . . . .	70
4.4.2	Controlador em Coordenadas Polares . . . . .	74
4.4.3	Controlador por Realimentação Variante no Tempo . . . . .	77
4.4.4	Controlador via Modos Deslizantes . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>83</b>
<b>A</b>	<b>Descrição do Robô Móvel Twil</b>	<b>86</b>
A.1	Aspectos de <i>Hardware</i> . . . . .	87
A.2	Aspectos de <i>Software</i> . . . . .	88
<b>B</b>	<b>Lema de Barbalat e Teoremas de Lyapunov e Frobenius</b>	<b>90</b>
B.1	Teorema de Lyapunov . . . . .	90
B.2	Lema de Barbalat . . . . .	90
B.3	Teorema de Frobenius . . . . .	91

# Lista de Figuras

2.1	Acionamento tipo lagarta (Robô URBIE).	5
2.2	Acionamento por pernas (Robô GENGHIS).	6
2.3	Robô Móvel Twil.	7
2.4	Definição dos sistemas de coordenadas.	7
2.5	Rodas convencionais fixa e orientável centrada.	9
2.6	Roda convencional orientável não-centrada.	11
2.7	Roda sueca.	12
2.8	Centro instantâneo de rotação.	15
2.9	Exemplo de robô pertencente à classe (3,0).	16
2.10	Exemplo de robô pertencente à classe (2,0).	16
2.11	Exemplo de robô pertencente à classe (2,1).	16
2.12	Exemplo de robô pertencente à classe (1,1).	17
2.13	Exemplo de robô pertencente à classe (1,2).	17
3.1	Definição do erro de postura.	29
3.2	Diagrama de blocos do controlador utilizado.	29
3.3	Posição $x$ do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada).	32
3.4	Posição $y$ do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada).	32
3.5	Orientação do robô (linha cheia) e orientação de referência (linha pontilhada).	33
3.6	Trajetória realizada pelo robô para estabilizar na postura de referência.	33
3.7	Velocidades linear (linha cheia) e angular (linha pontilhada) do robô.	34
3.8	Descrição das variáveis de postura em coordenadas polares.	35
3.9	Posição $x$ do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada).	39
3.10	Posição $y$ do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada).	39
3.11	Orientação do robô (linha cheia) e orientação de referência (linha pontilhada).	40

3.12	Trajétoria realizada pelo robô para estabilizar na postura de referência. . . . .	40
3.13	Velocidades linear (linha cheia) e angular (linha pontilhada) do robô. . . . .	41
3.14	Posição $x$ do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada). . .	47
3.15	Posição $y$ do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada). . .	47
3.16	Orientação do robô (linha cheia) e orientação de referência (linha pontilhada). .	48
3.17	Trajétoria realizada pelo robô para estabilizar na postura de referência. . . . .	48
3.18	Velocidades linear (linha cheia) e angular (linha pontilhada) do robô. . . . .	49
3.19	Trajétórias do sistema 3.46. . . . .	51
3.20	Diagrama de blocos do sistema de controle. . . . .	51
3.21	Posição $x$ do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada). . .	56
3.22	Posição $y$ do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada). . .	56
3.23	Orientação do robô (linha cheia) e orientação de referência (linha pontilhada). .	57
3.24	Trajétoria realizada pelo robô para estabilizar na postura de referência. . . . .	57
3.25	Velocidades linear (linha cheia) e angular (linha pontilhada) do robô. . . . .	58
4.1	Estrutura da rede neural utilizada. . . . .	60
4.2	Diagrama de blocos do controlador. . . . .	63
4.3	Região de estabilidade para o controlador baseado em redes neurais. . . . .	69
4.4	Trajétoria desenvolvida pelo robô (linha cheia) e trajetória de referência (linha pontilhada). . . . .	71
4.5	Torque aplicado no motor direito (linha cheia) e torque aplicado no motor esquerdo (linha pontilhada). . . . .	71
4.6	Posição $x$ do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada). . .	72
4.7	Posição $y$ do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada). . .	72
4.8	Orientação real do robô (linha cheia) e orientação desejada (linha pontilhada). .	73
4.9	Posição $x$ do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada). . .	74
4.10	Posição $y$ do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada). . .	75
4.11	Orientação do robô (linha cheia) e orientação desejada (linha pontilhada). . .	75
4.12	Trajétoria percorrida pelo robô (linha cheia) e a de referência (linha pontilhada). .	76
4.13	Torques exercidos pelos motores direito (linha cheia) e esquerdo (linha pontilhada). . . . .	76
4.14	Trajétoria percorrida pelo robô até na convergência à origem. . . . .	77

4.15	Torques exercidos pelos motores das rodas direita (linha cheia) e esquerda (linha pontilhada). . . . .	78
4.16	Coordenada $x$ do robô durante a convergência à origem. . . . .	78
4.17	Coordenada $y$ do robô durante a convergência à origem. . . . .	79
4.18	Orientação do robô durante a convergência à origem. . . . .	79
4.19	Posição $x$ do robô durante a convergência à origem. . . . .	80
4.20	Posição $y$ do robô durante a convergência à origem. . . . .	81
4.21	Orientação do robô durante a convergência à origem. . . . .	81
4.22	Trajetória percorrida pelo robô para alcançar a origem. . . . .	82
4.23	Torques exercidos pelos motores das rodas direita (linha cheia) e esquerda (linha pontilhada). . . . .	82
A.1	Robô Móvel Twil. . . . .	86
A.2	Diagrama de blocos do Twil. . . . .	87

# Lista de Tabelas

2.1	Tabela com o número mínimo de motores para cada classe. . . . .	24
-----	---	----

# Lista de Símbolos

$\beta$	Ângulo das rodas orientáveis;
$\beta_c$	Ângulo das rodas orientáveis centradas;
$\beta_{oc}$	Ângulo das rodas orientáveis não-centradas;
$\Upsilon(e, \phi)$	Matriz de transformação para coordenadas polares;
$\mathbf{V}$	Estimativa da matriz de pesos da rede neural entre a camada intermediária e a camada de saída;
$\mathbf{V}$	Matriz de pesos ideais da rede neural entre a camada intermediária e a camada de saída;
$\mathbf{W}$	Matriz de pesos ideais da rede neural entre a camada de entrada e a camada intermediária;
$\mathbf{Z}$	Matriz de todos os pesos ideais da rede neural;
$\delta_M$	Grau de manobrabilidade;
$\delta_m$	Grau de mobilidade;
$\delta_s$	Grau de dirigibilidade;
$\epsilon$	Gradiente associado à função de Lyapunov;
$\epsilon$	Vetor de coordenadas de postura;
$\epsilon_c$	Vetor de posição e orientação do robô descrito no sistema associado a $P_c$ ;
$\epsilon_o$	Vetor de posição e orientação do robô descrito no sistema inercial;
$\epsilon_r$	Vetor de posição e orientação do ponto de referência no robô;

$\epsilon_w$	Vetor de posição e orientação do robô descrito no sistema associado a $P_w$ ;
$\Gamma$	Saída desejada da rede neural;
$\gamma$	Ângulo da direção da velocidade nula da roda sueca;
$\Gamma(e, \Phi)$	Matriz de transformação para coordenadas polares;
$\hat{\mathbf{W}}$	Estimativa da matriz de pesos da rede neural entre a camada de entrada e a camada intermediária;
$\hat{\Gamma}$	Saída estimada da rede neural;
$\lambda$	Coefficiente de Lagrange;
$\mathcal{C}$	Espaço de configuração;
$\mathcal{N}(x)$	Espaço nulo de $x$ ;
$\mathcal{T}$	Espaço de trabalho;
$\mu$	Coefficiente de Lagrange;
$\omega_l$	Velocidade da roda esquerda;
$\omega_r$	Velocidade da roda direita;
$\overline{\Delta}$	Fechamento involutivo da distribuição $\Delta$ ;
$\ \mathbf{X}\ _F^2$	Norma de Frobenius da matriz $\mathbf{X}$ ;
$\rho$	Norma homogênea;
$\rho(x)$	Posto (rank) de $x$ ;
$\sigma(x)$	Função de ativação da rede neural;
$\tau$	Vetor de torque nas rodas;
$\tau_\phi$	Torque aplicado para rotação da roda;
$\tau_c$	Torque aplicado para orientação das rodas centradas;
$\tau_{oc}$	Torque aplicado para orientação de rodas não centradas;

$\theta$	Orientação do robô;
$\zeta$	Derivada de $\beta_c$ ;
$d$	Distância entre o centro da roda e o seu ponto de giro;
$e$	Erro de posição;
$e$	Módulo do erro de posição em coordenadas polares;
$f(x)$	Função não-linear de $x$ ;
$I$	Matriz identidade;
$I$	Momento de inércia gerado por $m_c$ e $m_w$ com relação ao eixo vertical;
$I_w$	Momento de inércia gerado pelo conjunto roda/motor;
$l$	Comprimento do segmento $\overline{P_o P_w}$ ;
$l_w$	Braço de giro da roda do robô;
$M$	Grau de não-holonomicidade;
$m_c$	Massa da plataforma sem considerar as rodas e os motores;
$m_w$	Massa de cada conjunto roda/motor;
$N$	Número de rodas;
$N_c$	Número de rodas centradas;
$N_f$	Número de rodas convencionais fixas;
$N_{oc}$	Número de rodas não centradas;
$N_{sw}$	Número de rodas suecas;
$p$	Vetor de coordenadas de postura;
$P_c$	Centro de gravidade do robô;
$P_o$	Origem do sistema de coordenadas inicial;
$P_w$	Projeção vertical do centro da roda do robô;



$q$	Vetor de coordenadas de configuração;
$r$	Raio da roda;
$R_o^c$	Matriz de Rotação ente os sistemas de coordenadas associados a $P_c$ e $P_o$ ;
$R_o^w$	Matriz de Rotação ente os sistemas de coordenadas associados a $P_w$ e $P_o$ ;
$S(q)$	Dinâmica do modelo cinemático de configuração
$sign(x)$	Função sinal de $x$ ;
$span\{col(x)\}$	Espaço varrido pelas colunas de $x$ ;
$T$	Energia cinética;
$u$	Variável de entrada genérica de modelo no espaço de estados;
$V$	Candidata a função de Lyapunov;
$V$	Vetor de forças centrífugas e de Coriolis;
$v$	Vetor de entradas equivalentes;
$x$	Variável de estado genérica;
$x_r^c$	Coordenada do ponto de referência do robô na direção $X_c$ ;
$x_c$	Coordenada do centro de gravidade do robô na direção $X$ ;
$x_r$	Referência de posição na direção $X$ ;
$y$	Vetor de saídas de um processo;
$y_r^c$	Coordenada do ponto de referência do robô na direção $Y_c$ ;
$y_c$	Coordenada do centro de gravidade do robô na direção $Y$ ;
$y_r$	Referência de posição na direção $Y$ ;
$z$	Coordenadas de postura na forma canônica encadeada;

# Capítulo 1

## Introdução

Até pouco tempo o termo **robótica** trazia à lembrança apenas robôs manipuladores devido a sua difundida aplicação industrial. Recentemente este termo tem levado, também, a se pensar sobre robôs de serviço, mais comumente chamados de robôs móveis.

Há uma grande variedade de funções que podem ser exercidas por robôs móveis, dentre as quais se destacam a entrega de correspondência, a detonação/desmontagem de bombas [1], o auxílio a pessoas portadoras de deficiência física (*e.g.* cadeira de rodas) [2, 3], a exploração espacial [4] e de ambientes inóspitos, como vulcões, e a aplicação de robôs móveis na exploração de petróleo, substituindo mergulhadores em situações de risco na instalação, manutenção e/ou inspeção de equipamentos [5]. Da mesma maneira, pesquisas referentes à utilização de veículos guiados autonomamente [6] são desenvolvidas com o intuito de aumentar o fluxo de veículos, de reduzir a poluição e os congestionamentos existentes e de reduzir o número de acidentes causados por falha de operação humana.

Um tipo especial de robôs móveis, os chamados robôs-serpente [7], é utilizado na exploração de terrenos irregulares e no resgate de vítimas de terremotos. Neste caso, os robôs adaptam sua forma a fim de tentar evitar que a vítima seja esmagada ou asfixiada debaixo dos escombros.

Em face a essa grande variedade de aplicações para robôs móveis, o controle desses sistemas começa a despontar na literatura técnica. Diferentemente dos robôs manipuladores comumente utilizados, robôs móveis são sistemas não-holonômicos, ou seja, possuem restrições que não são integráveis. Para robôs móveis com acionamento diferencial é possível o desacoplamento entre a dinâmica e a cinemática do sistema. Grande parte dos trabalhos encontrados na literatura aborda apenas o controle da parte cinemática do

robô, uma vez que as restrições não-holonômicas de velocidades se apresentam neste modelo [8, 9, 10, 11].

O controle de robôs móveis pode ter como objetivo fazer com que o robô siga uma dada trajetória de referência ou que ele convirja a uma dada postura (posição e orientação) de referência. Para esta última tarefa existem algumas limitações apresentadas por Brockett [12], em que um sistema não-holonômico sem deriva não pode ser estabilizado por meio de uma realimentação de estado suave invariante no tempo. Essas limitações impuseram um desafio aos pesquisadores da área de controle, que passaram a desenvolver trabalhos de pesquisa nessa área, a fim de produzir leis de controle que superem essas restrições.

Já o controle da dinâmica de robôs móveis foi pouco utilizado nas pesquisas, uma vez que o grande desafio encontra-se na cinemática do robô. Algumas técnicas utilizadas para o controle da cinemática de robôs móveis são controle fuzzy [13], controle por transformação descontínua de coordenadas [14], controle com realimentação de estado variante no tempo [15, 16] e controle preditivo [17, 18]. Além disso, para robôs pequenos basta apenas que existam malhas internas, garantindo que as velocidades ou posições comandadas sejam efetivamente aplicadas nas rodas. Algumas técnicas utilizadas no controle da dinâmica de robôs móveis são: realimentação linearizante [19], técnica de *backstepping* [20], controle linearizante adaptativo [21] e controle por redes neurais [22].

Atualmente, os grandes problemas para a implementação de robôs móveis estão na determinação de modelos adequados para a cinemática e para a dinâmica do robô, na estimação de posição e orientação, nas técnicas de controle e no planejamento de trajetórias a serem rastreadas. Para a realização de simulações das técnicas de controle, a modelagem do robô, tanto cinemática quanto dinâmica, deve receber especial atenção para que seja o mais fiel possível à realidade, fazendo com que os parâmetros ajustados em simulação possam ser utilizados na prática a fim de se produzir os resultados obtidos na simulação.

Outro problema a ser enfrentado no controle de robôs móveis é a disponibilidade de informações do robô. Esse problema não é significativo quando se realiza simulação computacional, uma vez que todas as informações estão disponíveis e prontas para serem usadas. Entretanto, quando se trabalha com um robô real algumas variáveis necessárias à implementação do controle podem não estar disponíveis diretamente. Para se transpor tal dificuldade faz-se a estimação destas variáveis.

Como a navegação dos robôs móveis é feita de forma autônoma, é necessário que o robô

seja capaz de saber sua posição e orientação atuais para que possa chegar com segurança a seu ponto de destino ou para que possa rastrear a trajetória de referência. Para que isso aconteça é preciso lançar mão de métodos de estimação de posição e orientação, os quais utilizam dispositivos como *encoders*, sinais de sonar, imagens de vídeo, bússola digital e GPS.

Um dos métodos mais simples para a estimação de posição de robôs móveis, o *dead-reckoning* [23], não é muito adequado pois apresenta erros sistemáticos, oriundos, na maioria das vezes, de assimetria entre as rodas e escorregamentos. Já a utilização de imagens fornece uma melhor estimação, porém requer um tempo maior para o processamento da informação, podendo causar problemas com relação aos requisitos de tempo-real.

O uso de sonares não necessita de um tempo tão grande para o processamento quanto as imagens de vídeo, porém não fornece uma estimação tão boa quanto os sensores de visão, principalmente da orientação do robô. Os problemas encontrados nos sonares estão relacionados aos efeitos de reflexão, difração e ângulo de abertura a que estão sujeitas as ondas sonoras. Em [24] apresenta-se uma aplicação de sonares para estimação de posição. Para se minimizar o erro na estimativa de orientação do robô pode-se utilizar, em conjunto com o sistema de odometria, uma bússola digital. Em [25] apresenta-se alguns métodos para estimação de posição e orientação de robôs móveis utilizando a fusão de dados pelo filtro de Kalman estendido.

Nesse sentido, o presente trabalho tem por objetivo apresentar algumas técnicas para o controle cinemático de robôs móveis e aplicar um controlador dinâmico baseado em redes neurais. A utilização deste controlador dinâmico deve-se à capacidade que as redes neurais possuem de “aprender” e ao fato do modelo dinâmico possuir parâmetros difíceis de serem calculados com acurácia.

O segundo capítulo apresenta a questão de obtenção dos modelos cinemático e dinâmico, juntamente com as possíveis configurações de robôs móveis e as restrições existentes no movimento destes sistemas não-holonômicos. No capítulo seguinte, são apresentadas as técnicas de controle cinemático, sendo os resultados obtidos por meio de simulação computacional. As duas primeiras técnicas (controle em coordenadas cartesianas e controle em coordenadas polares) são utilizadas para fazer com que o robô rastreie trajetórias de referência, e as outras duas técnicas (controle com realimentação variante no tempo e controle via modos deslizantes) têm como objetivo fazer com que o robô móvel convirja à origem do

---

sistema de coordenadas, satisfazendo as restrições apresentadas por Brockett.

O quarto capítulo apresenta uma estratégia de controle para a dinâmica do robô baseada nas redes neurais como apresentado em [22]. Neste trabalho procura-se apresentar o uso desta técnica de controle com algumas técnicas de controle cinemático, tanto para rastreamento de trajetória quanto para convergência a um ponto. Os resultados apresentados nesse capítulo foram obtidos em experiências práticas, validando os resultados obtidos por simulação previamente apresentados.

Finalmente, são apresentadas as conclusões a que se pode chegar depois de desenvolvido o trabalho. É importante salientar que esta pesquisa ainda pode, e deve, ser aprofundada em futuros trabalhos, como aqueles sugeridos no final desta dissertação.

## Capítulo 2

# Descrição Cinemática e Dinâmica de Robôs Móveis

Neste capítulo serão apresentadas as possíveis classes de robôs móveis acionados por rodas, por ser este mecanismo de fácil implementação física. Embora sejam apresentados apenas os modelos com acionamento por rodas, existem robôs com acionamento tipo lagarta e acionamento por pernas. Estes dois últimos modos de acionamento são reservados principalmente a ambientes externos, onde geralmente os terrenos possuem acentuadas irregularidades, pois esses acionamentos permitem que os robôs transponham os obstáculos com maior facilidade.

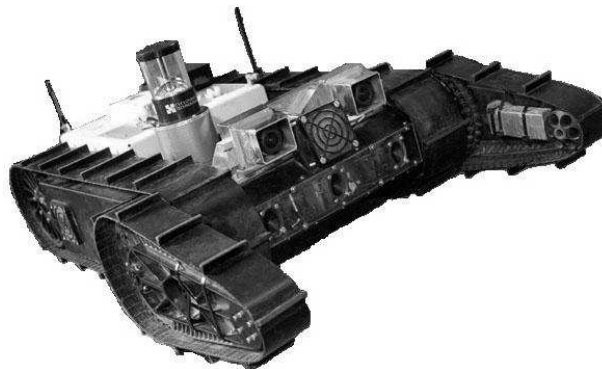


Figura 2.1: Acionamento tipo lagarta (Robô URBIE).

A figura 2.1 apresenta o robô **URBIE** [26] como exemplo de robôs com acionamento do tipo lagarta e a figura 2.2 apresenta o robô **GENGHIS** [27], que é um robô acionado por pernas.

Adotando a descrição apresentada em [9], os robôs móveis acionados por rodas apresen-

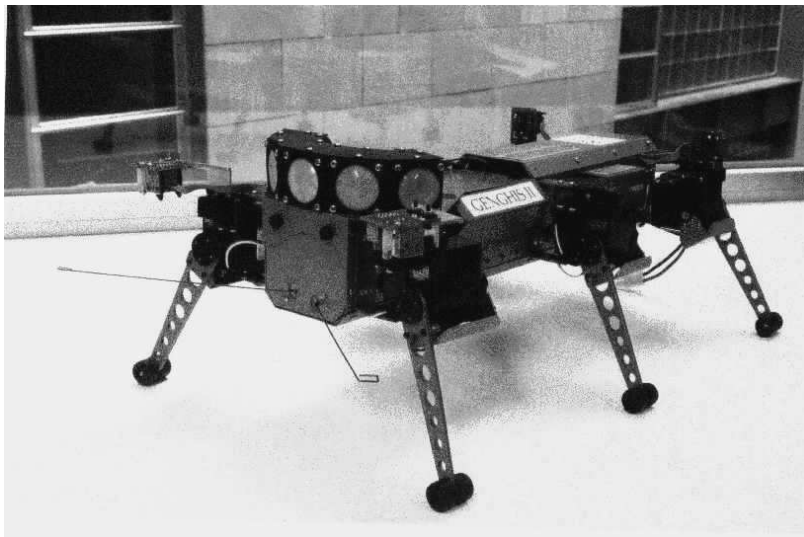


Figura 2.2: Acionamento por pernas (Robô GENGHIS).

tam quatro modelos distintos, a saber: modelo cinemático de postura, modelo cinemático de configuração, modelo dinâmico de postura e modelo dinâmico de configuração.

Os modelos cinemáticos descrevem o robô em função da velocidade e da orientação das rodas, enquanto os modelos dinâmicos descrevem o robô em função de forças generalizadas aplicadas pelos atuadores. Os modelos de postura consideram como variáveis de estado apenas a posição e a orientação do robô, diferentemente dos modelos de configuração que consideram, além das variáveis de postura, outras variáveis internas, como deslocamento angular das rodas.

Vários trabalhos encontrados na literatura descrevem a cinemática de robôs móveis em coordenadas cartesianas [19, 22, 28, 29, 30]. Entretanto, existem outras formas de se representar tal sistema como, por exemplo, em coordenadas polares [14], cuja representação evidencia características interessantes do ponto de vista do controle.

Considera-se neste trabalho um robô móvel, apresentado na figura 2.3, constituído por um corpo rígido cujas rodas não sofrem deformação e movimentam-se no plano horizontal. A posição e a orientação do robô são descritas em relação a um sistema de referência inercial  $OX_oY_o$  e, associado ao corpo do robô, define-se o sistema de referência  $CX_cY_c$ , como mostra a figura 2.4.

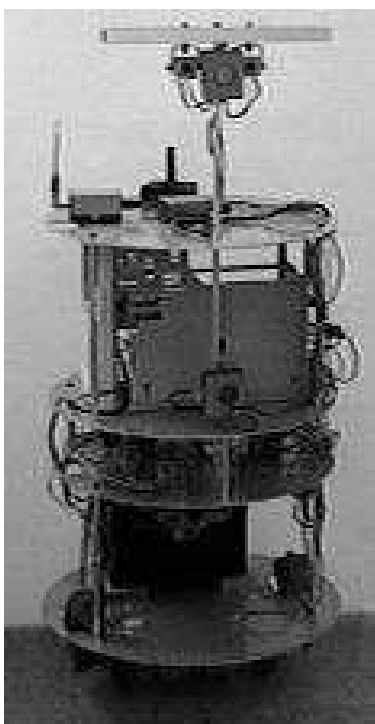


Figura 2.3: Robô Móvel Twil.

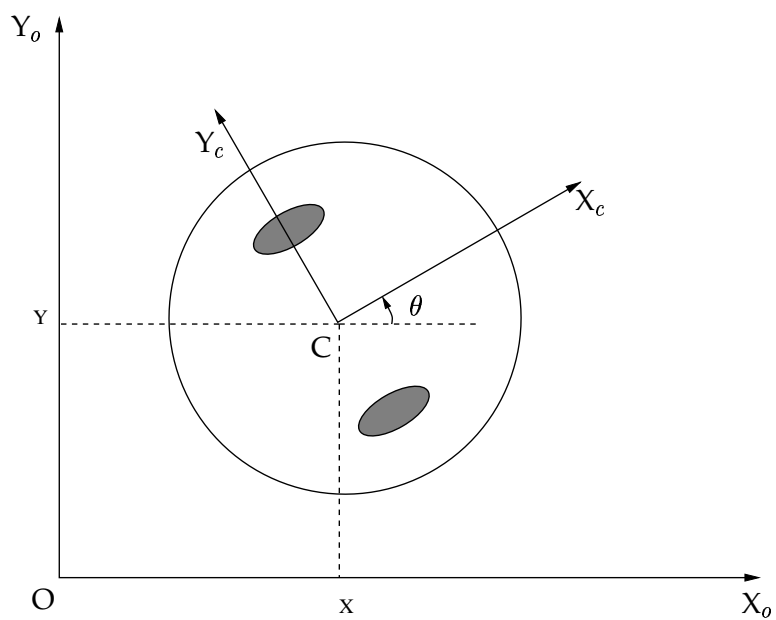


Figura 2.4: Definição dos sistemas de coordenadas.



Deste modo, as coordenadas de postura são dadas por:

$$\xi_o = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ \theta \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

e a rotação entre o sistema  $CX_cY_c$  e  $OX_oY_o$  é dada pela matriz:

$$\mathbf{R}_o^c(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Para facilitar o entendimento dos modelos cinemático e dinâmico apresentados a posteriori, apresenta-se uma breve descrição a respeito dos tipos de rodas utilizadas em robôs com este tipo de acionamento.

## 2.1 Descrição das Rodas

Para a modelagem das rodas assume-se que o plano de cada roda permanece vertical durante o movimento e que a rotação de cada roda se dá em torno de um eixo horizontal, cuja orientação, em relação ao sistema de referência do robô, pode ser fixa ou orientável.

As rodas apresentam-se em duas classes: rodas convencionais e rodas suecas. Para a classe de rodas convencionais assume-se que o contato da roda com o chão é de rolamento puro e sem deslizamento. A velocidade deste ponto é nula, isto é, as componentes paralela e ortogonal ao plano da roda são nulas. Já para a classe das rodas suecas, apenas uma das componentes da velocidade do ponto de contato é nula ao longo do movimento. A direção desta componente nula é, a priori arbitrária, porém é fixa em relação à orientação da roda.

### 2.1.1 Rodas Convencionais Fixas

O centro da roda, denotado pelo ponto  $W$ , é fixo (figura 2.5). A posição deste ponto em relação ao sistema de referência  $CX_cY_c$  é descrita em coordenadas polares pelo vetor  $C\vec{W}$ , de comprimento fixo  $l$  e pelo ângulo  $\alpha$ . A orientação do plano da roda em relação a  $C\vec{W}$  é dada pelo ângulo fixo  $\beta$ . A variável  $\phi(t)$  representa o deslocamento angular da roda em torno do seu eixo horizontal e  $r$  denota o raio da roda.

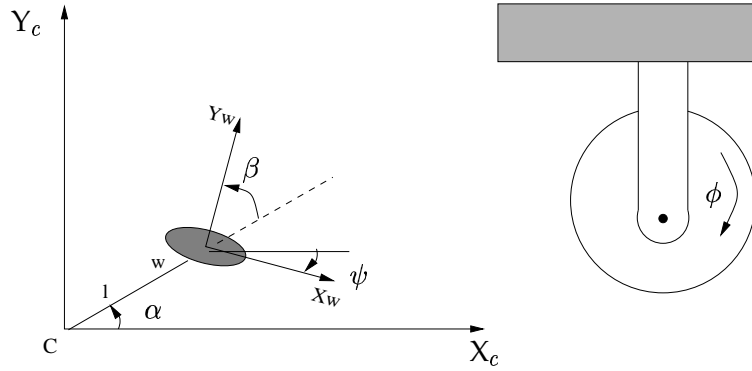


Figura 2.5: Rodas convencionais fixa e orientável centrada.

A velocidade do robô em relação ao sistema de referência inercial, descrita no sistema de referência do robô, é dada por:

$$\dot{\xi}_c = \mathbf{R}_o^c(\theta) \dot{\xi}_o \quad (2.3)$$

Descrevendo esta velocidade em relação ao sistema de referência  $W X_w Y_w$  cuja origem é o centro da roda, tem-se:

$$\dot{\xi}_w = \mathbf{R}_c^w(\psi) \dot{\xi}_c + l_w \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{R}_c^w(\psi) \dot{\xi}_c \quad (2.4)$$

onde  $l_w$  é o braço de giro e  $\mathbf{R}_c^w(\theta)$  é a matriz de rotação entre os sistemas de referência  $W X_w Y_w$  e  $C X_c Y_c$ , definidos por:

$$l_w = \begin{bmatrix} -l \sin(\beta) \\ -l \cos(\beta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{R}_c^w(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Analisando-se a figura 2.5 é possível concluir que  $\psi = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}$ , permitindo reescrever

a expressão 2.6 sob a forma:

$$\mathbf{R}_c^w(\psi) = \begin{bmatrix} \text{sen}(\alpha + \beta) & -\text{cos}(\alpha + \beta) & 0 \\ \text{cos}(\alpha + \beta) & \text{sen}(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Substituindo as equações 2.5 e 2.7 na equação 2.4 obtém-se:

$$\dot{\xi}_w = \begin{bmatrix} \text{sen}(\alpha + \beta) & -\text{cos}(\alpha + \beta) & -l\text{cos}(\beta) \\ \text{cos}(\alpha + \beta) & \text{sen}(\alpha + \beta) & l\text{sen}(\beta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{R}_o^c(\theta) \dot{\xi}_o \quad (2.8)$$

Lembrando que  $\dot{\xi}_w = [r\dot{\phi} \ 0 \ \dot{\theta}]^T$  e substituindo na expressão acima, pode-se escrever as restrições a que está sujeito o movimento do robô devido a este tipo de roda:

- restrição de movimento ao longo do plano da roda:

$$[-\text{sen}(\alpha + \beta) \ \text{cos}(\alpha + \beta) \ l\text{cos}(\beta)] R(\theta) \dot{\xi} + r\dot{\phi} = 0 \quad (2.9)$$

- restrição de movimento ortogonal ao plano da roda:

$$[\text{cos}(\alpha + \beta) \ \text{sen}(\alpha + \beta) \ l\text{sen}(\beta)] R(\theta) \dot{\xi} = 0 \quad (2.10)$$

### 2.1.2 Rodas Convencionais Orientáveis Centradas

A descrição deste tipo de roda (figura 2.5) é análoga à descrição das rodas fixas, exceto que para estas rodas o ângulo  $\beta(t)$  passa a ser uma função variante no tempo. As restrições são da forma:

- restrição de movimento ao longo do plano da roda:

$$[-\text{sen}(\alpha + \beta) \ \text{cos}(\alpha + \beta) \ l\text{cos}(\beta)] R(\theta) \dot{\xi} + r\dot{\phi} = 0 \quad (2.11)$$

- restrição de movimento ortogonal ao plano da roda:

$$[\text{cos}(\alpha + \beta) \ \text{sen}(\alpha + \beta) \ l\text{sen}(\beta)] R(\theta) \dot{\xi} = 0 \quad (2.12)$$

### 2.1.3 Rodas Convencionais Orientáveis Não-centradas

Neste caso o eixo vertical de rotação não passa pelo centro da roda (figura 2.6). Denota-se o centro da roda por  $W'$ , que se conecta ao corpo do robô no ponto  $W$ , por meio de uma haste rígida. O ponto  $W$  continua sendo descrito pelas variáveis  $l$  e  $\alpha$  e o plano da roda está alinhado pelo vetor  $\vec{WW'}$ .

