

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL



Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEE

# **CONTROLE LINEARIZANTE DE UM MANIPULADOR ROBÓTICO**

GUILHERME VIANNA RAFFO

Monografia para obtenção do título de Especialista em Engenharia

Porto Alegre

2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

ESCOLA DE ENGENHARIA

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEE

# **CONTROLE LINEARIZANTE DE UM MANIPULADOR ROBÓTICO**

GUILHERME VIANNA RAFFO

Engenheiro de Controle e Automação

Monografia apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEE, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Especialista em Engenharia. Área de concentração: Automação e Controle. Desenvolvida no Laboratório de Automação e Controle do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre

2004

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>07</b>
<b>2</b>	<b>DINÂMICA DO MANIPULADOR ROBÓTICO.....</b>	<b>08</b>
<b>2.1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>08</b>
<b>2.2</b>	<b>FORMULAÇÃO DE LAGRANGE-EULER.....</b>	<b>09</b>
<b>2.2.1</b>	<b>VELOCIDADE DAS JUNTAS DE UM MANIPULADOR ROBÓTICO.....</b>	<b>10</b>
<b>2.2.2</b>	<b>ENERGIA CINÉTICA DE UM MANIPULADOR ROBÓTICO.....</b>	<b>14</b>
<b>2.2.3</b>	<b>ENERGIA POTENCIAL DE UM MANIPULADOR ROBÓTICO.....</b>	<b>15</b>
<b>2.2.4</b>	<b>EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DE UM MANIPULADOR ROBÓTICO.....</b>	<b>16</b>
<b>2.2.5</b>	<b>MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM MANIPULADOR COM DOIS ELOS...</b>	<b>18</b>
<b>3</b>	<b>CONTROLE DE MANIPULADORES ROBÓTICOS.....</b>	<b>30</b>
<b>3.1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>30</b>
<b>3.2</b>	<b>LINEARIZAÇÃO EXATA POR REALIMENTAÇÃO.....</b>	<b>31</b>
<b>3.3</b>	<b>CONTROLE LINEARIZANTE DE UM MANIPULADOR COM DOIS ELOS.....</b>	<b>32</b>
<b>4</b>	<b>SIMULAÇÃO .....</b>	<b>35</b>
<b>4.1</b>	<b>DESCRIÇÃO DAS CLASSES E FUNÇÕES USADAS NO PROGRAMA.....</b>	<b>35</b>
<b>4.2</b>	<b>DESCRIÇÃO DA ROTINA DE CONTROLE PARA A SIMULAÇÃO.....</b>	<b>41</b>
<b>5</b>	<b>RESULTADOS.....</b>	<b>42</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>49</b>
<b>7</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>50</b>

## LISTA DE FIGURAS

• Figura 2.1: Um ponto ${}^i r_i$ no elo $i$ . [1] .....	11
• Figura 2.2: Um manipulador de dois elos. [1] .....	19
• Figura 5.1: Posição da junta 1 .....	42
• Figura 5.2: Posição da junta 2.....	42
• Figura 5.3: Velocidade da junta 1 .....	43
• Figura 5.4: Velocidade da junta 2.....	43
• Figura 5.5: Controle da junta 1 .....	43
• Figura 5.6: Controle da junta 2 .....	43
• Figura 5.7: Movimento do manipulador no plano xy .....	43
• Figura 5.8: Posição da junta 1 .....	44
• Figura 5.9: Posição da junta 2 .....	44
• Figura 5.10: Velocidade da junta 1 .....	44
• Figura 5.11: Velocidade da junta 2 .....	44
• Figura 5.12: Controle da junta 1 .....	44
• Figura 5.13: Controle da junta 2 .....	44
• Figura 5.14: Movimento do manipulador no plano xy .....	45
• Figura 5.15: Posição da junta 1 .....	45
• Figura 5.16: Posição da junta 2 .....	45
• Figura 5.17: Velocidade da junta 1 .....	46
• Figura 5.18: Velocidade da junta 2 .....	46
• Figura 5.19: Controle da junta 1 .....	46
• Figura 5.20 Controle da junta 2 .....	46
• Figura 5.21: Posição da junta 1 .....	47
• Figura 5.22: Posição da junta 2 .....	47
• Figura 5.23: Velocidade da junta 1 .....	47
• Figura 5.24: Velocidade da junta 2 .....	47

• Figura 5.25: Controle da junta 1 .....	47
• Figura 5.26 Controle da junta 2 .....	47

## **LISTA DE TABELAS**

- TABELA 2.1: Parâmetros de Denavit-Hartenberg ..... 19
- TABELA 5.1: Parâmetros do manipulador JANUS ..... 42

# 1 Introdução

Sob o ponto de vista de controle, manipuladores robóticos representam sistemas de controle automático essencialmente não-lineares, multivariáveis, com acoplamentos dinâmicos [11].

O objetivo do controle de um manipulador é manter a resposta dinâmica do manipulador de acordo com o desempenho desejado. Em geral, o desempenho dinâmico de um manipulador depende diretamente da eficiência do controlador e do modelo dinâmico do manipulador. O problema do controle consiste em obter o modelo dinâmico do sistema físico do manipulador robótico e então especificar as correspondentes leis de controle [8].

Para solução do problema de controle dessas máquinas, uma gama de técnicas pode ser adotada. Embora ainda bastante comuns e largamente utilizadas na indústria, as técnicas de controle convencionais (PD, PID,...) não apresentam um desempenho satisfatório frente a determinados tipos de sistema, devido as não linearidades presentes nesses. Os métodos convencionais de controle de manipuladores mecânicos, baseados em equações dinâmicas do modelo, requerem cálculos de forças ou torques em tempo real [11]. Para isso, vêm sendo desenvolvidas técnicas de controle que tratam sistemas não-lineares como lineares, como no caso da técnica de controle linearizante. Essas técnicas de controle são mais sofisticadas e precisas que as convencionais, e consistem na compensação das não-linearidades de tal forma que o sistema dinâmico em malha fechada tenha um comportamento linear. A seguir é utilizado um controlador linear para controlar o sistema linearizado. A técnica de controle linearizante é muito utilizada no controle de rastreamento, porém ela apresenta algumas limitações: sua aplicação demanda da medição de todos os estados da planta e não garante a robustez quando existem incertezas nos parâmetros da planta ou quando existem dinâmicas não modeladas e, isto pode prejudicar a performance de controladores linearizantes [1]. Para contornar essas limitações pode-se usar Controle Adaptativo [11].

## **2 – Dinâmica do Manipulador Robótico**

### **2.1 – Introdução**

Para controlar a posição do manipulador é preciso conhecer as suas propriedades dinâmicas, a fim de saber a quantidade de força ou torque que deve ser aplicada às juntas para que ele se mova. Pouca força, por exemplo, fará com que o manipulador reaja vagarosamente, enquanto que força demais pode fazer com que o manipulador esbarre em objetos ou vibre em torno da posição desejada.

A dinâmica de manipuladores robóticos é tratada com formulações matemáticas das equações do movimento dos manipuladores. As equações dinâmicas do movimento de um manipulador são um conjunto de equações matemáticas descrevendo o comportamento dinâmico do manipulador. Estas equações são úteis para realizar simulação do movimento de manipuladores, projetar equações de controle adequadas e avaliar o projeto cinemático e a estrutura do manipulador. Além da dinâmica dos membros que compõem o manipulador, a descrição completa deve também envolver a dinâmica dos atuadores e da transmissão, os quais produzem e transmitem as forças e torques necessários ao movimento.

O modelo dinâmico de um manipulador robótico pode ser obtido através das leis da física, tal como as leis mecânicas de Newton e de Lagrange. Isto leva ao desenvolvimento das equações dinâmicas do movimento para diferentes juntas articuladas do manipulador em termos da geometria específica e dos parâmetros de inércia dos elos. Métodos convencionais como as formulações de Lagrange-Euler e Newton-Euler são aplicadas sistematicamente para desenvolver a real equação do movimento do manipulador. Diferentes formas das equações do movimento de manipuladores que descrevem a dinâmica de um manipulador de corpo-rígido são obtidas através das formulações citadas acima, tais como as equações de Uicker Langrange-Euler (Uicker, 1965, Bejczy, 1974), equações de Hollerbach Recursivo-Lagrange (Hollerbach, 1980), equações de Luh Newton-Euler (Luh, 1980a), e equações generalizadas de Lee d'Alembert (Lee, 1983). Estas equações do movimento equivalem-se, por descreverem o mesmo comportamento dinâmico do manipulador. Entretanto, as estruturas destas equações podem diferir, pois elas são obtidas para diferentes razões e objetivos.



A obtenção do modelo dinâmico de um manipulador baseado na formulação de Lagrange-Euler é simples e sistemática. Assumindo o movimento de um corpo rígido, as equações do movimento resultantes, excluindo a dinâmica dos dispositivos de controle eletrônico, o *back-lash*, e o atrito das engrenagens, são um grupo de equações diferenciais não-lineares de segunda ordem. As equações do movimento de Lagrange-Euler provêm equações de estado explícitas para dinâmica do robô e podem ser utilizadas para análise e projeto de estratégias de controle com as variáveis das juntas. Para uma menor extensão, elas são usadas para solucionar problemas em *dinâmica inversa*, isto é, dado os torques desejados, as equações dinâmicas são usadas para solucionar as acelerações das juntas as quais são então integradas para solucionar as coordenadas generalizadas e suas velocidades; ou para problemas de *dinâmica direta*, isto é, dado as coordenadas generalizadas desejadas e suas duas primeiras derivadas, os torques generalizados são obtidos. Em ambos os casos isto pode requerer o cálculo dos coeficientes dinâmicos  $D_{ik}$ ,  $h_{ikm}$ , e  $c_i$ . A obtenção destes coeficientes requer várias operações matemáticas, sendo um processo bastante demorado. Assim, as equações de Lagrange-Euler são muito difíceis de serem utilizadas em um controle em tempo-real, ao menos que sejam simplificadas[1].

## 2.2 – Formulação de Lagrange Euler

As equações gerais do movimento de um manipulador podem convenientemente ser expressas através da aplicação direta da formulação de Lagrange-Euler para sistemas não-conservativos. É muito utilizada a notação de Denavit-Hartenberg para descrever a transferência espacial entre o membro  $i$  e o membro  $i-1$ , e também é empregada à técnica da dinâmica lagrangeana para derivar as equações dinâmicas do manipulador. A aplicação direta da formulação lagrangeana, junto com a representação das coordenadas dos elos por Denavit-Hartenberg, resultam num conveniente e compacto algoritmo que descreve as equações do movimento do manipulador. O algoritmo é expresso através de operações matriciais e facilita tanto a análise quanto a implementação computacional.

A derivação das equações dinâmicas de um manipulador com  $n$  graus de liberdades é baseada na compreensão de:

1. A matriz de transformação homogênea definida em [1],  ${}^{i-1}A_i$ , a qual descreve a

relação espacial entre o sistema de coordenadas do elo  $i$ -ésimo com o elo  $(i-1)$ -ésimo. Isso relaciona um ponto fixo no elo  $i$  expresso pelas coordenadas homogêneas com relação ao  $i$ -ésimo sistema de coordenada para o  $(i-1)$ -ésimo sistema de coordenada.

2. A equação de Lagrange-Euler

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

onde

$L$  = função lagrangeana = energia cinética  $K$  – energia potencial  $P$

$K$  = energia cinética total do manipulador

$P$  = energia potencial total do manipulador

$q_i$  = coordenadas generalizadas do manipulador

$\tau_i$  = torque generalizado aplicado ao sistema na junta  $i$  para mover o elo  $i$

Através da expressão (2.1) de Lagrange-Euler, é exigido um apropriado conjunto de coordenadas generalizadas para descrever o sistema. As coordenadas generalizadas são usadas como um grupo conveniente de coordenadas, as quais descrevem completamente a localização (posição e orientação) de um sistema com relação a um sistema de coordenadas de referência. Para um simples manipulador com juntas rotacionais e/ou prismáticas, diferentes conjuntos de coordenadas são fornecidos para descrever o manipulador. No caso de juntas rotacionais,  $q_i = \theta_i$ , e no caso de juntas prismáticas,  $q_i = d_i$ .

### 2.2.1 – Velocidades das Juntas de um Manipulador Robótico

A formulação de Lagrange-Euler exige o conhecimento da energia cinética do sistema físico, para o qual é necessário o conhecimento da velocidade de cada junta. A velocidade de um ponto fixo no elo  $i$  é derivada e os efeitos do movimento de outras juntas sobre todos os pontos deste elo são explorados.

