基本群と被覆空間の Galois 理論

flag3 (@flag3833753)

2020 年 6 月 28 日 (最終更新日：2025 年 8 月 18 日)

概要

Galois 理論という，数学的対象の構造を Galois 群や基本群と呼ばれる群を用いて記述するという理論があります．特に被覆空間の Galois 理論という，unloopable な位相空間上の被覆空間全体がなす圏を基本群によって記述するという理論があります．これは体の Galois 理論という，体上の有限 étale 代数全体がなす圏は絶対 Galois 群によって記述されることの類似になっています．本原稿では被覆空間の理論を紹介したいと思います．前提知識として群論・位相空間論の初歩的な知識は仮定します．

1　被覆空間

定義 1.1　X を位相空間とする．X **上の空間**とは，位相空間 Y と連続写像 $p\colon Y \to X$ の組 (Y, p) のことを指す．X 上の空間 (Y_1, p_1) から (Y_2, p_2) への射とは，連続写像 $f\colon Y_1 \to Y_2$ であって $p_1 = p_2 \circ f$ を満たすものを指す．

定義 1.2　X 上の空間 (Y, p) が X **上の被覆空間**であるとは，任意の $x \in X$ に対し，ある x の開近傍 V と Y の開集合の族 $\{U_i\}_{i\in I}$ が存在して $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i\in I} U_i$ かつ $p|_{U_i}\colon U_i \to V$ が同相写像であることを指す．このとき写像 p のことを**被覆写像**という．

定義 1.3　写像 $p\colon Y \to X$ が**局所同相写像**であるとは，任意の $y \in Y$ に対し，ある y の開近傍 U が存在して，$p(U)$ が X の開集合でありかつ $p|_U\colon U \to p(U)$ が同相写像であることを指す．

問題 1.4　被覆写像は局所同相写像であること，及び局所同相写像は連続かつ開写像であることを示せ．

例 1.5　I を離散空間とし $p\colon X \times I \to X$ を第一射影とすると p は被覆写像となる．組 $(X \times I, p)$ を X 上の**自明被覆空間**といい，p を**自明被覆写像**という．

例 1.6　$S^1 \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とするとき，$p\colon \mathbb{R} \to S^1$ を $p(x) = e^{2\pi x i}$ と定めると p は被覆写像となる．

命題 1.7　(Y, p) を X 上の被覆空間とするとき X が連結[*1]ならば $p^{-1}(x)$ の濃度は $x \in X$ によらない．

証明　$x_0 \in X$ を 1 つ取って固定する．X の部分集合 $A \coloneqq \{x \in X \mid \#p^{-1}(x) = \#p^{-1}(x_0)\}$ が開かつ閉であることを示せばよい．任意の $x \in A$ に対し，ある x の開近傍 V と Y の開集合の族 $\{U_i\}_{i\in I}$ が存在して $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i\in I} U_i$ かつ $p|_{U_i}\colon U_i \to V$ は同相写像である．このとき $V \subseteq A$ が成り立つので A は X の開集合である．A が X の閉集合であることは，$X \setminus A$ に対して同様の議論をすることによってわかる．□

[*1] 本原稿では空集合は連結でも弧状連結でもないとする．

系 1.8 (Y, p) を X 上の被覆空間とするとき $Y \neq \emptyset$ かつ X が連結ならば p は全射である．

定義 1.9 G を群，X を位相空間とし $\mathrm{Aut}(X)$ を X の自己同相群とする．**群 G の位相空間 X への (左) 作用**とは，群準同型 $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(X)$ のことを指す．$g \in G$ に対し，$\alpha(g)\colon X \to X$ のことを**元 g の (左) 作用**といい，$x \in X$ に対し $g \cdot x \coloneqq \alpha(g)(x)$ と書く．

注意 1.10 α は群準同型より G の単位元 e，任意の $g, h \in G$，$x \in X$ に対し

$$e \cdot x = x, \quad (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) \tag{1}$$

が成り立つ．逆に各 $g \in G$ に対し同相写像 $X \to X; x \mapsto g \cdot x$ を (1) を満たすように定義することで G の位相空間 X への作用を定めることができる．

記法 1.11 群 G の位相空間 X への作用が与えられたとき，$x, y \in X$ に対して，ある $g \in G$ が存在して $y = g \cdot x$ となるとき $x \sim y$ と関係を定義すると，これは同値関係であり，商空間 $X/\sim$ のことを $G\backslash X$ と書く．また G の部分集合 S と X の部分集合 A に対し $S \cdot A = \{g \cdot x \mid g \in S, x \in A\}$ と表すことにする．

補題 1.12 群 G の位相空間 X への作用 α が与えられたとき，射影 $p_G\colon X \to G\backslash X$ は開写像である．

証明 X の開集合 U に対し $p_G(U)$ が $G\backslash X$ の開集合であること，すなわち $p_G^{-1}(p_G(U))$ が X の開集合であることを示せばよい．実際

$$p_G^{-1}(p_G(U)) = \bigcup_{x \in U} p_G^{-1}(p_G(x)) = \bigcup_{x \in U} G \cdot x = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$$

となるが，$\alpha(g)$ は同相写像であり $g \cdot U = \alpha(g)(U)$ は開集合であるから $p_G^{-1}(p_G(U))$ は開集合である．□

2 Galois 被覆空間

定義 2.1 位相空間 X が**局所連結** (resp. **局所弧状連結**) であるとは，任意の $x \in X$ と x の開近傍 V に対し x の連結 (resp. 弧状連結) な開近傍 U が存在して $U \subseteq V$ なることを指す．

問題 2.2 X が局所連結 (resp. 局所弧状連結) ならば X の被覆空間も局所連結 (resp. 局所弧状連結) であること，また X が局所弧状連結ならば X が連結であることと弧状連結であることは同値であることを示せ．

この節において，以下 X を連結かつ局所連結な位相空間とする．

記法 2.3 X 上の空間 (Y, p) に対し，$\mathrm{Aut}(Y/X) \coloneqq \{f \in \mathrm{Aut}(Y) \mid p \circ f = p\}$ と表す．

