Atiyah-MacDonald 可換代数入門 第 2 章演習問題解答

flag3 (@flag3833753)

2021 年 8 月 6 日

概要

Atiyah-MacDonald 可換代数入門 [1] 第 2 章の演習問題の解答をまとめたものである．

2　加群

演習問題 2.2.　i) $a \in A$ に対して

$$\begin{aligned} a \in \mathrm{Ann}(M+N) &\iff 0 = a(M+N) = aM + aN \\ &\iff aM = aN = 0 \iff a \in \mathrm{Ann}(M) \cap \mathrm{Ann}(N) \end{aligned}$$

が成り立つことから従う．

ii) $a \in A$ に対して

$$aP \subseteq N \iff a(N+P) = aN + aP \subseteq N \iff a((N+P)/N) = 0$$

が成り立つことから従う．

演習問題 2.15. $M \otimes_A N$ の B-加群の構造と $N \otimes_B P$ の A-加群の構造を

$$\begin{aligned} (x \otimes y)b = x \otimes yb, &\quad x \in M,\ y \in N,\ b \in B, \\ a(y \otimes z) = ay \otimes z, &\quad a \in A,\ y \in N,\ z \in P \end{aligned}$$

によって定めると $M \otimes_A N$, $N \otimes_B P$ は (A, B)-両側加群[*1]となる．同様に $(M \otimes_A N) \otimes_B P$, $M \otimes_A (N \otimes_B P)$ も (A, B)-両側加群となり，命題 2.14 ii) の写像で 2 つの加群は A-加群としても B-加群としても同型となる．

演習問題 2.20. 任意の B-加群 N に対して，命題 2.14 i) iv) と演習問題 2.15 より標準的な同型

$$N \otimes_B M_B = N \otimes_B (B \otimes_A M) \cong (N \otimes_B B) \otimes_A M \cong (B \otimes_B N) \otimes_A M \cong N \otimes_A M$$

をもつ．ゆえに $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ を任意の B-加群の完全列とすると，次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N' \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & N \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & N'' \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \otimes_B M_B \arrow[r] & N \otimes_B M_B \arrow[r] & N'' \otimes_B M_B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

M は平坦 A-加群より上の行は完全列なので下の行も完全列である．よって M_B は平坦 B-加群である．

[*1] 邦訳 [1] では bimodule を複加群と訳しているが，両側加群 (または双加群) と訳すことの方が多いと思われる．

演習問題

1. m と n が互いに素であるので $am+bn=1$ となる $a,b\in\mathbb{Z}$ が存在し，すべての $x\in\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して $x\otimes y=(am+bn)(x\otimes y)=a(mx\otimes y)+b(x\otimes ny)=0$ が成り立つことから従う．
2. 完全列 $0\to\mathfrak{a}\to A\to A/\mathfrak{a}\to 0$ に対して，命題 2.18 より $\mathfrak{a}\otimes_A M\xrightarrow{f} A\otimes_A M\to(A/\mathfrak{a})\otimes_A M\to 0$ は完全列であるので，$\mathrm{Coker}(f)=(A\otimes_A M)/\mathrm{Im}(f)\cong(A/\mathfrak{a})\otimes_A M$ である，一方で命題 2.14 iv) の標準的な同型 $A\otimes_A M\cong M$ によって $\mathrm{Im}(f)$ は $\mathfrak{a}M$ に対応するので，$M/\mathfrak{a}M\cong(A/\mathfrak{a})\otimes_A M$ である．
3. $\mathfrak{m}$ を A の極大イデアル，$k=A/\mathfrak{m}$ をその剰余体とする．$M_k=k\otimes_A M$ とすると，演習問題 2 より $M_k\cong M/\mathfrak{m}M$ となる．$M_k=0$ ならば $\mathfrak{m}M=M$ ゆえ，中山の補題 (命題 2.6) より $M=0$ となる．よって $M\otimes_A N=0$ ならば，$M_k=0$ または $N_k=0$ であることを示せばよい．$M\otimes_A N=0$ ならば $(M\otimes_A N)_k=k\otimes_A(M\otimes_A N)=0$ であり，命題 2.14 ii) iv) と演習問題 2.15 より
$$\begin{aligned}M_k\otimes_k N_k&=(k\otimes_A M)\otimes_k(k\otimes_A N)\cong((k\otimes_A M)\otimes_k k)\otimes_A N\\&\cong(k\otimes_A M)\otimes_A N\cong k\otimes_A(M\otimes_A N)=(M\otimes_A N)_k=0\end{aligned}$$
である．M_k と N_k は体 k 上の有限次元ベクトル空間であるから $M_k\cong k^m$，$N_k\cong k^n$ とすると，命題 2.14 ii) iv) から $0=M_k\otimes_k N_k\cong k^m\otimes_k k^n\cong k^{mn}$ となるので $M_k=0$ または $N_k=0$ となる．
4. 任意の A-加群 N に対して，命題 2.14 iii) と同様に標準的な同型 $N\otimes_A M\cong\bigoplus_{i\in I}(N\otimes_A M_i)$ をもつので，$0\to N'\to N\to N''\to 0$ を任意の A-加群の完全列とすると，次の図式は可換である．
$$\begin{tikzcd}0 \arrow[r] & N'\otimes_A M \arrow[r]\arrow[d,"\cong"] & N\otimes_A M \arrow[r]\arrow[d,"\cong"] & N''\otimes_A M \arrow[r]\arrow[d,"\cong"] & 0\\ 0 \arrow[r] & \bigoplus_{i\in I}(N'\otimes_A M_i) \arrow[r] & \bigoplus_{i\in I}(N\otimes_A M_i) \arrow[r] & \bigoplus_{i\in I}(N''\otimes_A M_i) \arrow[r] & 0\end{tikzcd}$$
下の行が完全列であることと，各 $0\to N'\otimes_A M_i\to N\otimes_A M_i\to N''\otimes_A M_i\to 0$ が完全列であることは同値である．よって M が平坦であることと，各 M_i が平坦であることは同値である．
5. 命題 2.14 iv) より A は平坦 A-加群である．したがって，演習問題 4 から自由 A-加群は平坦である．よって $A[x]=\bigoplus_{i=0}^{\infty}Ax^i\cong\bigoplus_{i=0}^{\infty}A$ は自由 A-加群であるので，$A[x]$ は平坦 A-代数である．
6. $f=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in A[x]$，$u=m_0+m_1x+\cdots+m_rx^r\in M[x]$ に対して，積 fu は $fu=\sum_{k=0}^{n+r}\left(\sum_{i=0}^{k}a_im_{k-i}\right)x^k$ であり，各 $k=0,1,\ldots,n+r$ に対して，$\sum_{i=0}^{k}a_im_{k-i}\in M$ であるので，$fu\in M[x]$ である．よって $M[x]$ は $A[x]$-加群である．$\phi\colon M[x]\to A[x]\otimes_A M$ を $\phi(u)=\sum_{j=0}^{r}(x^j\otimes m_j)$ とすると，ϕ は $A[x]$-加群の準同型写像である．実際,
$$\begin{aligned}\phi(fu)&=\sum_{k=0}^{n+r}\sum_{i=0}^{k}\phi(a_im_{k-i}x^k)=\sum_{k=0}^{n+r}\sum_{i=0}^{k}(x^k\otimes a_im_{k-i})=\sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{n}(x^{i+j}\otimes a_im_j)\\&=\sum_{j=0}^{r}\left(\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\right)x^j\otimes m_j\right)=\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\right)\left(\sum_{j=0}^{r}(x^j\otimes m_j)\right)=f\phi(u)\end{aligned}$$
が成り立つ．$(f,m)\mapsto\sum_{i=0}^{n}(a_im)x^i$ によって定義される写像 $A[x]\times M\to M[x]$ は A-双線形であるから，$\psi(f\otimes m)=\sum_{i=0}^{n}(a_im)x^i$ によって定義される A-加群の準同型写像 $\psi\colon A[x]\otimes_A M\to M[x]$ を誘導する．$\phi\circ\psi$ と $\psi\circ\phi$ は恒等写像となるので，ϕ と ψ は $A[x]$-加群の同型写像である．

