

Zeitharmonische Maxwell-Gleichungen

für anisotrope, homogene Medien

$$\nabla \times \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + j\omega\varepsilon \underline{\vec{E}} \qquad \iff \qquad \oint_{\partial A} \underline{\vec{H}} \cdot d\vec{s} = \iint_A \left(\underline{\vec{J}} + j\omega\varepsilon \underline{\vec{E}} \right) \cdot d\vec{A}$$
$$-\nabla \times \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{M}} + j\omega\mu \underline{\vec{H}} \qquad \iff \qquad -\oint_{\partial A} \underline{\vec{E}} \cdot d\vec{s} = \iint_A \left(\underline{\vec{M}} + j\omega\mu \underline{\vec{H}} \right) \cdot d\vec{A}$$
$$\nabla \cdot \underline{\vec{H}} = \underline{\rho}_m / \mu \qquad \iff \qquad \oiint_{\partial V} \underline{\vec{H}} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\mu} \iiint_V \underline{\rho}_m dV$$
$$\nabla \cdot \underline{\vec{E}} = \underline{\rho}_e / \varepsilon \qquad \iff \qquad \oiint_{\partial V} \underline{\vec{E}} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_V \underline{\rho}_e dV$$

für Freiraumausbreitung und allgemein Vakuum: $\underline{\rho}_e = \underline{\rho}_m = 0$ und $\underline{\vec{J}} = \underline{\vec{M}} = \vec{0}$
Poynting-Vektor; Wirkleistung

$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* \quad ; \quad P = \oiint \Re \left\{ \underline{\vec{S}} \right\} d\vec{A} = \frac{1}{2} \oiint \Re \left\{ \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* \right\} d\vec{A}$

Polarisation

Drehsinn und Form

- $0^\circ < a_x - a_y < 180^\circ : E_{0x}$ eilt E_{0y} vor, rechtsdrehend
 - $0^\circ < a_y - a_x < 180^\circ : E_{0y}$ eilt E_{0x} vor, linksdrehend
 - $a_x - a_y = 0^\circ$ oder $a_x - a_y = 180^\circ : E_{0x}$ oder E_{0y} gleich- oder gegenphasig, linear
 - $a_x - a_y = 90^\circ$ und $|\underline{E}_{0x}| = |\underline{E}_{0y}| : \text{rechtsdrehend, zirkular}$
 - $a_y - a_x = 90^\circ$ und $|\underline{E}_{0x}| = |\underline{E}_{0y}| : \text{linksdrehend, zirkular}$

HowTo: zeichnen einer Polarisationsellipse

1. Realteile der komplexen Amplituden

$E_{0x} = \Re \{ \underline{E}_{0x} e^{j\omega t} \} = A \cos(\omega t) - B \sin(\omega t)$

$E_{0y} = \Re \{ \underline{E}_{0y} e^{j\omega t} \} = C \cos(\omega t) - D \sin(\omega t)$
2. Maximalwerte der Komponenten berechnen

$E_{0x,\max} = |E_{0x}| = \sqrt{A^2 + B^2}$

$E_{0y,\max} = |E_{0y}| = \sqrt{C^2 + D^2}$

3. Betrag des Ellipsenradius

$\left\| \underline{\vec{E}}_0 \right\| = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} = \sqrt{A_0 + A_1 \cos(2\omega t) - A_2 \sin(2\omega t)}$

verwendete Additionstheoreme:

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$$
$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

4. Umformen des hinteren Ausdrucks

$A_1 \cos(2\omega t) - A_2 \sin(2\omega t) = \Re \left\{ (A_1 + jA_2) e^{j2\omega t} \right\}$

$\qquad \qquad \qquad = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cos \left(2\omega t + \arctan \left(\frac{A_2}{A_1} \right) \right)$

5. maximale und minimale Amplitude

$E_{\min}^{\max} = \sqrt{A_0 \pm \sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$

6. Berechnung der Zeitpunkte aus der Phase

$2\omega t_{\min}^{\max} + \arctan \left(\frac{A_2}{A_1} \right) = \begin{matrix} 0 \\ +\pi \end{matrix}$

7. Winkel der maximalen und Minimalen Amplituden

$\tan(\alpha) = \frac{E_{0y} \left(t_{\min}^{\max} \right)}{E_{0x} \left(t_{\min}^{\max} \right)} = \frac{C \cos \left(\omega t_{\min}^{\max} \right) - D \sin \left(\omega t_{\min}^{\max} \right)}{A \cos \left(\omega t_{\min}^{\max} \right) - B \sin \left(\omega t_{\min}^{\max} \right)}$