命題 2.4 (Y, p) を X 上の被覆空間，G を群とし，群準同型 $G \to \mathrm{Aut}(Y/X)$ が与えられてる，すなわち X 上の被覆空間 (Y, p) に G が作用しているとすると，p と G が誘導する写像 $\bar{p}_G\colon G\backslash Y \to X$ は被覆写像である．

証明 $x \in X$ に対し x の連結な開近傍 V と Y の開集合族 $\{U_i\}_{i \in I}$ が存在して $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ かつ $p|_{U_i}\colon U_i \to V$ は同相写像である．$p_G\colon Y \to G\backslash Y$ を射影とし，$V_i \coloneqq p_G(U_i)$ とすると定理 1.12 より V_i は $G\backslash Y$ の開集合であり，$\bar{p}_G^{-1}(V) = p_G(p_G^{-1}(\bar{p}_G^{-1}(V))) = p_G(\bigsqcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} V_i$ となる．$p_G|_{U_i}\colon U_i \to V_i$ は連続かつ開写像であり $\bar{p}_G \circ p_G|_{U_i}\colon U_i \to V$ は同相写像であることから $p_G|_{U_i}\colon U_i \to V_i$ は同相写像である．

よって $\bar{p}_G|_{V_i}\colon V_i \to V$ は同相写像である．ここで U_i たちは連結であるので各 $g \in G$，$i \in I$ に対しある $j \in I$ が存在して $g \cdot U_i = U_j$ となる．ゆえに $i, j \in I$ に対しある $g \in G$ が存在して $g \cdot U_i = U_j$ となるとき $i \sim j$ と関係を定めると，この関係は同値関係であり，$i \sim j$ ならば $V_i = V_j$ であり，$i \not\sim j$ ならば $V_i \cap V_j = \emptyset$ となる．よって $I/\!\sim$ の完全代表系を J とすると $\bar{p}_G^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in J} V_i$ となるので $\bar{p}_G$ は被覆写像である． $\square$

定義 2.5 X 上の被覆空間 (Y, p) が X の **Galois 被覆空間**であるとは，Y が連結であって p と $\mathrm{Aut}(Y/X)$ によって誘導される写像 $\bar{p}_{\mathrm{Aut}(Y/X)}\colon \mathrm{Aut}(Y/X)\backslash Y \to X$ が同相写像であるものを指す.

定義 2.6 (Y, p) を X 上の被覆空間とする．(Y, p) の**中間被覆空間**とは，X 上の被覆空間 (Z, q) と X 上の空間の射 $f\colon Y \to Z$ の組のことを指す.

定理 2.7 $((Y, y), p)$ を (X, x) 上の基点つき Galois 被覆空間[*2]とするとき，次の 1 対 1 対応がある[*3].

$$
\begin{array}{ccc}
\{((Y,y),p) \text{ の基点つき連結な中間被覆空間 }\}/\!\cong_{(X,x)\text{ 上の基点つき空間}} & \longleftrightarrow & \{\mathrm{Aut}(Y/X) \text{ の部分群 }\} \\
(Z, z) & \longmapsto & \mathrm{Aut}(Y/Z) \\
(H\backslash Y, p_H(y)) & \longleftarrow\!\shortmid & H
\end{array}
$$

補題 2.8 (Y, p) を X 上の被覆空間，Z を連結な位相空間とする．連続写像 $f, g\colon Z \to Y$ が $p \circ f = p \circ g$ を満たし，ある $z \in Z$ に対し $f(z) = g(z)$ ならば $f = g$ である.

証明 Z の部分集合 $A := \{z \in Z \mid f(z) = g(z)\}$ が開かつ閉であることを示せばよい．任意の $z \in A$ に対し $x := (p \circ f)(z) = (p \circ g)(z)$ とおくと x の開近傍 V と Y の開集合族 $\{U_i\}_{i \in I}$ が存在して，$p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ かつ $p|_{U_i}\colon U_i \to V$ は同相写像である．ある $i \in I$ が存在して $f(z) = g(z) \in U_i$ であり $p|_{U_i}\colon U_i \to V$ が同相写像であることから z の開近傍 $W := f^{-1}(U_i) \cap g^{-1}(U_i)$ において $f = g$ となるので $W \subseteq A$ となり A は開集合である．一方 $z \in Z \setminus A$ に対し $x := (p \circ f)(z) = (p \circ g)(z)$ の開近傍 V と Y の開集合族 $\{U_i\}_{i \in I}$ を同様に定めると，相異なる i, j が存在して $f(z) \in U_i$，$g(z) \in U_j$ であり z の開近傍 $W' := f^{-1}(U_i) \cap g^{-1}(U_j)$ は $W' \subseteq Z \setminus A$ を満たすので A は閉集合である. $\square$

命題 2.9 $((Y, y), p)$ を (X, x) 上の基点つき連結な被覆空間とするとき，$e\colon \mathrm{Aut}(Y/X) \to p^{-1}(x); f \mapsto f(y)$ は単射である．また (Y, p) が X 上の Galois 被覆空間であることと，e が全単射であることは同値である.

証明 e が単射であることは定理 2.8 より従う．(Y, p) が X 上の Galois 被覆空間であるとき，任意の $y' \in p^{-1}(x)$ に対し $p_{\mathrm{Aut}(Y/X)}\colon Y \to \mathrm{Aut}(Y/X)\backslash Y$ を射影とすると $p_{\mathrm{Aut}(Y/X)}(y) = p_{\mathrm{Aut}(Y/X)}(y')$ より $f \in \mathrm{Aut}(Y/X)$ が存在して $f(y) = y'$ となるので e は全射である．逆に e が全射であるとき，任意の $y' \in p^{-1}(x)$ に対し $f \in \mathrm{Aut}(Y/X)$ が存在して $f(y) = y'$ より $\bar{p}_{\mathrm{Aut}(Y/X)}\colon \mathrm{Aut}(Y/X)\backslash Y \to X$ は同相写像となるので (Y, p) は X 上の Galois 被覆空間である. $\square$

命題 2.10 $((Y, y), p)$ を (X, x) 上の基点つき連結な被覆空間とし，H を $\mathrm{Aut}(Y/X)$ の部分群とするとき，$\mathrm{Aut}(Y/(H\backslash Y)) = H$ が成り立つ.