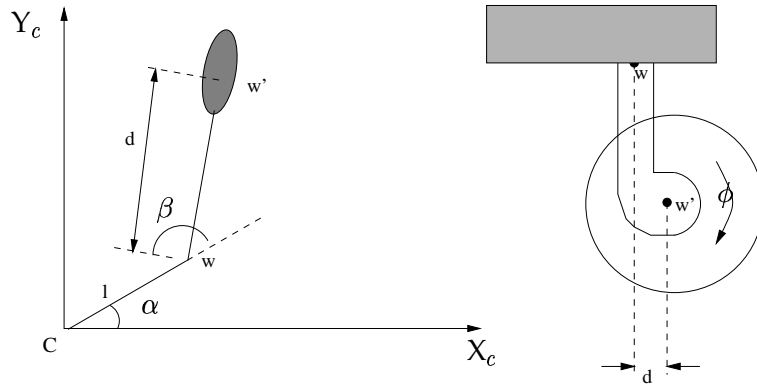


Figura 2.6: Roda convencional orientável não-centrada.

A descrição desta roda é dada por  $l, \alpha, r, d$  (comprimento da haste rígida),  $\beta(t)$  e  $\phi(t)$ . As restrições de movimento são:

- restrição de movimento ao longo do plano da roda:

$$[-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l\cos(\beta)]R(\theta)\dot{\xi} + r\dot{\phi} = 0 \quad (2.13)$$

- restrição de movimento ortogonal ao plano da roda:

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad d + l\sin(\beta)]R(\theta)\dot{\xi} + d\dot{\beta} = 0 \quad (2.14)$$

### 2.1.4 Rodas Suecas

Esta classe de rodas (figura 2.7) é descrita por 4 parâmetros constantes:  $\alpha, \beta, l$  e  $\gamma$ . Este último parâmetro é utilizado para caracterizar a direção, em relação ao plano da roda, da componente nula da velocidade do ponto de contato da roda com o chão.

A restrição de movimento é dada por:

$$[-\sin(\alpha + \beta + \gamma) \quad \cos(\alpha + \beta + \gamma) \quad l\cos(\beta + \gamma)]R(\theta)\dot{\xi} + r\cos(\gamma)\dot{\phi} = 0 \quad (2.15)$$

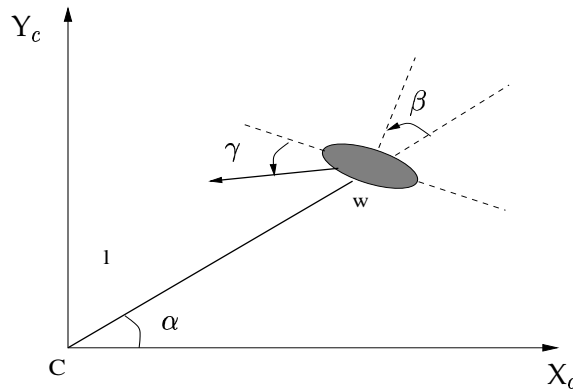


Figura 2.7: Roda sueca.

É importante salientar que  $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$ , caso contrário estaria sujeita a uma restrição idêntica à de roda convencional, anulando o benefício de se utilizar esta classe de rodas.

## 2.2 Restrições de Mobilidade de um Robô Móvel

Para uma análise completa das restrições de mobilidade considera-se um robô móvel equipado com

$$N = N_f + N_c + N_{oc} + N_{sw} \quad (2.16)$$

rodas, sendo  $N_f$  o número de rodas fixas,  $N_c$  o número de rodas orientáveis centradas,  $N_{oc}$  o número de rodas orientáveis não-centradas e  $N_{sw}$  o número de rodas suecas. A partir deste ponto os subscritos às variáveis designam:  $_f$  para rodas fixas;  $_c$  para rodas orientáveis centradas;  $_{oc}$  para rodas orientáveis não-centradas (*off-centered*) e  $_{sw}$  para rodas suecas (*swedish*).

As coordenadas possíveis para este robô são:

- Coordenadas de postura:

$$\xi(t) \triangleq [x(t) \quad y(t) \quad \theta]^T$$

- Coordenadas angulares:  $\beta_c(t)$  e  $\beta_{oc}(t)$  que denotam a orientação das rodas orientáveis centradas e não-centradas, respectivamente;
- Coordenadas de rotação:

$$\phi(t) \triangleq [\phi_f(t) \quad \phi_c(t) \quad \phi_{oc}(t) \quad \phi_{sw}(t)]^T$$

- Coordenadas de configuração:  $\xi(t)$ ,  $\beta_c$ ,  $\beta_{oc}$  e  $\phi$

O número total de coordenadas é dado por  $N_f + 2N_c + 2N_{oc} + N_{sw} + 3$ .

Assim, as restrições podem ser reescritas sob a forma matricial, a partir das expressões 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14 e 2.15:

$$\mathbf{J}_1(\beta_c, \beta_{oc})\mathbf{R}(\theta)\dot{\xi} + \mathbf{J}_2\dot{\phi} = 0 \quad (2.19)$$

$$\mathbf{C}_1(\beta_c, \beta_{oc})\mathbf{R}(\theta)\dot{\xi} + \mathbf{C}_2\dot{\beta}_{oc} = 0 \quad (2.20)$$

sendo

$$\mathbf{J}_1(\beta_c, \beta_{oc}) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{1f} \\ \mathbf{J}_{1c}(\beta_c) \\ \mathbf{J}_{1oc}(\beta_{oc}) \\ \mathbf{J}_{1sw} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{C}_1(\beta_c, \beta_{oc}) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1f} \\ \mathbf{C}_{1c}(\beta_c) \\ \mathbf{C}_{1oc}(\beta_{oc}) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{C}_2 \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{2oc} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

onde as matrizes  $\mathbf{J}_{1f}$ ,  $\mathbf{J}_{1c}$ ,  $\mathbf{J}_{1oc}$  e  $\mathbf{J}_{1sw}$  são de dimensões  $(N_f \times 3)$ ,  $(N_c \times 3)$ ,  $(N_{oc} \times 3)$  e  $(N_{sw} \times 3)$ , respectivamente. A matriz  $\mathbf{J}_2$  é de dimensão  $(N \times N)$ , estando na diagonal principal os raios das rodas, exceto para as rodas sueca, cujos raios são multiplicados por  $\cos(\gamma)$ . As matrizes  $\mathbf{C}_{1f}$ ,  $\mathbf{C}_{1c}$  e  $\mathbf{C}_{1oc}$  são de dimensões  $(N_f \times 3)$ ,  $(N_c \times 3)$  e  $(N_{oc} \times 3)$ , respectivamente. A matriz  $\mathbf{C}_{2oc}$  é uma matriz diagonal que contém as distâncias  $d$  das rodas não-centradas.

Analisando-se as restrições referentes às rodas convencionais fixas e orientáveis centradas, a partir da expressão 2.20 tem-se:

$$\mathbf{C}_1^*(\beta_c)\mathbf{R}(\theta)\dot{\xi} = 0 \quad (2.24)$$

sendo a matriz

$$\mathbf{C}_1^*(\beta_c) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1f} \\ \mathbf{C}_{1c}(\beta_c) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Da expressão 2.24 verifica-se que:

$$\mathbf{R}(\theta)\dot{\xi} \in \mathcal{N}(\mathbf{C}_1^*(\beta_c)) \quad (2.26)$$

Caso  $\rho(\mathbf{C}_1^*(\beta_c)) \leq 3$ , o vetor  $\mathbf{R}(\theta)\dot{\xi}$  não é obrigatoriamente nulo, permitindo algum movimento no plano. Todavia, caso  $\rho(\mathbf{C}_1^*(\beta_c)) = 3$  tem-se, pela equação 2.26, que  $\mathbf{R}(\theta)\dot{\xi} = 0$ , o que demonstra a impossibilidade de se realizar algum movimento no plano. Portanto, as limitações de mobilidade de um robô móvel estão relacionadas com o posto da matriz  $\mathbf{C}_1^*(\beta_c)$ .

Define-se o **grau de mobilidade** de um robô móvel com rodas, denotado por  $\delta_m$ , como sendo:

$$\delta_m = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{C}_1^*(\beta_c))) \quad (2.27)$$

Considere o caso em que  $\rho(\mathbf{C}_1^*(\beta_c)) = 2$ , quando o robô possui pelo menos duas rodas fixas (caso haja mais que duas, todos seus eixos são concorrentes no centro instantâneo de rotação (CIR)), permitindo apenas o movimento de rotação em torno do CIR (figura 2.8), movimento este que na prática é de pouca ou nenhuma utilidade. Assim, para evitar esta restrição, tem-se que:

$$\rho(\mathbf{C}_{1f}) \leq 1 \quad (2.28)$$

e, no caso de haver mais de uma roda fixa, elas devem estar montadas sob o mesmo eixo horizontal de rotação. Deste modo tem-se que  $\rho(\mathbf{C}_1^*(\beta_c)) = \rho(\mathbf{C}_{1f}) + \rho(\mathbf{C}_{1c}(\beta_c))$ , pois somente esta condição permite às rodas convencionais orientáveis centradas influenciarem na determinação do CIR.

Define-se como **grau de dirigibilidade** de um robô móvel com rodas, denotado por  $\delta_s$ , o número de rodas convencionais orientáveis centradas com orientação independente:

$$\delta_s = \rho(\mathbf{C}_{1c}(\beta_c)) \quad (2.29)$$

Resumidamente, a configuração das rodas de um robô móvel deve obedecer às seguintes

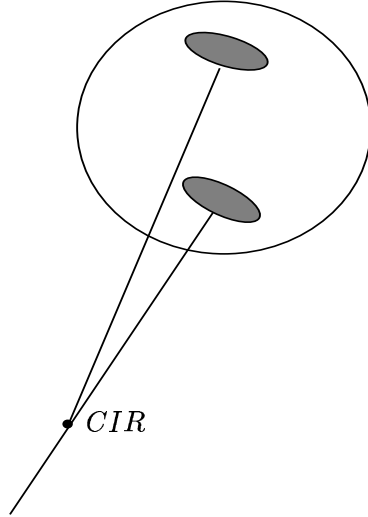


Figura 2.8: Centro instantâneo de rotação.

restrições:

$$1 \leq \delta_m \leq 3 \quad (2.30)$$

$$0 \leq \delta_s \leq 2 \quad (2.31)$$

$$2 \leq (\delta_m + \delta_s) \leq 3 \quad (2.32)$$

Define-se como **grau de manobrabilidade**, denotado por  $\delta_M$ , com sendo a soma

$$\delta_M = \delta_m + \delta_s \quad (2.33)$$

e uma análise a esse respeito será realizada mais adiante.

A partir das restrições 2.30, 2.31 e 2.32, apenas 5 classes distintas de robôs móveis com rodas, caracterizadas pelo par  $(\delta_m, \delta_s)$ , são possíveis [9]. A seguir, uma breve descrição sobre cada uma destas classes:

- **Classe (3,0):** Esta classe de robôs móveis (figura 2.9) apresenta  $N_f=N_c=0$ . Tais robôs são chamados *omnidirecionais*, pois apresentam mobilidade completa no plano, podendo realizar movimento, a cada instante, em qualquer direção sem reorientação das rodas.
- **Classe (2,0):** Robôs pertencentes a esta classe (figura 2.10) possuem uma roda conven-



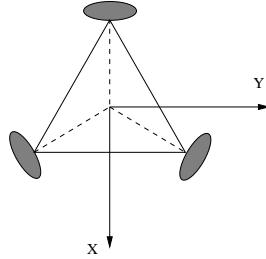


Figura 2.9: Exemplo de robô pertencente à classe (3,0).

cional fixa (caso haja mais de uma roda fixa, devem estar no mesmo eixo de rotação). Geralmente as rodas operam em modo diferencial.

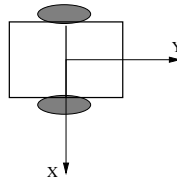


Figura 2.10: Exemplo de robô pertencente à classe (2,0).

- **Classe (2,1):** Esta classe (figura 2.11) apresenta pelo menos uma roda convencional orientável centrada. Caso  $N_c > 1$ , suas orientações devem ser coordenadas, tal que  $\rho(\mathbf{C}_{1c}(\beta_c)) = 1$ .

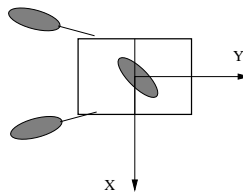


Figura 2.11: Exemplo de robô pertencente à classe (2,1).

- **Classe (1,1):** Robôs deste tipo (figura 2.12) possuem uma ou mais rodas convencionais fixas montadas no mesmo eixo de rotação. Possuem ainda rodas convencionais orientáveis centradas, com a condição de que os centros destas rodas não sejam colocados no mesmo eixo das rodas convencionais fixas e que suas orientações sejam coordenadas.

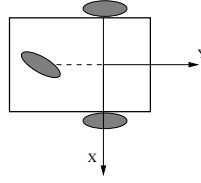


Figura 2.12: Exemplo de robô pertencente à classe (1,1).

- **Classe (1,2):** Neste caso (figura 2.13) os robôs apresentam pelo menos duas rodas convencionais orientáveis centradas. Podem apresentar mais de duas rodas orientáveis centradas desde que suas orientações sejam coordenadas, de tal forma que  $\rho(\mathbf{C}_{1c}(\beta_c)) = 2$ .

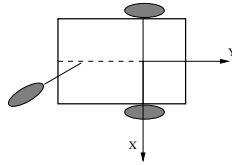


Figura 2.13: Exemplo de robô pertencente à classe (1,2).

## 2.3 Modelo Cinemático de Postura

O modelo cinemático de postura é o mais simples dos modelos e permite uma descrição global do robô. A partir da expressão 2.26, pode-se escrever

$$\dot{\xi} = \mathbf{R}^T(\theta) \Sigma(\beta_c) \eta \quad (2.34)$$

onde as colunas de  $\Sigma(\beta_c)$  formam uma base para o espaço nulo de  $\mathbf{C}_1^*(\beta_c)$ . A dimensão de  $\Sigma(\beta_c)$  é  $(3 \times \delta_m)$  e a do vetor  $\eta$  é  $(\delta_m \times 1)$ .

A expressão 2.34 pode ser aumentada de tal forma que as coordenadas de postura  $\xi$  e as coordenadas angulares  $\beta_c$  sejam as variáveis de estado. Para tanto define-se  $\zeta \triangleq \dot{\beta}_c$ , resultando em:

$$\dot{\xi} = \mathbf{R}^T(\theta) \Sigma(\beta_c) \eta \quad (2.35)$$

$$\dot{\beta}_c = \zeta \quad (2.36)$$

que é o modelo no espaço de estados do sistema, sendo  $\eta$  e  $\zeta$  as entradas lineares do sistema. Salienta-se que a necessidade de se aumentar a equação 2.35 é devida à existência de rodas convencionais orientáveis centradas. Caso  $N_c = 0$  o aumento no número de estados do sistema não é necessário.

O modelo cinemático de postura para cada classe de robôs móveis, conforme demonstrado em [9] será mostrado a seguir:

- **Classe (3,0):**

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

- **Classe (2,0):**

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

- **Classe (2,1):**

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \beta_c) & 0 & 0 \\ \sin(\theta + \beta_c) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

- **Classe (1,1):**

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\cos(\theta)\sin(\beta_c) & 0 \\ d\sin(\theta)\cos(\beta_c) & 0 \\ \cos(\beta_c) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

- **Classe (1,2):**

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{c1} \\ \dot{\beta}_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l[\sin(\beta_{c1})\cos(\theta + \beta_{c2}) + \sin(\beta_{c2})\cos(\theta + \beta_{c1})] & 0 & 0 \\ l[\sin(\beta_{c1})\sin(\theta + \beta_{c2}) + \sin(\beta_{c2})\sin(\theta + \beta_{c1})] & 0 & 0 \\ \sin(\beta_{c2} - \beta_{c1}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

O modelo cinemático de postura, na forma genérica, pode ser reescrito de forma mais compacta, a saber:

$$\dot{x} = \mathbf{B}(x)u \quad (2.42)$$

sendo, para  $N_c = 0$ :

$$x \triangleq \xi \quad (2.43)$$

$$\mathbf{B}(x) \triangleq \mathbf{R}^T(\theta)\Sigma \quad (2.44)$$

$$u \triangleq \eta \quad (2.45)$$

e para  $N_c \geq 0$ :

$$x \triangleq \begin{bmatrix} \xi \\ \beta_c \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{B}(x) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T(\theta)\Sigma(\beta_c) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$u \triangleq \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Uma vez definidos os modelos cinemáticos de postura pode-se analisar melhor a questão de manobrabilidade de um robô móvel acionado por rodas. O grau de manobrabilidade indica o número de graus de liberdade que podem ser influenciados diretamente pelas entradas de controle  $\eta$  e  $\zeta$ , ou seja, indica a possibilidade de alocar livremente o CIR.

A ação de  $\zeta$  nas coordenadas de postura é indireta, pois é dada através de  $\beta_c$  que é obtida pela integral de  $\zeta$ . Com isto,  $\delta_m$  é o número de graus de liberdade que podem ser acessados diretamente pela entrada de controle  $\eta$ .

É importante observar que robôs com mesmo grau de manobrabilidade não são equivalentes, pois robôs com maior grau de mobilidade são mais manobráveis. A situação de máxima manobrabilidade se encontra nos robôs omnidirecionais (classe (3,0)).

Um modelo no espaço de estados é redutível se existe uma transformação de coordenadas tal que alguma das novas coordenadas seja zero ao longo de toda trajetória do sistema.

No caso de um sistema dinâmico não-linear, como o sistema 2.42, a redutibilidade está relacionada com o fechamento involutivo  $\overline{\Delta}$  da distribuição  $\Delta$ , expressa em coordenadas

locais como:

$$\Delta(x) \triangleq \text{span}(\text{col}\{\mathbf{B}(x)\}) \quad (2.49)$$

Como consequência do teorema de Frobenius [31], o sistema é redutível apenas se:

$$\dim(\overline{\Delta}) < \dim(x) \quad (2.50)$$

Analisando-se as equações 2.44 e 2.47 verifica-se que a matriz de entrada  $\mathbf{B}(x)$  possui posto completo, isto é:

$$\rho(\mathbf{B}(x)) = \delta_m + \delta_s \quad \forall x \quad (2.51)$$

A distribuição involutiva  $\overline{\Delta} \triangleq \text{inv}(\text{span}\{\text{col}(\mathbf{B}(x))\})$  possui dimensão máxima constante, dada por:

$$\dim(\overline{\Delta}) = 3 + \delta_s \quad \forall x \quad (2.52)$$

Com base nas equações 2.50, 2.51 e nos modelos cinemáticos de postura, pode-se concluir que tais modelos são irredutíveis.

## 2.4 Modelo Cinemático de Configuração

O modelo cinemático de postura aborda somente as restrições relativas às rodas convencionais fixas e orientáveis centradas expressas, respectivamente, pelas equações 2.19 e 2.20. Fazendo uso das restrições relativas às rodas convencionais orientáveis não-centradas e das rotações de cada roda obtém-se as seguintes expressões:

$$\dot{\beta}_{oc} = \mathbf{D}(\beta_{oc})\Sigma(\beta_{oc})\eta \quad (2.53)$$

$$\dot{\phi} = \mathbf{E}(\beta_c, \beta_{oc})\Sigma(\beta_{oc})\eta \quad (2.54)$$

onde

$$\mathbf{D}(\beta_{oc}) \triangleq -\mathbf{C}_{2oc}^{-1}\mathbf{C}_{1oc}(\beta_{oc}) \quad (2.55)$$

$$\mathbf{E}(\beta_c, \beta_{oc}) \triangleq -\mathbf{J}_2^{-1}\mathbf{J}_1(\beta_c, \beta_{oc}) \quad (2.56)$$

Sendo o vetor de coordenadas de configuração dado por

$$q = \begin{bmatrix} \xi \\ \beta_c \\ \beta_{oc} \\ \phi \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

pode-se escrever as expressões 2.35, 2.36, 2.53 e 2.54 de uma forma mais compacta:

$$\dot{q} = \mathbf{S}(q)u \quad (2.58)$$

onde a matriz  $\mathbf{S}(q)$  e  $u$  são dados por:

$$\mathbf{S}(q) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T(\theta)\Sigma(\beta_c) & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{D}(\beta_{oc})\Sigma(\beta_c) & 0 \\ \mathbf{E}(\beta_c, \beta_{oc})\Sigma(\beta_c) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$u \triangleq \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

De modo análogo ao exposto na subseção anterior, a redutibilidade do modelo cinemático de configuração está diretamente relacionada com a dimensão do fechamento involutivo da distribuição

$$\Delta(q) \triangleq \text{span}(\text{col}(\mathbf{S}(q))) \quad (2.61)$$

Os modelos cinemáticos de configuração das 5 classes apresentam

$$\dim(q) > \dim(\overline{\Delta}) \quad (2.62)$$

onde  $\overline{\Delta}$  é o fechamento involutivo da distribuição  $\Delta$ . Novamente fazendo uso do teorema de Frobenius [31] verifica-se que o modelo cinemático de configuração é redutível, isto é, existe uma transformação de coordenadas tal que alguma das novas coordenadas seja nula ao longo do movimento do sistema.

Define-se como **grau de não-holonomicidade**, denotado por  $M$ , o número de restrições

de velocidade que não são integráveis e que, deste modo, não podem ser eliminadas:

$$M = \dim(q) - \dim(\overline{\Delta}) \quad (2.63)$$

Como a expressão 2.62 é verificada nas 5 classes de robôs móveis, tem-se que todas as classes apresentam  $M > 0$ , ou seja, possuem restrições não-holonômicas. Sendo  $M$  dependente da estrutura de cada robô, este não é constante para todos os robôs de uma mesma classe.

## 2.5 Modelo Dinâmico de Configuração

O modelo dinâmico de configuração descreve as relações dinâmicas existentes entre as coordenadas de configuração  $\xi$ ,  $\beta_c$ ,  $\beta_{oc}$ ,  $\phi$  e os torques dos motores.

A dinâmica, seguindo o formalismo de Lagrange, é dada por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \xi} = \mathbf{R}^T(\theta) \mathbf{J}_1^T(\beta_c, \beta_{oc}) \lambda + \mathbf{R}^T(\theta) \mathbf{C}_1^T(\beta_c, \beta_{oc}) \mu \quad (2.64)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\beta}_c} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \beta_c} = \tau_c \quad (2.65)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\beta}_{oc}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \beta_{oc}} = \mathbf{C}_2^T \mu + \tau_{oc} \quad (2.66)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \phi} = \mathbf{J}_2^T \lambda + \tau_\phi \quad (2.67)$$

sendo  $\tau_c$ ,  $\tau_{oc}$  e  $\tau_\phi$  o torque de orientação das rodas orientáveis centradas, torque de orientação das rodas orientáveis não-centradas e torque de rotação das rodas, respectivamente.  $E_c$  representa a energia cinética do sistema e  $\lambda$  e  $\mu$  são os coeficientes de Lagrange associados às restrições 2.19 e 2.20.

Pré-multiplicando as equações 2.64, 2.66 e 2.67 por  $\mathbf{R}^T(\theta)$ ,  $\mathbf{D}^T(\beta_{oc})$  e  $\mathbf{E}^T(\beta_c, \beta_{oc})$ , respectivamente, somando-as e aplicando as equações 2.55 e 2.56 para eliminar os coeficientes de

Lagrange obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T(\theta) \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \xi} \right] &+ \mathbf{D}^T(\beta_{oc}) \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\beta}_{oc}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \beta_{oc}} \right] + \\ \mathbf{E}^T(\beta_c, \beta_{oc}) \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \phi} \right] &= \mathbf{D}^T(\beta_{oc}) \tau_{oc} + \mathbf{E}^T(\beta_c, \beta_{oc}) \tau_\phi \end{aligned} \quad (2.68)$$

A energia cinética de um robô móvel acionado por rodas pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} E_c &= \dot{\xi}^T \mathbf{R}^T(\theta) \left[ \mathbf{M}(\beta_{oc}) \mathbf{R}(\theta) \dot{\xi} + 2\mathbf{V}(\beta_{oc}) \dot{\beta}_{oc} + 2\mathbf{W} \dot{\beta}_c \right] + \\ &+ \dot{\beta}_{oc}^T \mathbf{I}_{oc} \dot{\beta}_{oc} + \dot{\phi}^T \mathbf{I}_\phi \dot{\phi} + \dot{\beta}_c^T \mathbf{I}_c \dot{\beta}_c \end{aligned} \quad (2.69)$$

onde  $\mathbf{M}(\beta_{oc})$ ,  $\mathbf{V}(\beta_{oc})$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{I}_{oc}$ ,  $\mathbf{I}_\phi$  e  $\mathbf{I}_c$  são matrizes dependentes dos parâmetros de massa e de inércia dos vários corpos rígidos que constituem o robô móvel.

Aplicando a equação 2.69 nas equações 2.65, 2.68 e substituindo as expressões 2.35, 2.36, 2.53, 2.54 e suas derivadas, obtém-se:

$$\mathbf{H} \dot{\eta} + \Sigma^T(\beta_{oc}) \mathbf{V}(\beta_{oc}) \dot{\zeta} + \mathbf{f}_1(\beta_c, \beta_{oc}, \eta, \zeta) = \Sigma^T(\beta_{oc}) [\mathbf{D}^T(\beta_{oc}) \tau_{oc} + \mathbf{E}^T(\beta_c, \beta_{oc}) \tau_\phi] \quad (2.70)$$

$$\mathbf{V}^T(\beta_{oc}) \Sigma(\beta_c) \dot{\eta} + \mathbf{I}_c \dot{\zeta} + \mathbf{f}_2(\beta_c, \beta_{oc}, \eta, \zeta) = \tau_c \quad (2.71)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\beta_c, \beta_{oc}) &= \Sigma^T(\beta_c) [\mathbf{M}(\beta_{oc}) + \mathbf{D}^T(\beta_{oc}) \mathbf{V}^T(\beta_{oc}) + \mathbf{V}(\beta_{oc}) \mathbf{D}(\beta_{oc}) + \\ &+ \mathbf{D}^T(\beta_{oc}) \mathbf{I}_{oc} \mathbf{D}(\beta_{oc}) + \mathbf{E}^T(\beta_c, \beta_{oc}) \mathbf{I}_c \mathbf{E}(\beta_c, \beta_{oc})] \Sigma(\beta_c) \end{aligned} \quad (2.72)$$

O modelo dinâmico de uma plataforma móvel acionada por rodas é formado pelas equações 2.35, 2.36, 2.53, 2.54, 2.70 e 2.71.

Os vetores  $\tau_\phi$ ,  $\tau_c$  e  $\tau_{oc}$  representam os torques que podem ser aplicados para rotação e orientação das rodas do robô. Entretanto, na prática, apenas um número mínimo de motores será utilizado, implicando em algumas componentes nulas de  $\tau_\phi$ ,  $\tau_c$  e  $\tau_{oc}$ . O vetor  $\tau_c$  não pode possuir componentes nulas, uma vez que as rodas orientáveis centradas comportariam-se como rodas fixas. Já os vetores  $\tau_\phi$  e  $\tau_{oc}$  podem possuir, desde que a rotação e a orientação das rodas em questão possam ser obtidas através de acionamento das demais rodas. Assim,



o vetor de torques fornecidos às rodas convencionais orientáveis não-centradas é dado por:

$$\begin{bmatrix} \tau_{oc} \\ \tau_{\phi} \end{bmatrix} = \mathbf{P} \tau_m \quad (2.73)$$

onde  $\mathbf{P}$  é uma matriz elementar de dimensão  $((N_{oc}+N) \times N_m)$ , que seleciona as componentes do vetor  $[\tau_{oc} \ \tau_{\phi}]^T$  a serem utilizadas como entradas de controle.