Através da Figura 2.1,  ${}^i r_i$  é um ponto fixo e imóvel na junta  $i$  e expresso em coordenadas homogêneas com relação ao sistema de coordenadas do  $i$ -ésimo elo,

$${}^i r_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = (x_i, y_i, z_i, 1)^T \quad (2.2)$$

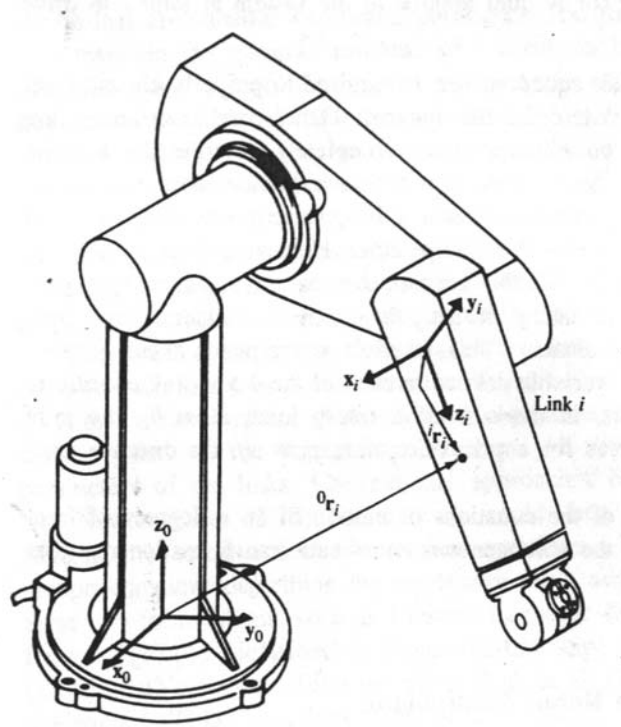


FIGURA 2.1 Um ponto  ${}^i r_i$  no elo  $i$  [1].

Sugerindo que o ponto  ${}^0 r_i$  é o mesmo que o ponto  ${}^i r_i$  com relação ao sistema de coordenadas da base,  ${}^{i-1} A_i$  a matriz de transformação homogênea na qual descreve a relação espacial entre o sistema de coordenadas do elo  $i$ -ésimo com o elo  $(i-1)$ -ésimo, e  ${}^0 A_i$  a matriz de transformação homogênea na qual relaciona o  $i$ -ésimo sistema de coordenada com o sistema de coordenada da base, então  ${}^0 r_i$  está relacionado ao ponto  ${}^i r_i$  por

$${}^0 r_i = {}^0 A_i {}^i r_i \quad (2.3)$$

onde

$${}^0 A_i = {}^0 A_1 {}^1 A_2 \dots {}^{i-1} A_i \quad (2.4)$$

A matriz de transformação homogênea  ${}^{i-1} A_i$  é dada por

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Em geral, todos os elementos diferentes de zero na matriz  ${}^0A_i$  são uma função de  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i)$ , e  $\alpha_i, a_i, d_i$  são parâmetros conhecidos da estrutura cinemática do braço definidos em [1], e  $\theta_i$  ou  $d_i$  é a variável de junta da junta  $i$ . Para derivar as equações de movimento, as quais são aplicadas para ambas juntas prismáticas e rotatórias, deve-se usar a variável  $q_i$  para representar a coordenada generalizada da junta  $i$ , a qual é tanto  $\theta_i$  (para uma junta rotatória) ou  $d_i$  (para uma junta prismática).

Se o ponto  ${}^i r_i$  está imóvel no elo  $i$ , e assumindo movimento de corpo rígido, outros pontos tais como o ponto  ${}^i r_i$  fixo no elo  $i$  e expresso em relação ao sistema de coordenadas  $i$ -ésimo terão uma velocidade zero em relação ao sistema de coordenada  $i$ -ésimo (o qual não é um sistema inerte). A velocidade  ${}^i r_i$  expressa no sistema de coordenada da base (o qual é um sistema inerte) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} {}^0 v_i \equiv v_i &= \frac{d}{dt}({}^0 r_i) = \frac{d}{dt}({}^0 A_i {}^i r_i) \\ &= {}^0 \dot{A}_1 {}^1 A_2 \dots {}^{i-1} A_i {}^i r_i + {}^0 A_1 {}^1 \dot{A}_2 \dots {}^{i-1} A_i {}^i r_i + {}^0 A_1 \dots {}^{i-1} \dot{A}_i {}^i r_i + {}^{i-1} A_i {}^i \dot{r}_i = \left( \sum_{j=1}^i \frac{\partial {}^0 A_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) {}^i r_i \end{aligned} \quad (2.6)$$

A forma compacta acima é obtida porque  ${}^i r_i = 0$ . A derivada parcial de  ${}^0 A_i$  em relação a  $q_j$  pode ser facilmente calculada com ajuda da matriz  $Q_i$  a qual, para uma junta rotatória, é definida como

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

e, para uma junta prismática, como

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Então segue que

$$\frac{\partial^{i-1} A_i}{\partial q_i} = Q_i {}^{i-1} A_i \quad (2.9)$$

Portanto, para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\frac{\partial^0 A_i}{\partial q_j} = \begin{cases} {}^0 A_1 {}^1 A_2 \dots {}^{j-2} A_{j-1} Q_j {}^{j-1} A_j \dots {}^{i-1} A_i & \text{para } j \leq i \\ 0 & \text{para } j > i \end{cases} \quad (2.10)$$

A expressão (2.10) pode ser interpretada como o efeito da junta  $j$  em todos os pontos sobre o elo  $i$ . Para simplificar notações, vamos definir  $U_{ij} \triangleq \frac{\partial^0 A_i}{\partial q_j}$ , então a expressão (2.10) pode ser escrita como segue para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$U_{ij} = \begin{cases} {}^0 A_{j-1} Q_j {}^{j-1} A_i & \text{para } j \leq i \\ 0 & \text{para } j > i \end{cases} \quad (2.11)$$

Usando esta notação,  $v_i$  pode ser expressa como

$$v_i = \left( \sum_{j=1}^i U_{ij} \dot{q}_j \right) {}^i r_i \quad (2.12)$$

Vale salientar que a derivada parcial de  ${}^{i-1} A_i$  em relação a  $q_i$  resulta numa matriz que mantém a estrutura de uma matriz de transformação homogênea. Para uma junta rotatória o efeito da pré-multiplicação de  ${}^{i-1} A_i$  por  $Q_i$  é equivalente ao intercâmbio dos elementos das duas primeiras linhas  ${}^{i-1} A_i$ , invertendo o sinal de todos os elementos da primeira linha e zerando todos os elementos da terceira e quarta linha. Para uma junta prismática, o efeito é substituir os elementos da terceira linha com os da quarta linha de  ${}^{i-1} A_i$  e zerar os elementos das outras linhas. É vantajoso usar matrizes  $Q_i$  porque pode-se continuar usando matrizes  ${}^{i-1} A_i$  e aplicar as operações já descritas para  ${}^{i-1} A_i$  quando se pré-multiplica-a por  $Q_i$ .

O próximo passo é encontrar os efeitos da interação entre as juntas, tal como segue

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial q_k} = U_{ijk} = \begin{cases} {}^0A_{j-1}Q_j^{j-1}A_{k-1}Q_k^{k-1}A_i & \text{para } i \geq k \geq j \\ {}^0A_{k-1}Q_k^{k-1}A_{j-1}Q_j^{j-1}A_i & \text{para } i \geq j \geq k \\ 0 & \text{para } j > i \end{cases} \quad (2.13)$$

A expressão (2.13) pode ser interpretada como o efeito interativo do movimento das juntas  $j$  e  $k$  em todos os pontos sobre o elo  $i$ .

## 2.2.2 – Energia Cinética de um Manipulador Robótico

Obtida a velocidade da junta de cada elo, a energia cinética do elo  $i$  deve ser calculada. Supondo que  $K_i$  é a energia cinética do elo  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , como expresso no sistema de coordenadas da base, e,  $dK_i$  é a energia cinética de uma partícula com diferencial de massa  $dm$  no elo  $i$ ; então

$$\begin{aligned} dK_i &= \frac{1}{2}(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2).dm \\ &= \frac{1}{2}Tr(v_i v_i^T)dm \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde usa-se um operador traço ( $Tr A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ ) para calcular o momento que é usado para obter a matriz de inércia do elo  $J_i$ . Substituindo  $v_i$  da expressão (2.12), a energia cinética do diferencial de massa é

$$dK_i = \frac{1}{2}Tr \left[ \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} ({}^i r_i dm {}^i r_i^T) U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \quad (2.15)$$

A matriz  $U_{ij}$  é a taxa de variação dos pontos  ${}^i r_i$  sobre o elo  $i$  relacionado ao sistema de coordenadas da base com as mudanças de  $q_j$ . Isso é constante para todos os pontos e independe da distribuição da massa do elo  $i$ . Sendo  $\dot{q}_i$  também independentes da distribuição da massa do elo  $i$ , então, somando-se todas as energias cinéticas de todos os elos e colocando a integral entre parênteses,

$$K_i = \int dK_i = \frac{1}{2}Tr \left[ \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} \left( \int {}^i r_i {}^i r_i^T dm \right) U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \quad (2.16)$$

O termo integral entre parênteses é a inércia de todos os pontos sobre o elo  $i$ , portanto

$$J_i = \int {}^i r_i {}^i r_i^T dm = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int x_i y_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int x_i z_i dm & \int y_i z_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

onde  ${}^i r_i = (x_i, y_i, z_i, 1)^T$  como definido antes. Usando o momento de inércia  $I_{ij}$  onde os índices  $i, j, k$  indicam os eixos principais do sistema de coordenadas  $i$ -ésimo, então  $J_i$  pode ser expressa através dos momentos de inércia, tal como

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2} & -I_{xy} & -I_{xz} & m_i \bar{x}_i \\ -I_{xy} & \frac{I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}}{2} & -I_{yz} & m_i \bar{y}_i \\ -I_{xz} & -I_{yz} & \frac{I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}}{2} & m_i \bar{z}_i \\ m_i \bar{x}_i & m_i \bar{y}_i & m_i \bar{z}_i & m_i \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

onde  ${}^i \bar{r}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, 1)^T$  é o vetor do centro de massa do elo  $i$  originado do sistema de coordenada do elo  $i$ -ésimo e expresso no mesmo sistema de coordenadas. Portanto, a energia cinética total  $K$  de um manipulador é

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i [Tr(U_{ip} J_i U_{ir}^T) \dot{q}_p \dot{q}_r] \quad (2.19)$$

a qual é um valor escalar.  $J_i$  são dependentes da distribuição de massa do elo  $i$  e não de suas posições ou da variação de movimento e são expressas com relação ao sistema de coordenadas  $i$ -ésimo. Portanto,  $J_i$  deve ser calculada somente uma vez para validar a energia cinética do manipulador.

### 2.2.3 – Energia Potencial de um Manipulador Robótico

Supondo que a energia potencial de um manipulador seja  $P$  e a energia potencial de cada elo seja  $P_i$ :

$$P_i = -m_i g {}^0 \bar{r}_i = -m_i g ({}^0 A_i {}^i \bar{r}_i) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.20)$$

e a energia potencial total do manipulador pode ser obtida através do somatório de todas as

energias potenciais de cada elo,

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n -m_i g \left( {}^0 A_i {}^i \bar{r}_i \right) \quad (2.21)$$

onde  $g = (g_x, g_y, g_z, 0)$  é um vetor linha da aceleração da gravidade expresso no sistema de coordenadas da base.

## 2.2.4 – Equações do Movimento de um Manipulador Robótico

A partir das expressões (2.19) e (2.21), a função lagrangeana  $L = K - P$  é

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \left[ \text{Tr}(U_{ip} J_i U_{ir}^T) \dot{q}_p \dot{q}_r \right] + \sum_{i=1}^n m_i g \left( {}^0 A_i {}^i \bar{r}_i \right) \quad (2.22)$$

Aplicando a formulação de Lagrange-Euler na função lagrangeana do manipulador, tem-se

$$\tau_i = \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \text{Tr}(U_{jk} J_j U_{ji}^T) \ddot{q}_k + \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^j \text{Tr}(U_{jkm} J_j U_{ji}^T) \dot{q}_k \dot{q}_m - \sum_{j=i}^n m_j g U_{ji}^j \bar{r}_j \quad (2.23)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ . A expressão (2.23) pode ser expressa em uma notação matricial mais simplificada, como,

$$\tau_i = \sum_{k=1}^n D_{ik} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m + c_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.24)$$

ou na forma matricial

$$\tau(t) = D(q(t)) \ddot{q}(t) + h(q(t), \dot{q}(t)) + c(q(t)) \quad (2.25)$$

onde

$\tau(t) = n \times 1$  vetor torque generalizado aplicado nas juntas  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

$q(t) =$  vetor  $n \times 1$  das variáveis de junta do manipulador;

$D(q) =$  matriz simétrica  $n \times n$  relacionada com a aceleração inercial onde

$$D_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^n \text{Tr}(U_{jk} J_j U_{ji}^T) \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad (2.26)$$

$h(q, \dot{q}) =$  vetor  $n \times 1$  das forças centrífuga e Coriolis, na qual

$$h(q, \dot{q}) = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$$



onde

$$h_i = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.27)$$

e

$$h_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^n \text{Tr}(U_{jkm} J_j U_{ji})^T \quad i, k, m = 1, 2, \dots, n \quad (2.28)$$

$c(q)$  = um vetor  $n \times 1$  referente a força gravitacional, na qual

$$c(q) = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$$

onde

$$c_i = \sum_{j=i}^n (-m_j g U_{ji}^j \bar{r}_j) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.29)$$

Os coeficientes  $c_i$ ,  $D_{ik}$  e  $h_{ikm}$  nas expressões (2.26) à (2.29) são funções das variáveis de junta e parâmetros de inércia do manipulador, e podem ser chamados de coeficientes dinâmicos do manipulador. O sentido físico destes coeficientes dinâmicos pode facilmente ser explicado pelas equações do movimento de Lagrange-Euler, isto é:

1. O coeficiente  $c_i$  representa os termos relacionadas à força gravitacional exercidos nos elos;
2. O coeficiente  $D_{ik}$  está relacionado à aceleração das variáveis das juntas e é definido pela expressão (2.26). Em particular, para  $i = k$ ,  $D_{ii}$  está relacionado à aceleração da junta  $i$ , onde o torque aplicado  $\tau_i$  atua; no entanto, para  $i \neq k$ ,  $D_{ik}$  está relacionado ao torque de reação induzido da junta  $k$  e atuando na junta  $i$ , ou vice-versa. Desde que a matriz de inércia seja simétrica e  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A)^T$ , pode-se mostrar que  $D_{ik} = D_{ki}$ ;
3. O coeficiente  $h_{ikm}$  está relacionado com a velocidade das variáveis das juntas. Os dois últimos índices,  $km$ , estão relacionados às velocidades das juntas  $k$  e  $m$ , cuja dinâmica atua reciprocamente induzindo um torque de reação na junta  $i$ . Então, o primeiro índice  $i$  está sempre relacionado à junta onde os torques de reação induzidos pela velocidade são “sentidos”. Em particular, para  $k = m$ ,  $h_{ikk}$  está relacionado a força centrífuga gerada pela velocidade angular da junta  $k$  e “sentida” na junta  $i$ , enquanto para  $k \neq m$ ,  $h_{ikm}$  está relacionado a força de Coriolis gerada pelas velocidades das juntas  $k$  e  $m$  e “sentidas” na

junta  $i$ . Nota-se que, para uma dada junta  $i$ , tem-se  $h_{ikm} = h_{imk}$ .