証明 $H \subseteq \mathrm{Aut}(Y/(H\backslash Y))$ は明らかに成り立つ．任意の $\phi \in \mathrm{Aut}(Y/(H\backslash Y))$ に対しある $g \in H$ が存在して $\phi(y) = g(y)$ であり，Y の連結性と定理 2.8 から $\phi = g \in H$ となり $\mathrm{Aut}(Y/(H\backslash Y)) \subseteq H$ となる. $\square$

[*2] (Y, p) が X 上の Galois 被覆空間であって $p(y) = x$ を満たすものこと．以降，断りなく「基点つき」という用語を用いる.

[*3] 本来は被覆写像や (X, x) 上の基点つき空間の射を記述するべきではあるが記号が多くなり煩雑になってしまうため省略した．また (Y_1, p_1) と (Y_2, p_2) が X 上の空間として同型であるとは，X 上の空間の射 $f\colon Y_1 \to Y_2$，$g\colon Y_2 \to Y_1$ が存在し $g \circ f = \mathrm{id}_{Y_1}$，$f \circ g = \mathrm{id}_{Y_2}$ となることを指す (基点つき空間についても考察せよ)．同型の記号を $\cong$ と表すことにする.

補題 2.11　(Y,p)，(Z,q) を X 上の被覆空間とすると，X 上の空間の射 $f\colon Y\to Z$ は被覆写像である．

証明　任意の $z\in Z$ に対し $x:=q(z)$ とすると，ある x の連結な開近傍 V と Y の開集合族 $\{U_i\}_{i\in I}$ が存在して $p^{-1}(V)=\coprod_{i\in I}U_i$ かつ $p|_{U_i}\colon U_i\to V$ は同相写像である．また Z の開集合族 $\{V_j\}_{j\in J}$ が存在して $q^{-1}(V)=\coprod_{j\in J}V_j$ かつ $q|_{V_j}\colon V_j\to V$ は同相写像である．よって連結性より各 U_i に対しある $j\in J$ が存在して $f(U_i)\subseteq V_j$ であり $q|_{V_j}$ が同相写像であることから $f(U_i)=V_j$ となる．よって $j\in J$ を $z\in V_j$ なるものとし $I':=\{i\in I\mid f(U_i)=V_j\}$ とすると $f^{-1}(V_j)=\coprod_{i\in I'}U_i$ かつ $f|_{U_i}\colon U_i\to V_j$ は同相写像となる．　□

命題 2.12　$((Y,y),p)$ を (X,x) 上の基点つき Galois 被覆空間とし，$((Z,z),q)$，$f\colon (Y,y)\to(Z,z)$ を $((Y,y),p)$ の基点つき連結な中間被覆空間とする．このとき $((Y,y),f)$ は (Z,z) 上の基点つき Galois 被覆空間である．

証明　定理 2.11 より f は被覆写像である．任意の $y'\in f^{-1}(z)$ に対し $y'\in p^{-1}(x)$ であり (Y,p) は X 上の Galois 被覆空間なので定理 2.9 より $\phi\in\mathrm{Aut}(Y/X)$ が存在して $y'=\phi(y)$ となる．$q\circ(f\circ\phi)=q\circ f$ であり $(f\circ\phi)(y)=f(y)$ より定理 2.8 から $f\circ\phi=f$ ゆえ $\phi\in\mathrm{Aut}(Y/Z)$ となるので定理 2.9 より (Y,f) は Z 上の Galois 被覆空間である．　□

定理 2.7 の証明　定理 2.10 と定理 2.12 より，$((Y,y),p)$ の基点つき連結な中間被覆空間 $((Z,z),q)$，$f\colon (Y,y)\to(Z,z)$ と $((Z',z'),q')$，$f'\colon (Y,y)\to(Z',z')$ が (X,x) 上の基点つき空間として同型であるときに $\mathrm{Aut}(Y/Z)=\mathrm{Aut}(Y/Z')$ であることを示せばよい．(X,x) 上の基点つき空間の同型射 $\phi\colon(Z,z)\to(Z',z')$ をとると，$q'\circ f'=q\circ f=q'\circ(\phi\circ f)$ であり $f'(y)=(\phi\circ f)(y)$ ゆえ Y の連結性と定理 2.8 から $f'=\phi\circ f$ となる．このことから $\mathrm{Aut}(Y/Z)=\mathrm{Aut}(Y/Z')$ であることがわかる．　□

命題 2.13　定理 2.7 において，$((Y,y),p)$ の基点つき連結な中間被覆空間 $((Z,z),q)$，$f\colon(Y,y)\to(Z,z)$ と $\mathrm{Aut}(Y/X)$ の部分群 H が対応しているとする．$\sigma\in\mathrm{Aut}(Y/X)$ に対し，$z_\sigma:=(f\circ\sigma)(y)$ として $((Y,y),p)$ の基点つき連結な中間被覆空間 $((Z,z_\sigma),q)$，$f\circ\sigma\colon(Y,y)\to(Z,z_\sigma)$ と $\mathrm{Aut}(Y/X)$ の部分群 $\sigma^{-1}H\sigma$ は対応する．特に，(Z,q) が X 上の Galois 被覆空間であることと H が $\mathrm{Aut}(Y/X)$ の正規部分群であることは同値であり，さらにこのとき $\mathrm{Aut}(Z/X)$ は $\mathrm{Aut}(Y/X)/H$ と同型である．

証明　(Z,z_σ) に対応する $\mathrm{Aut}(Y/X)$ の部分群を H' とするとき

$$\phi\in H' \iff f\circ\sigma=(f\circ\sigma)\circ\phi \iff f=f\circ(\sigma\circ\phi\circ\sigma^{-1}) \iff \sigma\circ\phi\circ\sigma^{-1}\in H \iff \phi\in\sigma^{-1}H\sigma$$