7. $A/\mathfrak{p}$ は整域であるので，$A[x]/\mathfrak{p}[x] \cong (A/\mathfrak{p})[x]$ は整域である．よって $\mathfrak{p}[x]$ は $A[x]$ の素イデアルである．また，0 は $\mathbb{Q}$ の極大イデアルであるが，$0[x]$ は $\mathbb{Q}[x]$ の極大イデアルではない．
8. i) $0 \to P' \to P \to P'' \to 0$ を任意の A-加群の完全列とすると，M が平坦 A-加群であるので，$0 \to P' \otimes_A M \to P \otimes_A M \to P'' \otimes_A M \to 0$ は完全列である．命題 2.14 ii) の標準的な同型によって次の図式は可換である．

$$\begin{CD}
0 @>>> (P' \otimes_A M) \otimes_A N @>>> (P \otimes_A M) \otimes_A N @>>> (P'' \otimes_A M) \otimes_A N @>>> 0\\
@. @V{\cong}VV @V{\cong}VV @V{\cong}VV @.\\
0 @>>> P' \otimes_A (M \otimes_A N) @>>> P \otimes_A (M \otimes_A N) @>>> P'' \otimes_A (M \otimes_A N) @>>> 0
\end{CD}$$

N は平坦 A-加群より上の行は完全列ゆえ下の行も完全列なので，$M \otimes_A N$ は平坦 A-加群である．

ii) $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ を任意の A-加群の完全列とすると，B が平坦 A-代数であるので，$0 \to M' \otimes_A B \to M \otimes_A B \to M'' \otimes_A B \to 0$ は完全列である．命題 2.14 iv) と演習問題 2.15 より標準的な同型

$$(M \otimes_A B) \otimes_B N \cong M \otimes_A (B \otimes_B N) \cong M \otimes_A N$$

をもつので，次の図式は可換である．

$$\begin{CD}
0 @>>> (M' \otimes_A B) \otimes_B N @>>> (M \otimes_A B) \otimes_B N @>>> (M'' \otimes_A B) \otimes_B N @>>> 0\\
@. @V{\cong}VV @V{\cong}VV @V{\cong}VV @.\\
0 @>>> M' \otimes_A N @>>> M \otimes_A N @>>> M'' \otimes_A N @>>> 0
\end{CD}$$

