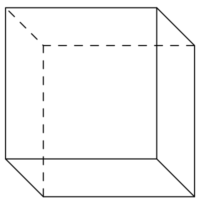
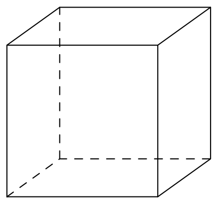
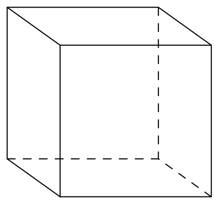
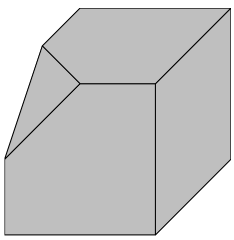
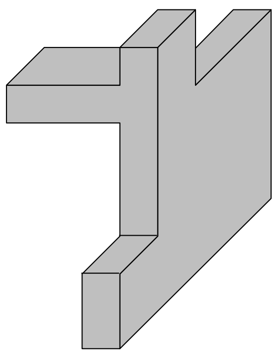
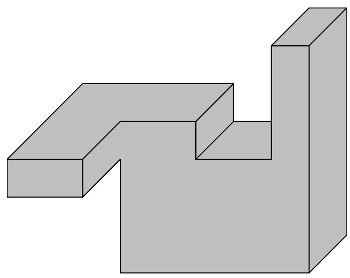
Géométrie analytique dans l'espace
MATH64

F. LANCEREAU

14 novembre 2012

Table des matières

Chapitre 2

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

2.1 Rappels

2.1.1 Généralités

Axiomes d'incidence

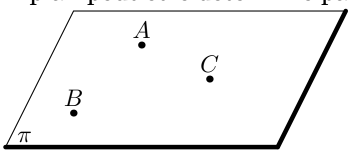
Les axiomes d'incidence de la géométrie dans l'espace sont des axiomes qui fournissent des relations entre les points, les droites et les plans de cette géométrie.

Axiomes

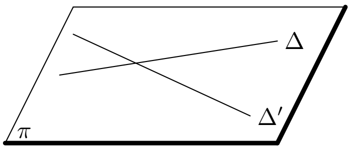
– Par deux points distincts A et B de l'espace il passe une et une seule droite. Cette droite peut être notée Δ, d_{AB} ou encore (AB).
– Étant donnés deux points A et B, il existe C tel que A, B et C ne soient pas alignés. Par ces trois points, il passe un et un seul plan. Ce plan peut être noté π, ψ, π_{ABC}, ψ_{ABC} ou encore (ABC).
– Si A et B sont deux points d'un plan π, tous les points de la droite d_{AB} appartiennent au plan π. La droite d_{AB} est incluse dans π ($d_{AB} \subset \pi$)

Conséquence

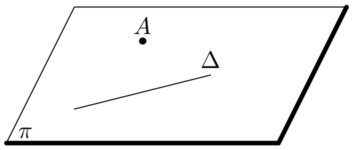
Un plan peut être déterminé par l'une des conditions suivantes :



Trois points non alignés



Deux droites sécantes



Une droite et un point

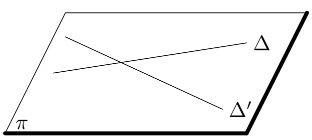
2.1.2 Positions relatives de droites et plans

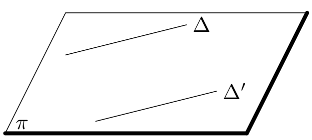
Deux droites

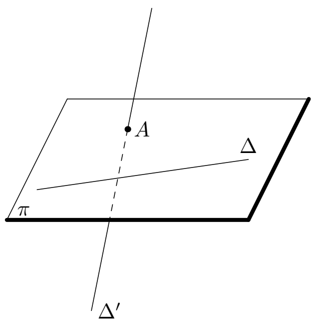
On considère deux droites de l'espace.

Définition

– s'il existe un plan contenant ces deux droites on dit qu'elles sont coplanaires. Elles sont alors sécantes ou parallèles.
– s'il n'existe pas de plan contenant ces deux droites on dit qu'elles sont non coplanaires.





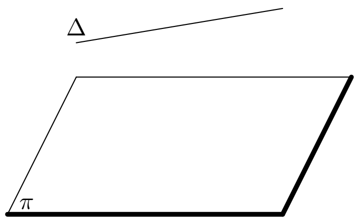


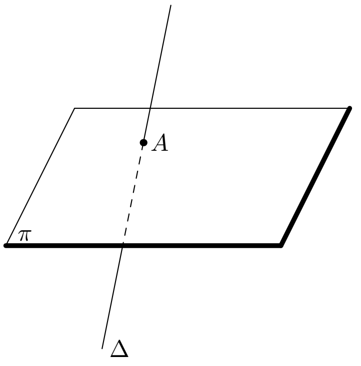
Une droite et un plan

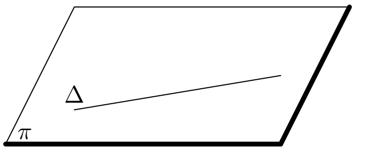
On considère une droite et un plan de l'espace.

Propriété

- s'ils n'ont aucun point commun, la droite est strictement parallèle au plan.
- s'ils ont un unique point commun, la droite et le plan sont sécants.
- s'ils ont plus d'un point commun, la droite est incluse dans le plan.





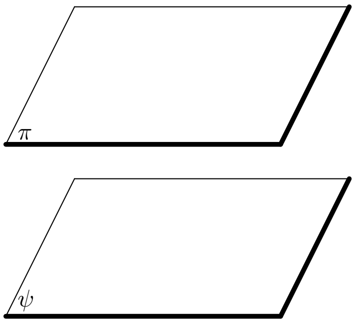


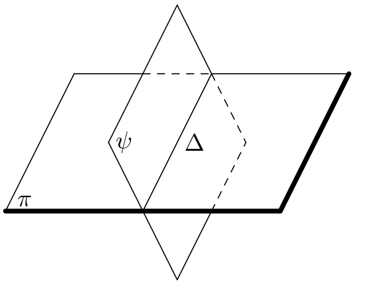
Deux plans

On considère deux plans de l'espace.

Propriété

- s'ils n'ont aucun point commun, les plans sont parallèles.
- s'ils ont au moins un point commun mais sont distincts, les plans sont sécants et leur intersection est une droite.
- s'ils ont trois points commun non alignés, les plans sont confondus.



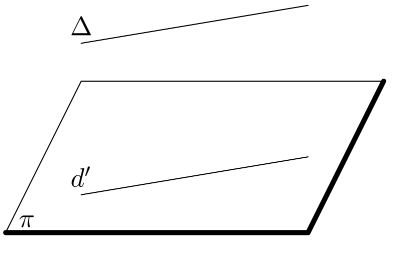


2.1.3 Parallélisme

Une droite et un plan

Propriété

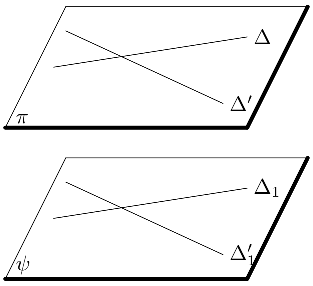
Si une droite Δ est parallèle à une droite d' alors la droite Δ est parallèle à tout plan contenant d'.



