Atiyah-MacDonald 可換代数入門 第 1 章演習問題解答

flag3

2019 年 10 月 25 日

概要

Atiyah-MacDonald 可換代数入門 [4] 第 1 章の演習問題の解答をまとめたものである.

1　環とイデアル

問題 1.12.　i) すべての $a \in \mathfrak{a}$ に対し，$a\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ より $a \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ となる.

ii) すべての $x \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ に対し，$x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ より従う.

iii) $x \in A$ に対して

$$\begin{aligned} x \in ((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c}) &\iff x\mathfrak{c} \subseteq (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \iff x\mathfrak{c}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \iff x \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}\mathfrak{c}), \\ x \in ((\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) : \mathfrak{b}) &\iff x\mathfrak{b} \subseteq (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) \iff x\mathfrak{b}\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a} \iff x \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}\mathfrak{c}) \end{aligned}$$

が成り立つことから従う.

iv) $x \in A$ に対して

$$x \in \left(\bigcap_i \mathfrak{a}_i : \mathfrak{b}\right) \iff x\mathfrak{b} \subseteq \bigcap_i \mathfrak{a}_i \iff \text{すべての } i \text{ に対し } x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \iff x \in \bigcap_i (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i)$$

が成り立つことから従う.

v) $x \in A$ に対して

$$\begin{aligned} x \in \left(\mathfrak{a} : \sum_i \mathfrak{b}_i\right) &\iff \mathfrak{a} \supseteq x\left(\sum_i \mathfrak{b}_i\right) = \sum_i x\mathfrak{b}_i \\ &\iff \text{すべての } i \text{ に対し } x\mathfrak{b}_i \subseteq \mathfrak{a} \iff x \in \bigcap_i (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i) \end{aligned}$$

が成り立つことから従う.

問題 1.13. まず $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ ならば $r(\mathfrak{a}) \subseteq r(\mathfrak{b})$ を示す．$x \in r(\mathfrak{a})$ に対しある $n > 0$ が存在して $x^n \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ より $x \in r(\mathfrak{b})$ となる．次にすべての $n > 0$ に対し $r(\mathfrak{a}^n) = r(\mathfrak{a})$ を示す．$\mathfrak{a}^n \subseteq \mathfrak{a}$ より $r(\mathfrak{a}^n) \subseteq r(\mathfrak{a})$ であり，$x \in r(\mathfrak{a})$ に対しある $m > 0$ が存在して $x^m \in \mathfrak{a}$ となるので，$x^{mn} \in \mathfrak{a}^n$ より $x \in r(\mathfrak{a}^n)$ となる.

i) すべての $a \in \mathfrak{a}$ に対し $a^1 \in \mathfrak{a}$ より $a \in r(\mathfrak{a})$ となる.

ii) $x \in A$ に対し

$$\begin{aligned} x \in r(r(\mathfrak{a})) &\iff \text{ある } n > 0 \text{ が存在して } x^n \in r(\mathfrak{a}) \\ &\iff \text{ある } m, n > 0 \text{ が存在して } (x^n)^m = x^{mn} \in \mathfrak{a} \iff x \in r(\mathfrak{a}) \end{aligned}$$

が成り立つことから従う．

iii) $(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})^2 \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ より $r(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) = r((\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})^2) \subseteq r(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subseteq r(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$ となる．$x \in r(\mathfrak{a})\cap r(\mathfrak{b})$ に対しある $m,n>0$ が存在して $x^m \in \mathfrak{a}$，$x^n \in \mathfrak{b}$ であるので，$x^{\max\{m,n\}} \in \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ より $x \in r(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$ となる．逆に $x \in r(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$ に対しある $m>0$ が存在して $x^m \in \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ より $x \in r(\mathfrak{a})\cap r(\mathfrak{b})$ となる．

iv) $r(\mathfrak{a}) = (1)$ ならば $1 \in r(\mathfrak{a})$ であるので，ある $n>0$ が存在して $1 = 1^n \in \mathfrak{a}$ より $\mathfrak{a} = (1)$ となる．

v) $\mathfrak{a},\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ より $r(\mathfrak{a}), r(\mathfrak{b}) \subseteq r(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ となるので，$r(\mathfrak{a})+r(\mathfrak{b}) \subseteq r(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ となる．よって ii) より $r(r(\mathfrak{a})+r(\mathfrak{b})) \subseteq r(r(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})) = r(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ となる．また i) から $\mathfrak{a} \subseteq r(\mathfrak{a}), \mathfrak{b} \subseteq r(\mathfrak{b})$ より $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} \subseteq r(\mathfrak{a})+r(\mathfrak{b})$ であるので $r(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \subseteq r(r(\mathfrak{a})+r(\mathfrak{b}))$ となる．

vi) $r(\mathfrak{p}^n) = r(\mathfrak{p})$ であり，命題 1.14 より $r(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ となる．

問題 1.18. まず $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2$ ならば ${\mathfrak{a}_1}^e \subseteq {\mathfrak{a}_2}^e$ を示す．$f(\mathfrak{a}_1) \subseteq f(\mathfrak{a}_2)$ であるので，${\mathfrak{a}_1}^e = Bf(\mathfrak{a}_1) \subseteq Bf(\mathfrak{a}_2) = {\mathfrak{a}_2}^e$ となる．また $\mathfrak{b}_1 \subseteq \mathfrak{b}_2$ ならば ${\mathfrak{b}_1}^c = f^{-1}(\mathfrak{b}_1) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{b}_2) = {\mathfrak{b}_2}^c$ となる．

- $(\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2)^e = {\mathfrak{a}_1}^e+{\mathfrak{a}_2}^e$．$(\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2)^e = Bf(\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2) = B(f(\mathfrak{a}_1)+f(\mathfrak{a}_2)) = Bf(\mathfrak{a}_1)+Bf(\mathfrak{a}_2) = {\mathfrak{a}_1}^e+{\mathfrak{a}_2}^e$.
- $(\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2)^c \supseteq {\mathfrak{b}_1}^c+{\mathfrak{b}_2}^c$．$a_1 \in {\mathfrak{b}_1}^c$，$a_2 \in {\mathfrak{b}_2}^c$ に対し $f(a_1+a_2) = f(a_1)+f(a_2) \in \mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2$ より従う．
- $(\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2)^e \subseteq {\mathfrak{a}_1}^e+{\mathfrak{a}_2}^e$．$(\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2)^e = Bf(\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2) \subseteq B(f(\mathfrak{a}_1)\cap f(\mathfrak{a}_2)) = Bf(\mathfrak{a}_1)\cap Bf(\mathfrak{a}_2) = {\mathfrak{a}_1}^e\cap{\mathfrak{a}_2}^e$.
- $(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2)^c = {\mathfrak{b}_1}^c\cap{\mathfrak{b}_2}^c$．$(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2)^c = f^{-1}(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2) = f^{-1}(\mathfrak{b}_1)\cap f^{-1}(\mathfrak{b}_2) = {\mathfrak{b}_1}^c\cap{\mathfrak{b}_2}^c$.
- $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^e = {\mathfrak{a}_1}^e{\mathfrak{a}_2}^e$．$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^e = Bf(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2) = Bf(\mathfrak{a}_1)Bf(\mathfrak{a}_2) = {\mathfrak{a}_1}^e{\mathfrak{a}_2}^e$.
- $(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)^c \supseteq {\mathfrak{b}_1}^c{\mathfrak{b}_2}^c$．$a_1 \in {\mathfrak{b}_1}^c$，$a_2 \in {\mathfrak{b}_2}^c$ に対し $f(a_1a_2) = f(a_1)f(a_2) \in \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$ より従う．
- $(\mathfrak{a}_1:\mathfrak{a}_2)^e \subseteq ({\mathfrak{a}_1}^e:{\mathfrak{a}_2}^e)$．演習問題 1.12 ii) から $(\mathfrak{a}_1:\mathfrak{a}_2)^e{\mathfrak{a}_2}^e = ((\mathfrak{a}_1:\mathfrak{a}_2)\mathfrak{a}_2)^e \subseteq {\mathfrak{a}_1}^e$ より従う．
- $(\mathfrak{b}_1:\mathfrak{b}_2)^c \subseteq ({\mathfrak{b}_1}^c:{\mathfrak{b}_2}^c)$．演習問題 1.12 ii) から $(\mathfrak{b}_1:\mathfrak{b}_2)^c{\mathfrak{b}_2}^c \subseteq ((\mathfrak{b}_1:\mathfrak{b}_2)\mathfrak{b}_2)^c \subseteq {\mathfrak{b}_1}^c$ より従う．
- $r(\mathfrak{a})^e \subseteq r(\mathfrak{a}^e)$．$b \in r(\mathfrak{a})^e$ に対し $b = \sum_j b_j f(x_j)$ ($b_j \in B$，$x_j \in r(\mathfrak{a})$) と表すと，ある $n_j > 0$ が存在して $x_j^{n_j} \in \mathfrak{a}$ であるので，$f(x_j)^{n_j} = f(x_j^{n_j}) \in \mathfrak{a}^e$ より $f(x_j) \in r(\mathfrak{a}^e)$ となるので，$b \in r(\mathfrak{a}^e)$ となる．
- $r(\mathfrak{b})^c = r(\mathfrak{b}^c)$.