N は平坦 B-加群より上の行は完全列ゆえ下の行も完全列なので，N は平坦 A-加群である．
9. $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ とおくと，g は全射でかつ $\mathrm{Coker}(f) = M/f(M')$ から M'' への同型写像を誘導する．$x'_1, \ldots, x'_n$ を M' の生成系，$x''_1, \ldots, x''_m$ を M'' の生成系とする．$g(x_i) = x''_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ を満たす $x_i \in M$ をとる．このとき，$x_1, \ldots, x_m, f(x'_1), \ldots, f(x'_n)$ は M の生成系である．実際，N を $x_1, \ldots, x_m, f(x'_1), \ldots, f(x'_n)$ によって生成される M の部分加群とすると，N は $f(M')$ を含み，$x''_1, \ldots, x''_m \in g(N)$ であるから $g(N) = M''$ が成り立つ．ゆえに，g によって $f(M')$ を含んでいる M の部分加群と M'' の部分加群との間には 1 対 1 の順序を保存する対応があるので，$M = N$ を得る．
10. $M/\mathfrak{a}M \to N/\mathfrak{a}N$ が全射であるので，$N = \mathfrak{a}N + u(M)$ となり，系 2.7 より $N = u(M)$ を得る．
11. $\mathfrak{m}$ を A の極大イデアルとし，$\phi\colon A^m \to A^n$ を A-加群の同型写像とする．このとき，$k = A/\mathfrak{m}$ とおくと，命題 2.18 より $1 \otimes \phi\colon k \otimes_A A^m \to k \otimes_A A^n$ は A-加群の同型写像である．一方で命題 2.14 iii) iv) より任意の $r \geqslant 0$ に対して $k \otimes_A A^r \cong (k \otimes_A A)^r \cong k^r$ となるので，$1 \otimes \phi$ は体 k 上の次元が m と n のベクトル空間の間の同型写像である．ゆえに $m = n$ となる．

$\phi\colon A^m \to A^n$ が A-加群の全射ならば，同型の場合と同様に $1 \otimes \phi\colon k \otimes_A A^m \to k \otimes_A A^n$ は体 k 上 m 次元ベクトル空間から n 次元ベクトル空間への全射であることがわかるので，$m \geqslant n$ である．

$\phi\colon A^m \to A^n$ が単射であるとき，$m > n$ と仮定する．A^n を A^m の部分加群

$$\{(a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0) \in A^m \mid a_i \in A\}$$

とみなすことができるので，ϕ は A^m の A-加群の自己準同型写像とみなすことができる．

$$I = \{f(x) \in A[x] \mid f(\phi) = 0\}$$

とおくと，命題 2.4 より $I \neq 0$ である．よって $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_l x^l$ $(a_l \neq 0)$ を $f \in I$ となる最小次数の多項式とし，$p\colon A^m \to A$ を第 m 射影とすると，$0 = p \circ f(\phi) = p \circ (a_0 + a_1\phi + \cdots + a_l\phi^l) = a_0 p$ であるので $a_0 = 0$ となる．ゆえに $0 = f(\phi) = a_1\phi + \cdots + a_l\phi^l = \phi \circ (a_1 + \cdots + a_l\phi^{l-1})$ より ϕ が単射であるので $a_1 + \cdots + a_l\phi^{l-1} = 0$ となる．よって $g = a_1 + \cdots + a_l x^{l-1}$ は $g \in I$ を満たすので，f が $f \in I$ となる最小次数の多項式であることに反する．したがって $m \leqslant n$ が成り立つ．

12. $e_1, \ldots, e_n$ を A^n の基底とし，$\phi(u_i) = e_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ を満たす $u_i \in M$ をとる．このとき，N を $u_1, \ldots, u_n$ によって生成される部分加群とすると，$M \cong \mathrm{Ker}(\phi) \oplus N$ が成り立つ．実際，$\psi(e_i) = u_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ によって $\psi\colon A^n \to M$ を定義すると $\phi \circ \psi = 1_{A^n}$ であり，$x \in M$ に対し $\phi(x - (\psi \circ \phi)(x)) = \phi(x) - (\phi \circ \psi \circ \phi)(x) = 0$ より $x - (\psi \circ \phi)(x) \in \mathrm{Ker}(\phi)$ ゆえ $f(x) = (x - (\psi \circ \phi)(x), (\psi \circ \phi)(x))$ によって $f\colon M \to \mathrm{Ker}(\phi) \oplus N$ を定めると f は同型写像である．それは $x \in \mathrm{Ker}(f)$ に対し $(\psi \circ \phi)(x) = 0$ ゆえ $x = x - (\psi \circ \phi)(x) = 0$ より f は単射であり，$(y, z) \in \mathrm{Ker}(\phi) \oplus N$ に対し $\phi(y) = 0$，$(\psi \circ \phi)(z) = z$ より $f(y + z) = (y + z - (\psi \circ \phi)(y + z), (\psi \circ \phi)(y + z)) = (y, z)$ となるので f は全射だからである．したがって $\mathrm{Ker}(\phi) \cong M/N$ より M が有限生成 A-加群であることから，$\mathrm{Ker}(\phi)$ は有限生成である．
13. $p(b \otimes y) = by$ によって $p\colon N_B \to N$ を定義すると，$(p \circ g)(y) = p(1 \otimes y) = y$ より $p \circ g = 1_N$ ゆえ g は単射である．$x \in N_B$ に対し $p(x - (g \circ p)(x)) = p(x) - (p \circ g \circ p)(x) = 0$ より $x - (g \circ p)(x) \in \mathrm{Ker}(p)$ ゆえ $\phi(x) = ((g \circ p)(x), x - (g \circ p)(x))$ によって $\phi\colon N_B \to \mathrm{Im}(g) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ を定めると ϕ は同型写像である．実際，$x \in \mathrm{Ker}(\phi)$ に対し $(g \circ p)(x) = 0$ ゆえ $x = x - (g \circ p)(x) = 0$ より ϕ は単射であり，$(y, z) \in \mathrm{Im}(g) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ に対し $(g \circ p)(y) = y$，$p(z) = 0$ より $\phi(y + z) = ((g \circ p)(y + z), y + z - (g \circ p)(y + z)) = (y, z)$ となるので ϕ は全射である．したがって $g(B) = \mathrm{Im}(g)$ は N_B の直和因子である．