より $H'=\sigma^{-1}H\sigma$ となり 1 番目の主張が成り立つ．2 番目の主張は (Z,q) が X 上の Galois 被覆空間であることと任意の $\sigma\in\mathrm{Aut}(Y/X)$ に対し (Z,z) と (Z,z_σ) が (X,x) 上の基点つき空間として同型であることが同値であることを示せばよい．(Z,q) が X 上の Galois 被覆空間であるとき，任意の $\sigma\in\mathrm{Aut}(Y/X)$ に対し $z_\sigma\in q^{-1}(x)$ ゆえ定理 2.9 より $\phi\in\mathrm{Aut}(Z/X)$ が存在して $\phi(z)=z_\sigma$ となる．よって (Z,z) と (Z,z_σ) は (X,x) 上の基点つき空間として同型である．一方，任意の $\sigma\in\mathrm{Aut}(Y/X)$ に対し (Z,z) と (Z,z_σ) が (X,x) 上の基点つき空間として同型であるとき，任意の $z'\in q^{-1}(x)$ に対し $y'\in f^{-1}(z')$ をとると $y'\in p^{-1}(x)$ であり (Y,p) が X 上の Galois 被覆空間であるから定理 2.9 より $\sigma\in\mathrm{Aut}(Y/X)$ が存在して $y'=\sigma(y)$ であり $z'=f(y')=(f\circ\sigma)(y)=z_\sigma$ となる．よって (Z,z) と (Z,z') は (X,x) 上の基点つき空間として同型であるので $\phi\in\mathrm{Aut}(Z/X)$ が存在して $\phi(z)=z'$ となる．よって定理 2.9 より (Z,q) は X 上の Galois 被覆空間である．3 番目の主張は H が $\mathrm{Aut}(Y/X)$ の正規部分群より $\mathrm{Aut}(Y/X)\to\mathrm{Aut}((H\backslash Y)/X)$ が誘導されることから同型定理より成り立つ．　□

3　基本群

定義 3.1　X を位相空間とする．連続写像 $f\colon [0,1] \to X$ のことを**道**といい $f(0)$ を**始点**，$f(1)$ を**終点**という．

定義 3.2　始点と終点を共有する道 f, g が**道ホモトピック**であるとは，ある連続写像 $h\colon [0,1]\times[0,1] \to X$ が存在して，任意の $t \in [0,1]$ に対し $h(t,0) = f(0) = g(0)$ かつ $h(t,1) = f(1) = g(1)$ を満たし，任意の $y \in [0,1]$ に対し $h(0,y) = f(y)$ かつ $h(1,y) = g(y)$ を満たすもののことを指す．写像 h を道 f, g の間の**道ホモトピー**という．f, g が道ホモトピックであることを $f \simeq g$ と表す．

問題 3.3　道ホモトピックという関係は道全体の集合上の同値関係であることを示せ．

定義 3.4　f, g を f の始点と g の終点が一致する，すなわち $f(0) = g(1)$ なる道とするとき，f と g の**積**とは，

$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} g(2x) & (0 \le x \le 1/2) \\ f(2x-1) & (1/2 \le x \le 1) \end{cases}$$

で定義される道 $f \cdot g$ のことを指す．f の**逆**とは，$f^{-1}(x) = f(1-x)$ で定義される道 f^{-1} のことを指す．

問題 3.5　f_1, f_2, g_1, g_2 を $f_1 \simeq f_2$，$g_1 \simeq g_2$ であるような道とし，$f_1 \cdot g_1$ が定義できるとする．このとき $f_2 \cdot g_2$ が定義できて $f_1 \cdot g_1 \simeq f_2 \cdot g_2$ であることを示せ．また $f_1^{-1} \simeq f_2^{-1}$ であることを示せ．

記法 3.6　道 f の $\simeq$ による同値類を $[f]$ と表す．すなわち $[f]$ は f と道ホモトピックな道全体の集合とする．

問題 3.7　(X, x) を基点つき空間とする．始点と終点を x とする道全体の $\simeq$ による同値類の集合は，$[f]\cdot[g] = [f \cdot g]$ によって定義される演算によって群となることを示せ．

定義 3.8　定理 3.7 の群を基点つき空間 (X, x) の**基本群**または **1 次ホモトピー群**といい $\pi_1(X, x)$ と表す．

注意 3.9　$f\colon (X,x) \to (Y,y)$ を基点つき連続写像とするとき，群準同型 $f_*\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y); [u] \mapsto [f \circ u]$ が誘導される．

注意 3.10　X を位相空間，$x, y \in X$ とし，x を始点，y を終点とする道 f が存在すると仮定する．このとき $\pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y); [g] \mapsto [f \cdot g \cdot f^{-1}]$ は群同型である．特に X が弧状連結な位相空間のとき $\pi_1(X,x)$ は $x \in X$ によらず同型である．

定義 3.11　位相空間 X が**単連結**であるとは，X が弧状連結であり，任意の $x \in X$ に対し $\pi_1(X,x)$ が自明群，すなわち $\pi_1(X,x)$ が単位元のみからなる群であるようなもののことを指す．

補題 3.12　$((Y,y),p)$ を (X,x) 上の基点つき被覆空間とする．

(1) $f\colon [0,1] \to X$ を $f(0) = x$ なる道とするとき，道 $\tilde{f}\colon [0,1] \to Y$ であって $\tilde{f}(0) = y$ かつ $p \circ \tilde{f} = f$ なるものが一意に存在する．

(2) $f, g\colon [0,1] \to X$ を道ホモトピックであって $f(0) = g(0) = x$ なるものとし，h を道 f, g の間の道ホモトピーとする．$\tilde{f}, \tilde{g}$ を (1) により存在する道とすると $\tilde{f}, \tilde{g}$ の間の道ホモトピー $\tilde{h}\colon [0,1]\times[0,1] \to Y$ が一意に存在する．特に $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$ である．