$$\begin{aligned} a \in r(\mathfrak{b})^c &\iff \text{ある } n>0 \text{ が存在して } f(a^n) = f(a)^n \in \mathfrak{b} \\ &\iff \text{ある } n>0 \text{ が存在して } a^n \in \mathfrak{b}^c \iff a \in r(\mathfrak{b}^c) \end{aligned}$$

  より従う．

E が和と積に関して閉じていること，C が共通集合と根基に関して閉じていることはよい．C がイデアル商に関して閉じていることを示す．$({\mathfrak{b}_1}^c:{\mathfrak{b}_2}^c) = ({\mathfrak{b}_1}^{ce}:{\mathfrak{b}_2}^{ce})^c$ であることを示せばよい．命題 1.17 ii) から

$$a \in ({\mathfrak{b}_1}^c:{\mathfrak{b}_2}^c) \iff a{\mathfrak{b}_2}^c \subseteq {\mathfrak{b}_1}^c \implies f(a)f({\mathfrak{b}_2}^c) \subseteq f({\mathfrak{b}_1}^c) \iff f(a){\mathfrak{b}_2}^{ce} \subseteq {\mathfrak{b}_1}^{ce} \iff a \in ({\mathfrak{b}_1}^{ce}:{\mathfrak{b}_2}^{ce})^c,$$

$$\begin{aligned} a \in ({\mathfrak{b}_1}^{ce}:{\mathfrak{b}_2}^{ce})^c &\iff f(a){\mathfrak{b}_2}^{ce} \subseteq {\mathfrak{b}_1}^{ce} \implies a{\mathfrak{b}_2}^c \subseteq f^{-1}(f(a)){\mathfrak{b}_2}^c = f^{-1}(f(a)){\mathfrak{b}_2}^{cec} \subseteq {\mathfrak{b}_1}^{cec} = {\mathfrak{b}_1}^c \\ &\implies a \in ({\mathfrak{b}_1}^c:{\mathfrak{b}_2}^c) \end{aligned}$$

より従う．

演習問題

1. 極大イデアルは素イデアルであるので，命題 1.8 から $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{R}$ である．よって x は A のベキ零元より $x \in \mathfrak{R}$ であるので，命題 1.9 より $1+x = 1-(-1)x$ は A の単元である．x をベキ零元，u を単元とすると，$u^{-1}x$ はベキ零元であるので，$u+x = u(1+u^{-1}x)$ は単元となる．

2. i) ($\Longrightarrow$) $n=0$ のときは明らかであるので $n>0$ とする．$g=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$ を f の逆元とする．$k=0,1,\ldots,m+n$ に対し，$c_k=\sum_{j=0}^{k}a_jb_{k-j}$ とおくと，$1=fg=\sum_{k=0}^{m+n}c_kx^k$ であるので，$1=c_0=a_0b_0$ となり，a_0,b_0 は A の単元である．$r=0,1,\ldots,m$ に対し $a_n^{r+1}b_{m-r}=0$ であることを，r についての帰納法によって示す．$k>0$ に対し $c_k=0$ であるので，特に $0=c_{m+n}=a_nb_m$ であり，$r=0$ で成り立つ．$r>0$ のとき $r-1$ 以下で成り立つとする．

$$0=c_{m+n-r}=\sum_{j=0}^{m+n-r}a_jb_{m+n-r-j}=\sum_{j=n-r}^{n}a_jb_{m+n-r-j}=\sum_{j=0}^{r}a_{n-r+j}b_{m-j}$$

となるので，両辺に a_n^r をかけると

$$0=a_n^r\sum_{j=0}^{r}a_{n-r+j}b_{m-j}=\sum_{j=0}^{r}a_n^ra_{n-r+j}b_{m-j}=a_n^{r+1}b_{m-r}$$

となるので，r でも成り立つ．よって $r=m$ とすると $b_0a_n^{m+1}=0$ であり，b_0 は A の単元であるので，a_n は A のベキ零元である．ゆえに a_nx^n は $A[x]$ のベキ零元であるので，演習問題 1 より $f-a_nx^n$ は $A[x]$ の単元である．以下同様にして $a_{n-1},\ldots,a_1$ は A のベキ零元である．

($\Longleftarrow$) a_0 が A の単元であるので，a_0 は $A[x]$ の単元であり，a_j $(j>0)$ が A のベキ零元であるので，a_jx^j $(j>0)$ は $A[x]$ のベキ零元である．ゆえにベキ零元根基がイデアルであることから，$y=\sum_{j=1}^{n}a_jx^j$ は $A[x]$ のベキ零元であり，演習問題 1 から $f=a_0+y$ は単元である．

ii) ($\Longrightarrow$) f が $A[x]$ のベキ零元だから xf は $A[x]$ のベキ零元であり，演習問題 1 より $1+xf$ は $A[x]$ の単元である．よって i) より $a_0,a_1,\ldots,a_n$ は A のベキ零元である．

($\Longleftarrow$) a_j $(j\geqslant 0)$ が A のベキ零元であるので，a_jx^j $(j\geqslant 0)$ は $A[x]$ のベキ零元である．ゆえにベキ零元根基がイデアルであることから，$f=\sum_{j=0}^{n}a_jx^j$ は $A[x]$ のベキ零元である．

iii) ($\Longrightarrow$) $g=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$ $(b_m\neq 0)$ を $fg=0$ となる最小次数の多項式とする．すると，$a_nb_m=0$ であるので，a_ng の次数は g の次数よりも小さく，$a_ngf=0$ から，次数の最小性より $a_ng=0$ となる．ゆえに $0=fg=(a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})g$ より $a_{n-1}b_m=0$ であるので，同様に $a_{n-1}g=0$ となる．以下同様にして $a_ng=\cdots=a_1g=a_0g=0$ となるので，$a_nb_m=\cdots=a_1b_m=a_0b_m=0$ より $b_mf=0$ となる．

($\Longleftarrow$) 明らか．

iv) $f=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，$g=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$ とおく．$k=0,1,\ldots,m+n$ に対し $c_k=\sum_{j=0}^{k}a_jb_{k-j}$ とおくと，$fg=\sum_{k=0}^{m+n}c_kx^k$ であり，$(c_0,c_1,\ldots,c_{m+n})\subseteq(a_0,a_1,\ldots,a_n)$，$(c_0,c_1,\ldots,c_{m+n})\subseteq(b_0,b_1,\ldots,b_m)$ が成り立つ．

($\Longrightarrow$) $(c_0,c_1,\ldots,c_{m+n})=(1)$ より $(a_0,a_1,\ldots,a_n)=(b_0,b_1,\ldots,b_m)=(1)$ となる．

($\Longleftarrow$) $(c_0,c_1,\ldots,c_{m+n})\neq(1)$ と仮定すると，$(c_0,c_1,\ldots,c_{m+n})$ を含む極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在し，$fg\in\mathfrak{m}[x]$ である．$A/\mathfrak{m}$ は体であるので，$A[x]/\mathfrak{m}[x]\cong(A/\mathfrak{m})[x]$ は整域である．ゆえに $\mathfrak{m}[x]$ は $A[x]$ の素イデアルとなるので，$f\in\mathfrak{m}[x]$ または $g\in\mathfrak{m}[x]$ となる．$f\in\mathfrak{m}[x]$ としても一般性を失わない．このとき，$(a_0,a_1,\ldots,a_n)\subseteq\mathfrak{m}\subset(1)$ となり，f が原始的であることに矛盾する．

3. i)「f が単元 $\Longleftrightarrow$ f の定数項が A の単元で，かつ他のすべての係数は A のベキ零元」を示す．

($\Longrightarrow$) r についての帰納法によって示す．$r=1$ で成り立つことは演習問題 2 i) で示した．$r>1$ のとき $r-1$ 以下で成り立つとする．$f=a_0+a_1x_r+\cdots+a_nx_r^n\in A[x_1,\ldots,x_{r-1}][x_r]$ とする．f が単元ならば演習問題 2 i) より a_0 は $A[x_1,\ldots,x_{r-1}]$ の単元で，かつ $a_1,\ldots,a_n$ は