順極限

14. $i \leqslant j$ のとき $\mu_i = \mu_j \circ \mu_{ij}$ が成り立つことを示す．$x_i \in M_i$ に対し $x_i - \mu_{ij}(x_i) \in D = \mathrm{Ker}(\mu)$ より $\mu_i(x_i) - (\mu_j \circ \mu_{ij})(x_i) = \mu(x_i) - \mu(\mu_{ij}(x_i)) = \mu(x_i - \mu_{ij}(x_i)) = 0$ より $\mu_i = \mu_j \circ \mu_{ij}$ が成り立つ．
15. $x \in M$ に対し μ が全射より，有限集合 $I_0 \subseteq I$ と $x_{i_0} \in M_{i_0}$ $(i_0 \in I_0)$ が存在して $\mu(\sum_{i_0 \in I_0} x_{i_0}) = x$ となる．I は有向集合より任意の $i_0 \in I_0$ に対し $i_0 \leqslant i$ を満たす $i \in I$ が存在する．このとき $x_i = \sum_{i_0 \in I_0} \mu_{i_0 i}(x_{i_0}) \in M_i$ とすると $\mu_i(x_i) = \mu_i(\sum_{i_0 \in I_0} \mu_{i_0 i}(x_{i_0})) = \sum_{i_0 \in I_0} \mu_i(\mu_{i_0 i}(x_{i_0})) = \sum_{i_0 \in I_0} \mu_{i_0}(x_{i_0}) = \sum_{i_0 \in I_0} \mu(x_{i_0}) = \mu(\sum_{i_0 \in I_0} x_{i_0}) = x$ となる．
$\mu_i(x_i) = \mu(x_i) = 0$ ならば $x_i \in \mathrm{Ker}(\mu) = D$ より $x_i = \sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu_{i_k j_k}(x_k))$ $(i_k \leqslant j_k,\ x_k \in M_{i_k})$ と表される．$I_0 = \{i, i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_n\}$ とおくと，I は有向集合より任意の $i_0 \in I_0$ に対し $i_0 \leqslant j$ を満たす $j \in I$ が存在する．また $\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu_{i_k j_k}(x_k)) = \sum_{i_0 \in I_0} y_{i_0}$ $(y_{i_0} \in M_{i_0})$ と表すと，$i_0 \neq i$ のとき $y_{i_0} = 0$ より $\mu_{ij}(x_i) = \sum_{i_0 \in I_0} \mu_{i_0 j}(y_{i_0}) = \sum_{k=1}^{n}(\mu_{i_k j}(x_k) - \mu_{j_k j}(\mu_{i_k j_k}(x_k))) = 0$ となる．
16. (M, μ_i) と (M', μ'_i) を問題文の性質を満たす二つの組とすると，(N, α_i) を (M', μ'_i) によっておきかえることで，唯一の $\mu'\colon M \to M'$ が存在して $\mu'_i = \mu' \circ \mu_i$ を満たす．M と M' の役割を入れかえると，唯一の $\mu\colon M' \to M$ が存在して $\mu_i = \mu \circ \mu'_i$ を満たす．このときすべての $i \in I$ に対して $\mu'_i = \mu' \circ \mu_i = (\mu' \circ \mu) \circ \mu'_i$ を満たし $1_{M'}$ も同じ性質を満たすので一意性によって $\mu' \circ \mu = 1_{M'}$ である．同様にして $\mu \circ \mu' = 1_M$ であるので，M と M' は同型である．
$\alpha_i\colon M_i \to N$ は A-加群の準同型写像 $\overline{\alpha}\colon C \to N$ を誘導し，D の生成元 $x_i - \mu_{ij}(x_i)$ は $\overline{\alpha}(x_i - \mu_{ij}(x_i)) = \alpha_i(x_i) - (\alpha_j \circ \mu_{ij})(x_i) = 0$ となるので，A-加群の準同型写像 $\alpha\colon M \to N$ が誘導され，すべての $i \in I$

に対して $\alpha_i = \alpha \circ \mu_i$ を満たす．M のすべての元はある $i \in I$ とある $x_i \in M_i$ により $\mu_i(x_i)$ という形で表されるので，準同型写像 α は $\alpha_i = \alpha \circ \mu_i$ という条件によって一意的である．

