Considerando o sistema:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

Função de custo:

$$\Phi(k) = \sum_{j=1}^{N} x^T(k+j|k)Qx(k+j|k) + u^T(k+j-1|k)Ru(k+j-1|k),$$

onde N é o horizonte de predição.

Recursivamente aplicando

$$x(k+j|k) = A^j x(k|k) + \sum_{i=0}^{j-1} A^{j-1-i}Bu(k+j|k)$$

e escrevendo

$$\overline{x} = \overline{A}x(k|k) + S\overline{u}, \tag{1}$$

onde

$$\overline{x} \triangleq \begin{bmatrix} x(k+1|k) \\ x(k+2|k) \\ \vdots \\ x(k+N|k) \end{bmatrix}$$

$$\overline{u} \triangleq \begin{bmatrix} u(k|k) \\ u(k+1|k) \\ \vdots \\ u(k+N-1|k) \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} \triangleq \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} \triangleq \begin{bmatrix} B & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ AB & B & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \cdots & B \end{bmatrix},$$

tem-se que:

$$\Phi(k) = \overline{x}^T\overline{Q}\overline{x} + \overline{u}^T\overline{R}\overline{u}, \tag{2}$$

onde

$$\overline{Q} \triangleq \begin{bmatrix} Q & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & Q \end{bmatrix} \qquad \overline{R} \triangleq \begin{bmatrix} R & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & R \end{bmatrix}$$

Expandindo a função de custo (2) com (1), tem-se:

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= \left[x^T(k|k)\overline{A}^T + \overline{u}^T S^T\right] \overline{Q} \left[\overline{A}^T x(k|k) + S\overline{u}\right] + \overline{u}^T\overline{R}\overline{u} \\ &= x^T(k|k)\overline{A}^T\overline{QA}x(k|k) + x^T(k|k)\overline{A}^T\overline{Q}S\overline{u} + \overline{u}^T S^T\overline{QA}x(k|k) + \overline{u}^T S^T\overline{Q}S\overline{u} + \overline{u}^T\overline{R}\overline{u} \end{aligned}$$

Os termos quadráticos em $\overline{u}$ são

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\overline{u}^T H\overline{u} &= \overline{u}^T S^T\overline{Q}S\overline{u} + \overline{u}^T\overline{R}\overline{u} \\ &= \overline{u}^T \left(S^T\overline{Q}S + \overline{R}\right)\overline{u} \end{aligned}$$

e

$$H = 2\left(S^T\overline{Q}S + \overline{R}\right)$$

Os termos lineares em $\overline{u}$ são:

$$\begin{aligned} f^T\overline{u} &= x^T(k|k)\overline{A}^T\overline{Q}S\overline{u} + \overline{u}^T S^T\overline{QA}x(k|k) \\ &= 2x^T(k|k)\overline{A}^T\overline{Q}S\overline{u} \end{aligned}$$

e

$$f = 2S^T\overline{QA}x(k|k)$$

Assim, $\Phi(k)$ é escrita na forma quadrática padrão

$$\Phi(k) = \frac{1}{2}\overline{u}^T\overline{H}\overline{u} + f^T\overline{u} + c$$

onde c é independente de $\overline{u}$ e não importa para o problema de minimização.