

UFRGS-DELET

CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM AUTOMAÇÃO
INDUSTRIAL

DISCIPLINA: CONTROLE LINEAR AVANÇADO

Métodos Analíticos de Ajuste de Controladores PID

Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.
Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella

Sumário

1	Alocação de Pólos	3
1.1	Escolha dos pólos de $T(s)$	3
1.1.1	Alocação arbitrária dos pólos: a equação diofantina	4
1.2	Método do Lugar das Raízes	10
1.2.1	Definição do Lugar das Raízes	15
1.2.2	Regras de Construção	16
1.2.3	Aplicação a Sistemas Realimentados	19
1.3	Ajuste pelo Lugar das Raízes	22

Capítulo 1

Alocação de Pólos

1.1 Escolha dos pólos de $T(s)$

No projeto de um sistema de controle muitas vezes tem-se especificações para o desempenho transitório, isto é, o sistema deve ser projetado de forma que seu tempo de estabilização e máximo sobrepasso sejam menores do que um valor previamente especificado. Estas especificações usualmente decorrem das características operacionais do processo a ser controlado.

O desempenho transitório está associado aos pólos da função de transferência $T(s) = \frac{y(s)}{r(s)}$. Quando caracterizada a dominância de um pólo ou par de pólos, os critérios de desempenho estão relacionados com a posição dos pólos dominantes de acordo com as relações aproximadas da tabela 1.1.

Assim, as especificações de desempenho transitório se traduzem em restrições sobre as posições dos pólos da função de transferência de malha fechada $T(s)$. A satisfação das especificações de regime transitório é então atingida escolhendo posições adequadas para os pólos de malha fechada de acordo com as expressões na tabela (1.1) e ajustando o PID de forma que os pólos de malha fechada efetivamente sejam alocados nestas posições. A este procedimento de ajuste dá-se o nome de *alocação de pólos*.

As expressões da tabela 1.1 são válidas quando um pólo ou par de

Tabela 1.1: Desempenho transitório em função da posição dos pólos dominantes.

	Pólo real $-p_d$	Par de pólos complexos $-\sigma \pm j\omega$
t_s	$\frac{4}{p_d}$	$\frac{4}{\sigma}$
$Mo\%$	0%	$100e^{\xi\pi\sqrt{1-\xi^2}}\%$ with $\xi \triangleq \frac{\sigma}{\sqrt{\omega^2+\sigma^2}}$

pólos é dominante, o que ocorre quando um pólo ou par de pólos está muito mais próximo do eixo imaginário do que os pólos restantes e não há zeros próximos. Em geral procura-se escolher as posições dos pólos de malha fechada de forma a provocar a dominância. Quando isto não é possível ou conveniente então estas expressões representam um ponto de partida para um processo de tentativa e erro na escolha da posição dos pólos.

Nem sempre é possível alocar os pólos de malha fechada em posições arbitrariamente escolhidas com um controlador PID. Quando isto não é possível é necessário escolher as alocações dos pólos dentre aquelas possíveis de serem alocadas por um controlador PID, o que pode ser feito por meio do método do Lugar das Raízes, como apresentado na Seção 1.3.

1.1.1 Alocação arbitrária dos pólos: a equação diofantina

Considere que o modelo do processo é dado por uma função de transferência estritamente própria¹ de segunda ordem:

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (1.1)$$

Funções de transferência mais genéricas serão tratadas posteriormente.

O controlador PID tem a função de transferência ideal

$$C(s) = K \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s} \quad (1.2)$$

onde

$$c_2 = K T_d \quad (1.3)$$

$$c_1 = K \quad (1.4)$$

$$c_0 = \frac{K}{T_i} \quad (1.5)$$

O pólo que limita o ganho de alta frequência do derivativo é desconhecido para o ajuste. Para efeitos de simplificação de projeto, assume-se que o mesmo está em uma frequência suficientemente alta de forma que sua influência na zona de baixas frequências, onde a ação do controlador será predominante, é desprezível. É importante notar também que na maioria dos controladores PID comerciais o valor do pólo limitador é fixo pelo fabricante e seu valor nem sempre é informado. Obviamente, se o pólo for

¹Uma função de transferência estritamente própria é aquela em que o grau do polinômio do numerador é menor do que o grau do polinômio do denominador.

conhecido e/ou puder ser alterado (for um parâmetro de projeto), esta informação pode ser facilmente incorporada na análise seguindo a mesma linha de raciocínio a ser apresentada na seqüência.

Considerando então $G(s)$ e $C(s)$ dadas respectivamente por (1.1) e (1.2), a função de transferência do sistema em malha fechada é dada por

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \\ &= \frac{b_1 c_2 s^3 + (b_1 c_1 + b_0 c_2) s^2 + (b_1 c_0 + b_0 c_1) s + b_0 c_0}{(b_1 c_2 + 1) s^3 + (b_1 c_1 + b_0 c_2 + a_1) s^2 + (b_1 c_0 + b_0 c_1 + a_0) s + b_0 c_0} \end{aligned}$$

O método de alocação de pólos consiste em determinar os parâmetros do controlador de tal forma que os pólos de $T(s)$ estejam em posições previamente especificadas. Os pólos assim escolhidos determinam o polinômio característico de malha fechada $Q(s)$. Sejam p_1 , p_2 e p_3 os valores escolhidos para os pólos de malha fechada, todos com parte real negativa. Então o polinômio desejado é

$$Q(s) = (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) = s^3 + q_2 s^2 + q_1 s + q_0 \quad (1.6)$$

$$q_2 = (|p_1| + |p_2| + |p_3|) \quad (1.7)$$

$$q_1 = |p_1||p_2| + |p_1||p_3| + |p_2||p_3| \quad (1.8)$$

$$q_0 = |p_1||p_2||p_3| \quad (1.9)$$

O ajuste do PID se resume a calcular os parâmetros c que satisfazem à equação abaixo, denominada equação diofantina:

$$(b_1 c_2 + 1) s^3 + (b_1 c_1 + b_0 c_2 + a_1) s^2 + (b_1 c_0 + b_0 c_1 + a_0) s + b_0 c_0 = (b_1 c_2 + 1) \cdot Q(s) \quad (1.10)$$

Igualando-se os coeficientes de mesmo grau devemos ter:

$$\begin{aligned} b_1 c_1 + b_0 c_2 &= (b_1 c_2 + 1) q_2 \\ b_1 c_0 + b_0 c_1 + a_0 &= (b_1 c_2 + 1) q_1 \\ b_0 c_0 &= (b_1 c_2 + 1) q_0 \end{aligned}$$

As variáveis c_2 , c_1 , c_0 , podem então facilmente serem obtidas através da solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} b_1 c_1 + (b_0 + b_1 q_2) c_2 &= b_1 q_2 \\ b_1 c_0 + b_0 c_1 + b_1 q_1 c_2 &= b_1 q_1 - a_0 \\ b_0 c_0 + b_1 q_0 c_2 &= b_1 q_0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Os parâmetros do PID podem então ser calculados a partir das equações (1.3)-(1.5)

$$K = c_1 \quad (1.12)$$

$$T_d = \frac{c_2}{K} \quad (1.13)$$

$$T_i = \frac{K}{c_0} \quad (1.14)$$

O ajuste do PID por alocação de pólos consiste portanto em proceder aos seguintes passos:

1. obter um modelo matemático de ordem menor ou igual a dois para o processo;
2. escolher os pólos de $T(s)$ para satisfazer as especificações de desempenho transitório;
3. calcular os coeficientes c resolvendo o sistema de equações (1.11);
4. calcular os parâmetros do controlador a partir de (1.12)-(1.14).

Exemplo 1.1 Considere o controle de velocidade por tensão de um motor CC. A função de transferência do processo é dada por

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{E_a(s)} = \frac{150}{s^2 + 50.1 s + 275} = \frac{150}{(s + 6.275)(s + 43.83)} \quad (1.15)$$

A constante de tempo dominante do processo é de 160 ms ($= \frac{1}{6.275}$), de forma que em malha aberta o processo apresenta um tempo de estabilização da ordem de 640 ms.

Deseja-se que o sistema em malha fechada seja capaz de seguir referências constantes com erro nulo em regime permanente e rejeição à perturbações de carga constantes. Como especificações de desempenho transitório coloca-se um tempo de estabilização desta mesma ordem, sendo aceitável uma pequena sobrepassagem: $t_s < 1$ s e $Mo < 10\%$. Estas especificações podem então ser satisfeitas com a utilização de um controlador PID determinado como segue.

Os pólos dominantes serão escolhidos reais, o que, se verificada a dominância, garantiria sobrepassagem nula. Para atender à especificação de t_s devemos ter $|p_d| > 4 \text{ s}^{-1}$. Vamos então alocar um pólo dominante em $p_1 = -5 \text{ s}^{-1}$ e os pólos restantes oito vezes maior (três oitavas acima), em $p_2 = p_3 =$

-40 s^{-1} . Assim temos que o polinômio característico desejado para o sistema controlado é

$$Q(s) = (s + 5)(s + 40)^2 = s^3 + 85 s^2 + 2000 s + 8000$$

Devemos então satisfazer:

$$s(s^2 + 50.1 s + 275) + 150(c_2 s^2 + c_1 s + c_0) = s^3 + 85 s^2 + 2000 s + 8000$$

Resolvendo o sistema de equações (1.11) obtém-se:

$$c_2 = 0.2327 \quad c_1 = 11.5 \quad c_0 = 53.33 \quad (1.16)$$

E, finalmente, calculando os parâmetros do controlador a partir de (1.12), (1.13) e (1.14) obtém-se:

$$K = 11.5 \quad T_i = 216 \text{ ms} \quad T_d = 20.2 \text{ ms} \quad (1.17)$$

As Figuras 1.1-1.2 ilustram o desempenho do sistema em malha fechada. O sistema está inicialmente operando a uma velocidade de 1.000 RPM com torque de carga nulo; em $t = 0.5 \text{ s}$ a referência de velocidade é aumentada para $\omega_{ref} = 1.100 \text{ RPM}$ e em $t = 2.5 \text{ s}$ um torque de carga de 10 Nm é aplicado. A velocidade $\omega(t)$ resultante é apresentada na Figura 1.1, enquanto que a Figura 1.2 apresenta o esforço de controle resultante, isto é, a tensão de armadura $E_a(t)$ aplicada ao motor. O desempenho obtido satisfaz aos requisitos e a tensão mantém-se dentro do limite físico de 400 V.

Teoricamente a resposta do sistema pode ser tornada tão rápida quanto desejado, pois os pólos de $T(s)$ podem ser alocados em qualquer posição do plano complexo. Porém existem restrições práticas, a principal delas referente ao esforço de controle. Suponha que para este mesmo sistema o pólo dominante é alocado em $p_1 = -10 \text{ s}^{-1}$, mantendo-se $p_2 = p_3 = -40 \text{ s}^{-1}$.