17. すべての i に対し $M_i \subseteq \sum M_i$ より $\bigcup M_i \subseteq \sum M_i$ であり，$\bigcup M_i$ は部分加群であるので $\sum M_i$ がすべての M_i を含む最小の部分加群であることから $\bigcup M_i = \sum M_i$ が成り立つ．$\mu_i \colon M_i \to \bigcup M_i$ を M_i の $\bigcup M_i$ への埋め込みとする．N を A-加群とし，任意の $i \in I$ に対して $\alpha_i \colon M_i \to N$ を A-加群の準同型写像で，$i \leqslant j$ のとき $\alpha_i = \alpha_j \circ \mu_{ij}$ を満たしているものとする．このとき，$\alpha_i = \alpha_j|_{M_i}$ であるので $\alpha \colon \bigcup M_i \to N$ を $\alpha|_{M_i} = \alpha_i$ によって定めると，α はすべての $i \in I$ に対して $\alpha_i = \alpha \circ \mu_i$ となる唯一つの準同型写像となるので，演習問題 16 より $\varinjlim M_i \cong \bigcup M_i$ が成り立つ．任意の A-加群 M はその有限生成部分加群の順極限である．実際，すべての $x \in M$ は x によって生成される M の部分加群に属し，二つの有限生成部分加群の和は有限生成部分加群となることから従う．
18. 任意の $i \in I$ に対して $\alpha \colon M_i \to N$ を $\alpha_i = \nu_i \circ \phi_i$ と定めると，$i \leqslant j$ のとき $\alpha_j \circ \mu_{ij} = \nu_j \circ \phi_j \circ \mu_{ij} = \nu_j \circ \nu_{ij} \circ \phi_i = \nu_i \circ \phi_i = \alpha_i$ を満たすので，演習問題 16 よりすべての $i \in I$ に対して $\alpha_i = \nu_i \circ \phi_i = \phi \circ \mu_i$ を満たす唯一つの準同型写像 $\phi \colon M \to N$ が存在する．
19. $\mathbf{M} = (M_i, \mu_{ij})$，$\mathbf{N} = (N_i, \nu_{ij})$，$\mathbf{P} = (P_i, \pi_{ij})$ とし，$\mu_i \colon M_i \to M$，$\nu_i \colon N_i \to N$，$\pi_i \colon P_i \to P$ をそれぞれ対応している準同型写像とする．また $\mathbf{\Phi} \colon \mathbf{M} \to \mathbf{N}$，$\mathbf{\Psi} \colon \mathbf{N} \to \mathbf{P}$ とおき，$\phi_i \colon M_i \to N_i$，$\psi_i \colon N_i \to P_i$ の族によって定義されるものとする．$\phi = \varinjlim \phi_i$，$\psi = \varinjlim \psi_i$ とする．$x \in M$ に対し，演習問題 15 よりある $i \in I$ とある $x_i \in M_i$ により $x = \mu_i(x_i)$ となる．$M_i \to N_i \to P_i$ は完全列より $\psi_i(\phi_i(x_i)) = 0$ であるので $\psi(\phi(x)) = 0$ となる．ゆえに $\mathrm{Im}(\phi) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi)$ が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, "\mu_i"] & N_i \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "\nu_i"] & P_i \arrow[d, "\pi_i"] \\
M \arrow[r, "\phi"] & N \arrow[r, "\psi"] & P
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x_i \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & {} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & 0 \arrow[d, mapsto] \\
x \arrow[r, mapsto] & {} \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}
$$

$y \in N$ が $\psi(y) = 0$ を満たすとする．演習問題 15 よりある $i \in I$ とある $y_i \in N_i$ により $y = \nu_i(y_i)$ となる．$\pi_i(\psi_i(y_i)) = \psi(\nu_i(y_i)) = \psi(y) = 0$ ゆえ，演習問題 15 より $j \geqslant i$ なる j が存在し，$\pi_{ij}(\psi_i(y_i)) = 0$ となる．$\psi_j(\nu_{ij}(y_i)) = \pi_{ij}(\psi_i(y_i)) = 0$ ゆえ $M_j \to N_j \to P_j$ は完全列より $x_j \in M_j$ が存在し $\phi_j(x_j) = \nu_{ij}(y_i)$ となるので，$\phi(\mu_j(x_j)) = \nu_j(\phi_j(x_j)) = \nu_j(\nu_{ij}(y_i)) = \nu_i(y_i) = y$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
M_i \arrow[rr, "\phi_i"] \arrow[dr, "\mu_{ij}"] & & N_i \arrow[rr, "\psi_i"] \arrow[dr, "\nu_{ij}"] \arrow[dd, "\nu_i"] & & P_i \arrow[dr, "\pi_{ij}"] \arrow[dd, "\pi_i"] & \\
& M_j \arrow[rr, "\phi_j"] \arrow[dl, "\mu_j"] & & N_j \arrow[rr, "\psi_j"] \arrow[dl, "\nu_j"] & & P_j \arrow[dl, "\pi_j"] \\
M \arrow[rr, "\phi"] & & N \arrow[rr, "\psi"] & & P &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& & y_i \arrow[rr, mapsto] \arrow[dr, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & & \psi_i(y_i) \arrow[dr, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & \\
& x_j \arrow[rr, mapsto] \arrow[dl, mapsto] & & \nu_{ij}(y_i) \arrow[rr, mapsto] \arrow[dl, mapsto] & & 0 \arrow[dl, mapsto] \\
\mu_j(x_j) \arrow[rr, mapsto] & & y \arrow[rr, mapsto] & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

ゆえに $\mathrm{Im}(\phi) \supseteq \mathrm{Ker}(\psi)$ が成り立つので，$\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Ker}(\psi)$ より $M \to N \to P$ は完全である．

テンソル積は順極限と可換である

20. 任意の $i \in I$ に対して，$g_i \colon M_i \times N \to M_i \otimes_A N$ を標準的な双線形写像とする．また任意の $i \in I$ に対して $\phi_i \colon M_i \otimes_A N \to P$ を順系 $(M_i \otimes_A N, \mu_{ij} \otimes 1)$ に対応する標準的な準同型写像とし，$\phi'_i \colon M_i \to \mathrm{Hom}(N, P)$ を双線形写像 $\phi_i \circ g_i \colon M_i \times N \to P$ に対応する準同型写像とすると，$i \leqslant j$ のとき $\phi_i = \phi_j \circ (\mu_{ij} \otimes 1)$ から $\phi'_i = \phi'_j \circ \mu_{ij}$ が成り立つので，演習問題 16 よりすべての $i \in I$