Deux plans

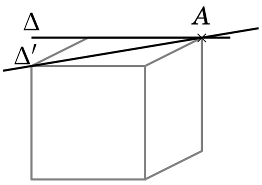
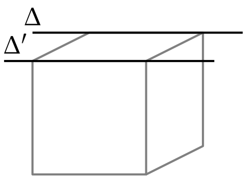
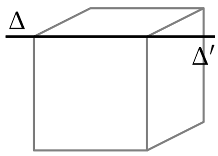
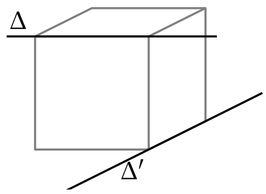
Propriété

Si deux droites sécantes d'un plan π sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan ψ, alors les plans π et ψ sont parallèles.

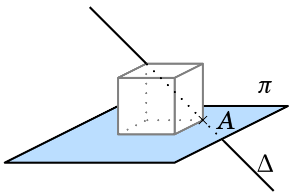
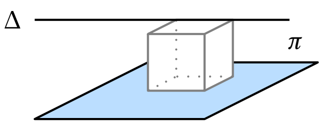
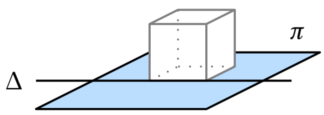


2.1.4 A retenir

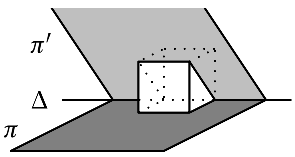
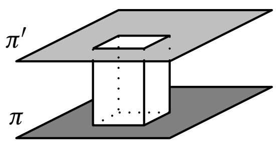
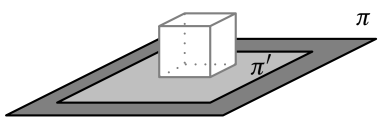
⊛ Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.

Coplanaires (dans un même plan)			**Non coplanaires**
Δ et Δ' sécantes	Δ et Δ' parallèles		
			
Δ et Δ' ont un point d'intersection A.	Δ et Δ' sont strictement parallèles.	Δ et Δ' sont confondues.	Aucun plan ne contient à la fois Δ et Δ'.
$\Delta \cap \Delta' = \{A\}$	$\Delta \cap \Delta' = \emptyset$	$\Delta \cap \Delta' = \Delta = \Delta'$	$\Delta \cap \Delta' = \emptyset$

⊛ Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

Sécants	**Parallèles**	
		
Δ et π ont un point d'intersection A.	Δ et π sont strictement parallèles.	Δ est contenue dans π
$\Delta \cap \pi = \{A\}$	$\Delta \cap \pi = \emptyset$	$\Delta \cap \pi = \Delta$

⊛ Deux plans de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

Sécants	**Parallèles**	
		
π et π' ont une droite d'intersection Δ.	π et π' sont strictement parallèles.	π et π' sont confondus
$\pi \cap \pi' = \Delta$	$\pi \cap \pi' = \emptyset$	$\pi \cap \pi' = \pi = \pi'$

Propriété

- Contrairement au plan, deux droites de l'espace n'ayant pas de point en commun ne sont pas forcément parallèles.
- Des droites strictement parallèles sont des droites **coplanaires et qui n'ont aucun point en commun**.
- On peut définir un plan de plusieurs manières :
  - par la donnée de trois points ;
  - par la donné de deux droites sécantes ;
  - par la donnée de deux droites strictement parallèles ;
  - par la donnée d'une droite et d'un point n'appartenant par à cette droite.

Une droite Δ et un plan π sont parallèles s'ils ne sont pas sécants. On note alors $\Delta \mathbin{/\!/} \pi$ ou $\pi \mathbin{/\!/} \Delta$.
Deux plans π et π' sont parallèles lorsqu'ils ne sont pas sécants. On note $\pi \mathbin{/\!/} \pi'$.

Méthode

- Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de montrer que les trois points appartiennent à deux plans sécants : comme l'intersection de deux plans sécants est une droite, cela implique que les points sont tous les trois sur cette droite.
- Pour trouver la droite d'intersection de deux plans, il suffit de trouver deux points distincts qui appartiennent aux deux plans : la droite d'intersection est alors celle qui passe par ces deux points. Ces points sont en général des points d'intersection de droites sécantes, l'une contenue dans l'un des plans, l'autre dans l'autre plan.

2.2 Vecteur de l'espace

Les définitions et opérations sur les vecteurs du plan se généralisent dans l'espace

Propriété

- Pour tout point O de l'espace et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point A tel que
$$\overrightarrow{OA} = \vec{u}$$
- Pour tous points A, B, C et D de l'espace,
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \text{ABCD est un parallélogramme}$$
- Pour tous points A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles)
- La définition du produit d'un vecteur par un réel ainsi que les règles de calcul sont les mêmes que celles du plan.

2.2.1 Vecteurs colinéaires

Définition

Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie, qu'ils ont la même direction, c'est-à-dire qu'il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$.

Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

Interprétation géométrique

- Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Les droites d_{AB} et d_{CD} sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Caractérisation vectorielle d'une droite

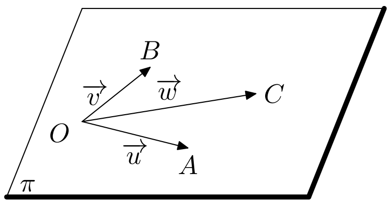
Propriété

- Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
$$\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{u} \text{ où } \lambda \text{ est un réel}$$
- Soient A et B deux points de l'espace.
La droite d_{AB} est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

2.2.2 Vecteurs coplanaires

Définition

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels λ et μ tels que :
$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$



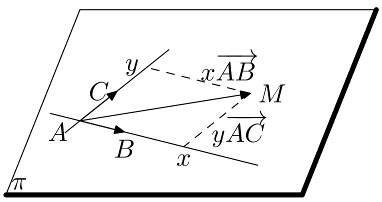
Conséquence

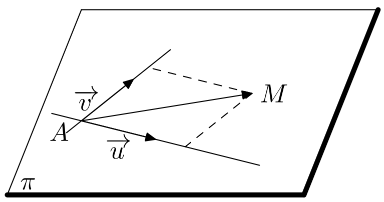
Pour démontrer qu'un point D appartient à un plan π défini par trois points non alignés A, B et C on montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Caractérisation vectorielle d'un plan

Propriété

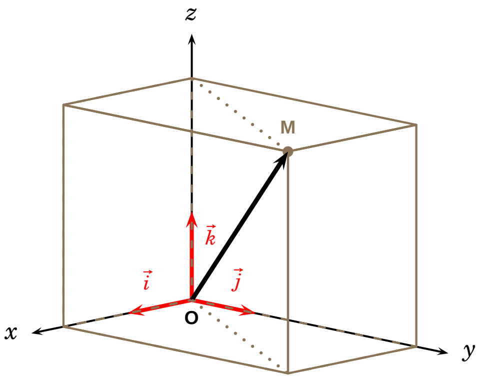
- Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace.
Le plan π_{ABC} est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
- Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$ où x et y sont des réels est un plan que l'on note $(A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.





