

# Atiyah-MacDonald 可換代数入門 第 6 章演習問題解答

flag3 (@flag3833753)

2020 年 5 月 14 日 (最終更新日: 2021 年 4 月 17 日)

## 概要

Atiyah-MacDonald 可換代数入門 [1] 第 6 章の演習問題の解答をまとめたものである。

## 6 連鎖条件

### 演習問題

- 部分加群の昇鎖  $\text{Ker}(u) \subseteq \text{Ker}(u^2) \subseteq \dots$  を考える。昇鎖条件によって、この昇鎖は停留的である。すなわち、ある整数  $n$  が存在して  $\text{Ker}(u^n) = \text{Ker}(u^{n+1}) = \dots$  となる。  $u$  は全射より  $u^n$  は全射であるので、  $x \in M$  が  $u(x) = 0$  ならば  $x = u^n(y)$  となる  $y \in M$  が存在して、  $u^{n+1}(y) = u(x) = 0$  より  $y \in \text{Ker}(u^{n+1}) = \text{Ker}(u^n)$  となり、  $x = u^n(y) = 0$  である。すなわち  $u$  は単射である。よって  $u$  は同型写像である。
  - 部分加群の降鎖  $\text{Im}(u) \supseteq \text{Im}(u^2) \supseteq \dots$  を考える。降鎖条件によって、この降鎖は停留的である。すなわち、ある整数  $n$  が存在して  $\text{Im}(u^n) = \text{Im}(u^{n+1}) = \dots$  となる。  $x \in M$  に対し  $u^n(x) \in \text{Im}(u^n) = \text{Im}(u^{n+1})$  より  $u^n(x) = u^{n+1}(y)$  となる  $y \in M$  が存在する。  $u$  は単射より  $u^n$  は単射であるので、  $x = u(y)$  である。すなわち  $u$  は全射である。よって  $u$  は同型写像である。
- $N$  を  $M$  の部分加群とし、  $\Sigma$  を  $N$  のすべての有限生成部分加群の集合とすると、命題 6.2 の証明と同様にして  $N$  は  $\Sigma$  の極大元で有限生成となるので、命題 6.2 より  $M$  はネーター加群となる。
- 系 6.4 より  $M/N_1 \oplus M/N_2$  はネーター加群であり自然な写像  $M/(N_1 \cap N_2) \rightarrow M/N_1 \oplus M/N_2$  は単射なので命題 6.3 より  $M/(N_1 \cap N_2)$  はネーター加群となる。アルティン加群の場合も同様である。
- $x_1, \dots, x_n$  を  $M$  の生成系とする。系 6.4 より  $M^n$  はネーター  $A$ -加群であり、  $a \mapsto (ax_1, \dots, ax_n)$  によって定義される写像  $A \rightarrow M^n$  は単射  $A/\mathfrak{a} \rightarrow M^n$  を誘導するので、命題 6.3 によって、  $A/\mathfrak{a}$  はネーター  $A$ -加群である。ゆえに、  $A/\mathfrak{a}$  はネーター  $A/\mathfrak{a}$ -加群であるので、ネーター環である。  
 $p$  を固定した素数とし、  $G$  を位数が  $p$  のベキであるすべての元からなる  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  の部分群とすると、  $G$  はアルティン  $\mathbb{Z}$ -加群であるが、  $G$  の零化イデアルは  $(0)$  で  $\mathbb{Z}/(0)$  はアルティン環ではない。
- $Y$  を  $X$  の部分空間、  $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots$  を  $Y$  の閉集合の降鎖とする。このとき、  $\overline{Y_n}$  を  $Y_n$  の  $X$  における閉包とすると  $\overline{Y_1} \supseteq \overline{Y_2} \supseteq \dots$  は  $X$  の閉集合の降鎖であり、降鎖条件によって、この降鎖は停留的である。すなわち、ある整数  $n$  が存在して  $\overline{Y_n} = \overline{Y_{n+1}} = \dots$  となる。よって  $Y_n = \overline{Y_n} \cap Y$  より  $Y_n = Y_{n+1} = \dots$  となるので、  $Y$  の閉集合の降鎖は停留的であり、  $Y$  はネーター空間である。  
 $\{X_i\}_{i \in I}$  を  $X$  の開被覆とする。集合  $X_i$  の有限個の和集合全体の集合は、空でないから極大元  $Y$  をもつ。すべての  $i \in I$  に対して  $Y \cup X_i = Y$  であるから、  $Y = X$  となり、  $X$  は準コンパクトである。