に対して $\phi'_i = \phi' \circ \mu_i$ を満たす唯一つの準同型写像 $\phi'\colon M \to \mathrm{Hom}(N, P)$ が存在する．ゆえに A-双線形 $g\colon M \times N \to P$ が得られ，準同型写像 $\phi\colon M \otimes_A N \to P$ が定義される．$\phi'_i = \phi' \circ \mu_i$ より $\phi_i = \phi \circ (\mu_i \otimes 1)$ が成り立ち，さらに $z \in P$ に対して，演習問題 15 よりある $i \in I$ とある $z_i \in M_i \otimes_A N$ により $z = \phi_i(z_i)$ と表されるので，

$$(\phi \circ \psi)(z) = \phi(\psi(\phi_i(z_i))) = \phi((\mu_i \otimes 1)(z_i)) = \phi_i(z_i) = z$$

となる．$x \in M$ に対して，演習問題 15 よりある $i \in I$ とある $x_i \in M_i$ により $x = \mu_i(x_i)$ で表され，

$$(\psi \circ \phi)(x \otimes y) = \psi(\phi((\mu_i \otimes 1)(x_i \otimes y))) = \psi(\phi_i(x_i \otimes y)) = (\mu_i \otimes 1)(x_i \otimes y) = x \otimes y$$

となる．よって $x \otimes y$ の形全体は $M \otimes_A N$ を生成するので，$\psi \circ \phi$ と $\psi \circ \phi$ は恒等写像である．

21. $\alpha_i\colon A_i \to A$ を自然な写像とする．$x, y \in A$ に対し，演習問題 15 よりある $i, j \in I$ とある $x_i \in A_i$，$y_j \in A_j$ により $x = \alpha_i(x_i)$，$y = \alpha_j(y_j)$ と表される．さらに I は有向集合であるので，$i \leqslant k$ かつ $j \leqslant k$ を満たす $k \in I$ が存在する．よって $x_k = \alpha_{ik}(x_i)$，$y_k = \alpha_{jk}(y_j)$ とするとき，積 xy を

$$xy = \alpha_k(x_k y_k)$$

と定義する．I が有向集合であることと演習問題 15 よりこの定義は k と x, y の代表元の選び方には依存しないことがわかる．この積により A は環であり α_i が環準同型写像であることは明らかである．$A = 0$ であるとき $i \in I$ を固定する[*2]．$\alpha_i(1_{A_i}) = 1_A = 0_A$ より $j \geqslant i$ なる j が存在し，$\alpha_{ij}(1_{A_i}) = 0_{A_j}$ であり α_{ij} は環準同型より $1_{A_j} = 0_{A_j}$ となるので $A_j = 0$ となる．

22. 任意の $i \in I$ に対して $0 \to \mathfrak{N}_i \to A_i$ は完全ゆえ，演習問題 19 より $0 \to \varinjlim \mathfrak{N}_i \to \varinjlim A_i$ は完全である．よって $\varinjlim \mathfrak{N}_i$ は $\varinjlim A_i$ の部分加群とみなせ $\mathfrak{N}_i \to \varinjlim \mathfrak{N}_i$ は $\alpha_i\colon A_i \to \varinjlim A_i$ の制限写像となる．$x \in \varinjlim \mathfrak{N}_i$ に対し，演習問題 15 よりある $i \in I$ とある $x_i \in \mathfrak{N}_i$ により $x = \alpha_i(x_i)$ と表される．よってある $n > 0$ が存在して $x_i^n = 0$ より $x^n = \alpha_i(x_i^n) = 0$ ゆえ x は $\varinjlim A_i$ のベキ零元となる．逆に x が $\varinjlim A_i$ のベキ零元のとき，ある $n > 0$ が存在して $x^n = 0$ であり，演習問題 15 よりある $i \in I$ とある $x_i \in A_i$ により $x = \alpha_i(x_i)$ と表される．よって $\alpha_i(x_i^n) = \alpha_i(x_i)^n = x^n = 0$ ゆえ，演習問題 15 より $j \geqslant i$ なる j が存在し，$\alpha_{ij}(x_i^n) = 0$ となる．ゆえに $\alpha_{ij}(x_i)^n = \alpha_{ij}(x_i^n) = 0$ より $\alpha_{ij}(x_i) \in \mathfrak{N}_j$ となるので $x = \alpha_i(x_i) = \alpha_j(\alpha_{ij}(x_i)) \in \varinjlim \mathfrak{N}_i$ となる．したがって $\varinjlim \mathfrak{N}_i$ は $\varinjlim A_i$ のベキ零元根基である．
任意の A_i が整域であるとする．$x, y \in \varinjlim A_i$ が $xy = 0$ を満たすとする．演習問題 15 よりある $i \in I$ とある $x_i, y_i \in A_i$ により $x = \alpha_i(x_i)$，$y = \alpha_i(y_i)$ と表される．このとき $\alpha_i(x_i y_i) = \alpha_i(x_i)\alpha_i(y_i) = xy = 0$ ゆえ，演習問題 15 よりある $j \geqslant i$ なる j が存在し，$\alpha_{ij}(x_i y_i) = 0$ となる．よって $\alpha_{ij}(x_i)\alpha_{ij}(y_i) = \alpha_{ij}(x_i y_i) = 0$ であり A_j が整域であることから $\alpha_{ij}(x_i) = 0$ または $\alpha_{ij}(y_i) = 0$ となる．よって $x = \alpha_i(x_i) = \alpha_j(\alpha_{ij}(x_i))$，$y = \alpha_i(y_i) = \alpha_j(\alpha_{ij}(y_i))$ より $x = 0$ または $y = 0$ となる．したがって $\varinjlim A_i$ は整域である．

