

Atiyah-MacDonald 可換代数入門 第 6 章演習問題解答

flag3 (@flag3833753)

2020 年 5 月 14 日

概要

Atiyah-MacDonald 可換代数入門 [1] 第 6 章の演習問題の解答をまとめたものである。

6 連鎖条件

演習問題

- 部分加群の昇鎖 $\text{Ker}(u) \subseteq \text{Ker}(u^2) \subseteq \dots$ を考える。昇鎖条件によって、この昇鎖は停留的である。すなわち、ある整数 n が存在して $\text{Ker}(u^n) = \text{Ker}(u^{n+1}) = \dots$ となる。 u は全射より u^n は全射であるので、 $x \in M$ が $u(x) = 0$ ならば $x = u^n(y)$ となる $y \in M$ が存在して、 $u^{n+1}(y) = u(x) = 0$ より $y \in \text{Ker}(u^{n+1}) = \text{Ker}(u^n)$ となり、 $x = u^n(y) = 0$ である。すなわち u は単射である。よって u は同型写像である。
 - 部分加群の降鎖 $\text{Im}(u) \supseteq \text{Im}(u^2) \supseteq \dots$ を考える。降鎖条件によって、この降鎖は停留的である。すなわち、ある整数 n が存在して $\text{Im}(u^n) = \text{Im}(u^{n+1}) = \dots$ となる。 $x \in M$ に対し $u^n(x) \in \text{Im}(u^n) = \text{Im}(u^{n+1})$ より $u^n(x) = u^{n+1}(y)$ となる $y \in M$ が存在する。 u は単射より u^n は単射であるので、 $x = u(y)$ である。すなわち u は全射である。よって u は同型写像である。
- N を M の部分空間とし、 Σ を N のすべての有限生成部分加群の集合とすると、命題 6.2 の証明と同様にして N は Σ の極大元で有限生成となるので、命題 6.2 より M はネーター加群となる。
- 系 6.4 より $M/N_1 \oplus M/N_2$ はネーター加群であり自然な写像 $M/(N_1 \cap N_2) \rightarrow M/N_1 \oplus M/N_2$ は単射なので命題 6.3 より $M/(N_1 \cap N_2)$ はネーター加群となる。アルティン加群の場合も同様である。
- x_1, \dots, x_n を M の生成系とする。系 6.4 より M^n はネーター A -加群であり、 $a \mapsto (ax_1, \dots, ax_n)$ によって定義される写像 $A \rightarrow M^n$ は単射 $A/\mathfrak{a} \rightarrow M^n$ を誘導するので、命題 6.3 によって、 A/\mathfrak{a} はネーター A -加群である。ゆえに、 A/\mathfrak{a} はネーター A/\mathfrak{a} -加群であるので、ネーター環である。
 p を固定した素数とし、 G を位数が p のべきであるすべての元からなる \mathbb{Q}/\mathbb{Z} の部分群とすると、 G はアルティン \mathbb{Z} -加群であるが、 G の零化イデアルは (0) で $\mathbb{Z}/(0)$ はアルティン環ではない。
- A を X の部分空間、 $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots$ を A の閉集合の降鎖とする。このとき、 $\overline{Y_n}$ を Y_n の X における閉包とすると $\overline{Y_1} \supseteq \overline{Y_2} \supseteq \dots$ は X の閉集合の降鎖であり、降鎖条件によって、この降鎖は停留的である。すなわち、ある整数 n が存在して $\overline{Y_n} = \overline{Y_{n+1}} = \dots$ となる。よって $Y_n = \overline{Y_n} \cap A$ より $Y_n = Y_{n+1} = \dots$ となるので、 A の閉集合の降鎖は停留的であり、 A はネーター空間である。
 $\{U_i\}_{i \in I}$ を X の開被覆とする。集合 U_i の有限個の和集合全体の集合は、空でないから極大元 U をもつ。すべての $i \in I$ に対して $U \cup U_i = U$ であるから、 $U = X$ となり、 X は準コンパクトである。

