

# Zeitharmonische Maxwell-Gleichungen

für anisotrope, homogene Medien

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{\vec{H}} &= \underline{\vec{J}} + j\omega\varepsilon\underline{\vec{E}} & \iff & \oint_{\partial A} \underline{\vec{H}} \cdot d\vec{s} = \iint_A (\underline{\vec{J}} + j\omega\varepsilon\underline{\vec{E}}) \cdot d\vec{A} \\ -\nabla \times \underline{\vec{E}} &= \underline{\vec{M}} + j\omega\mu\underline{\vec{H}} & \iff & -\oint_{\partial A} \underline{\vec{E}} \cdot d\vec{s} = \iint_A (\underline{\vec{M}} + j\omega\mu\underline{\vec{H}}) \cdot d\vec{A} \\ \nabla \cdot \underline{\vec{H}} &= \rho_m/\mu & \iff & \oint\!\!\!\oint_{\partial V} \underline{\vec{H}} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\mu} \iiint_V \rho_m dV \\ \nabla \cdot \underline{\vec{E}} &= \rho_e/\varepsilon & \iff & \oint\!\!\!\oint_{\partial V} \underline{\vec{E}} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_V \rho_e dV\end{aligned}$$

für Freiraumausbreitung und allgemein Vakuum:  $\rho_e = \rho_m = 0$  und  $\underline{\vec{J}} = \underline{\vec{M}} = \vec{0}$   
Poynting-Vektor; Wirkleistung

$$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* \quad ; \quad P = \oint\!\!\!\oint \Re\{\underline{\vec{S}}\} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{2} \oint\!\!\!\oint \Re\{\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*\} \cdot d\vec{A}$$

## Polarisation

### Drehsinn und Form

- $0^\circ < \alpha_x - \alpha_y < 180^\circ$  :  $E_{0x}$  eilt  $E_{0y}$  vor, rechtsdrehend
- $0^\circ < \alpha_y - \alpha_x < 180^\circ$  :  $E_{0y}$  eilt  $E_{0x}$  vor, linksdrehend
- $\alpha_x - \alpha_y = 0^\circ$  oder  $\alpha_x - \alpha_y = 180^\circ$  :  $E_{0x}$  oder  $E_{0y}$  gleich- oder gegenphasig, linear
- $\alpha_x - \alpha_y = 90^\circ$  und  $|\underline{E}_{0x}| = |\underline{E}_{0y}|$  : rechtsdrehend, zirkular
- $\alpha_y - \alpha_x = 90^\circ$  und  $|\underline{E}_{0x}| = |\underline{E}_{0y}|$  : linksdrehend, zirkular

### HowTo: zeichnen einer Polarisationsellipse

1. Realteile der komplexen Amplituden

$$E_{0x} = \Re\{\underline{E}_{0x} e^{j\omega t}\} = A \cos(\omega t) - B \sin(\omega t)$$

$$E_{0y} = \Re\{\underline{E}_{0y} e^{j\omega t}\} = C \cos(\omega t) - D \sin(\omega t)$$

2. Maximalwerte der Komponenten berechnen

$$E_{0x,\max} = |E_{0x}| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$E_{0y,\max} = |E_{0y}| = \sqrt{C^2 + D^2}$$

3. Betrag des Ellipsenradius

$$\begin{aligned}\|\vec{E}_0\| &= \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} = \sqrt{A_0 + A_1 \cos(2\omega t) - A_2 \sin(2\omega t)} \\ &= \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}{2} + \frac{A^2 - B^2 + C^2 - D^2}{2} \cos(2\omega t) - (AB + CD) \sin(2\omega t)}\end{aligned}$$

verwendete Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}\cos^2(\alpha) &= \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha)) \\ \sin^2(\alpha) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha)) \\ \sin(\alpha) \cos(\beta) &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))\end{aligned}$$

4. Umformen des hinteren Ausdrucks

$$\begin{aligned}A_1 \cos(2\omega t) - A_2 \sin(2\omega t) &= \Re\{(A_1 + jA_2)e^{j2\omega t}\} \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cos\left(2\omega t + \arctan\left(\frac{A_2}{A_1}\right)\right)\end{aligned}$$

5. maximale und minimale Amplitude

$$E_{\min}^{\max} = \sqrt{A_0 \pm \sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$$