Com esta simplificação no vetor de torques, a equação 2.70 pode ser reescrita sob a forma:

$$\mathbf{H}(\beta_c, \beta_{oc}) \dot{\eta} + \Sigma^T(\beta_c) \mathbf{V}(\beta_{oc}) \dot{\zeta} + \mathbf{f}_1(\beta_c, \beta_{oc}, \eta, \zeta) = \mathbf{B}(\beta_c, \beta_{oc}) \mathbf{P} \tau_m \quad (2.74)$$

com

$$\mathbf{B}(\beta_c, \beta_{oc}) \triangleq \Sigma^T(\beta_c) \begin{bmatrix} \mathbf{D}^T & \mathbf{E}^T(\beta_c, \beta_{oc}) \end{bmatrix}^T \quad (2.75)$$

O posto da matriz  $\mathbf{B}(\beta_c, \beta_{oc})$  deve ser completo para quaisquer  $\beta_c, \beta_{oc} \in \mathbb{R}^{N_c + N_{oc}}$ . Caso o posto da matriz não seja completo, não existirão graus de liberdade suficientes nas entradas de controle para alocação do CIR. Na tabela 2.1 apresenta-se o número mínimo de motores para cada classe de robôs móveis <sup>1</sup>:

Classe	Núm. de motores
(3,0)	3 ou 4
(2,0)	2
(2,1)	3
(1,1)	2
(1,2)	4

Tabela 2.1: Tabela com o número mínimo de motores para cada classe.

## 2.6 Modelo Dinâmico de Postura

O modelo dinâmico de configuração pode ser reescrito numa forma mais compacta, como a seguir:

$$\dot{q} = \mathbf{S}(q)u \quad (2.76)$$

$$\mathbf{H}_1(\beta) + \mathbf{f}(\beta, u) = \mathbf{F}(\beta) \quad (2.77)$$

<sup>1</sup>Caso sejam rodas suecas utiliza-se 3 motores e caso sejam rodas convencionais utiliza-se 4 motores.

sendo

$$\begin{aligned}
 \beta &\triangleq \begin{bmatrix} \beta_c \\ \beta_{oc} \end{bmatrix} \\
 q &\triangleq \begin{bmatrix} \xi \\ \beta \\ \phi \end{bmatrix} \\
 u &\triangleq \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \\
 \mathbf{H}_1(\beta) &\triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{H}(\beta_c, \beta_{oc}) & \Sigma^T(\beta_c) \mathbf{V}(\beta_{oc}) \\ \mathbf{V}^T(\beta_{oc}) \Sigma(\beta_c) & \mathbf{I}_c \end{bmatrix} \\
 \mathbf{f}(\beta, u) &\triangleq \begin{bmatrix} f_1(\beta_c, \beta_{oc}, \eta, \zeta) \\ f_2(\beta_c, \beta_{oc}, \eta, \zeta) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}(\beta) &\triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\beta_c, \beta_{oc}) \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\
 \tau_0 &\triangleq \begin{bmatrix} \tau_m \\ \tau_c \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Realizando uma realimentação de estados do tipo

$$\tau_0 = \mathbf{F}^\dagger(\beta) [\mathbf{H}(\beta)u - \mathbf{f}(\beta, u)] \quad (2.78)$$

onde  $\mathbf{F}^\dagger(\beta)$  denota a inversa à esquerda de  $\mathbf{F}(\beta, u)$ , o modelo dinâmico de configuração se torna equivalente a:

$$\dot{q} = \mathbf{S}(q)u \quad (2.79)$$

$$\dot{u} = \nu \quad (2.80)$$

com  $\nu$  sendo um conjunto de  $\delta_m$  entradas auxiliares de controle.

Uma simplificação possível, do ponto de vista operacional, é ignorar as coordenadas  $\beta_{oc}$

e  $\phi$ , restringindo a atenção ao modelo dinâmico de postura, dado por:

$$\dot{x} = \mathbf{B}(x)u \quad (2.81)$$

$$\dot{u} = \nu \quad (2.82)$$

Este modelo descreve completamente a dinâmica do sistema entre  $\nu$  e  $\xi$ . Cabe lembrar que as variáveis  $\beta_c$  e  $\phi$ , mesmo não aparecendo, estão contidas na realimentação 2.78.

Assim, o modelo dinâmico de postura é genérico, sendo válido para todas as classes de robôs móveis com rodas e, assim como o modelo cinemático de postura, é irreduzível [9].

## Capítulo 3

# Controle Cinemático de Robôs Móveis

Neste capítulo apresenta-se algumas técnicas de controle para a cinemática de robôs móveis pertencentes à classe  $(2,0)$ , tendo como base o protótipo mostrado na figura 2.3. O controle da cinemática de robôs móveis acionados por rodas é de fundamental importância pois é na cinemática que estão as restrições não-holonômicas, conforme já demonstrado no capítulo 2.

As técnicas a serem apresentadas estão divididas em dois grupos, de acordo com o tipo de referência a ser seguida. As técnicas de controle em coordenadas cartesianas [22, 8] e em coordenadas polares [32, 33] serão utilizadas para o rastreamento de trajetórias de referência. Já as duas técnicas seguintes, controle com realimentação variante no tempo [34] e controle com modos deslizantes [35] serão aplicadas para que o robô convirja a uma dada postura de referência.

Na continuação serão mostradas as técnicas utilizadas, bem como resultados obtidos por simulação computacional digital.

### 3.1 Controle em Coordenadas Cartesianas

Apresenta-se nesta seção um controlador para rastreamento de trajetória baseado no modelo cinemático expresso em coordenadas cartesianas (equação 2.38).

Este controlador foi proposto por [8] e apresenta algumas características relevantes que serão apontadas ao longo da demonstração de estabilidade via teoria de Lyapunov.

Antes, porém, de levar a cabo tal demonstração, algumas considerações básicas devem ser aduzidas para um melhor e mais eficaz entendimento acerca da demonstração doravante apresentada.

#### 3.1.1 Erro de Postura

O erro de postura é definido como sendo a transformação para o sistemas de coordenadas locais ao robô, com origem em  $CX_cY_c$ , da diferença entre a postura desejada (ou de referência) e a postura efetiva (ou real) conforme mostrado na figura 3.1. A expressão para o erro de posição é:

$$\mathbf{p}_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} = \mathbf{T}_e(\mathbf{p}_{ref} - \mathbf{p}) \quad (3.1)$$

sendo  $p_e$  o erro de posição descrito no sistema de referência do robô,  $p_{ref}$  a posição de referência,  $p$  a posição efetiva do robô e  $\mathbf{T}_e$  a matriz de transformação, expressa por:

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

#### 3.1.2 Estrutura do Controlador

O objetivo deste controlador, para que o robô realize a manobra de rastreamento de trajetória, é fazer com que o erro de seguimento, apresentado na equação 3.1 convirja para zero.

A estrutura de controle utilizada pode ser visualizada pelo diagrama de blocos exposto na figura 3.2.

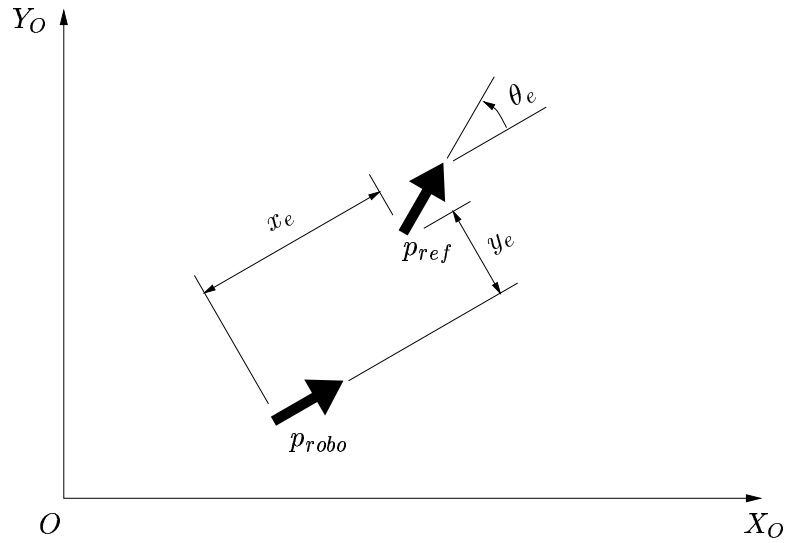


Figura 3.1: Definição do erro de postura.

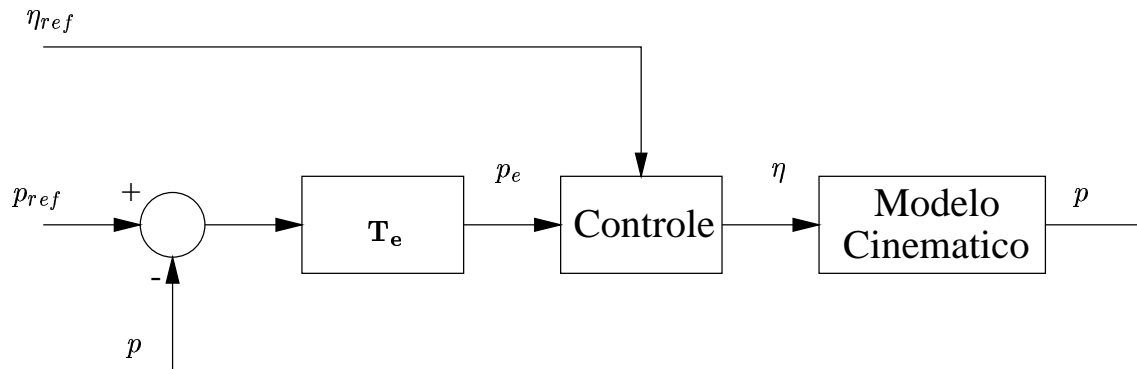


Figura 3.2: Diagrama de blocos do controlador utilizado.

No diagrama de blocos apresentado tem-se as variáveis  $\eta$  e  $\eta_{ref}$  que denotam, respectivamente, vetor de entrada de controle de velocidades linear e angular e vetor com as velocidades linear e angular de referência do robô.

É importante salientar que, para a análise aduzida posteriormente, considera-se um rastreamento perfeito de velocidade, isto é, assume-se que as velocidades efetivamente aplicadas nas rodas são as mesmas velocidades previamente calculadas ( $\eta$ ).

### 3.1.3 Prova de Estabilidade

Utilizando a equação do erro, tem-se que a dinâmica do erro de posição do robô,  $\mathbf{p}_e$ , é dada por:

**Lema 3.1.1**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{p}}_e = f(t, \mathbf{p}_e) = \begin{bmatrix} \omega(\mathbf{p}_e, \eta_{ref})y_e - v(\mathbf{p}_e, \eta_{ref}) + v_{ref}\cos\theta_e \\ -\omega(\mathbf{p}_e, \eta_{ref})x_e + v_{ref}\sin(\theta_e) \\ \omega_{ref} - \omega(\mathbf{p}_e, \eta_{ref}) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Para se obter a equação 3.3 utiliza-se a definição de erro de posição do robô, dado pela equação 3.1. Derivando-se a expressão de  $\mathbf{p}_e$  com relação ao tempo, utilizando o modelo cinemático juntamente com a simplificação devido ao rastreamento perfeito de velocidade tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= (\dot{x}_{ref} - \dot{x})\cos\theta + (\dot{y}_{ref} - \dot{y})\sin(\theta) - (x_{ref} - x)\dot{\theta}\sin(\theta) + (y_{ref} - y)\dot{\theta}\cos\theta \\ &= y_e\omega_c - v_c + v_{ref}\cos\theta_e \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_e &= -(\dot{x}_{ref} - \dot{x})\sin(\theta) + (\dot{y}_{ref} - \dot{y})\cos\theta - (x_{ref} - x)\dot{\theta}\cos\theta - (y_{ref} - y)\dot{\theta}\sin(\theta) \\ &= x_e\omega_c + v_{ref}\sin(\theta_e) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_e &= \dot{\theta}_{ref} - \dot{\theta} \\ &= \omega_{ref} - \omega_c \end{aligned} \quad (3.6)$$

sendo  $v_c \triangleq v(\mathbf{p}_e, \eta_{ref})$  e  $\omega_c \triangleq \omega(\mathbf{p}_e, \eta_{ref})$ .  $\square$

**Proposição 3.1.1** *Seja a equação*

$$\eta = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ref}\cos\theta_e + K_x x_e \\ \omega_{ref} + v_{ref}(K_y y_e + K_\theta \sin(\theta_e)) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

com  $K_x$ ,  $K_y$  e  $K_\theta$  constantes positivas, uma instância da lei geral exposta no lema 3.1.1.

O ponto  $p_e = 0$  é um ponto de equilíbrio estável se a velocidade de referência  $v_{ref} > 0$ .

Para demonstrar esse resultado, considera-se a seguinte função escalar como candidata a função de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}(x_e^2 + y_e^2) + \frac{(1 - \cos\theta_e)}{K_y} \geq 0 \quad (3.8)$$

Derivando-se esta função em relação ao tempo obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{x}_e x_e + \dot{y}_e y_e + \frac{\dot{\theta}_e \sin(\theta_e)}{K_y} \\ \dot{V} &= -K_x x_e^2 - \frac{v_{ref} K_\theta \sin^2(\theta_e)}{K_y}\end{aligned}\quad (3.9)$$

apresenta  $\dot{V} \leq 0$ , sendo  $V$  uma função de Lyapunov.

A estabilidade assintótica uniforme em torno de  $p_e = 0$  pode ser obtida [8] sob as seguintes condições:

- $v_{ref}$  e  $\omega_{ref}$  são contínuos;
- $v_{ref}$ ,  $\omega_{ref}$ ,  $K_x$  e  $K_\theta$  são limitados;
- $\dot{v}_{ref}$  e  $\dot{\omega}_{ref}$  são suficientemente pequenos.

### 3.1.4 Resultados de Simulação

A seguir serão apresentados alguns resultados, obtidos por simulação, a fim de se verificar e validar a lei de controle apresentada na equação 3.7.

O robô tem como posição inicial  $x_0 = 1,0$  (m),  $y_0 = 3,0$  (m) e  $\theta_0 = 0,0$  (rd). A trajetória de referência para as variáveis  $x$  e  $y$  são, respectivamente,  $x_{ref} = V_x * t$  e  $y_{ref} = V_y * t$ , onde  $V_x$  e  $V_y$  representam as velocidades linear desejadas nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, sendo estas iguais a  $0,5$  (m/s). A velocidade linear de referência é igual a  $v_{ref} = 0,5\sqrt{2}$  (m/s) e a velocidade angular de referência é igual a zero ( $\omega = 0,0$  (rd/s)). Os ganhos selecionados para esta malha de controle da cinemática foram  $K_x = 0,5$ ,  $K_y = 5,0$  e  $K_\theta = 3,0$ .

Nas figuras 3.3 e 3.4 apresentam-se as coordenadas  $x$  e  $y$  do robô durante o movimento (linhas cheias) e as respectivas posições de referência para as coordenadas (linhas pontilhadas).



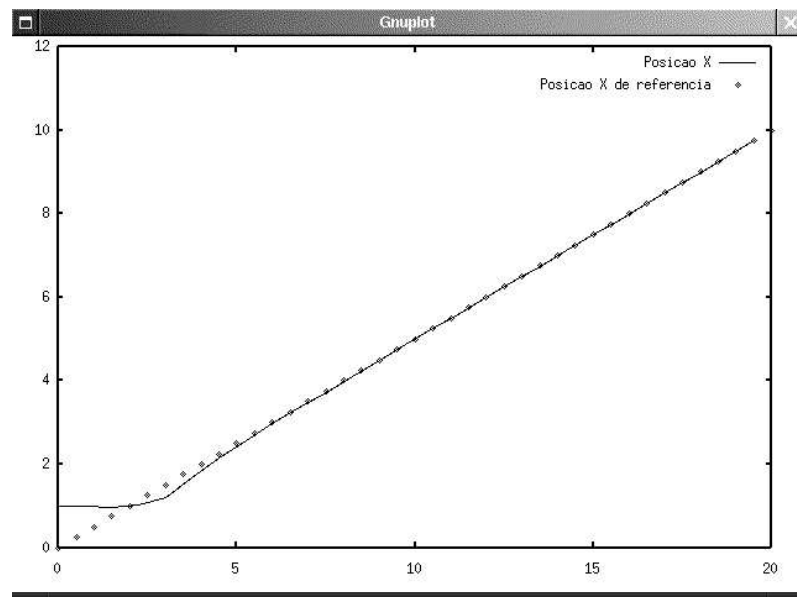


Figura 3.3: Posição  $x$  do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada).

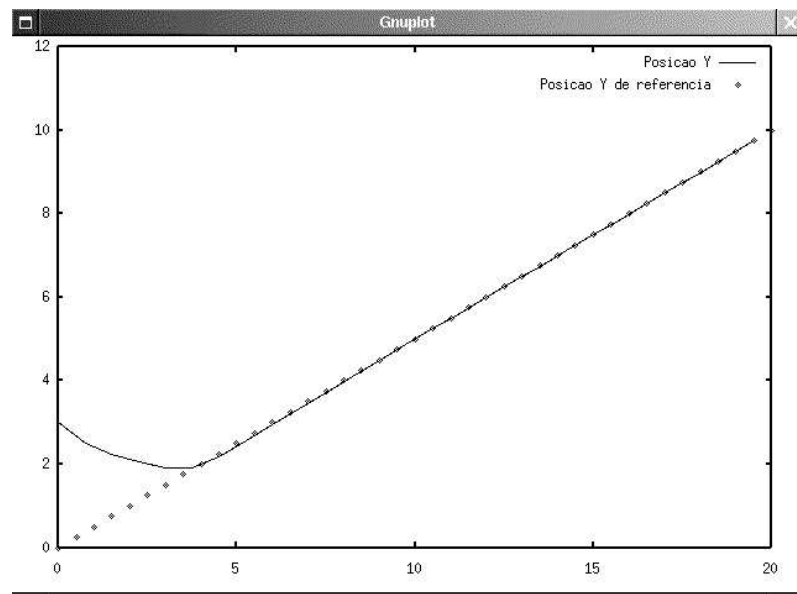


Figura 3.4: Posição  $y$  do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada).

A orientação do robô é apresentada na figura 3.5 (linha cheia), juntamente com o orientação de referência (linha pontilhada).

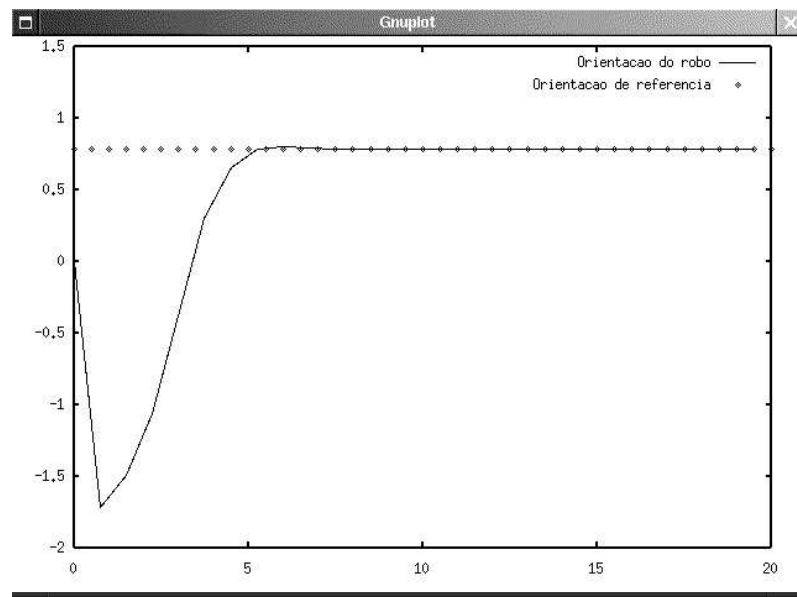


Figura 3.5: Orientação do robô (linha cheia) e orientação de referência (linha pontilhada).

A trajetória espacial realizada pelo robô (linha cheia) e a respectiva trajetória de referência (linha pontilhada) são apresentadas na figura 3.6.

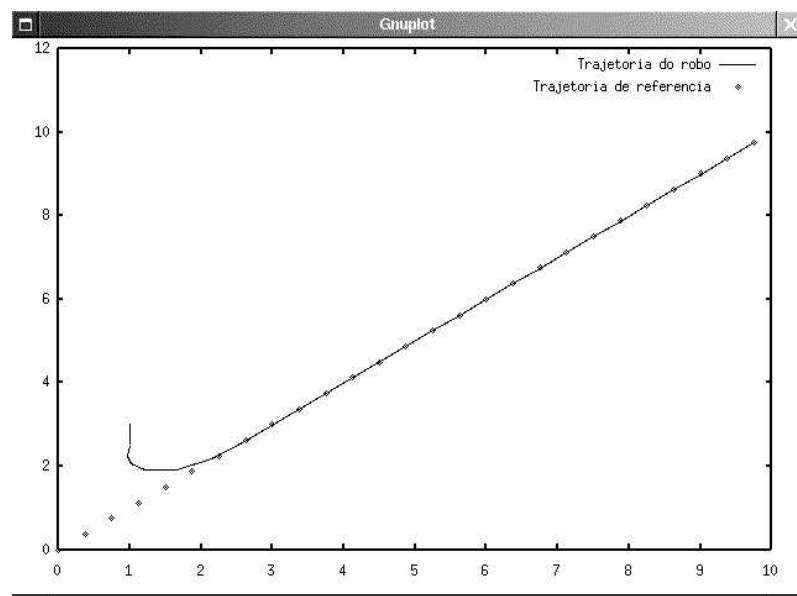


Figura 3.6: Trajetória realizada pelo robô para estabilizar na postura de referência.

Na figura 3.7 são mostradas as velocidades linear e angular do sistema.

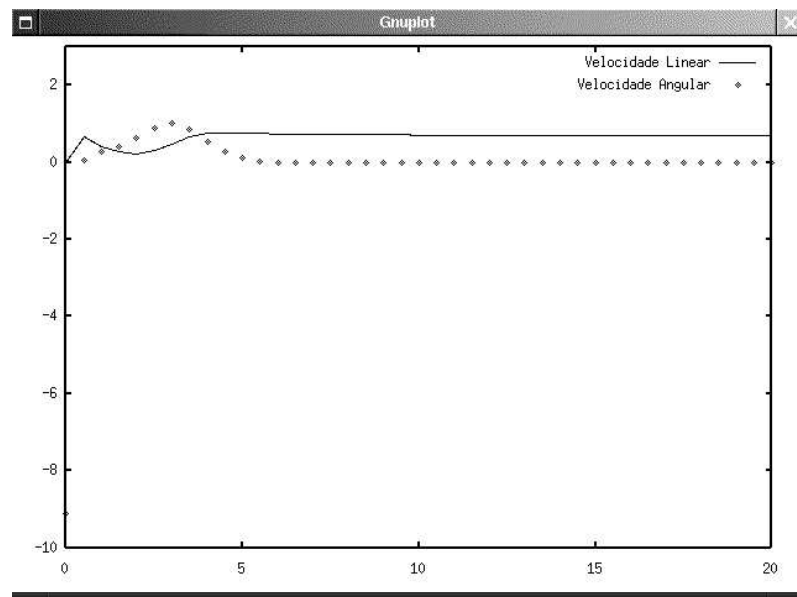


Figura 3.7: Velocidades linear (linha cheia) e angular (linha pontilhada) do robô.

Pode-se observar que o robô atinge a trajetória de referência, permanecendo nesta durante o restante do movimento. Os resultados experimentais referentes a esta técnica serão apresentados na seção 4.4.1.

### 3.2 Controle em Coordenadas Polares

Nesta seção será mostrada uma técnica onde se realiza uma transformação descontínua no modelo cinemático expresso em coordenadas cartesianas, dado pela equação 2.38.

A vantagem desta transformação está no fato de que a lei de controle obtida é descontínua, garantido a convergência assintótica do robô a uma determinada postura (posição e orientação), satisfazendo, deste modo, as condições apresentadas no teorema de Brockett [12].

Tal transformação consiste em expressar o modelo em coordenadas polares  $(e, \phi)$ , conforme ilustrado na figura 3.8 . Com base nesta figura verifica-se que:

$$e = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.10)$$

$$\phi = \text{atan2}(y, x) \quad (3.11)$$

$$x = e \cos(\phi) \quad (3.12)$$

$$y = e \sin(\phi) \quad (3.13)$$

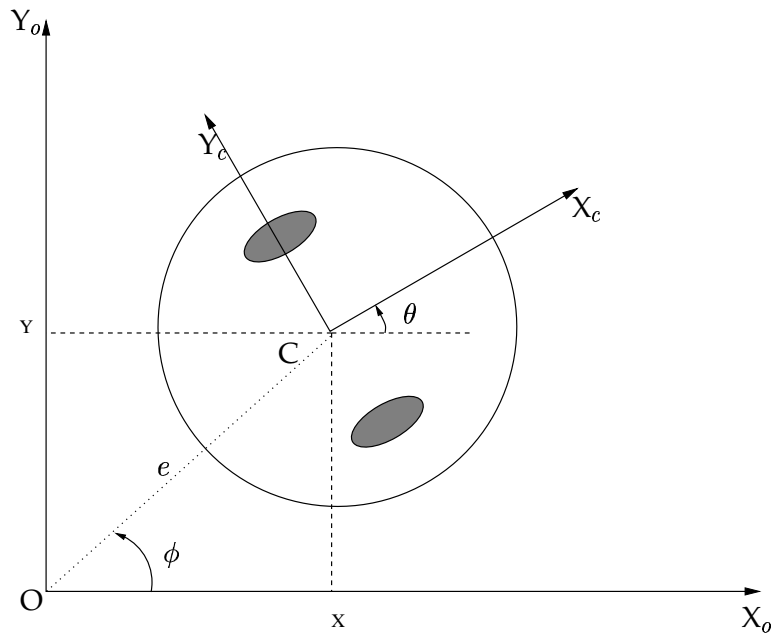


Figura 3.8: Descrição das variáveis de postura em coordenadas polares.

Tomando-se a derivada temporal das variáveis  $e$  e  $\phi$  e substituindo as equações 3.12

e 3.13 têm-se

$$\dot{e} = \dot{x} \cos(\phi) + \dot{y} \sin(\phi) \quad (3.14)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{e}(-\dot{x} \sin(\phi) + \dot{y} \cos(\phi)) \quad (3.15)$$

Este sistema de equações pode ser escrito na forma matricial, resultando em:

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \mathbf{\Upsilon}(e, \phi) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Seja a variável generalizada  $z$  definida por:

$$z \triangleq \begin{bmatrix} e \\ \phi \\ \theta \\ \beta_c \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

e com base em 2.35, 2.36 e em 3.16 descreve-se o modelo em coordenadas polares de forma genérica, a saber:

$$\dot{z} = \mathbf{D}(z)u \quad (3.18)$$

sendo a matriz  $\mathbf{D}(z)$  dada por:

$$\mathbf{D}(z) = \begin{cases} \mathbf{\Upsilon}(e, \phi) \mathbf{R}^T(\theta) \Sigma & N_c = 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{\Upsilon}(e, \phi) \mathbf{R}^T(\theta) \Sigma(\beta_c) & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} & N_c \geq 0 \end{cases}$$

A descrição dos modelos cinemáticos em coordenadas polares para as 5 classes podem ser encontradas em [25]. Definindo-se  $\alpha \triangleq \theta - \phi$  e juntamente com a equação 3.18 tem-se o modelo cinemático em coordenadas polares para robôs móveis pertencentes à classe (2,0):

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 \\ \frac{\sin(\alpha)}{e} & 0 \\ -\frac{\sin(\alpha)}{e} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

### 3.2.1 Obtenção da Lei de Controle

A lei de controle a ser apresentada está baseada nas teorias de Lyapunov e Barbalat [36]. Assume-se, para o desenvolvimento, que se deseja a convergência de  $e$ ,  $\phi$  e  $\alpha$  para zero, não acarretando perda de generalidade na análise a ser desenvolvida.

Seja a seguinte função candidata a função de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2}\lambda e^2 + \frac{1}{2}(\alpha^2 + h\phi^2) \quad (3.20)$$

sendo  $\lambda$  e  $h$  constantes positivas.

Derivando a candidata a função de Lyapunov em relação ao tempo e substituindo as variáveis  $\dot{e}$ ,  $\dot{\phi}$  e  $\dot{\alpha}$ , a partir de 3.19, tem-se:

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \quad (3.21)$$

sendo

$$\dot{V}_1 \triangleq \lambda e \cos(\alpha \eta_1) \quad (3.22)$$

$$\dot{V}_2 \triangleq \alpha \left[ \eta_2 - \frac{\sin(\alpha)}{e\alpha} (\alpha - h\phi) \eta_1 \right] \quad (3.23)$$

Pela teoria de Lyapunov tem-se que, para o sistema ser assintoticamente estável é necessário satisfazer  $V > 0$ ,  $\dot{V} < 0 \forall t > 0$ . Portanto, com base em 3.21, 3.22 e 3.23 obtém-se:

$$\eta_1 \triangleq -\gamma_1 e \cos(\alpha) \quad (3.24)$$

$$\eta_2 \triangleq -\gamma_2 \alpha - \gamma_1 \cos(\alpha) \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} (\alpha - h\phi) \quad (3.25)$$

com  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $h$  sendo constantes positivas.

Substituindo 3.24 e 3.25 em 3.22 e em 3.23 resulta em:

$$\dot{V} = -\lambda \gamma_1 e^2 \cos^2(\alpha) - \gamma_2 \alpha^2 \leq 0 \quad (3.26)$$

Uma vez que  $V > 0$  e  $\dot{V} < 0$  tem-se que o sistema é estável em malha fechada. Além disso, considerando-se que:

- $V$  é limitada inferiormente (3.20)

- $V$  é não crescente (3.26)
- $\dot{V}$  é uniformemente contínua, pois  $\ddot{V}$  é limitada

tem-se, pelo lema de Barbalat, que  $e$  e  $\alpha$  tendem a zero. A prova de convergência de  $\phi$  para zero pode ser provada analisando-se o sistema em malha fechada, a saber:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= -\gamma_1 e \cos^2(\alpha) \\ \dot{\phi} &= -\gamma_1 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ \dot{\alpha} &= -\gamma_2 \alpha + \gamma_1 h \phi \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \cos(\alpha)\end{aligned}$$

Analisando-se o sistema em malha fechada, fazendo uso do fato de que  $e$  e  $\alpha$  convergem a zero, pode-se concluir que  $\dot{e}$  e  $\dot{\phi}$  convergem também a zero. Deste modo, como  $\dot{\phi}$  converge a zero, tem-se que  $\dot{\alpha}$  converge a algum valor constante dado por  $\gamma_1 h \phi^*$ . Considerando-se também a continuidade uniforme de  $\dot{\alpha}$  e a convergência a zero de  $\alpha$  é garantido, pelo lema de Barbalat, que  $\dot{\alpha}$  tende a zero. Assim, como  $\dot{\alpha}$  converge a zero e é igual à constante  $\gamma_1 h \phi^*$ , conclui-se que  $\phi^*$  é, necessariamente, igual a zero.

