CONTROLE PREDITIVO DE ROBÔS MÓVEIS NÃO HOLONÔMICOS

Felipe Kühne

Orientador: Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

Co-orientador: Prof. Dr. Walter Fetter Lages

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Escola de Engenharia

Departamento de Engenharia Elétrica

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Organização

1. Objetivos propostos
2. Motivações
3. Sistemas não holonômicos
4. Modelo cinemático do robô
5. Fundamentos de MPC
6. Controle de robôs móveis
7. Conclusões
8. Trabalhos futuros

1. Objetivos Propostos

Estudo e desenvolvimento de técnicas de MPC para robôs móveis dotados de rodas e com restrições não holonômicas abordando:

1. Solução do problema de estabilização em um ponto;
2. Solução do problema de rastreamento de trajetória;
3. Estudo da viabilidade dos algoritmos de MPC em uma aplicação real.

2. Motivações

O problema do controle de robôs móveis:

- Sistemas não holonômicos não podem ser estabilizados em um ponto através de uma realimentação de estados suave e invariante no tempo (BROCKETT; 1982);
- Abordagens clássicas: leis de controle *não suaves* ou *variantes no tempo*;
- Alguns métodos abandonam a idéia de estabilização em um ponto e procuram obter a convergência a uma trajetória de referência.

2. Motivações

Desvantagens das abordagens clássicas:

- Baixas taxas de convergência;
- Trajetórias altamente oscilatórias;
- Síntese e sintonia do controlador não é intuitiva;
- Em implementações reais é difícil de se obter bom desempenho, devido às restrições nas entradas de controle e nos estados que naturalmente existem.

2. Motivações

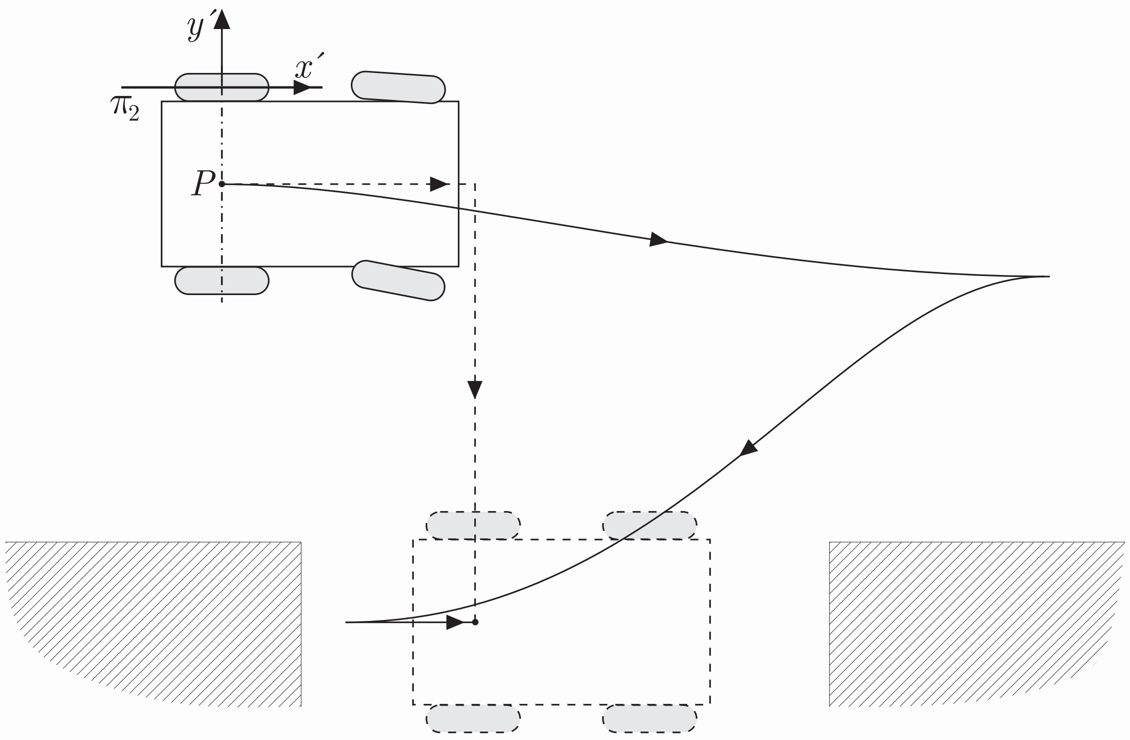
Através do uso de Controle Preditivo:

- Uma lei de controle que satisfaz as condições de Brockett pode ser implicitamente gerada;
- Restrições nas entradas de controle e nos estados são consideradas diretamente:
  - saturação dos atuadores podem ser considerados;
  - movimentação dentro de uma região segura.

3. Sistemas Não Holonômicos

- Sistemas que possuem restrições ao seu movimento;
- A movimentação do sistema é realizada de forma a satisfazer as restrições não holonômicas.

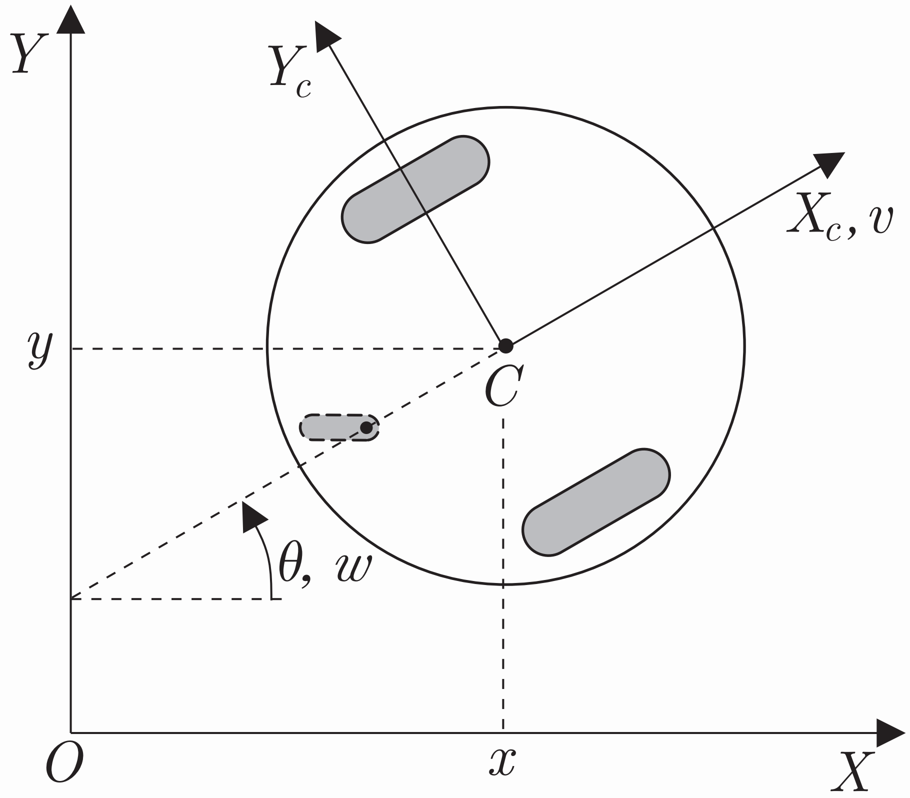
Exemplo:



4. Modelo Cinemático do Robô

$\mathbf{x} = [x \;\; y \;\; \theta]^T$: estados de configuração

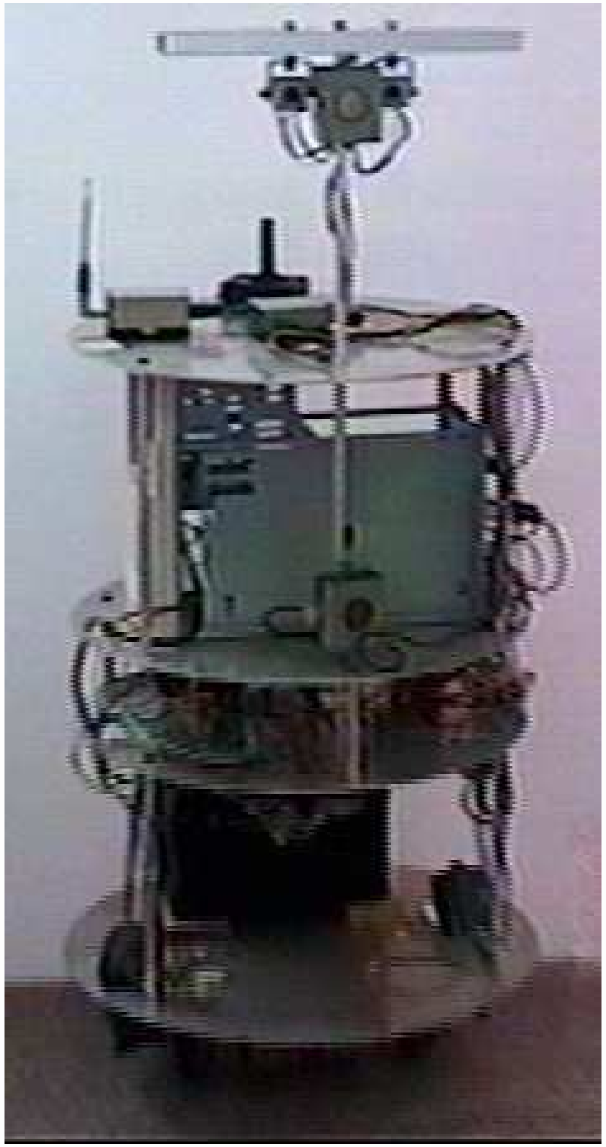
$\mathbf{u} = [v \;\; w]^T$: entradas de controle



$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \\ \dot{\theta} = w \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

O Robô Twil



Considerando que cada motor pode desenvolver uma velocidade máxima de uma rotação por segundo, tem-se os seguintes limites de velocidade:

$$-\overline{v} \leq v \leq \overline{v}, \quad \overline{v} = 0,4712\, m/s$$

$$-\overline{w} \leq w \leq \overline{w}, \quad \overline{w} = 3,7699\, rad/s$$

5. Controle Preditivo (MPC)

- Modelo do sistema $\rightarrow$ predição dos estados dentro de um intervalo de tempo finito (*horizonte de predição*):

$$\mathbf{x}(k+j+1|k) = f(\mathbf{x}(k+j|k), \mathbf{u}(k+j|k))$$

- Um problema de otimização é resolvido em cada instante de amostragem, de forma a minimizar uma função de custo.