$A[x_1,\dots,x_{r-1}]$ のベキ零元である．よって帰納法の仮定より a_0 の定数項は A の単元で，かつ他のすべての係数は A のベキ零元である．$a_1,\dots,a_n$ のすべての係数がベキ零元であることは次の ii) から従う．

($\Longleftarrow$)　1 変数の多項式環の場合と同様である．

ii)「f がベキ零元である $\Longleftrightarrow$ すべての係数がベキ零元である」を示す．

($\Longrightarrow$)　r についての帰納法によって示す．$r=1$ で成り立つことは演習問題 2 ii) で示した．$r>1$ のとき $r-1$ 以下で成り立つとする．$f=a_0+a_1x_r+\cdots+a_nx_r^n\in A[x_1,\dots,x_{r-1}][x_r]$ とする．f がベキ零元ならば演習問題 2 ii) より $a_0,a_1,\dots,a_n$ は $A[x_1,\dots,x_{r-1}]$ のベキ零元である．よって帰納法の仮定より $a_0,a_1,\dots,a_n$ のすべての係数はベキ零元である．

($\Longleftarrow$)　1 変数の多項式環の場合と同様である．

iii)「f が零因子である $\Longleftrightarrow$ A のある元 $a\neq 0$ が存在して，$af=0$ を満たす」を示す．

($\Longrightarrow$)　r についての帰納法によって示す．$r=1$ で成り立つことは演習問題 2 iii) で示した．$r>1$ のとき $r-1$ 以下で成り立つとする．$f\in A[x_1,\dots,x_{r-1}][x_r]$ が零因子ならば演習問題 2 iii) より $A[x_1,\dots,x_{r-1}]$ のある元 $g\neq 0$ が存在して，$gf=0$ を満たす．$g=b_0+b_1x_{r-1}+\cdots+b_mx_{r-1}^m\in A[x_1,\dots,x_{r-2}][x_{r-1}]$ $(b_m\neq 0)$ を $fg=0$ となる x_{r-1} に関する最小次数の多項式とする．$f=a_0+a_1x_{r-1}+\cdots+a_nx_{r-1}^n\in A[x_1,\dots,x_{r-2},x_r][x_{r-1}]$ とする．すると，$a_nb_m=0$ であるので，a_ng の x_{r-1} に関する次数は g の x_{r-1} に関する次数よりも小さく，$a_ngf=0$ から，次数の最小性より $a_ng=0$ となる．ゆえに $0=fg=(a_0+a_1x_{r-1}+\cdots+a_{n-1}x_{r-1}^{n-1})g$ より $a_{n-1}b_m=0$ であるので，同様に $a_{n-1}g=0$ となる．以下同様にして $a_ng=\cdots=a_1g=a_0g=0$ となるので，$a_nb_m=\cdots=a_1b_m=a_0b_m=0$ より $b_mf=0$ となる．ゆえに $A[x_1,\dots,x_{r-2}]$ のある元 $g\neq 0$ が存在して，$gf=0$ を満たすので，以下同様にして，A のある元 $a\neq 0$ が存在して $af=0$ を満たすことがわかる．

($\Longleftarrow$)　明らか．

iv) $f,g\in A[x_1,\dots,x_r]$ のとき，「fg が原始的である $\Longleftrightarrow$ f と g が原始的である」を示せばよいが，1 変数の多項式環の場合と同様である．

4. 極大イデアルは素イデアルであるので，命題 1.8 から $\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{R}$ となる．すべての $f=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in\mathfrak{R}$ に対し，命題 1.9 より $1+xf$ は $A[x]$ の単元であるので，演習問題 2 i) より $a_0,a_1,\dots,a_n$ は A のベキ零元であり，演習問題 2 ii) より f はベキ零元であり $f\in\mathfrak{N}$ となる．

5. $A,A[[x]]$ のジャコブソン根基をそれぞれ $\mathfrak{R}(A),\mathfrak{R}(A[[x]])$ と表すとする．

i) ($\Longrightarrow$)　$g=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ を f の逆元とする．$fg=1$ より $a_0b_0=1$ ゆえ a_0 は A の単元である．

($\Longleftarrow$)　$g=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ を f の逆元となるように構成する．$b_0=a_0^{-1}$ とおく．各 k に対し $c_k=\sum_{j=0}^{k}a_jb_{k-j}$ とおくと，$1=fg=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ となるためには，$k>0$ に対し $c_k=\sum_{j=0}^{k}a_jb_{k-j}=0$ でなければならない．ゆえに $k-1$ 以下の j に対し b_j が定まっているとすると，$c_k=a_0b_k+\sum_{j=1}^{k}a_jb_{k-j}=0$ となるためには，$b_k=-a_0^{-1}\sum_{j=1}^{k}a_jb_{k-j}$ と定めればよい．よってすべての k に対し b_k を定めることができるので，f の逆元 g を構成することができる．

ii) ある $m>0$ が存在して $f^m=0$ であるので，$a_0^m=0$ より a_0 はベキ零元である．ゆえに $f-a_0=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ もベキ零元であるので，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$ もベキ零元である．よって帰納法によりすべての $n\geqslant 0$ に対し a_n はベキ零元である．逆は正しくない．実際，$A=\prod_{n=0}^{\infty}\mathbb{Z}/(2^{n+1})$ とし，第 n 成分が 2，他のすべての成分が 0 である A の元を a_n とおく．このとき $f=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\in A[[x]]$ について，すべての $n\geqslant 0$ に対して $a_n^{n+1}=0$ より a_n はベキ零元であるが，すべての $m>0$ に

対して $f^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^m x^{nm}$ であり，$a_m^m \neq 0$ より $f^m \neq 0$ であるので，f はベキ零元ではない．

iii) $g \in A[[x]]$ の定数項が b_0 であるとき，$1 - fg$ の定数項は $1 - a_0 b_0$ であるので，i) と命題 1.9 より

$$
\begin{aligned}
f \in \mathfrak{R}(A[[x]]) &\iff \text{すべての } g \in A[[x]] \text{ に対し } 1 - fg \text{ は } A[[x]] \text{ の単元} \\
&\iff \text{すべての } b_0 \in A \text{ に対し } 1 - a_0 b_0 \text{ は } A \text{ の単元} \iff a_0 \in \mathfrak{R}(A)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

iv) $x \in A[[x]]$ の定数項は $0 \in \mathfrak{R}(A)$ より iii) から $x \in \mathfrak{R}(A[[x]]) \subseteq \mathfrak{m}$ であるので $A + \mathfrak{m} = A[[x]]$ である．ゆえに環準同型 $A \to A[[x]]/\mathfrak{m}$ は全射であり，環の同型 $A/\mathfrak{m}^c \cong A[[x]]/\mathfrak{m}$ を引き起こす．よって $\mathfrak{m}$ が極大イデアルであることから $A/\mathfrak{m}^c$ は体であるので，$\mathfrak{m}^c$ は A の極大イデアルである．$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^c + (x)$ は $f \in \mathfrak{m}$ であることと $a_0 \in \mathfrak{m}^c$ であることが同値より従う．

v) $\mathfrak{p}$ を A の素イデアルとする．全射環準同型 $A[[x]] \to A[[x]]/(x) \cong A$ による $\mathfrak{p}$ の逆像 $\mathfrak{q}$ は $A[[x]]$ の素イデアルである．また $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} + (x)$ であることがわかるので $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$ となる．

6. $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{R}$ は演習問題 4 と同様である．すべての $a \notin \mathfrak{N}$ に対し，$(a) \not\subseteq \mathfrak{N}$ よりある $x \in A$ が存在して ax は 0 でないベキ等元である．このとき $(1 - ax)ax = 0$ であるので，$1 - ax$ は零因子であり単元ではない．よって命題 1.9 より $a \notin \mathfrak{R}$ となる．

7. $\mathfrak{p} \subseteq A$ を素イデアルとする．すべての $x \in A - \mathfrak{p}$ に対し，ある整数 $n > 1$ が存在して $x^n = x$ である．ゆえに $x(x^{n-1} - 1) = 0 \in \mathfrak{p}$ であり $x \notin \mathfrak{p}$ なので，$x^{n-1} - 1 \in \mathfrak{p}$ となる．よって $A/\mathfrak{p}$ において $x + \mathfrak{p}$ に逆元 $x^{n-2} + \mathfrak{p}$ が存在するので，$A/\mathfrak{p}$ は体となる．したがって $\mathfrak{p}$ は極大イデアルとなる．