### 3.2.2 Resultados Obtidos por Simulação

Os resultados apresentados nesta seção foram obtidos por meio de simulação computacional apenas do modelo cinemático. Os resultados apresentados na seção 4.4.2 foram obtidos por experimentação prática da malha de controle da cinemático ora proposta.

O robô está inicialmente posicionado em  $x_0 = 1,0(m)$ ,  $y_0 = 2,0(m)$  e em  $\theta_0 = \frac{\pi}{4,0}(rd)$ . A trajetória a ser seguida pelo robô possui a forma '8', centrada da origem  $(0, 0, 0)$ . Os ganhos deste controlador, ajustados por simulação, foram  $\gamma_1 = 4,0$ ,  $\gamma_2 = 1,5$  e  $h = 7,0$ . Os parâmetros  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  influenciam na taxa de convergência e o parâmetro  $h$  está mais relacionado com a forma da trajetória espacial.

As figura 3.9 e 3.10 apresentam, respectivamente os resultados obtidos para as coordenadas  $x$  e  $y$  (linhas cheias) e as trajetórias de referência para cada uma das coordenadas (linhas pontilhadas). Já na figura 3.11 se expõe a orientação do robô (linha cheia) e a respectiva trajetória de referência (linha pontilhada).

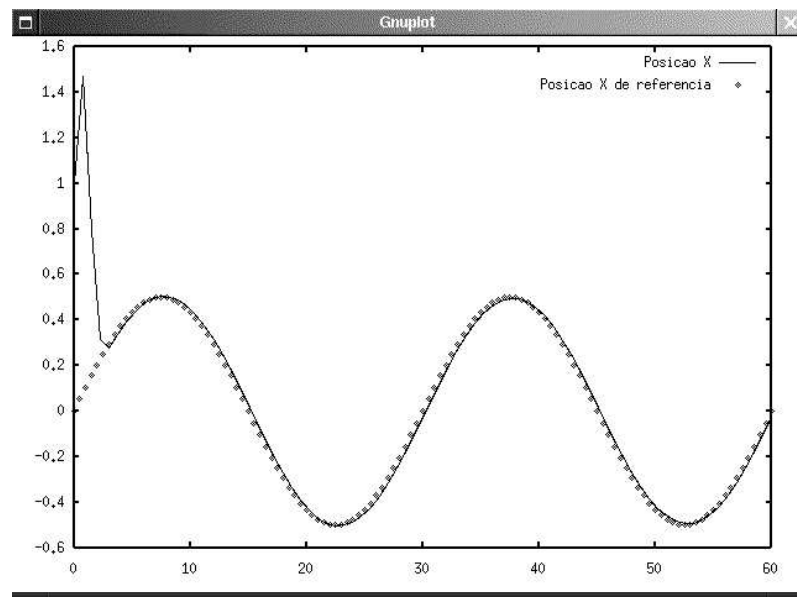


Figura 3.9: Posição  $x$  do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada).

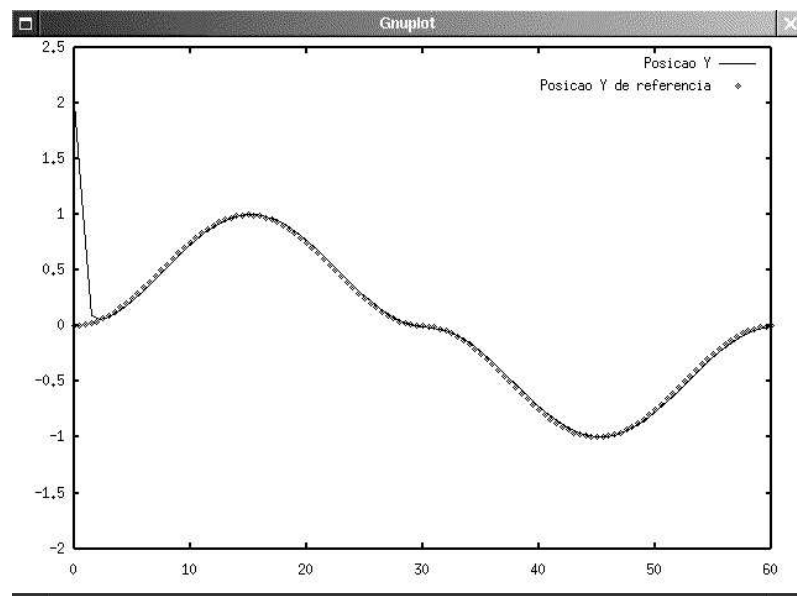


Figura 3.10: Posição  $y$  do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada).



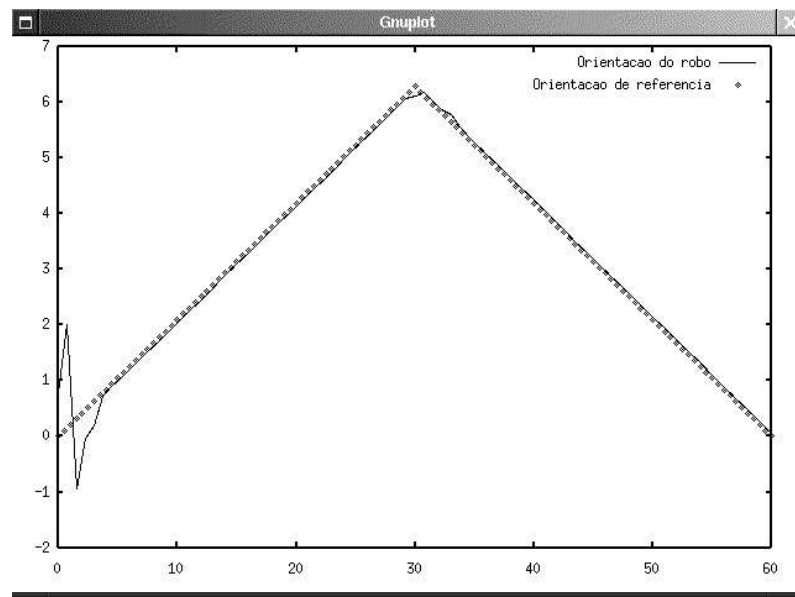


Figura 3.11: Orientação do robô (linha cheia) e orientação de referência (linha pontilhada).

A trajetória espacial desenvolvida pelo robô (linha cheia), bem como a de referência (linha pontilhada), são apresentadas na figura 3.12. Por último, na figura 3.13, apresenta-se as velocidades linear (linha cheia) e angular (linha pontilhada) desenvolvidas pelo sistema. Observa-se que houve uma variação na velocidades no exato momento em que o robô começa a realizar a segunda parte da trajetória.

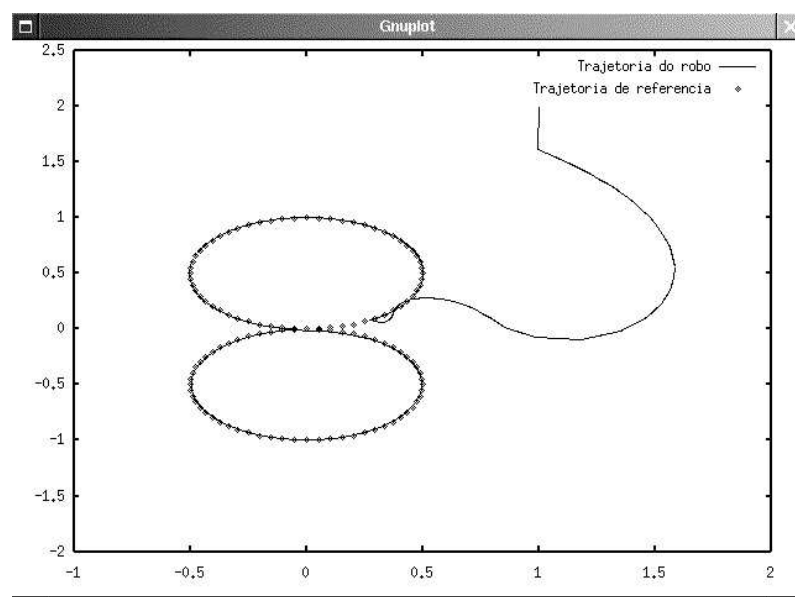


Figura 3.12: Trajetória realizada pelo robô para estabilizar na postura de referência.

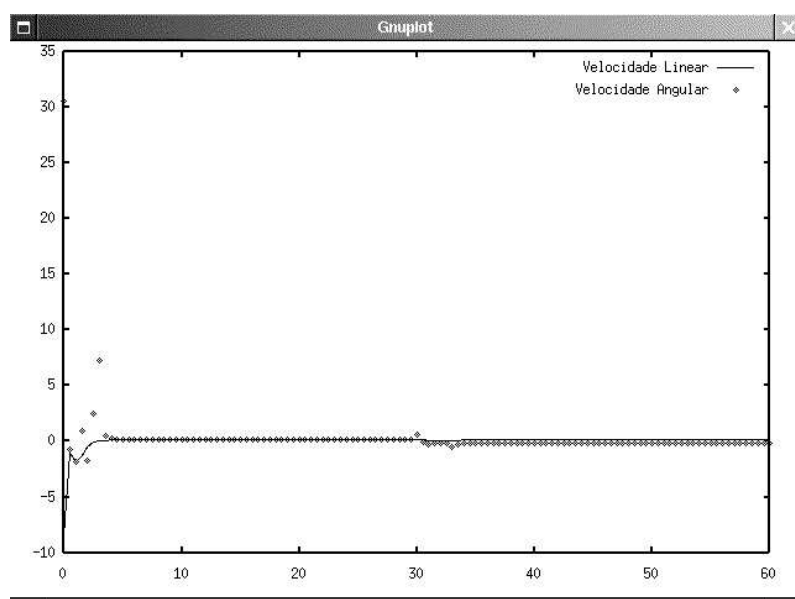


Figura 3.13: Velocidades linear (linha cheia) e angular (linha pontilhada) do robô.

### 3.3 Controle com Realimentação Variante no Tempo

Tendo-se como base para o projeto de leis de controle para robôs móveis não-holonômicos as restrições apresentadas por Brockett [12], onde não é possível estabilizar o robô em uma dada configuração (postura) desejada apenas com uma realimentação estática e contínua de estado, apresenta-se nesta seção o projeto de uma lei de controle variante no tempo, ou seja, uma lei de controle que apresenta explicitamente a variável tempo.

O uso de uma realimentação variante no tempo foi primeiramente apresentada por [37], cujos resultados estão baseados em veículos do tipo uniciclo. Tal trabalho serviu como base para outros trabalhos sobre este assunto, a fim de explorarem as potencialidades e aplicações da técnica.

Nesta seção, com base em [38], apresenta-se o controle cinemático de robôs móveis não-holonômicos na forma canônica encadeada. [29]

#### 3.3.1 Modelo Cinemático na Forma Canônica Encadeada

Apresenta-se, nesta seção, a transformação do modelo cinemático 2.38 para a forma canônica encadeada, a qual apresenta, no caso geral, uma complicada estrutura. Porém, na maioria dos casos apresentados na literatura, são de estrutura menos complexa e se apresentam como uma classe mais simples para a representação de sistemas de interesse prático [39].

Seja o modelo cinemático de um robô móvel dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Sejam as novas coordenadas representadas pela aplicação do seguinte difeomorfismo global:

$$z_1 = \theta \quad (3.28)$$

$$z_2 = x \sin(\theta) - y \cos(\theta) \quad (3.29)$$

$$z_3 = x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \quad (3.30)$$

Derivando as equações 3.28, 3.29 e 3.30 obtém-se:

$$\dot{z}_1 = \omega \quad (3.31)$$

$$\dot{z}_2 = z_3 \omega \quad (3.32)$$

$$\dot{z}_3 = v - z_3 \omega \quad (3.33)$$

Definindo  $u_1 = \omega$  juntamente com a entrada auxiliar de controle  $u_2 \triangleq v - z_3 \omega$  o sistema fica sob a forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= u_1 \\ \dot{z}_2 &= u_1 z_3 \\ \dot{z}_3 &= u_2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

conforme apresentado em [38].

### 3.3.2 Prova de Estabilidade do Controlador

Considerando o modelo cinemático expresso na forma encadeada e com a função *sign* definido por:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

**Proposição 3.3.1** *Seja  $u_1(t)$  uma função uniformemente contínua e  $|u_1(t)|$  limitada, juntamente com a realimentação:*

$$u_2(t) = -k_3 u_1 \text{sign}(z_2) (z_2^2)^{\frac{a-2}{2}} - k_4 z_3 \quad k_3, k_4 > 0 \quad (3.36)$$

onde  $a$  é um número positivo maior que 2, aplicada ao sistema 3.34, então a seguinte função:

$$V(z_2, z_3) = \frac{1}{2} \left( (z_2^2)^{\frac{a-1}{a}} + \frac{a-1}{k_3 a} z_3^2 \right) \quad (3.37)$$

é não-crescente ao longo de qualquer trajetória do sistema e assintoticamente tende a um valor limite  $V_{lim}$ . Além disto,  $u_1(t)$   $V(z_2, z_3)$  tende assintoticamente a zero.

Com isto, se  $u_1(t)$  não converge assintoticamente a zero então  $V_{lim} = 0$ , implicando na convergência assintótica de  $z_2(t)$  e  $z_3(t)$  para zero.

Analisando a equação 3.37 é possível observar que esta função é diferenciável exceto em  $z_2 = 0$  quando  $a = 2$ ; o controle  $u_2(t)$  é contínuo exceto no *manifold*  $z_2 = 0$  quando  $a = 2$ .

Diferenciando a função de Lyapunov apresentada na proposição 3.3.1 acima em relação ao tempo, ao longo de uma solução do sistema resulta em:

$$\dot{V} = \frac{a-1}{a} z_3 \left[ u_1 \operatorname{sign}(z_2) (z_2^2)^{\frac{a-2}{2a}} + \frac{u_2}{k_3} \right] \quad (3.38)$$

e substituindo a expressão de  $u_2(t)$  obtém-se:

$$\dot{V} = -\frac{a-1}{a} \frac{k_4}{k_3} z_3^2 \quad (3.39)$$

Observa-se que a derivada primeira de  $V$  é definida e não-positiva, implicando em  $|z_2(t)|$  e  $|z_3(t)|$  serem uniformemente limitadas.

Já que  $\dot{V}$  é limitada e  $V$  converge a um valor limite e, considerando o fato de  $z_3^2(t)$  ser uniformemente contínuo, tem-se que  $\dot{V}$  converge assintoticamente a zero pelo lema de Barbalat (apêndice B). Portanto  $z_3 \rightarrow 0$ .

O produto  $z_2 z_3$  também tende a zero. Derivando este produto resulta em:

$$\frac{d}{dt}(z_2 z_3) = u_1 z_3^2 - k_4 z_2 z_3 - k_3 u_1 (z_2^2)^{\frac{a-1}{2a}} \quad (3.40)$$

Esta derivada é uniformemente contínua ao longo de qualquer trajetória do sistema, uma vez que todos os termos do lado direito da equação são uniformemente contínuos e, pelo lema de Barbalat, o produto em análise tende a zero. Sabendo que  $z_3(t)$  tende a zero, tem-se que o termo  $u_1 z_2$  também tende a zero.

Deste modo, tem-se que  $u_1 z_2$  e  $u_1 z_3$  tendem a zero, ou, de forma mais geral,  $u_1 V(z_2, z_3)$  tende a zero.  $\square$

**Proposição 3.3.2** *Utilizando o controle 3.36 apresentado na proposição 3.3.1 e definindo  $u_1$  como sendo:*

$$u_1 = -k_1 z_1 + h(z_2, t) \quad k_1 > 0 \quad (3.41)$$

onde a função  $h(z_2, t)$  é uma função contínua definida no  $\mathcal{R} \times \mathcal{R}^+$ , duas vezes diferenciáveis em relação ao tempo exceto no *manifold*  $z_2 = 0$  quando  $a = 2$ , uniformemente limitada em relação a  $t$  e com derivadas parciais também uniformemente limitadas em relação a  $t$  quando  $z_2 = 0$ .

Além disto, duas condições se fazem necessárias para a escolha da função:

- **Condição 1:**  $h(0, t) = 0, \quad \forall t$
- **Condição 2:**  $\forall z_2 \neq 0, \frac{\partial h(z_2, t)}{\partial t}$  não converge assintoticamente a zero quando  $t \rightarrow \infty$ .

Com estas condições obtém-se como resultado:

i) A origem  $X = 0$  do sistema controlado é globalmente assintoticamente estável;

ii) Com a seguinte instância de  $h(z_2, t)$ :

$$h(z_2, t) = k_2 \text{sign}(z_2) (z_2^2)^{\frac{1}{2a}} \sin(\omega t) \quad (3.42)$$

a origem  $X = 0$  é  $\rho$ -exponencialmente estável com relação à norma homogênea:

$$\rho(z) = \left( z_1^{2a(a-1)} + z_2^{2(a-1)} + z_3^{2a} \right)^{\frac{1}{2a(a-1)}} \quad (3.43)$$

no sentido de

$$\exists M > 0, \exists \alpha > 0: \rho(z(t)) \leq M \rho(z(0)) e^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0 \quad (3.44)$$

Sendo  $u_2$  apresentado na proposição 3.3.1, a condição de  $|z_1|$  e  $|\dot{z}_1|$  serem limitadas é estabelecida pela limitação de  $V(z_2, z_3)$  e pela primeira equação do sistema 3.34. Como consequência disto,  $|z_1|$  sendo limitado ao longo de qualquer trajetória do sistema, tem-se que  $|u_1|$  e  $|\dot{z}_2|$  também são limitadas e  $z_2$  tende a um valor limite  $z_{2lim}$ .

Assume-se que  $z_{2lim}$  é diferente de zero. Portanto, existe um tempo tal que  $|z_2(t)| > \epsilon > 0$  se  $t > t_0$ . Da expressão de  $u_1$  e das condições 1 e 2 apresentadas na proposição 3.3.2, observa-se que o controle  $u_1$  é uniformemente contínuo quando  $t > t_0$ . Tem-se que os resultados desta proposição 3.3.1 são satisfeitos, implicando na convergência de  $u_1$  a zero, pois caso contrário  $z_2$  tenderia a zero, levando a uma contradição. A expressão do controle  $u_1(t)$  se torna  $\gamma(t) = -k_1 z_1(t) + h(z_{2lim}, t)$  e tende a zero.

Sendo  $u_1$  convergente a zero, a derivada temporal de  $\gamma(t)$

$$\frac{d}{dt} \gamma(t) = -k_1 \dot{z}_1 + \frac{\partial}{\partial t} h(z_{2lim}, t) \quad (3.45)$$

é uniformemente contínua quando  $t > t_0$  e, portanto, tende a zero (lema de Barbalat).

Já que  $\dot{\gamma}$  tende a zero, tem-se que  $-k_1 u_1 + \frac{\partial}{\partial t} h(z_{2lim}, t)$  também tende a zero. A condição 2 da proposição 3.3.2 impõe que  $h(z_{2lim}, t)$  não tende a zero ao longo do tempo. Com isto,

$u_1$  também não pode tender a zero, provocando uma contradição.

Portanto, tem-se que  $z_{2_{lim}}$  é necessariamente igual a zero. A convergência assintótica de  $z_1$  para zero é obtida pela primeira equação do sistema 3.34 juntamente com a condição 1 da proposição 3.3.2.

Em relação ao segundo resultado da proposição 3.3.2 é importante salientar que o sistema controlado, com  $h(z_{2_{lim}}, t)$  conforme definido anteriormente, é homogêneo de ordem zero em relação à dilatação  $\delta_\lambda Z = (\lambda z_1, \lambda^2 z_2, \lambda^{a-1} z_3)$  e que a norma- $\rho$  homogênea associada é a considerada na proposição 3.3.2.

A prova deste item baseia-se no trabalho de Kawski, em [40], onde se apresenta pormenorizadamente tal comprovação. Recomenda-se, também, a leitura de [34].

### 3.3.3 Resultados Obtidos por Simulação

A seguir apresenta-se os resultados obtidos por simulação, sendo os resultados experimentais mostrados na seção 4.4.3.

Inicialmente o robô encontra-se na posição  $x_0 = 2,0(m)$ ,  $y_0 = 2,0(m)$  e  $\theta_0 = \frac{\pi}{6,0}(rd)$  e tem como posição final  $x = -0,5(m)$ ,  $y = -0,5(m)$  e  $\theta = 0,0(rd)$ . Os ganhos para o controlador variante no tempo foram  $k_1 = 10,0$ ,  $k_2 = 10,0$ ,  $k_3 = 2,0$ ,  $k_4 = 2,0$ ,  $k_5 = 0,8$  e  $a = 2,0$ .

Nas figuras 3.14 e 3.15 são mostradas as trajetórias desenvolvidas pelo robô, respectivamente, na direção  $x$  e na direção  $y$  do plano cartesiano. Já na figura 3.16 é apresentada a orientação do robô durante a convergência à postura desejada. Observa-se que o robô convergiu para as coordenadas de referência.

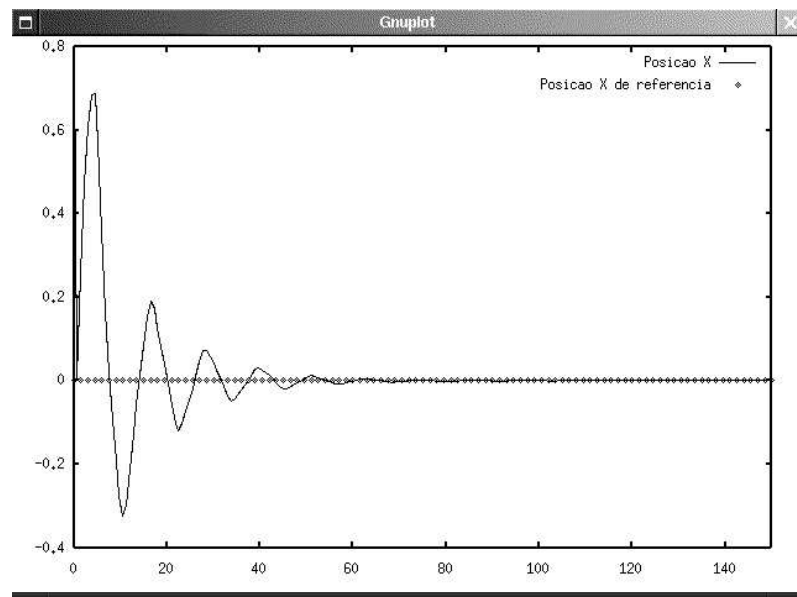


Figura 3.14: Posição  $x$  do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada).

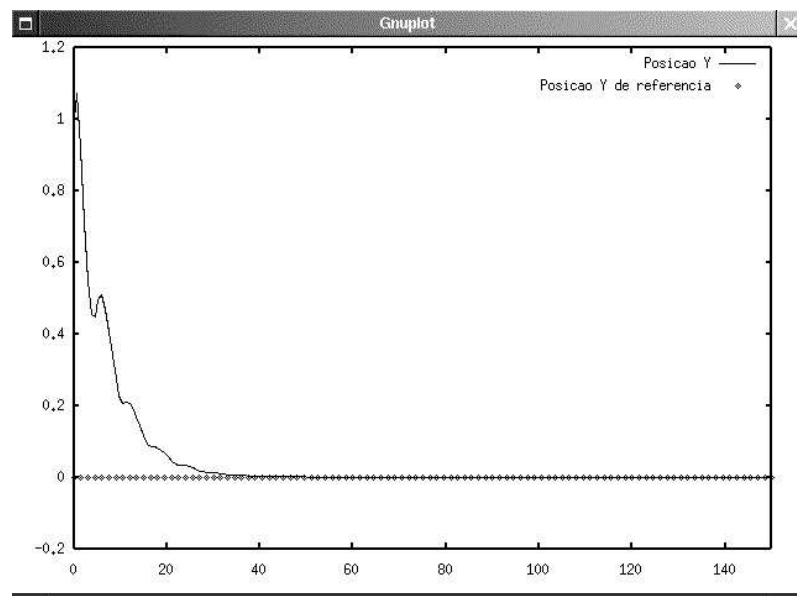


Figura 3.15: Posição  $y$  do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada).



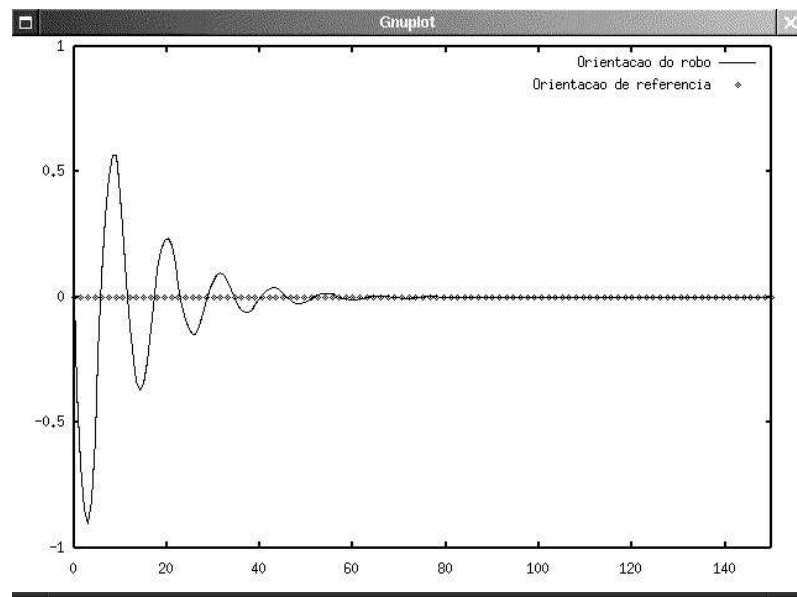


Figura 3.16: Orientação do robô (linha cheia) e orientação de referência (linha pontilhada).

Já na figura 3.17 mostra-se a trajetória espacial desenvolvida pelo robô para atingir a postura de referência. Nesta figura observa-se a característica principal das técnicas variantes no tempo, que é a grande oscilação durante a convergência.

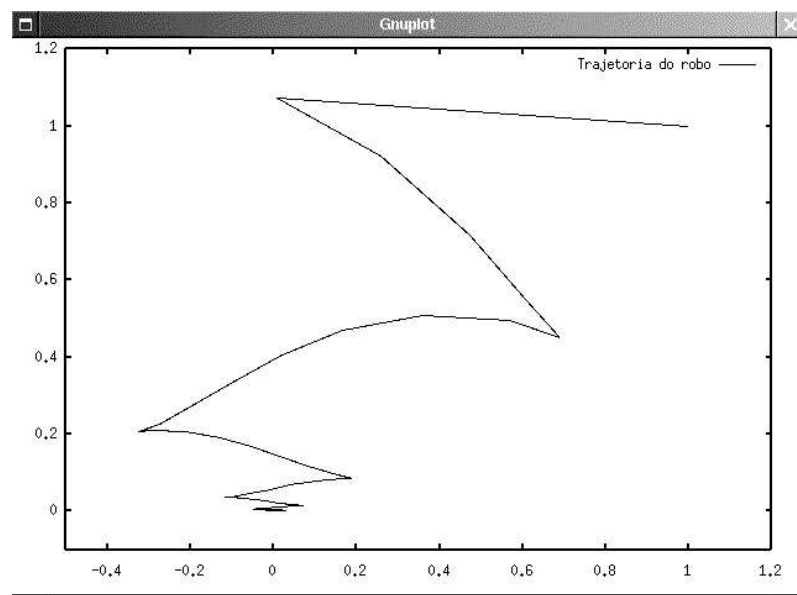


Figura 3.17: Trajetória realizada pelo robô para estabilizar na postura de referência.

As velocidades linear e angular impostas ao sistema são mostradas na figura 3.18. Observa-se que as velocidades apresentam valores nulos a partir do momento em que a

postura desejada é atingida.

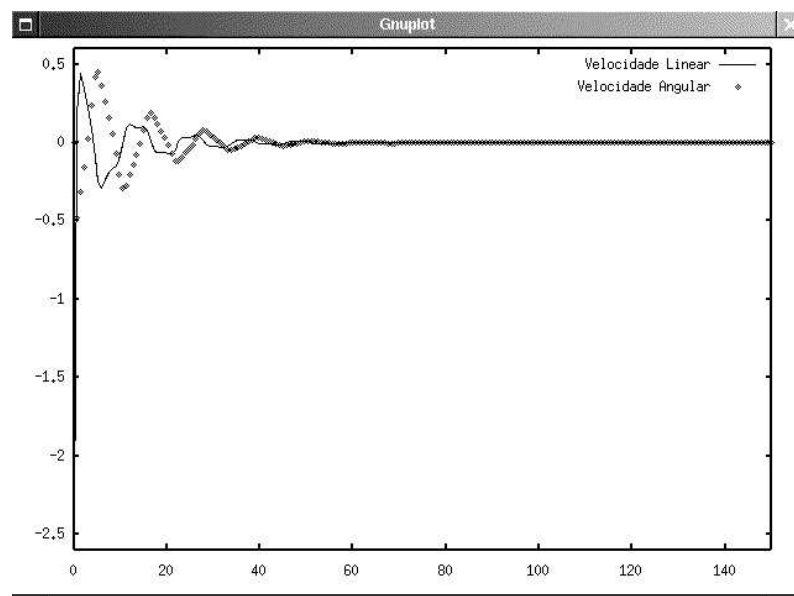


Figura 3.18: Velocidades linear (linha cheia) e angular (linha pontilhada) do robô.