Devemos então ter:

$$s(s^2 + 50.1 s + 275) + 150(c_2 s^2 + c_1 s + c_0) = s^3 + 90 s^2 + 2400 s + 81600$$

da onde obtém-se: $c_0 = 106.667$, $c_1 = 14.167$, $c_2 = 0.266$. Calculando então os parâmetros do controlador, tem-se

$$K = 14.17 \quad T_i = 0.1328 \text{ s} \quad T_d = 18.8 \text{ ms}$$

As figuras 1.3 e 1.4 apresentam a resposta do sistema à mesma excitação anterior. Compare-se o desempenho transitório e o esforço de controle (E_a)

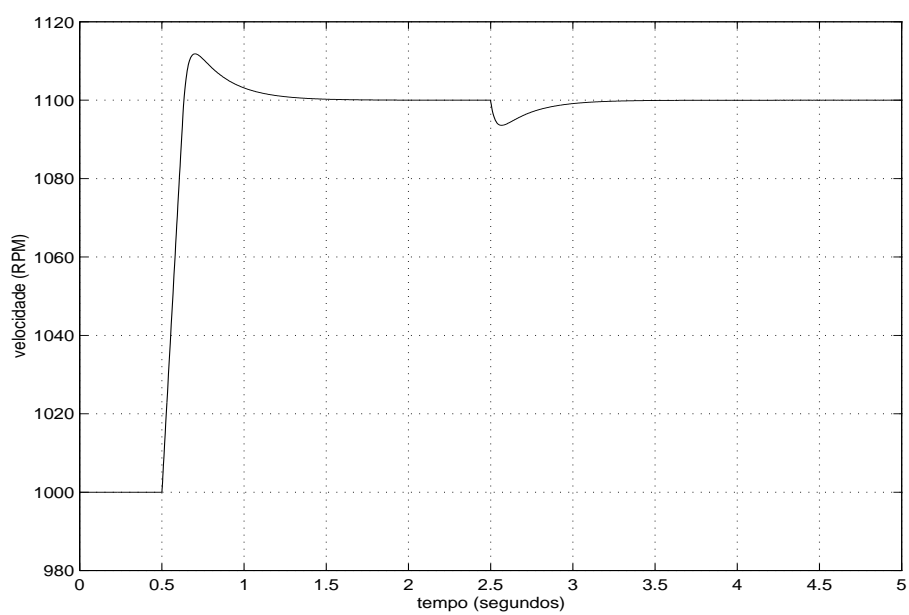


Figura 1.1: Velocidade do motor CC.

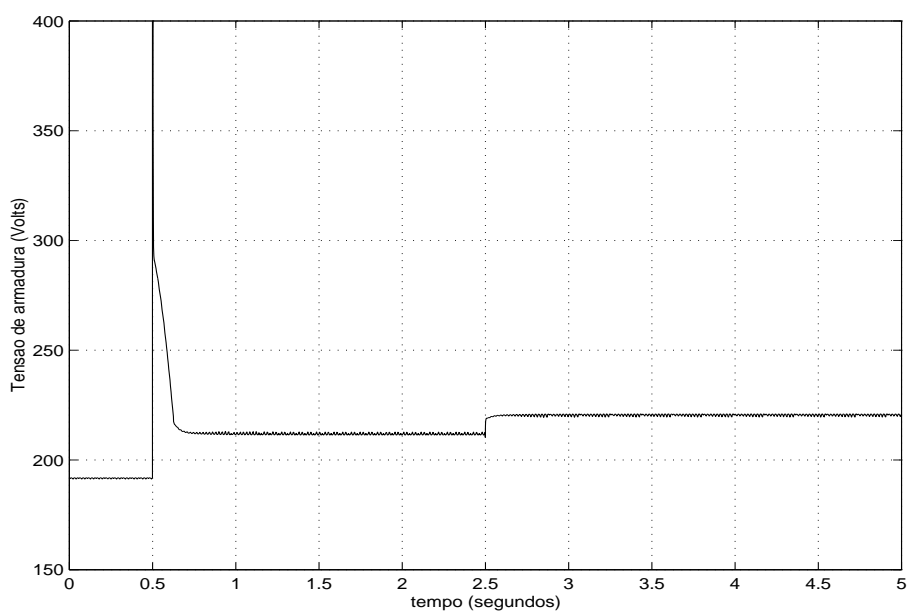


Figura 1.2: Tensão de armadura (variável manipulada) do motor CC.

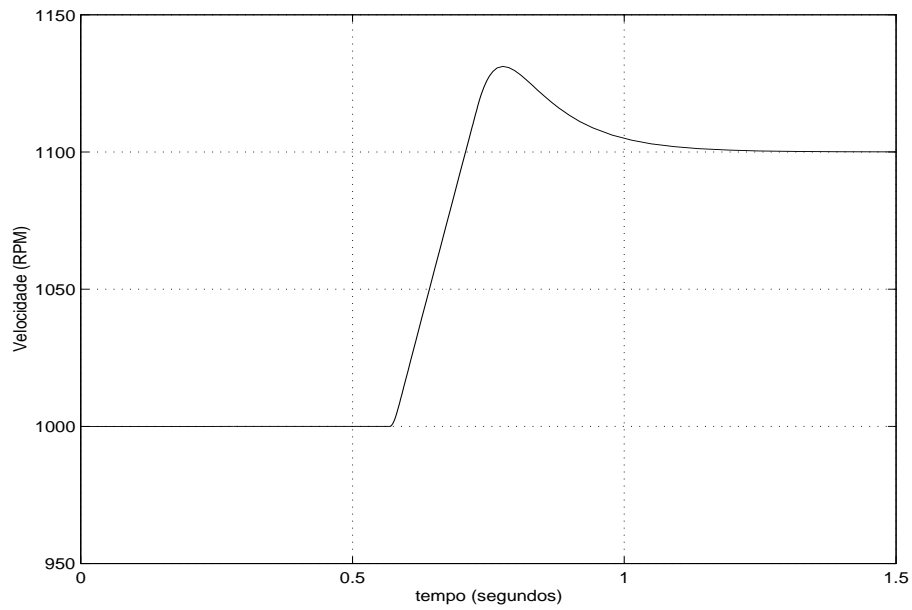


Figura 1.3: Velocidade do motor CC.

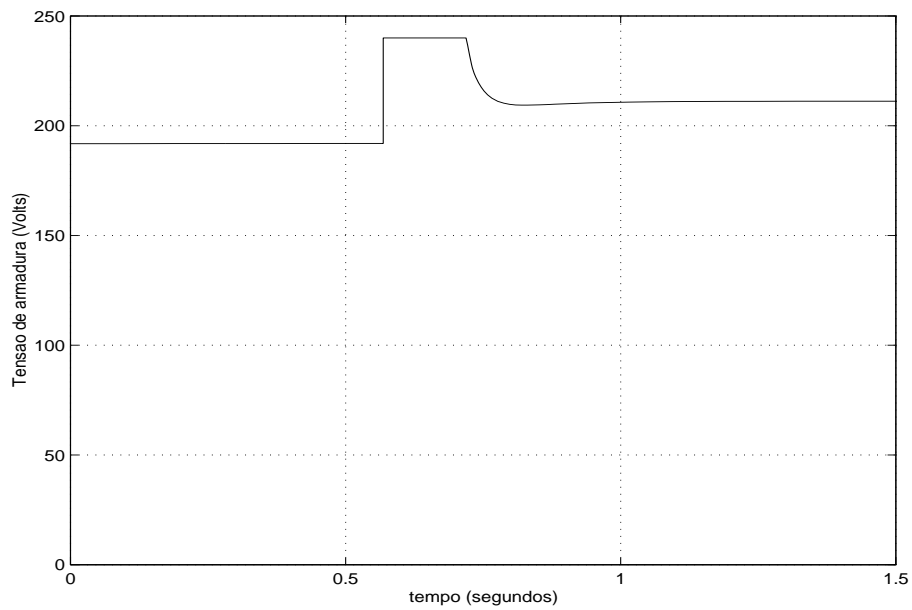


Figura 1.4: Tensão de armadura (variável manipulada) do motor CC.

desenvolvido pelo controlador com o caso anterior. O sinal de controle atinge seu valor máximo e satura, de forma que a melhoria esperada em desempenho transitório não é alcançada e o atuador está sendo sobrecarregado inutilmente.

O exemplo acima ilustra um princípio importante no projeto de sistemas de controle e muito presente no ajuste por alocação de pólos: a relação entre o desempenho transitório desejado para o sistema e o esforço de controle.

Princípio 1 *Esforço de controle. Quanto mais longe os pólos de $T(s)$ estiverem dos pólos de laço aberto maior será o esforço de controle.*

Além disto, como o esforço de controle é limitado por restrições físicas, existem limites práticos para a escolha das posições dos pólos de malha fechada. Estes não devem ser escolhidos excessivamente afastados dos pólos de malha aberta, pois neste caso o sistema sairia facilmente de sua banda proporcional (o controle atingiria facilmente seus limites), como no exemplo acima, exibindo comportamento não linear e muito provavelmente não alcançando o desempenho transitório desejado.

A tarefa de quantificar os limites atingíveis de desempenho é complexa e por esta razão a escolha dos pólos de malha fechada envolve experiência e conhecimento do processo controlado. Portanto os pólos de malha fechada devem ser escolhidos de forma a fornecer a resposta transitória desejada - não mais rápida do que o desejado - e levando em conta estas restrições, de forma a não realizar esforço de controle inútil. O esforço de controle não deve ser desperdiçado, uma vez que apresenta um custo, que se manifesta principalmente sob dois aspectos: desgaste do atuador e dispêndio de energia.

1.2 Método do Lugar das Raízes

Considere o sistema de controle padrão com realimentação unitária mostrado na figura 1.5.

Os pólos da função de transferência de malha fechada, $T(s)$ são dados pelas raízes da equação característica ($1 + C(s)G(s)H(s) = 0$) que depende diretamente da função de transferência de laço ($C(s)G(s)H(s)$). Assim a variação de um parâmetro na função de transferência de laço fará com que os pólos da $T(s)$ sejam modificados e conseqüentemente acarretará uma modificação na resposta transitória do sistema. Comumente este parâmetro que varia pode ser de 2 tipos:

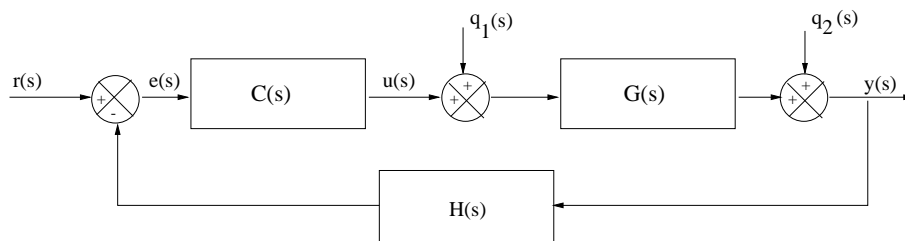


Figura 1.5: sistema realimentado

- Um ganho ou um parâmetro de sintonia do controlador, o qual é variado pelo voluntariamente pelo operador.
- Um parâmetro do processo que varie ao longo do tempo (em função de desgastes mecânicos, variações de temperatura, etc.), acarretando a variação de um dos coeficientes do numerador ou do denominador da $G(s)$.

