Zeitharmonische Maxwell-Gleichungen

für anisotrope, homogene Medien

$$\nabla \times \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\underline{\vec{E}} \quad \Longleftrightarrow \quad \oint_{\partial A} \underline{\vec{H}} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint_A \left(\underline{\vec{J}} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\underline{\vec{E}}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$-\nabla \times \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{M}} + \mathrm{j}\omega\mu\underline{\vec{H}} \quad \Longleftrightarrow \quad -\oint_{\partial A} \underline{\vec{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint_A \left(\underline{\vec{M}} + \mathrm{j}\omega\mu\underline{\vec{H}}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{H}} = \underline{\rho}_m/\mu \quad \Longleftrightarrow \quad \oiint_{\partial V} \underline{\vec{H}} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\mu}\iiint_V \underline{\rho}_m \mathrm{d}V$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{E}} = \underline{\rho}_e/\varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \oiint_{\partial V} \underline{\vec{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon}\iiint_V \underline{\rho}_e \mathrm{d}V$$

für Freiraumausbreitung und allgemein Vakuum: $\underline{\rho}_e = \underline{\rho}_m = 0$ und $\underline{\vec{J}} = \underline{\vec{M}} = \vec{0}$
Poynting-Vektor; Wirkleistung

$$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* \quad ; \quad P = \oiint \Re\left\{\underline{\vec{S}}\right\} \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{2}\oiint \Re\left\{\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\right\} \mathrm{d}\vec{A}$$

Polarisation

Drehsinn und Form

- $0° < \alpha_\mathrm{x} - \alpha_\mathrm{y} < 180°$: $E_{0\mathrm{x}}$ eilt $E_{0\mathrm{y}}$ vor, rechtsdrehend
- $0° < \alpha_\mathrm{y} - \alpha_\mathrm{x} < 180°$: $E_{0\mathrm{y}}$ eilt $E_{0\mathrm{x}}$ vor, linksdrehend
- $\alpha_\mathrm{x} - \alpha_\mathrm{y} = 0°$ oder $\alpha_\mathrm{x} - \alpha_\mathrm{y} = 180°$: $E_{0\mathrm{x}}$ oder $E_{0\mathrm{y}}$ gleich- oder gegenphasig, linear
- $\alpha_\mathrm{x} - \alpha_\mathrm{y} = 90°$ und $|\underline{E}_{0\mathrm{x}}| = |\underline{E}_{0\mathrm{y}}|$: rechtsdrehend, zirkular
- $\alpha_\mathrm{y} - \alpha_\mathrm{x} = 90°$ und $|\underline{E}_{0\mathrm{x}}| = |\underline{E}_{0\mathrm{y}}|$: linksdrehend, zirkular

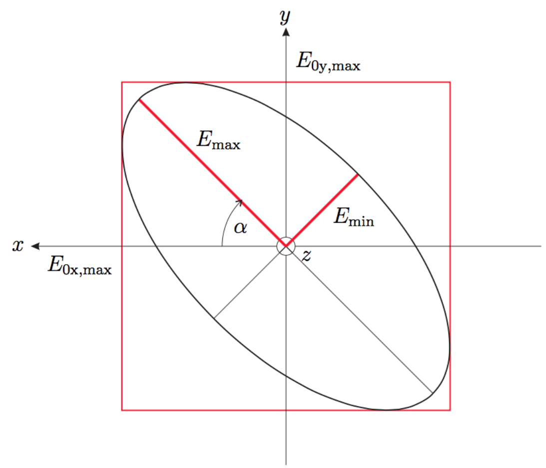
HowTo: zeichnen einer Polarisationsellipse