証明 (1) 条件を満たす $\tilde{f}$ が存在すれば一意であることは，定理 2.8 より従う．(Y,p) が X 上の自明被覆空間のとき $\tilde{f}$ は明らかに存在する．X の開集合 U であって，$p^{-1}(U)\to U$ が自明被覆写像となるようなもの全体を $\mathcal{U}$ とすると $\mathcal{U}$ は X の開被覆であり，$[0,1]$ のコンパクト性より，正の整数 n が存在して $i=1,\dots,n$ に対し $f([(i-1)/n,i/n])$ はある $U\in\mathcal{U}$ に含まれる[*4]．$f([0,1/n])\subseteq U$ なる $U\in\mathcal{U}$ をとると $p^{-1}(U)\to U$ が自明被覆写像であることから，連続写像 $\tilde{f}_1\colon[0,1/n]\to Y$ であって，$p\circ\tilde{f}_1=f|_{[0,1/n]}$ かつ $\tilde{f}_1(0)=y$ なるものが一意に存在する．また $f([1/n,2/n])\subseteq V$ なる $V\in\mathcal{U}$ をとると，連続写像 $\tilde{f}_2\colon[1/n,2/n]\to Y$ であって，$p\circ\tilde{f}_2=f|_{[1/n,2/n]}$ かつ $\tilde{f}_2(1/n)=\tilde{f}_1(1/n)$ なるものが一意的に存在する．このようにして $\tilde{f}_i\colon[(i-1)/n,i/n]\to Y$ $(i=1,\dots,n)$ を構成する．このとき，$\tilde{f}\colon[0,1]\to Y$ を $t\in[(i-1)/n,i/n]$ のとき $\tilde{f}(t)=\tilde{f}_i(t)$ とすると，$\tilde{f}$ は連続であり条件を満たす．

(2) h を f と g の間の道ホモトピーとして，$\tilde{f}$ を構成したのと同様に $\tilde{h}$ を構成するとこれが $\tilde{f}$ と $\tilde{g}$ の間の道ホモトピーとなっている．$\tilde{h}$ の一意性は定理 2.8 より従う． □

定義 3.13 (Y,p) を X 上の被覆空間とし，$x\in X$ とする．$\alpha\in\pi_1(X,x)$ と $y\in p^{-1}(x)$ に対し，l を α の代表元とすると定理 3.12 より Y 上の道 $\tilde{l}$ であって $\tilde{l}(0)=y$ かつ $p\circ\tilde{l}=l$ なるものが存在する．ここで $\alpha\cdot y:=\tilde{l}(1)$ と定義すると定理 3.12 より α の代表元の取り方によらない．これによって $\pi_1(X,x)$ の $p^{-1}(x)$ への作用[*5]が定まる (確かめよ)．この作用を**モノドロミー作用**という．

命題 3.14 (Y,p)，(Z,q) を X 上の被覆空間とし，$x\in X$ とする．$f\colon Y\to Z$ を X 上の空間の射とするとき，制限写像 $f|_{p^{-1}(x)}\colon p^{-1}(x)\to q^{-1}(x)$ は $\pi_1(X,x)$ 同変写像である．すなわち $\alpha\in\pi_1(X,x)$，$y\in p^{-1}(x)$ に対し $f(\alpha\cdot y)=\alpha\cdot f(y)$ が成り立つ．

証明 l を α の代表元とし $\tilde{l}$ を Y 上の道であって $\tilde{l}(0)=y$ かつ $p\circ\tilde{l}=l$ なるものとすると $f\circ\tilde{l}$ は Z 上の道であって $(f\circ\tilde{l})(0)=f(y)$ かつ $q\circ(f\circ\tilde{l})=l$ であるので $\alpha\cdot f(y)=(f\circ\tilde{l})(1)=f(\alpha\cdot y)$ となる． □

4 普遍被覆空間

定義 4.1 (X,x) を基点つき空間とする．(X,x) 上の**普遍被覆空間**とは，基点つき被覆空間 $((\tilde{X},\tilde{x}),\pi)$ であって，任意の (X,x) 上の基点つき被覆空間 $((Y,y),p)$ に対し，(X,x) 上の基点つき空間の射 $f\colon(\tilde{X},\tilde{x})\to(Y,y)$ が一意に存在するようなものを指す．

注意 4.2 $\tilde{X}$ が連結ならば定理 2.8 より f は存在すれば一意であることがわかる．

注意 4.3 $((\tilde{X},\tilde{x}),\pi)$ を (X,x) 上の普遍被覆空間とし，(Y,p) を X 上の被覆空間とする．$\tilde{X}$ から Y への X 上の空間の射全体の集合を $\mathrm{Hom}_X(\tilde{X},Y)$ と表すと $\mathrm{Hom}_X(\tilde{X},Y)\to p^{-1}(x); f\mapsto f(\tilde{x})$ は全単射である．

命題 4.4 X を連結かつ局所連結とし $((\tilde{X},\tilde{x}),\pi)$ を (X,x) 上の普遍被覆空間とする．このとき $(\tilde{X},\pi)$ は X 上の Galois 被覆空間である．

証明 $\tilde{X}$ が連結であることを示す．$\tilde{x}$ を含む $\tilde{X}$ の連結成分を $\tilde{X}_0$ とし $\tilde{X}_0=\tilde{X}$ を示せばよい．X は局所連結であるので $((\tilde{X}_0,\tilde{x}),\pi|_{\tilde{X}_0})$ は (X,x) 上の基点つき被覆空間である．よって (X,x) 上の基点つき空間

[*4] コンパクト距離空間の開被覆に対し $\delta>0$ が存在して直径が δ 未満の部分集合はある被覆の元に含まれるという性質を用いる．
[*5] $p^{-1}(x)$ には離散位相を入れる．以降，集合を位相空間とみなすときには離散位相を入れることにする．

の射 $f\colon (\tilde{X},\tilde{x}) \to (\tilde{X}_0,\tilde{x})$ が一意に存在する．また包含写像 $i\colon (\tilde{X}_0,\tilde{x}) \to (\tilde{X},\tilde{x})$ は (X,x) 上の基点つき空間の射であるので $i\circ f\colon (\tilde{X},\tilde{x}) \to (\tilde{X},\tilde{x})$ は (X,x) 上の基点つき空間の射である．よって一意性によって $i\circ f = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$ となるので i は全射であり $\tilde{X}_0 = \tilde{X}$ となる．