2.3 Repérage dans l'espace

2.3.1 Coordonnées d'un point



Dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, pour tout point M, il existe un unique triplet $(x_M;y_M;z_M)$ de réels tels que

$$\overrightarrow{OM} = x_M\cdot\vec{i} + y_M\cdot\vec{j} + z_M\cdot\vec{k}$$

$(x_M\ ;\ y_M\ ;\ z_M)$ est le triplet de coordonnées du point M (ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$).
x_M est l'abscisse, y_M est l'ordonnée, z_M est la cote.

Dans cette représentation, le point M a pour coordonnées $(4\ ;\ 7\ ;\ 5)$. Par ailleurs, $\overrightarrow{OM} = 4\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$

2.3.2 Calculs avec les coordonnées

Définition

Dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{u}\,(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et $\vec{v}\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$.
- $\vec{u} = \vec{v}$ si, et seulement si, $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.
- Le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\left(x + x'\ ;\ y + y'\ ;\ z + z'\right)$.
- Pour tout réel λ, $\lambda\cdot\vec{u} = (\lambda.x\ ;\ \lambda.y\ ;\ \lambda.z)$.

Soit $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ deux points de l'espace :
- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A\ ;\ z_B - z_A)$.
- le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_B}{2}\ ;\ \frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

Distance dans un repère orthonormé

Définition

Dans un repère **orthonormal** $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$,
- La distance entre les points $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ est donnée par

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

- Deux vecteurs $\vec{u}(u_x\,;u_y\,;u_z)$ et $\vec{v}(v_x\,;v_y\,;v_z)$ sont orthogonaux si, et seulement si,

$$u_x\cdot v_x + u_y\cdot v_y + u_z\cdot v_z = 0$$

Vecteurs colinéaires

Définition

Les vecteurs $\vec{u}(u_x\,;u_y\,;u_z)$ et $\vec{v}(v_x\,;v_y\,;v_z)$ sont colinéaires lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_0$ tel que

$$\begin{cases} u_x = \lambda\cdot v_x \\ u_y = \lambda\cdot v_y \\ u_z = \lambda\cdot v_z \end{cases}$$

Vecteurs coplanaires

Définition

Les vecteurs $\vec{u}(u_x\,;u_y\,;u_z)$, $\vec{v}(v_x\,;v_y\,;v_z)$ et $\vec{w}(w_x\,;w_y\,;w_z)$ sont coplanaires lorsqu'il existe λ, $\mu \in \mathbb{R}_0$ tel que

$$\begin{cases} w_x = \lambda\cdot u_x + \mu\cdot v_x \\ w_y = \lambda\cdot u_y + \mu\cdot v_y \\ w_z = \lambda\cdot u_z + \mu\cdot v_z \end{cases}$$

♢ EXEMPLE : Montrons en premier lieu que les vecteurs $\vec{u}(0;4;-2)$, $\vec{v}(3;-1;2)$ et $\vec{w}(3;7;-2)$ sont coplanaires.

On vérifie que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont pas colinéaires puis on recherche des réels λ et μ vérifiant :

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

1. $\vec{u} = \lambda\cdot\vec{v} \iff \begin{cases} 0 = 3\lambda \\ 4 = -\lambda \\ -2 = 2\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -4 \\ \lambda = -1 \end{cases}$ Comme λ ne peut être simultanément égal à 0, -4 et -1, on en conclut la non-colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

2. $\vec{w} = \lambda\cdot\vec{u} + \mu\cdot\vec{v} \iff \begin{cases} 3 = 3\mu \\ 7 = 4\lambda - \mu \\ -2 = -2\lambda + 2\mu \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 1 \\ 7 = 4\lambda - 1 \\ -2 = -2\lambda + 2\mu \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda = 2 \\ -2 = -2\lambda + 2\mu \end{cases}$

   Les vecteurs seront coplanaires si λ et μ sont aussi solutions de la troisième équation. C'est le cas puisque :

$$-2 = -2\cdot(2) + 2\cdot(1)$$

2.4 Représentation paramétrique

Soient une droite vectorielle $d(A,\vec{u})$ et un plan vectoriel $\pi(A;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ avec le point d'ancrage $A(x_A;y_A;z_A)$ et les vecteurs directeurs $\vec{u}(u_x,u_y,u_z)$, $\vec{v}(v_x,v_y,v_z)$ donnés. Alors :

$M(x,y,z) \in d$

$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$\exists\,\lambda \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AM} = \lambda\cdot\vec{u}$

$\exists\,\lambda \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} x = x_A + \lambda\cdot u_x \\ y = y_A + \lambda\cdot u_y \\ z = z_A + \lambda\cdot u_z. \end{cases}$

$M(x,y,z) \in \pi$

$\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires

$\exists\,\lambda,\mu \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AM} = \lambda\cdot\vec{u} + \mu\cdot\vec{v}$

$\exists\,\lambda,\mu \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} x = x_A + \lambda\cdot u_x + \mu\cdot v_x \\ y = y_A + \lambda\cdot u_y + \mu\cdot v_y \\ z = z_A + \lambda\cdot u_z + \mu\cdot v_z. \end{cases}$

Ce système est appelé *représentation paramétrique de d* (resp. π).

Définition

Ci-dessous, les systèmes d'équations paramétriques d'une droite d et d'un plan π

$$d \equiv \begin{cases} x = x_A + \lambda\cdot u_x \\ y = y_A + \lambda\cdot u_y \\ z = z_A + \lambda\cdot u_z. \end{cases} \qquad \pi \equiv \begin{cases} x = x_A + \lambda\cdot u_x + \mu\cdot v_x \\ y = y_A + \lambda\cdot u_y + \mu\cdot v_y \\ z = z_A + \lambda\cdot u_z + \mu\cdot v_z. \end{cases}$$

♢ EXEMPLE : La coordonnée du vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $d \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 5 - 3\lambda \end{cases}$ est $\vec{u}(1\ ;\ 2\ ;\ -3)$. Un point d'ancrage évident est $A(0\ ;\ -1\ ;\ 5)$. Par ailleurs, le point $B(2\ ;\ 3\ ;\ -1)$ appartient aussi à cette droite ! (le justifier)

♢ EXEMPLE : Les représentations paramétriques suivantes définissent le même plan :

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 1 - \lambda - \mu \end{cases} \text{ et } \pi' \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\alpha - \beta \\ y = 3 + 3\alpha + \beta \\ z = 1 - 2\alpha \end{cases}$$

Il suffit de vérifier que trois points appartenant au premier plan se situent également dans le second

2.5 Équations cartésiennes de l'espace

2.5.1 Équation d'un plan

Définition

- Un plan de l'espace a une équation cartésienne de la forme
$$ax + by + cz + d = 0$$
avec a, b et c des réels non tous nuls.
- Réciproquement, toute équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où l'un au moins des réels a, b et c n'est pas nul, est une équation cartésienne d'un plan.