8. ツォルンの補題により，素イデアル全体の集合 Σ は，包含の逆関係による順序で帰納的であることを示せばよい．定理 1.3 より $A \neq 0$ は極大イデアルをもつので Σ は空集合ではない．$(\mathfrak{p}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ を Σ の素イデアルの全順序部分集合とすると，$\mathfrak{p} = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathfrak{p}_\alpha$ は素イデアルである．実際，$\mathfrak{p}$ はイデアルであり，$x, y \notin \mathfrak{p}$ に対し，$\alpha \in \mathrm{A}$ が存在して $x, y \notin \mathfrak{p}_\alpha$ となるので，$xy \notin \mathfrak{p}_\alpha$ であり，したがって $xy \notin \mathfrak{p}$ である．

9. $(\Longrightarrow)$　命題 1.14 より $\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a}) = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{p}$ から従う．

$(\Longleftarrow)$　演習問題 1.13 i) より $\mathfrak{a} \subseteq r(\mathfrak{a})$ である．$\mathfrak{a} = \bigcap_\alpha \mathfrak{p}_\alpha$ とすると $r(\mathfrak{a}) = r(\bigcap_\alpha \mathfrak{p}_\alpha) \subseteq \bigcap_\alpha r(\mathfrak{p}_\alpha) = \bigcap_\alpha \mathfrak{p}_\alpha = \mathfrak{a}$ であるので，$\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a})$ となる．

10. i) $\Longrightarrow$ ii)　$\mathfrak{p}$ を唯一つの素イデアルとすると，命題 1.8 より $\mathfrak{N} = \mathfrak{p}$ である．また $\mathfrak{p}$ は唯一つの極大イデアルであるので，系 1.5 より非単元はベキ零元となる．

ii) $\Longrightarrow$ iii)　零環の元は単元かつベキ零元であるので $A \neq 0$ である．$x \notin \mathfrak{N}$ に対し，ある $y \in A$ が存在して $xy = 1$ より $A/\mathfrak{N}$ において $x + \mathfrak{N}$ に逆元 $y + \mathfrak{N}$ が存在するので，$A/\mathfrak{N}$ は体となる．

iii) $\Longrightarrow$ i)　$A/\mathfrak{N}$ が体であるので，$\mathfrak{N}$ は極大イデアルである．よってすべての素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し，$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{N}$ より $\mathfrak{p} = \mathfrak{N}$ であるので，素イデアルは唯一つである．

11. i) $2x = (1+1)x = (1 + (-1)^2)x = (1 + (-1))x = 0x = 0$.

ii) 演習問題 7 よりすべての素イデアルは極大イデアルである．$x \in A$ に対し，$x^2 = x$ より $x^2 - x = x(x-1) = 0 \in \mathfrak{p}$ であるので，$x \in \mathfrak{p}$ または $x - 1 \in \mathfrak{p}$ となる．ゆえに $A/\mathfrak{p}$ は $0 + \mathfrak{p}, 1 + \mathfrak{p}$ の二つの元をもつ体であることを意味する．

iii) 帰納法によって 2 元生成イデアルが単項イデアルであることを示せばよい．$(x, y) = (x + y + xy)$ を示す．$(x, y) \supseteq (x + y + xy)$ は明らか．$x(x + y + xy) = x^2 + xy + x^2 y = x$，$y(x + y + xy) = y$ が成り立つので $(x, y) \subseteq (x + y + xy)$ となる．

12. A を局所環とし，$e^2 = e \neq 0, 1$ となる $e \in A$ が存在すると仮定すると，$e(1 - e) = 0$ より $e, 1 - e$ は

非単元なので系 1.5 より唯一つの極大イデアル $\mathfrak{m}$ に含まれるが，$1 = e + (1-e) \in \mathfrak{m}$ となり矛盾する．

体の代数的閉包の構成

13. $1 \in \mathfrak{a}$ と仮定する．このとき $a_1, \ldots, a_n \in A$，$f_1, \ldots, f_n \in \Sigma$ が存在して，

$$1 = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(X_{f_i})$$

と表される．f_i $(i = 1, \ldots, n)$ に対し，K の拡大体 C と $f_i(\alpha_i) = 0$ となる $\alpha_i \in C$ $(i = 1, \ldots, n)$ が存在することを示す．n についての帰納法によって示す．$n = 1$ のとき $C = K[x]/(f_1)$，$\alpha_1 = x + (f_1)$ とすれば，C は K の拡大体で $f_1(\alpha_1) = 0$ である．$n > 1$ のとき $n-1$ 以下で成り立つとする．帰納法の仮定より $f_1, \ldots, f_{n-1}$ に対し，K の拡大体 K' と $f_i(\alpha_i) = 0$ なる $\alpha_i \in K'$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ が存在する．$f_n \in K[x] \subseteq K'[x]$ であるから，f_n の $K'[x]$ における一つの既約因子を f とすると，$n = 1$ のときより K' の拡大体 C と $f(\alpha_n) = 0$ なる $\alpha_n \in C$ が存在する．それゆえ $f_n(\alpha_n) = 0$ である．したがって $K \subseteq K' \subseteq C$ であって $f_i(\alpha_i) = 0$ となる $\alpha_i \in C$ $(i = 1, \ldots, n)$ は存在する．上の等式において $X_{f_i} = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, n)$，$X_f = 0$ $(f \neq f_1, \ldots, f_n)$ とおけば $1 = 0$ となり矛盾である．

14. $A = 0$ のとき Σ は空集合であるので，極大元を持たず問題文は成り立たない．ただし，零環の零因子の集合は空集合であり，零環の素イデアルは存在しないので，最後の主張は成り立つ．$A \neq 0$ とする．$(0) \in \Sigma$ であるから，Σ は空集合ではない．Σ は包含の関係による順序で帰納的であることがわかるので，ツォルンの補題を適用することができ，Σ は極大元をもつ．$\mathfrak{p}$ を Σ の極大元とする．$x, y \notin \mathfrak{p}$ に対し，イデアル $\mathfrak{p} + (x)$ と $\mathfrak{p} + (y)$ は真に $\mathfrak{p}$ を含んでいるので，Σ に属さない．したがって，ある零因子でない a, b が存在して $a \in \mathfrak{p} + (x)$，$b \in \mathfrak{p} + (y)$ となる．よって，$ab \in \mathfrak{p} + (xy)$ が得られ，ab は零因子ではない．ゆえに，イデアル $\mathfrak{p} + (xy)$ は Σ に属さないので，$xy \notin \mathfrak{p}$ となり，$\mathfrak{p}$ は素イデアルである．同様にして，すべての零因子 $x \in A$ に対し，$(x) \in \Sigma$ を含む極大元をもつことがわかるので，A のすべての零因子の集合は素イデアルの和集合で表せる．

環のプライム・スペクトラム

15. i) $E \subseteq \mathfrak{a} \subseteq r(\mathfrak{a})$ より $V(E) \supseteq V(\mathfrak{a}) \supseteq V(r(\mathfrak{a}))$ である．$E \subseteq \mathfrak{p}$ ならば $\mathfrak{a} = AE \subseteq A\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ より $V(E) = V(\mathfrak{a})$ である．命題 1.14 より $r(\mathfrak{a}) = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{p}$ であるので $r(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{p}$ ならば $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ より $V(\mathfrak{a}) = V(r(\mathfrak{a}))$ である．

    ii) すべての素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し，$0 \in \mathfrak{p}$，$1 \notin \mathfrak{p}$ であることから従う．

    iii) $\mathfrak{p} \in X$ に対し

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in V\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) &\iff \bigcup_{i \in I} E_i \subseteq \mathfrak{p} \iff \text{すべての } i \in I \text{ に対し } E_i \subseteq \mathfrak{p} \\ &\iff \text{すべての } i \in I \text{ に対し } \mathfrak{p} \in V(E_i) \iff \mathfrak{p} \in \bigcap_{i \in I} V(E_i) \end{aligned}$$

    が成り立つことから従う．

    iv) $\mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ より $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{ab})$ である．$\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ とすると，$a, b \notin \mathfrak{p}$ となる $a \in \mathfrak{a}$，$b \in \mathfrak{b}$ が存在して，$ab \in \mathfrak{ab}$，$ab \notin \mathfrak{p}$ より $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{ab}$ なので $V(\mathfrak{ab}) \subseteq V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ となる．

