

Rastreamento de trajetória de robôs móveis usando controle preditivo

Felipe Kühne, M.Sc.

João Manoel Gomes da Silva Jr., Ph.D.

Walter Fetter Lages, Ph.D.

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Escola de Engenharia

Departamento de Engenharia Elétrica

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica



Organização

1. Motivações
2. Sistemas não holonômicos
3. Formulação do problema
4. MPC não linear
5. MPC linear
6. O custo computacional
7. Conclusões

1. Motivações

- Técnicas tradicionais de rastreamento de trajetória geralmente não apresentam bons resultados, devido às restrições nos estados e nas entradas de controle que existem em sistemas reais;
- As trajetórias resultantes em malha fechada apresentam movimentos oscilatórios desnecessários;
- Os parâmetros de sintonia são pouco intuitivos.

1. Motivações

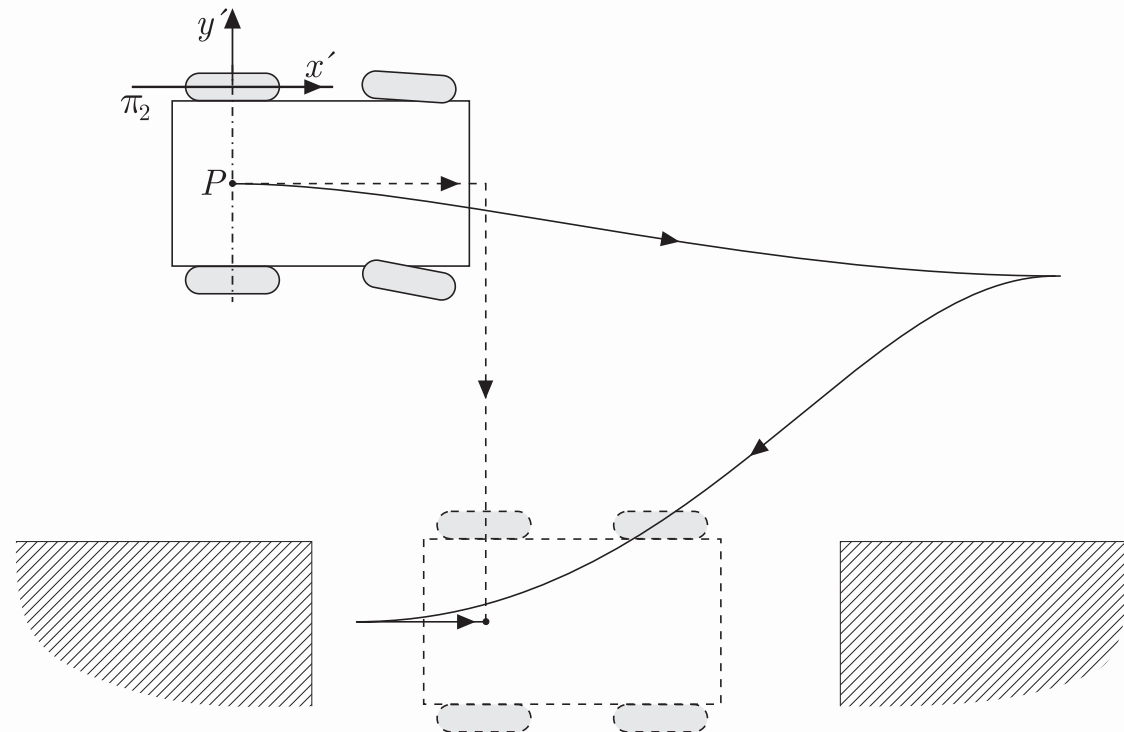
Com o MPC, é possível:

- Considerar, de forma direta, restrições nos estados e nas entradas de controle;
- Utilizar um critério explícito de performance que é minimizado durante o cálculo da lei de controle;
- Sintonizar os parâmetros de controle de forma bastante intuitiva.

2. Sistemas Não Holonômicos

- Sistemas que possuem restrições ao seu movimento;
- A movimentação do sistema é realizada de forma a satisfazer as restrições não holonômicas.