5. MPC

Função de custo:

$$\Phi(k) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{x}^T(k+j+1|k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k+j+1|k) + \mathbf{u}^T(k+j|k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k+j|k)$$

onde:

- k: instante de amostragem, $k \in \mathbb{N}^+$;
- N: horizonte de predição;
- $\mathbf{Q}$: matriz de ponderação dos estados;
- $\mathbf{R}$: matriz de ponderação do controle.

5. MPC

Problema de minimização da função de custo:

Resolvido *on line*, para cada instante de amostragem k:

$$\mathbf{u}^\star, \mathbf{x}^\star = \arg \min_{\mathbf{u},\mathbf{x}} \{\Phi(k)\}$$

sujeito a:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k|k) &= \mathbf{x}_0 \\
\mathbf{x}(k+j+1|k) &= f(\mathbf{x}(k+j|k), \mathbf{u}(k+j|k)), \quad j \in [0, N-1] \\
\mathbf{x}(k+j|k) &\in \mathbb{X}, \quad j \in [0, N] \\
\mathbf{u}(k+j|k) &\in \mathbb{U}, \quad j \in [0, N-1]
\end{aligned}$$

5. MPC

Obtém-se assim uma seqüência ótimas de estados:

$$\mathbf{x}^\star = \{\mathbf{x}^\star(k+1|k), \mathbf{x}^\star(k+2|k), \cdots, \mathbf{x}^\star(k+N|k)\},$$

de controle

$$\mathbf{u}^\star = \{\mathbf{u}^\star(k|k), \mathbf{u}^\star(k+1|k), \cdots, \mathbf{u}^\star(k+N-1|k)\},$$

e um custo ótimo $\Phi^\star(k)$.

- apenas o controle para o instante atual, $\mathbf{u}^\star(k|k)$, é aplicado e o mesmo procedimento repete-se para o próximo instante de amostragem;
- mecanismo chamado de *estratégia de horizonte móvel* ou *deslizante*.

6.1. Estabilização em um Ponto

- Dada uma postura qualquer $\mathbf{x}_{ref}$, encontrar uma lei de controle tal que

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{ref} = 0$$

- Condição de Brockett: não existe lei de controle suave e invariante no tempo que resolva este problema;
- $\mathbf{x}_{ref} = [0 \;\; 0 \;\; 0]^T$.

6.1. Estabilização em um Ponto

Lei de controle variante no tempo (SAMSON, AIT-ABDERRAHIM; 1991):

Transformação para um base variante no tempo:

$$z_1 = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$z_2 = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$z_3 = \theta + z_2\sin t$$

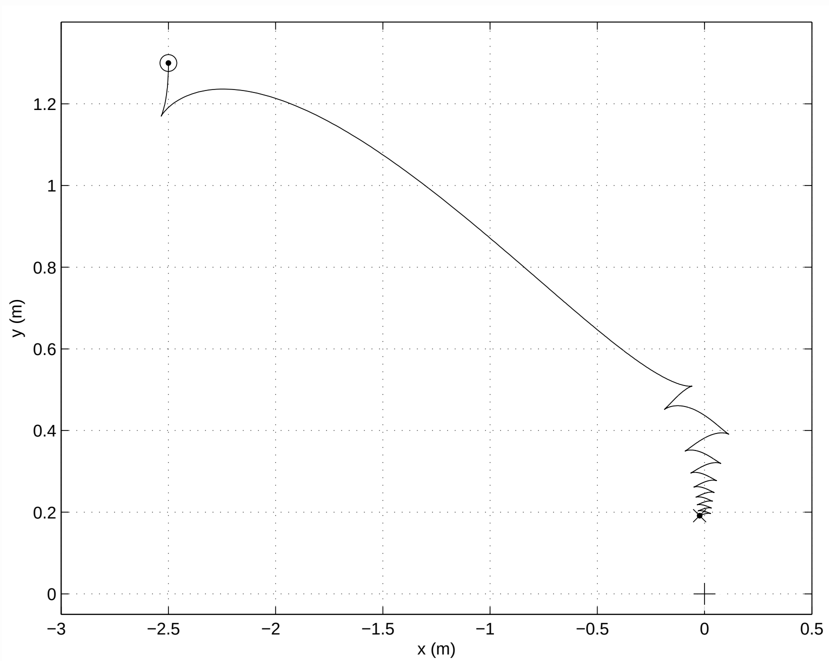
$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v + z_2 w \\ \dot{z}_2 = -z_1 w \\ \dot{z}_3 = w - z_1 w \sin t + z_2 \cos t \end{cases}$$

$$w = z_3 - z_2\cos t$$

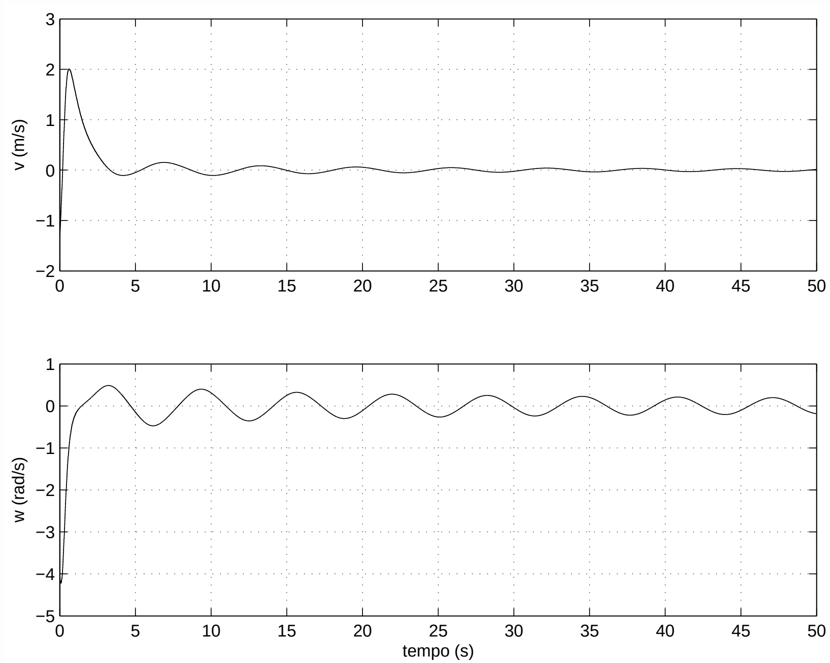
$$v = -z_1 + z_3 w \sin t$$

6.1. Estabilização em um Ponto

$$\mathbf{x}_0 = [-2,5 \;\; 1,3 \;\; \pi/2]^T$$



(a) Plano XY.

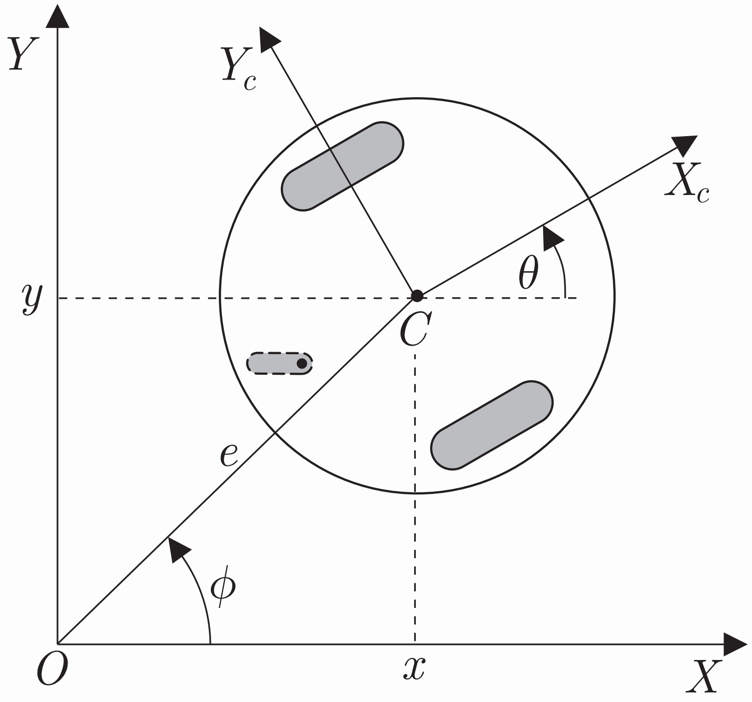


(b) Controle.