任意の $\tilde{x}' \in \pi^{-1}(x)$ に対し $((\tilde{X},\tilde{x}'),\pi)$ は (X,x) 上の被覆空間であるので (X,x) 上の基点つき空間の射 $f\colon (\tilde{X},\tilde{x}) \to (\tilde{X},\tilde{x}')$ が一意に存在する．f は被覆写像であるので f は全射であり，$\tilde{x}'' \in f^{-1}(\tilde{x})$ をとると $((\tilde{X},\tilde{x}''),\pi)$ は (X,x) 上の被覆空間であるので (X,x) 上の基点つき空間の射 $g\colon (\tilde{X},\tilde{x}) \to (\tilde{X},\tilde{x}'')$ が一意に存在する．よって $f\circ g\colon (\tilde{X},\tilde{x}) \to (\tilde{X},\tilde{x})$ は (X,x) 上の基点つき空間の射であるので一意性によって $f\circ g = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$ となる．ゆえに g は全単射である．よって f は全単射となるので $f \in \mathrm{Aut}(\tilde{X}/X)$ となる． □

命題 4.5 X を局所弧状連結とする．基点つき単連結な被覆空間 $((\tilde{X},\tilde{x}),\pi)$ は (X,x) 上の普遍被覆空間である．

証明 任意の (X,x) 上の基点つき被覆空間 $((Y,y),p)$ をとる．$\tilde{x}' \in \tilde{X}$ に対し $\tilde{X}$ は弧状連結より $\tilde{x}$ から $\tilde{x}'$ への道 l が存在する．このとき $\pi\circ l$ は x を始点とする道であるので，定理 3.12 より y を始点とする道 m が存在する．$f\colon \tilde{X} \to Y$ を $f(\tilde{x}') = m(1)$ とすると $\tilde{X}$ は単連結ゆえ l の取り方によらず定まり $f(\tilde{x}) = y$ である．X の局所弧状連結性より f が局所同相写像であることがわかるので f は連続である． □

定義 4.6 群 G の**反対群** G^{op} とは台集合 $G^{\mathrm{op}} = \{g^{\mathrm{op}} \mid g \in G\}$ に $g^{\mathrm{op}}\cdot h^{\mathrm{op}} = (hg)^{\mathrm{op}}$ $(g,h\in G)$ によって積を定義した群のことを指す．

定理 4.7 X を連結かつ局所弧状連結とし $((\tilde{X},\tilde{x}),\pi)$ を (X,x) 上の基点つき単連結な被覆空間とする．$\alpha \in \pi_1(X,x)$ に対し $\phi_\alpha \in \mathrm{Aut}(\tilde{X}/X)$ を $\phi_\alpha(\tilde{x}) = \alpha\cdot\tilde{x}$ なるものとして定理 2.8 より一意に定めると $h\colon \pi_1(X,x) \to \mathrm{Aut}(\tilde{X}/X)^{\mathrm{op}}; \alpha \mapsto \phi_\alpha$ は群同型写像である．

証明 $\phi \in \mathrm{Aut}(\tilde{X}/X)$ に対し $\tilde{X}$ は弧状連結より $\tilde{x}$ から $\phi(\tilde{x})$ への道 l が存在するので $\mathrm{Aut}(\tilde{X}/X) \to \pi_1(X,x); \phi \mapsto [\pi\circ l]$ と定めると $\tilde{X}$ は単連結ゆえ l の取り方によらず定まり，h の逆写像であるので h は全単射である．群準同型であることは定理 3.14 より $\alpha,\beta \in \pi_1(X,x)$ に対し

$$(\phi_\beta\circ\phi_\alpha)(\tilde{x}) = \phi_\beta(\alpha\cdot\tilde{x}) = \alpha\cdot\phi_\beta(\tilde{x}) = \alpha\cdot(\beta\cdot\tilde{x}) = (\alpha\beta)\cdot\tilde{x} = \phi_{\alpha\beta}(\tilde{x})$$

より $\phi_\beta\circ\phi_\alpha = \phi_{\alpha\beta}$ となることから従う． □

定義 4.8 X が**半局所単連結**であるとは，任意の $x \in X$ に対し，ある x の開近傍 U が存在して包含写像から誘導される射 $\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ が自明射，すなわち任意の元を単位元にうつす射であることを指す．

定理 4.9 X を連結かつ局所弧状連結な位相空間とするとき，X が半局所単連結であることと，X の単連結な被覆空間が存在することは同値である．

証明 単連結な被覆空間 $(\tilde{X},\pi)$ が X 上に存在するとする．このとき，任意の $x \in X$ に対し，x の開近傍 U と $\tilde{X}$ の開集合 $\tilde{U}$ が存在し，$\pi|_{\tilde{U}}\colon \tilde{U} \to U$ は同相写像となる．$[f] \in \pi_1(U,x)$ に対し，$\tilde{f} \coloneqq \pi|_{\tilde{U}}^{-1}\circ f$ とすると $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1)$ であり，$\tilde{X}$ は単連結より $[\tilde{f}]$ は $\pi_1(\tilde{X},\tilde{f}(0))$ の単位元である．ゆえに $\pi\circ\tilde{f} = f$ より，$[f]$ は $\pi_1(X,x)$ の単位元となる．したがって $\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ は自明射となる．

X が半局所単連結であるとする．$x \in X$ を一つとって固定する．基点つき単連結な被覆空間 $((\tilde{X}_x,\tilde{x}),\pi)$ を (X,x) 上の基点つき単連結な被覆空間として構成する．

$$\tilde{X}_x \coloneqq \{[f] \mid f \text{ は始点を } x \text{ とする } X \text{ 上の道}\}$$