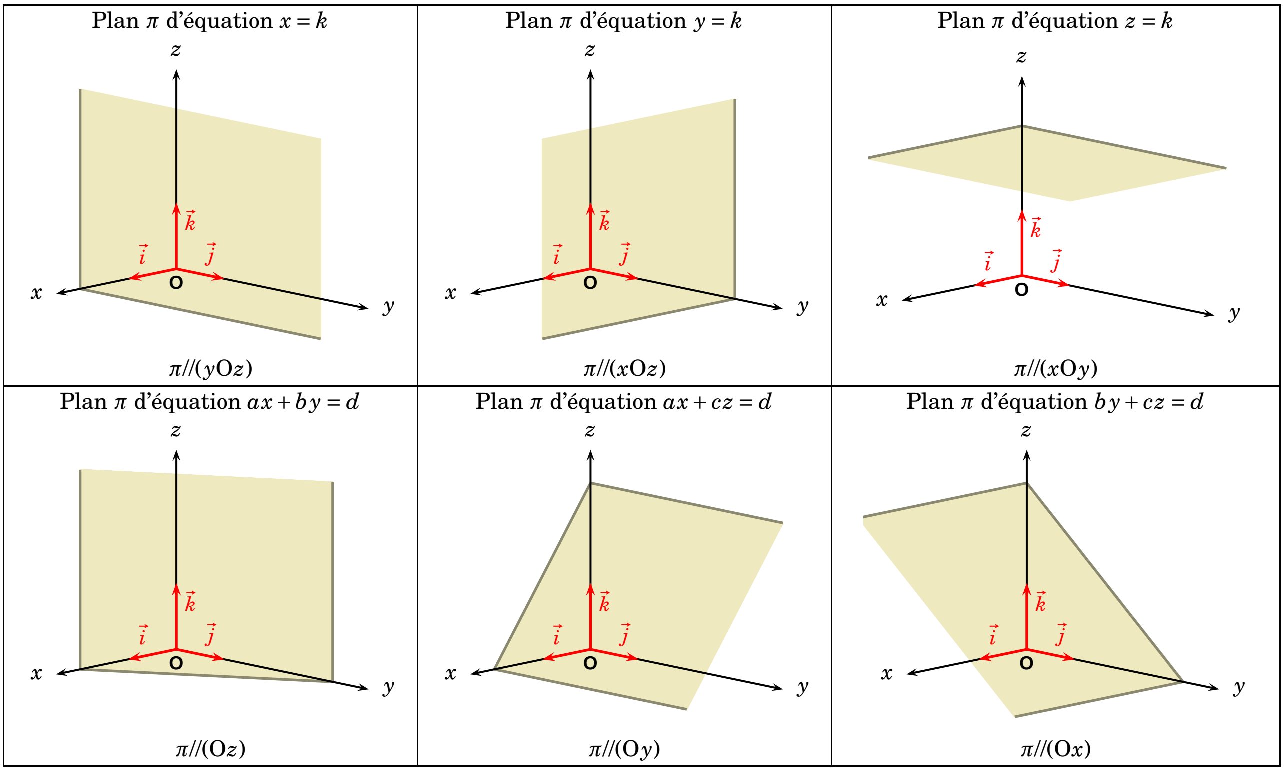
Plans particuliers

Un plan admettant une équation « incomplète », c'est à dire dans laquelle ne figure qu'une ou deux des trois variables x, y et z, est parallèle à un plan de coordonnées ou à un axe de coordonnées.

◇ **Exemple :**
- le plan (xOy) admet $z = 0$ comme équation cartésienne ;
- le plan (zOy) admet $x = 0$ comme équation cartésienne ;
- Le plan (xOz) admet $y = 0$ comme équation cartésienne.

◇ **Exemple :**
- tout plan parallèle à (xOy) admet $z = d$ comme équation cartésienne ;
- tout plan parallèle à (zOy) admet $x = d$ comme équation cartésienne ;
- tout plan parallèle à (xOz) admet $y = d$ comme équation cartésienne.

◇ **Exemple :**
- tout plan parallèle à (Ox) admet pour équation $by + cz = d$ avec $(b;c) \neq (0;0)$
- tout plan parallèle à (Oy) admet pour équation $ax + cz = d$ avec $(a;c) \neq (0;0)$
- tout plan parallèle à (Oz) admet pour équation $ax + by = d$ avec $(a;b) \neq (0;0)$



Déterminer une équation cartésienne d'un plan

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, montrer que les points $A(1;0;3)$, $B(1;-1;0)$ et $C(-1;-2;1)$ définissent un plan et déterminer une équation de ce plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}(0;-1;-3)$ et $\overrightarrow{AC}(-2;-2;-2)$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés, ils définissent un plan (ABC).
On peut déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) par deux méthodes :

1. Une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme

$$ax+by+cz=d$$

où a, b, c et d sont des réels.

$$\begin{array}{lcr} A(1;0;3)\in(ABC) & \Longleftrightarrow & a+3c=d \\ B(1;-1;0)\in(ABC) & \Longleftrightarrow & a-b=d \\ C(-1;-2;1)\in(ABC) & \Longleftrightarrow & -a-2b+c=d \end{array}$$

Ainsi, a, b et c sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+3c &=& d \\ a-b &=& d \\ -a-2b+c &=& d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c &=& \dfrac{d-a}{3} \\ b &=& a-d \\ -a-2(a-d)+\dfrac{d-a}{3} &=& d \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c &=& \dfrac{d-a}{3} \\ b &=& a-d \\ -\dfrac{10a}{3} &=& -\dfrac{4d}{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} c &=& \dfrac{d}{5} \\ b &=& -\dfrac{3d}{5} \\ a &=& \dfrac{2d}{5} \end{array}\right.$$

En choisissant, $d=5$ on obtient $a=2$, $b=-3$ et $c=1$ donc le plan (ABC) a pour équation

$$2x-3y+z=5$$

2. $M(x;y;z)$ est un point du plan (ABC) si, et seulement si, les points A, B, C et M sont coplanaires. C'est à dire, si et seulement si, il existe deux réels α et β tels que

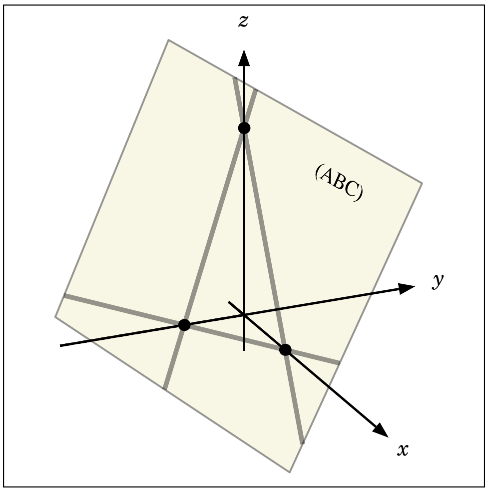
$$\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$

Or $\overrightarrow{AM}(x-1;y;z-3)$, $\overrightarrow{AB}(0;-1;-3)$ et $\overrightarrow{AC}(-2;-2;-2)$ d'où

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& -2\beta \\ y &=& -\alpha-2\beta \\ z-3 &=& -3\alpha-2\beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1-x}{2} &=& \beta \\ x-y-1 &=& \alpha \\ z-3 &=& -3(x-y-1)+(x-1) \end{array}\right.$$

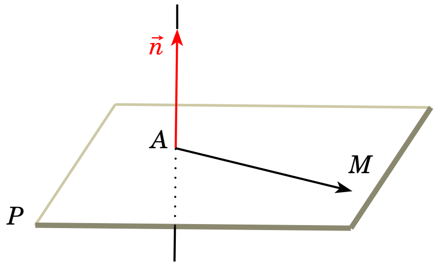
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1-x}{2} &=& \beta \\ x-y-1 &=& \alpha \\ 2x-3y+z &=& 5 \end{array}\right.$$

Ainsi, le plan (ABC) a pour équation $2x-3y+z=5$



2.5.2 Vecteur orthogonal à un plan

On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ est orthogonal (ou normal) à un plan π si la direction de $\vec{n}$ est une droite orthogonale au plan π. C'est à dire une droite orthogonale à toutes les droites contenues dans le plan π.