1. Realteile der komplexen Amplituden
$$E_{0\mathrm{x}} = \Re\{\underline{E}_{0\mathrm{x}}e^{\mathrm{j}\omega t}\} = A\cos(\omega t) - B\sin(\omega t)$$
$$E_{0\mathrm{y}} = \Re\{\underline{E}_{0\mathrm{y}}e^{\mathrm{j}\omega t}\} = C\cos(\omega t) - D\sin(\omega t)$$
2. Maximalwerte der Komponenten berechnen
$$E_{0\mathrm{x,max}} = |E_{0\mathrm{x}}| = \sqrt{A^2 + B^2}$$
$$E_{0\mathrm{y,max}} = |E_{0\mathrm{y}}| = \sqrt{C^2 + D^2}$$
3. Betrag des Ellipsenradius
$$\left\|\vec{E}_0\right\| = \sqrt{E_{0\mathrm{x}}^2 + E_{0\mathrm{y}}^2} = \sqrt{A_0 + A_1\cos(2\omega t) - A_2\sin(2\omega t)}$$
$$= \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}{2} + \frac{A^2 - B^2 + C^2 - D^2}{2}\cos(2\omega t) - (AB + CD)\sin(2\omega t)}$$

verwendete Additionstheoreme:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos^2(\alpha) &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha)) \\ \sin^2(\alpha) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha)) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) \end{aligned}}$$

4. Umformen des hinteren Ausdrucks
$$A_1\cos(2\omega t) - A_2\sin(2\omega t) = \Re\left\{(A_1 + jA_2)e^{\mathrm{j}2\omega t}\right\}$$
$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\cos\left(2\omega t + \arctan\left(\frac{A_2}{A_1}\right)\right)$$
5. maximale und minimale Amplitude
$$E_{\substack{\max\\\min}} = \sqrt{A_0 \pm \sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$$
6. Berechnung der Zeitpunkte aus der Phase
$$2\omega t_{\substack{\max\\\min}} + \arctan\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = \begin{matrix} 0 \\ +\pi \end{matrix}$$
7. Winkel der maximalen und Minimalen Amplituden
$$\tan(\alpha) = \frac{E_{0\mathrm{y}}\left(t_{\substack{\max\\\min}}\right)}{E_{0\mathrm{x}}\left(t_{\substack{\max\\\min}}\right)} = \frac{C\cos\left(\omega t_{\substack{\max\\\min}}\right) - D\sin\left(\omega t_{\substack{\max\\\min}}\right)}{A\cos\left(\omega t_{\substack{\max\\\min}}\right) - B\sin\left(\omega t_{\substack{\max\\\min}}\right)}$$
8. Ellipse zeichnen



EM-Wellen: allgemeine Zusammenhänge

Wellenleiter (konstanter Querschnitt)

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}}$$

Phasengeschwindigkeit

$$v_\mathrm{p} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}}$$

Gruppengeschwindigkeit

$$v_\mathrm{g} = c\sqrt{1-\left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2} = c\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = c\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}$$

Zusammenhang Geschwindigkeiten

$$c_0^2 = v_\mathrm{g} \cdot v_\mathrm{p}$$

Kritische Frequenzen ($a > b$)

$$f_{c,m,n} = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \qquad f_c = \frac{\beta_c}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{f_{c0}}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \qquad \beta_c^2 = \beta_0^2 - \beta$$

Zweileitersysteme

Gruppen- und Phasengeschwindigkeit

$$v_\mathrm{g} = v_\mathrm{p} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = c$$

Leitungsbeläge Koaxialleitung

$$C' = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)} \qquad L' = \frac{\varepsilon\mu}{C'} = \frac{\mu \ln\left(\frac{D}{d}\right)}{2\pi}$$

Wellenwiderstand

$$\pm Z_\mathrm{L} = \frac{\underline{U}(z)}{\underline{I}(z)} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0}$$

Koaxialleitung

Wellenwiderstand und Leistung

$$Z_\mathrm{L} = \frac{1}{2\pi} Z_\mathrm{F0} \ln\left(\frac{D}{d}\right) \qquad P = \frac{1}{2} Z_\mathrm{L} I_\mathrm{max}^2 = \frac{1}{2}\frac{U_\mathrm{max}^2}{Z_\mathrm{L}}$$

Feldstärken

$$H_\mathrm{max} = \frac{I_\mathrm{max}}{\pi d} \qquad E_\mathrm{max} = Z_\mathrm{F} H_\mathrm{max}$$

Strahlungsleistungsdichten Innen- und Außenleiter

$$S_\mathrm{I} = \frac{1}{2} E_\mathrm{max} \cdot H_\mathrm{max} \qquad S_\mathrm{A} = S_\mathrm{I} \frac{d^2}{D^2}$$