とし，$\tilde{x} \in \tilde{X}_x$ を x に値をとる定値写像の同値類と定義する．また $\pi\colon \tilde{X}_x \to X$ を，$\pi([f]) \coloneqq f(1)$ と定義する．このとき $\pi(\tilde{x}) = x$ である．$\mathcal{U}$ を弧状連結な開集合 $U \subseteq X$ であって，ある $u \in U$ に対し $\pi_1(U,u) \to \pi_1(X,u)$ が自明射になるようなものの集合とするとき $\mathcal{U}$ は X の開基である．実際 O を X の開集合とするとき，任意の $x \in O$ に対し，X は半局所単連結であるので，x の開近傍 V が存在し，$\pi_1(V,x) \to \pi_1(X,x)$ は自明射となる．$V \cap O$ は x の開近傍であることと X の局所弧状連結性より x の弧状連結開近傍 U が存在して $U \subseteq V \cap O$ である．$U \subseteq V$ であることから $\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ は自明射であるので $U \in \mathcal{U}$ であり，$x \in U \subseteq O$ であることから $\mathcal{U}$ は X の開基となる．

$U \in \mathcal{U}$，$[f] \in \tilde{X}_x$ で f の終点が U に属するものに対し，

$$U_{[f]} \coloneqq \{[\eta \cdot f] \mid \eta \text{ は始点が } f \text{ の終点と一致する } U \text{ 上の道}\}$$

とする．$\tilde{\mathcal{U}}$ を $U_{[f]}$ の形全体の集合とすると，$\tilde{\mathcal{U}}$ は開基として $\tilde{X}_x$ に位相を与えることができる．実際，任意の $[f] \in \tilde{X}_x$ に対し，$\mathcal{U}$ は X の開基より $U \in \mathcal{U}$ が存在して f の終点は U に属するので，$[f] \in U_{[f]}$ となることから，$\tilde{\mathcal{U}}$ は $\tilde{X}_x$ を被覆する．$U_{[f]}, V_{[g]} \in \tilde{\mathcal{U}}$，$[h] \in U_{[f]} \cap V_{[g]}$ に対し，$U_{[h]} = U_{[f]}$，$V_{[g]} = V_{[h]}$ である．h の終点は $U \cap V$ に属すことから，$\mathcal{U}$ が X の開基より，$W \in \mathcal{U}$ が存在して，h の終点は W に属し，$W \subseteq U \cap V$ である．ゆえに $[h] \in W_{[h]} \subseteq U_{[h]} \cap V_{[h]} = U_{[f]} \cap V_{[g]}$ となる．よって $\tilde{X}_x$ に $\tilde{\mathcal{U}}$ を開基として位相が定められる．$U \in \mathcal{U}$ に対し $\pi^{-1}(U) = \coprod_{[f]} U_{[f]}$ であり，$\pi|_{U_{[f]}}\colon U_{[f]} \to U$ は同相写像であるから $(\tilde{X}_x, \pi)$ は X 上の被覆空間である．

$\tilde{X}_x$ が弧状連結であることを示す．$[f] \in \tilde{X}_x$ に対し，$m\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ を $m(s,t) = st$ とすると，$f \circ m$ は連続であり，$f_s \coloneqq f \circ m|_{\{s\} \times [0,1]}$ は $f_s(0) = x$ となるので，$\alpha_f\colon [0,1] \to \tilde{X}_x$ を $\alpha_f(s) = [f_s]$ と定義すると，α_f は連続であり，$\alpha_f(0) = \tilde{x}$，$\alpha_f(1) = [f_1] = [f]$ となるので $\tilde{X}_x$ は弧状連結である．

最後に $\tilde{X}_x$ が単連結であることを示す．$[\tilde{g}] \in \pi_1(\tilde{X}_x, \tilde{x})$ に対し，$g \coloneqq \pi \circ \tilde{g}\colon [0,1] \to X$ とすると $g(0) = g(1) = x$ であり，$g_s \coloneqq g \circ m|_{\{s\} \times [0,1]}$ とし，$\alpha_g\colon [0,1] \to \tilde{X}_x$ を $\alpha_g(s) = [g_s]$ と定義する．$(\pi \circ \alpha_g)(s) = \pi([g_s]) = g_s(1) = g(s)$ より $\pi \circ \alpha_g = g$ なので定理 3.12 より $\alpha_g = \tilde{g}$ となる．$[g] = [g_1] = \alpha_g(1) = \tilde{g}(1) = \tilde{x}$ となるので，$[g]$ は $\pi_1(X,x)$ の単位元となる．よって定理 3.12 より $\tilde{g}$ は $\pi_1(\tilde{X}_x, \tilde{x})$ の単位元となる．したがって $\pi_1(\tilde{X}_x, \tilde{x})$ は自明群となる． □

定義 4.10 X が unloopable であるとは，X が連結かつ局所弧状連結かつ半局所単連結であることを指す．

系 4.11 X を unloopable とすると次の 1 対 1 対応がある．

$$\{(X,x) \text{ 上の基点つき連結な被覆空間 }\}/\cong_{(X,x) \text{ 上の基点つき空間}} \longleftrightarrow \{\pi_1(X,x) \text{ の部分群 }\}$$

5 圏による定式化

以下 X を unloopable とする．

記法 5.1 X 上の被覆空間と X 上の空間の射からなる圏を $\mathbf{Cov}_X$，群 G の (左) 作用が入った集合と G 同変写像からなる圏を G-$\mathbf{Set}$ と表す．

定義 5.2 定理 3.13，定理 3.14 より，$x \in X$ に対し関手

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Fib}_x\colon & \mathbf{Cov}_X & \longrightarrow & \pi_1(X,x)\text{-}\mathbf{Set} \\ & (p\colon Y \to X) & \longmapsto & p^{-1}(x) \end{array}$$

を定めることができる．この関手を**ファイバー関手**という．

定理 5.3　ファイバー関手 Fib_x は $\mathbf{Cov}_X$ と $\pi_1(X,x)$-$\mathbf{Set}$ の間の圏同値を与える．