Avaliando estes coeficientes, nota-se que alguns coeficientes podem ser zero para as seguintes razões:

1. O projeto cinemático específico de um manipulador pode eliminar alguns acoplamentos dinâmicos (coeficientes  $D_{ij}$  e  $h_{ikm}$ ) entre movimentos de juntas;
2. Alguns dos coeficientes dinâmicos relacionados à velocidade tem somente uma existência fictícia nas expressões (2.27) e (2.28); isto é, eles são fisicamente inexistentes. (Por exemplo, a força centrífuga não interage com o movimento da própria junta, isto é,  $h_{iii} = 0$ , sempre; entretanto, ela pode interagir com o movimento de outra junta em cadeia, isto é,  $h_{jii} \neq 0$ .);
3. Devido a variações específicas na configuração do elo durante o movimento, alguns coeficientes dinâmicos podem tornar-se zero em instantes de tempo específicos.

As equações do movimento de um manipulador como mostradas nas expressões (2.25) até (2.29) são equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, acopladas e não-lineares. Estas expressões estão em uma forma simbólica de equações diferenciais e incluem todas as inércias, forças centrífugas e Coriolis, e os efeitos gravitacionais do elo [1].

## 2.2.5 – Modelagem de um Manipulador com Dois Elos

Para demonstrar o uso das equações do movimento de Lagrange-Euler, será apresentado o desenvolvimento matemático de tais equações para um manipulador de dois elos com juntas rotacionais conforme a Figura 2.2. Todos os eixos de rotação das juntas estão ao longo do eixo  $z$ . As dimensões físicas tal como a localização do centro de massa, a massa de cada elo e os sistemas de coordenadas serão apresentados a seguir.

Os parâmetros de Denavit-Hartenberg dos elos são apresentados na tabela 2.1.

$I$	$d_i$	$a_i$	$\theta_i$	$\alpha_i$	$m_i$
1	$d_1$	$l_1$	$\theta_1$	0	$m_1$
2	$d_2$	$l_2$	$\theta_2$	0	$m_2$

TABELA 2.1 Parâmetros de Denavit-Hartenberg

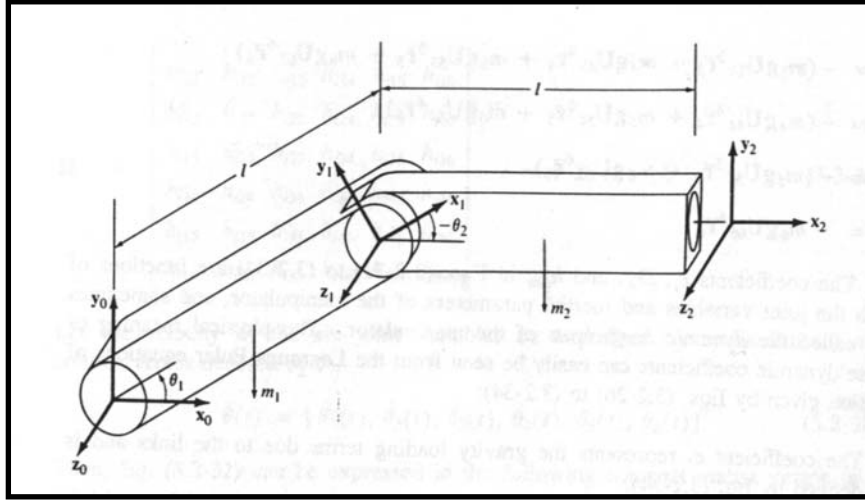


FIGURA 2.2 Um manipulador de dois elos [1].

Para o manipulador de dois elos as matrizes de transformação homogênea  ${}^{i-1}A_i$  ( $i=1, 2$ ) são obtidas como

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -C\alpha_1 S\theta_1 & S\alpha_1 S\theta_1 & a_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\alpha_1 C\theta_1 & -S\alpha_1 C\theta_1 & a_1 S\theta_1 \\ 0 & S\alpha_1 & C\alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -C\alpha_2 S\theta_2 & S\alpha_2 S\theta_2 & a_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\alpha_2 C\theta_2 & -S\alpha_2 C\theta_2 & a_2 S\theta_2 \\ 0 & S\alpha_2 & C\alpha_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_2 = {}^0A_1 {}^1A_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_2C_{12} + l_1C_1 \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_2S_{12} + l_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde  $C_i = \cos \theta_i$ ;  $S_i = \sin \theta_i$ ;  $C_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$ ;  $S_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$ .

Através da definição da matriz  $Q_i$ , para junta rotacional  $i$ , com as matrizes de transformação homogênea pode-se definir o efeito da junta  $j$  em todos os pontos sobre o elo  $i$  ( $U_{ij}$ ).

$$U_{11} = \frac{\partial {}^0A_1}{\partial \theta_1} = Q_1 {}^0A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_1 & -C_1 & 0 & -l_1S_1 \\ C_1 & -S_1 & 0 & l_1C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{21} = \frac{\partial {}^0A_2}{\partial \theta_1} = Q_1 {}^0A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_2C_{12} + l_1C_1 \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_2S_{12} + l_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -l_2S_{12} - l_1S_1 \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & l_2C_{12} + l_1C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{22} = \frac{\partial {}^0A_2}{\partial \theta_2} = {}^0A_1 Q_2 {}^1A_2 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -l_2S_{12} \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & l_2C_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular a matriz  $J_i$  pela expressão (2.18) é preciso definir o centro de massa do

objeto e a matriz momento de inércia  $I$ . Para um objeto contínuo de massa específica  $\rho$  tem-se

$$\int_{-x-y-z}^x \int_{-x-y-z}^y \int_{-x-y-z}^z \rho(x, y, z) dx dy dz = m \quad (2.30)$$

onde  $B$  denota a região do espaço ocupado pelo objeto.

Então, o centro de massa do objeto é localizado pelas coordenadas

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_{-x-y-z}^x \int_{-x-y-z}^y \int_{-x-y-z}^z x \rho dx dy dz, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_{-x-y-z}^x \int_{-x-y-z}^y \int_{-x-y-z}^z y \rho dx dy dz, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \int_{-x-y-z}^x \int_{-x-y-z}^y \int_{-x-y-z}^z z \rho dx dy dz \quad (2.31)$$

ou, em forma vetorial mais compacta:

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} \int_{-x-y-z}^x \int_{-x-y-z}^y \int_{-x-y-z}^z \mathbf{r} \rho dx dy dz \quad (2.32)$$

onde  $\bar{\mathbf{r}}$  é o vetor posição do centro de massa do objeto [8].

Para o manipulador de dois elos têm-se as seguintes coordenadas do centro de massa

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m} \int_{-l-h/2-\omega/2}^0 \int_{-h/2-\omega/2}^{h/2} \int_{-\omega/2}^{\omega/2} x \rho dx dy dz = -\frac{l}{2} \\ \bar{y} &= \frac{1}{m} \int_{-l-h/2-\omega/2}^0 \int_{-h/2-\omega/2}^{h/2} \int_{-\omega/2}^{\omega/2} y \rho dx dy dz = 0 \\ \bar{z} &= \frac{1}{m} \int_{-l-h/2-\omega/2}^0 \int_{-h/2-\omega/2}^{h/2} \int_{-\omega/2}^{\omega/2} z \rho dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

A matriz momento de inércia  $I$  é apresentada abaixo

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & \int xy dm & \int xz dm \\ \int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & \int yz dm \\ \int xz dm & \int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Para o manipulador de dois elos temos os seguintes coeficientes da matriz  $I$

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int_{-l-h/2}^0 \int_{-\omega/2}^{h/2} \int_{-\omega/2}^{\omega/2} (y^2 + z^2) \rho dx dy dz = m \left( \frac{h^2}{12} + \frac{\omega^2}{12} \right) \\
I_{yy} &= \int_{-l-h/2}^0 \int_{-\omega/2}^{h/2} \int_{-\omega/2}^{\omega/2} (z^2 + x^2) \rho dx dy dz = m \left( \frac{\omega^2}{12} + \frac{l^2}{3} \right) \\
I_{zz} &= \int_{-l-h/2}^0 \int_{-\omega/2}^{h/2} \int_{-\omega/2}^{\omega/2} (x^2 + y^2) \rho dx dy dz = m \left( \frac{h^2}{12} + \frac{l^2}{3} \right) \\
I_{xy} &= \int_{-l-h/2}^0 \int_{-\omega/2}^{h/2} \int_{-\omega/2}^{\omega/2} xy \rho dx dy dz = 0 \\
I_{xz} &= \int_{-l-h/2}^0 \int_{-\omega/2}^{h/2} \int_{-\omega/2}^{\omega/2} xz \rho dx dy dz = 0 \\
I_{yz} &= \int_{-l-h/2}^0 \int_{-\omega/2}^{h/2} \int_{-\omega/2}^{\omega/2} yz \rho dx dy dz = 0
\end{aligned}$$

Considerando a expressão (2.18), tem-se

$$\begin{aligned}
J_i &= \begin{bmatrix} \frac{-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2} & -I_{xy} & -I_{xz} & m_i \bar{x}_i \\ -I_{xy} & \frac{I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}}{2} & -I_{yz} & m_i \bar{y}_i \\ -I_{xz} & -I_{yz} & \frac{I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}}{2} & m_i \bar{z}_i \\ m_i \bar{x}_i & m_i \bar{y}_i & m_i \bar{z}_i & m_i \end{bmatrix} \\
J_{11} &= \frac{ml^2}{3} \\
J_{22} &= \frac{mh^2}{12} \\
J_{33} &= \frac{m\omega^2}{12} \\
J_i &= \begin{bmatrix} \frac{m_i l_i^2}{3} & 0 & 0 & -\frac{m_i l_i}{2} \\ 0 & \frac{m_i h_i^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_i \omega_i^2}{12} & 0 \\ -\frac{m_i l_i}{2} & 0 & 0 & m_i \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Então,

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{m_1 l_1^2}{3} & 0 & 0 & -\frac{m_1 l_1}{2} \\ 0 & \frac{m_1 h_1^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 \omega_1^2}{12} & 0 \\ -\frac{m_1 l_1}{2} & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} \frac{m_2 l_2^2}{3} & 0 & 0 & -\frac{m_2 l_2}{2} \\ 0 & \frac{m_2 h_2^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 \omega_2^2}{12} & 0 \\ -\frac{m_2 l_2}{2} & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

