

Zeitharmonische Maxwell-Gleichungen

für anisotrope, homogene Medien

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{\vec{H}} &= \underline{\vec{J}} + j\omega\varepsilon \underline{\vec{E}} && \Longleftrightarrow && \oint_{\partial A} \underline{\vec{H}} \cdot d\vec{s} &= \iint_A \left(\underline{\vec{J}} + j\omega\varepsilon \underline{\vec{E}} \right) \cdot d\vec{A} \\ -\nabla \times \underline{\vec{E}} &= \underline{\vec{M}} + j\omega\mu \underline{\vec{H}} && \Longleftrightarrow && -\oint_{\partial A} \underline{\vec{E}} \cdot d\vec{s} &= \iint_A \left(\underline{\vec{M}} + j\omega\mu \underline{\vec{H}} \right) \cdot d\vec{A} \\ \nabla \cdot \underline{\vec{H}} &= \rho_m / \mu && \Longleftrightarrow && \oint\!\!\!\oint_{\partial V} \underline{\vec{H}} \cdot d\vec{A} &= \frac{1}{\mu} \iiint_V \rho_m dV \\ \nabla \cdot \underline{\vec{E}} &= \rho_e / \varepsilon && \Longleftrightarrow && \oint\!\!\!\oint_{\partial V} \underline{\vec{E}} \cdot d\vec{A} &= \frac{1}{\varepsilon} \iiint_V \rho_e dV\end{aligned}$$

für Freiraumausbreitung und allgemein Vakuum: $\rho_e = \rho_m = 0$ und $\underline{\vec{J}} = \underline{\vec{M}} = \vec{0}$
Poynting-Vektor; Wirkleistung

$$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* \quad ; \quad P = \oint\!\!\!\oint \Re \left\{ \underline{\vec{S}} \right\} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{2} \oint\!\!\!\oint \Re \left\{ \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^* \right\} \cdot d\vec{A}$$

EM-Wellen: allgemeine Zusammenhänge

Wellenleiter (konstanter Querschnitt)

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0} \right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c} \right)^2}}$$

Phasengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0} \right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c} \right)^2}}$$

Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0} \right)^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c} \right)^2}$$

Zusammenhang Geschwindigkeiten

$$c_0^2 = v_g \cdot v_p$$

Kritische Frequenzen ($a > b$)

$$f_{c,m,n} = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2}$$

Zweileitersysteme

Gruppen- und Phasengeschwindigkeit

$$v_g = v_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = c$$

Leitungsbeläge Koaxialleitung

$$C' = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)} \quad L' = \frac{\varepsilon\mu}{C'} = \frac{\mu \ln\left(\frac{D}{d}\right)}{2\pi}$$

Feldwellenwiderstand

TEM-Wellen

$$\frac{\underline{\vec{E}}_x}{\underline{\vec{H}}_y} = -\frac{\underline{\vec{E}}_y}{\underline{\vec{H}}_x} = \pm \frac{\omega\mu}{\beta} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \pm Z_F$$

$$Z_{F0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega = 377\Omega$$

TE-Wellen

$$Z_{FH} = \pm \frac{\underline{\vec{E}}_x}{\underline{\vec{H}}_y} = \mp \frac{\underline{\vec{E}}_y}{\underline{\vec{H}}_x} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\omega\mu}{\beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0} \right)^2}} = \frac{Z_F}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0} \right)^2}} = \frac{Z_F}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f_0} \right)^2}} = \frac{Z_F}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c} \right)^2}}$$

TM-Wellen

$$\begin{aligned}Z_{FE} &= \pm \frac{\underline{\vec{E}}_x}{\underline{\vec{H}}_y} = \mp \frac{\underline{\vec{E}}_y}{\underline{\vec{H}}_x} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \frac{\beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0} \right)^2}}{\omega\varepsilon} \\ &= Z_F \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0} \right)^2} = Z_F \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f_0} \right)^2} = Z_F \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c} \right)^2}\end{aligned}$$

Antennentheorie

Kenngößen von Antennen

Strahlungsleistungsdichte (Kugel/Dipol)

$$S_0 = \frac{P}{4\pi r^2} \quad S(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} Z_F \left(\frac{\beta |I_0| l \sin(\vartheta)}{4\pi r} \right)^2$$