EM-Wellen: allgemeine Zusammenhänge

Wellenleiter (konstanter Querschnitt)

$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0} \right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c} \right)^2}}$

Phasengeschwindigkeit

$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0} \right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c} \right)^2}}$

Gruppengeschwindigkeit

$v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0} \right)^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c} \right)^2}$

Zusammenhang Geschwindigkeiten

$c_0^2 = v_g \cdot v_p$

Kritische Frequenzen ($a > b$)

$f_{c,m,n} = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2}$

Zweileitersysteme

Gruppen- und Phasengeschwindigkeit

$$v_g = v_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = c$$

Leitungsbeläge Koaxialleitung

$$C' = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)} \quad L' = \frac{\varepsilon\mu}{C'} = \frac{\mu \ln\left(\frac{D}{d}\right)}{2\pi}$$

Wellenwiderstand

$$\pm Z_L = \frac{U(z)}{I(z)} = \frac{U_0}{I_0}$$

Koaxialleitung

Wellenwiderstand und Leistung

$$Z_L = \frac{1}{2\pi} Z_{F0} \ln\left(\frac{D}{d}\right) \quad P = \frac{1}{2} Z_L I_{\max}^2 = \frac{1}{2} \frac{U_{\max}^2}{Z_L}$$

Feldstärken

$$H_{\max} = \frac{I_{\max}}{\pi d} \quad E_{\max} = Z_F H_{\max}$$

Strahlungsleistungsdichten Innen- und Außenleiter

$$S_I = \frac{1}{2} E_{\max} \cdot H_{\max} \quad S_A = S_I \frac{d^2}{D^2}$$

Feldwellenwiderstand

TE-Wellen

$$\begin{aligned} Z_{FH} &= \pm \frac{\vec{E}_x}{\vec{H}_y} = \mp \frac{\vec{E}_y}{\vec{H}_x} \\ &= \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\omega\mu}{\beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}} = \frac{Z_F}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}} = \frac{Z_F}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f_0}\right)^2}} = \frac{Z_F}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}} \end{aligned}$$

TM-Wellen

$$\begin{aligned} Z_{FE} &= \pm \frac{\vec{E}_x}{\vec{H}_y} = \mp \frac{\vec{E}_y}{\vec{H}_x} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \frac{\beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}}{\omega\varepsilon} \\ &= Z_F \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2} = Z_F \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f_0}\right)^2} = Z_F \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2} \end{aligned}$$

TEM-Wellen

$$\frac{\vec{E}_x}{\vec{H}_y} = -\frac{\vec{E}_y}{\vec{H}_x} = \pm \frac{\omega\mu}{\beta} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \pm Z_F$$

$$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega = 377\Omega$$

Antennentheorie

Kenngrößen von Antennen

Strahlungsleistungsdichte (Kugel/Dipol)

$$S_0 = \frac{P}{4\pi r^2} \quad S(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} Z_F \left(\frac{\beta |I_0| l \sin(\vartheta)}{4\pi r} \right)^2$$

Richtfaktor

$$D = \frac{S_{\max}}{S_0} = \frac{S_{\max}}{P} \cdot 4\pi r \quad \text{bzw.} \quad D(\vartheta, \varphi) = \frac{S(\vartheta, \varphi)}{S_0}$$

Gewinn

$$G = \eta D$$

Zusammenhang zwischen Wirkfläche und Gewinn für alle Antennen

$$\frac{A}{G} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

Richcharakteristik

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{\left\| \vec{E}(\vartheta, \varphi) \right\|}{\left\| \vec{E} \right\|_{\max}} = \frac{\left\| \vec{H}(\vartheta, \varphi) \right\|}{\left\| \vec{H} \right\|_{\max}} = \sqrt{\frac{S(\vartheta, \varphi)}{S_{\max}}}$$

Abgestrahlte Leistung

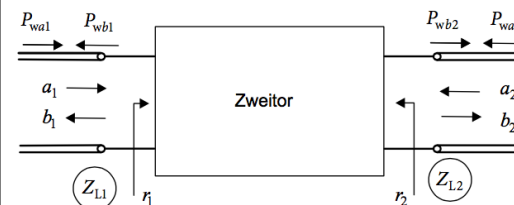
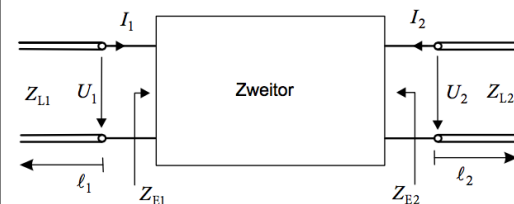
$$P = \oiint S dA = \oiint S_0 D C^2(\vartheta, \varphi) dA$$