Definidas as matrizes  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $U_{11}$ ,  $U_{21}$  e  $U_{22}$ , e usando a expressão (2.26), pode-se definir os elementos da matriz simétrica  $n \times n$  relacionada com a aceleração inercial  $D(q)$ , tal

$$D_{11} = Tr(U_{11} J_1 U_{11}^T) + Tr(U_{21} J_2 U_{21}^T)$$

$$= Tr \left\{ U_{11} \begin{bmatrix} \frac{m_1 l_1^2}{3} & 0 & 0 & -\frac{m_1 l_1}{2} \\ 0 & \frac{m_1 h_1^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 \omega_1^2}{12} & 0 \\ -\frac{m_1 l_1}{2} & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ -C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_1 S_1 & l_1 C_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$+ Tr \left\{ U_{21} \begin{bmatrix} \frac{m_2 l_2^2}{3} & 0 & 0 & -\frac{m_2 l_2}{2} \\ 0 & \frac{m_2 h_2^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 \omega_2^2}{12} & 0 \\ -\frac{m_2 l_2}{2} & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_{12} & C_{12} & 0 & 0 \\ -C_{12} & -S_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_2 S_{12} - l_1 S_1 & l_2 C_{12} + l_1 C_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

como  $D_{11} = \frac{m_1 l_1^2}{3} + \frac{m_1 h_1^2}{12} + \frac{m_2 l_2^2}{3} + \frac{m_2 h_2^2}{12} + m_2 l_1^2 + m_2 l_1 l_2 C_2$

$$\begin{aligned}
D_{12} &= D_{21} = \text{Tr}(U_{22}J_2U_{21}^T) \\
&= \text{Tr} \left\{ U_{21} \begin{bmatrix} \frac{m_2 l_2^2}{3} & 0 & 0 & -\frac{m_2 l_2}{2} \\ 0 & \frac{m_2 h_2^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 \omega_2^2}{12} & 0 \\ -\frac{m_2 l_2}{2} & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_{12} & C_{12} & 0 & 0 \\ -C_{12} & -S_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_2 S_{12} & l_2 C_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\
D_{12} &= D_{21} = \frac{m_2 l_2^2}{3} + \frac{m_2 h_2^2}{12} + \frac{m_2 l_1 l_2 C_2}{2} \\
D_{22} &= \text{Tr}(U_{22}J_2U_{22}^T) \\
&= \text{Tr} \left\{ U_{22} \begin{bmatrix} \frac{m_2 l_2^2}{3} & 0 & 0 & -\frac{m_2 l_2}{2} \\ 0 & \frac{m_2 h_2^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 \omega_2^2}{12} & 0 \\ -\frac{m_2 l_2}{2} & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & 0 \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_2 S_{12} & l_2 C_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\
D_{22} &= \frac{m_2 l_2^2}{3} + \frac{m_2 h_2^2}{12}
\end{aligned}$$

onde

$$D(q) = \begin{bmatrix} \frac{m_1 l_1^2}{3} + \frac{m_1 h_1^2}{12} + \frac{m_2 l_2^2}{3} + \frac{m_2 h_2^2}{12} + m_2 l_1^2 + m_2 l_1 l_2 C_2 & \frac{m_2 l_2^2}{3} + \frac{m_2 h_2^2}{12} + \frac{m_2 l_1 l_2 C_2}{2} \\ \frac{m_2 l_2^2}{3} + \frac{m_2 h_2^2}{12} + \frac{m_2 l_1 l_2 C_2}{2} & \frac{m_2 l_2^2}{3} + \frac{m_2 h_2^2}{12} \end{bmatrix}$$

Para definir vetor das forças centrífuga e Coriolis  $h(q, \dot{q})$  do manipulador de dois elos usa-se a expressão (2.27),

$$\begin{aligned}
\text{Para } i = 1 \quad h_1 &= \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 h_{1km} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_m = h_{111} \dot{\theta}_1^2 + h_{112} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + h_{121} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + h_{122} \dot{\theta}_2^2 \\
\text{Para } i = 2 \quad h_2 &= \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 h_{2km} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_m = h_{211} \dot{\theta}_1^2 + h_{212} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + h_{221} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + h_{222} \dot{\theta}_2^2
\end{aligned}$$



Através da expressão (2.28) define-se os coeficientes  $h_{ikm}$ , porém é necessário calcular o efeito iterativo do movimento das juntas  $j$  e  $k$  em todos os pontos sobre o elo  $i$  ( $U_{ijk}$ ), para isto usa-se a expressão (2.13),

$$U_{111} = Q_1 Q_1^0 A_1 = Q_1 U_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_1 & -C_1 & 0 & -l_1 S_1 \\ C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{111} = \begin{bmatrix} -C_1 & S_1 & 0 & -l_1 C_1 \\ -S_1 & -C_1 & 0 & -l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{211} = Q_1 Q_1^0 A_2 = Q_1 U_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -l_2 S_{12} - l_1 S_1 \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & l_2 C_{12} + l_1 C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{211} = \begin{bmatrix} -C_{12} & S_{12} & 0 & -l_2 C_{12} - l_1 C_1 \\ -S_{12} & -C_{12} & 0 & -l_2 S_{12} - l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{221} = U_{212} = U_{222} = Q_1^0 A_1 Q_2^1 A_2 = Q_1 U_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -l_2 S_{12} \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & l_2 C_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{221} = U_{212} = U_{222} = \begin{bmatrix} -C_{12} & S_{12} & 0 & -l_2 C_{12} \\ -S_{12} & -C_{12} & 0 & -l_2 S_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então, usando as matrizes definidas acima na expressão (2.28), tem-se

$$\begin{aligned}
h_{111} &= Tr(U_{111}J_1U_{11}^T) + Tr(U_{211}J_2U_{21}^T) \\
h_{112} &= Tr(U_{212}J_2U_{21}^T) \\
h_{121} &= Tr(U_{221}J_2U_{21}^T) \\
h_{122} &= Tr(U_{222}J_2U_{21}^T) \\
h_{211} &= Tr(U_{211}J_2U_{22}^T) \\
h_{212} &= Tr(U_{212}J_2U_{22}^T) \\
h_{221} &= Tr(U_{221}J_2U_{22}^T) \\
h_{222} &= Tr(U_{222}J_2U_{22}^T)
\end{aligned}$$

Conforme descrito na seção 2.2.4, alguns dos coeficientes dinâmicos relacionados à velocidade tem somente uma existência fictícia nas expressões (2.27) e (2.28); isto é, eles são fisicamente inexistentes (por exemplo, a força centrífuga não interage com o movimento da própria junta, isto é,  $h_{iii} = 0$ , sempre), então

$$\begin{aligned}
h_{111} &= Tr(U_{111}J_1U_{11}^T) + Tr(U_{211}J_2U_{21}^T) = 0 \\
h_{222} &= Tr(U_{222}J_2U_{22}^T) = 0
\end{aligned}$$

para os demais casos temos,

$$\begin{aligned}
h_{211} &= Tr(U_{211}J_2U_{22}^T) \\
&= Tr \left\{ \begin{bmatrix} -C_{12} & S_{12} & 0 & -l_2C_{12} - l_1C_1 \\ -S_{12} & -C_{12} & 0 & -l_2S_{12} - l_1S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m_2l_2^2}{3} & 0 & 0 & -\frac{m_2l_2}{2} \\ 0 & \frac{m_2h_2^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2\omega_2^2}{12} & 0 \\ -\frac{m_2l_2}{2} & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} U_{22}^T \right\} = \frac{m_2l_1l_2S_2}{2} \\
h_{211} &= \frac{m_2l_1l_2S_2}{2}
\end{aligned}$$

como  $U_{212} = U_{221} = U_{222}$  então  $h_{112} = h_{121} = h_{122}$  e  $h_{212} = h_{221} = h_{222}$ ,

$$\begin{aligned}
h_{112} &= Tr(U_{212} J_2 U_{21}^T) \\
&= Tr \left\{ \begin{bmatrix} -C_{12} & S_{12} & 0 & -l_2 C_{12} \\ -S_{12} & -C_{12} & 0 & -l_2 S_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m_2 l_2^2}{3} & 0 & 0 & -\frac{m_2 l_2}{2} \\ 0 & \frac{m_2 h_2^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 \omega_2^2}{12} & 0 \\ -\frac{m_2 l_2}{2} & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} U_{21}^T \right\} = -\frac{m_2 l_1 l_2 S_2}{2} \\
h_{112} &= h_{121} = h_{122} = -\frac{m_2 l_1 l_2 S_2}{2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
h_{212} &= Tr(U_{212} J_2 U_{22}^T) \\
&= Tr \left\{ \begin{bmatrix} -C_{12} & S_{12} & 0 & -l_2 C_{12} \\ -S_{12} & -C_{12} & 0 & -l_2 S_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m_2 l_2^2}{3} & 0 & 0 & -\frac{m_2 l_2}{2} \\ 0 & \frac{m_2 h_2^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 \omega_2^2}{12} & 0 \\ -\frac{m_2 l_2}{2} & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} U_{22}^T \right\} = 0 \\
h_{212} &= h_{221} = h_{222} = 0
\end{aligned}$$

Portanto, os valores correspondentes para as juntas 1 e 2 são:

$$\begin{aligned}
\text{Para } i = 1 \quad h_1 &= 0 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \left( -\frac{m_2 l_1 l_2 S_2}{2} \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \left( -\frac{m_2 l_1 l_2 S_2}{2} \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \left( -\frac{m_2 l_1 l_2 S_2}{2} \right) \dot{\theta}_2^2 \\
&= -m_2 l_1 l_2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{m_2 l_1 l_2 S_2}{2} \dot{\theta}_2^2 \\
\text{Para } i = 2 \quad h_2 &= \frac{m_2 l_1 l_2 S_2}{2} \dot{\theta}_1^2 + 0 \cdot \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 0 \cdot \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + 0 \cdot \dot{\theta}_2^2 \\
&= \frac{m_2 l_1 l_2 S_2}{2} \dot{\theta}_1^2
\end{aligned}$$

A matriz  $h(q, \dot{q})$  é definida como

$$h(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{m_2 l_1 l_2 S_2}{2} \dot{\theta}_2^2 \\ \frac{m_2 l_1 l_2 S_2}{2} \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

A próxima etapa é calcular o vetor referente a força gravitacional  $c(q) = (c_1, c_2)^T$ , onde

$$\begin{aligned} c_1 &= -(m_1 g U_{11}^{-1} \bar{r}_1 + m_2 g U_{21}^{-2} \bar{r}_2) \\ &= -m_1 (0, -g, 0, 0) \begin{bmatrix} -S_1 & -C_1 & 0 & -l_1 S_1 \\ C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{l_1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\quad -m_2 (0, -g, 0, 0) \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -l_2 S_{12} - l_1 S_1 \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & l_2 C_{12} + l_1 C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ c_1 &= \frac{m_1 g l_1 C_1}{2} + \frac{m_2 g l_2 C_{12}}{2} + m_2 g l_1 C_1 \\ c_2 &= -(m_2 g U_{22}^{-2} \bar{r}_2) \\ &= -m_2 (0, -g, 0, 0) \begin{bmatrix} -S_{12} & -C_{12} & 0 & -l_2 S_{12} \\ C_{12} & -S_{12} & 0 & l_2 C_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{l_2}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ c_2 &= \frac{m_2 g l_2 C_{12}}{2} \end{aligned}$$

Portanto, a matriz com termos gravitacionais é

$$c(q) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_1 g l_1 C_1}{2} + \frac{m_2 g l_2 C_{12}}{2} + m_2 g l_1 C_1 \\ \frac{m_2 g l_2 C_{12}}{2} \end{bmatrix}$$

Finalmente, as equações do movimento de Lagrange-Euler para um manipulador de dois elos são representadas por

$$\begin{aligned}
\tau(t) &= D(q(t))\ddot{q}(t) + h(q(t), \dot{q}(t)) + c(q(t)) \\
\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{m_1 l_1^2}{3} + \frac{m_1 h_1^2}{12} + \frac{m_2 l_2^2}{3} + \frac{m_2 h_2^2}{12} + m_2 l_1^2 + m_2 l_1 l_2 C_2 & \frac{m_2 l_2^2}{3} + \frac{m_2 h_2^2}{12} + \frac{m_2 l_1 l_2 C_2}{2} \\ \frac{m_2 l_2^2}{3} + \frac{m_2 h_2^2}{12} + \frac{m_2 l_1 l_2 C_2}{2} & \frac{m_2 l_2^2}{3} + \frac{m_2 h_2^2}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{m_2 l_1 l_2 S_2}{2} \dot{\theta}_2^2 \\ \frac{m_2 l_1 l_2 S_2}{2} \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{m_1 g l_1 C_1}{2} + \frac{m_2 g l_2 C_{12}}{2} + m_2 g l_1 C_1 \\ \frac{m_2 g l_2 C_{12}}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

## **3 – Controle de Manipuladores Robóticos**

### **3.1 – Introdução**

Considerando as equações dinâmicas do movimento de um manipulador, o objetivo do controle de robô é manter a resposta dinâmica do manipulador em conformidade com algum sinal de referência. Embora o problema do controle ser de certa maneira simples, a solução dele é complicada por causa das forças inerciais, pelas forças de reação dos acoplamentos, e pela ação da força da gravidade nos elos. Em geral, o problema do controle consiste em obter o modelo dinâmico do manipulador e usar este modelo para determinar leis de controle ou estratégias para atingir a resposta do sistema e performance desejada.

Aproximações usuais na indústria para projeto de sistemas de controle de manipuladores robóticos tratam cada junta do manipulador robótico como uma simples junta de um servomecanismo. Os modelos aproximados de servomecanismo variam as dinâmicas de um manipulador inadequadamente porque ocorre descaso no movimento e configuração do conjunto de mecanismos do robô. Estas mudanças nos parâmetros do sistema controlado são suficientemente significantes para tornar uma estratégia de controle realimentado convencional ineficiente. O resultado é reduzido à resposta de velocidade do servo, limitando a precisão e velocidade da resposta final. Como um dos resultados, manipuladores controlados desta maneira movem-se com velocidades lentas e com vibrações desnecessárias. Algum ganho na performance destes manipuladores necessita uma consideração mais eficiente dos modelos dinâmicos, técnicas de controle sofisticadas, e o uso de arquiteturas computacionais [1].

Existem algumas formas de tratamento de sistemas não-lineares que compensam as não-linearidades inerentes ao sistema, tais como: programação de ganhos, cancelamento de não-linearidades utilizando função inversa e uso de tabela, técnicas de anti-windup, técnica de linearização exata por realimentação, etc.