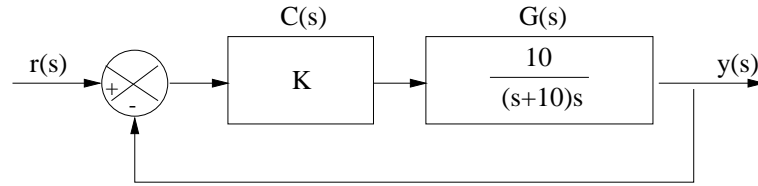
Assim a fim de obter-se uma boa sintonia do processo e um bom desempenho transitório, muitas vezes é de grande importância saber como a variação de um determinado parâmetro irá influenciar, qualitativa e quantitativamente, a posição dos pólos da $T(s)$. Esta necessidade se torna clara, por exemplo, na hora de responder a seguinte questão: *devo aumentar ou diminuir este parâmetro do controlador a fim de melhorar a resposta do sistema ?*

Neste caso, é de grande valia uma ferramenta gráfica que permita a visualização da tendência de variação dos pólos da $T(s)$ na medida em que o parâmetro variável na função de laço aumenta ou diminui. Tal ferramenta constitui-se no Método do Lugar das Raízes que será apresentado nesta seção. Antes da apresentação da definição formal do Lugar das Raízes, considere o seguinte exemplo ilustrativo:

Exemplo 1.2 *O diagrama de blocos abaixo descreve o controle de posição do eixo de um motor CC através de um controlador proporcional ($C(s) = k$). Tem-se que*

$$T(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{10K}{s^2 + 10s + 10K}$$

Obviamente, ao variarmos o ganho proporcional do controlador estaremos alterando os pólos da $T(s)$. A tabela abaixo mostra os valores dos pólos do sistema a medida que K vai sendo aumentado:

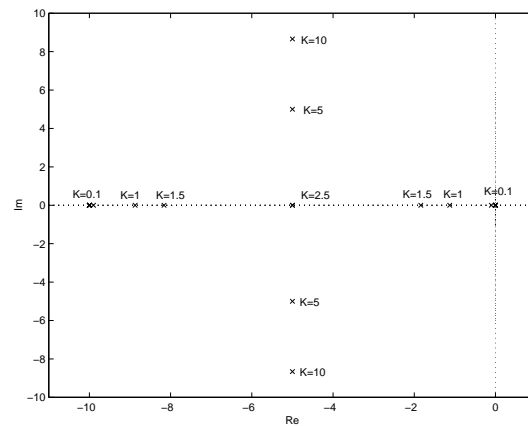


K	$pólos$
0.1	$(-0.1010 ; -9.8990)$
1	$(-1.1270 ; -8.8730)$
1.5	$(-2.7639 ; -7.2361)$
2.5	$(-5 ; -5)$
5	$(-5+j5 ; -5-j5)$
10	$(-5.0000 + j8.6603 ; -5.0000 - j8.6603)$

Analisando a posição dos pólos pela tabela pode-se observar que:

- Para $0 < K < 2.5$ ambos os pólos da $T(s)$ são reais. Para ganhos baixos temos um dos pólos da $T(s)$ bem próximos de zero e o outro bem próximo a -10 . À medida que o ganho vai sendo aumentado, ambos os pólos aproximam-se do valor -5 .
- Para $K = 2.5$ ambos os pólos do sistema estão em -5 (pólos reais duplos)
- Para $K > 2.5$ os pólos se tornam complexos. À medida que K aumenta a parte imaginária vai crescendo e a parte real mantém-se constante e igual a -5 .

As observações acima ficam mais fáceis de serem visualizadas plotando-se, no plano complexo, o valor das raízes para cada valor de K :



Extrapolando-se para outros valores de K e usando setas para indicar o que ocorre com a posição das raízes com o aumento de K temos o seguinte gráfico:

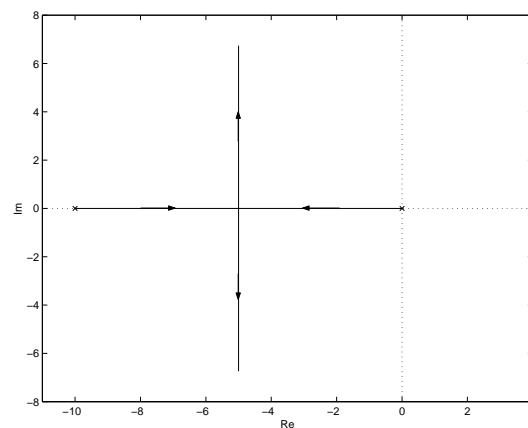
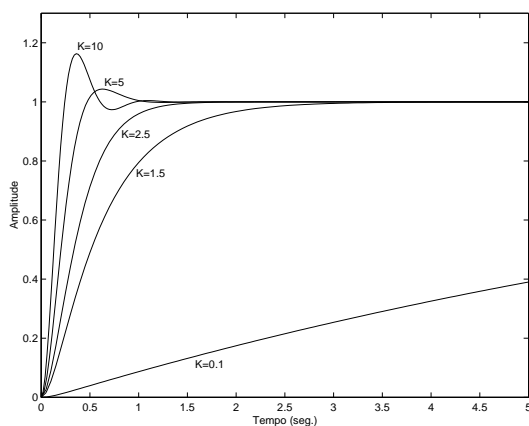


Figura 1.6: localização dos pólos da $T(s)$ com a variação do ganho K

A partir da observação qualitativa do gráfico acima, pode-se prever o que ocorrerá com a resposta do sistema à medida que aumentamos o ganho do controlador:

- Para ganhos baixos, o sistema em malha fechada apresentará um pólo próximo ao eixo imaginário (pólo dominante) e o sistema deverá apresentar um tempo de estabilização muito grande.

Figura 1.7: Resposta do sistema conforme K

- À medida que aumentamos o ganho a resposta deve começar a ficar mais rápida, pois o pólo dominante se afasta do eixo imaginário. A partir de um determinado ganho o sistema apresentará pólos complexos e a resposta deverá começar a apresentar uma oscilação amortecida, o tempo de subida deverá diminuir, mas o tempo de estabilização deverá permanecer aproximadamente o mesmo.
- Se aumentarmos o ganho em demasia o sistema apresentará pólos complexos conjugados cuja parte imaginária será muito maior que a parte real o que conferirá um baixo amortecimento e altos valores de sobrepasso a resposta.

No gráfico na figura (1.7) são apresentadas as respostas do sistema a um salto unitário considerando-se diferentes valores de K . Pode-se notar que as previsões acima são confirmadas.

Como será visto a seguir, o gráfico traçado na figura (1.6), corresponde ao lugar das raízes, com relação ao parâmetro $K > 0$, do polinômio

$$s^2 + 10s + 10K$$

ou, equivalentemente, da função

$$1 + K \frac{10}{s(s + 10)}$$

1.2.1 Definição do Lugar das Raízes

Seja $F(s)$ uma função racional² em s , s sendo um número complexo, e seja um parâmetro variável K estritamente positivo (isto é $K > 0$). Considerando-se agora a equação

$$1 + KF(s) = 0 \quad (1.18)$$

define-se o lugar das raízes desta equação como segue.

Definição 1.1 *O lugar das raízes da equação (1.18) é o lugar geométrico³ dos pontos do plano complexo que satisfazem a equação (1.18) para K variando de zero a infinito.*

Em outras palavras:

- para um dado $K > 0$ os pontos $s = \lambda_i$, $i = 1, \dots, n$, onde n é o grau do polinômio do numerador de $1 + KF(s)$, que verificam (1.18), pertencem ao lugar das raízes de (1.18). Retomando o exemplo (1.2), note que

$$F(s) = \frac{10}{s(s+10)}$$

e assim, para um K fixo, o numerador de $1 + KF(s)$ é dado pelo polinômio $s^2 + 10s + 10K$. Obviamente, as raízes deste polinômio, são as raízes de $1 + KF(s)$.

- um ponto λ do plano do plano complexo pertence ao lugar das raízes de (1.18) se e somente se existe um K tal que (1.18) é satisfeita para $s = \lambda$.

Sendo s um número complexo, $F(s)$ também o será. A partir da definição acima, podemos concluir que, se um ponto s do plano complexo pertence ao lugar das raízes, então devemos ter

$$F(s) = -\frac{1}{K}$$

ou, de forma equivalente, as condições a seguir são satisfeitas:

- **condição de módulo:** $|F(s)| = \frac{1}{K}$
- **condição de ângulo:** $\arg(F(s)) = \pm 180^\circ$

²função cujo numerador e o denominador são polinômios.

³conjunto de pontos que satisfazem uma certa propriedade.

Note que, uma vez que a condição de ângulo é satisfeita para um determinado ponto s do plano complexo, sempre existirá um ganho K que verificará a condição de módulo. Com base neste fato pode-se formular uma definição alternativa à definição 1.1 do lugar das raízes.

Definição 1.2 *O lugar das raízes da equação (1.18) é o conjunto de pontos s do plano complexo que satisfazem $\arg(F(s)) = \pm 180^\circ$*

As condições de módulo e ângulo servem de base para o estabelecimento de algumas regras básicas que permitem um rápido esboço do lugar das raízes e a identificação de alguns pontos importantes do mesmo. Tais regras básicas são apresentadas na seção seguinte.

1.2.2 Regras de Construção

Considere que o numerador de $F(s)$ é um polinômio de grau m e que o denominador de $F(s)$ é um polinômio de grau n .

1. Os pólos de $F(s)$ são marcados com \times e os zeros com \circ .
2. Os pontos de origem ($K \rightarrow 0$) do lugar das raízes são os pólos de $F(s)$.
3. O número de ramos do lugar das raízes é igual a n .
4. Os pontos terminais ($K \rightarrow \infty$) são os zeros de $F(s)$. No caso em que o número de zeros de $F(s)$ é menor que o número de pólos (i.e. $n > m$) diz-se que $n - m$ zeros de $F(s)$ estão no infinito. Neste caso teremos $n - m$ pólos de $1 + KF(s)$ que tenderão ao infinito ($s \rightarrow \infty$) quando $K \rightarrow \infty$. Reciprocamente, quando $m > n$, teremos $m - n$ pólos que partirão do infinito quando $K \rightarrow 0$.