16. - $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$．素数 p に対し (p) は閉点であり，(0) は生成点 (閉包が全空間となる点) である (図 1)．
- $\mathrm{Spec}(\mathbb{R})$．$\mathbb{R}$ は体より，$\mathrm{Spec}(\mathbb{R})$ は 1 点集合である．
- $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$．$\mathbb{C}$ は代数閉体より，$\mathbb{C}$ の元 a に対し $(x-a)$ は閉点であり，(0) は生成点である．集合としては複素数平面に生成点を付け加えたものと思うことができる．
- $\mathrm{Spec}(\mathbb{R}[x])$．代数学の基本定理より，実数係数の多項式は 1 次と 2 次の実数係数の多項式の積に分解する．既約多項式が生成するイデアルは閉点であり，(0) は生成点である．2 次既約多項式は $\mathrm{Im}(\alpha) > 0$ なる $\alpha \in \mathbb{C}$ で $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$ と表せるので，集合としては実数直線と上半平面の和集合に生成点を付け加えたものと思うことができる．
- $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x])$．$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[x]$ を環準同型写像とする．$X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}), Y = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x])$ とし，$f^*\colon Y \to X$ を f に対応する写像とする．このとき $Y = {f^*}^{-1}((0)) \cup \bigcup_{p:\text{ 素数}} {f^*}^{-1}((p))$ である．$(0) \in X$ に対し局所環 $\mathbb{Z}_{(0)}$ の剰余体は $\mathbb{Q}$ であり，$(p) \in X$ に対し局所環 $\mathbb{Z}_{(p)}$ の剰余体は $\mathbb{Z}/(p)$ であるので，第 2 章，演習問題 6，第 3 章，演習問題 21 iv) より ${f^*}^{-1}((0))$ は $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x]) \cong \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}[x])$ と位相同型であり[*1]，${f^*}^{-1}((p))$ は $\mathrm{Spec}((\mathbb{Z}/(p)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x]) \cong \mathrm{Spec}((\mathbb{Z}/(p))[x])$ と位相同型である．したがって $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x]) = \{(0)\} \cup \{(f) \mid f \text{ は原始既約多項式}\} \cup \{(p) \mid p \text{ は素数}\} \cup \{(p, f) \mid p \text{ は素数，} f \text{ は } \mathbb{Z}/(p) \text{ 上既約多項式}\}$ となる (図 2)．

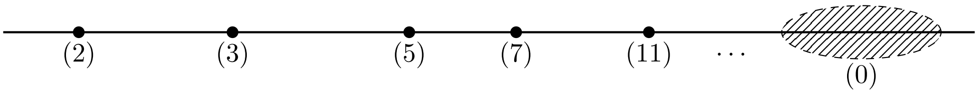

図 1: $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ([1, p.119] の図を再現した)

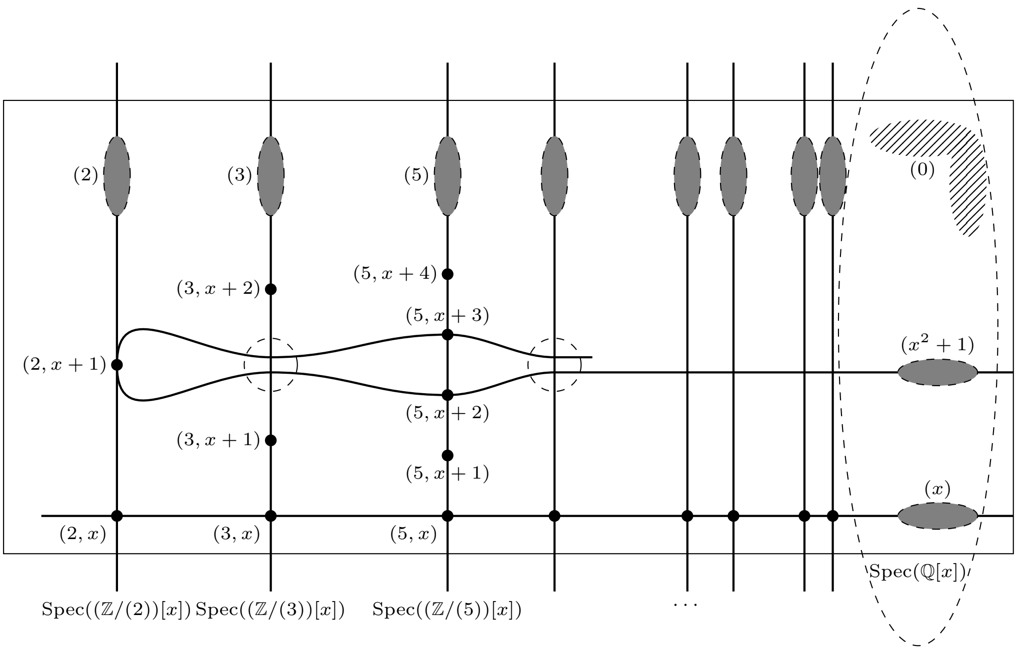

図 2: $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x])$ ([1, p.120] の図を再現した)

[*1] 第 2 章，演習問題 6 からは $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x]$ と $\mathbb{Q}[x]$ が $\mathbb{Z}$ 加群として同型であることがわかる．環としての同型は容易に確かめられる．次の $(\mathbb{Z}/(p)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x]$ と $(\mathbb{Z}/(p))[x]$ が環として同型であることについても同様である．

17. 演習問題 15 iii) より X の閉集合は $V(f)$ の形の閉集合の共通部分であるので，X_f 全体は基底である．

i) $X_f \cap X_g = (X - V(f)) \cap (X - V(g)) = X - (V(f) \cup V(g)) = X - V(fg) = X_{fg}$.

ii) 命題 1.8 より

$$X_f = \emptyset \iff V(f) = X \iff \text{すべての } \mathfrak{p} \in X \text{ に対し } f \in \mathfrak{p} \iff f \text{ はベキ零元である}$$

が成り立つ．

iii) 系 1.5 より

$$X_f = X \iff V(f) = \emptyset \iff \text{すべての } \mathfrak{p} \in X \text{ に対し } f \notin \mathfrak{p} \iff f \text{ は単元である}$$

が成り立つ．

iv) 一般に，$\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ が二つのイデアルであるとき，$V(\mathfrak{a}) \subseteq V(\mathfrak{b})$ となるのは $r(\mathfrak{a}) \supseteq r(\mathfrak{b})$ であるとき，またそのときに限る．実際，命題 1.14 より $r(\mathfrak{a}) = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{p}$，$r(\mathfrak{b}) = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}} \mathfrak{p}$ から従う．これより，

$$X_f = X_g \iff V(f) = V(g) \iff r((f)) = r((g))$$

が成り立つ．

v) 基本開集合 X_{f_i} $(i \in I)$ による X の被覆を考えれば十分である．$X = \bigcup_{i \in I} X_{f_i}$ であるとき，$V(1) = \bigcap_{i \in I} V(f_i) = V(\sum_{i \in I}(f_i))$ であるから，f_i は単位イデアル $(1) = A$ を生成するので，I の有限部分集合 J と $g_i \in A$ $(i \in J)$ が存在して，

$$1 = \sum_{i \in J} g_i f_i$$

と表せる．よって $1 \in \sum_{i \in J}(f_i)$ より $\emptyset = V(\sum_{i \in J}(f_i)) = \bigcap_{i \in J} V(f_i)$ であるので $X = \bigcup_{i \in J} X_{f_i}$ であり，X_{f_i} $(i \in J)$ は X を被覆する．

vi) $X_f \subseteq \bigcup_{i \in I} X_{f_i}$ であるとき，$V(f) \supseteq \bigcap_{i \in I} V(f_i) = V(\sum_{i \in I}(f_i))$ であるから，$f \in r(\sum_{i \in I}(f_i))$ なので，ある $n > 0$ と I の有限部分集合 J と $g_i \in A$ $(i \in J)$ が存在して，

$$f^n = \sum_{i \in J} g_i f_i$$

と表せる．よって $f \in r(\sum_{i \in J}(f_i))$ より $V(f) \supseteq V(\sum_{i \in J}(f_i)) = \bigcap_{i \in J} V(f_i)$ であるので $X_f \subseteq \bigcup_{i \in J} X_{f_i}$ であり，X_{f_i} $(i \in J)$ は X_f を被覆する．

vii) 開集合は X_f の形の和集合で表せるので，開集合が準コンパクト[*2]ならば，X_f の形の有限個の和集合で表せる．一方 X_f は準コンパクトであり，準コンパクトの有限個の和集合は準コンパクトなので，X_f の形の有限個の和集合は準コンパクトである．

18. i) ii) より

$$x \text{ は閉点である} \iff \{x\} = \overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x) \iff \mathfrak{p}_x \text{ は極大イデアルである}$$

が成り立つ．

ii) 閉集合 $V(E)$ $(E \subseteq A)$ が $\{x\}$ を含めば，$E \subseteq \mathfrak{p}_x$ が成り立つから，$V(E) \supseteq V(\mathfrak{p}_x)$ である．よって $V(\mathfrak{p}_x) \ni x$ なので，$V(\mathfrak{p}_x)$ は $\{x\}$ を含む最小の X の閉集合である．