Neste trabalho será utilizada a técnica de linearização exata por realimentação, onde será implementado o controle linearizante por realimentação de estados.

## 3.2 – Linearização Exata por Realimentação

Existe uma classe especial de sistemas não-lineares, os quais podem ser transformados para sistemas lineares através da realimentação e troca de variáveis. Após esta transformação, um controle linearizante por realimentação de estados é designado para o sistema linear. A linearização usa uma aproximação exata, então o nome linearização exata por realimentação. Esta exatidão, entretanto, admite o perfeito conhecimento da equação de estado e usa este conhecimento para cancelar as não-linearidades do sistema. Sabendo que o perfeito conhecimento da equação de estado e o exato cancelamento matemático dos termos são quase impossíveis, a implementação desta aproximação irá quase sempre resultar num sistema em malha fechada, a qual é uma perturbação de um sistema nominal cuja origem é exponencialmente estável [5].

Quando um sistema linear é estabilizado por realimentação, a origem do sistema em malha fechada é assintoticamente estável. Isto não é o caso de sistemas não-lineares, nos quais diferentes noções de estabilização podem ser introduzidas. Se o sistema não-linear é estabilizado através de linearização, então a origem do sistema em malha fechada será assintoticamente estável [3][5][7].

Considere uma classe de sistemas não-lineares com a forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{3.1}$$

e propõe para o sistema um controle por realimentação de estados

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v\tag{3.2}$$

e uma mudança de variáveis

$$z = T(x)\tag{3.3}$$

que transforma o sistema não-linear em um sistema linear equivalente.

Diferenciando a expressão (3.1) com relação ao tempo tem-se

$$\dot{y}_j = L_f h_j(x) + L_g h_j(x)u\tag{3.4}$$

com  $L_f h_j(x)$  representando a derivada de Lie da saída  $h_j(x)$  com relação à  $f(x)$ , dada por

$$L_f h_j(x) = \frac{\partial h_j(x)}{\partial x} \dot{x}_f\tag{3.5}$$

$$L_g h_j(x) = \frac{\partial h_j(x)}{\partial x} \dot{x}_g \quad (3.6)$$

onde  $\dot{x}_f$  e  $\dot{x}_g$  representam as partes relacionadas à  $f(x)$  e  $g(x)$ , respectivamente, da equação de estado do processo descrito na expressões (3.1) [4][10].

Conforme a expressão (3.4), se o termo  $L_g h_j(x) = 0$  a entrada não aparecerá na derivada temporal da saída do processo. Assume-se  $\gamma_j$  como sendo o menor inteiro tal que a entrada aparecerá em  $y_j^{\gamma_j}$ , isto é,

$$y_j^{\gamma_j} = L_f^{\gamma_j} h_j(x) + L_g(L_f^{\gamma_j-1} h_j(x))u \quad (3.7)$$

sendo

$$L_f^{\gamma_j} h_j(x) = \frac{\partial L_f^{\gamma_j-1} h_j(x)}{\partial x} \dot{x}_f \quad (3.8)$$

$$L_g L_f^{\gamma_j} h_j(x) = \frac{\partial L_g L_f^{\gamma_j-1} h_j(x)}{\partial x} \dot{x}_g \quad (3.9)$$

como, no mínimo, um dos termos  $L_g(L_f^{\gamma_j-1} h_j(x)) \neq 0$  para todo  $x$  pertencente à região onde a linearização é válida [4][10].

A lei de controle por realimentação de estados é dada por

$$u(x) = \frac{1}{L_g L_f^{\gamma_j-1} h_j(x)} (-L_f^{\gamma_j} h_j(x) + v) \quad (3.10)$$

resulta, em malha fechada, o seguinte sistema,

$$y_j^{\gamma_j} = v_j$$

que é linear do ponto de vista entrada-saída [4].

### 3.3 – Controle Linearizante de um Manipulador com Dois Elos

Como nesta monografia foi usado o modelo matemático da dinâmica de um manipulador com dois elos através das equações do movimento de Lagrange –Euler (expressão (3.11)) e na seção 3.2 foi desenvolvida a linearização exata por realimentação, esta seção apresentará o



desenvolvimento do controle linearizante para o manipulador em questão.

Através da expressão (3.11),

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1(q, \dot{q}) \\ h_2(q, \dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1(q) \\ c_2(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

pode-se reescrevê-la em forma matricial

$$\tau(q) = D(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + c(q) \quad (3.12)$$

onde  $u(t)$  é o vetor do torque aplicado nos atuadores das juntas,  $q(t)$  é o vetor das posições angulares,  $\dot{q}(t)$  é o vetor das velocidades angulares,  $\ddot{q}(t)$  é o vetor das acelerações angulares,  $c(q)$  é o vetor da força gravitacional,  $h(q, \dot{q})$  é o vetor de força centrífuga e Coriolis e  $D(q)$  é a matriz relacionada à aceleração inercial. Visto que  $D(q)$  é sempre não singular, pode-se reescrever a expressão (3.12) da seguinte maneira,

$$\ddot{q} = D^{-1}(q)[\tau(q) - h(q, \dot{q}) - c(q)] \quad (3.13)$$

O modelo dinâmico da expressão (3.13) consiste de equações diferenciais de segunda ordem para cada uma das juntas, portanto a ordem diferencial deste sistema não-linear é  $d_i = 2$ . Tratando cada variável de junta  $q_i(t)$  como uma variável de saída, a expressão (3.13) pode ser escrita conforme a expressão (3.1),

$$\begin{aligned} \ddot{y} = \ddot{q} &= D^{-1}(q)[\tau(q) - h(q, \dot{q}) - c(q)] \\ &= D^{-1}(q)[-h(q, \dot{q}) - c(q)] + D^{-1}(q)\tau(q) \end{aligned} \quad (3.14)$$

e

$$\begin{aligned} f(x) &= D^{-1}(q)[-h(q, \dot{q}) - c(q)] \\ g(x) &= D^{-1}(q) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Considerando  $v = \ddot{q}$  e  $u = \tau(q)$ , a lei de controle é definida como

$$\begin{aligned} u &= D(q)\{v - D^{-1}(q)[-h(q, \dot{q}) - c(q)]\} \\ u &= D(q)v + h(q, \dot{q}) + c(q) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Considerando o modelo e utilizando um controle PD, temos

$$\begin{aligned} v &= \ddot{q}_r + Kd(\dot{q}_r - \dot{q}) + Kp(q_r - q) \\ u &= D^*(q)(\ddot{q}_r + Kd(\dot{q}_r - \dot{q}) + Kp(q_r - q)) + h^*(q, \dot{q}) + c^*(q) \\ u &= D^*(q)\ddot{q}_r + D^*(q)Kd(\dot{q}_r - \dot{q}) + D^*(q)Kp(q_r - q) + h^*(q, \dot{q}) + c^*(q) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Igualando as expressões (3.16) e (3.17), se  $D^* = D$ ,  $h^* = h$  e  $c^* = c$ , então tem-se

$$\begin{aligned}
D(q) + h(q, \dot{q}) + c(q) &= D^*(q)\ddot{q}_r + D^*(q)Kd(\dot{q}_r - \dot{q}) + D^*(q)Kp(q_r - q) + h^*(q, \dot{q}) + c^*(q) \\
D(q)\ddot{q}_r + D(q)Kd(\dot{q}_r - \dot{q}) + D(q)Kp(q_r - q) &= 0 \\
\ddot{e}(q) + Kd\dot{e}(q) + Kpe(q) &= 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Conforme as expressões (3.17) e (3.18) obtém-se a expressão de controle utilizada no trabalho, considerando

$$\tau(q) = D(q)\ddot{q}_r + h(q, \dot{q}) + c(q) \tag{3.19}$$

tem-se

$$u = \tau(q) + Kd(\dot{q}_r - \dot{q}) + Kp(q_r - q) \tag{3.20}$$

## 4 – Simulação

Neste capítulo será apresentado o programa desenvolvido em C++ para gerar o modelo dinâmico de um manipulador robótico e realizar a simulação, utilizando controle linearizante.

O programa foi desenvolvido para modelar manipuladores de  $n$  juntas, porém, neste trabalho, a simulação foi realizada usando um manipulador de 2 juntas. A modelagem matemática utilizada no programa está baseada na formulação de Lagrange-Euler descrita no Capítulo 2.

### 4.1 – Descrição das Classes e Funções Usadas no Programa

O programa foi desenvolvido da seguinte maneira, possui uma classe com funções genéricas do modelo dinâmico do braço robótico, uma classe com funções específicas do manipulador de duas juntas, uma classe para manipulação de matrizes, uma classe para manipulação de vetores coluna, uma classe para manipulação de vetores linha, uma classe de espaço de estados e uma classe do manipulador.

A classe com funções genéricas do modelo dinâmico do manipulador é denominada ROBOGEN. Esta classe possui as seguintes funções e parâmetros:

- `transf(double a,double alpha,double d,double theta)`
  - ⇒ Descrição: a função é definida através da expressão (2.5);
  - ⇒ Entradas: parâmetros de Denavit-Hartenberg ( $a$ ,  $\alpha$ ,  $d$  e  $\theta$ );
  - ⇒ Retorna: matriz de transformação homogênea  ${}^{i-1}A_i$ , definida na função pela matriz A.
- `transfinv(double a,double alpha,double d,double theta)`
  - ⇒ Descrição: a função é definida pela matriz inversa da que é apresentada na expressão (2.5);
  - ⇒ Entradas: parâmetros de Denavit-Hartenberg ( $a$ ,  $\alpha$ ,  $d$  e  $\theta$ );
  - ⇒ Retorna: matriz de transformação homogênea inversa  ${}^iA_{i-1}$ , definida na função pela matriz A.

- `homogen_base(int i0,int i1,const CVECTOR &q)`
  - ⇒ Descrição: a função é usada para gerar a matriz de transformação homogênea do sistema de coordenadas  $i0$  para o sistema de coordenadas  $i1$ , que podem ou não ser consecutivos, ela faz a chamada da função `homogen(int i,const CVECTOR &q)` definida na classe JANUS2;
  - ⇒ Entradas: índice do sistema de coordenadas inicial ( $i0$ ), índice do sistema de coordenadas final ( $i1$ ) e o vetor de posição angular  $q$ ;
  - ⇒ Retorna: matriz de transformação homogênea  ${}^{i0}A_{i1}$ , definida na função pela matriz  $T$ .
- `q_deriva(int i)`
  - ⇒ Descrição: a função é definida através das expressões (2.7) e (2.8);
  - ⇒ Entrada: recebe o tipo de junta, se é rotacional (0) ou prismática (1);
  - ⇒ Retorna: matriz  $Q$  respectiva ao tipo de junta, definida na função pela matriz  $Q_t$ .
- `efeitoi_j(int i,int j,const CVECTOR &q)`
  - ⇒ Descrição: a função é definida através da expressão (2.11), que representa o efeito da junta  $j$  em todos os pontos sobre o elo  $i$ . Nesta função é feita a chamada das funções `homogen_base(int i0,int i1,const CVECTOR &q)` e `q_deriva(int i)`;
  - ⇒ Entradas: recebe o número do elo  $i$ , número da junta  $j$  e o vetor de posição angular  $q$ ;
  - ⇒ Retorna: matriz  $U_{ij}$ .
- `feitomov_jk_i(int i,int j,int k,const CVECTOR &q)`
  - ⇒ Descrição: a função é definida através da expressão (2.13), que representa efeito interativo do movimento das juntas  $j$  e  $k$  em todos os pontos sobre o elo  $i$ . Nesta função é feita a chamada das funções `homogen_base(int i0,int i1,const CVECTOR &q)` e `q_deriva(int i)`;
  - ⇒ Entradas: recebe o número do elo  $i$ , número das juntas  $j$  e  $k$ , e o vetor de posição angular  $q$ ;
  - ⇒ Retorna: matriz  $U_{ijk}$ .
- `inercia(double m,double xcm, double ycm, double zcm,const CVECTOR &I)`
  - ⇒ Descrição: a função é definida através da expressão (2.18), e gera a matriz de

inércia  $J$ ;

⇒ Entradas: valor da massa  $m$ , valor das coordenadas do centro de massa ( $x_{cm}$ ,  $y_{cm}$ ,  $z_{cm}$ ) e a matriz do momento de inércia  $I$ ;

⇒ Retorna: matriz  $J$

- `elem_aceleracao(int i,int k,const CVECTOR &q)`

⇒ Descrição: a função representa o cálculo de cada elemento da matriz  $D(q)$  que é definido pela expressão (2.26). Nesta é feita a chamada da função `efeitoi_j(int i,int j,const CVECTOR &q)` desta classe e da função `minercia(int i)` definida na classe JANUS2;

⇒ Entradas: número da junta  $i$  e  $k$ , e o vetor de posição  $q$ ;

⇒ Retorna: elemento  $D_{ik}$  da matriz  $D(q)$ , definida por  $D\_Tr$ .

- `aceleracao(const CVECTOR &q)`

⇒ Descrição: a função é usada para montar a matriz  $D(q)$ . Ela faz a chamada da função `elem_aceleracao(int i,int k,const CVECTOR &q)` que passa o elemento  $D_{ik}$ ;

⇒ Entrada: vetor de posição  $q$ ;

⇒ Retorna: matriz  $D(q)$ , definida pela matriz  $D$ .