6.1. Estabilização em um Ponto

Controle por transformação descontínua de (LAGES; 1998):

$$e = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \phi = \operatorname{atan2}(y, x), \qquad \alpha = \theta - \phi$$



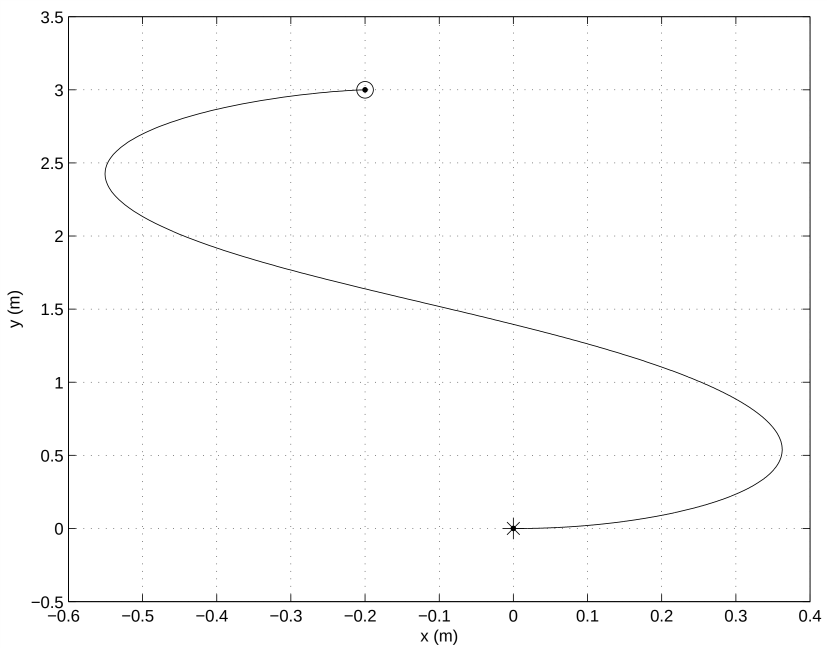
$$\begin{cases} \dot{e} = v \cos \alpha \\ \dot{\phi} = v \dfrac{\sin \alpha}{e} \\ \dot{\alpha} = -v \dfrac{\sin \alpha}{e} + w \end{cases}$$

$$v = -\gamma_1 e \cos \alpha$$

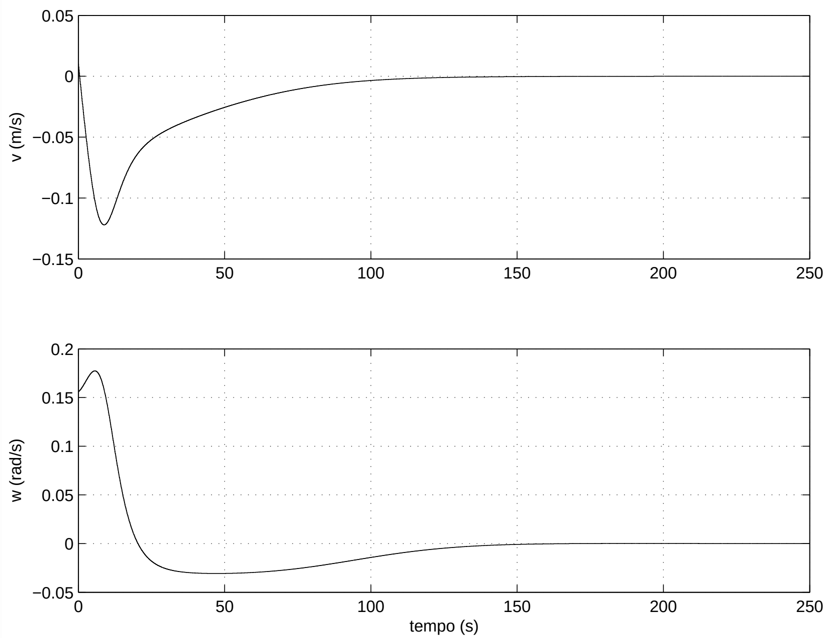
$$w = -\gamma_2 \alpha - \gamma_1 \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} (\alpha - h\phi)$$

6.1. Estabilização em um Ponto

$$\gamma_1 = 0,1 \quad \gamma_2 = 0,2 \quad h = 2 \quad \mathbf{x}_0 = [-0,2 \;\; 3 \;\; 0]^T$$



(a) Plano XY.



(b) Controle.

6.1. Estabilização em um Ponto

NMPC:

- MPC é resolvido em tempo discreto $\rightarrow$ é necessária uma discretização do modelo cinemático.

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + v(k)\cos\theta(k)T \\ y(k+1) = y(k) + v(k)\sin\theta(k)T \\ \theta(k+1) = \theta(k) + w(k)T \end{cases}$$

$$\mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$$

NMPC - Estabilização em um Ponto

NMPC:

Função de custo:

$$\Phi(k) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{x}^T(k+j+1|k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k+j+1|k)+\mathbf{u}^T(k+j|k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k+j|k)$$

Problema de otimização:

$$\mathbf{u}^\star, \mathbf{x}^\star = \arg\min_{\mathbf{u},\mathbf{x}} \{\Phi(k)\}$$

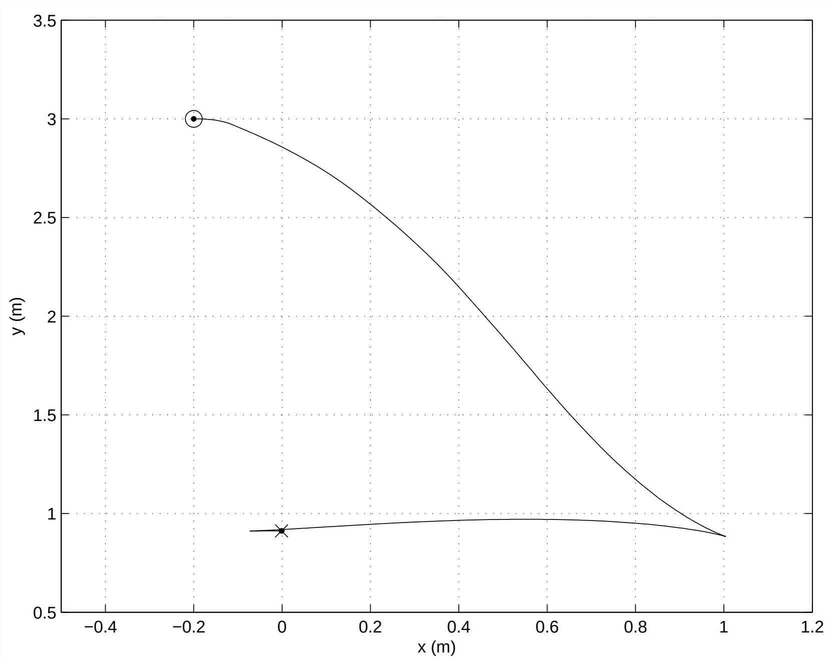
sujeito a:

$$\mathbf{x}(k|k) = \mathbf{x}_0$$

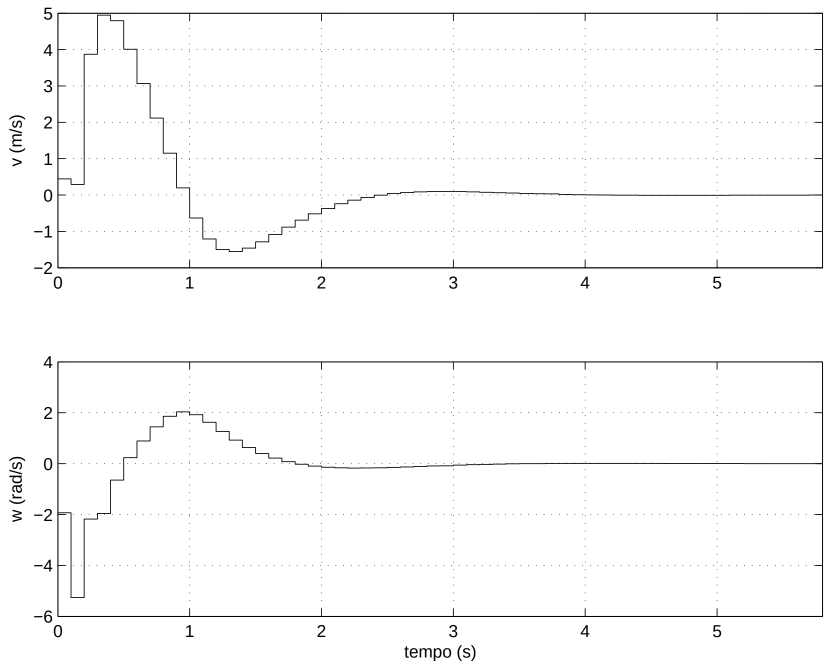
$$\mathbf{x}(k+j+1|k) = f(\mathbf{x}(k+j|k), \mathbf{u}(k+j|k)), \quad j \in [0, N-1]$$

NMPC - Estabilização em um Ponto

- $N = 5$, $\mathbf{Q} = \text{diag}(1; 1; 0,5)$ e $\mathbf{R} = \text{diag}(0,1; 0,1)$;
- $\mathbf{x}_0 = [-0,2 \;\; 3 \;\; 0]^T$. $\mathbf{x}_f = [0 \;\; 0,91 \;\; 0]^T$.



(a) Plano XY.



(b) Controle.

NMPC - Estabilização em um Ponto

- Erro em regime;
- Ambos os estados x e y dependem da mesma entrada de controle;
- **Conjecturas:**
  - o otimizador minimiza v e x e não consegue mais minimizar y, e a função de custo estabiliza em uma curva de nível não nula;
  - relativo à não holonomicidade do sistema.