Em ambos os casos, diz-se que o lugar das raízes apresenta $|n - m|$ assíntotas. Com relação às assíntotas tem-se que:

- (a) A intersecção das assíntotas tem lugar sobre o eixo real do plano complexo.
- (b) O ponto de intersecção das assíntotas sobre o eixo real é calculado como

$$\sigma = \frac{\sum (\text{pólos de } F(s)) - \sum (\text{zeros de } F(s))}{|n - m|}$$

(c) Os ângulos formados pelas assíntotas e o eixo real são dados por

$$\theta_i = \frac{(2i+1)\pi}{n-m} \text{ rad para } i = 0, 1, \dots, (n-m)$$

5. O lugar das raízes é simétrico com relação ao eixo real. Isto justifica-se facilmente pelo fato de que se $s = a + jb$ é raiz de (1.18), seu complexo conjugado $s = a - jb$ também o é.
6. Um ponto do eixo real do plano complexo pertence ao lugar das raízes se o número total de pólos e zeros à direita deste ponto for ímpar.
7. Os pontos de entrada e/ou saída do eixo real são pontos pertencentes ao(s) ramos sobre o eixo real do lugar das raízes e que satisfazem

$$\frac{dF(s)}{ds} = 0 \quad (1.19)$$

8. Os pontos em que o lugar das raízes cruza o eixo imaginário⁴ podem ser determinados a partir do critério de estabilidade de Routh-Hurwitz⁵.
9. O valor de K em qualquer ponto $s = \lambda$ pertencente ao lugar das raízes é determinado pela condição de módulo:

$$K = \frac{1}{|F(\lambda)|}$$

Exemplo 1.3 *Aplicando as regras acima ao caso do exemplo (1.2) temos que:*

- $F(s) = \frac{10}{s(s+10)}$ e, portanto, tem-se 2 pólos (em 0 e -10) e nenhum zero, ou seja, $n = 2$ e $m = 0$
- O lugar das raízes começa nos pólos 0 e -10.
- Como não se tem zeros (ou equivalentemente tem-se 2 zeros no infinito), o lugar das apresenta 2 assíntotas $n - m = 2 - 0 = 2$:
 - O centro das assíntotas é igual a $\frac{-10+0}{2-0} = -5$.

⁴Tais pontos são de fundamental importância na análise de estabilidade em sistemas realimentados, pois correspondem ao valor crítico de ganho para o qual o sistema realimentado passa da estabilidade a instabilidade.

⁵para maiores detalhes consulte [3],[2]

– O ângulo que as assíntotas fazem com o eixo real são dados por:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad \theta_1 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

- O lugar das raízes apresenta 2 ramos ($n = 2$).
- O lugar das raízes é simétrico com relação ao eixo real.
- Para pontos sobre o eixo real a direita de 0 não existe nenhuma singularidade, e, portanto tais pontos não fazem parte do lugar das raízes. Pontos no eixo real entre 0 e -2 apresentam sempre um número ímpar de singularidades (pólo em 0) a sua direita e, portanto, fazem parte do lugar das raízes. Finalmente, pontos sobre o eixo real a esquerda de -10 apresentam número par de singularidades (pólos em 0 e -10) donde conclui-se que não pertencem ao lugar das raízes.
- Os pontos de entrada e/ou saída do eixo real são os pontos que verificam a equação (1.19), ou seja:

$$\frac{d \frac{10}{s(s+10)}}{d s} = \frac{10(2s + 10) - 0}{[s(s + 10)]^2} = 0$$

Neste caso tem-se que $s = -5$ verifica a equação acima. Como $s = -5$ está sobre uma região do eixo real que pertence ao lugar das raízes e como existem duas assíntotas, podemos concluir que este ponto é um ponto de saída do eixo real.

- Como os ângulos de partida das assíntotas são 90° e 270° e o centro das assíntotas é no ponto -5 podemos inferir que estas são ortogonais ao eixo real e, portanto, o lugar das raízes nunca cruzará o eixo imaginário, o que nos permite concluir para qualquer ganho nunca teremos um pólo do sistema em malha fechada no semi-plano direito. Tal inferência pode ser comprovada matematicamente aplicando-se o critério de Routh Hurwitz.
- O ganho necessário para colocar um pólo do sistema em malha fechada em -5 será:

$$K = \left| \frac{s(s + 10)}{10} \right|_{s=-5} = \left| \frac{-5(-5 + 10)}{10} \right| = 2.5$$

Note que, este é o ganho, para o qual a resposta do sistema em malha fechada terá o menor tempo de estabilização sem apresentar overshoot.

Compare agora o obtido com as regras e o obtido numericamente no exemplo (1.2)

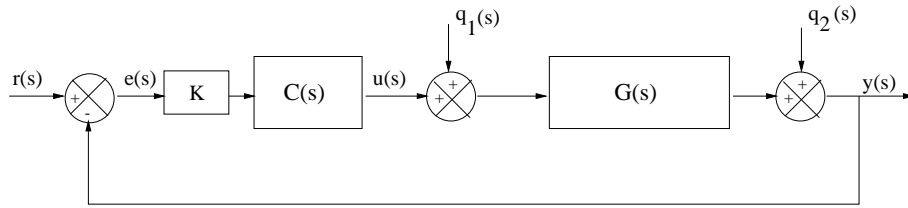


Figura 1.8: sistema realimentado

1.2.3 Aplicação a Sistemas Realimentados

Cabe ressaltar que a definição do lugar das raízes é puramente matemática, ou seja, é um conjunto de pontos s que verificam a equação $1 + KF(s) = 0$. Entretanto, sua aplicação a sistemas realimentados é evidente, como foi discutido nas seções precedentes e no exemplo (1.2). Serão várias as ocasiões onde estaremos interessados em visualizar de que forma a variação de um parâmetro no sistema afeta sua equação característica, ou seja, os pólos da função de transferência em malha fechada e, conseqüentemente, ter uma idéia qualitativa da variação no desempenho dinâmico do sistema causada por variações neste parâmetro.

Assim, o lugar das raízes pode ser visto como uma importante ferramenta matemática para análise e projeto de controladores em sistemas realimentados. A seguir ilustraremos 3 aplicações do lugar das raízes neste contexto. Em todos os casos considere o diagrama em blocos da figura 1.8.

Variação do ganho do controlador:

Este caso corresponde ao caso estudado no exemplo (1.2). O controlador pode então ser escrito como $C(s) = K\bar{C}(s)$, onde K é um ganho variável ou ajustável.

Assim sendo, tem-se que a equação característica é dada por

$$1 + K\bar{C}(s)G(s) = 0$$

ou seja, $F(s) = C(s)G(s)$

Considerando-se controladores PID com estrutura clássica, este caso corresponde àquele em ajusta-se K , T_i e T_d procedendo-se, em seguida a um "ajuste fino" variando-se apenas o ganho proporcional K .

Variação de um parâmetro do controlador

Muitas vezes está-se interessado em avaliar o efeito de um determinado parâmetro do controlador (diferente de um simples ganho multiplicativo) no comportamento dinâmico do sistema. Este é o caso, por exemplo, que ocorre quando deseja-se saber a influência da variação do ganho integral ($\frac{1}{T_i}$) ou do ganho derivativo (T_d) em controladores PID.

Neste caso, devemos rescrever a equação característica de forma a colocá-la na forma (1.18) onde K é o parâmetro que varia. O exemplo a seguir ilustra este caso.

Exemplo 1.4 *Seja o sistema da figura 1.8 com*

$$G(s) = \frac{5}{(s+2)(s+5)}$$

e o controlador sendo um controlador PI:

$$C(s) = K(1 + \frac{K_i}{s})$$

Considerando $K = 10$, deseja-se avaliar o que ocorre com os pólos do sistema em malha fechada quando variamos o parâmetro K_i .

A função de transferência entre a referência e a saída é dada por:

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{50(s + K_i)}{s^3 + 12s^2 + 70s + 50K_i}$$

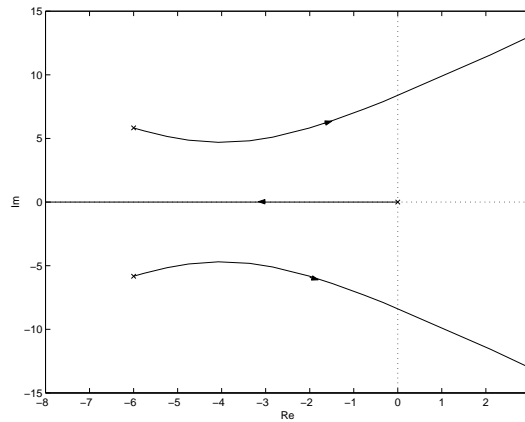
A equação característica é dada por:

$$(s^3 + 12s^2 + 70s) + 50K_i = 0 \quad (1.20)$$

Para que se possa avaliar o comportamento dos pólos da função de transferência com a variação do ganho integral K_i deve-se colocar a equação característica na forma $1 + K_i F(s) = 0$. Para tanto deve-se dividir ambos os lados da equação pelo polinômio $(s^3 + 12s^2 + 70s)$ obtendo-se:

$$1 + K_i \frac{50}{s^3 + 12s^2 + 70s} = 0$$

Assim aplicando-se a regra de construção apresentadas na seção anterior com $F(s) = \frac{50}{s^3 + 12s^2 + 70s}$ obtém-se o seguinte lugar das raízes com relação ao parâmetro K_i :



Note neste caso que, ao aumentarmos em demasia o ganho integral, o sistema se tornará instável (o par de pólos complexos conjugados passará para o semi-plano direito). O ganho crítico neste caso (obtido a partir do critério de Routh-Hurwitz) é $K_i = 16.8$. Com este ganho os pólos de $T(s)$ são $\{j8.3666 ; -j8.3666i ; -12\}$.

Escolha da posição de pólos e zeros do controlador

Considere o caso em que $1 + KF(s) = 1 + K\bar{C}(s)G(s)$. Obviamente, ao alterarmos a posição dos pólos e zeros de $\bar{C}(s)$, estaremos alterando o lugar das raízes com relação a variação do ganho K .

Um perfeito conhecimento das regras de construção do lugar das raízes nos permite assim, rapidamente, determinar a a quantidade de zeros e pólos que o controlador deve possuir bem como onde eles devem ser posicionados.

Genericamente, o projeto do controlador pelo Método do Lugar das Raízes consiste de duas etapas:

1. **Escolha dos pólos e zeros do controlador:** Os pólos e zeros de $\bar{C}(s)$ devem ser escolhidos de forma que o L.R. tenha uma determinada configuração, i.e. "passe" por posições desejáveis do plano complexo. Neste caso, gera-se a possibilidade do sistema em Malha Fechada vir a apresentar pólo(s) dominante(s) em uma determinada posição.
2. **Sintonia do ganho K :** Uma vez dada a possibilidade do sistema em malha fechada apresentar pólo(s) em uma posição desejada, determina-se o ganho K para tanto através da condição de módulo. Neste caso, o ajuste de K deve ser tal que o sistema apresente pólos dominantes que propiciarão ao sistema em malha fechada uma boa resposta dinâmica.