- `elem_Fcent_Coriol(int i,int k,int m,const CVECTOR &q)`

⇒ Descrição: a função representa a expressão (2.28). Nesta é feita a chamada das funções `efeitoi_j(int i,int j,const CVECTOR &q)` e `efeitomov_jk_i(int i,int j,int k,const CVECTOR &q)` desta classe, e da função `minercia(int i)` definida na classe JANUS2;

⇒ Entradas: número do elo  $i$  e das juntas  $k$  e  $m$ , e o vetor de posição  $q$ ;

⇒ Retorna: elemento  $h_{ikm}$ , definida por  $h\_Tr$ .

- `Fcent_Coriol(const CVECTOR &q,const CVECTOR &dq)`

⇒ Descrição: representa a expressão (2.27) e é usada para montar o vetor  $h(q, \dot{q})$ . Ela faz a chamada da função `elem_Fcent_Coriol(int i,int k,int m,const CVECTOR &q)` que passa o elemento  $h_{ikm}$ ;

⇒ Entradas: vetor de posição  $q$  e vetor de velocidade  $dq$ ;

⇒ Retorna: vetor  $h(q, \dot{q})$ , definida pelo vetor  $h$ .

- `calc_Fgravit(int i,double m,double xcm,double ycm,double zcm,const LVECTOR &g,const CVECTOR &q)`  
 ⇒ Descrição: a função representa a expressão (2.29). Nesta é feita a chamada das funções `efeitoi_j(int i,int j,const CVECTOR &q)`;  
 ⇒ Entradas: número da junta  $i$ , massa  $m$  da junta  $i$ , as coordenadas do centro de massa ( $xcm, ycm, zcm$ ) do elo  $i$ , o vetor gravidade  $g$ , e o vetor de posição  $q$ ;  
 ⇒ Retorna: valor referente à força gravitacional da junta  $i$ , definido por  $c_{aux}$ .
- `Fgravit(const CVECTOR &q)`  
 ⇒ Descrição: a função monta o vetor  $c(q)$ . Nesta é feita a chamada da função `elem_Fgravit(int i,const CVECTOR &q)` definida na classe JANUS2;  
 ⇒ Entrada: vetor de posição  $q$ ;  
 ⇒ Retorna: vetor da força gravitacional, definido pelo vetor  $c$ .
- Constante ROTACIONAL: 0 quando a junta for rotacional.
- Constante ROTACIONAL: 1 quando a junta for prismática.
- Constante GRAVITY: aceleração da gravidade de  $9.80665 \text{ m/s}^2$ .

Foi criada uma classe com funções e parâmetros específicos para um manipulador de 2 juntas, esta classe foi denominada JANUS2. A classe JANUS2 possui as seguintes funções e parâmetros:

- `homogen(int i,const CVECTOR &q)`  
 ⇒ Descrição: a função recebe o número da junta  $i$  e faz a chamada da função `transf(double a,double alpha,double d,double theta)` passando todos os parâmetros exigidos relativos a junta  $i$  e devolve a matriz de transformação homogênea  ${}^{i-1}A_i$ ;  
 ⇒ Entradas: número da junta  $i$  e vetor de posição  $q$ ;  
 ⇒ Retorna: matriz de transformação homogênea  ${}^{i-1}A_i$  para junta  $i$ , definido pelo vetor  $T$ .
- `homogen_inv(int i,const CVECTOR &q)`  
 ⇒ Descrição: a função recebe o número da junta  $i$  e faz a chamada da função `transfinv(double a,double alpha,double d,double theta)` passando todos os

parâmetros exigidos relativos a junta  $i$  e devolve a matriz de transformação homogênea inversa  ${}^iA_{i-1}$ ;

⇒ Entradas: número da junta  $i$  e vetor de posição  $q$ ;

⇒ Retorna: matriz de transformação homogênea inversa  ${}^iA_{i-1}$  para junta  $i$ , definido pelo vetor  $T$ .

- `int tipo_junta(int i)`

⇒ Descrição: a função quando chamada retorna se a junta 1 ou 2 é rotacional ou prismática;

⇒ Entrada: número da junta  $i$ ;

⇒ Retorna: TIPO\_JUNTA1 ou TIPO\_JUNTA2.

- `momento(double m,double l,double h,double w)`

⇒ Descrição: a função é definida através da expressão (2.33);

⇒ Entradas: massa  $m$  e as dimensões  $l$ ,  $h$  e  $w$  respectivas aos eixos coordenados  $x$ ,  $y$  e  $z$  da junta  $i$ ;

⇒ Retorna: matriz momento de inércia  $I$  do elo  $i$ .

- `minercia(int i)`

⇒ Descrição: a função recebe o número da junta  $i$ , e chama as funções `momento(double m,double l,double h,double w)` e `inercia(double m,double xcm, double ycm, double zcm,const CVECTOR &I)` as quais são passados os parâmetros requisitados pelas funções referentes a junta em questão;

⇒ Entrada: número da junta  $i$ ;

⇒ Retorna: matriz de inércia  $J_i$  do elo  $i$ , definida pela matriz  $J$ .

- `elem_Fgravit(int i,const CVECTOR &q)`

⇒ Descrição: a função recebe o número da junta  $i$ , e chama a função `calc_Fgravit(int i,double m,double xcm,double ycm,double zcm,const LVECTOR &g,const CVECTOR &q)` a qual são passados os parâmetros requisitados pela função referente a junta em questão;

⇒ Entradas: número da junta  $i$  e vetor de posição  $q$ ;

⇒ Retorna: retorna o resultado da função `calc_Fgravit(int i,double m,double xcm,double ycm,double zcm,const LVECTOR &g,const CVECTOR &q)`.

- Constante  $DH\_A1 = a_1$  da junta 1.
- Constante  $DH\_A2 = a_2$  da junta 2.
- Constante  $DH\_D1 = d_1$  da junta 1.
- Constante  $DH\_D2 = d_2$  da junta 2.
- Constante  $DH\_ALPHA1 = \alpha_1$  da junta 1.
- Constante  $DH\_ALPHA2 = \alpha_2$  da junta 2.
- Constante  $M1$  = massa da junta 1.
- Constante  $M2$  = massa da junta 2.
- Constante  $L1$  = dimensão no eixo  $x$  do elo 1.
- Constante  $L2$  = dimensão no eixo  $x$  do elo 2.
- Constante  $H1$  = dimensão no eixo  $y$  do elo 1.
- Constante  $H2$  = dimensão no eixo  $y$  do elo 2.
- Constante  $W1$  = dimensão no eixo  $z$  do elo 1.
- Constante  $W2$  = dimensão no eixo  $z$  do elo 2.
- Constante  $XCM1$  = posição do centro de massa no eixo  $x$  do elo 1.
- Constante  $XCM2$  = posição do centro de massa no eixo  $x$  do elo 2.
- Constante  $YCM1$  = posição do centro de massa no eixo  $y$  do elo 1.
- Constante  $YCM2$  = posição do centro de massa no eixo  $y$  do elo 2.
- Constante  $ZCM1$  = posição do centro de massa no eixo  $z$  do elo 1.
- Constante  $ZCM2$  = posição do centro de massa no eixo  $z$  do elo 2.
- Constante  $TIPO\_JUNTA1$  = junta 1 é ROTACIONAL ou PRISMATICA
- Constante  $TIPO\_JUNTA2$  = junta 2 é ROTACIONAL ou PRISMATICA

As funções utilizadas nesta classe são somente para passar os parâmetros de cada junta para as funções da classe ROBOGEN, e para passar vetores e matrizes para a classe MANIPULATOR.

A classe MATRIX é utilizada para manipulação de matrizes realizando operações matriciais.

As classes CVECTOR e LVECTOR utilizadas para manipulação de vetores coluna e vetores linhas, respectivamente, herdam as funções da classe MATRIX. Então as mesmas



operações realizadas por uma matriz  $n \times n$  podem ser realizadas por vetor coluna  $n \times 1$  ou por vetor linha  $1 \times n$ .

A classe SS é utilizada para tratar as variáveis em espaço de estados e é usada pela classe MANIPULATOR que herda suas funções.

A classe MANIPULATOR trata do modelo dinâmico do manipulador, onde recebe as matrizes M, V e G.

## 4.2 – Descrição da Rotina de Controle para a Simulação

Definidas as classes, o programa principal realiza a simulação do movimento do manipulador para pré-determinadas referências de posição, velocidade e aceleração (qr,dqr e ddqr, respectivamente).

O programa é baseado na modelagem dinâmica do manipulador através das equações do movimento de Lagrange-Euler e controle linearizante por realimentação de estados como foi citado anteriormente. Na seção 3.4 é apresentado o desenvolvimento matemático do controle linearizante de um manipulador com dois elos, estas expressões foram utilizadas no programa de simulação para realizar o controle do manipulador.

No programa a matriz  $D(q)$  é definida pela matriz M, o vetor  $h(q, \dot{q})$  é definido pelo vetor V, o vetor  $c(q)$  é definido pelo vetor G, o vetor posição é definido pelo vetor q, o vetor velocidade é definido pelo vetor dq e o vetor aceleração é definido pelo vetor ddq.

Os resultados das simulações serão apresentados no Capítulo 5.

## 5 – Resultados

Foram feitas simulações utilizando os parâmetros de 2 juntas do manipulador robótico JANUS.

Os parâmetros são apresentados na tabela 5.1.

$I$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$	$m_i$	$L$	$H$	$W$
1	0	0.3m	0	3 kg	0.3m	0.07m	0.07m
2	0	0.125m	0	1 kg	0.125m	0.05m	0.05m

TABELA 5.1 Parâmetros do manipulador JANUS

As simulações utilizaram um período de amostragem de  $T=0.01s$  e tempo final de 50s.

Primeiramente foram feitas simulações para validar o modelo, com a posição inicial do manipulador em  $q_1 = 0$  e  $q_2 = 0$  e  $u_1 = 0$  e  $u_2 = 0$ , deixando somente a ação gravitacional atuar no braço. Foram feitas duas simulações com os mesmos parâmetros, porém com tempos finais diferentes para poder avaliar o movimento do braço com mais clareza. A primeira simulação teve duração de 1s e a segunda de 50s. Obteve-se os seguintes resultados que validaram o modelo:

- Simulação para o tempo final de 1s:

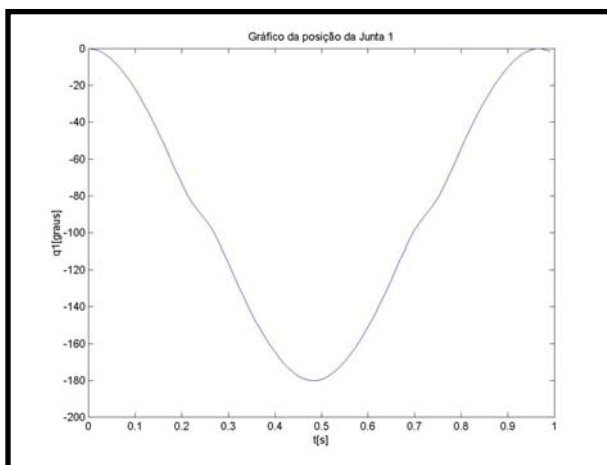


FIGURA 5.1 Posição da junta 1

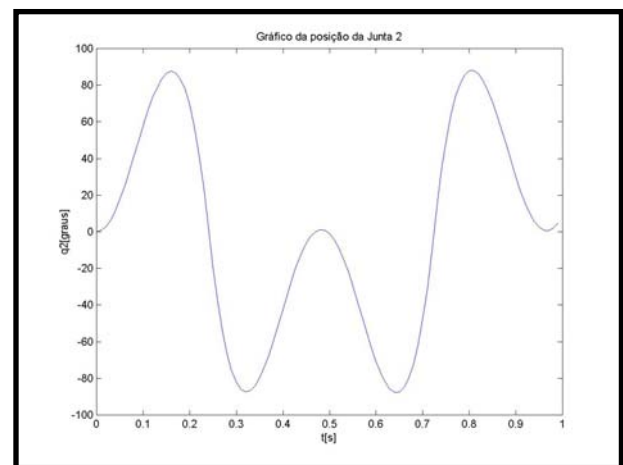


FIGURA 5.2 Posição da junta 2

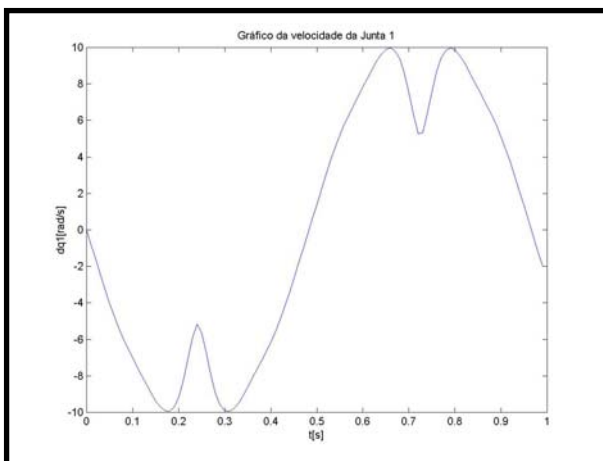


FIGURA 5.3 Velocidade da junta 1

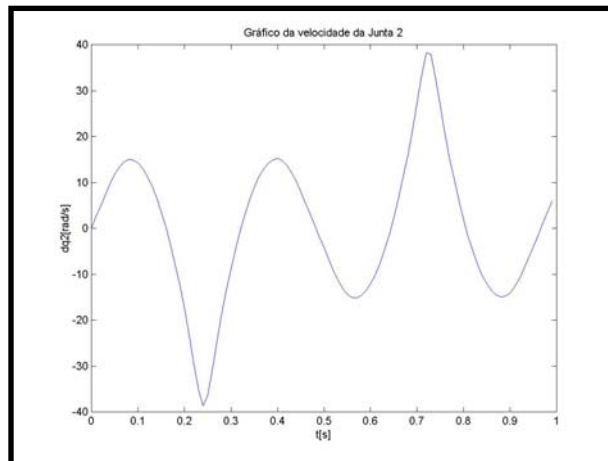


FIGURA 5.4 Velocidade da junta 2

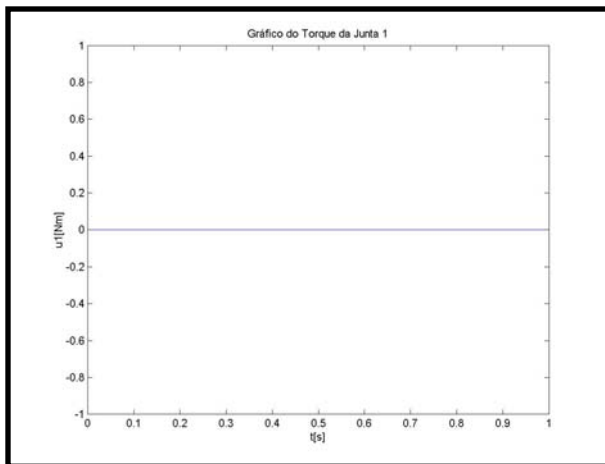


FIGURA 5.5 Controle da junta 1

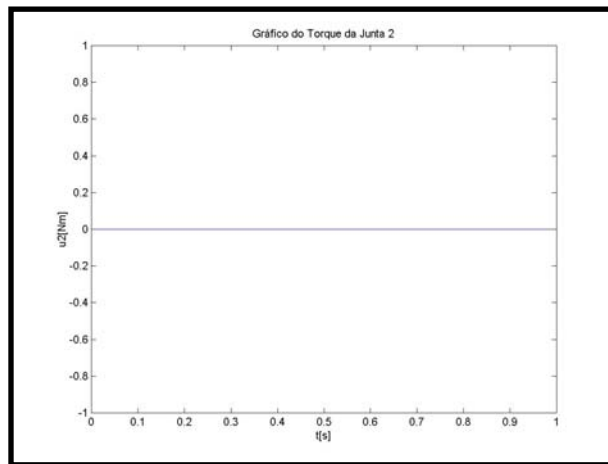


FIGURA 5.6 Controle da junta 2

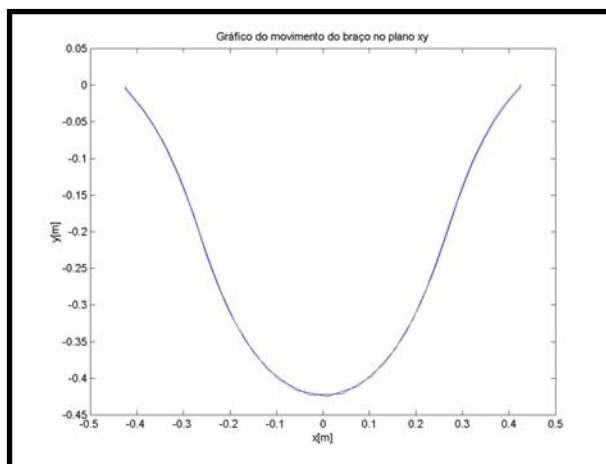


FIGURA 5.7 Movimento do manipulador no plano xy

- Simulação para o tempo final de 50s:

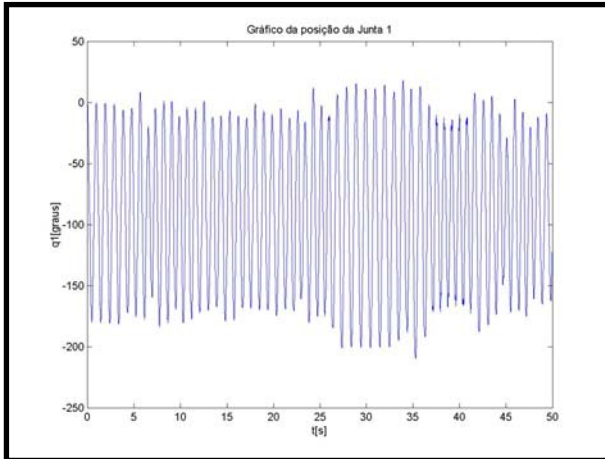


FIGURA 5.8 Posição da junta 1

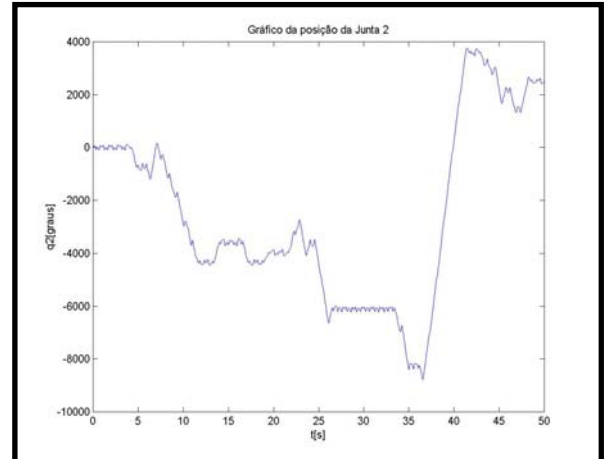


FIGURA 5.9 Posição da junta 2

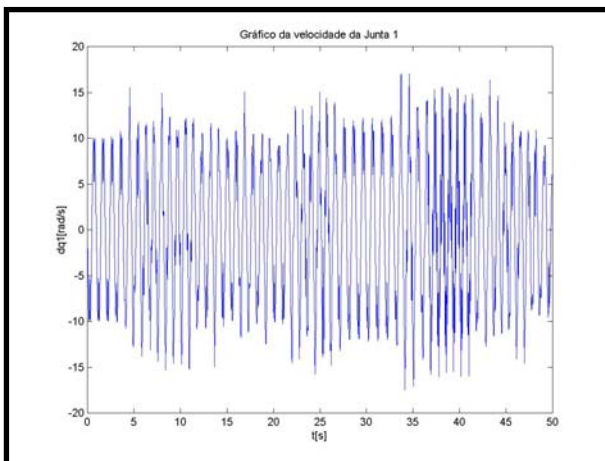


FIGURA 5.10 Velocidade da junta 1

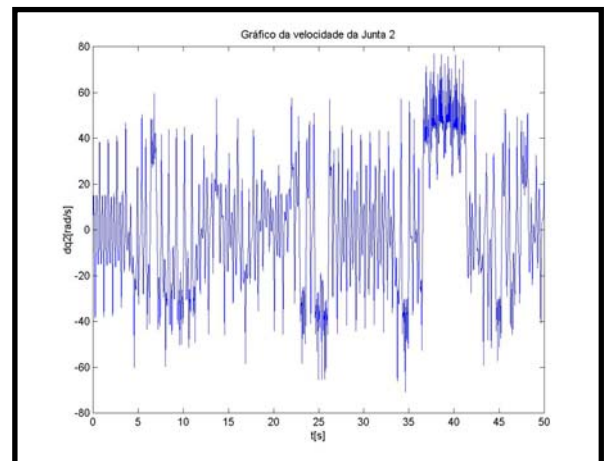


FIGURA 5.11 Velocidade da junta 2

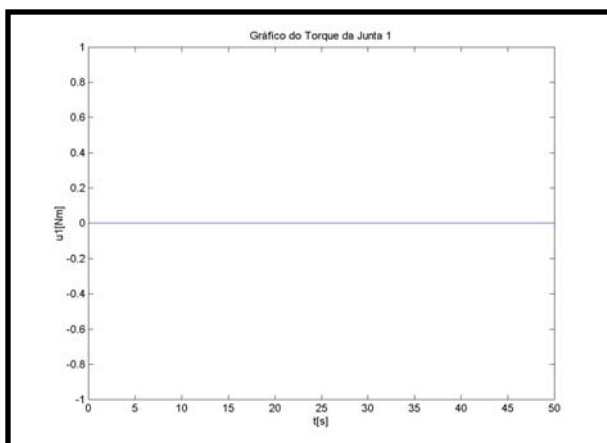


FIGURA 5.12 Controle da junta 1

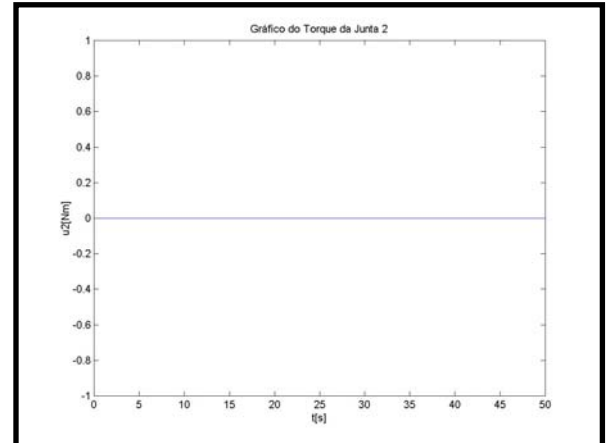


FIGURA 5.13 Controle da junta 2

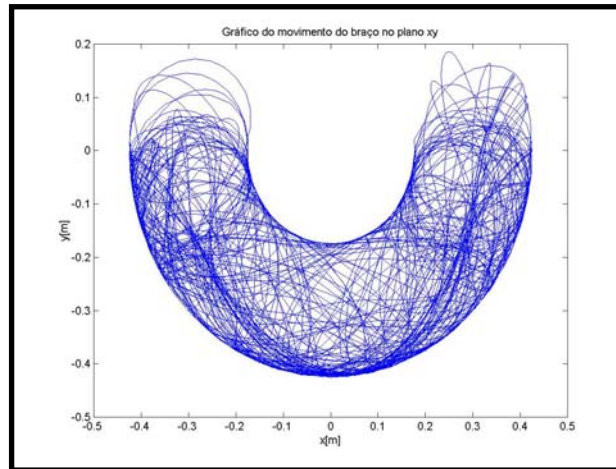


FIGURA 5.14 Movimento do manipulador no plano xy

Já na primeira simulação, pudemos validar o modelo, pois a Figura 5.7 mostra o movimento pendular do braço com os dois elos e, também, se pode verificar que a amplitude do movimento confere com o tamanho dos elos.

Agora, serão apresentados os resultados das simulações que se utilizou controle. O controle linearizante é alimentado por controlador PD, este foi projetado para um tempo de estabilização de  $t_s=25s$  e  $\xi = 0.8$ , resultando no ganho  $K_p = 0.063165$  e o ganho  $K_d = 0.402124$ .

Foram realizadas duas simulações, a primeira com a referência de  $\theta_1 = \theta_2 = 10^\circ$  e a segunda com a referência de  $\theta_1 = 90^\circ$  e  $\theta_2 = 0^\circ$ . Em ambas as simulações usou-se o valor 0 para as referências de velocidade e aceleração.