証明　$(\tilde{X}_x, \pi)$ を X 上の単連結な被覆空間とする．S を $\pi_1(X,x)$ の作用が入った集合とするとき，$\alpha \in \pi_1(X,x)$ に対し $\tilde{X}_x \times S \to \tilde{X}_x \times S; (\tilde{x}, f) \mapsto (\phi_\alpha^{-1}(\tilde{x}), \alpha \cdot f)$ によって $\pi_1(X,x)$ の $\tilde{X}_x \times S$ への作用が入る．このとき射影と π との合成 $\tilde{X}_x \times S \to \tilde{X}_x \to X$ は被覆写像 $\pi_1(X,x)\backslash(\tilde{X}_x \times S) \to X$ を誘導する．ゆえに関手

$$\begin{array}{rccc} \Gamma\colon & \pi_1(X,x)\text{-}\mathbf{Set} & \longrightarrow & \mathbf{Cov}_X \\ & S & \longmapsto & (\pi_1(X,x)\backslash(\tilde{X}_x \times S) \to X) \end{array}$$

が定まる．これが Fib_x の準逆関手となっている．実際に準逆関手であることの確認は演習問題とする．　□

付録 A　体の Galois 理論

ここでは体の Galois 理論における類似点を述べる．詳しくは参考文献 [1, 3, 6, 8] などを参照されたい．

定義 A.1　A を環[*6]とする．A **上の代数**とは，環 B と環準同型 $f\colon A \to B$ の組のことを指す．A 上の代数 $f\colon A \to B$ から $g\colon A \to C$ への射とは，環準同型 $h\colon B \to C$ であって $g = h \circ f$ を満たすものを指す．

以下，K を体とし K の分離閉包 K^{sep} を一つ固定する．

定義 A.2　K 上の代数 $f\colon K \to L$ が**体の拡大**であるとは，L が体であることを指す．これを L/K と表す．

定義 A.3　K 上の代数 $f\colon K \to A$ が **étale 代数**であるとは，A が K 上代数的であり，かつ任意の A の元に対しその K 上の最小多項式が K^{sep} で重根を持たない 1 次式に分解されるもののことを指す．

命題 A.4　K 上の代数 $f\colon K \to A$ が étale 代数であることと A がある K の分離代数拡大体の有限直積環と同型であることは同値である．またこのとき A が連結な環ならば $f\colon K \to A$ は分離代数拡大である．

定義 A.5　体の代数 L/K と $\mathrm{Aut}(L/K)$ の部分群 H に対し

$$L^H = \{x \in L \mid \text{すべての } \sigma \in H \text{ に対し } \sigma(x) = x\}$$

と表す．体の拡大 L/K が **Galois 拡大**であるとは，$K \to L^{\mathrm{Aut}(L/K)}$ が同型写像であるものを指す．L/K が Galois 拡大であるとき $\mathrm{Aut}(L/K)$ を **Galois 群**といい，$\mathrm{Gal}(L/K)$ と表す．

命題 A.6　Galois 拡大 L/K は分離代数拡大である．特に $K \to L$ は étale 代数である．

定理 A.7　L/K を Galois 拡大とし，$\mathrm{Gal}(L/K)$ に Krull 位相を入れるとき，次の 1 対 1 対応がある．

$$\begin{array}{ccc} \{L \text{ への射つき } K \text{ 上の拡大体}\}/\cong_{L \text{ への射を保つ } K \text{ 代数}} & \longleftrightarrow & \{\mathrm{Gal}(L/K) \text{ の閉部分群}\} \\ M & \longmapsto & \mathrm{Gal}(L/M) \\ L^H & \longleftarrow & H \end{array}$$

定理 A.8　$G_K = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ を K の絶対 Galois 群とする．このとき $\mathbf{FEt}_K$ を有限 étale K 代数全体の

[*6] 本原稿では環といえば単位元をもつ可換環のこととし，環準同型は単位元を単位元にうつすもののこととする．

なす圏とし，G_K-**FSet** を G_K が連続に作用する有限集合全体の圏とするとき，反変関手

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{FEt}_K & \longrightarrow & G_K\text{-}\mathbf{FSet} \\ A & \longmapsto & \mathrm{Hom}(A, K^{\mathrm{sep}}) \end{array}$$

は 2 つの圏の間の反圏同値を与える．

以上で挙げたことから体の Galois 理論と被覆空間の Galois 理論の間の類似点がわかると思うが，あえて表にするのであれば次のような対応があるように思える[*7]．

表 1　体の Galois 理論と被覆空間の Galois 理論との比較

体の Galois 理論	被覆空間の Galois 理論
K 上の代数	X 上の空間
K 上の étale 代数	X 上の被覆空間
K 上の分離代数拡大体	X 上の連結な被覆空間
K 上の Galois 拡大	X 上の Galois 被覆空間
K から分離閉体 Ω への射	1 点集合 $*$ から X への射
K の分離閉包	X 上の単連結な被覆空間
K の絶対 Galois 群	X の基本群

参考文献

本原稿を書く際，Szamuely [8] を大いに参考にした．基本群については Singer, Thorpe [7]，普遍被覆空間については Bourbaki [2] も参考にしている．特に普遍被覆空間について，多くの文献では単連結な被覆空間のことを普遍被覆空間と呼んでいて，今回紹介した定義を採用している文献は多くないと思われるが，普遍性という性質に視点を当てるべきだと感じるので本原稿ではこれを採用した．

[1] Francis Borceux and George Janelidze. *Galois theories*, Vol. 72 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[2] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie algébrique. C hapitres 1 à 4*. Springer, Heidelberg, 2016.

[3] 藤崎源二郎. 体とガロア理論. 岩波基礎数学選書 / 小平邦彦監修 ; 岩堀長慶 [ほか] 編集. 岩波書店, 1991.

[4] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[5] 加藤十吉. 位相幾何学. 数学シリーズ / 佐武一郎, 村上信吾, 高橋礼司編. 裳華房, 1988.

[6] 黒川信重. ガロア理論と表現論：ゼータ関数への出発. 日本評論社, 2014.

[7] I. M. Singer and J. A. Thorpe. トポロジーと幾何学入門. 培風館, 1976. 松江広文，一楽重雄 訳.

[8] Tamás Szamuely. *Galois groups and fundamental groups*, Vol. 117 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[9] Torsten Wedhorn. *Manifolds, sheaves, and cohomology*. Springer Studium Mathematik—Master. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2016.

[*7] ここではほんの一例を挙げた．他にも類似点があるのでいろいろ考えてみるとよい．