Fußpunktimpedanz und Strahlungswiderstand

$$Z_A = \frac{U_0}{I_0} \quad R_S = \frac{2P}{|I_0|^2}$$

Zweitore

Wellengrößen



Komplexe Wellenamplituden

$$a_i = \frac{U_{hi}}{\sqrt{Z_{Li}}} \quad (\text{hinlaufenden normierte Spannungswelle an Tor } i)$$

$$b_i = \frac{U_{ri}}{\sqrt{Z_{Li}}} \quad (\text{rücklaufende normierte Spannungswelle an Tor } i)$$

Spannung und Strom an Tor i

$$U_i = (a_i + b_i)\sqrt{Z_{Li}} \quad a_i = \frac{U_i + Z_{Li}I_i}{2\sqrt{Z_{Li}}}$$

$$I_i = \frac{a_i - b_i}{\sqrt{Z_{Li}}} \quad b_i = \frac{U_i - Z_{Li}I_i}{2\sqrt{Z_{Li}}}$$

Wirkleistung

$$P_{wai} = \frac{1}{2}a_i a_i^* = \frac{U_{hi}U_{hi}^*}{2Z_{Li}} = \frac{1}{2}|a_i|^2 \quad P_{wbi} = \frac{1}{2}b_i b_i^* = \frac{U_{ri}U_{ri}^*}{2Z_{Li}} = \frac{1}{2}|b_i|^2$$

Matrizen

Streumatrix

$$\underline{b} = \underline{S} \cdot \underline{a}$$

Transmissionsmatrix

$$\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{T}_{11} & \underline{T}_{12} \\ \underline{T}_{21} & \underline{T}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}_2 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}$$

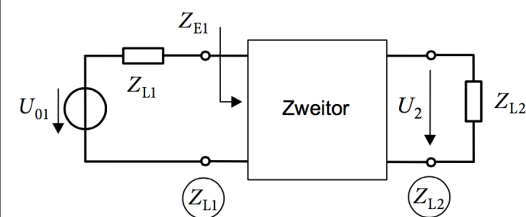
$$\underline{T} = \frac{1}{\underline{S}_{21}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\underline{S}_{22} \\ \underline{S}_{11} & -\det(\underline{S}) \end{pmatrix}$$

$$\underline{S} = \frac{1}{\underline{T}_{11}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{T}_{21} & \det(\underline{T}) \\ 1 & -\underline{T}_{12} \end{pmatrix}$$

Kettenmatrix

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

Streuparameter



Reflexionsfaktoren

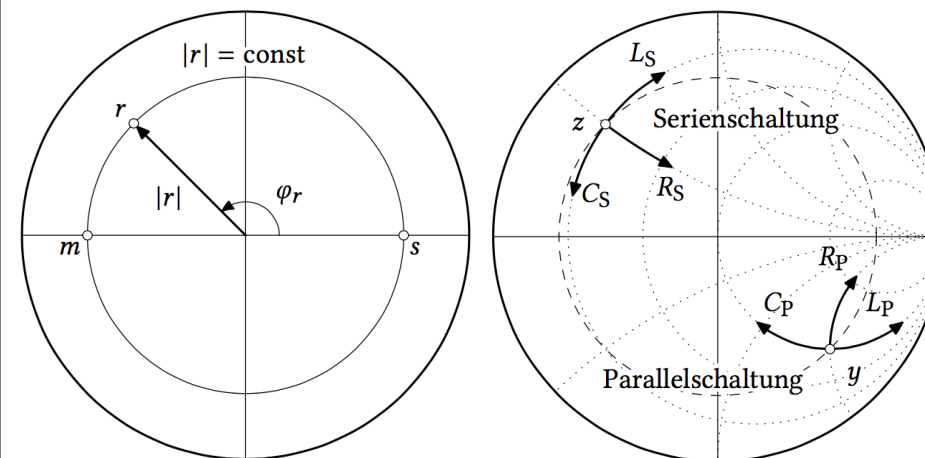
$$s_{ii} = \frac{Z_{Ei} - Z_{Li}}{Z_{Ei} + Z_{Li}}$$

Transmissionsfaktoren

$$s_{ji} = \frac{2U_j}{U_{0i}} \sqrt{\frac{Z_{Li}}{Z_{Lj}}}$$

Smith-Diagramme

Ablesen und Antragen der Werte



$$r = \frac{Z - Z_L}{Z + Z_L} = \frac{z - 1}{z + 1} \quad s = \frac{1}{m} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|}$$