23. $J = \{j_1, \ldots, j_n\}$，$J' = \{j_1, \ldots, j_n, j_{n+1}, \ldots, j_{n'}\}$ とする．A-代数の準同型写像 $\beta_{JJ'}\colon B_J \to B_{J'}$ は $\beta_{JJ'}(b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) = b_1 \otimes \cdots \otimes b_n \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$ によって定まる．$\beta_J\colon B_J \to B$ を自然な環準同型写像とするとき，$\beta_{JJ'}\colon B_J \to B_{J'}$ が A-代数の準同型写像であることから，環 B には環準同型写像 $A \to B_J \to B$ によって A-代数の構造が入り，$\beta_J\colon B_J \to B$ は A-代数の準同型写像である．

[*2] 普遍性により $I = \emptyset$ ならば $\varinjlim_{i \in I} A_i$ は環の圏の始対象 $\mathbb{Z}$ であるので，$A = \varinjlim_{i \in I} A_i = 0 \neq \mathbb{Z}$ ならば $I \neq \emptyset$ である．

平坦性とトーション関手

Tor の定義およびその性質については例えば [4, 5] などを参照されたい．

24. i) $\Longrightarrow$ ii)

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

を N の自由分解とする．M は平坦より

$$\cdots \longrightarrow M \otimes_A F_n \longrightarrow M \otimes_A F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M \otimes_A F_0 \longrightarrow M \otimes_A N \longrightarrow 0$$

は完全列となる．よって $n > 0$ のとき $\mathrm{Tor}_n^A(M, N) = 0$ である．

ii) $\Longrightarrow$ iii)　明らか．

iii) $\Longrightarrow$ i)　$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ を完全列とする．このとき，

$$\mathrm{Tor}_1(M, N'') \longrightarrow M \otimes_A N' \longrightarrow M \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N'' \longrightarrow 0$$

は完全列となる．$\mathrm{Tor}_1(M, N'') = 0$ であるから，M は平坦となる．

25. すべての A-加群 M に対して，

$$\mathrm{Tor}_2^A(M, N'') \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M, N') \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^A(M, N'')$$

は完全列となる．演習問題 24 より $\mathrm{Tor}_2^A(M, N'') = \mathrm{Tor}_1^n(M, N'') = 0$ であるから，演習問題 24 より

$$\begin{aligned} N' \text{ は平坦である} &\iff \text{すべての } A\text{-加群 } M \text{ に対して，} \mathrm{Tor}_1^A(M, N') = 0 \\ &\iff \text{すべての } A\text{-加群 } M \text{ に対して，} \mathrm{Tor}_1^A(M, N) = 0 \iff N \text{ は平坦である} \end{aligned}$$

が成り立つ．

26. $(\Longrightarrow)$　演習問題 24 より明らか．

$(\Longleftarrow)$　すべての有限生成 A-加群 M に対して $\mathrm{Tor}_1(M, N) = 0$ ならば N は平坦であることを示す．$f\colon M' \to M$ が単射で，M と M' が有限生成のとき，$0 \to M' \to M \to \mathrm{Coker}(f) \to 0$ は完全列より

$$\mathrm{Tor}_1(\mathrm{Coker}(f), N) \longrightarrow M' \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes_A N$$

は完全列であり，$\mathrm{Coker}(f)$ は有限生成なので $\mathrm{Tor}_1(\mathrm{Coker}(f), N) = 0$ となり $f \otimes 1$ は単射である．よって命題 2.19 より N は平坦である．次にすべての巡回 A-加群 M に対して $\mathrm{Tor}_1(M, N) = 0$ ならば N が平坦であることを示す．M を有限生成とするとき，$x_1, \dots, x_n$ を M の生成系とし，M_i を $x_1, \dots, x_i$ によって生成される部分加群とする．$0 \to M_{i-1} \to M_i \to M_i/M_{i-1} \to 0$ は完全列より

$$\mathrm{Tor}_1(M_{i-1}, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(M_i, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(M_i/M_{i-1}, N)$$

は完全列であり，M_i/M_{i-1} は巡回 A-加群より $\mathrm{Tor}_1(M_i/M_{i-1}, N) = 0$ である．M_1 が巡回 A-加群より帰納的に $\mathrm{Tor}_1(M_i, N) = 0$ となるので $\mathrm{Tor}_1(M, N) = 0$ となり N は平坦である．よって巡回 A-加群 M はあるイデアル $\mathfrak{a}$ によって $M \cong A/\mathfrak{a}$ であり，$0 \to \mathfrak{a} \to A \to A/\mathfrak{a} \to 0$ は完全列より

$$\mathrm{Tor}_1(A, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1(A/\mathfrak{a}, N) \longrightarrow \mathfrak{a} \otimes_A N \longrightarrow A \otimes_A N$$