NMPC - Estabilização em um Ponto

Alternativa de (ESSEN, NIJMEIJER; 2001):

$$\Phi(k) = \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{x}^T(k+j|k)\mathbf{Q}(j)\mathbf{x}(k+j|k) + \\ + \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{u}^T(k+j|k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k+j|k) + \Omega(\mathbf{x}(k+N|k))$$

- Matriz $\mathbf{Q}(j)$ crescente exponencialmente:

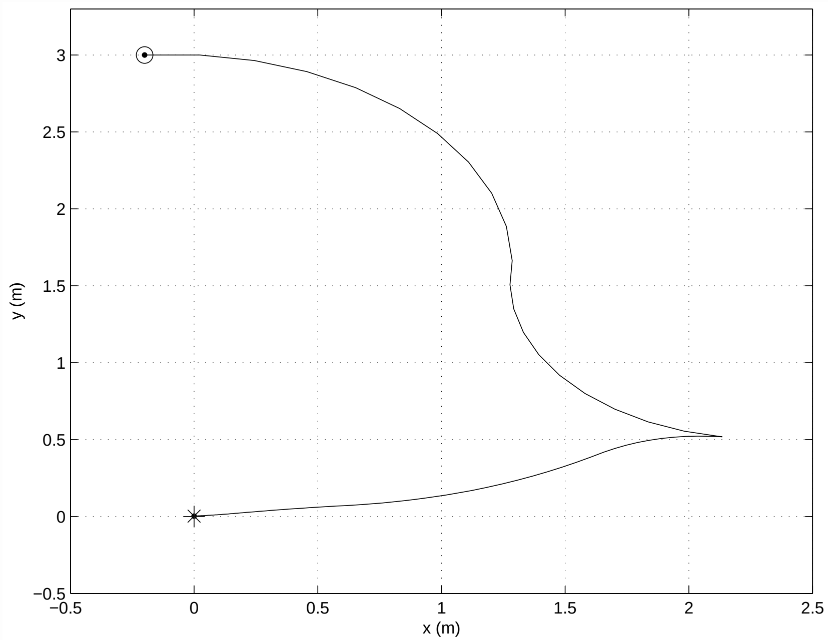
$$\mathbf{Q}(j) = 2^{j-1}\mathbf{Q}$$

- Custo terminal:

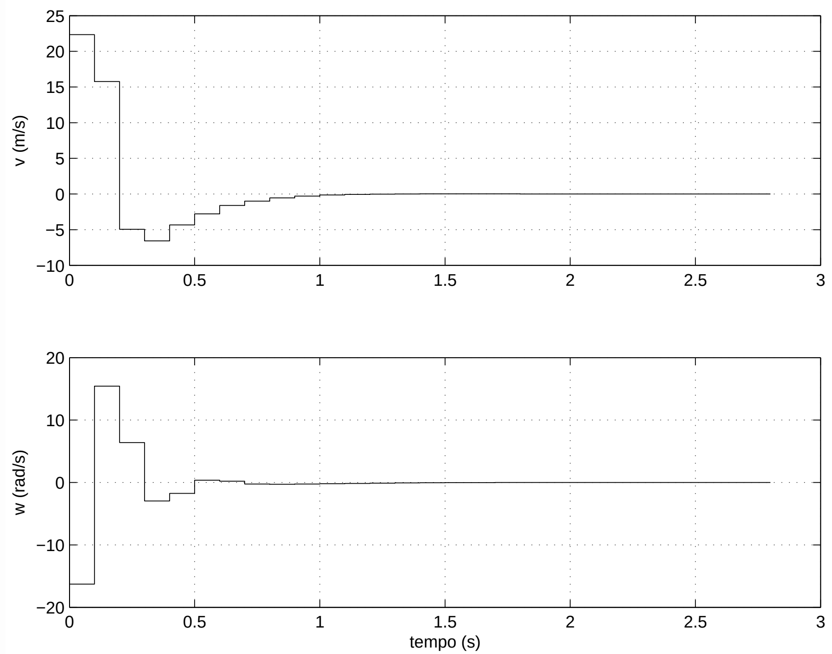
$$\Omega(\mathbf{x}(k+N|k)) = \mathbf{x}^T(k+N|k)\mathbf{P}\mathbf{x}(k+N|k)$$

NMPC - Estabilização em um Ponto

- $N = 5$, $\mathbf{Q} = \text{diag}(1; 1; 0,5)$, $\mathbf{R} = \text{diag}(0,1; 0,1)$, $\mathbf{P} = 50\mathbf{Q}(N)$;
- $\mathbf{x}_0 = [-0,2 \;\; 3 \;\; 0]^T$, $\mathbf{x}_f = [0 \;\; -0,003 \;\; 0]^T$.



(a) Plano XY.

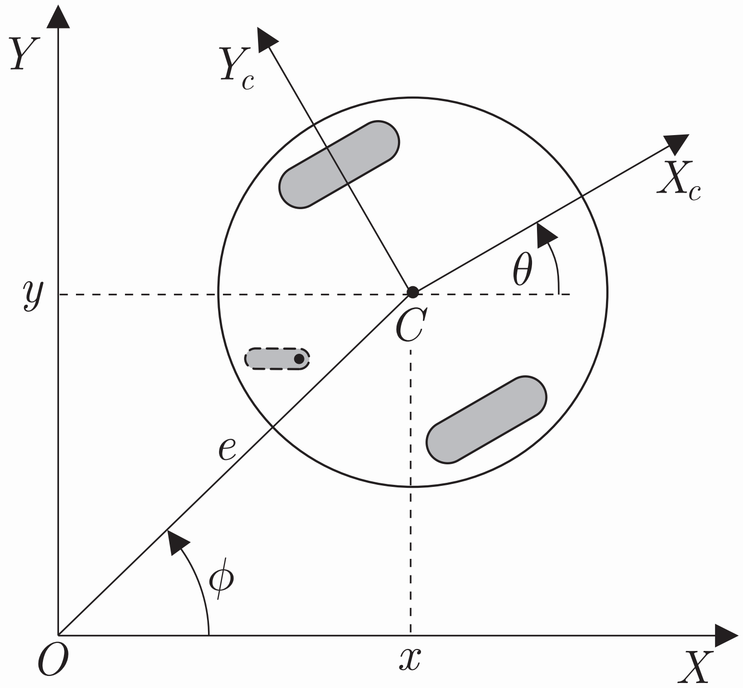


(b) Controle.

NMPC - Estabilização em um Ponto

Proposta: transformar a função de custo para coordenadas polares.

$$e = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \phi = \text{atan2}(y, x), \qquad \alpha = \theta - \phi$$



NMPC - Estabilização em um Ponto

Função de Liapunov: $V = \frac{1}{2}(\lambda e^2 + h\phi^2 + \alpha^2)$. Escrevendo matricialmente:

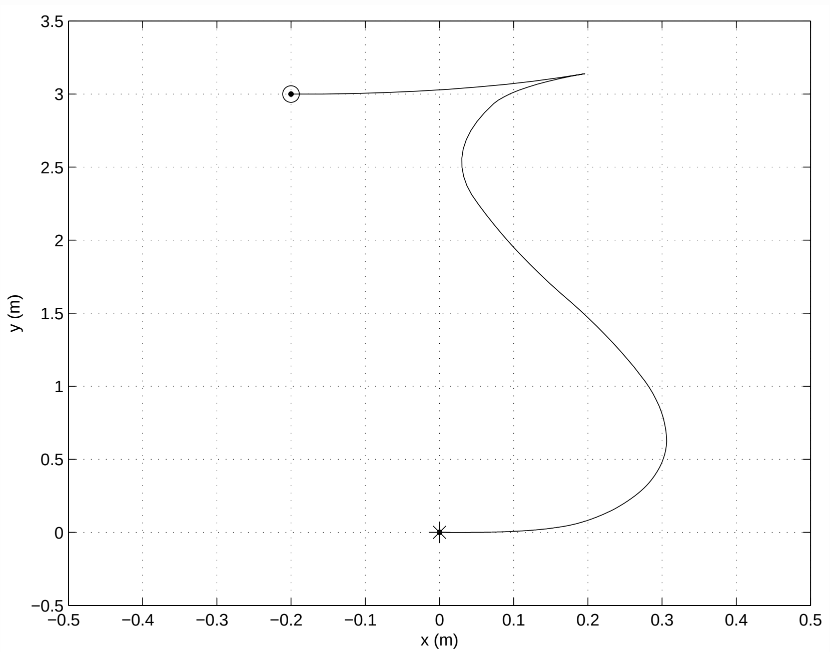
$$V = \mathbf{x}_p^T \mathbf{Q}_p \mathbf{x}_p \qquad \mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} e \\ \phi \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}h & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_p(k) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{x}_p^T(k+j|k)\mathbf{Q}_p\mathbf{x}_p(k+j|k) +$$

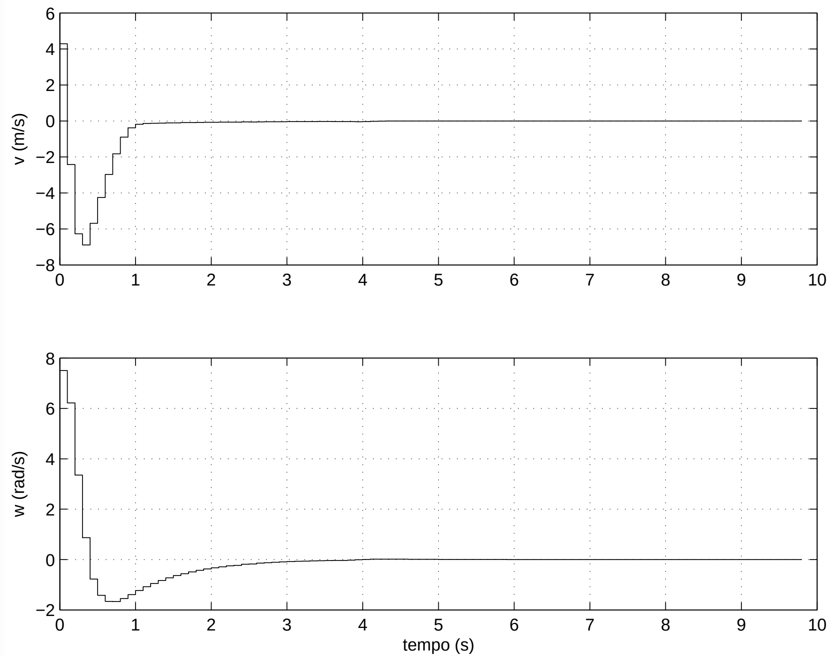
$$+ \mathbf{u}^T(k+j-1|k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k+j-1|k)$$

NMPC - Estabilização em um Ponto

- $N = 5$, $\mathbf{Q} = \text{diag}(1; 1; 0,5)$, $\mathbf{R} = \text{diag}(0,1; 0,1)$;
- $\mathbf{x}_0 = [-0,2 \;\; 3 \;\; 0]^T$. $\mathbf{x}_f = [0 \;\; 0 \;\; 0]^T$.



(a) Plano XY.



(b) Controle.