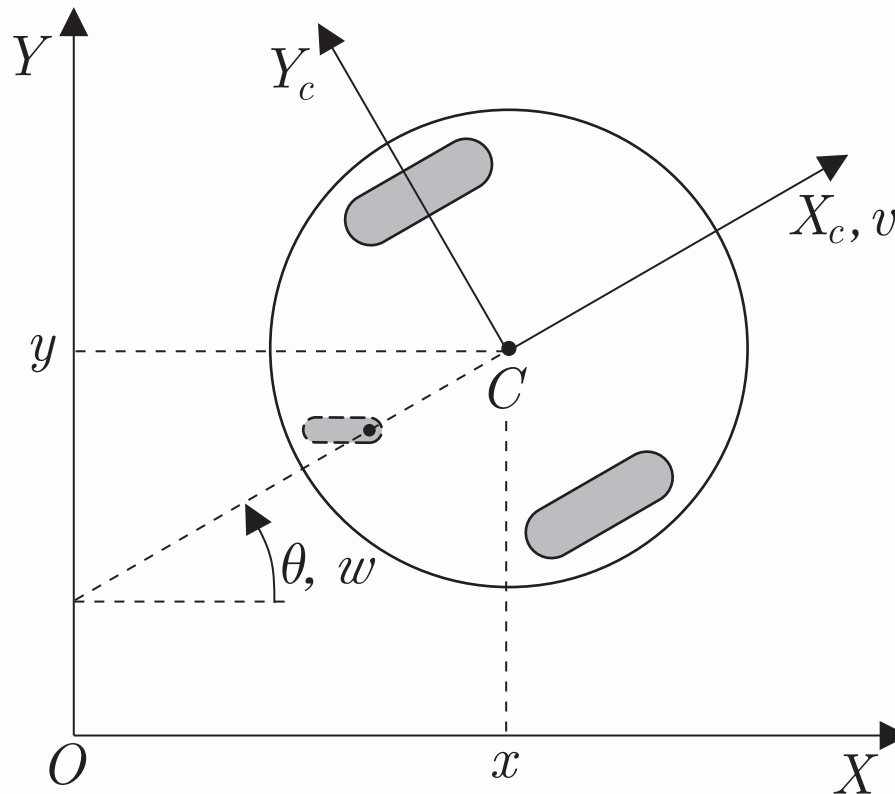
Exemplo:



3. Formulação do Problema

$\mathbf{x} = [x \ y \ \theta]^T$: estados de configuração

$\mathbf{u} = [v \ w]^T$: entradas de controle



$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = w \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

3. Formulação do Problema

- Sistema em tempo discreto:

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + v(k) \cos \theta(k)T \\ y(k+1) = y(k) + v(k) \sin \theta(k)T \\ \theta(k+1) = \theta(k) + w(k)T \end{cases}$$

$$\mathbf{x}(k+1) = f_d(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$$

- Problema de rastreamento de trajetória:

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_r(k) = 0,$$

onde \mathbf{x}_r é uma trajetória de referência dada por um sistema de referência $\mathbf{x}_r(k+1) = f_d(\mathbf{x}_r(k), \mathbf{u}_r(k))$.

4. Controle Preditivo (MPC)

- Modelo do sistema \rightarrow predição dos estados dentro de um intervalo de tempo finito (*horizonte de predição*):

$$\mathbf{x}(k + j + 1|k) = f(\mathbf{x}(k + j|k), \mathbf{u}(k + j|k))$$

- Um problema de otimização é resolvido em cada instante de amostragem, de forma a minimizar uma função de custo.

4. MPC

Função de custo:

$$\Phi(k) = \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{x}}^T(k+j+1|k) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}(k+j+1|k) + \tilde{\mathbf{u}}^T(k+j|k) \mathbf{R} \tilde{\mathbf{u}}(k+j|k)$$

onde:

- $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_r(k)$;
- $\tilde{\mathbf{u}}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}_r(k)$;
- k : instante de amostragem, $k \in \mathbb{N}^+$;
- N : horizonte de predição;
- \mathbf{Q} : matriz de ponderação dos estados;
- \mathbf{R} : matriz de ponderação do controle.

4. MPC não linear - NMPC

O problema de minimização da função de custo é resolvido *on line*, para cada instante de amostragem k :

$$\mathbf{u}^*, \mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{u}, \mathbf{x}} \{ \Phi(k) \}$$

sujeito a:

$$\mathbf{x}(k|k) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x}(k + j + 1|k) = f(\mathbf{x}(k + j|k), \mathbf{u}(k + j|k)),$$

$$\mathbf{D}\mathbf{u}(k + j|k) \leq \mathbf{d},$$

$$\text{com } j \in [0, N - 1], \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{max} \\ -\mathbf{u}_{min} \end{bmatrix}$$

4. NMPC

Inclui-se ainda um custo terminal na função de custo (ESSEN, NIJMEIJER; 2001) a fim de aumentar a taxa de convergência.