### 3.4 Controle via Modos Deslizantes

O propósito da lei de controle chaveada é conduzir a trajetória não-linear do sistema a uma superfície pré-especificada (definida pelo usuário) no espaço de estado e mantê-la sobre esta superfície pelo restante do tempo. Esta superfície é a chamada **superfície de chaveamento**. Quando a trajetória do sistema se encontra “acima” da superfície a realimentação apresenta um ganho e quando a trajetória se encontra “abaixo” desta superfície, a realimentação apresenta um outro ganho.

Esta superfície também é chamada de **superfície de deslizamento** (*sliding manifold*) pois, no caso ideal, uma vez interceptada a superfície pela trajetória do sistema, a lei de controle chaveada faria com que a trajetória permanecesse na superfície em todo o tempo subsequente, ou seja, a trajetória deslizaria pela superfície.

A dinâmica da planta restrita a esta superfície representa o comportamento do sistema controlado. O primeiro passo a ser feito é definir adequadamente uma superfície de deslizamento para que a planta apresente, quando restrita à superfície, características desejadas como convergência à origem, robustez a variações paramétricas, etc [41, 42, 43, 44].

Como base, apresenta-se um exemplo simples, a fim de ilustrar a técnica a ser utilizada. Considere o sistema de primeira ordem:

$$\dot{x}(t) = u(x, t) \quad (3.46)$$

com o seguinte controle aplicado:

$$u(x, t) = \text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x > 0 \\ +1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

O sistema 3.46 com o controle 3.47 possui trajetória como apresentado na figura 3.4. Observa-se que o controle chaveia entre +1 e -1 em torno da superfície  $\sigma(x, t) = x = 0$ . Sendo assim, para qualquer condição inicial  $x_0$  existe um tempo finito  $t_1$  para o qual  $x(t) = 0 \quad \forall t \geq t_1$ .

Uma das considerações feitas para o projeto (escolha) da superfície de deslizamento [45] é que a lei de controle possa chavear de um valor para outro num tempo infinitesimal, isto é, num tempo teoricamente nulo, sendo este efeito conhecido como *chattering* [46, 5]. Uma vez que é impossível chavear a uma taxa infinita, este fenômeno se faz presente, geralmente,

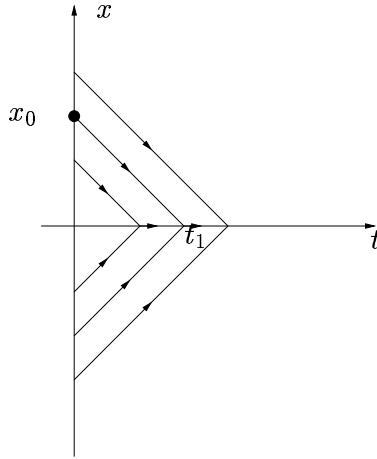


Figura 3.19: Trajetórias do sistema 3.46.

como uma oscilação de alta frequência em torno do ponto de equilíbrio desejado, podendo causar a excitação de dinâmicas não-modeladas de alta frequência.

Na prática, a hipótese de se chavear numa frequência infinita não é satisfeita. Alguns motivos são a presença de atrasos finitos devido ao cômputo da lei de controle, aquisição e envio dos dados junto à planta física e, simplesmente, devido à restrição dos próprios atuadores. Em [43] alguns métodos são apresentados a fim de eliminar, ou pelo menos reduzir, os efeitos causados pelo *chattering*.

### 3.4.1 Esquema de Controle

O controlador proposto apresenta uma estrutura funcional simples, conforme pode ser visto no diagrama de blocos apresentado na figura 3.20. O diagrama mostra como entradas do sistema a postura de referência e o próprio vetor de estado do modelo cinemático.

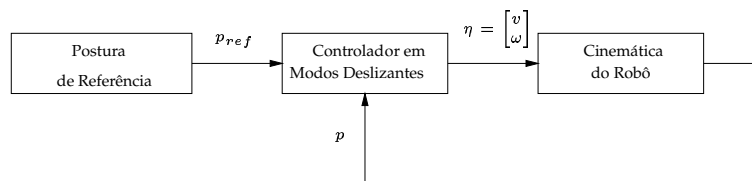


Figura 3.20: Diagrama de blocos do sistema de controle.

**Lema 3.4.1** *Sejam o espaço de trabalho de um robô caracterizado por  $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}^2$  e o seu espaço de configuração dado por  $\mathcal{C} = \mathcal{T} \times [-\pi, \pi[ \in \mathcal{R}^3$ .*

Neste esquema de controle projeta-se uma função de Lyapunov  $V$  para navegar o sistema até a origem do espaço de trabalho  $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}^2$ . A navegação do robô à origem do espaço de configuração deve ser garantida pelo gradiente associado  $\epsilon = \nabla V$ . Uma vez que este gradiente apresenta as propriedades necessárias, haverá a navegação do robô

A lei de controle é projetada a fim de prover à trajetória movimento ao longo do gradiente  $\epsilon(x, y)$ . Para tal faz-se uso das propriedades de invariância e de redução de ordem do modo deslizante [46]. O objetivo é manter o vetor velocidade linear do veículo co-linear ao gradiente; a velocidade do movimento ao longo do gradiente pode ser determinada independentemente. A trajetória pode ser obtida a partir da solução da equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\epsilon_y(x, y)}{\epsilon_x(x, y)} \quad (3.48)$$

A trajetória deve ser suave e contínua, devendo as primeiras derivadas do gradiente da função de Lyapunov ( $\frac{\partial \epsilon_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \epsilon_x}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial \epsilon_y}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \epsilon_y}{\partial y}$ ) serem limitadas.

Seja o erro de orientação dado por:

$$\Delta\theta = \theta_\epsilon - \theta$$

A dinâmica do erro é dada pela derivada em relação ao tempo da equação 3.4.1, resultando em:

$$\begin{aligned}
 \Delta \dot{\theta} &= \frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial y} \dot{y} - \omega \\
 &= \nabla \theta_\varepsilon \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} - \omega \\
 &= \nabla \theta_\varepsilon \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} v - \omega \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + \left(\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right)^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right) & \frac{1}{1 + \left(\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right)^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} v - \omega \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_x^2}{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right) & \frac{\varepsilon_y^2}{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} v - \omega \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_x \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \varepsilon_y \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x}}{\|\varepsilon\|^2} \cos(\theta) & \frac{\varepsilon_x \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} - \varepsilon_y \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y}}{\|\varepsilon\|^2} \sin(\theta) \end{bmatrix} v - \omega
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

De forma mais compacta, pode ser reescrita como:

$$\Delta \dot{\theta} = F(x, y, \theta) v - \omega \tag{3.50}$$

Definindo-se a entrada de controle  $\omega$  como sendo:

$$\omega \triangleq F(x, y, \theta) v + \xi \operatorname{sign}(\Delta \theta) \sqrt{|\Delta \theta|} \tag{3.51}$$

garante-se que a convergência a zero de  $\Delta \theta$  será em um tempo finito, sendo  $\xi$  uma constante escalar positiva e finita [35].

A fim de se garantir a existência do modo deslizante com controle finito deve-se assegurar que o termo  $F(x, y, \theta) v$ , em 3.51, é limitado. O controle de velocidade  $v(t)$ , utilizado para garantir que esse termo seja limitado, é definido como:

$$v(t) \triangleq -\|\varepsilon\| v^*(t) \tag{3.52}$$

onde  $v^*(t)$  é uma entrada auxiliar, limitada, de controle. Observa-se que  $\varepsilon(0, 0) = 0$  e, por consequência,  $v(t)$  e o termo  $F(x, y, \theta) v$  tendem a zero na origem. Quando ocorre o modo deslizante ao longo de  $\Delta \theta = 0$ , o campo gradiente  $\varepsilon$  será seguido, reduzindo o sistema

cinemático 2.38, sob os controles 3.51 e 3.52, ao sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} \frac{v(t)}{\|\varepsilon\|} = - \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} v^*(t) \quad (3.53)$$

Num primeiro momento pode-se pensar que o sistema reduzido ainda se encontre sob as restrições apresentadas no teorema de Brockett [12], uma vez que apresenta dimensão de estado maior que a dimensão de entradas de controle. Mas numa análise mais detalhada observa-se que, devido à técnica de modos deslizantes, o gradiente da função de Lyapunov é seguido com exatidão, reduzindo a ordem do sistema por meio da restrição do movimento ao *manifold* resultante de 3.48.

### 3.4.2 Lei de Controle

Seja  $V(x, y)$  uma função candidata a função de Lyapunov, expressa por:

$$V(x, y) = \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{a} + y^2 \right) > 0 \quad (3.54)$$

sendo  $a$  uma constante escalar positiva e  $V$  uma função positiva definida. Seja o gradiente associado dado por:

$$\varepsilon(x, y) = -\nabla V = \begin{bmatrix} -\frac{x}{a} \\ -y \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

De acordo com a expressão 3.48 e com o gradiente associado, tem-se trajetórias do tipo:

$$y = \gamma |x|^a \quad (3.56)$$

sendo  $\gamma$  dependente das condições iniciais, sem maior importância ao controle.

A entrada de controle responsável pela orientação co-linear do robô ao gradiente  $\varepsilon(x, y)$  é obtida substituindo-se a equação 3.55 em 3.51, resultando em:

$$\omega = -\frac{x \sin \theta - y \cos \theta}{\sqrt{x^2 + (ay)^2}} v^* + \xi \operatorname{sign}(\Delta \theta) \sqrt{|\Delta \theta|} \quad (3.57)$$

com erro de orientação expresso pela equação 3.4.1 e com controle de velocidade dado por:

$$v(t) = -\sqrt{x^2 + (ay)^2} v^*(t) \quad (3.58)$$

Durante a ocorrência do modo deslizante tem-se que  $\theta = \theta_\epsilon$  e o movimento do robô é dado pelo sistema reduzido 3.53 com a restrição dada por 3.48. Arbitrando-se:

$$v^*(t) = -v_0 \quad (3.59)$$

provê convergência exponencial do erro de posição. Já a convergência da orientação  $\theta$  a zero pode ser determinada examinando-se:

$$\theta = \theta_\epsilon = \arctan\left(\frac{ay}{x}\right) = \arctan(abx^{a-1}) \quad (3.60)$$

durante a evolução temporal de  $x$  em 3.53, com controle 3.58 e  $a > 1$ .

Considerando-se a região em torno da origem, a aproximação  $\tan(\alpha) \approx \alpha$ , para pequenos valores de  $\alpha$ , pode-se concluir que a convergência de  $\theta$  para zero é exponencial.

### 3.4.3 Resultados Obtidos

Os resultados aqui apresentados foram obtidos por meio de simulação, sendo os resultados experimentais mostrados na seção 4.4.4.

Os ganhos para o controlador cinemático via modos deslizantes são  $a = 2,0$ ,  $\xi = 20,0$  e  $V_0 = 0,5(m/s)$ . A postura inicial do robô é  $x_0 = 2,0(m)$ ,  $y_0 = 3,0(m)$  e  $\theta_0 = 0,0(rad)$  e a postura de referência é  $x = 0,0(m)$ ,  $y = 3,0(m)$  e  $\theta = 0,0(rad)$ .

Na figura 3.21 se apresenta a trajetória da coordenada  $x$  do robô durante a realização da tarefa e na figura 3.22 tem-se a trajetória realizada pela coordenada  $y$ . A orientação do robô é apresentada na figura 3.23.



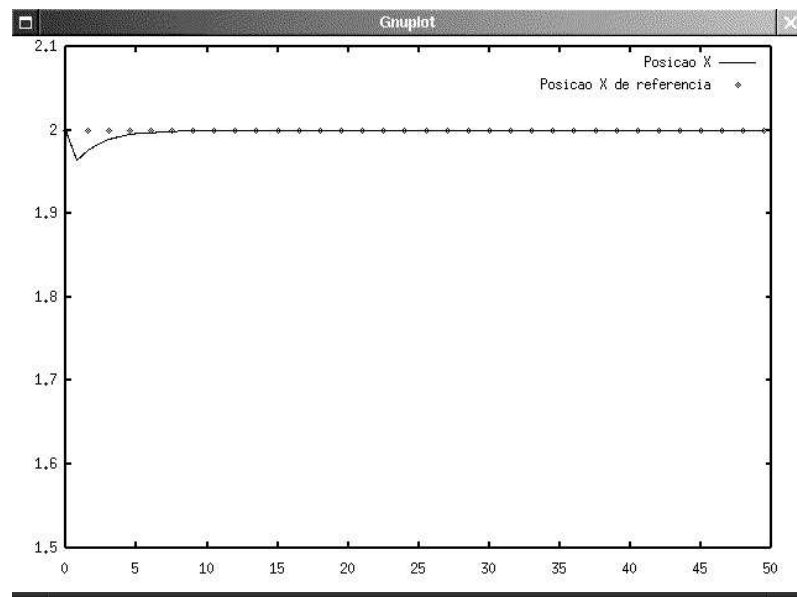


Figura 3.21: Posição  $x$  do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada).

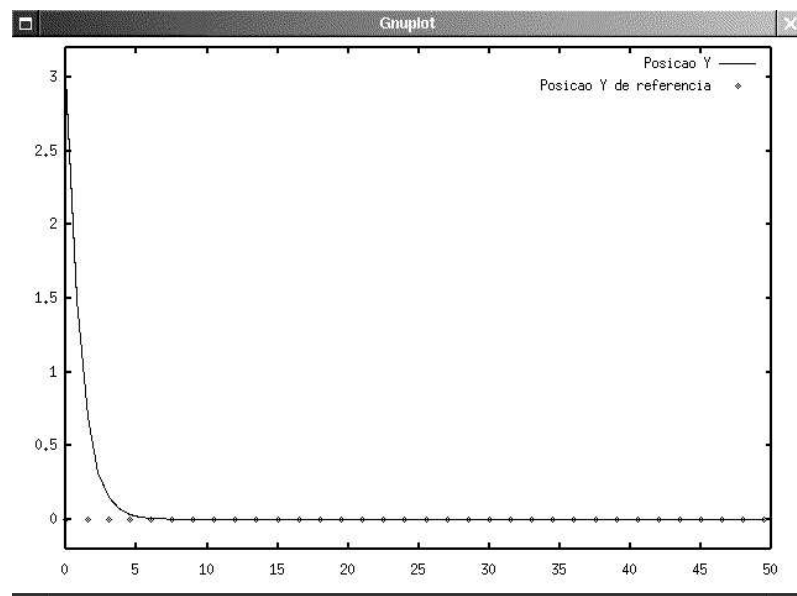


Figura 3.22: Posição  $y$  do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada).

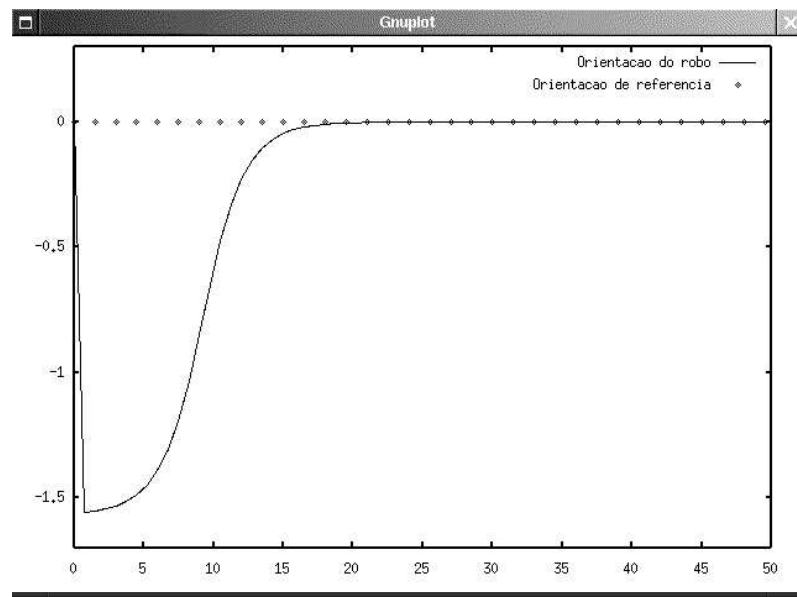


Figura 3.23: Orientação do robô (linha cheia) e orientação de referência (linha pontilhada).

A trajetória desenvolvida pelo robô no plano cartesiano é apresentada na figura 3.24 e as velocidades impostas ao sistema podem ser analisadas na figura 3.25.

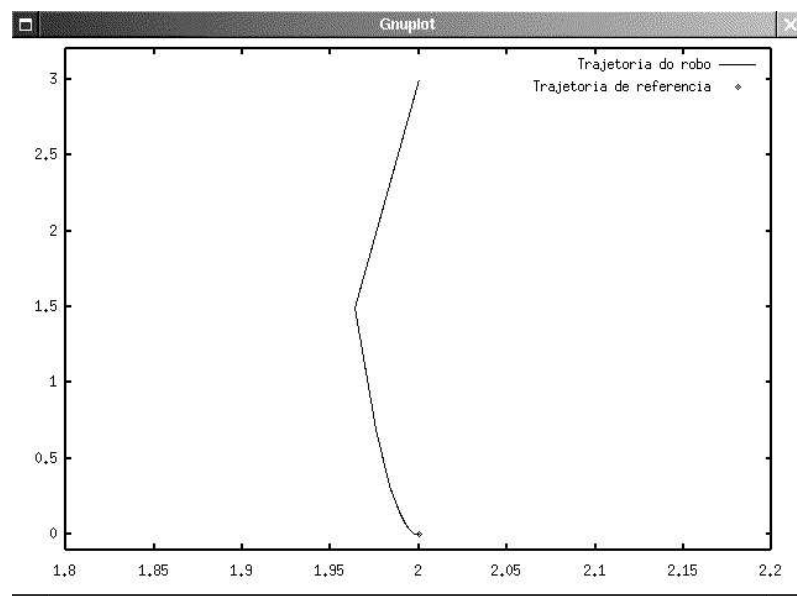


Figura 3.24: Trajetória realizada pelo robô para estabilizar na postura de referência.

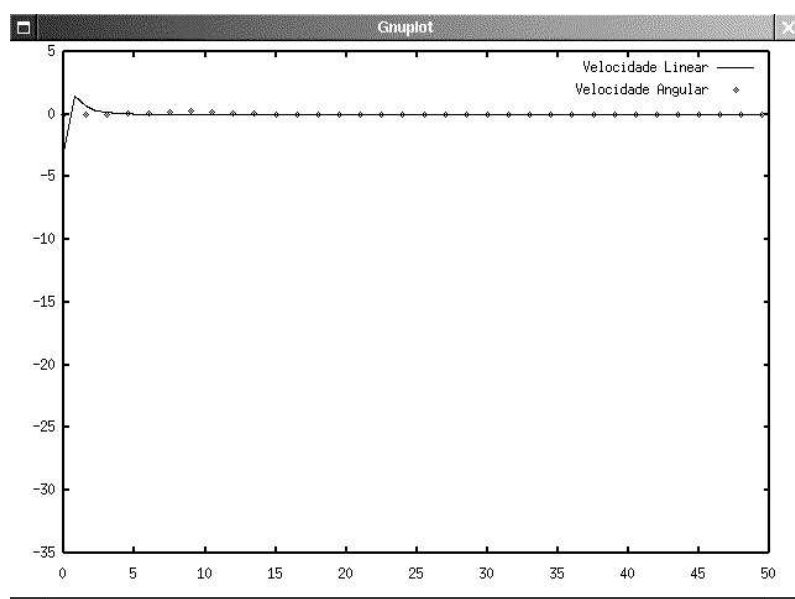


Figura 3.25: Velocidades linear (linha cheia) e angular (linha pontilhada) do robô.

## Capítulo 4

# Controle Dinâmico via Redes Neurais

Como visto no capítulo 2, o controle de robôs móveis com acionamento diferencial pode ser feito pelo cascadeamento de uma malha de controle para a cinemática com uma malha de controle para a dinâmica do robô.

Neste capítulo apresenta-se uma estratégia baseada na aplicação de redes neurais artificiais para o controle da dinâmica de robôs móveis [22].

A seguir uma breve introdução às redes neurais artificiais e posteriormente apresenta-se a estratégia de controle utilizada, bem como a prova de estabilidade do controlador e resultados obtidos.

### 4.1 Redes Neurais Artificiais

Uma rede neural artificial (figura 4.1) consiste em um conjunto de unidades de processamento as quais se comunicam pelo envio de sinais aos demais elementos por meio de conexões ponderadas [47]. Cada um dos elementos básicos de uma rede neural (denominados neurônios) possuem sinais de entrada provenientes de outros neurônios ou de sinais externos à própria rede.

A rede neural utilizada neste trabalho é mostrada na figura 4.1, possuindo 6 neurônios na camada de entrada, 8 neurônios na camada intermediária e 2 neurônios na camada de saída. Assim, o sinal de saída da rede é dado pela equação:

$$y(x) = \mathbf{W}^T \sigma(\mathbf{V}^T x) \quad (4.1)$$

onde  $x \in \mathcal{R}^{6 \times 1}$  é o vetor de entrada da rede neural,  $\mathbf{V} \in \mathcal{R}^{6 \times 8}$  é a matriz de pesos entre

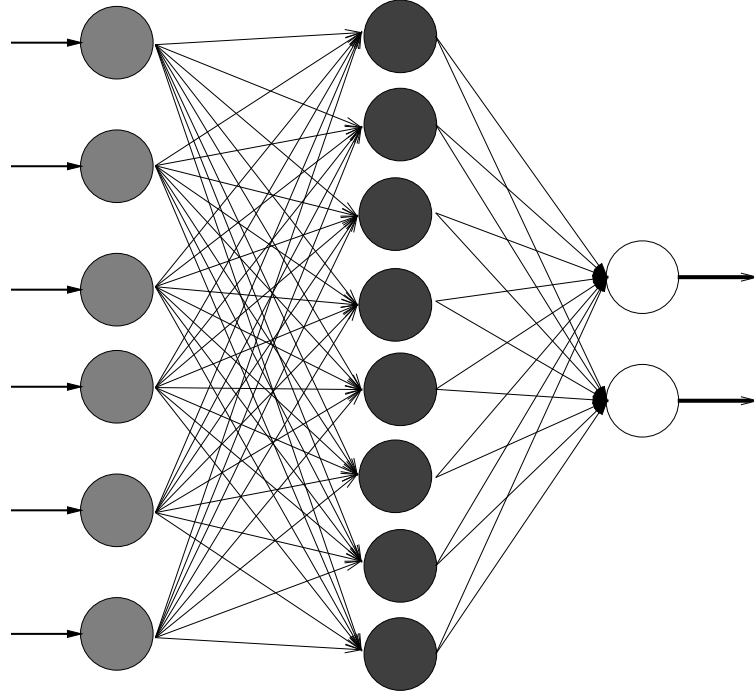


Figura 4.1: Estrutura da rede neural utilizada.

as camadas de entrada e intermediária e  $\mathbf{W} \in \mathcal{R}^{8 \times 2}$  é a matriz de pesos entre a camada intermediária e a camada de saída. A função  $\sigma(\cdot)$  é chamada função de ativação e neste trabalho optou-se por utilizar a seguinte função sigmóide:

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (4.2)$$

A aplicação de redes neurais no controle da dinâmica de robôs móveis é intuída pela característica intrínseca às redes neurais de mapearem funções não-lineares desconhecidas [48]. Deste modo, uma função não-linear produz pares amostrados  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . Os dados amostrados modificam os parâmetros do estimador neural fazendo com que as respostas do sistema neural sejam próximas às respostas da função não-linear desconhecida [49], sendo que a precisão da aproximação é diretamente proporcional ao número de amostras.

Com base na característica supra citada das redes neurais e considerando-se  $\Gamma(x)$  uma função contínua do  $\mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}^m$  é possível mostrar que, à medida que  $x$  está restrito a um conjunto compacto  $U_n \in \mathcal{R}^n$ , para um dado número  $N$  de neurônios na camada intermediária,

existe uma configuração de rede neural tal que:

$$\Gamma(x) = \mathbf{W}^T \sigma(\mathbf{V}^T x) + \epsilon \quad (4.3)$$

sendo  $\epsilon$  o erro na aproximação da rede neural. Escolhendo um determinado valor  $\epsilon_N > 0$  como sendo o erro máximo permitido na aproximação é possível se encontrar  $\epsilon < \epsilon_N$ . Do ponto de visto do controle, o mais importante é o fato de que, especificando-se  $\epsilon_N$ , existe uma configuração de pesos tal que o erro máximo desejado na aproximação seja obtido. Assim, uma estimativa de  $\Gamma(x)$  é dada por:

$$\hat{\Gamma}(x) = \hat{\mathbf{W}}^T \sigma(\hat{\mathbf{V}}^T x) + \epsilon \quad (4.4)$$

onde  $\hat{\mathbf{V}}$  e  $\hat{\mathbf{W}}$  são estimativas das matrizes de pesos ideais.

Um ponto importante a ser ressaltado é com relação ao modo de atualização dos pesos da rede neural. O modo mais utilizado para realizar a atualização é o modo *off-line*, isto é, a rede é treinada com um conjunto prévio de valores obtidos da função a ser aproximada. Observa-se que tal estrutura de treinamento precisa de uma fase anterior à fase de execução o que, quando aplicado ao controle, torna-se praticamente inviável.

Neste trabalho utiliza-se o modo *on-line* de treinamento, ou seja, a fase de treinamento não mais se faz necessária, pois se dará durante a própria fase de execução. Os pesos são ajustados de acordo com as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{W}} &= \mathbf{F} \sigma(\hat{\mathbf{V}}^T x) e_c^T - \mathbf{F} \sigma'(\hat{\mathbf{V}}^T x) \hat{\mathbf{V}}^T x e_c^T \\ &\quad - k \mathbf{F} \|e_c\| \hat{\mathbf{W}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{V}} &= \mathbf{G} x (\sigma'(\hat{\mathbf{V}}^T x) \hat{\mathbf{W}} e_c)^T \\ &\quad - k \mathbf{G} \|e_c\| \hat{\mathbf{V}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde os parâmetros de projeto  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}$  são matrizes positivas definidas e  $k > 0$ .

## 4.2 Estrutura de Controle

Neste seção se apresenta, além da estrutura geral do controlador adotado, a prova de estabilidade da rede neural e por conseguinte, do controlador. Antes, porém, apresenta-se o

modelo dinâmico de forma diferente à apresentada no capítulo 2, segundo [19, 28].

O modelo dinâmico de configuração, apresentado na equação 2.74, é reapresentado sob a forma:

$$\mathbf{M}(q)\ddot{q} + \mathbf{V}\dot{q} + F(\dot{q}) + \tau_d = \mathbf{B}(q)\tau - \mathbf{A}^T\lambda \quad (4.7)$$

onde  $\mathbf{M}(q) \in \mathcal{R}^{n \times n}$  é a matriz de inércia (simétrica e positiva definida),  $\mathbf{V}(q) \in \mathcal{R}^{n \times n}$  é a matriz com os termos centrípetos e de Coriolis,  $\mathbf{F}(q) \in \mathcal{R}^{n \times 1}$  é o vetor dos termos de atrito,  $\tau_d$  denota perturbações limitadas desconhecidas, incluindo dinâmicas não-modeladas. A matriz  $\mathbf{B}(q) \in \mathcal{R}^{n \times r}$  é a matriz de transformação de entrada,  $\tau$  é o vetor de torques de entrada,  $\mathbf{A}(q) \in \mathcal{R}^{m \times n}$  é a matriz relacionada com as restrições e  $\lambda \in \mathcal{R}^{m \times 1}$  é o vetor de forças restritivas.

O sistema 4.7 sofrerá uma transformação a fim de ficar numa melhor representação do ponto de vista do controle. Tomando-se a derivada temporal de 2.58 e substituindo em 4.7 obtém-se:

$$\mathbf{M}(\mathbf{S}\dot{v} + \dot{\mathbf{S}}v) + \mathbf{V}\mathbf{S}v + \mathbf{F} + \tau_d = \mathbf{B}\tau - \mathbf{A}^T\lambda \quad (4.8)$$

Pré-multiplicando-se a equação 4.8 por  $\mathbf{S}^T(q)$  e sabendo-se que  $\mathbf{A}(q)\dot{q} = 0$  e que  $\mathbf{S}^T(q)\mathbf{A}^T(q) = 0$  é possível eliminar o termo referente às restrições  $\mathbf{A}^T(q)\lambda$ , resultando em:

$$\mathbf{S}^T\mathbf{M}\mathbf{S}\dot{v} + \mathbf{S}^T(\mathbf{M}\dot{\mathbf{S}} + V_m\mathbf{S})v + \mathbf{S}^T\mathbf{F} + \mathbf{S}^T\tau_d = \mathbf{S}^T\mathbf{B}\tau \quad (4.9)$$

podendo ser reescrito sob a forma:

$$\overline{\mathbf{M}}\dot{v} + \overline{\mathbf{V}}_m v + \overline{\mathbf{F}} + \overline{\tau}_d = \overline{\tau} \quad (4.10)$$

onde  $\overline{\mathbf{M}}(q) \in \mathcal{R}^{r \times r}$  é a matriz de inércia (simétrica e positiva definida),  $\overline{\mathbf{V}}(q) \in \mathcal{R}^{r \times r}$  é a matriz com os termos centrípetos e de Coriolis,  $\overline{\mathbf{F}}(v) \in \mathcal{R}^{r \times 1}$  é o vetor dos termos de atrito,  $\overline{\tau}_d$  denota perturbações limitadas desconhecidas, incluindo dinâmicas não-modeladas. O vetor de torques de entrada é denotado por  $\overline{\tau}$  ( $\overline{\mathbf{B}}$  é uma matriz não-singular constante que depende apenas de parâmetros geométricos do robô).