[*2] 邦訳 [4] では quasi-compact を擬コンパクトと訳しているが，準コンパクトと訳すことが多いと思われる．

iii) ii) より

$$y \in \overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x) \iff \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$$

が成り立つ．

iv) x の開近傍がつねに y を含み，y の開近傍がつねに x を含むならば，$x \in \overline{\{y\}}$，$y \in \overline{\{x\}}$ であるので iii) より $\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$，$\mathfrak{p}_y \subseteq \mathfrak{p}_x$ ゆえ $x = y$ となる．

19. X が既約のとき，$A \neq 0$ であり，$f, g \notin \mathfrak{N}$ に対し $X_f, X_g \neq \emptyset$ より $X_{fg} = X_f \cap X_g \neq \emptyset$ なので $fg \notin \mathfrak{N}$ となり $\mathfrak{N}$ は素イデアルである．$\mathfrak{N}$ が素イデアルであるとすると，演習問題 18 ii) より $X = V(\mathfrak{N}) = \overline{\{\mathfrak{N}\}}$ となり，1 点集合は既約だから演習問題 20 i) より X も既約である．

20. i) X の開集合が Y と交わることと，$\overline{Y}$ と交わることは同値であることから従う．

ii) Y を X の既約な部分空間とする．ツォルンの補題により，X の Y を含む既約な部分空間全体の集合 Σ が，包含関係による順序で帰納的であることを示せばよい．$Y \in \Sigma$ であるので Σ は空集合ではない．$(Z_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ を Σ の全順序部分集合とすると，$Z = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} Z_\alpha$ は既約である．実際，U, V を X の開集合で Z と交わるものとすると，$(Z_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ は全順序集合であるから，$\alpha \in \mathrm{A}$ が存在して Z_α は U, V と交わる．したがって Z_α は既約であるので，$U \cap V$ は Z_α と交わり，Z と交わる．

iii) Y を X の極大な既約部分空間とすると，i) より $\overline{Y}$ も既約であるので，極大性により $\overline{Y} = Y$ となるので，Y は閉集合である．$x \in X$ に対し $\{x\}$ は既約であるので，ii) より極大な既約部分空間に含まれる．ハウスドルフ空間の部分空間はハウスドルフ空間であり，ハウスドルフ空間が 2 点以上含むとすると，交わらない 2 つの空でない開集合で点を分離できるので既約ではない．したがってハウスドルフ空間の既約成分は 1 点集合である．

iv) Y を X の既約成分とすると，iii) より Y は閉集合なので，イデアル $\mathfrak{a} \subseteq A$ によって $Y = V(\mathfrak{a})$ と表せる．演習問題 21 iv) より $V(\mathfrak{a})$ は $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ と位相同型であり，演習問題 19 より $V(\mathfrak{a})$ が既約であることと $A/\mathfrak{a}$ のベキ零元根基が素イデアルであることは同値であるので，$\mathfrak{p} = r(\mathfrak{a})$ は素イデアルであり，Y は素イデアル $\mathfrak{p} \subseteq A$ によって $Y = V(\mathfrak{p})$ と表せる．$\mathfrak{p}$ が A の極小でない素イデアルと仮定すると，$\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ なる素イデアル $\mathfrak{q}$ が存在する．$V(\mathfrak{q}) \supset V(\mathfrak{p})$ であり，$V(\mathfrak{q})$ は既約であるので，$V(\mathfrak{p})$ が極大であることに矛盾する．よって $\mathfrak{p}$ は A の極小な素イデアルである．

21. i) $\mathfrak{q} \in Y$ に対して

$$\mathfrak{q} \in {\phi^*}^{-1}(X_f) \iff \phi^*(\mathfrak{q}) = \phi^{-1}(\mathfrak{q}) \in X_f \iff f \notin \phi^{-1}(\mathfrak{q}) \iff \phi(f) \notin \mathfrak{q} \iff \mathfrak{q} \in Y_{\phi(f)}$$

が成り立つことから従う．

ii) $\mathfrak{q} \in Y$ に対して

$$\mathfrak{q} \in {\phi^*}^{-1}(V(\mathfrak{a})) \iff \mathfrak{a} \subseteq \phi^{-1}(\mathfrak{q}) \iff \phi(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{q} \iff \mathfrak{a}^e \subseteq \mathfrak{q} \iff \mathfrak{q} \in V(\mathfrak{a}^e)$$

が成り立つことから従う．

iii) 閉集合 $V(E)$ $(E \subseteq A)$ が $\phi^*(V(\mathfrak{b}))$ を含めば，$\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{b}$ に対して $E \subseteq \phi^{-1}(\mathfrak{q})$ が成り立つので，$E \subseteq \bigcap_{\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{b}} \phi^{-1}(\mathfrak{q})$ となる．ここで命題 1.14 と 演習問題 1.18 から

$$\bigcap_{\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{b}} \phi^{-1}(\mathfrak{q}) = \phi^{-1}\left(\bigcap_{\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{b}} \mathfrak{q}\right) = \phi^{-1}(r(\mathfrak{b})) = r(\mathfrak{b})^c = r(\mathfrak{b}^c)$$

なので $E \subseteq r(\mathfrak{b}^c)$ となる．よって $V(E) \supseteq V(r(\mathfrak{b}^c)) = V(\mathfrak{b}^c)$ であり $\phi^*(V(\mathfrak{b})) \subseteq V(\mathfrak{b}^c)$ だから $V(\mathfrak{b}^c)$ は $\phi^*(V(\mathfrak{b}))$ を含む最小の X の閉集合である．

iv) 命題 1.1 より $f(A)=B$ のイデアルの集合と $\mathrm{Ker}(\phi)$ を含んでいる A のイデアルの集合の間には 1 対 1 の対応があるので，$\phi^*\colon Y\to V(\mathrm{Ker}(\phi))$ は全単射である．さらに B のイデアル $\mathfrak{b}$ に対し，$\phi^*(V(\mathfrak{b}))=V(\phi^{-1}(\mathfrak{b}))$ であるので，ϕ^* は閉写像となる．よって i) より ϕ^* は連続写像であるので，ϕ^* は位相同型写像となる．特に，命題 1.8 より $\mathrm{Spec}(A)=V(\mathfrak{N})$ なので $\mathrm{Spec}(A)$ と $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{N})$ は位相同型である．

v) iii) より $\overline{\phi^*(Y)}=\overline{\phi^*(V(0))}=V(0^c)=V(\mathrm{Ker}(\phi))$ であるので，

$$\phi^*(Y) \text{ が } X \text{ で稠密である} \iff X=V(\mathrm{Ker}(\phi)) \iff \mathrm{Ker}(\phi)\subseteq\mathfrak{N}$$

が成り立つ．

vi) $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(C)$ に対して $(\psi\circ\phi)^*(\mathfrak{p})=(\psi\circ\phi)^{-1}(\mathfrak{p})=\phi^{-1}(\psi^{-1}(\mathfrak{p}))=(\phi^*\circ\psi^*)(\mathfrak{p})$ より従う．

vii) A は二つの素イデアル $\mathfrak{p},(0)$ をもち，B は二つの素イデアル $\mathfrak{q}_1=\{\overline{0}\}\times K$，$\mathfrak{q}_2=(A/\mathfrak{p})\times\{0\}$ をもつ．$\phi^*(\mathfrak{q}_1)=\mathfrak{p}$，$\phi^*(\mathfrak{q}_2)=(0)$ であるので，ϕ^* は全単射であるが，$\mathfrak{p}\cap(0)=(0)$，$\mathfrak{q}_1\cap\mathfrak{q}_2=(0)$ より演習問題 19 から X は既約であるが，Y は既約でないので，X と Y は位相同型ではない．