NMPC - Estabilização em um Ponto

- Com a transformação da função de custo para coordenadas polares foi possível obter-se um desempenho superior, sem o aumento do horizonte e sem a inclusão de outros termos;
- Em (LAGES; 1998), é visto que com o modelo polar é possível fazer com que todos os estados convirjam simultaneamente para a origem. Então, pode-se supor que o mesmo está acontecendo para o MPC com função de custo em coordenadas polares.

NMPC - Estabilização em um Ponto

Inclusão de restrições no controle:

$$-\overline{v} \leq v \leq \overline{v}, \qquad \overline{v} = 0,4712\, m/s$$

$$-\overline{w} \leq w \leq \overline{w}, \qquad \overline{w} = 3,7699\, rad/s$$

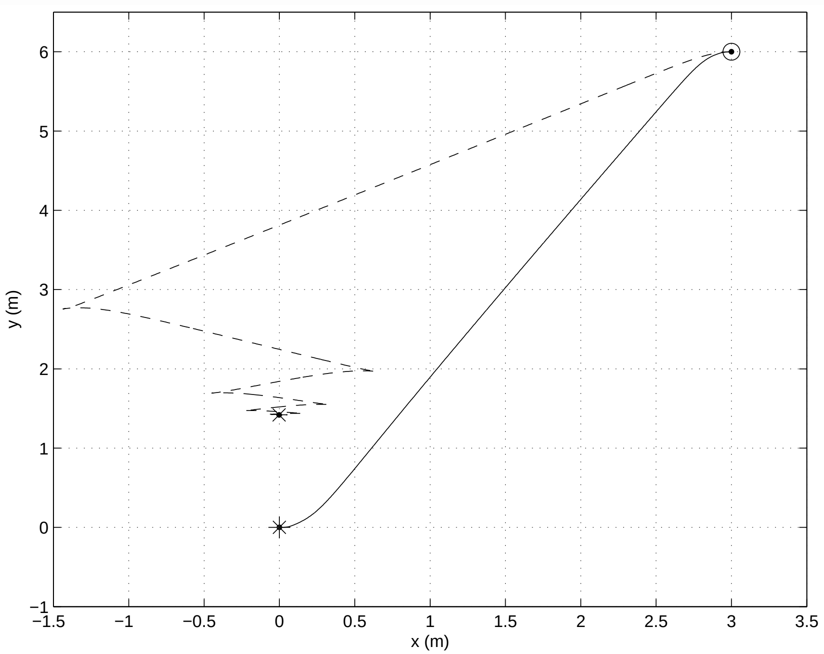
$$\mathbf{u}^{\star}, \mathbf{x}^{\star} = \arg\min_{\mathbf{u},\mathbf{x}} \{\Phi_p(k)\}$$

sujeito a:

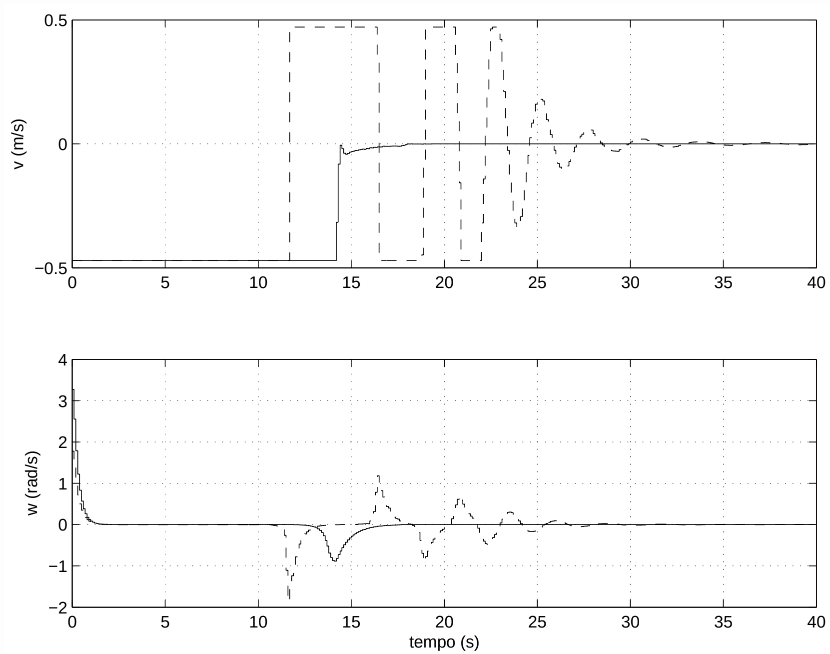
$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k|k) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(k+j+1|k) &= f(\mathbf{x}(k+j|k), \mathbf{u}(k+j|k)), \quad j \in [0, N-1] \\ \mathbf{D}\mathbf{u}(k+j|k) &\leq \mathbf{d}, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j \in [0, N-1] \end{aligned}$$

NMPC - Estabilização em um Ponto

- $N = 5$, $\mathbf{Q} = \mathrm{diag}(1; 1; 0,5)$ e $\mathbf{R} = \mathrm{diag}(0,1; 0,1)$;
- $\mathbf{x}_0 = [3 \;\; 6 \;\; 0]^T$.
- Linha contínua: NMPC proposto; linha tracejada: NMPC original.



(a) Plano XY.



(b) Controle.

NMPC - Estabilização em um Ponto

Inclusão de restrições no estado:

$$x \leq -1; 3 \leq y \leq 5, \quad \text{se} \quad x < -1,$$
$$-1 \leq x \leq 1; \qquad y \leq 5, \quad \text{se} \quad x \geq -1$$

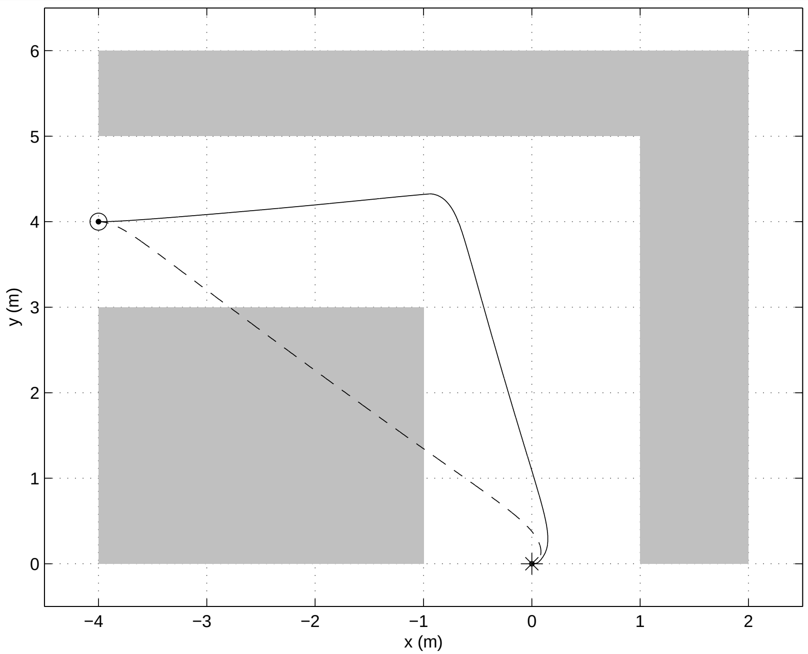
$$\mathbf{u}^\star, \mathbf{x}^\star = \arg\min_{\mathbf{u},\mathbf{x}} \{\Phi_p(k)\}$$

sujeito a:

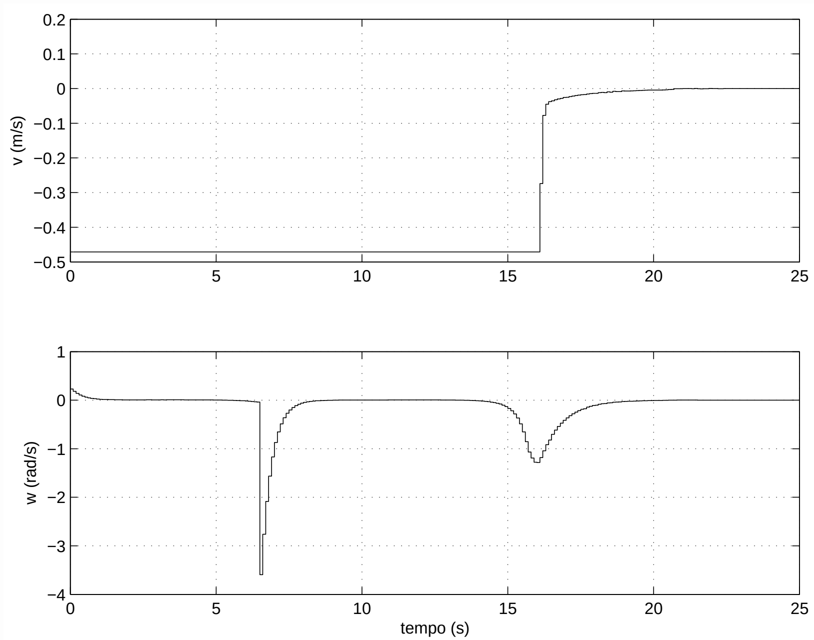
$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k|k) &= \mathbf{x}_0 \\
\mathbf{x}(k+j+1|k) &= f(\mathbf{x}(k+j|k), \mathbf{u}(k+j|k)), && j \in [0, N-1] \\
\mathbf{D}\mathbf{u}(k+j|k) &\leq \mathbf{d}, && j \in [0, N-1] \\
\mathbf{C}\mathbf{x}(k+j|k) &\leq \mathbf{c}_1, \quad \text{se} \quad x(k|k) < -1, && j \in [0, N] \\
\mathbf{C}\mathbf{x}(k+j|k) &\leq \mathbf{c}_2, \quad \text{se} \quad x(k|k) \geq -1, && j \in [0, N]
\end{aligned}$$

NMPC - Estabilização em um Ponto

- $N = 5$, $\mathbf{Q} = \text{diag}(1; 1; 0,5)$ e $\mathbf{R} = \text{diag}(0,1; 0,1)$;
- $\mathbf{x}_0 = [-4 \;\; 4 \;\; \pi]^T$.
- Linha contínua: NMPC com restrição em $\mathbf{x}$; linha tracejada: NMPC sem restrição em $\mathbf{x}$.