Feldwellenwiderstand

TE-Wellen

$$Z_{FH} = \pm\frac{\vec{\underline{E}}_x}{\vec{\underline{H}}_y} = \mp\frac{\vec{\underline{E}}_y}{\vec{\underline{H}}_x}$$

$$= \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\omega\mu}{\beta_0\sqrt{1-\left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}} = \frac{Z_F}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}} = \frac{Z_F}{\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f_0}\right)^2}} = \frac{Z_F}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}}$$

TM-Wellen

$$Z_{FE} = \pm\frac{\vec{\underline{E}}_x}{\vec{\underline{H}}_y} = \mp\frac{\vec{\underline{E}}_y}{\vec{\underline{H}}_x} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \frac{\beta_0\sqrt{1-\left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}}{\omega\varepsilon}$$

$$= Z_F\sqrt{1-\left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2} = Z_F\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f_0}\right)^2} = Z_F\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}$$

TEM-Wellen

$$\frac{\vec{\underline{E}}_x}{\vec{\underline{H}}_y} = -\frac{\vec{\underline{E}}_y}{\vec{\underline{H}}_x} = \pm\frac{\omega\mu}{\beta} = \pm\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \pm Z_F$$

$$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega = 377\Omega$$

Antennentheorie

Feldgrößen

Vektorpotential Fernfeldnäherung

$$\vec{\underline{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu e^{-\mathrm{j}\beta r}}{4\pi r} \iiint_V \vec{\underline{J}} e^{\mathrm{j}\beta r' \cos(\xi)} \mathrm{d}V'$$

Feldstärken

$$\vec{\underline{B}} \approx -\mathrm{j}\beta\vec{u}_r \times \vec{\underline{A}} \qquad \vec{\underline{H}} \approx -\frac{\mathrm{j}\beta}{\mu}\vec{u}_r \times \vec{\underline{A}} \qquad \vec{\underline{E}} \approx \mathrm{j}\omega \times (\vec{u}_r \times \vec{\underline{A}})$$

Kenngrößen von Antennen

Strahlungsleistungsdichte (Kugel/Dipol)

$$S_0 = \frac{P}{4\pi r^2} \qquad S(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} Z_F \left(\frac{\beta|\underline{I}_0| l \sin(\vartheta)}{4\pi r}\right)^2$$

Richtfaktor

$$D = \frac{S_\mathrm{max}}{S_0} = \frac{S_\mathrm{max}}{P} \cdot 4\pi r^2 \qquad \text{bzw.} \qquad D(\vartheta, \varphi) = \frac{S(\vartheta, \varphi)}{S_0}$$

Gewinn und Zusammenhang mit Wirkfläche für alle Antennen

$$G = \eta D \qquad \frac{A}{G} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

Richcharakteristik

$$C(\vartheta,\varphi)=\frac{\left\|\vec{\underline{E}}(\vartheta,\varphi)\right\|}{\left\|\vec{\underline{E}}\right\|_{\max}}=\frac{\left\|\vec{\underline{H}}(\vartheta,\varphi)\right\|}{\left\|\vec{\underline{H}}\right\|_{\max}}=\sqrt{\frac{S(\vartheta,\varphi)}{S_{\max}}}$$

Abgestrahlte Leistung

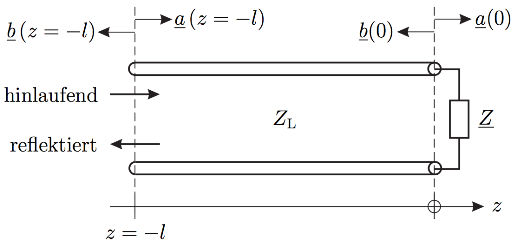
$$P=\oiint S\mathrm{d}A=\oiint S_0DC^2(\vartheta,\varphi)\mathrm{d}A$$

Fußpunktimpedanz und Strahlungswiderstand

$$\underline{Z}_{\mathrm{A}}=\frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0}\qquad R_{\mathrm{S}}=\frac{2P}{|\underline{I}_0|^2}$$