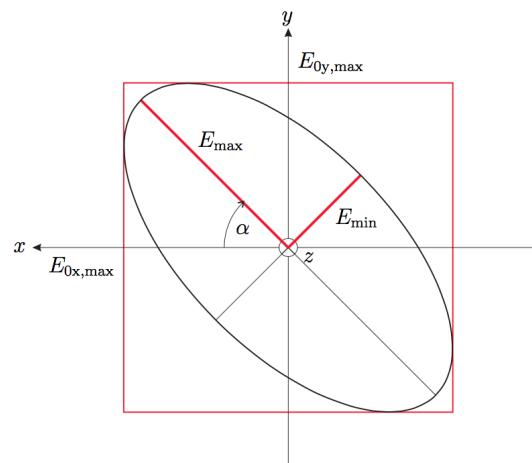
6. Berechnung der Zeitpunkte aus der Phase

$$2\omega t_{\min}^{\max} + \arctan\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = \begin{matrix} 0 \\ +\pi \end{matrix}$$

7. Winkel der maximalen und Minimalen Amplituden

$$\tan(\alpha) = \frac{E_{0y}(t_{\min}^{\max})}{E_{0x}(t_{\min}^{\max})} = \frac{C \cos(\omega t_{\min}^{\max}) - D \sin(\omega t_{\min}^{\max})}{A \cos(\omega t_{\min}^{\max}) - B \sin(\omega t_{\min}^{\max})}$$

8. Ellipse zeichnen



EM-Wellen: allgemeine Zusammenhänge

Wellenleiter (konstanter Querschnitt)

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}}$$

Phasengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}}$$

Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = c\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2} = c\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}$$

Zusammenhang Geschwindigkeiten

$$c_0^2 = v_g \cdot v_p$$

Kritische Frequenzen ( $a > b$ )

$$f_{c,m,n} = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \qquad f_c = \frac{\beta_c}{2\pi\sqrt{\varepsilon}\mu} = \frac{f_{c0}}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} \qquad \beta_c^2 = \beta_0^2 - \beta$$

Zweileitersysteme

Gruppen- und Phasengeschwindigkeit

$$v_g = v_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = c$$

Leitungsbeläge Koaxialleitung

$$C' = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)} \qquad L' = \frac{\varepsilon\mu}{C'} = \frac{\mu\ln\left(\frac{D}{d}\right)}{2\pi}$$

Wellenwiderstand

$$\pm Z_L = \frac{U(z)}{I(z)} = \frac{U_0}{I_0}$$

Koaxialleitung

Wellenwiderstand und Leistung

$$Z_L = \frac{1}{2\pi} Z_{F0} \ln\left(\frac{D}{d}\right) \qquad P = \frac{1}{2} Z_L I_{\max}^2 = \frac{1}{2} \frac{U_{\max}^2}{Z_L}$$

Feldstärken

$$H_{\max} = \frac{I_{\max}}{\pi d} \qquad E_{\max} = Z_F H_{\max}$$

Strahlungsleistungsdichten Innen- und Außenleiter

$$S_I = \frac{1}{2} E_{\max} \cdot H_{\max} \qquad S_A = S_I \frac{d^2}{D^2}$$

Feldwellenwiderstand

TE-Wellen

$$\begin{aligned} Z_{FH} &= \pm \frac{\vec{E}_x}{\vec{H}_y} = \mp \frac{\vec{E}_y}{\vec{H}_x} \\ &= \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\omega\mu}{\beta_0\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}} = \frac{Z_F}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}} = \frac{Z_F}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f_0}\right)^2}} = \frac{Z_F}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}} \end{aligned}$$

TM-Wellen

$$\begin{aligned} Z_{FE} &= \pm \frac{\vec{E}_x}{\vec{H}_y} = \mp \frac{\vec{E}_y}{\vec{H}_x} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \frac{\beta_0\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}}{\omega\varepsilon} \\ &= Z_F\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2} = Z_F\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f_0}\right)^2} = Z_F\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2} \end{aligned}$$

TEM-Wellen

$$\frac{\vec{E}_x}{\vec{H}_y} = -\frac{\vec{E}_y}{\vec{H}_x} = \pm \frac{\omega\mu}{\beta} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \pm Z_F$$

$$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega = 377\Omega$$

Antennentheorie

Feldgrößen

Vektorpotential Fernfeldnäherung

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu e^{-j\beta r}}{4\pi r} \iiint_V \vec{J} e^{j\beta r' \cos(\xi)} dV'$$

Feldstärken

$$\vec{B} \approx -j\beta \vec{u}_r \times \vec{A} \qquad \vec{H} \approx -\frac{j\beta}{\mu} \vec{u}_r \times \vec{A} \qquad \vec{E} \approx j\omega \times (\vec{u}_r \times \vec{A})$$

Kenngrößen von Antennen

Strahlungsleistungsdichte (Kugel/Dipol)

$$S_0 = \frac{P}{4\pi r^2} \qquad S(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} Z_F \left( \frac{\beta |I_0| l \sin(\vartheta)}{4\pi r} \right)^2$$