(a) Plano XY.

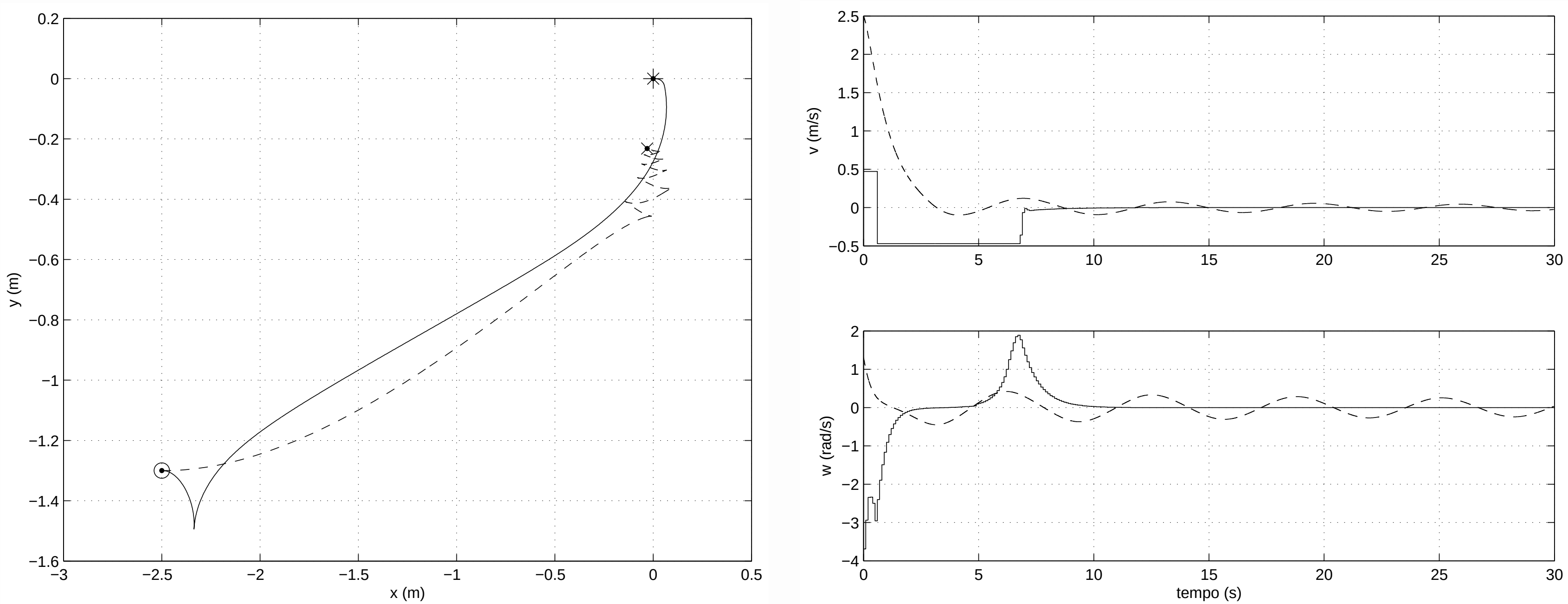


(b) Controle.

NMPC - Estabilização em um Ponto

Comparação:

- linha contínua: NMPC proposto;
- linha tracejada: controle variante no tempo de (SAMSON, AIT-ABDERRAHIM; 1991).

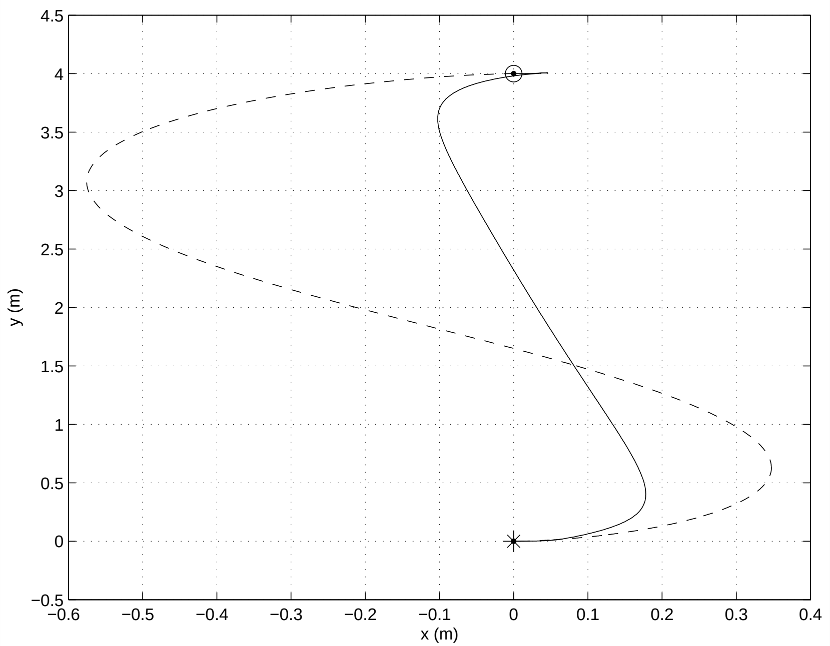


(a) Plano XY. (b) Controle.

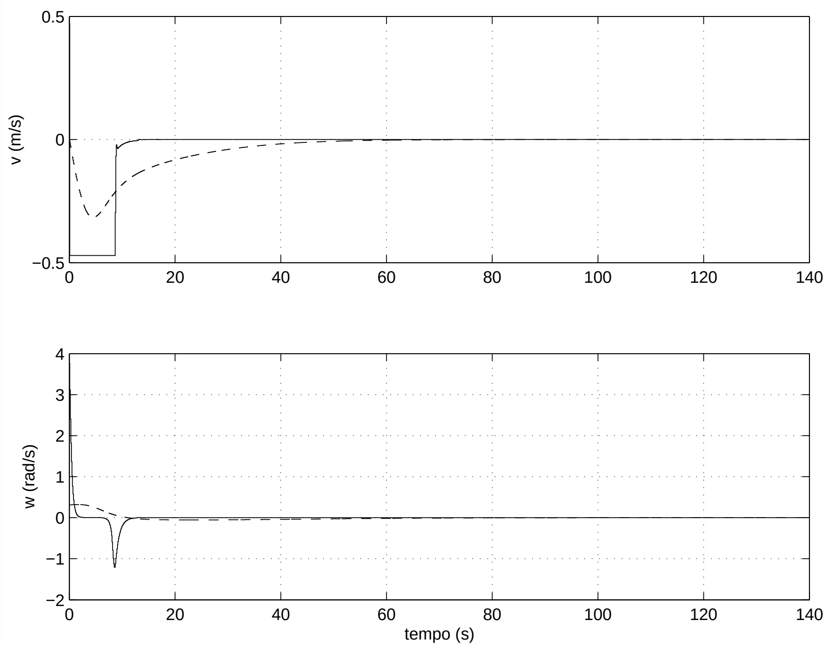
NMPC - Estabilização em um Ponto

Comparação:

- linha contínua: NMPC proposto;
- linha tracejada: lei não suave de (LAGES; 1998).



(a) Plano XY.



(b) Controle.

NMPC - Estabilização em um Ponto

O custo computacional:

- Considerações acerca do esforço computacional do NMPC precisam ser feitas a fim de se avaliar a aplicabilidade da técnica;
- Critério de avaliação: número de operações em ponto flutuante por período de amostragem (valor médio ao longo da trajetória);
- Computador Athlon 2600+: 57.600.000 OPF por período de amostragem ($T = 100\ ms$);
- Condições de simulação: NMPC com restrições no controle: $\mathbf{Du} \leq \mathbf{d}$.

O Custo Computacional

- *Caso 1*: Função de custo em coordenadas cartesianas;
- *Caso 2*: Função de custo de (ESSEN, NIJMEIJER; 2001);
- *Caso 3*: Função de custo em coordenadas polares.

Horizonte	OPF por período de amostragem		
	Caso 1	Caso 2	Caso 3
5	640.970	1.401.900	816.800
10	11.399.000	38.388.000	12.827.000
12	24.589.000	92.569.000	43.442.000
15	62.619.000	607.710.000	139.210.000

6.2. Rastreamento de Trajetória

- O problema de rastreamento de trajetória pode ser posto como encontrar uma lei de controle tal que

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{ref}(t) = 0$$

- Robô de referência:

$$\begin{cases} \dot{x}_{ref} = v_{ref} \cos \theta_{ref} \\ \dot{y}_{ref} = v_{ref} \sin \theta_{ref} \\ \dot{\theta}_{ref} = w_{ref} \end{cases}$$

- $\mathbf{x}_{ref}$ e $\mathbf{u}_{ref}$ são determinados previamente.