Dans un repère othonormal, le vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ est orthogonal au plan

$$\pi \equiv ax+by+cz+d=0$$

La réciproque de cette affirmation est vraie.

◇ EXEMPLE : Soit π le plan d'équation $3x-4y+5z-7=0$. Un vecteur normal de π est $\vec{n}(3\ ;\ -4\ ;\ 5)$

2.5.3 Distance d'un point à un plan

Propriété

Soient le plan π d'équation $ax+by+cz+d=0$ (a,b et c non tous nuls) et le point M de coordonnées $(x_M;y_M;z_M)$.
La distance du point M au plan π est égale à

$$\mathrm{d}(M,\pi)=\frac{|a\cdot x_M+b\cdot y_M+c\cdot z_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

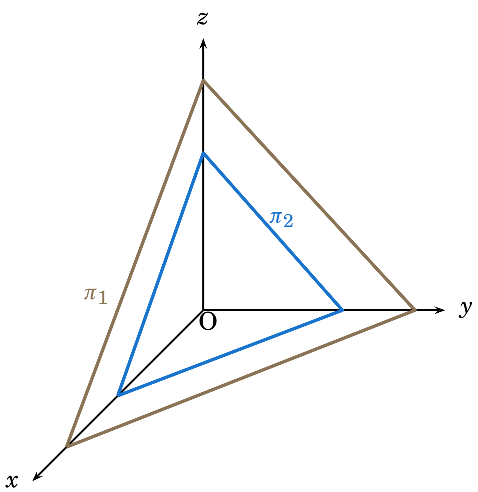
Démonstration
On part de la formule

$$\mathrm{d}(M,\pi)=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$$

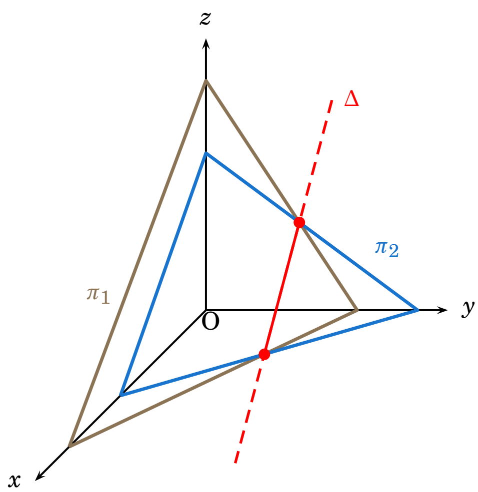
2.5.4 Plans parallèles

Définition

Deux plans π et π' d'équations respectives $ax+by+cz=d$ et $a'x+b'y+c'z=d'$ sont parallèles si, et seulement si, les coefficients a, b, c et a', b', c' sont proportionnels.



Plans parallèles



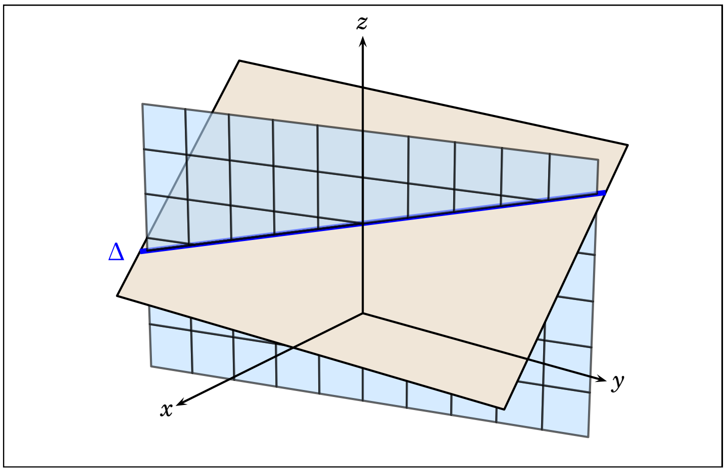
Plans sécants selon une droite Δ

2.5.5 Système d'équations cartésiennes d'une droite

Définition

L'espace est muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Un point $M(x;y;z)$ appartient à une droite Δ de l'espace si, et seulement si, ses coordonnées vérifient un système d'équations de la forme

$$\Delta \equiv \left\{\begin{array}{rcl} ax+by+cz & = & d \\ a'x+b'y+c'z & = & d' \end{array}\right. \quad \text{où } a,\ b,\ c \text{ et } a',\ b',\ c' \text{ ne sont pas proportionnels.}$$



$$\Delta \equiv \left\{\begin{array}{rcl} x+z & = & 2 \\ 1{,}932\cdot x+0{,}518\cdot y & = & 0 \end{array}\right.$$

Système d'équations cartésiennes des axes

Le plan étant muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on a :

- l'axe (Ox) admet $\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ z=0 \end{array}\right.$ comme système d'équations cartésiennes ;
- l'axe (Oy) admet $\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ z=0 \end{array}\right.$ comme système d'équations cartésiennes ;
- l'axe (Oz) admet $\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ a=0 \end{array}\right.$ comme système d'équations cartésiennes.

2.6 Exercices résolus

Exercice n° 1

Soient les points $A(-3;0;0)$, $B(0;4;0)$ et $C(0;0;-2)$ de l'espace.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan π passant par O (l'origine des axes) et parallèle au plan (ABC).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan π' passant par O et par les milieux des segments $[CA]$ et $[CB]$.

d. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, intersection des plans π et π'.

Solutions

a. Une équation du plan (ABC) est $ax+by+cz+d=0$ avec a, b, c et d sont des réels non tous nuls.
Les coordonnées respectives des trois points A, B et C la vérifient, donc $-3a+d=0$, $4b+d=0$ et $-2c+d=0$.
Ainsi, puisque les réels a, b et c sont non nuls on a $a=\frac{d}{3}$, $b=-\frac{d}{4}$ et $c=\frac{d}{2}$, et le réel d est non nul puisque a, b, c et d ne sont pas tous nuls, d'où, après une simplification par d, une équation du plan (ABC) est

$$\frac{x}{3}-\frac{y}{4}+\frac{z}{2}+1=0$$

ou mieux :

$$(ABC) \equiv 4x - 3y + 6z + 12 = 0$$

b. Le plan π est parallèle au plan (ABC), il a donc le même vecteur normal :

$$\pi \equiv 4x - 3y + 6z + k = 0 \qquad (k \in \mathbb{R}_0)$$

De plus les coordonnées du point O vérifient cette équation, d'où $k = 0$.
Une équation du plan π est

$$4x - 3y + 6z = 0$$

c. Le plan π' passe par le point $O(0;0;0)$ donc il a une équation cartésienne du type $ux + vy + wz = 0$, les réels u, v et w étant non tous nuls.
Les milieux des segments $[CA]$ et $[CB]$ ont pour coordonnées respectives $\left(-\frac{3}{2};0;-1\right)$ et $(0;2;-1)$ et ils appartiennent au plan π' donc $-\frac{3}{2}u - w = 0$ et $2v - w = 0$.
En choisissant $w = -6$ on obtient $v = -3$ et $u = 4$, d'où une équation du plan π' :

$$4x - 3y - 6z = 0$$

d. Les plans π et π' ont en commun les milieux des segments $[CA]$ et $[CB]$ mais pas le point 0 qui n'appartient qu'au second donc π et π' sont bien sécants et ont pour intersection la droite d passant par les milieux des segments $[CA]$ et $[CB]$.
Les coordonnées respectives de ces deux points sont $\left(-\frac{3}{2};0;-1\right)$ et $(0;2;-1)$ d'où les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite d : $\left(\frac{3}{2};2;0\right)$; ou pour simplifier l'écriture celle d'une autre : $(3;4;0)$;

on en déduit une représentation paramétrique de la droite d : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3\lambda \\ y & = & 4\lambda + 2 \\ z & = & -1 \end{array}\right. \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$