Por exemplo, em controladores PID, tem-se sempre 1 pólo na origem, um pólo de alta frequência e 2 zeros. Note que, na configuração padrão, através do ajuste dos ganhos T_i e T_d , o projetista tem a liberdade de escolher a posição dos 2 zeros do controlador. Em alguns casos, terá também a liberdade de escolher a posição do pólo de alta frequência. Neste caso define-se $\bar{C}(s)$. Através então do ajuste do ganho proporcional (K) faz-se com que o sistema em malha fechada apresente pólos dominantes sobre o lugar das raízes definido pela equação característica $1 + K\bar{C}(s)G(s)$. Este caso será discutido em detalhes na seção seguinte.

1.3 Ajuste pelo Lugar das Raízes

Nem sempre é possível escolher livremente as posições dos pólos de $T(s)$.

Note que apesar de o método de alocação de pólos descrito na seção 1.1.1 permitir o cálculo dos parâmetros do controlador em qualquer caso, apenas valores reais e positivos para os coeficientes c são válidos, e a obtenção de valores válidos não pode ser assegurada *a priori*. Além disto, na exposição acima foi assumido que o modelo do processo era de ordem dois. Neste caso, bem como no caso de um modelo de ordem um, a probabilidade de encontrar valores válidos para os parâmetros c que alocam os pólos de $T(s)$ em uma dada posição do plano complexo é alta. Para modelos de ordem superior a dois esta probabilidade é virtualmente nula.

Se o modelo do processo é de ordem superior a dois, com um controlador PID, os pólos de $T(s)$ somente podem ser alocados em determinadas posições do plano complexo. Neste caso ainda pode-se ajustar o PID pela alocação dos pólos de malha fechada, porém não é possível escolher arbitrariamente as posições dos pólos, mas apenas dentre aquelas posições possíveis. Aplica-se então o método do Lugar das Raízes para determinar quais são estas posições possíveis. O método do Lugar das Raízes permite ainda ter um sentimento do esforço necessário para alocar os pólos na posição escolhida, o que não se tem com o método de alocação arbitrária de pólos.

Conforme visto na Seção 1.2, o método do Lugar das Raízes permite analisar a influência da variação de um parâmetro do controlador sobre o desempenho transitório do sistema. Assim pode-se analisar o efeito do parâmetro K sobre os pólos de $T(s)$ e conseqüentemente sobre o desempenho transitório do sistema. A influência de qualquer outro parâmetro do controlador sobre o desempenho transitório do sistema também pode ser analisada desta forma. A partir desta análise pode-se então escolher o valor para este parâmetro que fornece o melhor desempenho possível.

Um controlador PID tem três parâmetros a serem escolhidos. Neste caso dois parâmetros são fixados e o Lugar das Raízes é utilizado para determinar a influência do terceiro parâmetro sobre o desempenho do sistema, permitindo seu ajuste. O exemplo abaixo exemplifica o procedimento.

Exemplo 1.5 *Controle de velocidade do motor CC por corrente de campo.*

Considere o motor CC (processo 2) com corrente de campo constante e laço de controle de corrente de armadura, de forma que a corrente de armadura é a variável manipulada. A função de transferência deste processo é

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{i_a(s)} = \frac{1.8}{s + 0.1} \quad (1.21)$$

O sistema deve seguir referências do tipo salto e rejeitar perturbações do mesmo tipo. Como o processo é de ordem 1, um controlador PI é suficiente para fornecer o desempenho estacionário e transitório desejado e por isto será aplicado a este processo, de forma que a função de transferência do controlador é dada por:

$$C(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = K \frac{s + z}{s} \quad (1.22)$$

onde $z = \frac{1}{T_i}$ é a posição do zero do controlador. Há dois parâmetros a ajustar no controlador: z e K . Para aplicar o método do Lugar das Raízes fixa-se um dos parâmetros e analisa-se a influência do outro sobre o desempenho do sistema. Uma escolha que simplifica a análise é alocar o zero do controlador na mesma posição do pólo dominante do processo, de forma a cancelá-lo. Fazendo $z = 0.1 \text{ s}^{-1}$ a função de transferência de malha fica

$$L(s) = C(s)G(s) = K \frac{s + 0.1}{s} \frac{1.8}{s + 0.1} = 1.8K \frac{1}{s} \quad (1.23)$$

e a equação característica para o sistema em malha fechada:

$$1 + 1.8K \frac{1}{s} = 0 \quad (1.24)$$

e é fácil verificar que o único pólo da função de transferência de malha fechada é igual a $-1.8 K$.

Quanto maior for o ganho K mais rápida será a resposta do sistema, sempre mantendo a sobrepassagem nula. Porém é necessário levar em conta as limitações de esforço de controle mencionadas no princípio 1. Assim, escolhe-se $K = 10/1.8 = 5.56$, que deverá fornecer a resposta transitória

desejada ($t_s = 4/10 = 0.4$ s). A figura 1.9 mostra a resposta ao salto de referência obtida com este ajuste simples, que é satisfatória. Porém a resposta a perturbações de carga é bastante lenta, conforme mostra a figura 1.10, que considera a aplicação de uma perturbação de carga constante no instante $t = 5$ s. Note que neste caso, a constante de tempo da resposta é dada pelo próprio pólo do processo. Este mau desempenho na resposta a perturbação deve-se ao cancelamento do pólo pelo zero do controlador. Com o cancelamento este pólo foi eliminado da função de transferência $T(s)$, mas não da função de transferência entre a perturbação e a saída:

$$\frac{\omega(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{1.8}{(s+0.1)}}{1 + K \frac{(s+0.1)}{s} \frac{1.8}{(s+0.1)}} = \frac{1.8s}{(s+0.1)(s+10)} \quad (1.25)$$

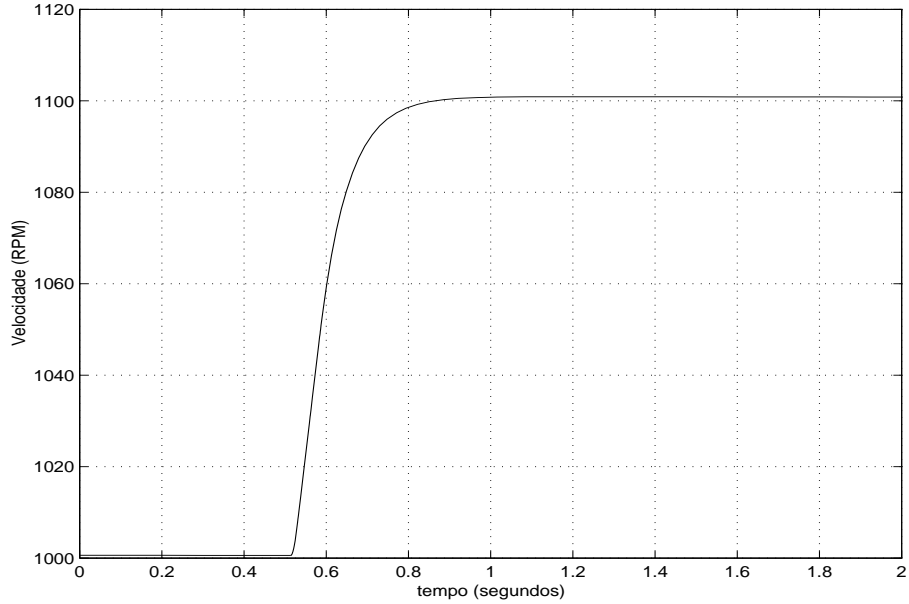


Figura 1.9: Resposta a variação de referência para o controle de velocidade do motor CC por corrente de armadura.

Esta é uma situação típica: o cancelamento de pólos lentos por zeros do controlador resulta em resposta a perturbação em que este pólo lento domina a resposta. Isto ocorre sempre que a perturbação aparece na entrada do processo, como no presente caso.

Um ajuste mais adequado é obtido sem o cancelamento do pólo do processo. Fazendo $z = -2$ s⁻¹ tem-se o lugar das raízes da figura 1.11.

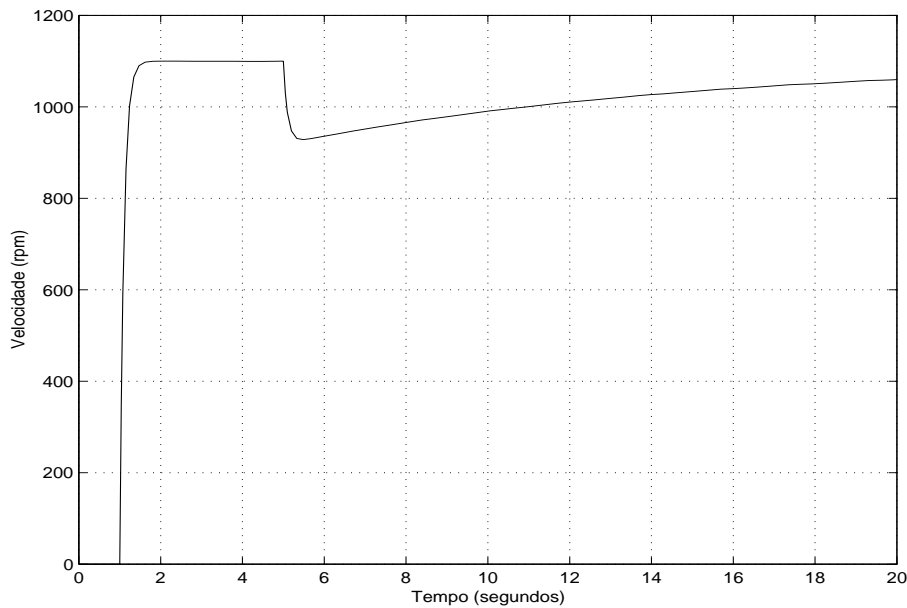


Figura 1.10: Resposta à perturbação de carga para o controle de velocidade do motor CC por corrente de armadura.