É importante salientar que a matriz  $\overline{\mathbf{M}}$  e a norma da matriz  $\overline{\mathbf{V}}$  são limitadas e que a matriz  $(\dot{\overline{\mathbf{M}}} - 2\overline{\mathbf{V}})$  apresenta a propriedade de anti-simetria.

A matriz  $\overline{\mathbf{B}}(q) \in \mathcal{R}^{n \times r}$  é a matriz de transformação de entrada,  $\tau$  é o vetor de torques de entrada,  $\mathbf{A}(q) \in \mathcal{R}^{m \times n}$  é a matriz relacionada com as restrições e  $\lambda \in \mathcal{R}^{m \times 1}$  é o vetor de

forças restritivas.

Uma vez definido o modelo dinâmico de um robô móvel, apresenta-se na figura 4.2 o diagrama de blocos referente ao esquema de controle proposto. Como já mencionado, tem-se o bloco referente ao controle da cinemática e o bloco referente ao controle da dinâmica do robô, onde se utiliza a rede neural.

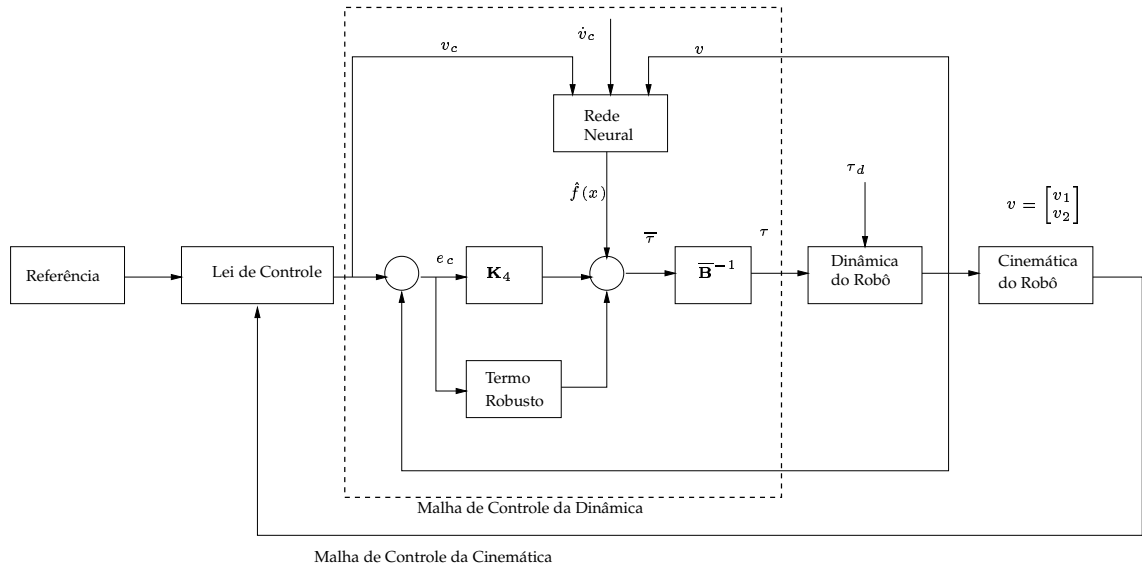


Figura 4.2: Diagrama de blocos do controlador.

Pode-se observar que o erro de seguimento de velocidade de referência é dado pela diferença entre o valor obtido por meio da malha de controle da cinemática e o valor medido no robô:

$$e_c = v_c - v \quad (4.11)$$

Derivando a equação 4.11 e substituindo na equação 4.10, a dinâmica do robô pode ser descrita pelo erro de seguimento de velocidade como:

$$\bar{\mathbf{M}}\dot{e}_c = -\bar{\mathbf{V}}e_c - \bar{\tau} + f(x) + \bar{\tau}_d \quad (4.12)$$

sendo a função não-linear  $f(x)$  do robô dada por:

$$f(x) = \bar{\mathbf{M}}\dot{v}_c + \bar{\mathbf{V}}v_c + \bar{\mathbf{F}} \quad (4.13)$$

Uma vez definida a função não-linear da dinâmica de um robô móvel, é importante salientar que os parâmetros envolvidos nesta equação (massas, momentos de inércia, coefici-



entes de atrito, etc) não são conhecidos precisamente, uma vez que se trata de propriedades físicas de difícil medição. Já que não se possui um perfeito conhecimento dos parâmetros, faz-se uso da propriedade das redes neurais de aproximação de funções não-lineares multi-variáveis para realizar o mapeamento desejado na equação 4.13.

Uma simples inspeção visual nesta equação permite a explicitação das variáveis necessárias à rede neural definindo-se, assim, o vetor de entradas da rede:

$$x = \begin{bmatrix} v^T & v_c^T & \dot{v}_c^T \end{bmatrix}^T \quad (4.14)$$

A lei de controle obtida é expressa por:

$$\bar{\tau} = \hat{f} + \mathbf{K}_4 e_c - \gamma \quad (4.15)$$

onde  $\mathbf{K}_4$  é uma matriz de ganhos positiva definida e  $\hat{f}(x)$  é uma estimativa da função  $f(x)$  do robô, realizada pela rede neural. O sinal  $\gamma$  é para garantir a robustez da lei de controle em relação a perturbações não-modeladas não-estruturadas [22].

Aplicando esta lei de controle na equação 4.12, o sistema em malha fechada pode ser escrito como:

$$\overline{\mathbf{M}}\dot{e}_c = -(\mathbf{K}_4 + \overline{\mathbf{V}}_m)e_c + \tilde{f}(x) + \bar{\tau}_d + \gamma \quad (4.16)$$

sendo  $\tilde{f} = f - \hat{f}$ .

Para um melhor entendimento da prova de estabilidade colocada a seguir, algumas definições se fazem necessárias:

**Definição 4.2.1** A solução de um sistema não-linear com o estado  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  é localmente uniformemente estável se existe um conjunto compacto  $U_x \subset \mathcal{R}^n$ , tal que para todo  $x(t_0) = x_0 \in U_x$  existe um  $\delta > 0$  e um número  $T(\delta, x_0)$  tal que  $\|x(t)\| < \delta$ , para todo  $t \geq t_0 + T$ .

**Definição 4.2.2** Seja  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ ,  $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{m \times n}$ , a norma de Frobenius é definida por:

$$\|\mathbf{A}\|_F^2 = \text{tr}\{\mathbf{A}^T \mathbf{A}\} = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \quad (4.17)$$

Seja  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ ,  $\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{m \times n}$ , produto interno associado é  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_F = \text{tr}\{\mathbf{A}^T \mathbf{B}\}$ . A norma de Frobenius não pode ser definida como uma norma da matriz induzida para qualquer norma vetorial, mas é compatível com a norma-2, de tal modo que  $\|\mathbf{A}x\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_F \|x\|_2$ , sendo  $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{m \times n}$  e

$x \in \mathcal{R}^n$ .

**Definição 4.2.3** Por facilidade de notação define-se a matriz de todos os pesos da rede neural como  $\mathbf{Z} \equiv \text{diag}\{\mathbf{W}, \mathbf{V}\}$ .

**Definição 4.2.4** Os erros da estimação dos pesos da rede neural são dados por  $\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V} - \hat{\mathbf{V}}$ ,  $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}$  e  $\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z} - \hat{\mathbf{Z}}$ .

**Definição 4.2.5** Define-se o erro da saída da camada intermediária, para um dado  $x$ , como sendo:

$$\tilde{\sigma} = \sigma - \hat{\sigma} = \sigma(\mathbf{V}^T x) - \sigma(\hat{\mathbf{V}}^T x) \quad (4.18)$$

A expansão em séries de Taylor de  $\sigma(x)$  para um dado  $x$  pode ser escrita como:

$$\sigma(\mathbf{V}^T x) = \sigma(\hat{\mathbf{V}}^T x) + \sigma'(\hat{\mathbf{V}}^T x) + O(\tilde{\mathbf{V}}^T x) \quad (4.19)$$

sendo

$$\sigma'(\hat{z}) \equiv \left. \frac{\partial \sigma(z)}{\partial z} \right|_{z=\hat{z}}$$

a matriz Jacobiana e  $O(\tilde{\mathbf{V}}^T x)$  os termos de alta ordem da série de Taylor. Definindo-se  $\hat{\sigma}' \triangleq \sigma'(\hat{\mathbf{V}}^T x)$  é possível escrever:

$$\tilde{\sigma} = \sigma'(\hat{\mathbf{V}}^T x) \tilde{\mathbf{V}}^T x + O(\tilde{\mathbf{V}}^T x) \quad (4.20)$$

Observa-se que na equação 4.2.5  $\tilde{\sigma}$  é não-linear em relação a  $\tilde{\mathbf{V}}$  e que na equação 4.20 se apresenta linear em relação a  $\tilde{\mathbf{V}}$ . Tal linearização possibilitará a determinação de leis de ajuste para  $\tilde{\mathbf{V}}$ .

Baseando-se em aplicações práticas, as seguintes considerações foram feitas [22].

**Consideração 4.2.1** Em um dado subconjunto compacto do  $\mathcal{R}^n$ , os pesos ideais da rede neural são limitados por um valor positivo conhecido, o que significa que  $\|\mathbf{V}\| \leq V_M$ ,  $\|\mathbf{W}\| \leq W_M$  ou  $\|\mathbf{Z}\| \leq Z_M$  com  $V_M$ ,  $W_M$  ou  $Z_M$  conhecidos

**Consideração 4.2.2** A trajetória de referência é limitada, isto é,  $\|q\| \leq q_M$  com  $q_M$  um escalar constante e conhecido. As perturbações também são limitadas:  $\vec{\tau}_d \leq d_m$ .

**Consideração 4.2.3** *Seja o termo de robustez dado por:*

$$\gamma(t) = -K_z(\|\hat{\mathbf{Z}}\|_F + Z_M)e_c - e_c \quad (4.21)$$

sendo  $K_z > C_2$ .

**Lema 4.2.1** *Para cada instante de tempo  $t$ ,  $x(t)$  em 4.14 é limitada por:*

$$\|x\| \leq q_M + c_0\|e_c(t_0)\| + c_2\|e_c(t)\| \leq c_1 + c_2\|e_c(t)\| \quad (4.22)$$

sendo as variáveis  $c_i$  positivas e computáveis.

**Lema 4.2.2** *Para função de ativação do tipo sigmóide, os termos de alta ordem na série de Taylor 4.19 são limitados por:*

$$\|O(\tilde{\mathbf{V}}x)\| \leq c_3 + c_4\|\tilde{\mathbf{V}}\|_F + c_5\|\tilde{\mathbf{V}}\|_F\|e_c\| \quad (4.23)$$

sendo as variáveis  $c_i$  positivas e computáveis.

**Lema 4.2.3** *A perturbação considerada na modelagem é limitada por:*

$$\|\delta(t)\| \leq C_0 + C_1\|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F + C_2\|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F\|e_c\| \quad (4.24)$$

As provas dos lemas 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3 não serão apresentadas neste trabalho e podem ser encontradas em [50].

### 4.3 Prova de Estabilidade do Controlador Neural

Nesta seção demonstra-se a estabilidade do controle com redes neurais da dinâmica de robôs móveis.

Seja  $V_0$  uma função candidata a função de Lyapunov dada por:

$$V_0 = V_1 + V_2 \quad (4.25)$$

onde  $V_1$  corresponde à função dependente do controlador utilizado para a parte cinemática e assume-se que

$$V_1 > 0 \quad \text{e} \quad \dot{V}_1 < 0 \quad \forall t > 0 \quad (4.26)$$

A função  $V_2$  é referente ao controlador com redes neurais, dado por:

$$V_2 = \frac{1}{2} [e_c^T \bar{\mathbf{M}} e_c] + tr\{\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{F}^{-1} \tilde{\mathbf{W}}\} + tr\{\tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{G}^{-1} \tilde{\mathbf{V}}\} \quad (4.27)$$

A derivada temporal da função  $V_2$  é expressa por:

$$\dot{V}_2 = e_c^T \bar{\mathbf{M}} \dot{e}_c + e_c^T \dot{\bar{\mathbf{M}}} e_c + tr\{\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{F}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}^T\} + tr\{\tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{G}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{V}}}^T\} \quad (4.28)$$

Substituindo em 4.28 a equação 4.16 e considerando que a função  $f(x)$  será aproximada pela rede neural obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & e_c^T \bar{\mathbf{M}} \dot{e}_c + e_c^T [- (\mathbf{K}_4 + \bar{\mathbf{V}}) e_c + \mathbf{W}^T \sigma(\mathbf{V}x) - \hat{\mathbf{W}}^T \sigma(\hat{\mathbf{V}}x) + \epsilon + \tau_d + \gamma] + \\ & + \frac{1}{2} e_c^T \dot{\bar{\mathbf{M}}} e_c + tr\{\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{F}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}^T\} + tr\{\tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{G}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{V}}}^T\} \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -e_c^T \mathbf{K}_4 e_c + \frac{1}{2} (\dot{\bar{\mathbf{M}}} - 2\bar{\mathbf{V}}) e_c + e_c^T [\mathbf{W}^T \sigma - \hat{\mathbf{W}}^T \hat{\sigma} + \mathbf{W}^T \hat{\sigma} - \mathbf{W}^T \hat{\sigma} + \epsilon + \tau_d + \gamma] + \\ & + tr\{\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{F}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}^T\} + tr\{\tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{G}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{V}}}^T\} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Aplicando-se a propriedade de anti-simetria e executando algumas manipulações algébricas é possível escrever:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -e_c^T \mathbf{K}_4 e_c + e_c^T [\hat{\mathbf{W}}^T \tilde{\sigma} + \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\sigma} + \tilde{\mathbf{W}}^T \hat{\sigma} + \epsilon + \tau_d + \gamma] + \\ & + tr\{\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{F}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}^T\} + tr\{\tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{G}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{V}}}^T\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Substituindo a expressão 4.20 na equação 4.31 obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & e_c^T \left\{ \hat{\mathbf{W}}^T [\hat{\sigma}' \tilde{\mathbf{V}}x + O(\tilde{\mathbf{V}}x)] + \tilde{\mathbf{W}}^T [\hat{\sigma}' \tilde{\mathbf{V}}x + O(\tilde{\mathbf{V}}x)] + \tilde{\mathbf{W}}^T \hat{\sigma} + \epsilon + \tau_d + \gamma \right\} + \\ & -e_c^T \mathbf{K}_4 e_c + tr\{\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{F}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}^T\} + tr\{\tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{G}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{V}}}^T\} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Com base nos lemas 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3 a expressão 4.32 pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -e_c^T \mathbf{K}_4 e_c + e_c^T (\delta + \gamma) + e_c^T [\tilde{\mathbf{W}}^T \hat{\sigma}' \tilde{\mathbf{V}}x + \tilde{\mathbf{W}}^T \hat{\sigma}' \tilde{\mathbf{V}}x + \tilde{\mathbf{W}}^T \hat{\sigma}] \\ & + tr\{\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{F}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}^T\} + tr\{\tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{G}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{V}}}^T\} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Definindo o termo de perturbação  $\delta$  como sendo:

$$\delta(t) = \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\sigma}' \mathbf{V}^T x + \mathbf{W}^T O() + \epsilon + \bar{\tau}_d \quad (4.34)$$

reescreve-se a equação 4.32:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -e_c^T \mathbf{K}_4 e_c + e_c^T (\delta + \gamma) + tr\{\tilde{\mathbf{W}}^T (\mathbf{F}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}} + \hat{\sigma} e_c^T - \hat{\sigma}' \hat{\mathbf{V}}^T x e_c^T)\} \\ & + tr\{\tilde{\mathbf{V}}^T (\mathbf{G}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{V}}} + x e_c^T \hat{\mathbf{W}}^T \hat{\sigma}')\} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Com base na definição 4.2.4, tem-se que  $\dot{\tilde{\mathbf{W}}} = -\dot{\mathbf{W}}$  e  $\dot{\tilde{\mathbf{V}}} = -\dot{\mathbf{V}}$ . Assim, a equação anterior pode ser reescrita sob a forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -e_c^T \mathbf{K}_4 e_c + e_c^T (\delta + \gamma) + k \|e_c\| [tr\{\tilde{\mathbf{W}}^T (\mathbf{W} - \tilde{\mathbf{W}})\} + tr\{\tilde{\mathbf{V}}^T (\mathbf{V} - \tilde{\mathbf{V}})\}] \\ \dot{V}_2 = & -e_c^T \mathbf{K}_4 e_c + e_c^T (\delta + \gamma) + k \|e_c\| [tr\{\tilde{\mathbf{Z}}^T (\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}})\}] \end{aligned} \quad (4.36)$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} tr\{\tilde{\mathbf{Z}}^T (\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}})\} &= \langle \tilde{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z} \rangle_F - \|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F^2 \\ &\leq \|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F \|\mathbf{Z}\|_F - \|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F^2 \end{aligned} \quad (4.37)$$

a equação 4.36 assume a forma:

$$\dot{V}_2 \leq -e_c^T \mathbf{K}_4 e_c + e_c^T (\delta + \gamma) + k \|e_c\| (\|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F \|\mathbf{Z}\|_F - \|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F^2) \quad (4.38)$$

Com base na consideração 4.2.3 tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -e_c^T \mathbf{K}_4 e_c + \|e_c\| \|\delta\| - e_c^T e_c + \\ & -k \|e_c\| \|\tilde{\mathbf{Z}}\| (\|\tilde{\mathbf{Z}}\| - Z_M) - K_z (\|\tilde{\mathbf{Z}}\| + Z_M) \|e_c\|^2 \end{aligned} \quad (4.39)$$

e aplicando o lema 4.2.3:

$$\dot{V}_2 \leq -\|e_c\| \left[ \mathbf{K}_4 \|e_c\| + k (\|\tilde{\mathbf{Z}}\|^2 - \|\tilde{\mathbf{Z}}\| Z_M) - C_0 - C_1 \|\tilde{\mathbf{Z}}\| \right] - e_c^T e_c \quad (4.40)$$

Seja a constante auxiliar  $C_3$  definida por:

$$C_3 \triangleq \frac{1}{2} \left( Z_M + \frac{C_1}{k} \right) \quad (4.41)$$

Manipulando os termos entre colchetes da equação 4.40, aplicando 4.41 e completando os quadrados obtém-se:

$$\dot{V}_2 \leq -\|e_c\| \left[ \mathbf{K}_4 \|e_c\| + k(\|\tilde{\mathbf{Z}}\| - C_3)^2 - kC_3^2 - C_0 \right] - e_c^T e_c \quad (4.42)$$

Para que a função  $\dot{V}_2$  seja negativa, deve-se garantir que:

$$\|e_c\| > \frac{k_3 C_3^2 + C_0}{\mathbf{K}_4} \quad (4.43)$$

ou que:

$$\|\tilde{\mathbf{Z}}\| > C_3 + \sqrt{C_3^2 + \frac{C_0}{k}} \quad (4.44)$$

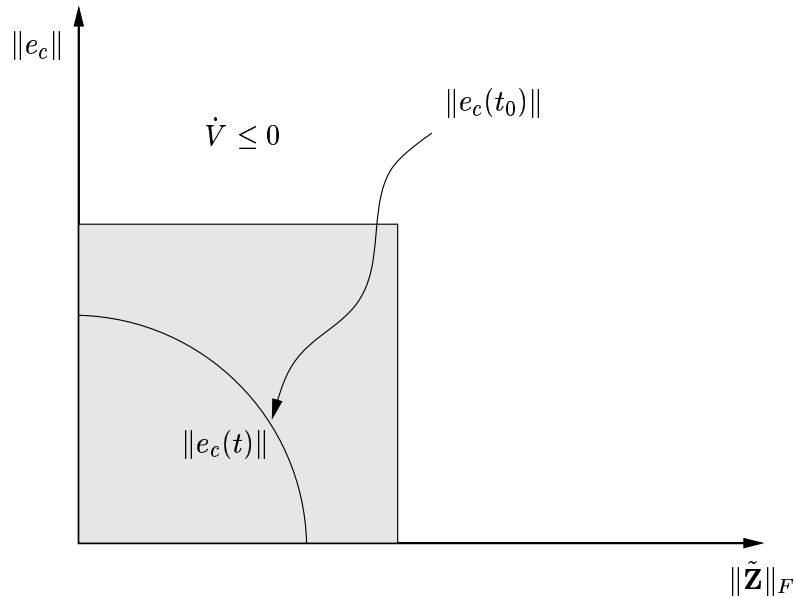


Figura 4.3: Região de estabilidade para o controlador baseado em redes neurais.

Com base na teoria de Lyapunov e de LaSalle mostra-se que  $\|e_c\|$  e  $\|\tilde{\mathbf{Z}}\|$  são uniformemente localmente estáveis (conforme ilustrado na figura 4.3).

Pode-se observar que a função  $\dot{V}_2$  não é negativa semi-definida dentro da região delimitada pelos limites impostos pelas equações 4.43 e 4.44. Entretanto,  $\mathbf{K}_4$  pode receber um valor

conveniente para que o erro de seguimento de velocidade possa ser tão pequeno quanto se deseje.

## 4.4 Resultados Experimentais

Nesta seção apresenta-se os resultados obtidos experimentalmente no **Twil**, que será apresentado mais detalhadamente no apêndice A.1. Foram realizados quatro experimentos onde utilizou-se, em cada experimento, uma malha de controle diferente para a cinemática, conforme apresentadas no capítulo 3. Os ganhos previamente ajustados nas simulações realizadas apenas com a cinemática do robô devido a negligências como a simulação dos *encoders* bem como a transformação torque-volt necessária à realização do experimento.

Simulações dos sistemas cinemático e dinâmico acoplados foram realizados, porém por causa das falhas na modelagem realizada do sistema como um todo, fizeram com que os ganhos tivessem que ser alterados no momento de se realizar as experiências, não possibilitando o perfeito ajuste dos ganhos das malhas de controle da cinemática, levando a diferentes valores para os ganhos da rede neural. É importante salientar este fato uma vez que a rede neural tem como função aprender a dinâmica do robô, que é a mesma independentemente da malha de controle utilizada para a cinemática.

### 4.4.1 Controlador em Coordenadas Cartesianas

A seguir apresenta-se os resultados experimentais obtidos utilizando-se o controlador cinemático apresentado na seção 3.1

Os ganhos utilizados no controlador cinemático foram  $K_x = 1.700, 0$ ,  $K_y = 1.000, 0$  e  $K_\theta = 750, 0$ . Como posição inicial do robô tem-se  $x_0 = 0,5(m)$ ,  $y_0 = 0,0(m)$  e  $\theta_0 = 0,0(rad)$ . A trajetória a ser seguida pelo robô é uma linha reta, com inclinação constante de  $\frac{\pi}{4,0}(rad)$ . A velocidade linear do robô é  $v = 0,1\sqrt{2}(m/s)$  e velocidade angular de referência nula. Para o controlador dinâmico tem-se os seguintes  $K_4 = 10 \mathbf{I}$ ,  $k_z = 0,001$ ,  $k = 0,01$ ,  $F = 0,001$  e  $G = 0,005$ , sendo  $\mathbf{I}$  a matriz identidade com dimensão apropriada.

Na figura 4.4 observa-se a trajetória percorrida pelo robô e a respectiva trajetória de referência. Observa-se que o robô convergiu à trajetória de referência e manteve-se sobre esta até o fim do movimento. O torque exigido pelos motores direito (linha cheia) e esquerdo (linha pontilhada) são mostrados na figura 4.5

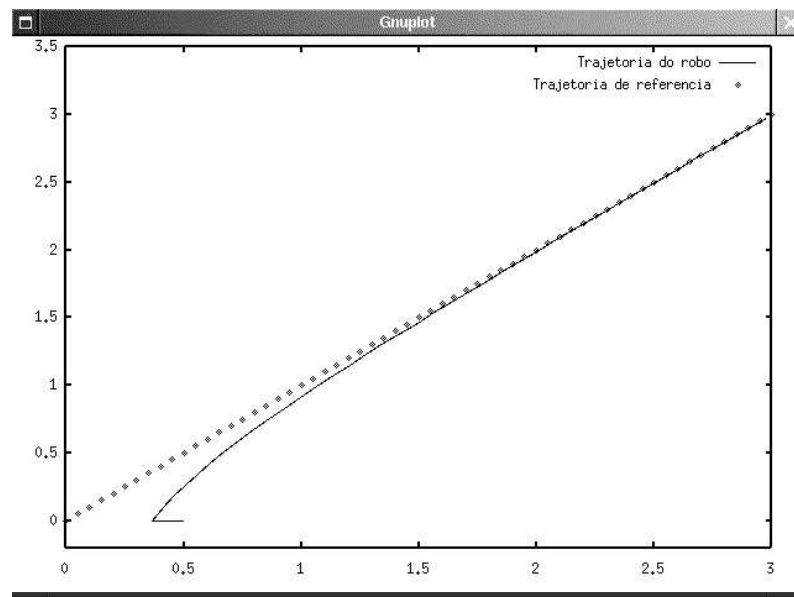


Figura 4.4: Trajetória desenvolvida pelo robô (linha cheia) e trajetória de referência (linha pontilhada).

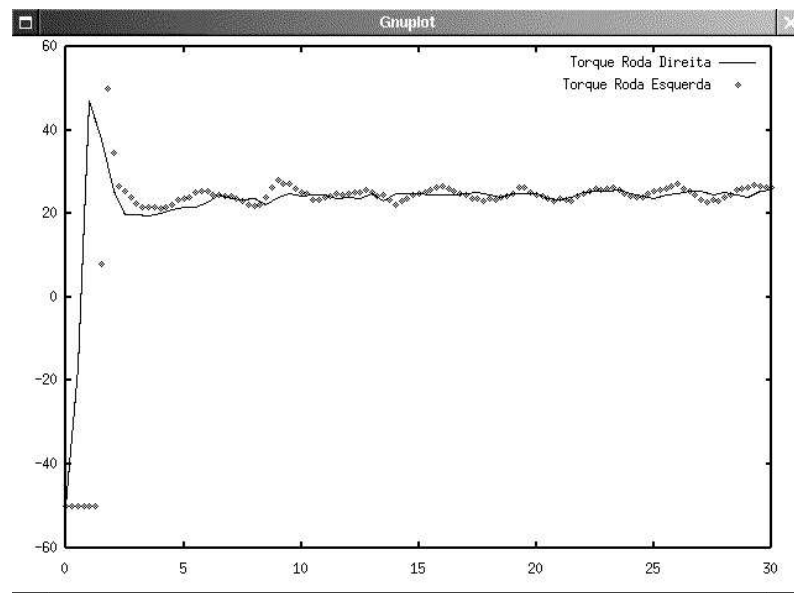


Figura 4.5: Torque aplicado no motor direito (linha cheia) e torque aplicado no motor esquerdo (linha pontilhada).

As trajetórias referentes à coordenada  $x$  efetivamente percorrida (linha cheia) pelo robô e a trajetória de referência (linha pontilhada) são apresentadas na figura 4.6 e as trajetórias referentes à coordenada  $y$  podem ser vistas na figura 4.7.



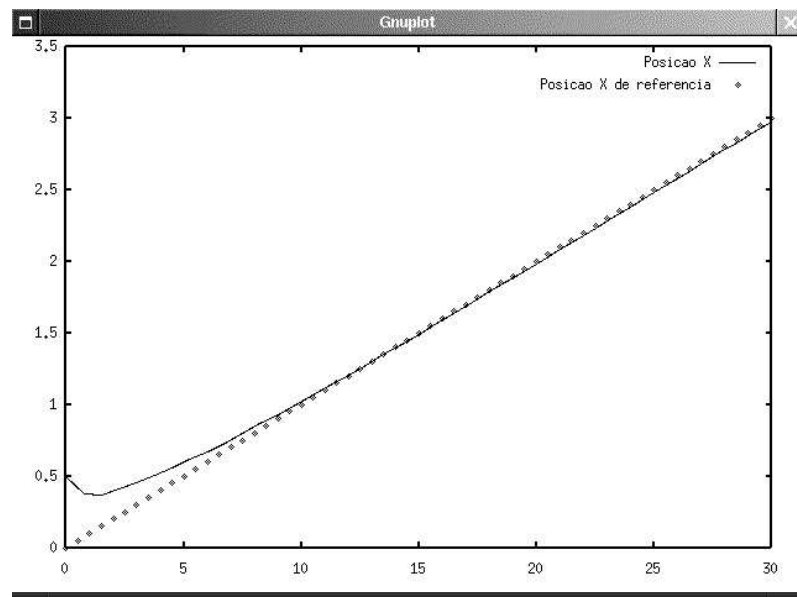


Figura 4.6: Posição  $x$  do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada).

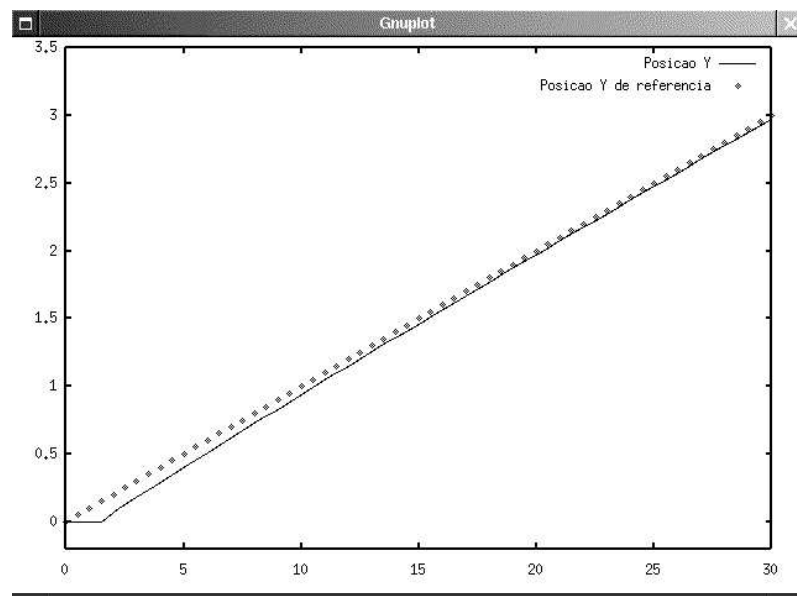


Figura 4.7: Posição  $y$  do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada).