Exercice n° 2

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère les points $A(3\ ;\ 0\ ;\ 6)$ et $I(0\ ;\ 0\ ;\ 6)$, et l'on appelle Δ la droite passant par A et I. On appelle π le plan d'équation $2y + z - 6 = 0$ et ψ le plan d'équation $y - 2z + 12 = 0$.

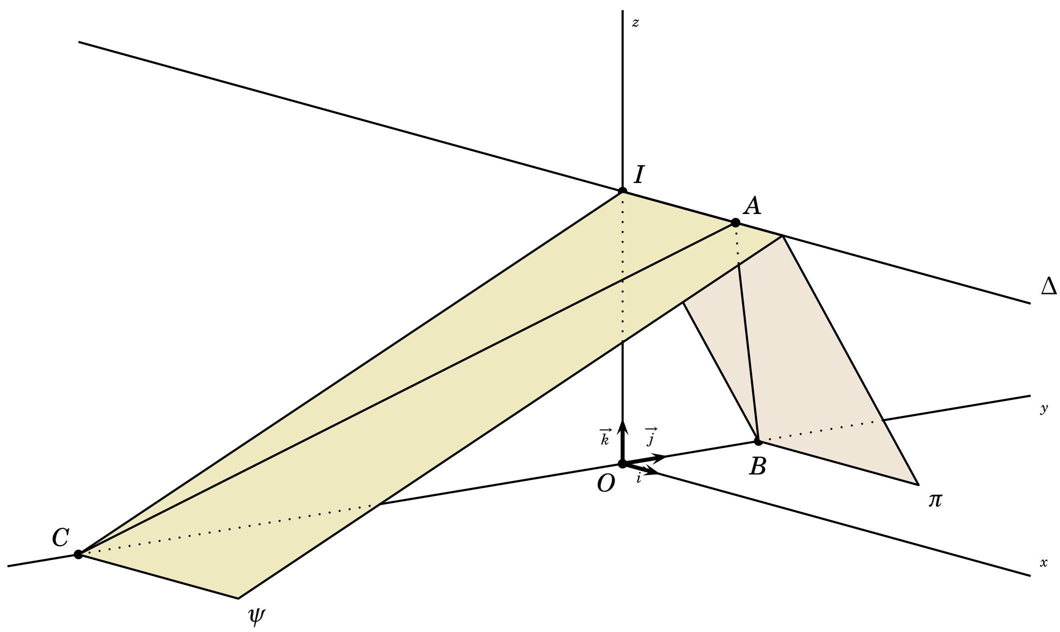
1. Démontrer que π et ψ sont perpendiculaires.

2. Démontrer que l'intersection des plans π et ψ est la droite Δ.

3. Démontrer que π et ψ coupent l'axe $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{j}\right)$ (l'axe (Oy)) et déterminer les coordonnées des points B et C, intersections respectives de π et ψ avec l'axe $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{j}\right)$.

4. Démontrer qu'une équation du plan μ passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$ est $x + 4y + 2z - 12 = 0$.

5. Donner une représentation paramétrique de la droite (OA).
Démontrer que la droite $(\mathrm{O}A)$ et le plan μ sont sécants en un point H dont on déterminera les coordonnées.



Solutions

1. Les plans π et ψ ont pour vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}(0;2;1)$ et $\overrightarrow{n'}(0\ ;\ 1\ ;\ -2)$. On a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n'} = 0$, donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n'}$ et par suite, les plans π et ψ sont perpendiculaires.

2. L'intersection des plans π et ψ est une droite (plans perpendiculaires).
$A \in \pi$ car $2\times 0+6-6=0$ et $A \in \psi$ car $0-12+12=0$, donc $A \in \pi \cap \psi$;
on montre de la même façon que $I \in \pi \cap \psi$.
Les points A et I étant distincts, la droite d'intersection des plans π et ψ est donc la droite (AI), c'est-à-dire la droite Δ.

3. Soit $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point de l'espace. M appartient à l'axe $\left(O;\overrightarrow{j}\right)$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ z &=& 0\end{array}\right.$.

M appartient à l'axe $\left(O;\overrightarrow{j}\right)$ et au plan π si et seulement si $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ z &=& 0\\ 2y+z-6 &=& 0\end{array}\right.$ c'est-à-dire si et seulement si $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& 3\\ z &=& 0\end{array}\right.$. Le plan π coupe donc l'axe $\left(O;\overrightarrow{j}\right)$ au point $B(0\ ;\ 3\ ;\ 0)$.

Un raisonnement analogue montre que le plan ψ coupe l'axe $\left(O;\overrightarrow{j}\right)$ en un point $C(0\ ;\ -12\ ;\ 0)$.

4. On a $\overrightarrow{AC}(-3\ ;\ -12\ ;\ -6)$ donc le plan μ a une équation cartésienne de la forme : $-3x-12y-6z+d=0$. Et $B(0\ ;\ 3\ ;0) \in \mu$, donc $0-12\times 3-0+d=0$, d'où $d=36$.
Le plan μ a donc pour équation cartésienne $-3x-12y-6z+36=0$, ou encore, en simplifiant par -3 : $x+4y+2z-12=0$.

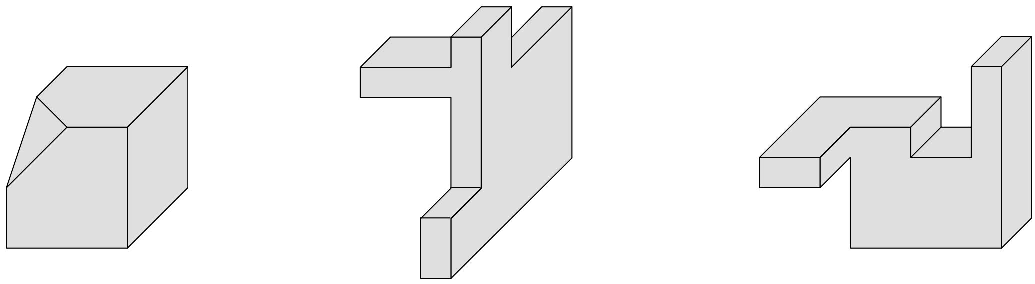
5. La droite (OA) passe par $O(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{OA}(3\ ;\ 0\ ;\ 6)$. Une représentation paramétrique de (OA) est donc : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3t\\ y &=& 0\\ z &=& 6t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$.
Un point M appartient à la droite (OA) et au plan μ si et seulement si il existe un réel t tel que $M(3t\ ;\ 0\ ;\ 6t)$ et $(3t)+4\times 0+2\times(6t)-12=0$, ce qui donne une unique valeur : $t=\dfrac{4}{5}$. La droite (OA) et le plan μ sont donc sécants en un point H qui a pour coordonnées $\left(3\times\dfrac{4}{5}\ ;\ 0\ ;\ 6\times\dfrac{4}{5}\right)$, c'est-à-dire $H\left(\dfrac{12}{5}\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{24}{5}\right)$.