6. i)  $\implies$  iii) 演習問題 5 より  $X$  の部分空間はネーター空間であり, 準コンパクトである.  
 iii)  $\implies$  ii) 明らか.  
 ii)  $\implies$  i)  $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$  を  $X$  の開集合の昇鎖とする.  $X_n$  全体の和集合  $Y$  は開集合なので準コンパクトであり,  $\{X_n\}_n$  は  $Y$  の開被覆であるから,  $Y$  は  $X_n$  の有限個の和集合となるので, ある整数  $n$  が存在して  $Y = X_n$  となる. よって  $X_n = X_{n+1} = \cdots$  となるので, この昇鎖は停留的である.
7. 有限個の既約な閉集合の和集合で表されない  $X$  の閉部分集合の集合を  $\Sigma$  とする.  $\Sigma \neq \emptyset$  と仮定すると極小元  $Y$  をもつ.  $Y$  は空ではなく, 既約でもないので,  $Y$  と異なる閉集合  $Y_1, Y_2$  の和集合と表される. このとき, 極小性により  $Y_1, Y_2 \notin \Sigma$  である. したがって  $\Sigma$  の定義より  $Y \notin \Sigma$  となり矛盾する.
8.  $\text{Spec}(A)$  の閉集合は, イデアル  $\mathfrak{a} \subseteq A$  によって  $V(\mathfrak{a})$  と表される.  $\text{Spec}(A)$  の閉集合の降鎖  $V(\mathfrak{a}_1) \supseteq V(\mathfrak{a}_2) \supseteq \cdots$  を考える. このとき  $r(\mathfrak{a}_1) \subseteq r(\mathfrak{a}_2) \subseteq \cdots$  はイデアルの昇鎖より, 昇鎖条件によって, この昇鎖は停留的である. すなわち, ある整数  $n$  が存在して  $r(\mathfrak{a}_n) = r(\mathfrak{a}_{n+1}) = \cdots$  となる. よって  $V(r(\mathfrak{a}_n)) = V(\mathfrak{a}_n)$  より  $V(\mathfrak{a}_n) = V(\mathfrak{a}_{n+1}) = \cdots$  となるので降鎖は停留的である.  
 $A = k[x_1, x_2, \dots]$  を体  $k$  上の可算無限個の不定元  $x_n$  に関する多項式環とし,  $A$  のイデアル  $\mathfrak{a}$  を  $\mathfrak{a} = (x_1, x_2^2, \dots, x_n^n, \dots)$  とする. このとき, 環  $B = A/\mathfrak{a}$  は唯一つの素イデアルをもつので,  $\text{Spec}(B)$  はネーター空間である. 一方, その素イデアルは有限生成でないので,  $B$  はネーター環ではない.
9.  $A$  をネーター環とする. 演習問題 8 から,  $X = \text{Spec}(A)$  はネーター空間であり, 演習問題 7 から,  $X$  の既約成分の集合は有限である. よって, 第 1 章, 演習問題 20 iv) より  $X$  の既約成分は  $A$  の極小素イデアル  $\mathfrak{p}$  を用いて  $V(\mathfrak{p})$  と表されることから従う.
10. 命題 6.2 より  $M$  は有限生成であり,  $\mathfrak{a} = \text{Ann}(M)$  とすると, 第 3 章, 演習問題 19 v) より  $\text{Supp}(M) = V(\mathfrak{a})$  である. よって  $\text{Supp}(M)$  は  $\text{Spec}(A/\mathfrak{a})$  と同相であり, 演習問題 4 より  $A/\mathfrak{a}$  はネーター環であるので, 演習問題 8 より  $\text{Supp}(M)$  はネーター空間である.
11.  $f^*: \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$  が閉写像ならば  $f$  が上昇性質をもつことは第 5 章, 演習問題 10 で示した.  $f$  が上昇性質をもつとき,  $X$  を  $\text{Spec}(B)$  の閉集合とすると, 演習問題 5 より  $X$  はネーター空間であるので, 演習問題 7 より  $X_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) を  $X$  の既約な閉集合として  $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$  とかける. よって  $f^*(X) = \bigcup_{i=1}^n f^*(X_i)$  より  $X$  を  $\text{Spec}(B)$  の既約な閉集合としてもよい. このとき  $X$  は素イデアル  $\mathfrak{q} \subseteq B$  によって  $X = V(\mathfrak{q})$  と表せる.  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$  とおくと, 第 5 章, 演習問題 10 より  $f^*: \text{Spec}(B/\mathfrak{q}) \rightarrow \text{Spec}(A/\mathfrak{p})$  は全射であるので  $f^*(V(\mathfrak{q})) = V(\mathfrak{p})$  となり  $f^*$  は閉写像となる.
12. 素イデアルの昇鎖  $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq \cdots$  を考える.  $V(\mathfrak{p}_1) \supseteq V(\mathfrak{p}_2) \supseteq \cdots$  は閉集合の降鎖より, 降鎖条件によって, この降鎖は停留的である. すなわち, ある整数  $n$  が存在して  $V(\mathfrak{p}_n) = V(\mathfrak{p}_{n+1}) = \cdots$  となる. よって  $\mathfrak{p}_n \in V(\mathfrak{p}_n) = V(\mathfrak{p}_{n+1}) = \cdots$  より  $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}_{n+1} = \cdots$  となるので昇鎖は停留的である.  
 $A = \prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z}/(2)$  とし,  $n$  以下の成分が 1,  $n$  より大きい成分が 0 である  $A$  の元を  $e_n$  とおくと, 開集合の昇鎖  $X_{e_0} \subset X_{e_1} \subset \cdots$  は停留しないので  $\text{Spec}(A)$  はネーター空間ではない. 一方,  $A$  はブール環であり, 第 1 章, 演習問題 11 よりすべての素イデアルは極大イデアルであるので, 素イデアル全体の集合は昇鎖条件を満たす.

## 参考文献

- [1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald. Atiyah-MacDonald 可換代数入門. 共立出版, 2006. 新妻弘 訳.  
 [2] N. Bourbaki. 可換代数 1. ブルバキ数学原論 / ブルバキ [著]. 東京図書, 1971. 木下素夫 訳.