6. i) \implies iii) 演習問題 5 より X の部分空間はネーター空間であり, 準コンパクトである.
 iii) \implies ii) 明らか.
 ii) \implies i) $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots$ を X の開集合の昇鎖とする. U_n 全体の和集合 U は開集合なので準コンパクトであり, $\{U_n\}_n$ は U の開被覆であるから, U は U_n の有限個の和集合となるので, ある整数 n が存在して $U = U_n$ となる. よって $U_n = U_{n+1} = \cdots$ となるので, この昇鎖は停留的である.
7. 有限個の既約な閉集合の和集合で表されない X の閉部分集合の集合を Σ とする. $\Sigma \neq \emptyset$ と仮定すると極小元 Y をもつ. Y は空ではなく, 既約でもないので, Y と異なる閉集合 Y_1, Y_2 の和集合と表される. このとき, 極小性により $Y_1, Y_2 \notin \Sigma$ である. したがって Σ の定義より $Y \notin \Sigma$ となり矛盾する.
8. $\text{Spec}(A)$ の閉集合は, イデアル $\mathfrak{a} \subseteq A$ によって $V(\mathfrak{a})$ と表される. $\text{Spec}(A)$ の閉集合の降鎖 $V(\mathfrak{a}_1) \supseteq V(\mathfrak{a}_2) \supseteq \cdots$ を考える. $r(\mathfrak{a}_1) \subseteq r(\mathfrak{a}_2) \subseteq \cdots$ はイデアルの昇鎖より, 昇鎖条件によって, この昇鎖は停留的である. すなわち, ある整数 n が存在して $r(\mathfrak{a}_n) = r(\mathfrak{a}_{n+1}) = \cdots$ となる. よって $V(r(\mathfrak{a}_n)) = V(\mathfrak{a}_n)$ より $V(\mathfrak{a}_n) = V(\mathfrak{a}_{n+1}) = \cdots$ となるので降鎖は停留的である.
 $A = k[x_1, x_2, \dots]$ を体 k 上の可算無限個の不定元 x_n に関する多項式環とし, A のイデアル \mathfrak{a} を $\mathfrak{a} = (x_1, x_2^2, \dots, x_n^n, \dots)$ とする. このとき, 環 $B = A/\mathfrak{a}$ は唯一つの素イデアルをもつので, $\text{Spec}(B)$ はネーター空間である. 一方, その素イデアルは有限生成でないので, B はネーター環ではない.
9. 演習問題 8 から, $X = \text{Spec}(A)$ はネーター空間であり, 演習問題 7 から, X の既約成分の集合は有限である. よって, 第 1 章, 演習問題 20 iv) より X の既約成分は A の極小素イデアル \mathfrak{p} を用いて $V(\mathfrak{p})$ と表されることから従う.
10. 命題 6.2 より M は有限生成であり, $\mathfrak{a} = \text{Ann}(M)$ とすると, 第 3 章, 演習問題 19 v) より $\text{Supp}(M) = V(\mathfrak{a})$ である. よって $\text{Supp}(M)$ は $\text{Spec}(A/\mathfrak{a})$ と同相であり, 演習問題 4 より A/\mathfrak{a} はネーター環であるので, 演習問題 8 より $\text{Supp}(M)$ はネーター空間である.
11. $f^*: \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ が閉写像ならば f が上昇性質をもつことは第 5 章, 演習問題 10 で示した. f が上昇性質をもつとき, X を $\text{Spec}(B)$ の閉集合とすると, 演習問題 5 より X はネーター空間であるので, 演習問題 7 より X_i ($1 \leq i \leq n$) を X の既約な閉集合として $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ とかける. よって $f^*(X) = \bigcup_{i=1}^n f^*(X_i)$ より X を $\text{Spec}(B)$ の既約な閉集合としてもよい. このとき X は素イデアル $\mathfrak{q} \subseteq B$ によって $X = V(\mathfrak{q})$ と表せる. $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$ とおくと, 第 5 章, 演習問題 10 より $f^*: \text{Spec}(B/\mathfrak{q}) \rightarrow \text{Spec}(A/\mathfrak{p})$ は全射であるので $f^*(V(\mathfrak{q})) = V(\mathfrak{p})$ となり f^* は閉写像となる.
12. 素イデアルの昇鎖 $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq \cdots$ を考える. $V(\mathfrak{p}_1) \supseteq V(\mathfrak{p}_2) \supseteq \cdots$ は閉集合の降鎖より, 降鎖条件によって, この降鎖は停留的である. すなわち, ある整数 n が存在して $V(\mathfrak{p}_n) = V(\mathfrak{p}_{n+1}) = \cdots$ となる. よって $\mathfrak{p}_n \in V(\mathfrak{p}_n) = V(\mathfrak{p}_{n+1}) = \cdots$ より $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}_{n+1} = \cdots$ となるので昇鎖は停留的である.
 $A = \prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z}/(2)$ とし, n 以下の成分が 1, n より大きい成分が 0 である A の元を e_n とおくと, 開集合の昇鎖 $X_{e_0} \subset X_{e_1} \subset \cdots$ は停留しないので $\text{Spec}(A)$ はネーター空間ではない. 一方, A はブール環であり, 第 1 章, 演習問題 11 よりすべての素イデアルは極大イデアルであるので, 素イデアル全体の集合は昇鎖条件を満たす.

参考文献

- [1] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald (著), 新妻 弘 (訳), Atiyah-MacDonald 可換代数入門, 共立出版, 2006.
 [2] Nicolas Bourbaki (著), 木下 素夫 (編・訳), ブルバキ数学原論 可換代数 1, 東京図書, 1971.