2.7 Exercices

2.7.1 Echauffements

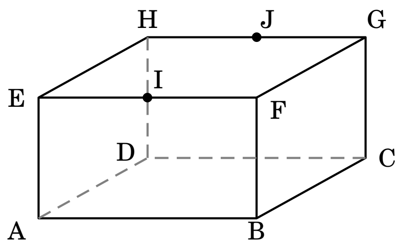
Exercice nº 3

Donner le nombre de faces de chacun des solides suivants :



Exercice nº 4

ABCDEFGH est un pavé, I est le milieu de [EF] et J le milieu de [HG].



1. Donner respectivement :

(a) Une droite parallèle à la droite (IJ), non coplanaire au plan (EHF) et sécante à la droite (GB).

(b) Un plan parallèle au plan (IJG) et sécant au plan (EAD).

(c) Une droite parallèle au plan (ABC), sécante au plan (FGC) et confondue dans le plan (HGF).

2. Étudier la position relative des droites suivantes :

(a) La droite (BH) et la droite (BC).

(b) La droite (EG) et la droite(BC).

(c) La droite (EG) et la droite(AC).

3. Quel est, dans chacun des cas suivants, l'intersection des deux plans :

(a) Le plan (EIA) et le plan (FIC).

(b) Le plan (EHI) et le plan (FJG).

(c) Le plan (DAB) et le plan (FJG).

Exercice nº 5

ABCDEFGH est un cube dont l'arête mesure 2 cm. P et Q sont les centres respectifs des faces EFGH et BCGF.

1. Tracer en vraie grandeur le patron du cube (avec les points P et Q).

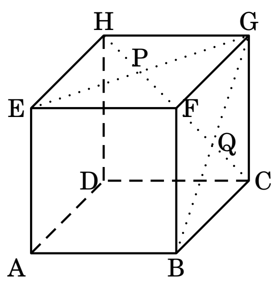
2. Calculer $\overline{EP}$.

3. Le triangle AEP est-il rectangle ? Justifier.

4. En déduire que $\overline{AP} = \sqrt{6}$ cm.

5. En utilisant le triangle BEG, calculer $\overline{PQ}$.

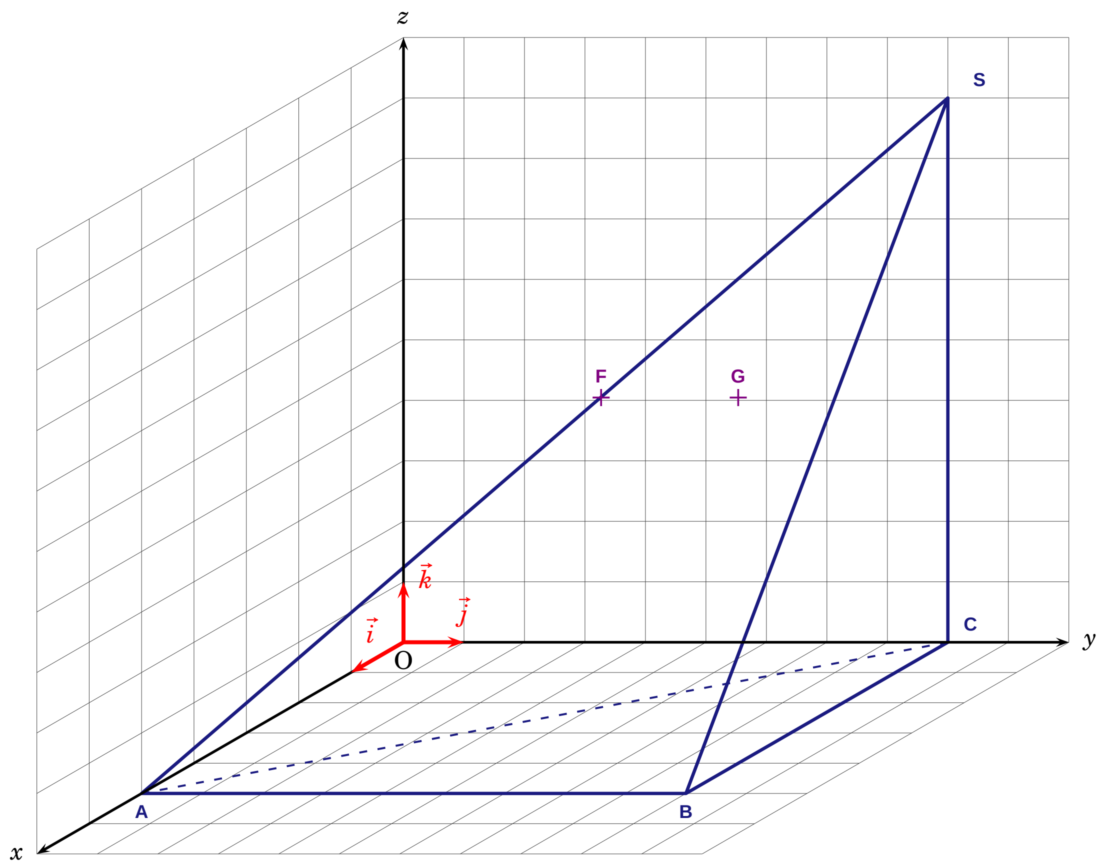
6. Quel nom peut-on donner au solide GEBF ? Calculer alors son volume.



2.7.2 Exercices de routine

Exercice n° 6

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(5;0;0)$, $B(5;9;0)$, $C(0;9;0)$ et $S(0;9;9)$.



1. Placer le point E de coordonnées $(6;4;7)$ dans le repère précédent.
2. L'abscisse du point F est égale à 2, lire les coordonnées du point F.
3. G est un point du plan (SBC), lire les coordonnées du point G.
4. Les points E, F et G sont-ils alignés ?

Exercice n° 7

Donner une représentation paramétrique de la droite d dans chacun des cas suivants :

1. d passe par $A(-1;2;3)$ et $B(1;-1;1)$.
2. d passe par $A(5;6;7)$ et possède le vecteur directeur $\vec{u}\,(0;1;2)$.
3. d passe par $A(-1;-5;3)$ et $B(5;-1;1)$.
4. d passe par $A(3;-6;7)$ et est dirigée par $\vec{v}\,(3;-1;-2)$.

Exercice n° 8

Les quatre points A, B, C et D de l'espace sont-ils coplanaires ? Si oui, donner le système d'équations paramétriques du plan qui les contient :

1. $A(1{,}2{,}2)$, $B(-1,-2,-1)$, $C(3{,}4{,}4)$ et $D(-2{,}3{,}1)$.
2. $A(0{,}1{,}3)$, $B(1{,}2,-1)$, $C(1{,}1,-1)$ et $D(1{,}2{,}2)$.
3. $A(-1{,}2{,}4)$, $B(3,-3{,}0)$, $C(1{,}3{,}4)$ et $D(5{,}1,-6)$.
4. $A(2,-1{,}0)$, $B(0,-4{,}5)$, $C(4,-13{,}13)$ et $D(-4{,}5,-3)$.