Richtfaktor

$$D = \frac{S_{\max}}{S_0} = \frac{S_{\max}}{P} \cdot 4\pi r \quad \text{bzw.} \quad D(\vartheta, \varphi) = \frac{S(\vartheta, \varphi)}{S_0}$$

Gewinn

$$G = \eta D$$

Zusammenhang zwischen Wirkfläche und Gewinn für alle Antennen

$$\frac{A}{G} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

Richcharakteristik

$$C(\vartheta, \varphi) = \frac{\left\| \underline{\vec{E}}(\vartheta, \varphi) \right\|}{\left\| \underline{\vec{E}} \right\|_{\max}} = \frac{\left\| \underline{\vec{H}}(\vartheta, \varphi) \right\|}{\left\| \underline{\vec{H}} \right\|_{\max}} = \sqrt{\frac{S(\vartheta, \varphi)}{S_{\max}}}$$

Abgestrahlte Leistung

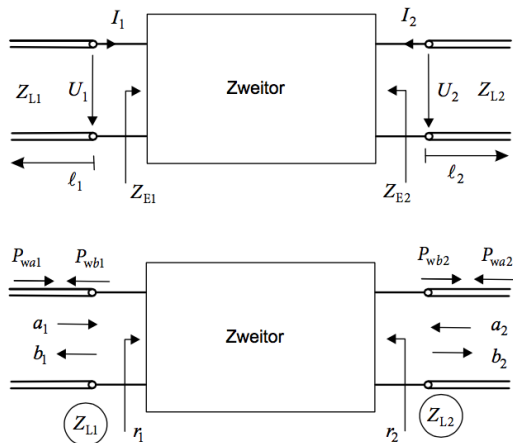
$$P = \oint\!\!\!\oint S dA = \oint\!\!\!\oint S_0 D C^2(\vartheta, \varphi) dA$$

Fußpunktimpedanz und Strahlungswiderstand

$$\underline{Z}_A = \frac{U_0}{I_0} \quad R_S = \frac{2P}{|I_0|^2}$$

Zweitore

Wellengrößen



Komplexe Wellenamplituden

$$a_i = \frac{U_{hi}}{\sqrt{Z_{Li}}} \quad (\text{hinlaufenden normierte Spannungswelle an Tor } i)$$

$$b_i = \frac{U_{ri}}{\sqrt{Z_{Li}}} \quad (\text{rücklaufende normierte Spannungswelle an Tor } i)$$

Spannung und Strom an Tor i

$$U_i = (a_i + b_i)\sqrt{Z_{Li}}$$

$$a_i = \frac{U_i + Z_{Li}I_i}{2\sqrt{Z_{Li}}}$$

$$b_i = \frac{U_i - Z_{Li}I_i}{2\sqrt{Z_{Li}}}$$

Wirkleistung

$$P_{wai} = \frac{1}{2}a_i a_i^* = \frac{U_{hi}U_{hi}^*}{2Z_{Li}} = \frac{1}{2}|a_i|^2 \quad P_{wbi} = \frac{1}{2}b_i b_i^* = \frac{U_{ri}U_{ri}^*}{2Z_{Li}} = \frac{1}{2}|b_i|^2$$

Matrizen

Streumatrix

$$\underline{b} = \underline{S} \cdot \underline{a}$$

Transmissionsmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

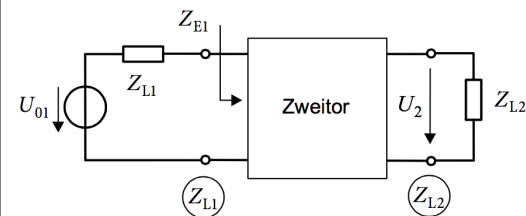
$$\underline{T} = \frac{1}{\underline{S}_{21}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\underline{S}_{22} \\ \underline{S}_{11} & -\det(\underline{S}) \end{pmatrix}$$

$$\underline{S} = \frac{1}{T_{11}} \cdot \begin{pmatrix} T_{21} & \det(\underline{T}) \\ 1 & -T_{12} \end{pmatrix}$$

Kettenmatrix

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

Streuparameter



Reflexionsfaktoren

$$s_{ii} = \frac{Z_{Ei} - Z_{Li}}{Z_{Ei} + Z_{Li}}$$

Transmissionsfaktoren

$$s_{ji} = \frac{2U_j}{U_{0i}} \sqrt{\frac{Z_{Li}}{Z_{Lj}}}$$