22. $p_i\colon A\to A_i$ を射影とし $\mathfrak{a}_i=\mathrm{Ker}(p_i)$ とすると，演習問題 21 iv) より $V(\mathfrak{a}_i)$ は $\mathrm{Spec}(A_i)$ と位相同型である．$\bigcap_{i=1}^n\mathfrak{a}_i=(0)$ より $\bigcup_{i=1}^n V(\mathfrak{a}_i)=V(\bigcap_{i=1}^n\mathfrak{a}_i)=V(0)=\mathrm{Spec}(A)$ であり，$i\neq j$ のとき，$\mathfrak{a}_i$ と $\mathfrak{a}_j$ は互いに素であるので，$V(\mathfrak{a}_i)\cap V(\mathfrak{a}_j)=V(\mathfrak{a}_i+\mathfrak{a}_j)=V(1)=\emptyset$ となる．よって $V(\mathfrak{a}_i)$ の補集合は $\bigcup_{j\neq i}V(\mathfrak{a}_j)$ であり閉集合なので $V(\mathfrak{a}_i)$ は開集合である．

ii) $\Longrightarrow$ i)　上で示した．

i) $\Longrightarrow$ iii)　X は非連結であるので，X は空でない X と異なる開かつ閉部分集合 X_1 が存在する*3．$X_2=X-X_1$ とおく．X_1,X_2 は閉集合であるから，A のあるイデアル $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ が存在して，$X_1=V(\mathfrak{a})$，$X_2=V(\mathfrak{b})$ と表せる．$\emptyset=V(\mathfrak{a})\cap V(\mathfrak{b})=V(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ より $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=(1)$ であるので，$a\in\mathfrak{a}$，$b\in\mathfrak{b}$ が存在して $a+b=1$ となる．$X=V(\mathfrak{a})\cup V(\mathfrak{b})=V(\mathfrak{ab})$ より $\mathfrak{ab}\subseteq\mathfrak{N}$ であるので，ある $n>0$ が存在して $a^nb^n=0$ となる．命題 1.16 より $(a^n)+(b^n)=(1)$ であり，$e\in(a^n)$ が存在して $1-e\in(b^n)$ となり，$e-e^2=e(1-e)\in(a^n)(b^n)=(a^nb^n)=(0)$ より e はベキ等元である．$e=1$ ならば $1\in\mathfrak{a}$ より $X_1=\emptyset$，$e=0$ ならば $1\in\mathfrak{b}$ より $X_1=X$ となり仮定に反するので，e は $0,1$ と異なる．

iii) $\Longrightarrow$ ii)　e を $0,1$ と異なるベキ等元とすると，$e(1-e)=0$ より $e,1-e$ は非単元なので $(e),(1-e)$ は $(0),(1)$ と異なるイデアルである．命題 1.10 i) より $(e)+(1-e)=(1)$，$(e)\cap(1-e)=(e)(1-e)=(e-e^2)=(0)$ であるので，命題 1.10 ii) iii) より $\phi\colon A\to A/(e)\times A/(1-e)$ は同型写像である．

23. i) すべての $\mathfrak{p}\in X$ に対し，演習問題 11 ii) から $f\in\mathfrak{p}$ か $1-f\in\mathfrak{p}$ のどちらかが成り立つので $X_f=V(1-f)$ であり，X_f は閉集合である．

ii) $X_{f_1}\cup\cdots\cup X_{f_n}=X-V((f_1,\ldots,f_n))$ であり，演習問題 11 iii) より $(f_1,\ldots,f_n)=(f)$ となる $f\in A$ が存在するので，$X_{f_1}\cup\cdots\cup X_{f_n}=X-V(f)=X_f$ となる．

iii) $Y\subseteq X$ を開かつ閉部分集合とする．Y は開集合であるので，基本開集合の和集合になる．Y は閉集合であり，演習問題 17 v) より X は準コンパクトであるので，Y も準コンパクトである．ゆえに，Y は基本開集合の有限和集合になる．よって ii) より $f\in A$ が存在して $Y=X_f$ となる．

iv) 演習問題 17 v) より X は準コンパクトである．相異なる 2 点 $x,y\in X$ に対し，演習問題 11 ii) より $\mathfrak{p}_x,\mathfrak{p}_y$ は極大イデアルであるので，$\mathfrak{p}_x+\mathfrak{p}_y=(1)$ である．ゆえに $f\in\mathfrak{p}_x$ が存在して $1-f\in\mathfrak{p}_y$ となるので，$x\in X_{1-f}$，$y\in X_f$ であり，$X_{1-f}\cap X_f=X_{(1-f)f}=X_0=\emptyset$ となる．

---

*3 [4] では，空集合は連結としているようである．

24. $a, b, c \in L$ とし，ブール束の順序を $\leqslant$ で表すとする．ブール束に関するいくつかの性質をまとめる．

- $a \leqslant b \iff a \vee b = b \iff a \wedge b = a$.
- 冪等律．$a \leqslant a$ より $a \vee a = a \wedge a = a$.
- 可換律．$a \vee b = \sup\{a, b\} = \sup\{b, a\} = b \vee a$，$a \wedge b = \inf\{a, b\} = \inf\{b, a\} = b \wedge a$.
- 結合律．$a, b \leqslant a \vee b$ より $a, b, c \leqslant (a \vee b) \vee c$ であり，$d \in L$ に対し $a, b, c \leqslant d$ ならば $a \vee b, c \leqslant d$ より $(a \vee b) \vee c \leqslant d$ であるので $(a \vee b) \vee c = \sup\{a, b, c\}$ となる．ゆえに $a \vee (b \vee c) = (b \vee c) \vee a = \sup\{b, c, a\} = \sup\{a, b, c\} = (a \vee b) \vee c$．$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ も同様である．
- $0' = 1$，$1' = 0$.
- $a'' = a$.
- De Morgan の法則．$(a \vee b) \wedge (a' \wedge b') = (a \wedge a' \wedge b) \vee (b \wedge a' \wedge b') = (0 \wedge b) \vee (0 \wedge a') = 0 \vee 0 = 0$, $(a \vee b) \vee (a' \wedge b') = (a \vee b \vee a') \wedge (a \vee b \vee b') = (1 \vee b) \wedge (1 \vee a) = 1 \wedge 1 = 1$ より $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ である．$(a \wedge b)' = a' \vee b'$ であることも同様である．

また，L における加法と乗法によって次が成り立つ．

- $a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b) = (a \vee a') \wedge (a \vee b) \wedge (b' \vee a') \wedge (b' \vee b) = 1 \wedge (a \vee b) \wedge (a' \vee b') \wedge 1 = (a \vee b) \wedge (a' \vee b')$.
- $(a + b)' = ((a \vee b) \wedge (a' \vee b'))' = (a \vee b)' \vee (a' \vee b')' = (a' \wedge b') \vee (a \wedge b)$.

L がブール環であることを示す．

- 乗法の冪等律．$a^2 = a \wedge a = a$.
- 乗法の可換律．$ab = a \wedge b = b \wedge a = ba$.
- 乗法の結合律．$(ab)c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a(bc)$.
- 乗法の単位元．$a1 = a \wedge 1 = a$.
- 加法の可換律．$a + b = (a \vee b) \wedge (a' \vee b') = (b \vee a) \wedge (b' \vee a') = b + a$.
- 加法の結合律．$(a+b)+c = ((a+b) \vee c)((a+b)' \vee c') = (ab' \vee a'b \vee c)(a'b' \vee ab \vee c') = ab'a'b' \vee ab'ab \vee ab'c' \vee a'ba'b' \vee a'bab \vee a'bc' \vee ca'b' \vee cab \vee cc' = 0 \vee 0 \vee ab'c' \vee 0 \vee 0 \vee a'bc' \vee ca'b' \vee cab \vee 0 = ab'c' \vee a'bc' \vee a'b'c \vee abc$ であるので，$a + (b + c) = (b + c) + a = bc'a' \vee b'ca' \vee b'c'a \vee bca = ab'c' \vee a'bc' \vee a'b'c \vee abc = (a + b) + c$ となる．
- 加法の単位元．$a + 0 = (a \vee 0) \wedge (a' \vee 1) = a \wedge 1 = a$.
- 加法の逆元．$a + a = (a \vee a) \wedge (a' \vee a') = a \wedge a' = 0$.
- 乗法が加法に対して分配的．$ab + ac = (ab \vee ac)((ab)' \vee (ac)') = ab(ab)' \vee ab(ac)' \vee ac(ab)' \vee ac(ac)' = 0 \vee ab(a' \vee c') \vee ac(a' \vee b') \vee 0 = aba' \vee abc' \vee aca' \vee acb' = 0 \vee abc' \vee 0 \vee acb' = abc' \vee ab'c = a(bc' \vee b'c) = a(b + c)$.