NMPC - Rastreamento de Trajetória

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_{ref}(k)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}_{ref}(k)$$

$$\Phi(k) = \sum_{j=1}^{N} \tilde{\mathbf{x}}^T(k+j|k)\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{x}}(k+j|k) + \tilde{\mathbf{u}}^T(k+j-1|k)\mathbf{R}\tilde{\mathbf{u}}(k+j-1|k)$$

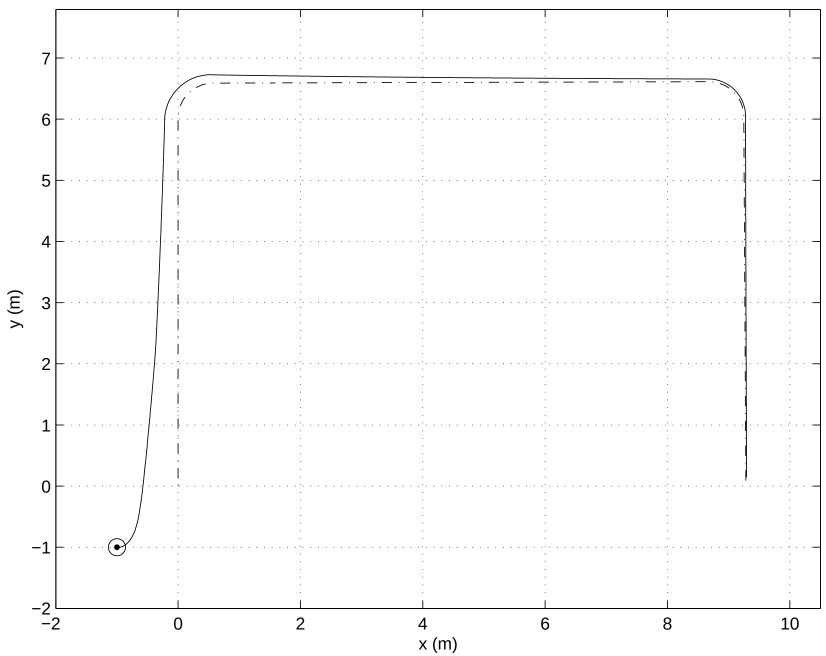
$$\mathbf{u}^\star,\ \mathbf{x}^\star = \arg\min_{\mathbf{u},\mathbf{x}} \{\Phi(k)\}$$

sujeito a:

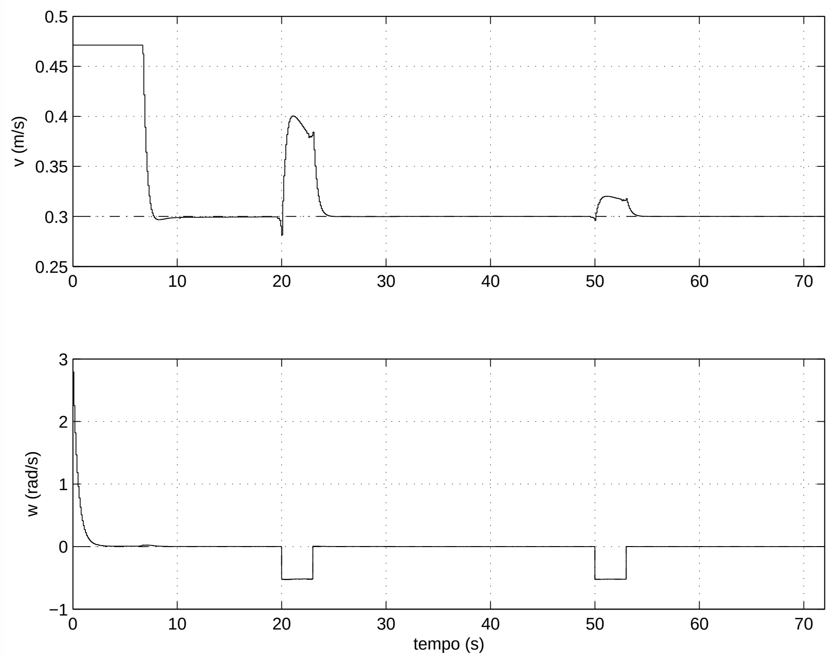
$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k|k) &= \mathbf{x}_0 \\
\mathbf{x}(k+j|k) &= f(\mathbf{x}(k+j-1|k), \mathbf{u}(k+j-1|k)), \quad && j \in [1, N] \\
\mathbf{D}\mathbf{u}(k+j|k) &\leq \mathbf{d}, && j \in [0, N-1]
\end{aligned}$$

NMPC - Rastreamento de Trajetória

- $N = 5$, $\mathbf{Q} = \mathrm{diag}(1; 1; 0,5)$, $\mathbf{R} = \mathrm{diag}(0,1; 0,1)$;
- Trajetória de referência em "U". $\mathbf{x}_0 = [-1 \;\; -1 \;\; 0]^T$.



(a) Plano XY.



(b) Controle.

NMPC - Rastreamento de Trajetória

- O robô converge para a referência suavemente;
- Nota-se uma baixa taxa de convergência.

Alternativa: Função de custo proposta por (ESSEN, NIJMEIJER; 2001)

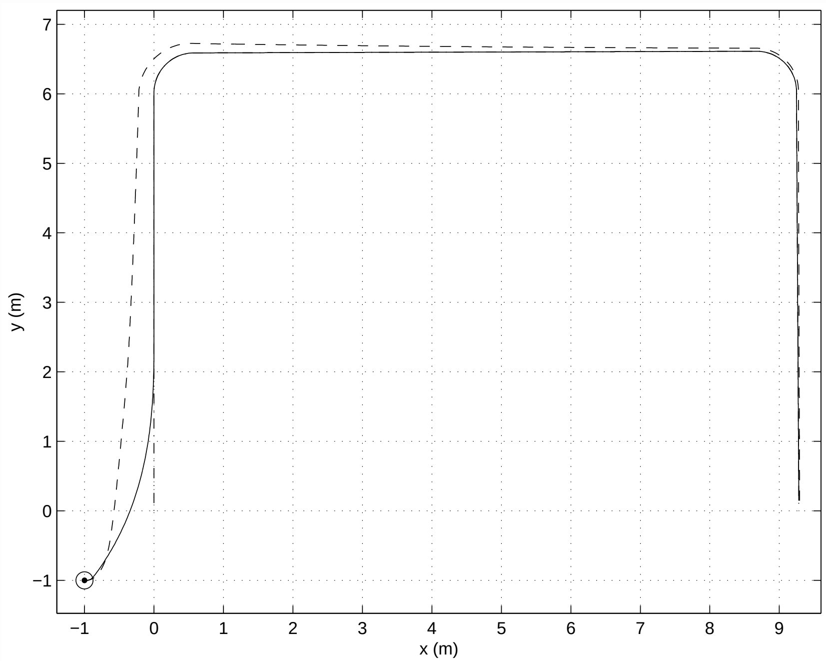
$$\Phi(k) = \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{\mathbf{x}}^T(k+j|k)\mathbf{Q}(j)\tilde{\mathbf{x}}(k+j|k) + \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\mathbf{u}}^T(k+j|k)\mathbf{R}\tilde{\mathbf{u}}(k+j|k) + \Omega(\tilde{\mathbf{x}}(k+N|k))$$

Matriz $\mathbf{Q}(j)$ crescente exponencialmente: $\mathbf{Q}(j) = 2^{j-1}\mathbf{Q}$

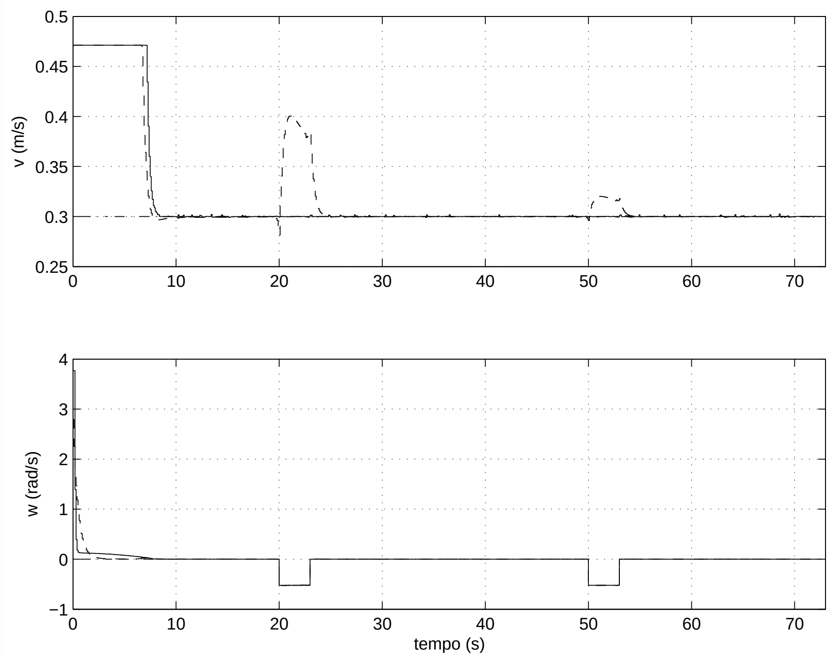
Custo terminal: $\Omega(\tilde{\mathbf{x}}(k+N|k)) = \tilde{\mathbf{x}}^T(k+N|k)\mathbf{P}\tilde{\mathbf{x}}(k+N|k)$

NMPC - Rastreamento de Trajetória

- $N = 5$, $\mathbf{Q} = \mathrm{diag}(1; 1; 0,5)$, $\mathbf{R} = \mathrm{diag}(0,1; 0,1)$, $\mathbf{P} = 30\mathbf{Q}(N)$; $\quad \mathbf{x}_0 = [-1 \ \ -1 \ \ 0]^T$;
- Trajetória de referência em "U"; Linha contínua: Φ de (ESSEN, NIJMEIJER; 2001); linha tracejada: Φ original.



(a) Plano XY.



(b) Controle.

6.2. Rastreamento de Trajetória

- Se o sistema é não linear ou existem restrições não lineares → problema de otimização não convexo;
- Se o sistema é linear, as restrições são lineares e o custo é quadrático → programação quadrática → problema de otimização convexo;

6.2. Rastreamento de Trajetória

- Se o sistema é não linear ou existem restrições não lineares → problema de otimização não convexo;
- Se o sistema é linear, as restrições são lineares e o custo é quadrático → programação quadrática → problema de otimização convexo;

- *Idéia:* desenvolver um algoritmo de MPC linear, através da transformação do problema de otimização em um problema de programação quadrática → o modelo cinemático é linearizado sucessivamente ao longo da trajetória de referência.