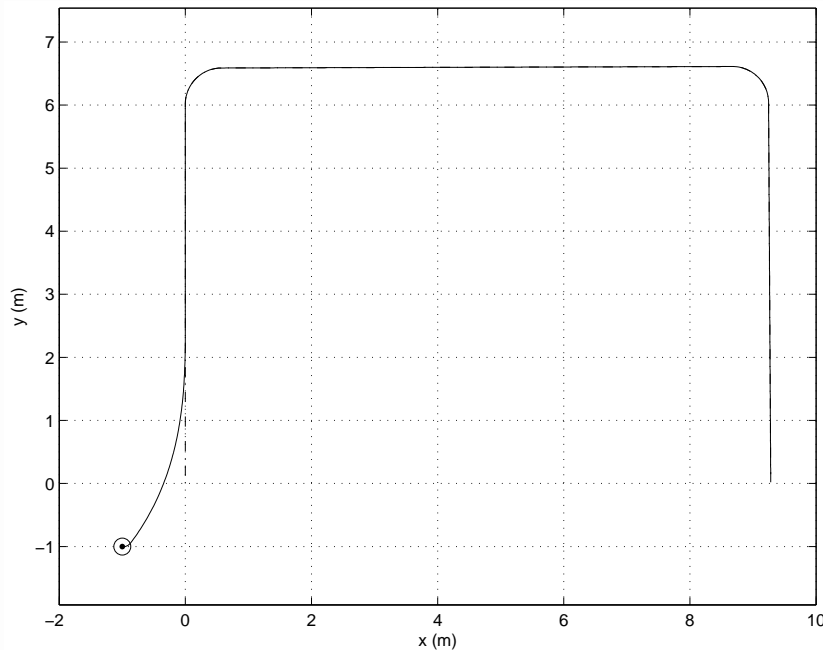
$$\begin{aligned}\Phi(k) = & \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{\mathbf{x}}^T(k+j|k) \mathbf{Q}(j) \tilde{\mathbf{x}}(k+j|k) + \\ & + \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\mathbf{u}}^T(k+j|k) \mathbf{R} \tilde{\mathbf{u}}(k+j|k) + \Omega(\tilde{\mathbf{x}}(k+N|k))\end{aligned}$$

Matriz $\mathbf{Q}(j)$ crescente exponencialmente: $\mathbf{Q}(j) = 2^{j-1} \mathbf{Q}$

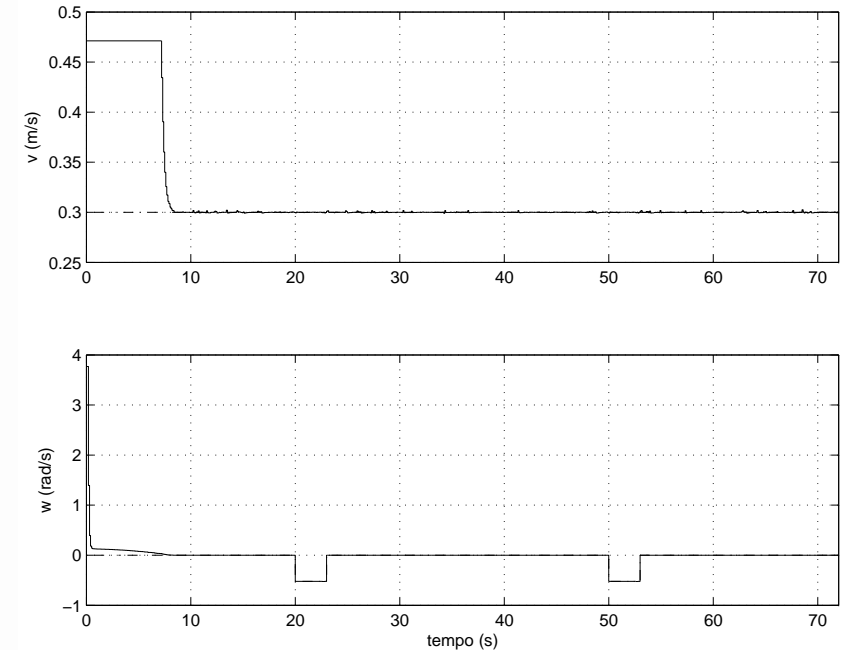
Custo terminal: $\Omega(\tilde{\mathbf{x}}(k+N|k)) = \tilde{\mathbf{x}}^T(k+N|k) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}(k+N|k)$

4. NMPC

- $N = 5$, $\mathbf{Q} = \text{diag}(1; 1; 0, 5)$, $\mathbf{R} = \text{diag}(0, 1; 0, 1)$,
 $\mathbf{P} = 30\mathbf{Q}(N)$; $\mathbf{x}_0 = [-1 \ -1 \ 0]^T$;
- Trajetória de referência em "U".