O ganho K pode então ser escolhido de forma que os pólos de malha fechada estejam no eixo real, bem à esquerda do pólo do processo, resultando em uma resposta mais rápida à perturbação. A alocação escolhida é aquela indicada pelo ponto assinalado na figura: $s = -2,5 \text{ s}^{-1}$. Para determinar o ganho para o qual os pólos são alocados nesta posição usa-se a equação característica do sistema em malha fechada:

$$1 + C(s)G(s) = 0 \Rightarrow s(s + 0.1) + 1.8K(s + 2) = \\ = s^2 + (0.1 + 1.8K)s + 3.6K = 0$$

Deseja-se saber para qual valor de K tem-se $s = -2.5 \text{ s}^{-1}$ como raiz deste polinômio. Então substitui-se $s = -2.5 \text{ s}^{-1}$ na equação característica, obtendo

$$(-2.5)^2 + (0.1 + 1.8K)(-2.5) + 3.6K = 6 - 0.9K = 0 \rightarrow K = 6.67$$

A determinação do ganho K poderia igualmente ser feita a partir da aplicação da condição de módulo.

$$K = \left| \frac{s(s+1)}{1.8(s+2)} \right|_{s=-2.5} = \left| \frac{-2.5(-2.5+0.1)}{1.8(-2.5+2)} \right| = 6.67$$

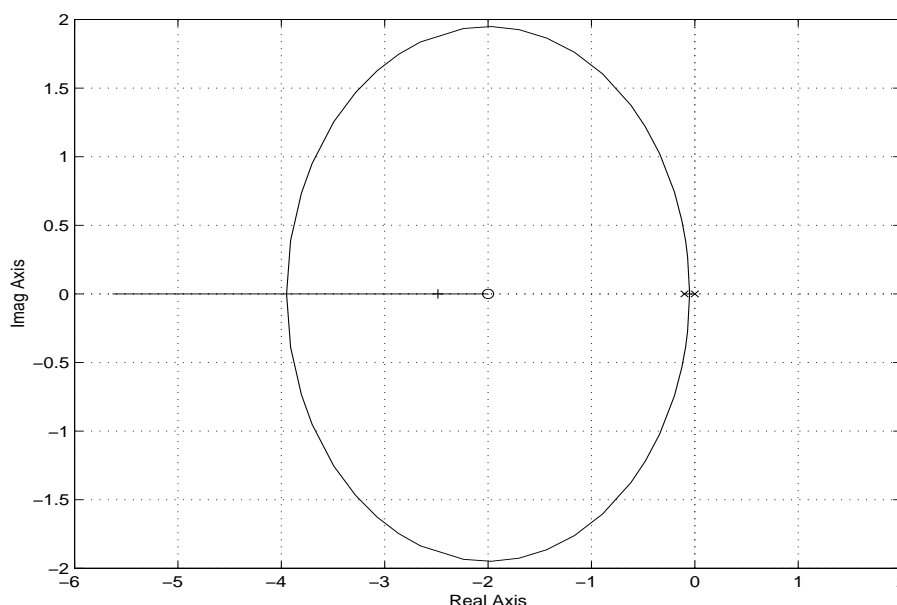


Figura 1.11: Lugar da Raízes para o controle de velocidade do motor CC por corrente de armadura.

Cabe ressaltar que o ganho pode ser mais facilmente determinado através de aplicativos disponíveis com interfaces gráficas para tanto [1].

A figura 1.12 mostra a resposta ao salto de referência e de perturbação respectivamente. Note que agora, apesar de um pequeno overshoot na resposta a variação de referência, a resposta à perturbação é significativamente mais rápida.

O exemplo acima ilustra o fundamento do método do Lugar das Raízes para ajuste de parâmetros do PID, mas também um princípio importante na escolha dos zeros do controlador. O cancelamento dos pólos do processo por estes zeros simplifica o ajuste, conferindo um bom desempenho para mudanças de referência. Porém, se o(s) pólo(s) cancelado(s) for(em) muito lento(s) o desempenho obtido com relação à rejeição de perturbações pode ser insatisfatório.

Princípio 2 *Cancelamento de pólos instáveis ou muito lentos.*

1. *Pólos do processo significativamente mais lentos do que a resposta desejada para a resposta a perturbação do sistema em malha fechada*

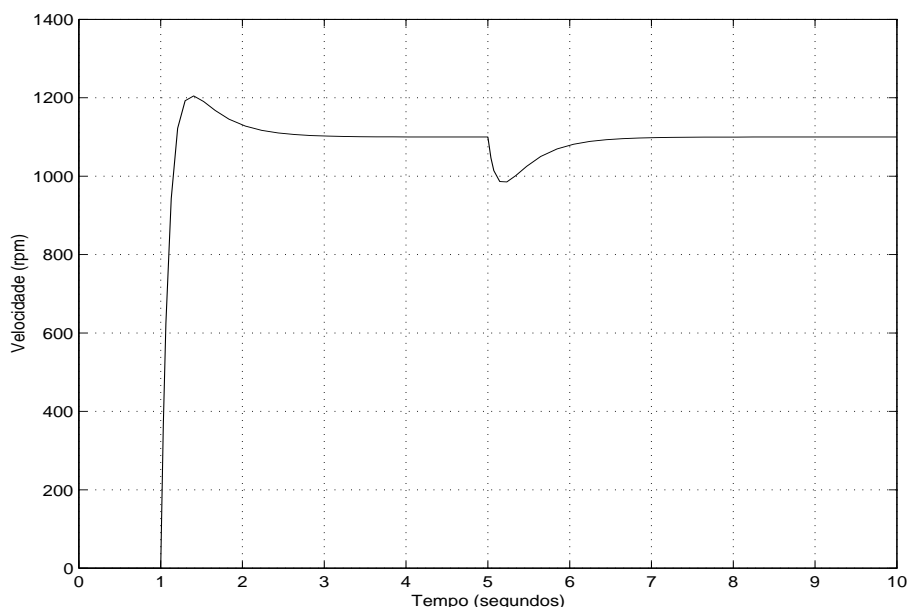


Figura 1.12: Resposta à variação de referência e perturbação de carga para o controle de velocidade do motor CC por corrente de armadura.

somente devem ser cancelados por zeros do controlador quando não estiverem no caminho direto entre a perturbação e a saída do processo.

2. *Pólos com parte real positiva, nula ou negativa porém muito pequena **jamais** devem ser cancelados no projeto devido aos erros de precisão no cancelamento e por questões de estabilidade interna do sistema que não serão aqui aprofundadas. Note também que no caso em que o pólo cancelado está no semiplano direito, o mesmo pode aparecer na função de transferência de alguma entrada de perturbação para a saída, levando a uma resposta divergente.*

Exemplo 1.6 *Considere o controle de posição por tensão de um motor CC. A função de transferência do processo é dada por*

$$G(s) = \frac{\delta(s)}{E_a(s)} = \frac{150}{s^3 + 50.1 s^2 + 275 s} = \frac{150}{s(s + 6.275)(s + 43.83)} \quad (1.26)$$

O motor deve seguir referências do tipo salto com $t_s < 1$ s e $Mo \leq 10\%$. Como o processo é de tipo 1, não é necessário o uso de ação integral de controle e pode-se ajustar $T_i = +\infty$.

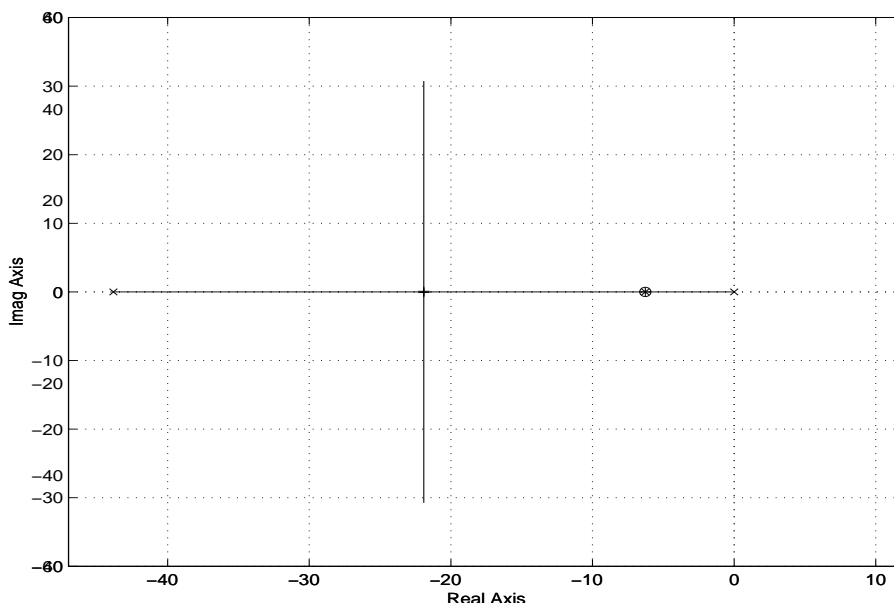


Figura 1.13: Lugar das Raízes para o controle de posição do motor CC com controle PD e cancelamento de pólo do processo.

Considere que um PID comercial seja utilizado e o pólo limitador do ganho em altas frequências da ação derivativa não seja conhecido. Assume-se então que este pólo está a uma frequência suficientemente alta e pode ser desprezado. A função de transferência do controlador fica então reduzida a um zero e um ganho:

$$C(s) = K(1 + sT_d) = KT_d(s + \frac{1}{T_d}) = K'(s + z) \quad (1.27)$$

Note com este controlador o sistema não rejeitará perturbações de carga.

Há dois parâmetros a serem ajustados: z e K' . O ajuste será feito fixando um destes parâmetros e escolhendo o outro pelo Lugar das Raízes. Para tanto, "cancelamos" o pólo mais lento do processo escolhendo o zero do controlador em $z = -6.275s^{-1}$ e traçamos o Lugar das Raízes para o ganho K' , apresentado na Figura 1.13.

O melhor desempenho transitório do sistema é obtido com os pólos de malha fechada próximos ao ponto de saída do eixo real, em $-20 s^{-1}$, como indicado na figura por +. Isto ocorre para $K' = 3.18$. Os parâmetros do PD podem então ser determinados como

$$T_d = 1/z = 160 ms \quad (1.28)$$

$$K = K'/T_d = 19.88 \quad (1.29)$$

As Figuras 1.14-1.15 apresentam a resposta do sistema quando submetido a uma variação de referência de 30° seguida de uma perturbação. Observa-se que o desempenho obtido satisfaz aos requisitos e a tensão aplicada sobre a armadura do motor (sinal de controle) mantém-se modesta.

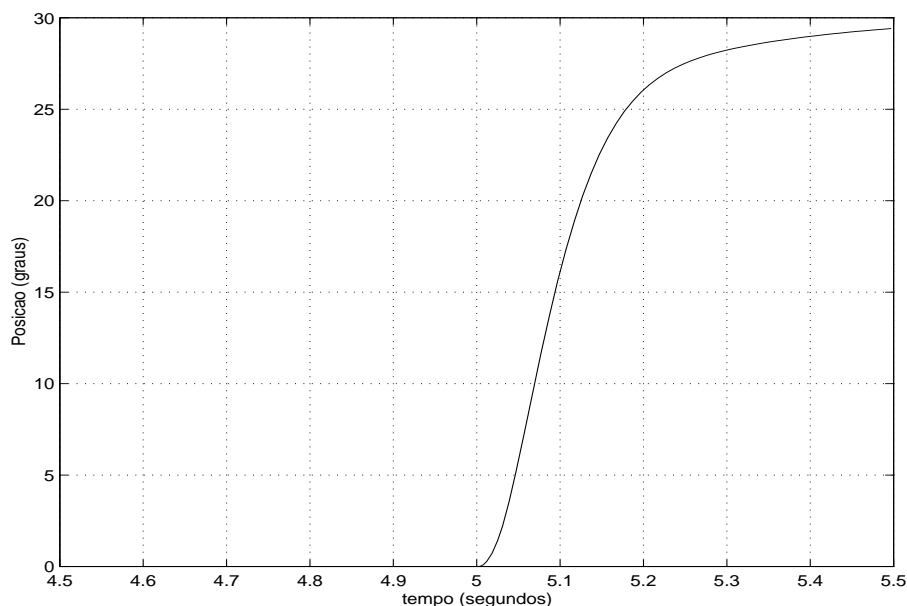


Figura 1.14: Ângulo do motor CC em resposta a um salto de referência de 30° .