LMPC - Rastreamento de Trajetória

- Modelo cinemático: $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$;
- Modelo de referência: $\dot{\mathbf{x}}_{ref} = f(\mathbf{x}_{ref}, \mathbf{u}_{ref})$;

Através de expansão em séries de Taylor, pode-se chegar ao seguinte modelo linear e variante no tempo, válido em torno de $(\mathbf{x}_{ref}, \mathbf{u}_{ref})$:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}, \qquad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_{ref} \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{u} - \mathbf{u}_{ref} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v_{ref} \sin\theta_{ref} \\ 0 & 0 & v_{ref}\cos\theta_{ref} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{ref} & 0 \\ \sin\theta_{ref} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

LMPC - Rastreamento de Trajetória

O problema de programação quadrática:

$$\Phi(k) = \sum_{j=1}^{N} \tilde{\mathbf{x}}^T(k+j|k)\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{x}}(k+j|k) + \tilde{\mathbf{u}}^T(k+j-1|k)\mathbf{R}\tilde{\mathbf{u}}(k+j-1|k)$$

LMPC - Rastreamento de Trajetória

O problema de programação quadrática:

$$\Phi(k) = \sum_{j=1}^{N} \tilde{\mathbf{x}}^T(k+j|k)\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{x}}(k+j|k) + \tilde{\mathbf{u}}^T(k+j-1|k)\mathbf{R}\tilde{\mathbf{u}}(k+j-1|k)$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{\Phi}(k) = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{u}}^T(k)\mathbf{H}(k)\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{f}^T(k)\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{g}(k)$$

$$\mathbf{H}(k) = 2\left(\bar{\mathbf{B}}(k)^T\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{B}}(k) + \bar{\mathbf{R}}\right)$$

$$\mathbf{f}(k) = 2\bar{\mathbf{B}}^T(k)\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{A}}(k)\tilde{\mathbf{x}}(k|k)$$

$$\mathbf{g}(k) = \tilde{\mathbf{x}}^T(k|k)\bar{\mathbf{A}}^T(k)\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{A}}(k)\tilde{\mathbf{x}}(k|k)$$

LMPC - Rastreamento de Trajetória

O problema de programação quadrática:

$$\bar{\Phi}'(k) = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{u}}^T(k)\mathbf{H}(k)\bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{f}^T(k)\bar{\mathbf{u}}(k)$$

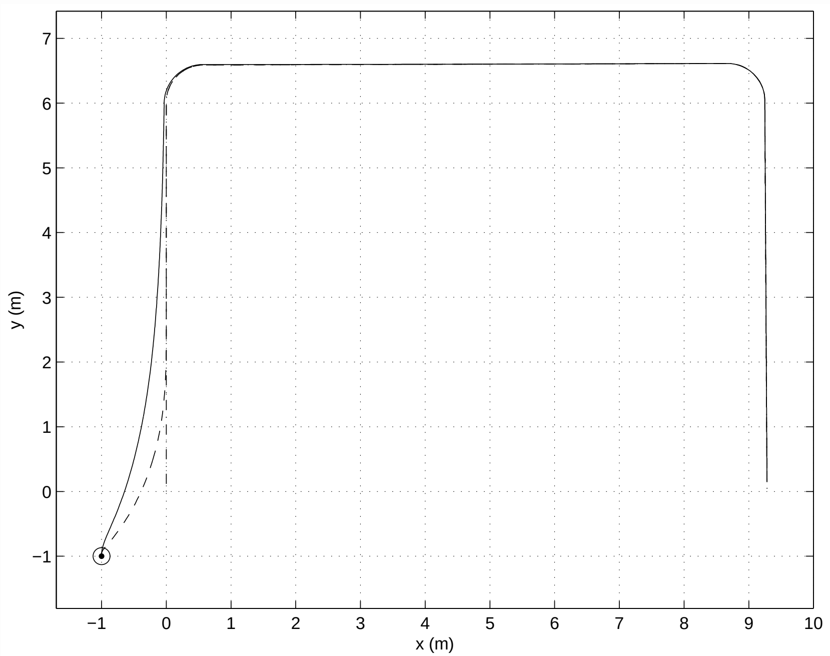
$$\tilde{\mathbf{u}}^\star = \arg\min_{\tilde{\mathbf{u}}} \left\{\bar{\Phi}'(k)\right\}$$

sujeito a: $\mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}(k+j|k) \leq \mathbf{d}, \quad j \in [0, N-1]$

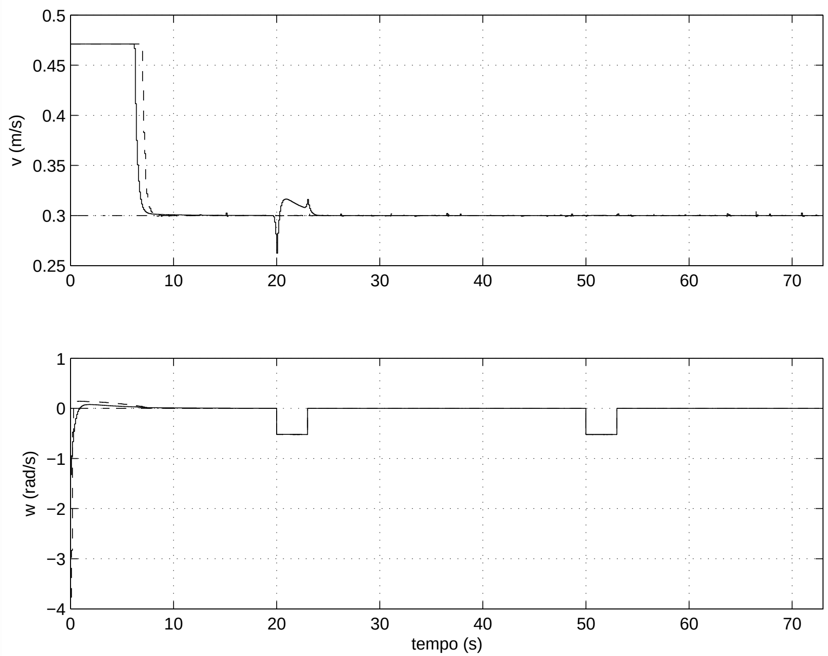
- variável de decisão: $\tilde{\mathbf{u}}$;
- a dinâmica do sistema e a condição inicial estão inseridas na função de custo.

LMPC - Rastreamento de Trajetória

- $N = 5$, $\mathbf{Q} = \mathrm{diag}(1; 1; 0,5)$, $\mathbf{R} = \mathrm{diag}(0,1; 0,1)$, $\mathbf{Q}(j) = 2^{j-1}\mathbf{Q}$, $\mathbf{P} = 30\mathbf{Q}(N)$; $\mathbf{x}_0 = [-1 \quad -1 \quad \pi/2]^T$;
- Trajetória de referência em "U";
- Linha contínua: LMPC; linha tracejada: NMPC.



(a) Plano XY.



(b) Controle.

LMPC - Rastreamento de Trajetória

O custo computacional:

- MPC não linear: $N \times (n+m)$ variáveis de decisão;
- MPC linear por QP: $N \times m$ variáveis de decisão;
- Critério de avaliação: número de operações em ponto flutuante por período de amostragem;
- Computador Athlon 2600+: 57.600.000 OPF por período de amostragem ($T = 100\ ms$);

Comparação entre:

- *Caso 1*: MPC não linear;
- *Caso 2*: MPC linear;
- Ambos com Φ com **Q** exponencial e custo terminal Ω.

O Custo Computacional

- Condições de simulação: trajetória de referência circular e restrições nas entradas de controle: $\mathbf{Du} \leq \mathbf{d}$.

Horizonte	OPF	
	NMPC	LMPC
5	1.109.800	16.546
10	50.156.000	94.792
15	536.410.000	352.360
20	—	908.010

7. Conclusões

- Estudo de técnicas de MPC para robôs móveis não holonômicos envolvendo dois problemas:
  - Estabilização em um ponto;
  - Rastreamento de trajetória;
- Considerações acerca do esforço computacional foram feitas.

7. Conclusões

Estabilização em um ponto:

- Identificado um erro em regime nas variáveis de estado;
- A introdução de uma transformação de coordenadas na função de custo resolveu o problema;
- *Vantagens sobre leis clássicas:*
  - existência de um critério de desempenho a ser minimizado;
  - a capacidade de considerar restrições de um forma direta;
  - a sintonia dos parâmetros é intuitiva;
- O controle é gerado de forma a respeitar implicitamente as condições de Brockett.

7. Conclusões

Rastreamento de trajetória:

- O problema foi satisfatoriamente resolvido;
- Melhora do desempenho com a inclusão de outros termos na função de custo;
- A fim de diminuir o esforço computacional, uma abordagem alternativa foi desenvolvida, utilizando MPC linear;
- A desvantagem é que a linearização é válida somente em torno do ponto de referência;
- Foi possível manter um bom desempenho se comparado com o método não linear.

7. Conclusões

O custo computacional:

- MPC: solução de um problema de otimização para cada instante de amostragem, apresentando um elevado custo computacional;
- Entretanto, a utilização de processadores rápidos e algoritmos eficientes torna viável uma implementação real;
- Para o problema de rastreamento de trajetória, foi possível diminuir consideravelmente o custo computacional;

8. Trabalhos Futuros

- Prova formal da estabilidade do sistema em malha fechada:
  - modificação da função de custo com a inclusão de um custo terminal e restrições nas variáveis de estado (MAYNE; 2000);
- Inclusão de trajetórias de aproximação para o caso do MPC linear;
- Validação experimental;
- Extensão dos algoritmos para o modelo dinâmico do robô;
- Consideração de observadores de estado.

Obrigado!

Felipe Kühne
kuhne@eletro.ufrgs.br

João Manoel Gomes da Silva Jr.
jmgomes@eletro.ufrgs.br

Walter Fetter Lages
fetter@eletro.ufrgs.br

http://www.eletro.ufrgs.br/~kuhne/diss.pdf