A orientação do robô durante a convergência à trajetória de referência e durante o seguimento a esta trajetória é mostrada na figura 4.8.

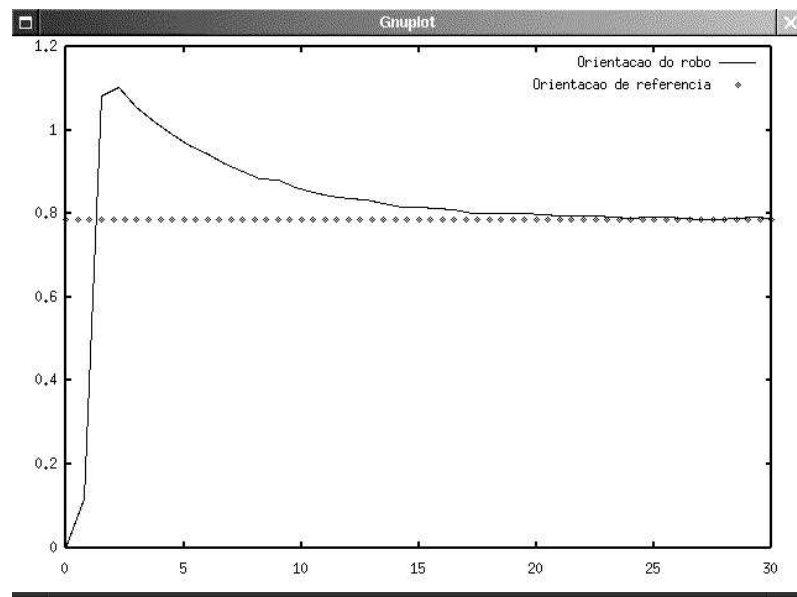


Figura 4.8: Orientação real do robô (linha cheia) e orientação desejada (linha pontilhada).

#### 4.4.2 Controlador em Coordenadas Polares

Os resultados experimentais a serem apresentados são referentes ao cascadeamento do controlador cinemático em coordenadas polares com o controlador dinâmico via redes neurais.

A posição inicial do robô neste experimento foi  $x_0 = 0,1(m)$ ,  $y_0 = 0,0(m)$  e  $\theta_0 = 0,0(rd)$ . A trajetória a ser seguida é da forma '8', sendo o centro da trajetória colocado na origem  $(0,0,0)$ . Os ganhos utilizados no controlador cinemático foram  $\gamma_1 = 0,9$ ,  $\gamma_2 = 0,05$  e  $h = 7,0$ . Já para o controlador dinâmico foram utilizados  $K_4 = 100 \mathbf{I}$ ,  $k_z = 0,01$ ,  $k = 0,01$ ,  $F = 3,0$  e  $G = 4,0$ , sendo  $\mathbf{I}$  a matriz identidade com dimensão apropriada.

Na figura 4.9 apresenta-se o comportamento da coordenada  $x$  do robô (linha cheia) e a trajetória de referência para esta coordenada (linha pontilhada). Já na figura 4.10 tem-se a coordenada  $y$  do robô (linha cheia) e a respectiva referência (linha pontilhada). É possível se observar nestas duas figuras um pequeno atraso em relação à trajetória percorrida pelo robô e a trajetória de referência, embora o robô tenha conseguido realizar o seguimento da trajetória.

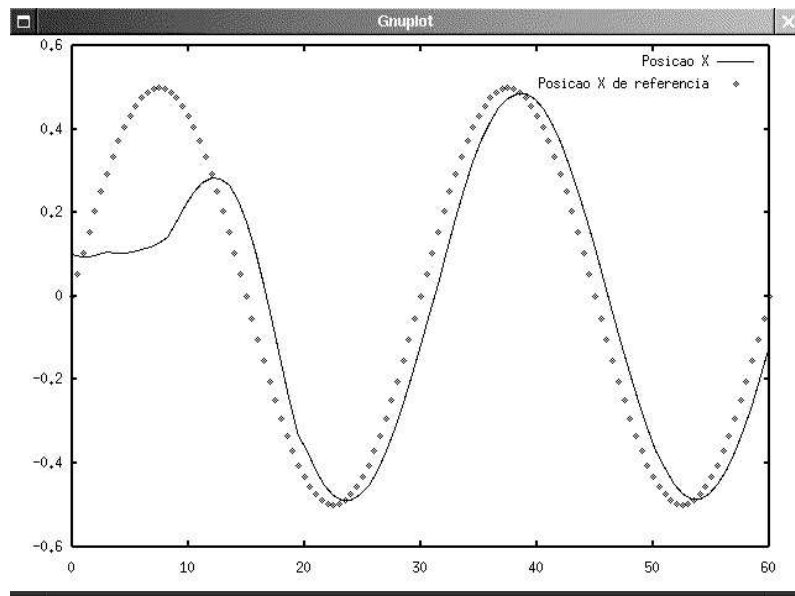


Figura 4.9: Posição  $x$  do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada).

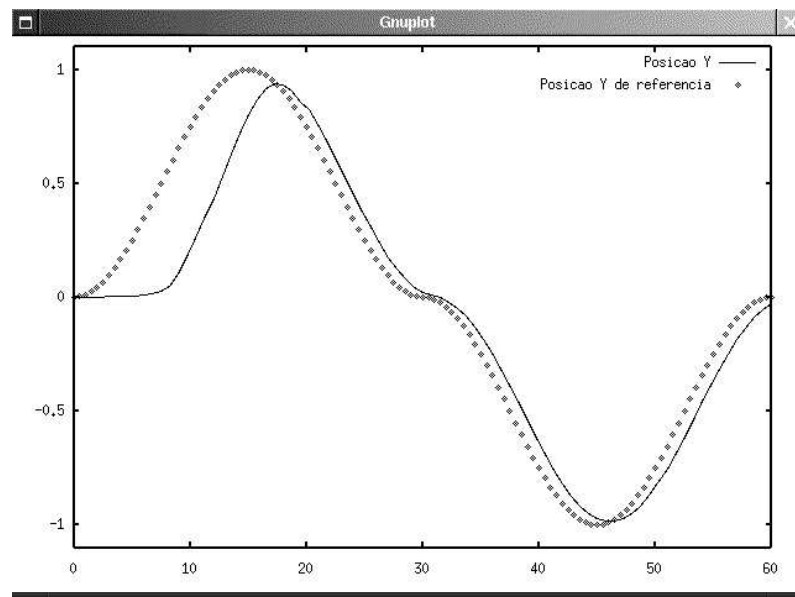


Figura 4.10: Posição  $y$  do robô (linha cheia) e posição de referência (linha pontilhada).

A orientação do robô (linha cheia) e a trajetória de referência para a sua orientação (linha pontilhada) podem ser vistas na figura 4.11.

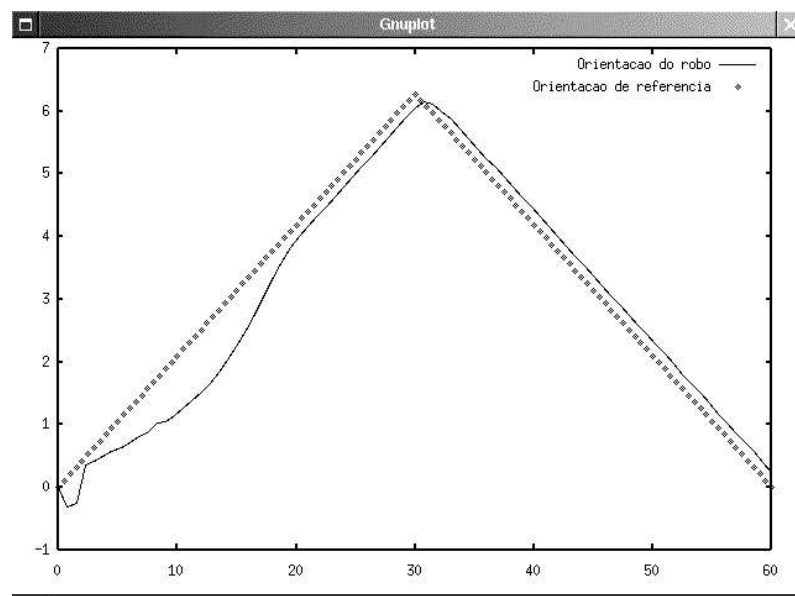


Figura 4.11: Orientação do robô (linha cheia) e orientação desejada (linha pontilhada).

A trajetória percorrida pelo robô no plano cartesiano (linha cheia) e a trajetória de referência para o movimento estão apresentadas na figura 4.12. Na figura 4.13 estão os torques exercidos pelos motores das rodas direita (linha cheia) e esquerda (linha pontilhada).

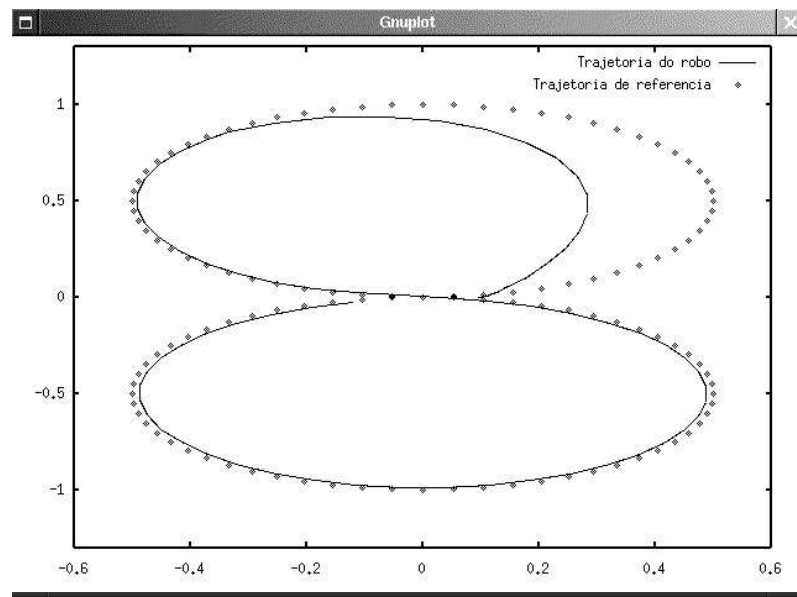


Figura 4.12: Trajetória percorrida pelo robô (linha cheia) e a de referência (linha pontilhada).

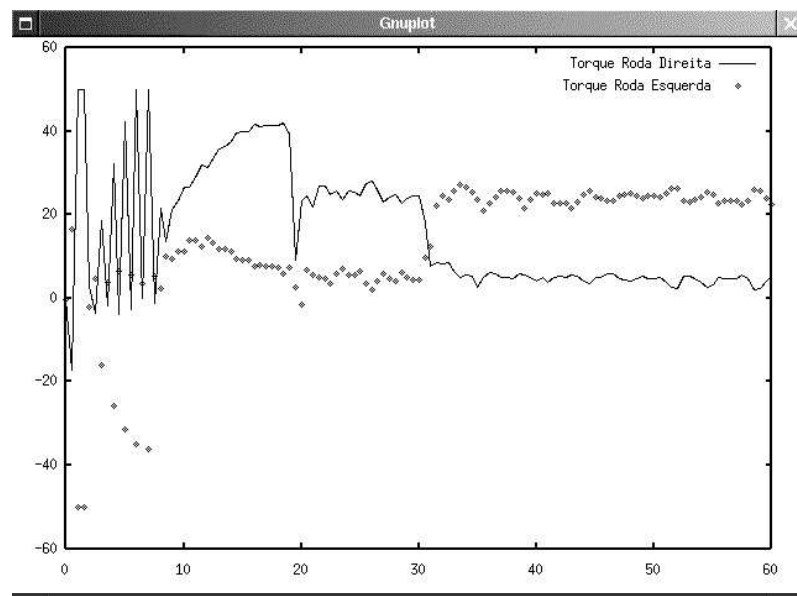


Figura 4.13: Torques exercidos pelos motores direito (linha cheia) e esquerdo (linha pontilhada).

#### 4.4.3 Controlador por Realimentação Variante no Tempo

A seguir apresenta-se os gráficos referentes ao controlador cinemático variante no tempo e o controlador dinâmico apresentado neste capítulo. O objetivo de controle é fazer com que o robô convirja a uma dada postura, diferentemente dos experimentos recém apresentados.

O robô, no início do experimento, encontrava-se na posição  $x_0 = 1,0(m)$ ,  $y_0 = 0,5(m)$  e  $\theta_0 = 0,0(rad)$ . Como posição final utilizou-se a origem do sistema de coordenadas, ou seja, a posição  $(0, 0, 0)$ . Os ganhos do controlador cinemático foram  $k_1 = 15,0$ ,  $k_2 = 15,0$ ,  $k_3 = 5,0$ ,  $k_4 = 6,0$ ,  $k_5 = 0,4$  e  $a = 2,0$ . Os ganhos utilizados no controlador dinâmico foram  $K_4 = 30 \mathbf{I}$ ,  $k_z = 0,1$ ,  $k = 0,01$ ,  $F = 0,003$  e  $G = 0,004$ , sendo  $\mathbf{I}$  a matriz identidade de dimensão apropriada..

Na figura 4.14 tem-se a trajetória desenvolvida pelo robô até convergir à posição desejada. Os torques exercidos pelos motores das rodas direita (linha cheia) e esquerda (linha pontilhada) são mostrados na figura 4.15.

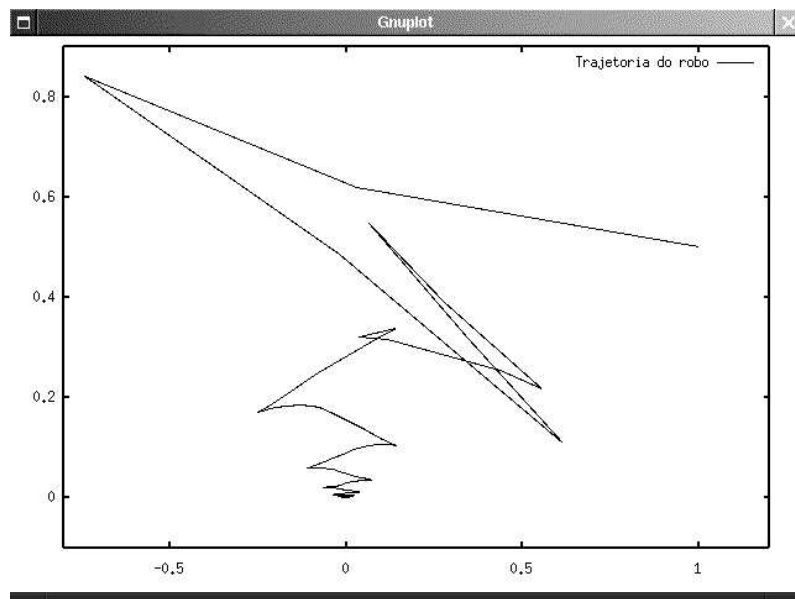


Figura 4.14: Trajetória percorrida pelo robô até na convergência à origem.

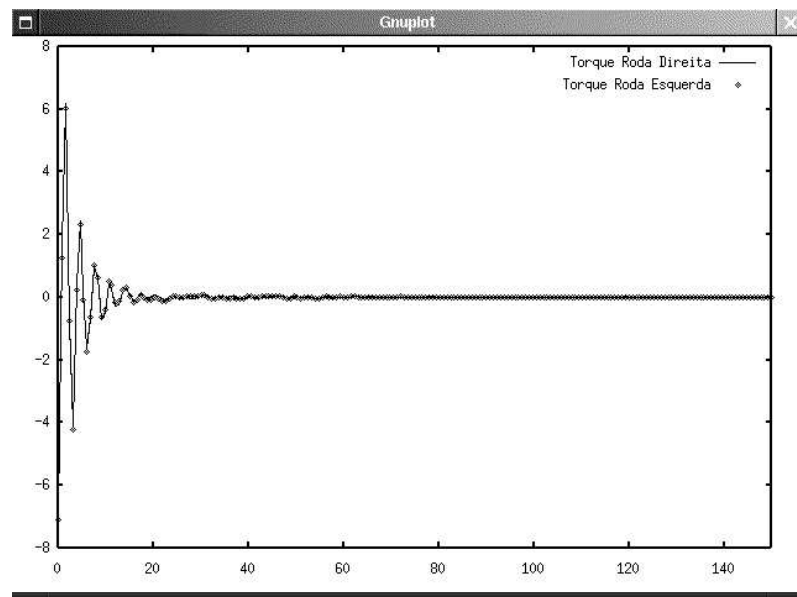


Figura 4.15: Torques exercidos pelos motores das rodas direita (linha cheia) e esquerda (linha pontilhada).

O comportamento da componente  $x$  do robô durante o movimento pode ser visto na figura 4.16 e na figura 4.17 pode ser visto o comportamento da coordenada  $y$  até que o robô atinja a posição desejada.

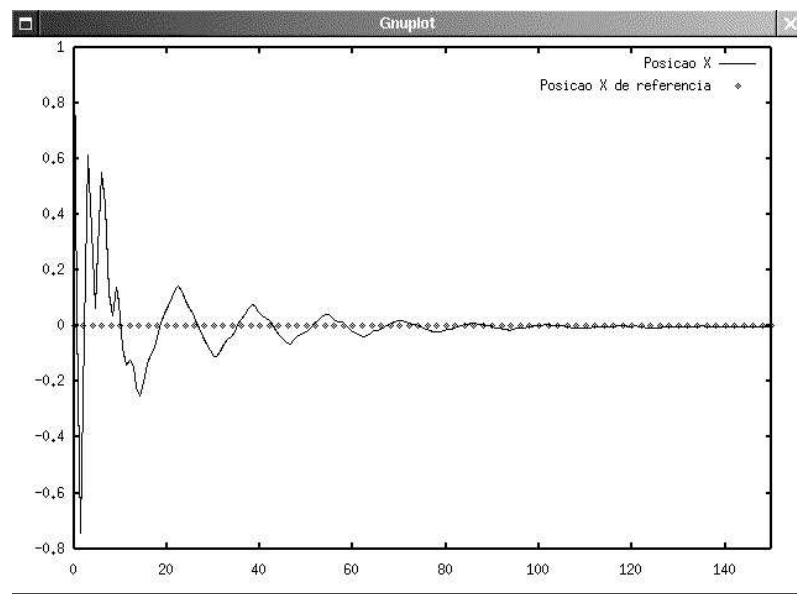


Figura 4.16: Coordenada  $x$  do robô durante a convergência à origem.

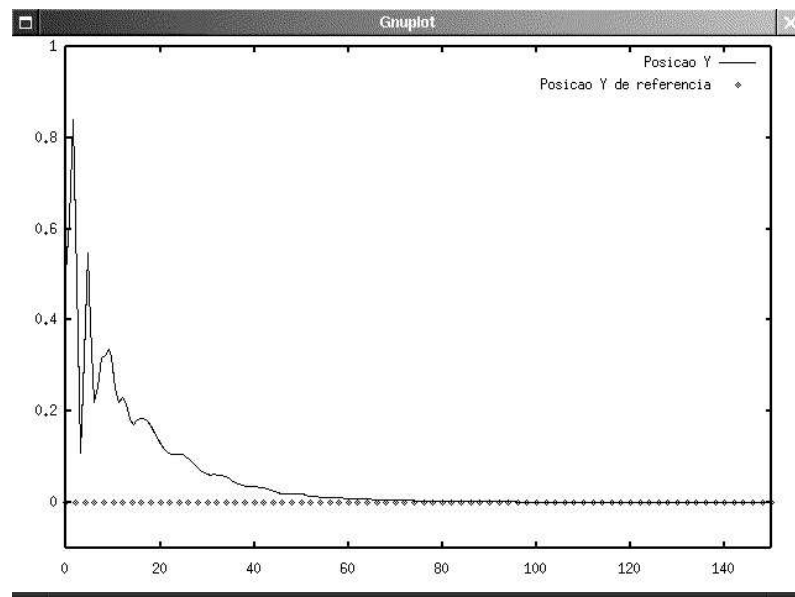


Figura 4.17: Coordenada  $y$  do robô durante a convergência à origem.

Na figura 4.18 vê-se a orientação durante o movimento do robô até a posição final.

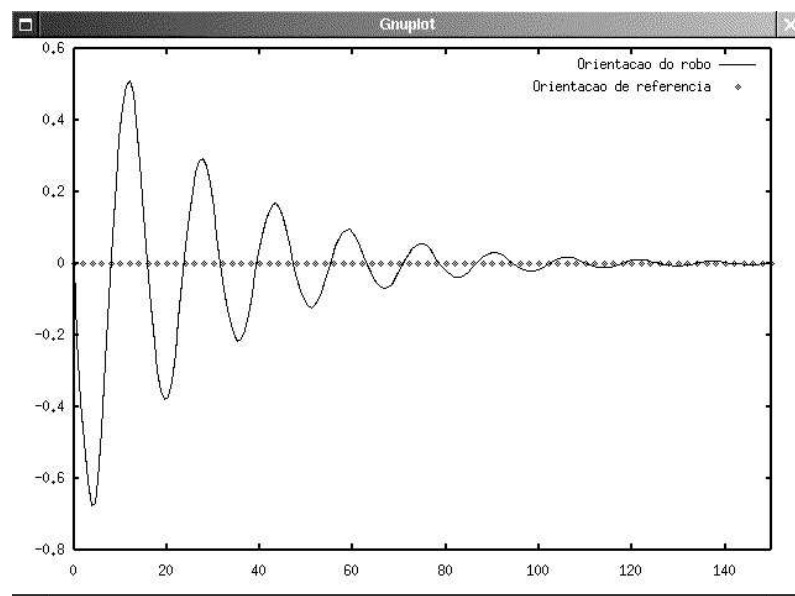


Figura 4.18: Orientação do robô durante a convergência à origem.



#### 4.4.4 Controlador via Modos Deslizantes

Por fim apresenta-se os resultados referentes ao controlador cinemático via modos deslizantes juntamente com o controlador dinâmico. O objetivo deste controle é fazer com que o robô atinja a origem do sistema, de modo similar ao controlador variante no tempo.

A posição inicial do robô é  $x_0 = 1,0(m)$ ,  $y_0 = 1,0(m)$  e  $\theta_0 = 0,0(rad)$ . Os ganhos do controlador cinemático foram  $a = 2,0$ ,  $\xi = 10,0$  e  $v_0 = 0,5(m/s)$ . Os ganhos utilizados no controlador dinâmico foram  $K_4 = 50 \mathbf{I}$ ,  $k_z = 0,001$ ,  $k = 0,01$ ,  $F = 3,0$  e  $G = 4,0$ , sendo  $\mathbf{I}$  a matriz identidade com dimensão apropriada.

Na figura 4.19 tem-se a trajetória realizada pela coordenada  $x$  do robô durante o movimento do robô até atingir a origem do sistema de coordenadas. Já na figura 4.20 tem-se a trajetória da coordenada  $y$  do robô. A orientação do robô durante o movimento pode ser visto na figura 4.21.

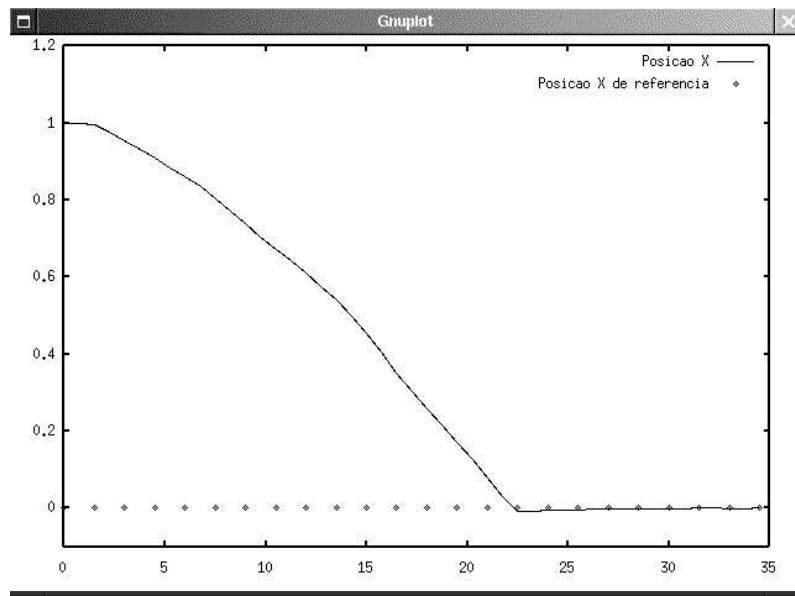


Figura 4.19: Posição  $x$  do robô durante a convergência à origem.

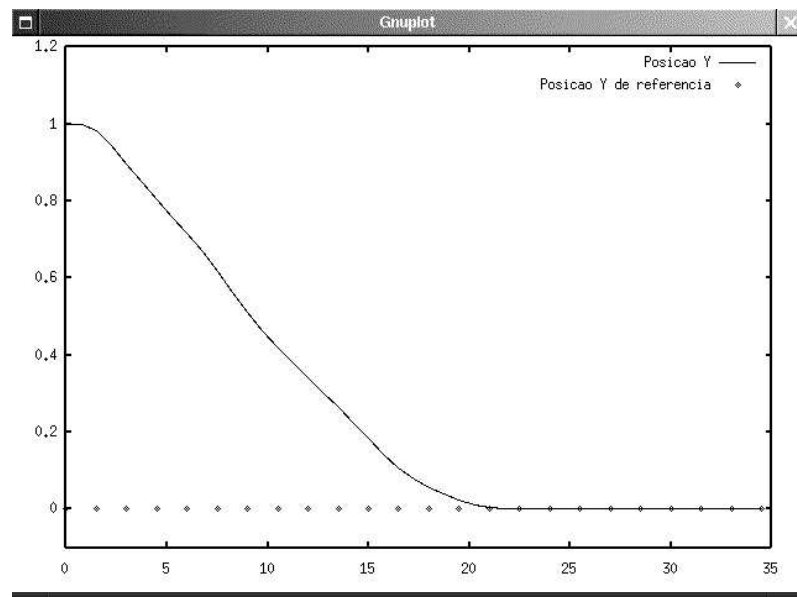
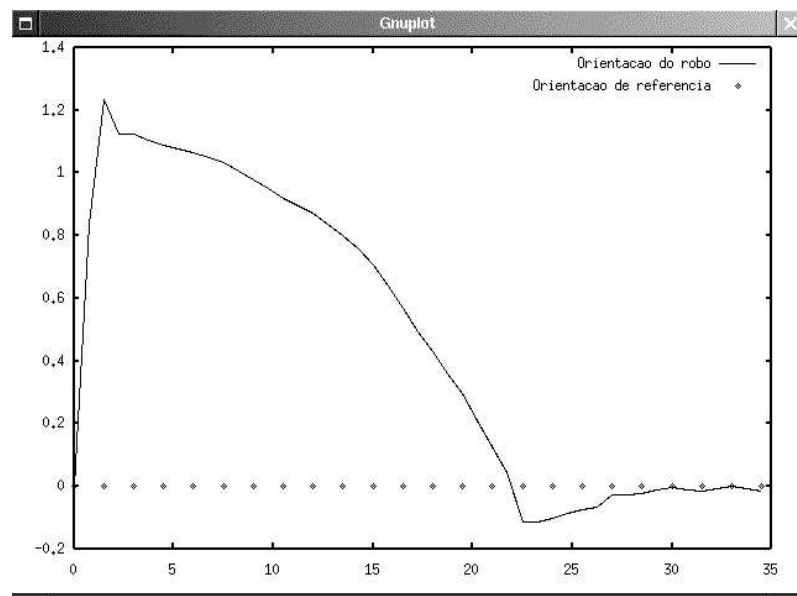
Figura 4.20: Posição  $y$  do robô durante a convergência à origem.

Figura 4.21: Orientação do robô durante a convergência à origem.

A trajetória descrita pelo robô no plano até atingir o ponto  $(0, 0, 0)$  é mostrada na figura 4.22. Os torques exercidos pelos motores das rodas direita (linha cheia) e esquerda (linha pontilhada) são mostrados na figura 4.23.

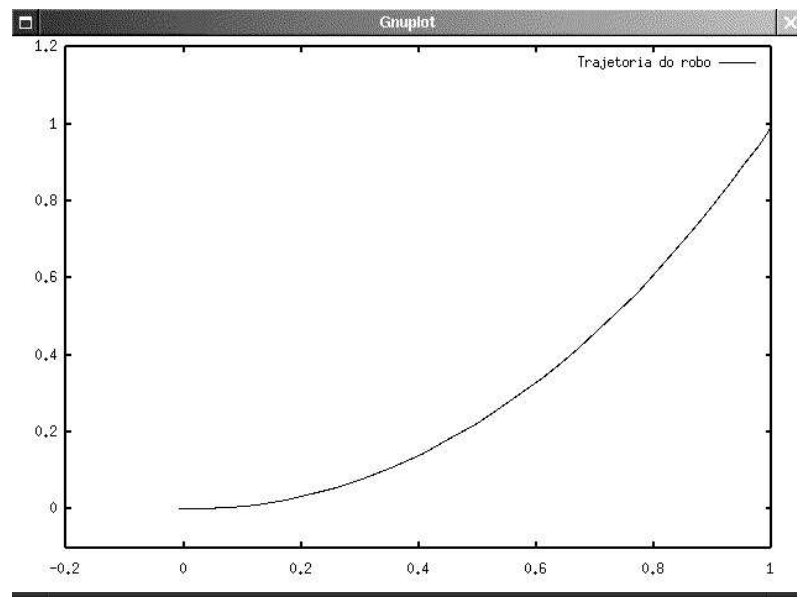


Figura 4.22: Trajetória percorrida pelo robô para alcançar a origem.