Se o sistema deve rejeitar perturbação de carga, então é necessária a ação de controle integral. Com efeito, a figura 1.16 mostra a resposta do sistema a um torque de carga de 10 Nm , onde observa-se que o torque de carga acarreta um erro de seguimento da referência em regime permanente.

Neste caso a função de transferência do controlador deve ser a de um PID completo:

$$C(s) = K\left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s}\right) = K T_d \frac{(s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_i T_d})}{s} = K' \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s} \quad (1.30)$$

e tem-se três parâmetros a serem ajustados: K' , z_1 e z_2 . Escolha-se inicialmente os zeros do controlador cancelando os pólos do processo: $z_1 = -6.275 \text{ s}^{-1}$ e $z_2 = -43.83 \text{ s}^{-1}$. Então o Lugar das Raízes da equação característica para variações do ganho K' é aquele apresentado na figura 1.17.

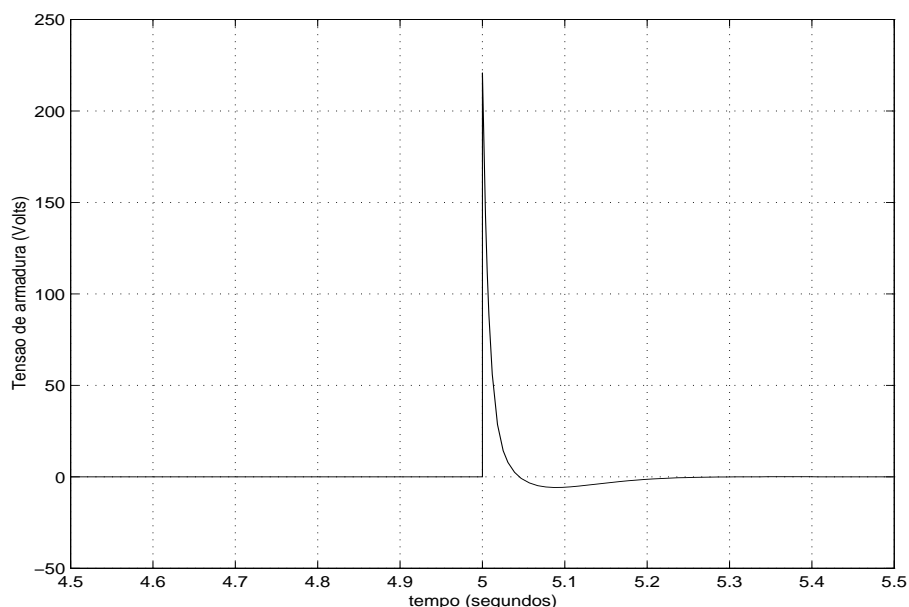


Figura 1.15: Tensão de armadura do motor CC em resposta a um salto de referência de 30°.

Neste caso o centro das assíntotas é a origem e os pólos do sistema em malha fechada serão sempre imaginários puros. O sistema é então marginalmente estável para qualquer valor de ganho, apresentando oscilações sustentadas em sua saída.

Não é possível escolher o ganho de forma que o sistema tenha uma resposta transitória adequada, logo as posições escolhidas para os zeros não são adequadas. A fim de tornar o sistema estável os zeros devem ser alocados em outras posições, de forma a trazer as assíntotas do Lugar das Raízes para a esquerda. Das regras de construção do Lugar das Raízes vê-se que o centro das assíntotas desloca-se para a esquerda quando os zeros são colocados mais à direita. Assim, os zeros devem necessariamente ser escolhidos à direita dos pólos do processo para se obter um sistema estável em malha fechada. Quanto mais à direita os zeros estiverem, mais à esquerda estarão as assíntotas. Porém zeros muito próximos ao eixo $j\omega$ atrairão os pólos que em malha aberta estão na origem, fazendo com que os mesmos nunca se afastem significativamente do eixo, o que resultaria em desempenho pobre. A posição ideal dos zeros pode ser determinada por tentativa e erro tendo em conta estas observações. Escolhendo os zeros nas posições $z_1 = -6.275$ e $z_2 = -1$ tem-se o LR da figura 1.18. A alocação dentro deste Lugar das

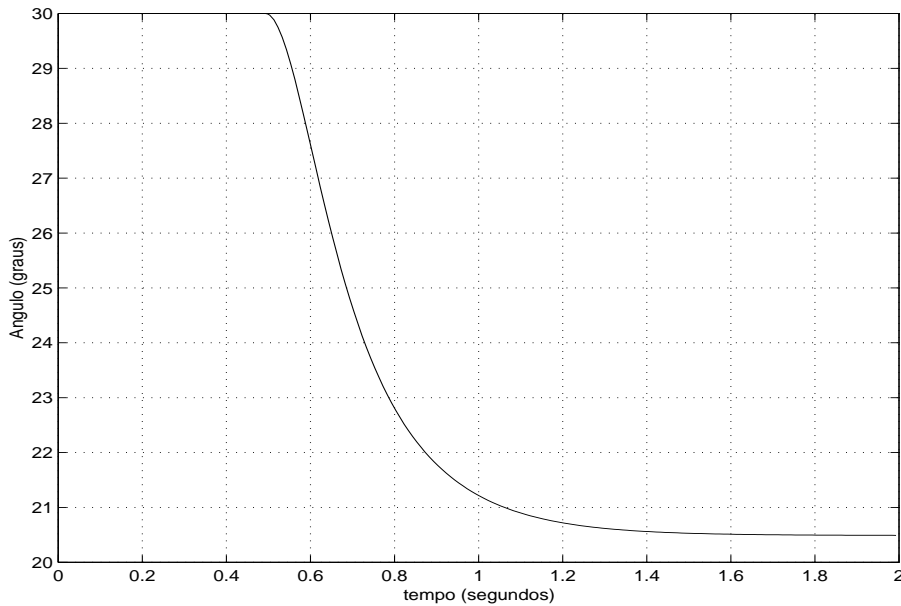


Figura 1.16: Tensão de armadura do motor CC em resposta a um torque de carga de 10 Nm .

Raízes que fornece o melhor desempenho é aquela em que os pólos estão mais à esquerda, que é também apresentada na figura.

O ganho que aloca os pólos nesta posição é calculado como $K' = 7.4$ e os parâmetros do PID podem então ser determinados como

$$K = 52.86 \quad T_i = 1.13 \text{ s} \quad T_d = 0.14 \text{ s} \quad (1.31)$$

As Figuras 1.19 e 1.20 apresentam a resposta do sistema quando submetido a uma variação de referência seguida de uma perturbação.

Um melhor desempenho na presposta a perturbação pode ser obtido se o pólo do processo não for cancelado. Considerando $z_1 = -12.8$ e $z_2 = -1.3$ e $K = 89.7$ obtém-se $T_i = 0.83 \text{ s}$ $T_d = 0.071 \text{ s}$. O Lugar das raízes e o desempenho do sistema em malha fechada nestas condições são mostrados nas figuras 1.21, 1.22 e 1.23

A escolha da posição dos zeros do controlador deve ser feita de forma que Lugar das Raízes tenha um formato que permita a posterior escolha do ganho alocando os pólos do sistema em posições adequadas ao atendimento das especificações. Determinar regras gerais de procedimento é bastante difícil, de

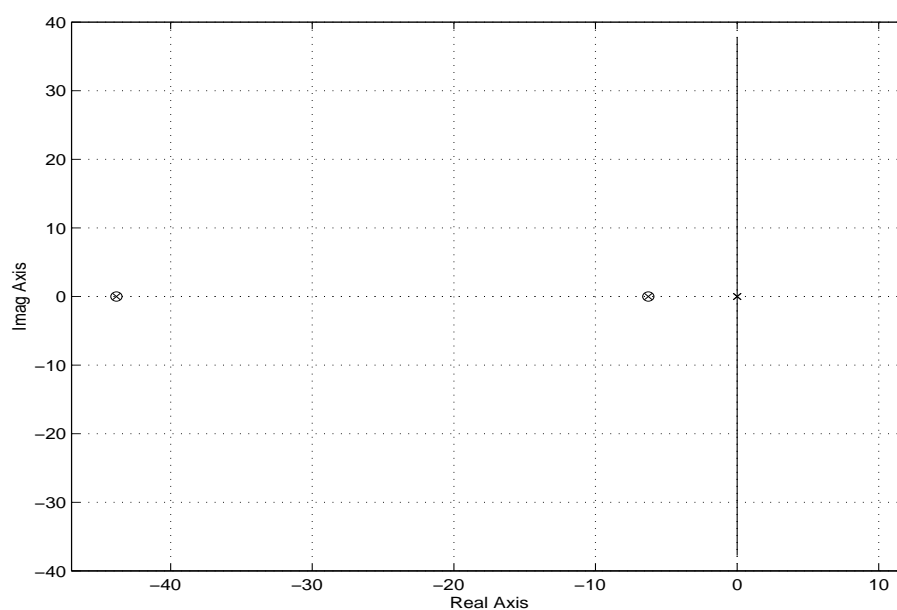


Figura 1.17: Lugar das raízes do motor CC.

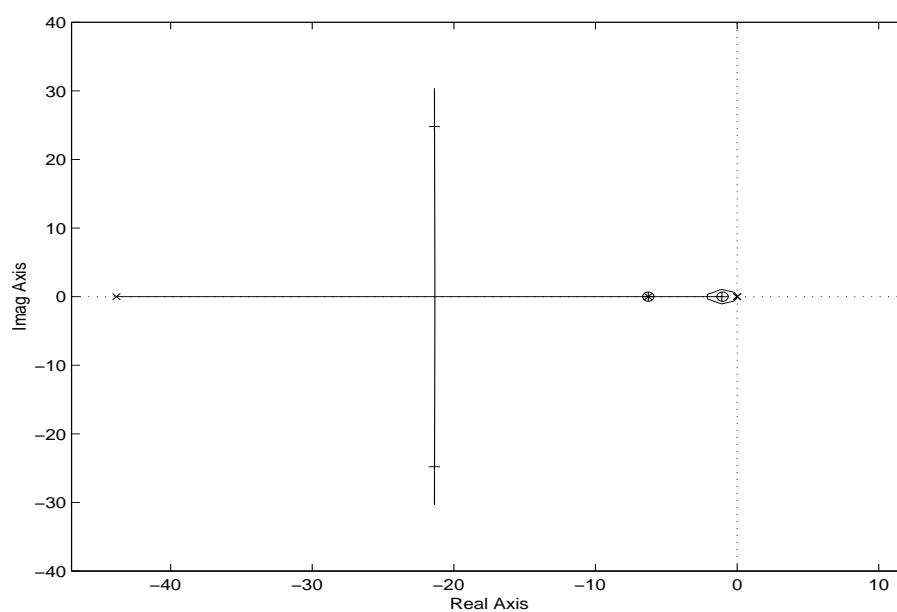


Figura 1.18: Lugar das raízes para o controle de posição do motor CC.