(a) Plano XY.



(b) Controle.

5. MPC Linear - LMPC

- Se o sistema é não linear ou existem restrições não lineares → problema de otimização não convexo → grande esforço computacional;
- Se o sistema é linear, as restrições são lineares e o custo é quadrático → programação quadrática → problema de otimização convexo;

5. LMPC

- Se o sistema é não linear ou existem restrições não lineares → problema de otimização não convexo;
- Se o sistema é linear, as restrições são lineares e o custo é quadrático → programação quadrática → problema de otimização convexo;
- *Idéia:* desenvolver um algoritmo de MPC linear, através da transformação do problema de otimização em um problema de programação quadrática → o modelo cinemático é linearizado sucessivamente ao longo da trajetória de referência.

5. LMPC

- Modelo cinemático: $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$;
- Modelo de referência: $\dot{\mathbf{x}}_{ref} = f(\mathbf{x}_{ref}, \mathbf{u}_{ref})$;

Através de expansão em séries de Taylor, pode-se chegar ao seguinte modelo linear e variante no tempo, válido em torno de $(\mathbf{x}_{ref}, \mathbf{u}_{ref})$:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}},$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{ref}$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{ref}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v_{ref} \sin \theta_{ref} \\ 0 & 0 & v_{ref} \cos \theta_{ref} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{ref} & 0 \\ \sin \theta_{ref} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. LMPC

O problema de programação quadrática:

$$\Phi(k) = \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{x}}^T(k+j|k) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}(k+j|k) + \tilde{\mathbf{u}}^T(k+j-1|k) \mathbf{R} \tilde{\mathbf{u}}(k+j-1|k)$$

5. LMPC

O problema de programação quadrática:

$$\Phi(k) = \sum_{j=1}^N \tilde{\mathbf{x}}^T(k+j|k) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{x}}(k+j|k) + \tilde{\mathbf{u}}^T(k+j-1|k) \mathbf{R} \tilde{\mathbf{u}}(k+j-1|k)$$



$$\bar{\Phi}(k) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}^T(k) \mathbf{H}(k) \bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{f}^T(k) \bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{g}(k)$$

$$\mathbf{H}(k) = 2 (\bar{\mathbf{B}}(k)^T \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{B}}(k) + \bar{\mathbf{R}})$$

$$\mathbf{f}(k) = 2 \bar{\mathbf{B}}^T(k) \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{A}}(k) \tilde{\mathbf{x}}(k|k)$$

$$\mathbf{g}(k) = \tilde{\mathbf{x}}^T(k|k) \bar{\mathbf{A}}^T(k) \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{A}}(k) \tilde{\mathbf{x}}(k|k)$$

5. LMPC

O problema de programação quadrática:

$$\bar{\Phi}'(k) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}^T(k) \mathbf{H}(k) \bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{f}^T(k) \bar{\mathbf{u}}(k)$$

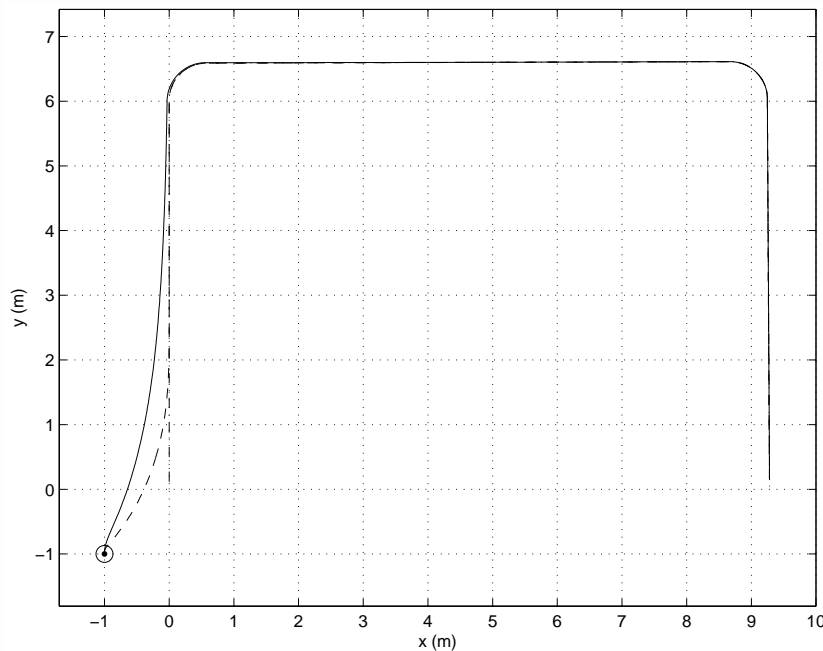
$$\tilde{\mathbf{u}}^* = \arg \min_{\tilde{\mathbf{u}}} \{ \bar{\Phi}'(k) \}$$

$$\text{sujeito a: } \mathbf{D} \tilde{\mathbf{u}}(k + j|k) \leq \mathbf{d}, \quad j \in [0, N - 1]$$