Reflexion

Abstandsabhängige komplexe Wellenamplituden



$$\underline{a}(z)=\underline{a}_0(z)e^{-\mathrm{j}\beta z}\qquad \underline{\Gamma}_0=\frac{\underline{b}_0}{\underline{a}_0}=\frac{Z-Z_{\mathrm{L}}}{Z+Z_{\mathrm{L}}}=\underline{\Gamma}(z=0)$$

$$\underline{b}(z)=\underline{b}_0(z)e^{+\mathrm{j}\beta z}\qquad \underline{\Gamma}(z)=\frac{\underline{a}(z)}{\underline{b}(z)}=\frac{\underline{b}_0e^{+\mathrm{j}\beta z}}{\underline{a}_0e^{-\mathrm{j}\beta z}}=\underline{\Gamma}_0e^{+\mathrm{j}2\beta z}$$

Wenn $z=0$ am Anfang des Leiters muss die Phase von $\underline{\Gamma}_0$ zurückgedreht werden. Es gilt (Bsp.):

$$\underline{\Gamma}_0=\frac{Z-Z_{\mathrm{L}}}{Z+Z_{\mathrm{L}}}e^{-\mathrm{j}2\beta l}$$

$U(z)$ und $I(z)$ können so berechnet werden wie an einem Tor eines Zweitores. Dafür Ausdruck so umformen, dass Abhängigkeit nur noch von $\underline{a}$

$$\underline{a}(z)=\frac{\underline{U}(z)}{\sqrt{Z_{\mathrm{L}}}}=\pm\sqrt{Z_{\mathrm{L}}}\underline{I}(z)\qquad \underline{c}(z)=\underline{a}(z)+\underline{b}(z)$$

Zweitore

Wellengrößen

Komplexe Wellenamplituden

$$a_i=\frac{U_{\mathrm{h}i}}{\sqrt{Z_{\mathrm{L}_i}}}\qquad \text{(hinlaufenden normierte Spannungswelle an Tor } i\text{)}$$

$$b_i=\frac{U_{\mathrm{r}i}}{\sqrt{Z_{\mathrm{L}i}}}\qquad \text{(rücklaufende normierte Spannungswelle an Tor } i\text{)}$$

Spannung und Strom an Tor i

$$U_i=(a_i+b_i)\sqrt{Z_{\mathrm{L}i}}\qquad a_i=\frac{U_i+Z_{\mathrm{L}i}I_i}{2\sqrt{Z_{\mathrm{L}i}}}$$

$$I_i=\frac{a_i-b_i}{\sqrt{Z_{\mathrm{L}i}}}\qquad b_i=\frac{U_i-Z_{\mathrm{L}i}I_i}{2\sqrt{Z_{\mathrm{L}i}}}$$

Wirkleistung

$$P_{wai}=\frac{1}{2}a_ia_i^*=\frac{U_{\mathrm{h}i}U_{\mathrm{h}i}^*}{2Z_{\mathrm{L}i}}=\frac{1}{2}|a_i|^2\qquad P_{wbi}=\frac{1}{2}b_ib_i^*=\frac{U_{\mathrm{r}i}U_{\mathrm{r}i}^*}{2Z_{\mathrm{L}i}}=\frac{1}{2}|b_i|^2$$

Matrizen

Streumatrix

$$\underline{\boldsymbol{b}}=\underline{\boldsymbol{S}}\cdot\underline{\boldsymbol{a}}$$

$$\underline{\boldsymbol{S}}^{*\mathrm{T}}\cdot\underline{\boldsymbol{S}}=\boldsymbol{E}\qquad \text{Unitaritätskriterium}$$

Transmissionsmatrix

$$\begin{pmatrix}\underline{a}_1\\\underline{b}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{T}_{11}&\underline{T}_{12}\\\underline{T}_{21}&\underline{T}_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\underline{b}_2\\\underline{a}_2\end{pmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{T}}=\frac{1}{\underline{S}_{21}}\cdot\begin{pmatrix}1&-\underline{S}_{22}\\\underline{S}_{11}&-\det(\underline{\boldsymbol{S}})\end{pmatrix}\qquad \underline{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{\underline{T}_{11}}\cdot\begin{pmatrix}\underline{T}_{21}&\det(\underline{\boldsymbol{T}})\\1&-\underline{T}_{12}\end{pmatrix}$$