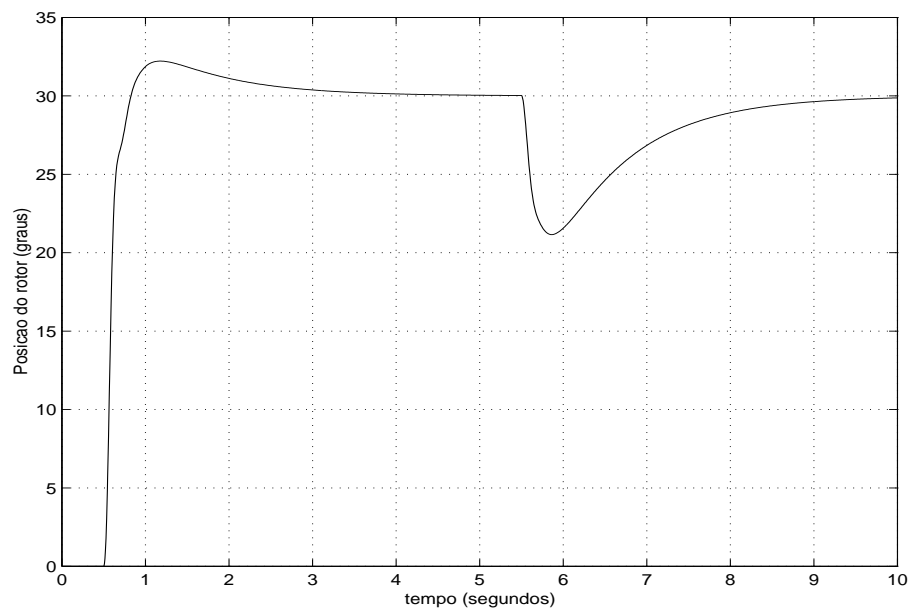


Figura 1.19: Posição angular do motor CC.

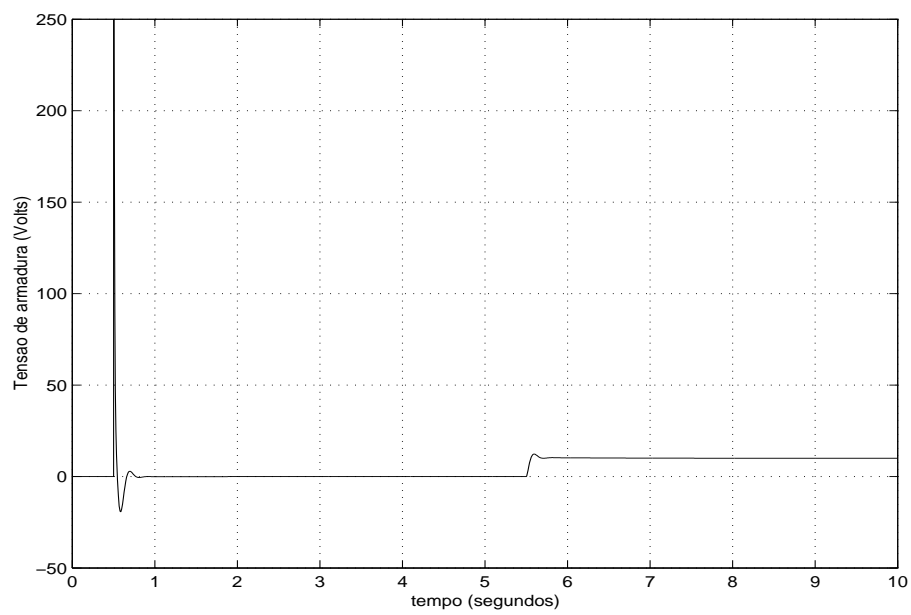


Figura 1.20: Tensão de armadura do motor CC.

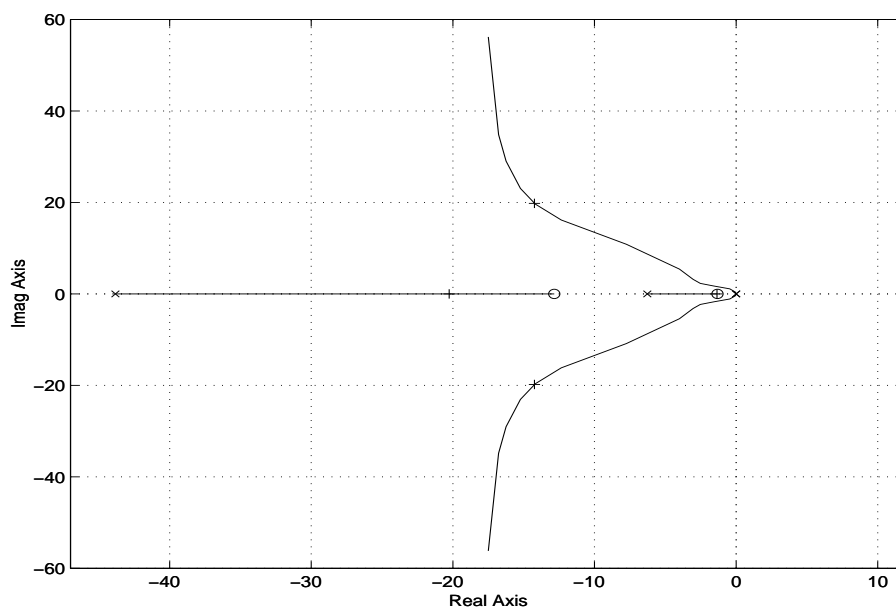


Figura 1.21: Lugar das raízes para o controle de posição do motor CC.

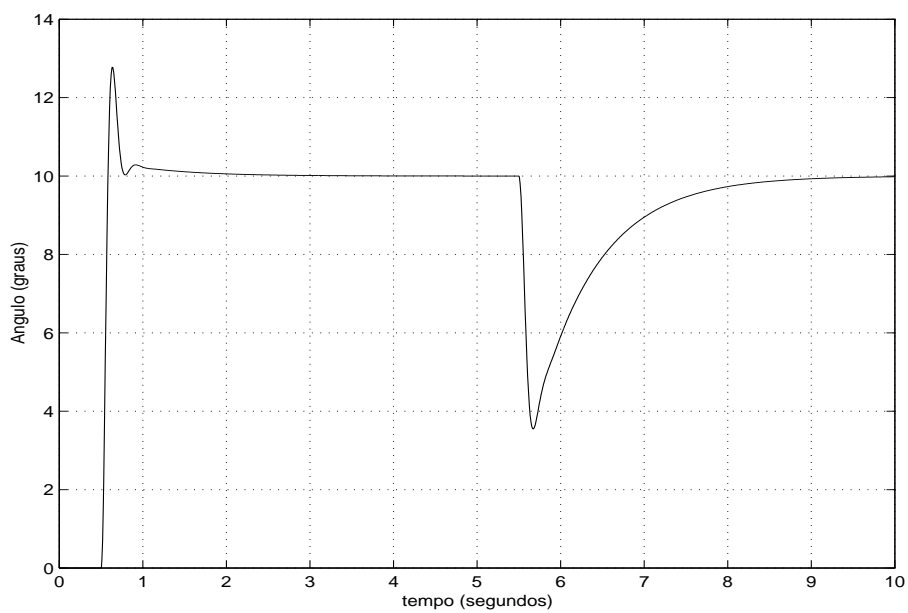


Figura 1.22: Posição angular do motor CC.

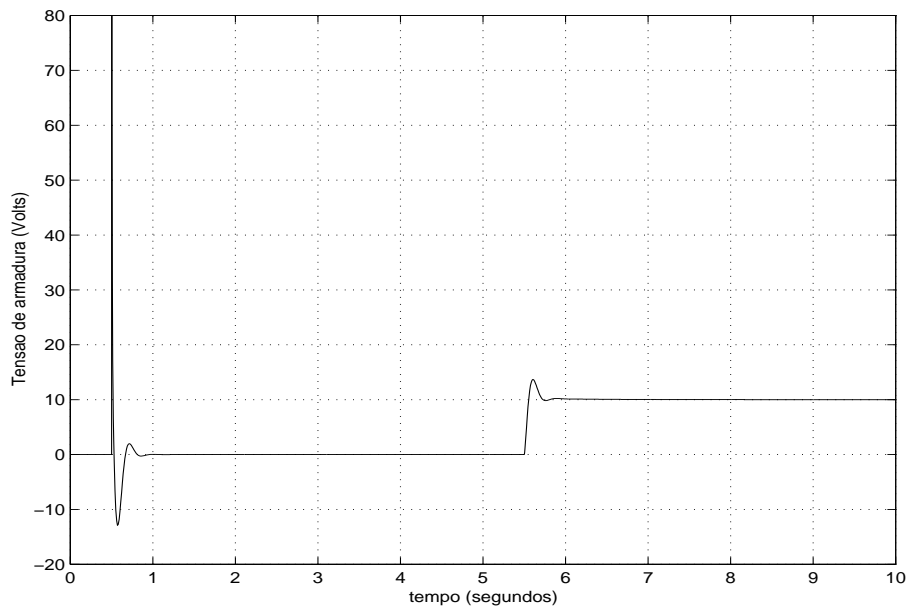


Figura 1.23: Tensão de armadura do motor CC.

forma que a escolha dos pólos e zeros do controlador requer certa familiaridade com o método e, muitas vezes, um procedimento de tentativa e erro. Ferramentas matemáticas computacionais (como MATLAB) facilitam bastante esta tarefa traçando o Lugar das Raízes automática e continuamente quando o usuário varia a posição dos zeros, ao mesmo tempo em que traça a resposta transitória correspondente. A determinação do ganho que aloca os pólos em uma determinada posição é também feita automaticamente, com o usuário indicando no gráfico a posição desejada para a alocação [1].

Referências Bibliográficas

- [1] G.J. Borse. *Numerical Methods with MATLAB*. PWS Publishing Company, Boston, EUA, 1997.
- [2] G.F. Franklin, J.D. Powell, and A.E. Naeini. *Feedback control of dynamic systems*. Addison-Wesley, EUA, 3^a edition, 1994.
- [3] K. Ogatta. *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice-Hall do Brasil, New York, 2^a edition, 1994.