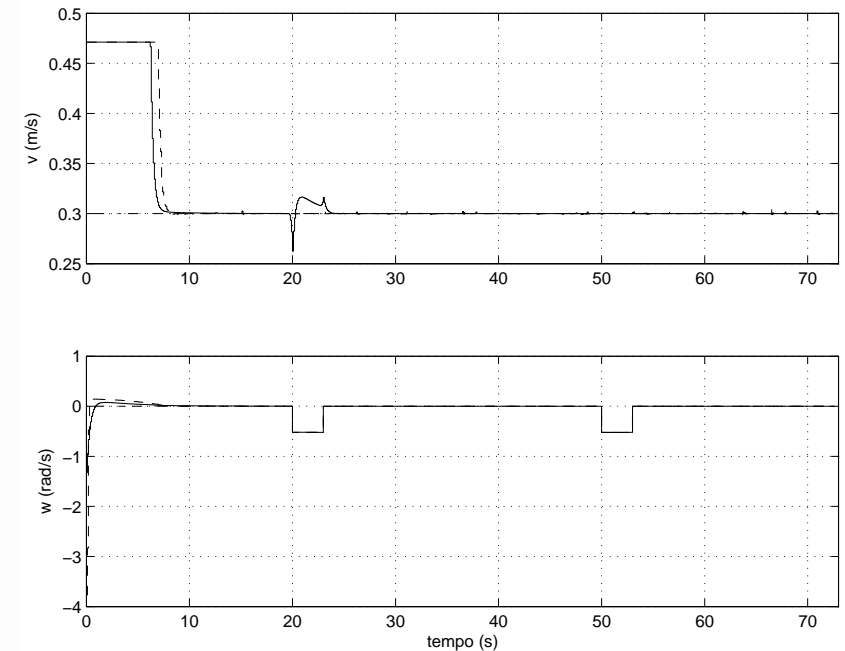
- variável de decisão: $\tilde{\mathbf{u}}$;
- a dinâmica do sistema e a condição inicial estão inseridas na função de custo.

5. LMPC

- $N = 5$, $\mathbf{Q} = \text{diag}(1; 1; 0, 5)$, $\mathbf{R} = \text{diag}(0, 1; 0, 1)$,
 $\mathbf{Q}(j) = 2^{j-1}\mathbf{Q}$, $\mathbf{P} = 30\mathbf{Q}(N)$; $\mathbf{x}_0 = [-1 \quad -1 \quad \pi/2]^T$;
- Trajetória de referência em "U"; Linha contínua: LMPC;
linha tracejada: NMPC.



(a) Plano XY.



(b) Controle.

6. O Custo Computacional

O custo computacional:

- MPC não linear: $N \times (n + m)$ variáveis de decisão;
- MPC linear por QP: $N \times m$ variáveis de decisão;
- Critério de avaliação: número de operações em ponto flutuante por segundo (flops);
- Computador Athlon 2600+: **576** Mflops;

Comparação entre:

- *Caso 1*: MPC não linear;
- *Caso 2*: MPC linear;
- Ambos com Φ com Q exponencial e custo terminal Ω .

6. O Custo Computacional

- Condições de simulação: trajetória de referência circular e restrições nas entradas de controle: $Du \leq d$.

Horizonte	OPF	
	NMPC	LMPC
5	11,1	0,17
10	502	0,95
15	5364	3,5
20	—	9.1

7. Conclusões

- O problema de rastreamento de trajetória foi satisfatoriamente resolvido;
- A fim de diminuir o esforço computacional, uma abordagem alternativa foi desenvolvida, utilizando MPC linear;
- A desvantagem é que a linearização é válida somente em torno do ponto de referência;
- Foi possível manter um bom desempenho se comparado com o método não linear.

7. Conclusões

O custo computacional:

- MPC: solução de um problema de otimização para cada instante de amostragem, apresentando um elevado custo computacional;
- Entretanto, a utilização de processadores rápidos e algoritmos eficientes torna viável uma implementação real;

Obrigado!

Felipe Kühne

`kuhne@eletro.ufrgs.br`

João Manoel Gomes da Silva Jr.

`jmgomes@eletro.ufrgs.br`

Walter Fetter Lages

`fetter@eletro.ufrgs.br`