Richtfaktor

$$D = \frac{S_{\max}}{S_0} = \frac{S_{\max}}{P} \cdot 4\pi r^2 \qquad \text{bzw.} \qquad D(\vartheta, \varphi) = \frac{S(\vartheta, \varphi)}{S_0}$$

Gewinn und Zusammenhang mit Wirkfläche für alle Antennen

$$G = \eta D \qquad \frac{A}{G} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

Richarakteristik

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{\left\| \vec{E}(\vartheta, \varphi) \right\|}{\left\| \vec{E} \right\|_{\max}} = \frac{\left\| \vec{H}(\vartheta, \varphi) \right\|}{\left\| \vec{H} \right\|_{\max}} = \sqrt{\frac{S(\vartheta, \varphi)}{S_{\max}}}$$

Abgestrahlte Leistung

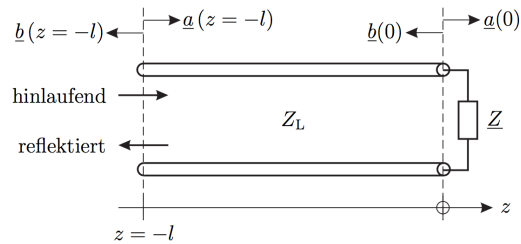
$$P = \oint\!\!\!\oint S \mathrm{d}A = \oint\!\!\!\oint S_0 D C^2(\vartheta, \varphi) \mathrm{d}A$$

Fußpunktimpedanz und Strahlungswiderstand

$$\underline{Z}_A = \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0} \quad R_S = \frac{2P}{|\underline{I}_0|^2}$$

**Reflexion**

**Abstandsabhängige komplexe Wellenamplituden**



$$\underline{a}(z) = \underline{a}_0(z) e^{-j\beta z} \quad \underline{\Gamma}_0 = \frac{\underline{b}_0}{\underline{a}_0} = \frac{Z - Z_L}{Z + Z_L} = \underline{\Gamma}(z = 0)$$

$$\underline{b}(z) = \underline{b}_0(z) e^{+j\beta z} \quad \underline{\Gamma}(z) = \frac{\underline{a}(z)}{\underline{b}(z)} = \frac{\underline{b}_0 e^{+j\beta z}}{\underline{a}_0 e^{-j\beta z}} = \underline{\Gamma}_0 e^{+j2\beta z}$$

Wenn  $z = 0$  am Anfang des Leiters muss die Phase von  $\underline{\Gamma}_0$  zurückgedreht werden. Es gilt (Bsp.):

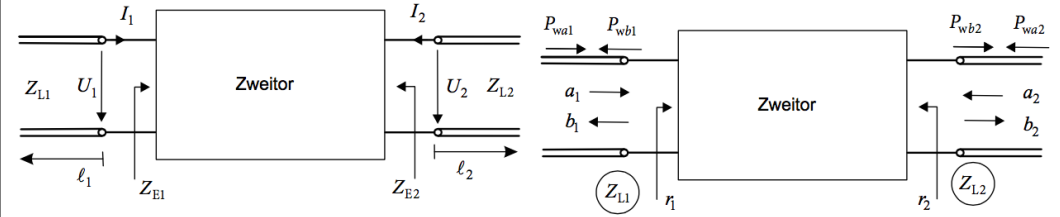
$$\underline{\Gamma}_0 = \frac{Z - Z_L}{Z + Z_L} e^{-j2\beta l}$$

$U(z)$  und  $I(z)$  können so berechnet werden wie an einem Tor eines Zweitores. Dafür Ausdruck so umformen, dass Abhängigkeit nur noch von  $\underline{a}$

$$\underline{a}(z) = \frac{U(z)}{\sqrt{Z_L}} = \pm \sqrt{Z_L} \underline{I}(z) \quad \underline{c}(z) = \underline{a}(z) + \underline{b}(z)$$

**Zweitore**

**Wellengrößen**



Komplexe Wellenamplituden

$$a_i = \frac{U_{hi}}{\sqrt{Z_{Li}}} \quad (\text{hinlaufende normierte Spannungswelle an Tor } i)$$

$$b_i = \frac{U_{ri}}{\sqrt{Z_{Li}}} \quad (\text{rücklaufende normierte Spannungswelle an Tor } i)$$

Spannung und Strom an Tor  $i$

$$U_i = (a_i + b_i) \sqrt{Z_{Li}} \quad a_i = \frac{U_i + Z_{Li} I_i}{2 \sqrt{Z_{Li}}}$$

$$I_i = \frac{a_i - b_i}{\sqrt{Z_{Li}}} \quad b_i = \frac{U_i - Z_{Li} I_i}{2 \sqrt{Z_{Li}}}$$

