Zeitharmonische Maxwell-Gleichungen

für anisotrope, homogene Medien

$$\nabla \times \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\underline{\vec{E}} \iff \oint_{\partial A} \underline{\vec{H}} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint_A \left(\underline{\vec{J}} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\underline{\vec{E}}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$-\nabla \times \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{M}} + \mathrm{j}\omega\mu\underline{\vec{H}} \iff -\oint_{\partial A} \underline{\vec{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint_A \left(\underline{\vec{M}} + \mathrm{j}\omega\mu\underline{\vec{H}}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{H}} = \underline{\rho}_m/\mu \iff \oiint_{\partial V} \underline{\vec{H}} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\mu} \iiint_V \underline{\rho}_m \mathrm{d}V$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{E}} = \underline{\rho}_e/\varepsilon \iff \oiint_{\partial V} \underline{\vec{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_V \underline{\rho}_e \mathrm{d}V$$

für Freiraumausbreitung und allgemein Vakuum: $\underline{\rho}_e = \underline{\rho}_m = 0$ und $\underline{\vec{J}} = \underline{\vec{M}} = \vec{0}$

Poynting-Vektor; Wirkleistung

$$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* \quad ; \quad P = \oiint \Re\left\{\underline{\vec{S}}\right\} \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{2} \oiint \Re\left\{\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\right\} \mathrm{d}\vec{A}$$

EM-Wellen: allgemeine Zusammenhänge

Wellenleiter (konstanter Querschnitt)

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}}$$

Phasengeschwindigkeit

$$v_\mathrm{p} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}}$$

Gruppengeschwindigkeit

$$v_\mathrm{g} = c\sqrt{1-\left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2} = c\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = c\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}$$

Zusammenhang Geschwindigkeiten

$$c_0^2 = v_\mathrm{g} \cdot v_\mathrm{p}$$

Kritische Frequenzen ($a > b$)

$$f_{c,m,n} = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Zweileitersysteme

Gruppen- und Phasengeschwindigkeit

$$v_\mathrm{g} = v_\mathrm{p} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = c$$

Leitungsbeläge Koaxialleitung

$$C' = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)} \qquad L' = \frac{\varepsilon\mu}{C'} = \frac{\mu\ln\left(\frac{D}{d}\right)}{2\pi}$$

Feldwellenwiderstand

TEM-Wellen

$$\frac{\underline{\vec{E}}_x}{\underline{\vec{H}}_y} = -\frac{\underline{\vec{E}}_y}{\underline{\vec{H}}_x} = \pm\frac{\omega\mu}{\beta} = \pm\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \pm Z_F$$

$$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega = 377\Omega$$

TE-Wellen

$$Z_{FH} = \pm\frac{\underline{\vec{E}}_x}{\underline{\vec{H}}_y} = \mp\frac{\underline{\vec{E}}_y}{\underline{\vec{H}}_x} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\omega\mu}{\beta_0\sqrt{1-\left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}} = \frac{Z_F}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}} = \frac{Z_F}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f_0}\right)^2}} = \frac{Z_F}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}}$$

TM-Wellen

$$Z_{FE} = \pm\frac{\underline{\vec{E}}_x}{\underline{\vec{H}}_y} = \mp\frac{\underline{\vec{E}}_y}{\underline{\vec{H}}_x} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \frac{\beta_0\sqrt{1-\left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}}{\omega\varepsilon}$$

$$= Z_F\sqrt{1-\left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2} = Z_F\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f_0}\right)^2} = Z_F\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}$$

Antennentheorie

Kenngrößen von Antennen

Strahlungsleistungsdichte (Kugel/Dipol)

$$S_0 = \frac{P}{4\pi r^2} \qquad S(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{2}Z_F\left(\frac{\beta|\underline{I}_0|l\sin(\vartheta)}{4\pi r}\right)^2$$

Richtfaktor

$$D = \frac{S_\mathrm{max}}{S_0} = \frac{S_\mathrm{max}}{P} \cdot 4\pi r \qquad \text{bzw.} \qquad D(\vartheta,\varphi) = \frac{S(\vartheta,\varphi)}{S_0}$$

Gewinn

$$G = \eta D$$

Zusammenhang zwischen Wirkfläche und Gewinn für alle Antennen

$$\frac{A}{G} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

Richcharakteristik

$$C(\vartheta,\varphi) = \frac{\left\|\underline{\vec{E}}(\vartheta,\varphi)\right\|}{\left\|\underline{\vec{E}}\right\|_\mathrm{max}} = \frac{\left\|\underline{\vec{H}}(\vartheta,\varphi)\right\|}{\left\|\underline{\vec{H}}\right\|_\mathrm{max}} = \sqrt{\frac{S(\vartheta,\varphi)}{S_\mathrm{max}}}$$

Abgestrahlte Leistung

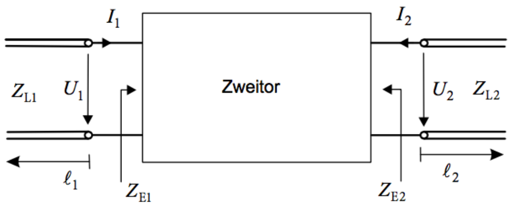
$$P = \oiint S\mathrm{d}A = \oiint S_0 D C^2(\vartheta,\varphi)\mathrm{d}A$$