は完全列であり，A は平坦より $\mathrm{Tor}_1(A,N)=0$ となる．このことから A のすべてのイデアル $\mathfrak{a}$ に対し $\mathfrak{a}\otimes_A N\to A\otimes_A N$ が単射ならば $\mathrm{Tor}_1(A/\mathfrak{a},N)=0$ より N は平坦であることが従う．ゆえに $\mathfrak{a}$ が有限生成イデアルの場合に帰着すれば良いが，命題 2.19 の iv) $\Longrightarrow$ iii) の証明と同様である．

27. i) $\Longrightarrow$ ii)　$x\in A$ とする．このとき $A/(x)$ は平坦 A-加群であるので，$\alpha\colon (x)\otimes_A(A/(x))\to A/(x)$ は単射である．さらに $\mathrm{Im}(\alpha)=0$ となるので $(x)\otimes_A(A/(x))=0$ であり，演習問題 2 より $(x)/(x^2)\cong(x)\otimes_A(A/(x))=0$ となるので $(x)=(x^2)$ であることが従う．
ii) $\Longrightarrow$ iii)　$x\in A$ とする．このとき，$(x)=(x^2)$ よりある $a\in A$ によって $x=ax^2$ となるので $e=ax$ とすると，$e^2=a^2x^2=ax=e$ となり e はベキ等元である．また $x=ax^2=ex$ より $(e)=(x)$ となる．$e,f\in A$ をベキ等元とすると，第 1 章，演習問題 11 iii) と同様に $(e,f)=(e+f-ef)$ が成り立つ．ゆえにすべての有限生成イデアルは単項であり，ベキ零元 e によって生成される．よって第 1 章，演習問題 22 iii) $\Longrightarrow$ ii) と同様に $A\cong(e)\oplus(1-e)$ が成り立つので，(e) は A の直和因子である．
iii) $\Longrightarrow$ i)　N を A-加群とする．A のすべての有限生成イデアル $\mathfrak{a}$ に対し $p\colon A\to\mathfrak{a}$ を射影とする．$x\in A$ に対し $\phi(x)=(p(x),\bar{x})$ によって $\phi\colon A\to\mathfrak{a}\oplus(A/\mathfrak{a})$ を定めると ϕ は同型写像である．実際，$x\in\mathrm{Ker}(\phi)$ に対し $x\in\mathfrak{a}$ であり $p(x)=0$ ゆえ $x=0$ より ϕ は単射であり，$(y,\overline{z})\in\mathfrak{a}\oplus(A/\mathfrak{a})$ に対し $p(y)=y$，$p(p(z))=p(z)$ より $\phi(y+z-p(z))=(p(y+z-p(z)),\overline{y+z-p(z)})=(y,\overline{z})$ となるので ϕ は全射であるので，ϕ は同型写像となる[*3]．よって $A\cong\mathfrak{a}\oplus(A/\mathfrak{a})$ で A が平坦より，演習問題 4 から $A/\mathfrak{a}$ は平坦ゆえ $\mathrm{Tor}_1(A/\mathfrak{a},N)=0$ となる．よって演習問題 26 より N は平坦である．

28. ブール環はすべての元がベキ等元であるので，すべての単項イデアルはベキ等である．よって演習問題 27 よりブール環は絶対平坦である．第 1 章，演習問題 7 の環 A は $x\in A$ に対しある整数 $n>1$ が存在して $x^n=x$ を満たす．よって $x=x^n=x^{n-2}x^2$ より $(x)=(x^2)$ が成り立つので A は絶対平坦である．絶対平坦である環 A の準同型写像による像が絶対平坦であることは，すべての A のイデアル $\mathfrak{a}$ に対し $A/\mathfrak{a}$ が絶対平坦であることを示せばよい．$A/\mathfrak{a}$ の単項イデアル $(\overline{x})$ に対し，演習問題 27 より A の単項イデアル (x) はベキ等であるので，$(\overline{x})$ もベキ等となる．ゆえに演習問題 27 から $A/\mathfrak{a}$ は絶対平坦である．局所環 A が絶対平坦であるとき，A の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とする．$x\in\mathfrak{m}$ に対し，演習問題 27 i) $\Longrightarrow$ ii) よりベキ等元 $e\in A$ が存在して $(e)=(x)$ となるので，第 1 章，演習問題 12 より $e=0,1$ となる．$e\in\mathfrak{m}$ より $e=0$ となるので $x=0$ となる．よって $\mathfrak{m}=0$ となり A は体である．
A が絶対平坦であるとき $x\in A$ を非単元とすると，演習問題 27 より $(x)=(x^2)$ ゆえある $a\in A$ が存在して $x=ax^2$ より $x(1-ax)=0$ となる．x は非単元より $1-ax\neq 0$ ゆえ x は零因子である．

参考文献

[1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald. Atiyah-MacDonald 可換代数入門. 共立出版, 2006. 新妻弘 訳.

[2] N. Bourbaki. 可換代数 1. ブルバキ数学原論 / ブルバキ [著]. 東京図書, 1971. 木下素夫 訳.

[3] Jeffrey D. Carlson. jdk carlson: Exercises to Atiyah and Macdonald's Introduction to Commutative Algebra, 2019 palingenesis. https://math.sci.uwo.ca/~jcarlso6/intro_comm_alg(2019).pdf.

[4] 河田敬義. ホモロジー代数. 岩波基礎数学選書 / 小平邦彦監修 ; 岩堀長慶 [ほか] 編集. 岩波書店, 1990.

[5] 志甫淳. 層とホモロジー代数. 共立講座 数学の魅力, No. 5. 共立出版, 2016.

[*3] 完全列の分裂に関する性質を用いると直ちに言えることである．演習問題 12，演習問題 13 についても同様である．