Wirkleistung

$$P_{wai} = \frac{1}{2} a_i a_i^* = \frac{U_{hi} U_{hi}^*}{2 Z_{Li}} = \frac{1}{2} |a_i|^2 \quad P_{wbi} = \frac{1}{2} b_i b_i^* = \frac{U_{ri} U_{ri}^*}{2 Z_{Li}} = \frac{1}{2} |b_i|^2$$

**Matrizen**

Streumatrix

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{a}}$$

$$\underline{\underline{S}}^{*\text{T}} \cdot \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{E}} \quad \text{Unitaritätskriterium}$$

Transmissionsmatrix

$$\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{T}_{11} & \underline{T}_{12} \\ \underline{T}_{21} & \underline{T}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}_2 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{T}} = \frac{1}{\underline{S}_{21}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\underline{S}_{22} \\ \underline{S}_{11} & -\det(\underline{\underline{S}}) \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{S}} = \frac{1}{\underline{T}_{11}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{T}_{21} & \det(\underline{\underline{T}}) \\ 1 & -\underline{T}_{12} \end{pmatrix}$$

Kettenmatrix

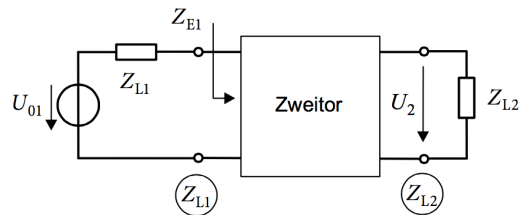
$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

Verkettung

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{T}}^{(2)}$$

$$\underline{\underline{S}} \neq \underline{\underline{S}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{S}}^{(2)}!!!$$

## Streuparameter



Reflexions- und Transmissionsfaktoren

$$\underline{S}_{ii} = \frac{Z_{Ei} - Z_{Li}}{Z_{Ei} + Z_{Li}} \quad \underline{S}_{ji} = \frac{2U_j}{U_{0i}} \sqrt{\frac{Z_{Li}}{Z_{Lj}}} \quad \text{Statt Spannungsverhältnis Widerstandsverhältnis einsetzen}$$

## Zusammenhang Impedanz-, Admittanz- und Streumatrix

$$\underline{S} = \underline{E} - 2R_N(\underline{Z} + R_N\underline{E})^{-1}$$

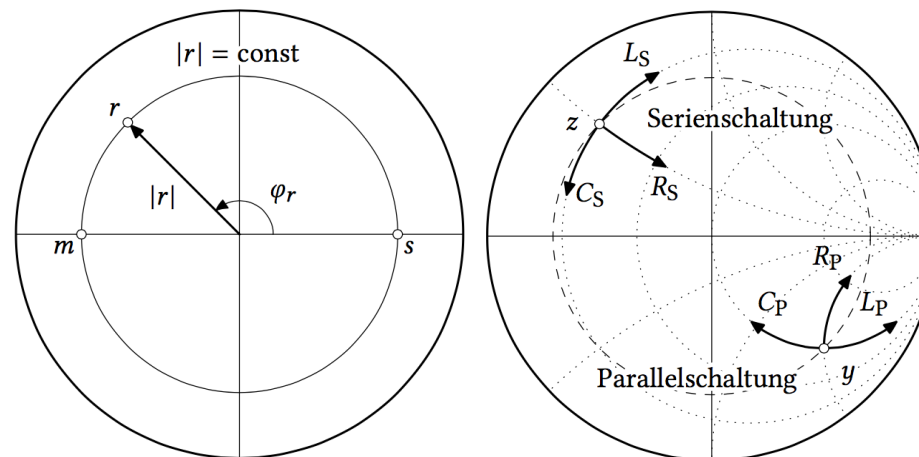
$$= -\underline{E} + 2(R_N\underline{Y} + \underline{E})^{-1}$$

$$\underline{Z} = -R_N(\underline{E} + 2(\underline{S} - \underline{E})^{-1})$$

$$\underline{Y} = -\frac{1}{R_N}(\underline{E} - 2(\underline{S} + \underline{E})^{-1})$$

## Smith-Diagramme

Ablezen und Antragen der Werte



$$|\underline{\Gamma}| = r = \frac{\underline{Z} - \underline{Z}_L}{\underline{Z} + \underline{Z}_L} = \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{s - 1}{s + 1} = \frac{1 - m}{1 + m} \quad s = \frac{1}{m} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|}$$