Fußpunktimpedanz und Strahlungswiderstand

$$\underline{Z}_{\mathrm{A}} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0} \qquad R_{\mathrm{S}} = \frac{2P}{|\underline{I}_0|^2}$$

Zweitore

Wellengrößen



Komplexe Wellenamplituden

$$a_i = \frac{U_{\mathrm{h}i}}{\sqrt{Z_{\mathrm{L}_i}}} \qquad \text{(hinlaufenden normierte Spannungswelle an Tor } i\text{)}$$

$$b_i = \frac{U_{\mathrm{r}i}}{\sqrt{Z_{\mathrm{L}i}}} \qquad \text{(rücklaufende normierte Spannungswelle an Tor } i\text{)}$$

Spannung und Strom an Tor i

$$U_i = (a_i + b_i)\sqrt{Z_{\mathrm{L}i}} \qquad a_i = \frac{U_i + Z_{\mathrm{L}i} I_i}{2\sqrt{Z_{\mathrm{L}i}}}$$

$$I_i = \frac{a_i - b_i}{\sqrt{Z_{\mathrm{L}i}}} \qquad b_i = \frac{U_i - Z_{\mathrm{L}i} I_i}{2\sqrt{Z_{\mathrm{L}i}}}$$

Wirkleistung

$$P_{wai} = \frac{1}{2} a_i a_i^* = \frac{U_{\mathrm{h}i} U_{\mathrm{h}i}^*}{2Z_{\mathrm{L}i}} = \frac{1}{2}|a_i|^2 \qquad P_{wbi} = \frac{1}{2} b_i b_i^* = \frac{U_{\mathrm{r}i} U_{\mathrm{r}i}^*}{2Z_{\mathrm{L}i}} = \frac{1}{2}|b_i|^2$$

Matrizen

Streumatrix

$$\underline{\boldsymbol{b}} = \underline{\boldsymbol{S}} \cdot \underline{\boldsymbol{a}}$$

Transmissionsmatrix

$$\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{T}_{11} & \underline{T}_{12} \\ \underline{T}_{21} & \underline{T}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}_2 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}$$

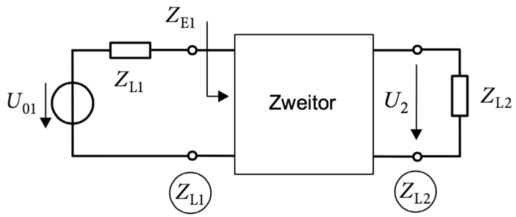
$$\underline{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{\underline{S}_{21}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\underline{S}_{22} \\ \underline{S}_{11} & -\det(\underline{\boldsymbol{S}}) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{\underline{T}_{11}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{T}_{21} & \det(\underline{\boldsymbol{T}}) \\ 1 & -\underline{T}_{12} \end{pmatrix}$$

Kettenmatrix

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

Streuparameter



Reflexionsfaktoren

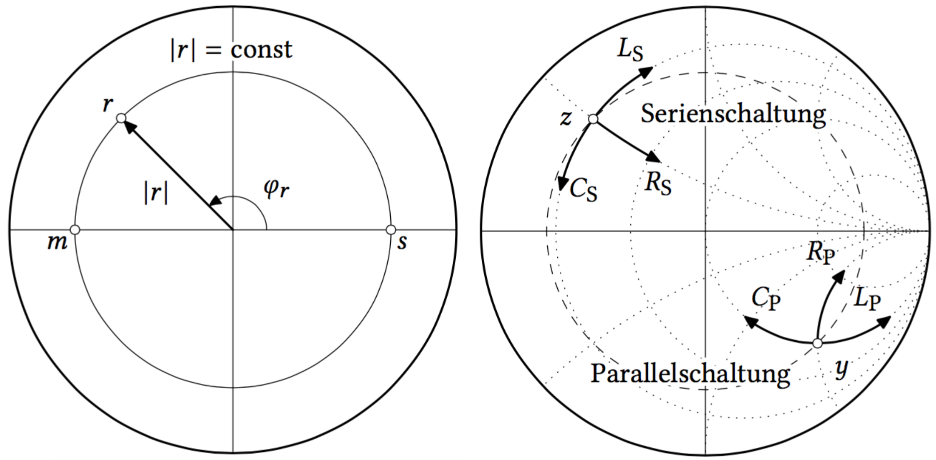
$$s_{ii} = \frac{Z_{\mathrm{E}i} - Z_{\mathrm{L}i}}{Z_{\mathrm{E}i} + Z_{\mathrm{L}i}}$$

Transmissionsfaktoren

$$s_{ji} = \frac{2U_j}{U_{0i}} \sqrt{\frac{Z_{\mathrm{L}i}}{Z_{\mathrm{L}j}}}$$

Smith-Diagramme

Ablesen und Antragen der Werte



$$r = \frac{\underline{Z} - \underline{Z}_L}{\underline{Z} + \underline{Z}_L} = \frac{\underline{z} - 1}{\underline{z} + 1} \qquad s = \frac{1}{m} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|}$$