Kettenmatrix

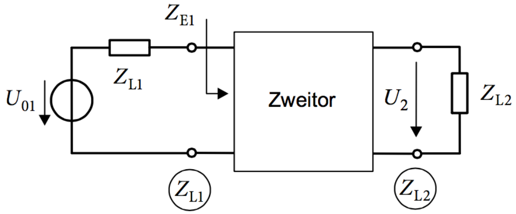
$$\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\\underline{I}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{A}&\underline{B}\\\underline{C}&\underline{D}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\underline{U}_2\\-\underline{I}_2\end{pmatrix}$$

Verkettung

$$\underline{\boldsymbol{T}}=\underline{\boldsymbol{T}}^{(1)}\cdot\underline{\boldsymbol{T}}^{(2)}$$

$$\boxed{\underline{\boldsymbol{S}}\neq\underline{\boldsymbol{S}}^{(1)}\cdot\underline{\boldsymbol{S}}^{(2)}\text{!!!}}$$

Streuparameter



Reflexions- und Transmissionsfaktoren

$$\underline{S}_{ii} = \frac{Z_{Ei} - Z_{Li}}{Z_{Ei} + Z_{Li}} \qquad \underline{S}_{ji} = \frac{2U_j}{U_{0i}}\sqrt{\frac{Z_{Li}}{Z_{Lj}}}$$

Statt Spannungsverhältnis Widerstandsverhältnis einsetzen

Zusammenhang Impedanz-, Admittanz- und Streumatrix

$$\underline{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{E} - 2R_N(\underline{\boldsymbol{Z}} + R_N\boldsymbol{E})^{-1}$$

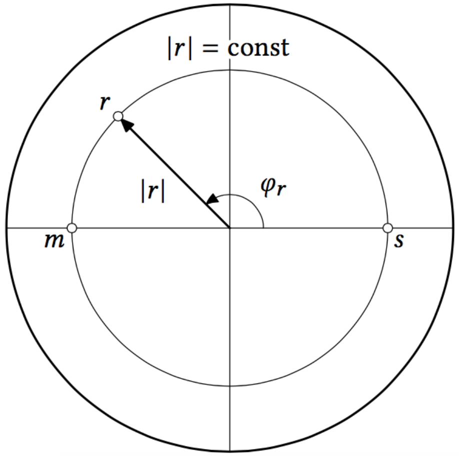
$$= -\boldsymbol{E} + 2(R_N\underline{\boldsymbol{Y}} + \boldsymbol{E})^{-1}$$

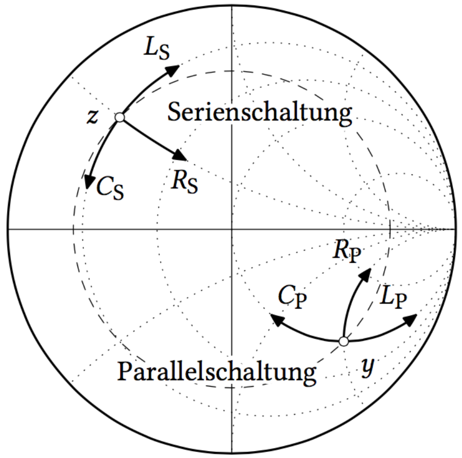
$$\underline{\boldsymbol{Z}} = -R_N(\boldsymbol{E} + 2(\underline{\boldsymbol{S} - \boldsymbol{E}})^{-1})$$

$$\underline{\boldsymbol{Y}} = -\frac{1}{R_N}(\boldsymbol{E} - 2(\underline{\boldsymbol{S}} + \boldsymbol{E})^{-1})$$

Smith-Diagramme

Ablesen und Antragen der Werte





$$|\underline{\Gamma}| = r = \frac{\underline{Z} - \underline{Z}_L}{\underline{Z} + \underline{Z}_L} = \frac{\underline{z} - 1}{\underline{z} + 1} = \frac{s-1}{s+1} = \frac{1-m}{1+m} \qquad s = \frac{1}{m} = \frac{1+|r|}{1-|r|}$$