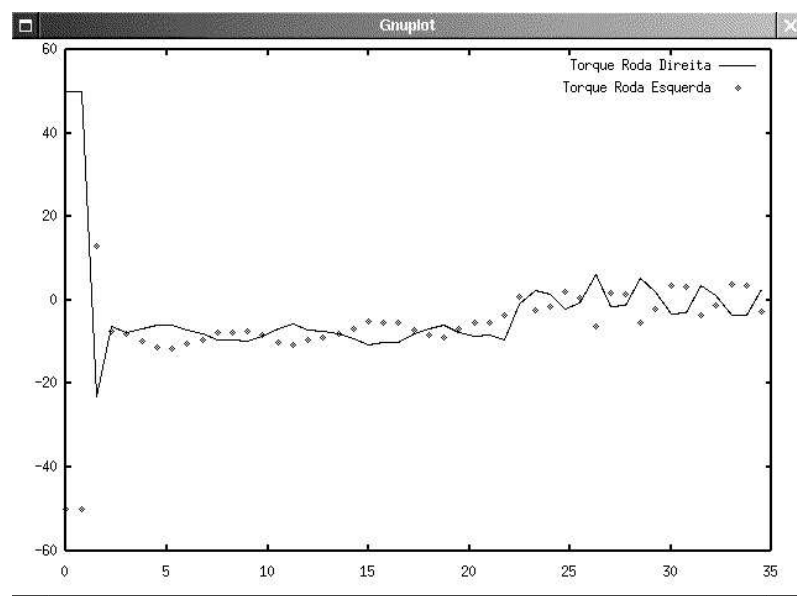


Figura 4.23: Torques exercidos pelos motores das rodas direita (linha cheia) e esquerda (linha pontilhada).

## Capítulo 5

# Conclusão

Nesse trabalho foram apresentadas técnicas de controle da cinemática de um robô móvel e um controlador baseado em redes neurais para a dinâmica do robô. Os controladores apresentados são capazes de realizar tanto a tarefa de rastreamento de trajetória quanto a tarefa de convergência à um ponto.

As modelagens cinemática e dinâmica apresentada no capítulo 2 estão baseadas em [51, 9]. As estruturas de tais modelos são bem conhecidas, porém os parâmetros envolvidos podem apresentar problemas na implementação das leis de controle. Os parâmetros envolvidos no modelo cinemático devem ter seus valores conhecidos com precisão, uma vez que interferem diretamente nos erros de determinação de posição e orientação pelo método de *dead-reckoning*, erros os quais são acumulativos.

Com relação aos parâmetros envolvidos no modelo dinâmico, estes são variantes com a carga útil do robô e por isso não podem ser determinados por calibração. A dificuldade na determinação de tais parâmetros leva ao desenvolvimento de controladores adaptativos [25] ou que tenham a capacidade de aprender, como é o caso do controlador baseado em redes neurais [22].

As duas primeiras técnicas de controle, em coordenadas cartesianas e em coordenadas polares, têm como objetivo fazer com que o robô siga uma trajetória de referência. Os resultados obtidos em simulação apresentam a convergência do robô às trajetórias de referência, garantindo que o robô permaneça na trajetória durante o restante do movimento.

Já as duas últimas técnicas, o controle com realimentação variante no tempo e o controle por meio de modos deslizantes, apresentam como objetivo de controle a convergência do robô a uma postura desejada. Como já mencionado, os controladores satisfazem as restrições

apresentadas por Brockett [12]. O primeiro apresenta uma lei de controle variante no tempo e o segundo apresenta uma lei de controle descontínua. As simulações realizadas mostram que o robô converge à postura (posição e orientação) desejada.

O controlador baseado em redes neurais é utilizado para controlar a dinâmica do robô. A primeira aplicação deste controlador teve como objetivo repetir o trabalho de [22], que apresenta apenas resultados de simulação, e obter resultados práticos a fim de validar as características do controle via redes neurais. Depois, as demais técnicas de controle para a cinemática foram aplicadas a fim de verificar o comportamento do robô e do controle da parte dinâmica com diferentes controladores e tanto em tarefas de rastreamento de trajetória quanto em tarefas de convergência a um ponto.

Os esquemas de controle utilizados nesse trabalho foram validados tanto por simulação quanto por experimentação em um protótipo pertencente à classe (2,0). Os resultados experimentais são importantes, pois revelam problemas que são difíceis de serem simulados. A posição e orientação, quando se trabalha em simulação, são fáceis de serem determinadas com exatidão, o que já não ocorre quando se trabalha com o protótipo, pois estas variáveis devem ser medidas indiretamente.

Este trabalho, durante seu desenvolvimento, foi apresentado no *6<sup>th</sup> IFAC Symposium on Robot Control* [52], aceito para publicação no *IEEE System, Man and Cybernetics 2000* [53]. Foi aceito, também, para o V Congresso Brasileiro de Redes Neurais, a ser realizado durante o ano de 2001 [54].

Tendo em vista que a proposta dessa dissertação abre caminho a novas pesquisas, é possível listar algumas sugestões de trabalho a serem desenvolvidos em outros projetos. Uma tarefa interessante para robôs móveis seria a de seguir uma trajetória de referência e, ao fim desta, voltar ao ponto de partida. Isto requer que o controlador seja capaz de garantir seguimento a uma trajetória de referência e de fazer com que o robô atinja uma postura desejada. O projeto de leis de controle que contemplem tais requisitos constituem um importante tópico a ser investigado.

Outro trabalho interessante a ser desenvolvido é a construção de robôs que pertençam a outras classes, a fim de se expandir os resultados apresentados neste trabalho a todas as classes possíveis de robôs móveis.

Um trabalho importante a ser desenvolvido é a implementação de um simulador gráfico para robôs móveis, num ambiente onde seriam testadas novas leis de controle, tarefas a

serem executadas pelo robô, bem como a utilização de técnicas de planejamento de trajetória para desvio de obstáculos.

Como o enfoque desta pesquisa tenha sido eminentemente a utilização de redes neurais no controle da dinâmica de robôs móveis, pode-se ainda desenvolver estudos que aprofundem a análise do controlador neural, visando à otimização dos parâmetros deste controlador. Da mesma forma, os controladores cinemáticos também podem ser investigados com maior minúcia, a fim de encontrar-se parâmetros otimizados para cada um dos controladores. Uma vez atingida a configuração ótima dos controladores utilizados, haveria condições para comparar e, conforme a necessidade, eleger a combinação mais eficiente entre controladores cinemáticos e dinâmicos.

## Apêndice A

# Descrição do Robô Móvel Twil

Neste capítulo serão apresentados detalhes concernentes ao hardware e ao software do robô móvel utilizado como base deste trabalho.

O robô móvel **Twil**, apresentado na figura A.1, foi construído no Departamento de Controle e Conversão de Energia do Instituto Tecnológico da Aeronáutica-CTA-ITA-IEEE [25].

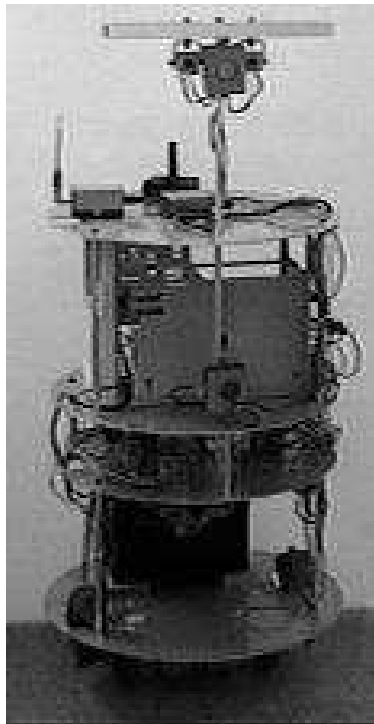


Figura A.1: Robô Móvel Twil.

## A.1 Aspectos de *Hardware*

O **Twil** é um robô móvel acionado por duas rodas que atuam em modo diferencial pertencente à classe (2,0). Na base do robô existem quatro rodas mas apenas duas destas estão motorizadas, sendo as duas restantes utilizadas apenas para equilibrarem o robô, sem prejudicar o deslocamento do mesmo. Na figura A.2 se apresenta o diagrama de blocos do sistema.

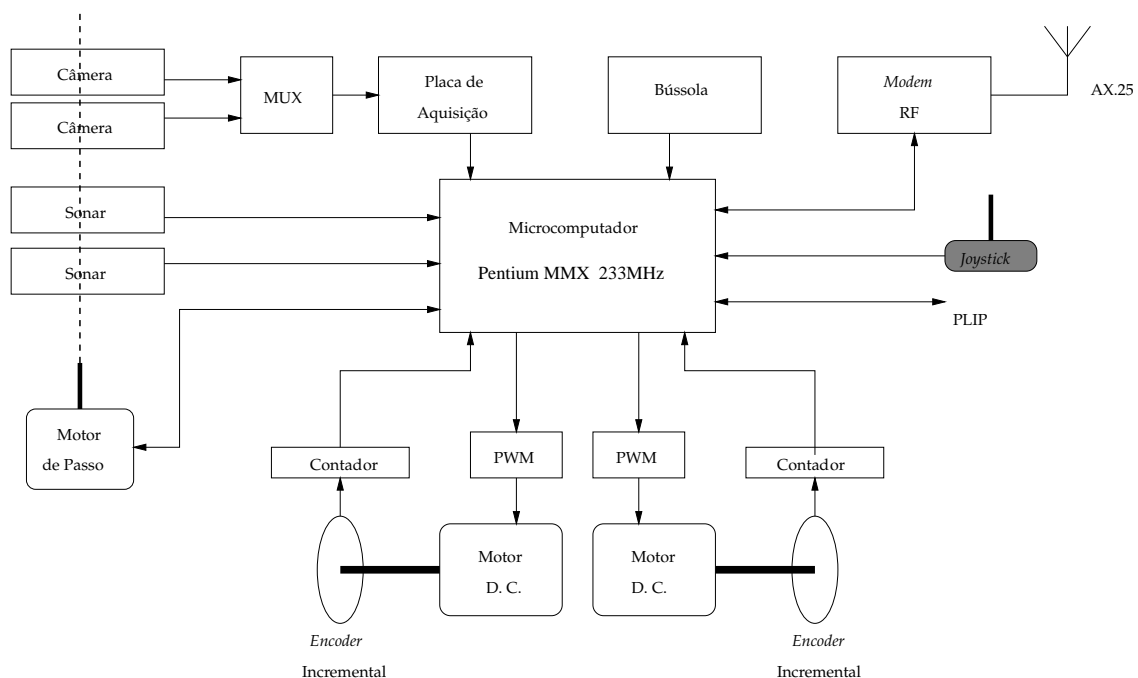


Figura A.2: Diagrama de blocos do Twil.

O **Twil** é controlado por um computador baseado no microprocessador *Pentium MMX*® 233 MHz. Como se observa no diagrama de blocos, utiliza-se a técnica de *Pulse-Width Modulation* (PWM) [55] para acionamento dos motores, sendo os PWMs implementados com o uso de um *timer* programável **82C54**.

Juntamente com cada um dos motores D.C. está acoplado um *encoder* incremental com resolução de 8192 pulsos por rotação. Conforme a descrição apresentada em [25], estes *encoders* apresentam dois canais em quadratura estando, deste modo, capacitados a detectarem, também, o sentido de giro do motor.

O robô também está equipado com duas câmeras de vídeo, dotando o **Twil** de visão.



É importante salientar que a orientação da torre de suporte das câmeras é independente da orientação do robô, uma vez que esta torre é acionada por meio de um motor de passo exclusivo.

Na mesma torre de suporte das câmeras de vídeo estão montados, em alturas diferentes, dois sonares de ultra-som. A instrumentação do **Twil** possui, ainda, uma bússola digital.

O computador embarcado não apresenta teclado nem monitor de vídeo. Para que o robô se comunique externamente ele possui duas portas seriais e uma porta paralela. Assim, os seguintes métodos estão disponíveis:

- conexão TCP/IP via AX.25: neste método são utilizados *modems* de rádio-frequência para estabelecer uma conexão AX.25 entre o **Twil** e o computador no qual se encontra o operador. Tal protocolo faz-se necessário uma vez que a transmissão via rádio envolve vários fenômenos não existentes na transmissão via cabo (sombreamento, interferência, etc).
- conexão TCP/IP via PLIP: neste método utiliza-se um cabo *null-printer* para realizar uma conexão PLIP (*Parallel Line IP*), podendo-se obter taxas de transferência de dados superiores a 100KBytes/s [25]. Maiores detalhes a respeito destes e de outros protocolos podem ser encontrados em [56, 57].

Por fim resta mencionar o *joystick* conectado à porta serial. Este *joystick* foi instalado a fim de facilitar a movimentação manual do robô, uma vez que este apresenta uma massa de 45Kg.

## A.2 Aspectos de Software

Como fora mencionado na seção anterior, o robô **Twil** está equipado com vários sensores: um *encoder* incremental para cada roda motorizada, dois sonares de ultra-som e duas câmeras de vídeo.

Uma vez que estes sensores funcionam baseados em diferentes princípios físicos, apresentam diferentes taxas de amostragem. Esta variedade nas taxas de amostragem acarreta, quando se trabalha com implementação em tempo real, problemas no processamento para aquisição de dados de cada sensor, com o sincronismo entre estes e destes com o filtro de Kalman.

Face a estes problemas, faz-se necessário o uso de um ambiente multitarefa, a fim de permitir que o tratamento dos sensores seja executado por tarefas periódicas [58], cada uma com seu período de amostragem.

O ambiente multitarefa utilizado foi o sistema operacional LINUX [59, 60]. É importante salientar que as tarefas periódicas foram implementadas como *threads* e não como processos [61]. O programa implementado possui os seguintes *threads*:

- leitura da bússola, com período de amostragem de 200ms;
- leitura dos *encoders*, com período de amostragem de 50ms;
- fusão de dados, sem período de amostragem fixo, mas sincronizado com os dois *threads* anteriores;
- interface com o usuário, com período de amostragem de 1s. Este *thread* possui a menor prioridade, sendo executado apenas quando os demais *threads* não necessitem de processamento.

A sincronização entre os *threads* é dada por meio de semáforos. Estes semáforos são utilizados para garantir que a operação do sistema em tempo real comece somente após a inicialização completa de todos os *threads* e que a fusão de dados ocorra apenas quando os dados da bússola e dos *encoders* estejam disponíveis, sincronizando os *threads* de leitura dos sensores com o *thread* de fusão de dados.

## Apêndice B

# Lema de Barbalat e Teoremas de Lyapunov e Frobenius

### B.1 Teorema de Lyapunov

Seja  $V(x) : \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}$  uma função definida positiva, com derivadas parciais contínuas. Se a derivada temporal de  $V(x)$  ao longo de qualquer trajetória  $x(t)$  for semi-definida negativa, ou seja,  $\dot{V}(x) \leq 0$ , então  $V(x)$  é uma função de Lyapunov.

**Teorema B.1.1** *Seja  $x_e = 0$  um ponto de equilíbrio do sistema não-linear*

$$\dot{x} = f(x) \tag{B.1}$$

*e  $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n$ . Seja  $V : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{R}$  uma função continuamente diferenciável tal que:*

- $V(0) = 0$  e  $V(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D} - \{0\}$
- $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}$

*então  $X_e$  é assintoticamente estável.*

### B.2 Lema de Barbalat

O teorema de Barbalat é utilizado para analisar a estabilidade assintótica de sistemas não-autônomos (parâmetros variantes no tempo).

**Lema B.2.1** *Seja  $\phi : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$  uma função uniformemente contínua no intervalo  $(0, \infty)$ , tal que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi(\tau) d\tau \quad (\text{B.2})$$

*existe e é finita. Então:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) \rightarrow 0 \quad (\text{B.3})$$

Em outras palavras, se uma função escalar  $V(x, t)$  for limitada inferiormente, sua derivada primeira em relação ao tempo for semidefinida negativa e uniformemente contínua em  $t$ , então  $\dot{V}(x, t) \rightarrow 0$  quanto  $t \rightarrow \infty$ . Isto significa que  $V(x, t)$  estabiliza assintoticamente na origem.

### B.3 Teorema de Frobenius

O teorema de Frobenius é uma importante ferramenta na análise formal de linearização por realimentação de sistemas não-lineares de ordem- $n$ . Este teorema provê a condição necessária e suficiente para a resolução de uma classe especial de equações diferenciais parciais. Entretanto, antes de se apresentar tal teorema, algumas definições formais serão apresentadas.

**Definição B.3.1** *Um conjunto linearmente independente de campos vetoriais  $[f_1, f_2, \dots, f_m]$  em  $\mathcal{R}^n$  é dito **completamente integrável** se, e somente se, existir  $(n - m)$  funções escalares  $h_1(x), h_2(x), \dots, h_{n-m}(x)$  que satisfaçam o sistema de equações diferenciais parciais*

$$\nabla h_i f_j = 0$$

*sendo  $1 \leq i \leq n - m$  e  $1 \leq j \leq m$  e os gradientes  $\nabla h_i$  são linearmente independentes.*

Observe que se o número de vetores é  $m$ , a dimensão do espaço associado é  $n$  e o número de funções escalares não conhecidas  $h_i$  é  $(n - m)$ , então o número de equações diferenciais parciais é  $m(n - m)$ .

**Definição B.3.2** *Um conjunto linearmente independente de campos vetoriais  $[f_1, f_2, \dots, f_m]$  é dito **involutivo** se, e somente se, existem funções escalares  $\alpha_{ijk} : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  tais que*

$$[f_i, f_j](x) = \sum_{k=1}^m \alpha_{ijk}(x) f_k(x) \quad \forall i, j \quad (\text{B.4})$$

Involutividade significa que se o colchete de Lie de qualquer par de campos vetoriais do conjunto  $[f_1, f_2, \dots, f_m]$  é formado, então o campo vetorial resultante pode ser expresso como uma combinação linear do conjunto original de campos vetoriais.

Com as definições acima, o teorema de Frobenius pode ser formalmente apresentado:

**Teorema B.3.1** *Seja  $f_1, f_2, \dots, f_m$  um conjunto de campos vetoriais linearmente independentes. O conjunto é completamente integrável se, e somente se, o conjunto for involutivo.*

# Referências Bibliográficas

- [1] <http://www.srl.org>.
- [2] Yanco, Holly A., Hazel, Anna, Peacock, Alison, *et al.*. Initial report on wheeliesley: a robotic wheelchair system. In: *Proceedings of the Workshop on Developing AI Applications for the Disabled - International Joint Conference on Artificial Intelligence*. 1995 .
- [3] Yanco, Holly A. Integrating robotic research: A survey of robotic wheelchair development. In: *AAAI Spring Symposium on Integrating Robotic Research*. 1998 .
- [4] Angle, C. M., Brooks, R. A. Small planetary rovers. In: *IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems*. 1990 págs. 383–388.
- [5] Hsu, Liu, Costa, Ramon R. Adaptive control with sliding modes: Theory and control. In: *11º Congresso Brasileiro de Automática*. 1996 págs. 39–60. Mini-curso com duração de 6 horas.
- [6] de Escalera, A., Salichs, M. A., Moreno, L., *et al.*. Percepción de carreteras y detección de señales de tráfico. In: *XVI Jornadas de Automatica - San Sebastian - Espanha*. 1995 .
- [7] Dowling, Kevin. *Limbless Locomotion: Learning to Crawl with a Snake Robot*. Tese de Doutorado, Robotics Institute - Carnegie Mellon I University, December 1997.
- [8] Kanayama, Yutaka, Kimura, Yoshihiko, Miyazaki, Fumio, *et al.*. A stable tracking control method for an autonomous mobile robot. In: *Proceedings of the 1990 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1990 págs. 384–389.
- [9] Campion, Guy, Bastin, Georges, D’Andréa-Novel, Brigitte. Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, February 1996. volume 12, nº 1, págs. 47–62.

- [10] Godhavn, John-Morten, Egeland, Olav. A lyapunov approach to exponential stabilization of nonholonomic systems in power form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, July 1997. volume 42, nº 7, págs. 1028–1032.
- [11] Victorino, Alessandro C., Paulo R. G. Kurka, Eurípedes G. O. Nobrega. Controle de trajetória e estabilização de robô móvel não-holonômico com realimentação variante no tempo. In: *Proceedings of XII Brazilian Automatic Control Conference*, volume II. 1998 págs. 593–598.
- [12] Brockett, R. W. *New directions in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, 1982 .
- [13] Bentalba, S., Haijaji, A. El, Rachid, A. Fuzzy sliding mode control of mobile robot. In: *Proceedings of the 37<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control*. 1998 págs. 4264–4265.
- [14] Astolfi, Alessandro. *Discontinuous Control of Nonholonomic Systems*. Rel. téc., ETH, Disponível eletronicamente em <ftp://ftp.aut.ee.ethz.ch/pub/reports/postscript/AUT95-09.ps>, 1995.
- [15] Pomet, Jean-Baptiste. Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift. *Systems & Control Letters*, 1992. volume 18, págs. 147–158.
- [16] Morin, P., Samson, Claude. Control of nonlinear chained system: From the routh-hurwitz stability criteria to time-varying exponential stabilizers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, January 2000. volume 45, nº 1, págs. 141–146.
- [17] Normey-Rico, Julio E., Ortega, J. Gómez, Alcalá, I. Control predictivo para seguimiento de caminos en un robot del tipo "synchro-drive". In: *Proceedings of XII Brazilian Automatic Control Conference*, volume II. 1998 págs. 611–616.
- [18] Normey-Rico, Julio Elias, Gómez-Ortega, Juan, Camacho, Eduardo F. A smith-predictor-based generalised predictive controller for mobile robot path-tracking. *Per-gamon - Control Engineering Practice - IFAC*, 1999. volume 7, págs. 729–740.
- [19] Yamamoto, Yoshio, Yun, Xiaoping. Coordinating locomotion and manipulation of a mobile platform. *IEEE Transactions on Automatic Control*, June 1994. volume 39, nº 6, págs. 1326–1332.

- [20] Jiang, Zhong-Ping, Nijmeijer, Henk. A recursive technique for tracking control of non-holonomic systems in chained form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, February 1999. volume 44, nº 2, págs. 265–279.
- [21] Lages, Walter Fetter, Hemerly, Elder Moreira. Controle de robôs móveis utilizando transformação descontínua e linearização adaptativa. In: *Anais do XIII Congresso Brasileiro de Automática*. 2000 págs. 2251–2256.
- [22] Fierro, R., Lewis, Frank L. Control of nonholonomic mobile robot using neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, July 1998. volume 9, nº 4, págs. 589–601.
- [23] Borenstein, Johann, Feng, Liqiang. *UMBmark - A Method for Measuring, Comparing and Correcting Dead-reckoning Errors in Mobile Robots*. Rel. Téc. UM-MEAM-94-22, Mobile Robotics Laboratory - Department of Mechanical Engineering and Applied Mechanics - The University of Michigan, 1101 Beal Avenue - Ann Arbor, MI 48109, December 1994.
- [24] Bemporad, Alberto, Marco, Mauro Di, Tesi, Alberto. Sonar-based wall-following control of mobile robots. *Transactions of the ASME*, March 2000. volume 122, págs. 226–230.
- [25] Lages, Walter Fetter. *Controle e Estimação de Posição e Orientação de Robôs Móveis*. Tese de Doutorado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 1998.
- [26] <http://robotics.jpl.nasa.gov/tasks/tmr/>.
- [27] Brooks, Rodney A. A robot that walks: Emergent behavior form a carefully evolved network. *Neural Computation*, Summer 1989. volume 1, nº 2, págs. 253–262. Informações disponíveis em <http://www.ai.mit.edu/projects/genghis/genghis.html>.
- [28] Yamamoto, Yoshio, Yun, Xiaoping. Effect of the dynamic interaction on coordinated control of mobile manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, October 1996. volume 12, nº 5, págs. 816–824.
- [29] Murray, Richard M., Sastry, S. Shankar. Nonholonomic motion planning: Steering with sinusoids. *IEEE Transactions on Automatic Control*, May 1993. volume 38, nº 5, págs. 700–716.
- [30] Nelson, Winston L. Continuous steering-function control of robot carts. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, August 1989. volume 36, nº 3, págs. 330–337.



- [31] Slotine, Jean Jacques Ee., Li, Weiping. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, 1991.
- [32] Aicardi, M., Casalino, G., Bicchi, A., *et al.*. Closed loop steering of unicycle-like vehicles via lyapunov techniques. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, March 1995. volume 2, nº 1, págs. 27–35.
- [33] Lages, Walter F., Hemerly, Elder M. Controle em coordenadas polares de robôs móveis com rodas. In: *Proceedings of XII Brazilian Automatic Control Conference*, volume II. 1998 págs. 604–610.
- [34] Samson, Claude. *Mobile Robot Control Part 2: Control of Chained Systems and Application to Path Following and Time-Varying Point-Stabilization of Wheeled Vehicles*. Rel. Téc. RR-1994, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique - Unité INRIA-Sophia Antipolis, 2004 Route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 - Sophia-Antipolis - France, Juillet 1993.
- [35] Guldner, Jürgen, Utkin, Vadim I. Stabilization of nonholonomic mobile robots using lyapunov functions for navigation and sliding modes control. In: *Proceedings of the 33<sup>rd</sup> Conference on Decision and Control*. 1994 págs. 2967–2972.
- [36] Chen, Chi-Tsong. *Linear System Theory and Design*. CBS College Publishing, 1984.
- [37] Samson, Claude. Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart. In: *Proceedings in Advanced Robot Control*, volume 162. Springer-Verlag, 1991 .
- [38] —. Control of chained systems application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots. *IEEE Transactions on Automatic Control*, January 1995. volume 40, nº 1, págs. 64–77.
- [39] Murray, Richard M., Sastry, S. Shankar. Steering nonholonomic systems in chained form. In: *Proceedings of the 30<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*. 1991 .
- [40] Kawski, M. Homogeneous stabilizing feedback laws. *Control-Theory and Advanced Technology*, 1990. volume 6, nº 4, págs. 497–516.
- [41] DeCarlo, Raymond A., Zak, Stanislaw H., Matthews, Gregory P. Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial. In: *Proceedings of the IEEE*, volume 76. 1988 págs. 212–232.

- [42] Utkin, Vadim I. Sliding mode control in dynamic systems. In: *Proceedings of the 32<sup>nd</sup> Conference on Decision and Control*. 1993 págs. 2446–2451.
- [43] Hung, John Y., Gao, Weibing, Hung, James C. Variable structure control: A survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, February 1993. volume 40, nº 1, págs. 2–22.
- [44] Bloch, Anthony, Drakunov, Sergey. Stabilization of a nonholonomic system via sliding modes. In: *Proceedings of the 33<sup>rd</sup> Conference on Decision and Control*. 1994 págs. 2961–2963.
- [45] Gao, Weibing, Hung, James C. Variable structure control of nonlinear systems: A new approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, February 1993. volume 40, nº 1, págs. 45–55.
- [46] DeCarlo, R. A., Žak, S. H., Drakunov, S. V. *The Control Handbook*. CRC Press, 1996 págs. 941–951.
- [47] Kröse, Ben J. A., van der Smagt, P. Patrick. *An Introduction to Neural Networks*. Faculty of Mathematica & Computer Science - University of Amsterdam, Kruislaan 403, NL-1098 SJ Amsterdam / The Netherlands, 5<sup>a</sup> ed., January 1993.
- [48] Żbikowski, R., Dzieliński, A. *Neural Network Engineering in Dynamic Control Systems*. Advances in Industrial Control. Springer-Verlag, 1995 .
- [49] Kosko, Bart. *Neural Networks for Signal Processing*. Prentice-Hall, 1992.
- [50] Lewis, F. L., Yesildirek, A., Liu, K. Multilayer neural-net robot controller with guaranteed tracking performance. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1996. volume 7, págs. 1–12.
- [51] Campion, Guy, Bastin, Georges, D’Andréa-Novel, Brigitte. Modelling and state feedback control of nonholonomic mechanical systems. In: *Proceedings of the 30<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*. 1991 págs. 1184–1189.
- [52] de Oliveira, Vinícius Menezes, de Pieri, Edson Roberto, Lages, Walter Fetter. Neural networks in the control of a mobile platform. In: *Preprints of the 6th IFAC Symposium on Robot Control*, ed. of Technology, IHRT Vienna University, volume 1. 2000 págs. 181–186.

- [53] —. Feedforward control of a mobile robot using a neural network. In: *Proceedings of the IEEE SMC*. 2000 .
- [54] —. Controle de robôs móveis via modos deslizantes, Abril 2001. Aceito para o V Congresso Brasileiro de Redes Neurais.
- [55] III, Murray Sargent, Shoemaker, Richard L. *The Personal Computer from the Inside Out: the programmer's guide to low-level PC hardware and software*. 3<sup>a</sup> ed. Addison Wesley, 1995.
- [56] Tanenbaum, Andrew S. *Computer Networks*. 3<sup>a</sup> ed. Prentice-Hall, 1996.
- [57] Soares, Luiz Fernando Gomes, Lemos, Guido, Colcher, Sergio. *Redes de Computadores: das LANs, MANs e WANs às Redes ATM*. Segunda ed. Editora Campus, 1997.
- [58] Butazzo, Giorgio C. *Hard Real-time Computing Systems*. Kluwer Academic Publishers, 1997. Scuola Superior S. Anna, Pisa, Italy.
- [59] <http://www.linux.org>.
- [60] Lages, Walter Fetter, Hemerly, Elder M. Linux as a software platform for mobile robots. Submetido à IEEE Software.
- [61] Silberschatz, Abraham, Galvin, Peter B. *Operating Systems Concepts*. 4<sup>a</sup> ed. Addison Wesley, 1995.