A がブール束であることを示す．

- 反射律．$a = aa$ より $a \leqslant a$ である．
- 反対称律．$a \leqslant b$，$b \leqslant a$ なら $a = ab$，$b = ab$ より $a = ab = b$ となる．
- 推移律．$a \leqslant b$，$b \leqslant c$ なら $a = ab$，$b = bc$ より $a = ab = a(bc) = (ab)c = ac$ ゆえ $a \leqslant c$ となる．
- 上限の存在．演習問題 11 i) より $a = a + ab + ab = a(a + b + ab)$，$b = b(a + b + ab)$ なので $a, b \leqslant a+b+ab$ である．$a, b \leqslant c$ なら $a = ac, b = bc$ より $a+b+ab = ac+bc+a(bc) = c(a+b+ab)$ ゆえ $a + b + ab \leqslant c$ となるので $\sup\{a, b\} = a + b + ab$ である．
- 下限の存在．$ab = aba = abb$ なので $ab \leqslant a, b$ である．$c \leqslant a, b$ なら $c = ca$，$c = cb$ より $c = cb = cab$ ゆえ $c \leqslant ab$ となるので $\inf\{a, b\} = ab$ である．

- 最小限の存在．$0 = 0a$ ゆえ $0 \leqslant a$ である．
- 最大限の存在．$a = a1$ ゆえ $a \leqslant 1$ である．
- $\vee$ が $\wedge$ に対して分配的．$(a \vee c) \wedge (b \vee c) = (a + c + ac)(b + c + bc) = ab + ac + abc + cb + cc + cbc + acb + acc + acbc = ab + 2ac + 3abc + 2bc + c = ab + c + abc = ab \vee c = (a \wedge b) \vee c$.
- $\wedge$ が $\vee$ に対して分配的．$(a \wedge c) \vee (b \wedge c) = ac \vee bc = ac + bc + acbc = ac + bc + abc = (a + b + ab)c = (a \vee b) \wedge c$.
- 唯一つの補元[*4]の存在．$a \vee a' = 1$，$a \wedge a' = 0$ とすると $aa' = 0$ より $1 = a + a' + aa' = a + a'$ なので $a' = 1 - a$ となり補元は唯一つ存在する．

上によって与えられたブール束を $L(A)$ と表す．ブール環とブール束の間に 1 対 1 の対応があることを示す．A と $A(L(A))$ が環として同型であることと，L と $L(A(L))$ がブール束として同型であることを示せばよい．A が $A(L(A))$ と環として同型であることは，$ab \text{ in } A(L(A)) = a \wedge b \text{ in } L(A) = ab \text{ in } A$，$a + b \text{ in } A(L(A)) = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b) \text{ in } L(A) = a(1 + b) + (1 + a)b + a(1 + b)(1 + a)b \text{ in } A = a + ab + b + ab \text{ in } A = a + b \text{ in } A$ より従う．L が $L(A(L))$ とブール束として同型であることは，

$$a \leqslant b \text{ in } L(A(L)) \iff a = ab \text{ in } A(L) \iff a = a \wedge b \text{ in } L \iff a \leqslant b \text{ in } L$$

より従う．

25. ブール束 L に対し，A を演習問題 24 により対応するブール環とする．演習問題 23 iv) より $X = \mathrm{Spec}(A)$ はコンパクト・ハウスドルフ空間である．X の開かつ閉である部分集合全体を $\mathcal{B}$ とする．演習問題 23 iii) より $\mathcal{B}$ は X_f なる形の集合全体であり，$\phi\colon L \to \mathcal{B}$ を $\phi(f) = X_f$ と定めると ϕ は全射である．$f \leqslant g$ ならば $f = fg$ より $f \in (g)$ であり，逆に $f \in (g)$ ならば $a \in A$ が存在して $f = ag$ となり，$f = ag = (ag)g = fg$ より $f \leqslant g$ である．したがって

$$\begin{aligned} f \leqslant g &\iff f \in (g) \iff \text{ある } n > 0 \text{ が存在して } f = f^n \in (g) \iff f \in r((g)) \\ &\iff r((f)) \subseteq r((g)) \iff V(f) \supseteq V(g) \iff X_f \subseteq X_g \end{aligned}$$

であるので，ϕ は単射であり，順序同型写像である．

26. μ の全射性と

$$x \in U_f \iff f(x) \neq 0 \iff f \notin \mathfrak{m}_x \iff \mathfrak{m}_x \in \widetilde{U}_f$$

より $\mu(U_f) = \widetilde{U}_f$ である．x の開近傍 U に対し，ウリゾーンの補題によって，$f \in C(X)$ で $f(X - U) = 0$ かつ $f(x) = 1$ となるものが存在する．ゆえに $x \in U_f \subseteq U$ であるので，U_f は位相空間 X の位相の基底をつくる．$\widetilde{U}_f$ が位相空間 $\widetilde{X}$ の位相の基底をつくることは，$\widetilde{U}_f$ が $\widetilde{X}$ と $\mathrm{Spec}(C(X))_f$ の共通部分であるので，演習問題 17 よりわかる．

アフィン多様体

27. μ が全射であることを示す．$\mathfrak{m} \in \widetilde{X}$ に対して全射環準同型 $k[t_1, \ldots, t_n] \to P(X)$ による $\mathfrak{m}$ の逆像 $\mathfrak{m}^c$ は $k[t_1, \ldots, t_n]$ の極大イデアルであり，V をすべての $f \in \mathfrak{m}^c$ に対して $f(x) = 0$ を満たすすべての $x = (x_1, \ldots, x_n) \in k^n$ の集合とすると，$f_\alpha \in I(X) \subseteq \mathfrak{m}^c$ なので $V \subseteq X$ である．ヒルベルトの零点定理 (第 7 章，演習問題 14) より $I(V) = r(\mathfrak{m}^c) = \mathfrak{m}^c \neq k[t_1, \ldots, t_n]$ が成り立つので，$V \neq \emptyset$ であ

[*4] 邦訳 [4] では complement を補要素と訳しているが，[7] によると束の文脈では補元と訳すことが多いらしい．

り，$x \in V \subseteq X$ が存在する．このとき $f \in \mathfrak{m}$ に対して $f(x) = 0$ となるので $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_x$ であり，$\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_x$ は極大イデアルであるので，$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$ が成り立つ．したがって μ は全射である．

28. k-代数の準同型 $h\colon P(Y) \to P(X)$ が与えられたとき，$P(Y) = k[t_1, \dots, t_m]/I(Y)$ であるとし，ξ_i を $P(Y)$ における t_i の像とする．$x \in X$ に対して $\psi(x) = ((h(\xi_1))(x), \dots, (h(\xi_m))(x))$ として $\psi\colon X \to k^m$ を定義する．ψ の像が Y に含まれることを示す．Y はアフィン多様体より $T \subseteq k[t_1, \dots, t_m]$ が存在して Y は T の零点集合であり $T \subseteq I(Y)$ であることから，すべての $x \in X$，$f \in I(Y)$ について $f(\psi(x)) = 0$ であることを示せばよい．f は多項式であり，h は k-代数の準同型であるので，$f \in I(Y)$ より $f(\psi(x)) = f((h(\xi_1))(x), \dots, (h(\xi_m))(x)) = (h(f(\xi_1, \dots, \xi_m)))(x) = 0$ が成り立つ．よって ψ は X から Y への写像を定める．ψ が正則写像であることは定義より従う．ψ は $\eta \mapsto \eta \circ \psi$ によって定義される k-代数の準同型写像 $P(Y) \to P(X)$ を誘導するが，$x \in X$ に対して $(\eta \circ \psi)(x) = \eta((h(\xi_1))(x), \dots, (h(\xi_m))(x)) = (h(\eta(\xi_1, \dots, \xi_m)))(x) = (h(\eta))(x)$ より $\eta \circ \psi = h(\eta)$ なので ψ は与えられた h を引き起こす．逆に正則写像 $\phi\colon X \to Y$ が与えられたとき，$\eta \mapsto \eta \circ \phi$ によって定義された k-代数の準同型写像 $P(Y) \to P(X)$ に対して，上の方法で正則写像 $\psi\colon X \to Y$ を構成すると，$x \in X$ に対して $\psi(x) = (\xi_1 \circ \phi(x), \dots, \xi_m \circ \phi(x)) = \phi(x)$ より $\psi = \phi$ となる．

参考文献

[1] David Mumford, Tadao Oda, Algebraic Geometry II (a penultimate draft), `http://www.dam.brown.edu/people/mumford/alg_geom/papers/AGII.pdf`.

[2] 藤崎 源二郎，体とガロア理論 岩波基礎数学選書，岩波書店，1991.

[3] jeffrey daniel kasik carlson: Exercises to Atiyah and Macdonald's Introduction to Commutative Algebra, `http://www.math.toronto.edu/jcarlson/intro_comm_alg(Palatino).pdf`.

[4] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald (著)，新妻 弘 (訳)，Atiyah-MacDonald 可換代数入門，共立出版，2006.

[5] Nicolas Bourbaki (著)，木下 素夫 (編・訳)，ブルバキ数学原論 可換代数 1，東京図書，1971.

[6] R. Hartshorne (著)，高橋 宣能，松下 大介 (訳)，代数幾何学 1，丸善出版，2013.

[7] y.，アティマク演習問題解答，2017，`http://iso.2022.jp/math/atiyah-macdonald.pdf`.