- Simulação para  $\theta_1 = \theta_2 = 10^\circ$ :

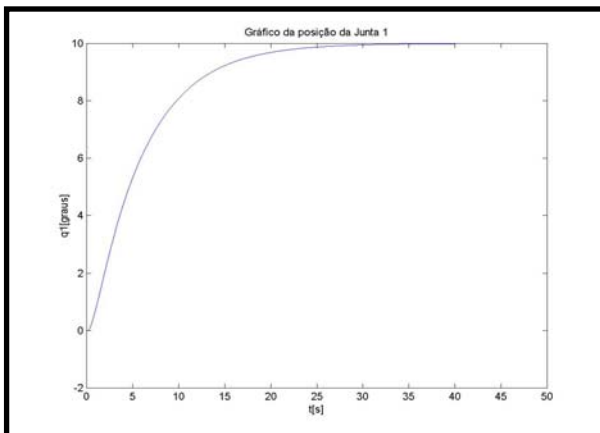


FIGURA 5.15 Posição da junta 1

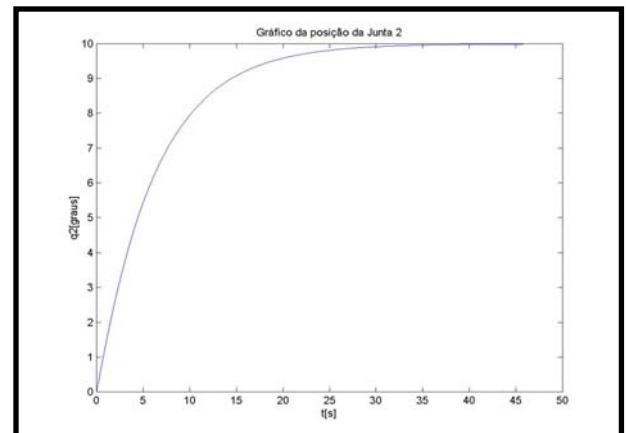


FIGURA 5.16 Posição da junta 2

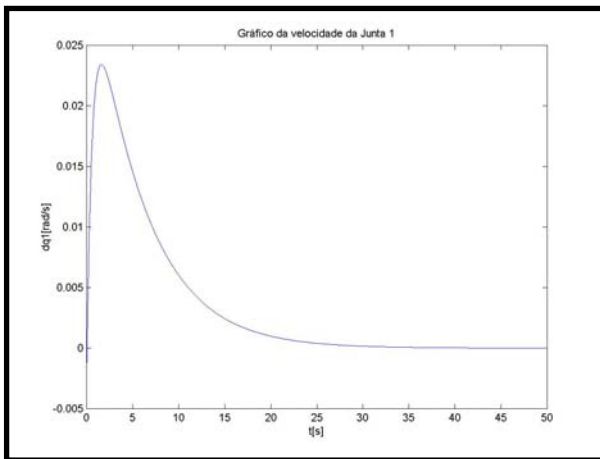


FIGURA 5.17 Velocidade da junta 1

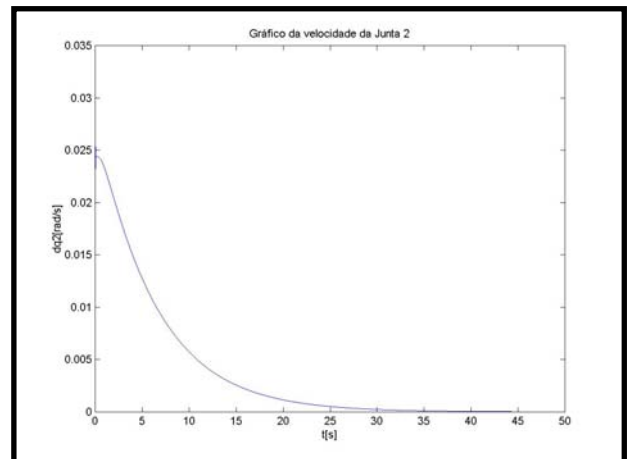


FIGURA 5.18 Velocidade da junta 2

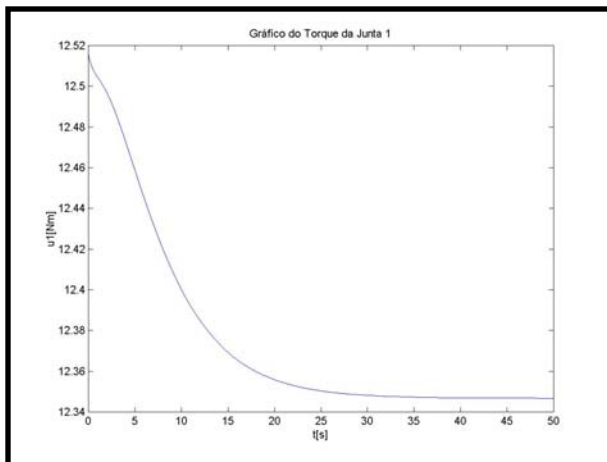


FIGURA 5.19 Controle da junta 1

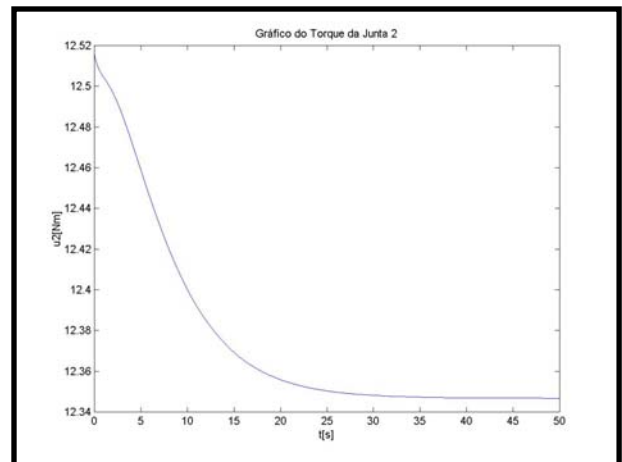


FIGURA 5.20 Controle da junta 2

- Simulação para  $\theta_1 = 90^\circ$  e  $\theta_2 = 0^\circ$ ;

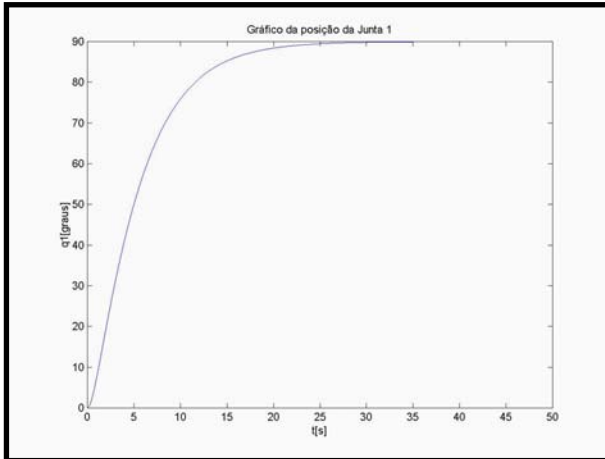


FIGURA 5.21 Posição da junta 1

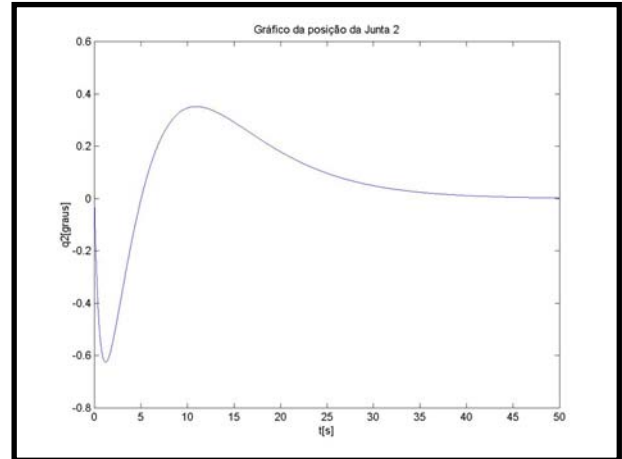


FIGURA 5.22 Posição da junta 2

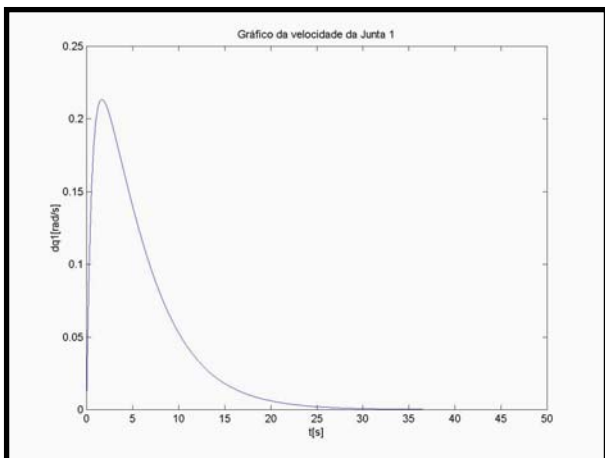


FIGURA 5.23 Velocidade da junta 1

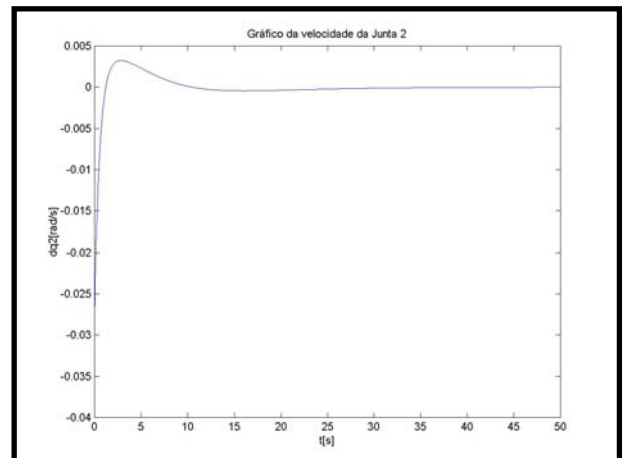


FIGURA 5.24 Velocidade da junta 2

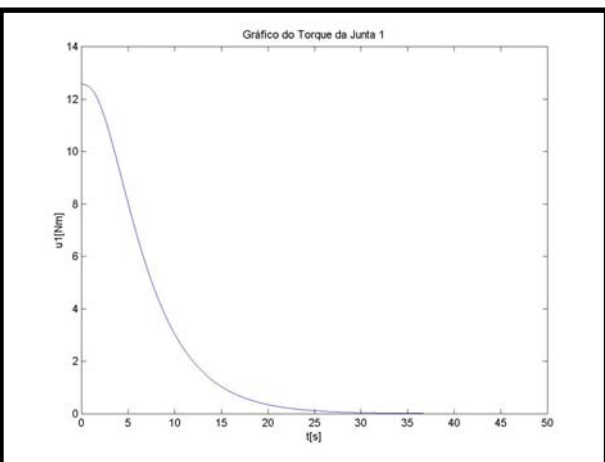


FIGURA 5.25 Controle da junta 1

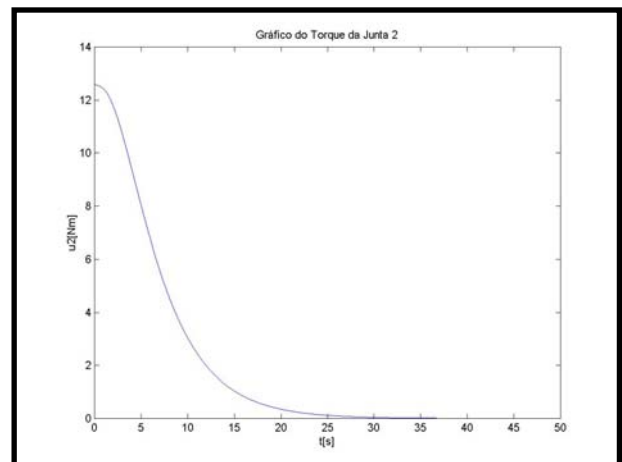


FIGURA 5.26 Controle da junta 2

Pode-se perceber que o manipulador segue as referências de posição, velocidade e aceleração e estabiliza no tempo desejado.



## 6 – Conclusão

Verificou-se, como citado no texto, que as equações do movimento de Lagrange-Euler são simples e sistemáticas, o desenvolvimento matemático foi de fácil resolução, facilitando a aplicação destas expressões em linguagem de programação C++.

A definição do projeto de controle linearizante, depois de obtido o modelo dinâmico do manipulador através das equações do movimento de Lagrange-Euler no Capítulo 2, foi rápida e objetiva. Através do equacionamento da técnica de linearização exata por realimentação e da aplicação desta em manipuladores robóticos, como descrito no Capítulo 3, a obtenção da lei de controle do controlador linearizante foi direta, como pôde ser visto na seção 3.3.

Com o modelo dinâmico e o controlador definidos, foram feitas simulações utilizando os parâmetros do manipulador robótico Janus utilizando somente 2 juntas. Nas simulações para validação do modelo pode-se comprovar que a modelagem dinâmica das equações do movimento de Lagrange-Euler desenvolvidas no Capítulo 2 para um manipulador de 2 juntas são válidas e representam o movimento de tal manipulador conforme pode ser visto nas figuras do Capítulo 5.

Nas simulações utilizando o controle linearizante percebeu-se, através das figuras do Capítulo 5, que o controlador está bem projetado; conforme apresentado, a saída do sistema segue a referência aplicada a ele, obedecendo ao tempo de estabilização e sobressinal definidos na construção do controlador.

## 7 – Referências Bibliográficas

1. FU, K. S. et al. Robotics: control, sensing, vision, and intelligence. New York: McGraw-Hill Book, 1987.
2. HAFFNER, J. F. et al. A Multilayer Perceptron Replaces a Feedback Linearization Controller in a Nonlinear Servomechanism. PUCRS. Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 1998.
3. ISIDORI, A. Nonlinear Control Systems. 3ed. London: Springer-Verlag, 1995.
4. LAGES, W. F. et al. Controle Linearizante de uma Plataforma Móvel Empregando Realimentação Visual. IEEE.
5. KHALIL, H. K. Nonlinear Systems. 2ed. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
6. KOIVO, A. J. Fundamentals for Control of Robotic Manipulators. New York: Jonh Wiley & Sons, 1989.
7. MARINO, R.; TOMEI, P. Nonlinear Control Design: geometric, adaptative and robust. Rome: Prentice Hall, 1992.
8. MOLINA. Apostila de Introdução à Dinâmica e ao Controle de Mnpuladores Robóticos. Graduação de Engenharia de Controle e Automação. PUCRS, 2001.
9. RAFFO, G. V. Controle de um Servomecanismo Não-Linear usando Controlador PID e Linearizante. Graduação de Engenharia de Controle e Automação. PUCRS, 2002.
10. SASTRY, S. Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control. New York: Springre-Verlag, 1999.
11. TEIXEIRA, R. A. et al. Controle de um Manipulador PUMA 560 Utilizando Redes Neurais Artificiais com Adaptação em Tempo Real. UFMG, 1998.