(Voir section 2.4 page 9)

Exercice n° 9

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(2;-1;3)$, $B(3;2;1)$, $C(-2;3;1)$ et $D(6;3;0)$.

1. Les points A, B et C déterminent-ils un plan ? Si oui, chercher son équation cartésienne.
   (Voir section 2.5.1 page 10)

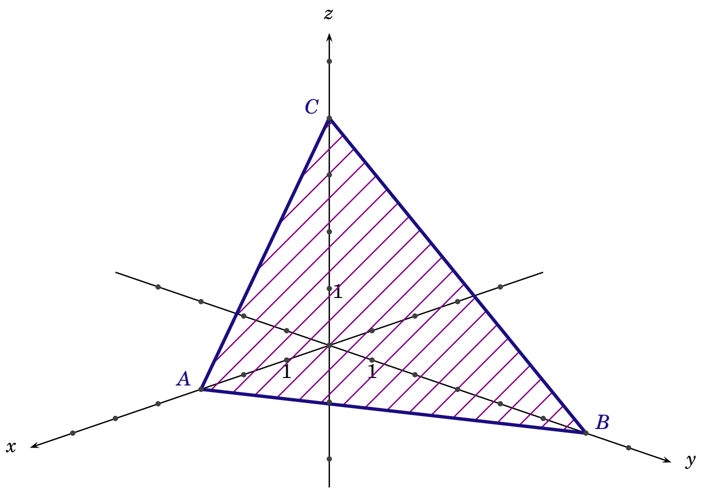
2. Calculer les coordonnées du point I milieu du segment $[BC]$. (voir section 2.3.2 page 8)

3. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

Exercice n° 10

Le plan (ABC), dessiné ci-dessous dans un repère de l'espace, a pour équation

- $3x+6y+4z=9$
- $2x+y-z=6$
- $4x+2y+3z=12$



Exercice n° 11

Déterminer une équation cartésienne du plan ψ dans chacun des cas suivants :

1. ψ passe par $A(-1;2;3)$ et est orthogonal à $\vec{n}(2;3;5)$

2. ψ passe par $A(-1;-2;-3)$ et est orthogonal à $\vec{n}(0;1;2)$

3. ψ passe par $A(2;6;7)$, $B(-3;4;6)$ et $C(1;0;0)$

4. ψ passe par $A(1;2;3)$, $B(4;5;6)$ et $C(7;8;9)$

Exercice n° 12

Déterminer l'intersection éventuelle de la droite d et du plan π sachant qu'une représentation paramétrique de d est $\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-2t \\ z=3 \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$ et une équation cartésienne de π est $3x-2y+z=3$

Exercice n° 13

Calculer la distance du point A au plan π :

1. $A(1;0;2)$ et $\pi \equiv 2x-2y=3$

2. $A(2;1;1)$ et π est le plan passant par $B(1;0;0)$, de vecteur normal $\vec{n}(2;3;4)$.

(Voir section 2.5.3 page 12)

Exercice n° 14

Trouver une équation du plan π défini par les éléments suivants.

1. A, B et C sont des points de π

(a) $A(0{,}0{,}1)$, $B(1{,}0{,}0)$ et $C(0{,}1{,}0)$.

(b) $A(1{,}1{,}1)$, $B(2{,}0{,}1)$ et $C(-1{,}2{,}4)$.

(c) $A(5{,}0{,}-1)$, $B(1{,}3{,}-2)$ et $C(-2{,}4{,}5)$.

2. A est un point de π, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de π

(a) $A(1{,}2{,}1)$, $\vec{u}(4{,}0{,}3)$ et $\vec{v}(1{,}3{,}-1)$.

(b) $A(1{,}0{,}2)$, $\vec{u}(2{,}-1{,}3)$ et $\vec{v}(-1{,}4{,}5)$.

3. A est un point de π, D est une droite contenue dans π

(a) $A(4{,}1{,}-3)$ et $(D) : \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ 4x-y+2z=0 \end{cases}$

(b) $A(1{,}1{,}0)$ et $(D) : \begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=1-3t \end{cases}$

Exercice n° 15

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(2;-1;3)$, $B(3;2;1)$, $C(-2;3;1)$ et $D(6;3;0)$.

1. Les points A, B et C déterminent-ils un plan ?

2. Calculer les coordonnées du point I milieu du segment $[BC]$.

3. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

Exercice n° 16

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. On considère les points $A(2;-1;3)$, $B(-2;3;1)$, $C(-2;0;4)$, $D(9;-5;8)$ et $E(x;y;6)$.

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

2. Le point E appartient à la droite (AB). Déterminer son abscisse et son ordonnée.

3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.

4. Montrer que la droite (ED) est perpendiculaire au plan (ABC).

Exercice n° 17

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(-2;3;-1)$ et $B(1;3;2)$.

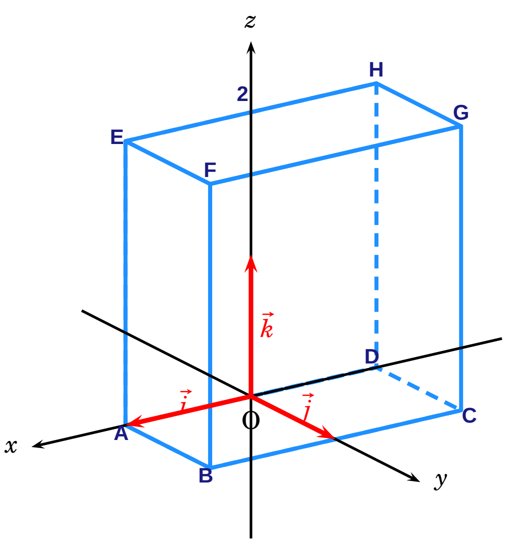
1. Déterminer les coordonnées du point C intersection de la droite (AB) avec le plan (xOy).

2. Déterminer les coordonnées du point D intersection de la droite (AB) avec le plan (yOz).

3. La droite (AB) est-elle sécante avec le plan (xOz) ?

Exercice n° 18

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
La figure ci-dessous, représente un pavé droit ; le point O est le milieu de $[AD]$.
Soit P le milieu du segment $[EF]$.



1. (a) Quel ensemble de points de l'espace a pour équation $z = 2$?

(b) Déterminer une équation du plan (ABF).

(c) En déduire un système d'équations qui caractérise la droite (EF).

2. (a) Quelles sont les coordonnées des points A, G et P ?

(b) Placer sur la figure le point Q de coordonnées $(0;0{,}5;0)$.

(c) Déterminer une équation cartésienne du plan (APQ).

3. (a) Construire sur la figure les segments $[PQ]$ et $[AG]$.

(b) Le point G appartient-il au plan (APQ) ? Justifier.

4. On construit la figure précédente à l'aide d'un logiciel de géométrie, puis on demande au logiciel de représenter le point d'intersection des droites (AG) et (PQ). Quelle pourrait être la réponse de l'ordinateur ?

Exercice nº 19

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(-1;6;7{,}5)$ et $B(-2;8;9)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan P parallèle à l'axe (Oz) et passant par les points A et B.

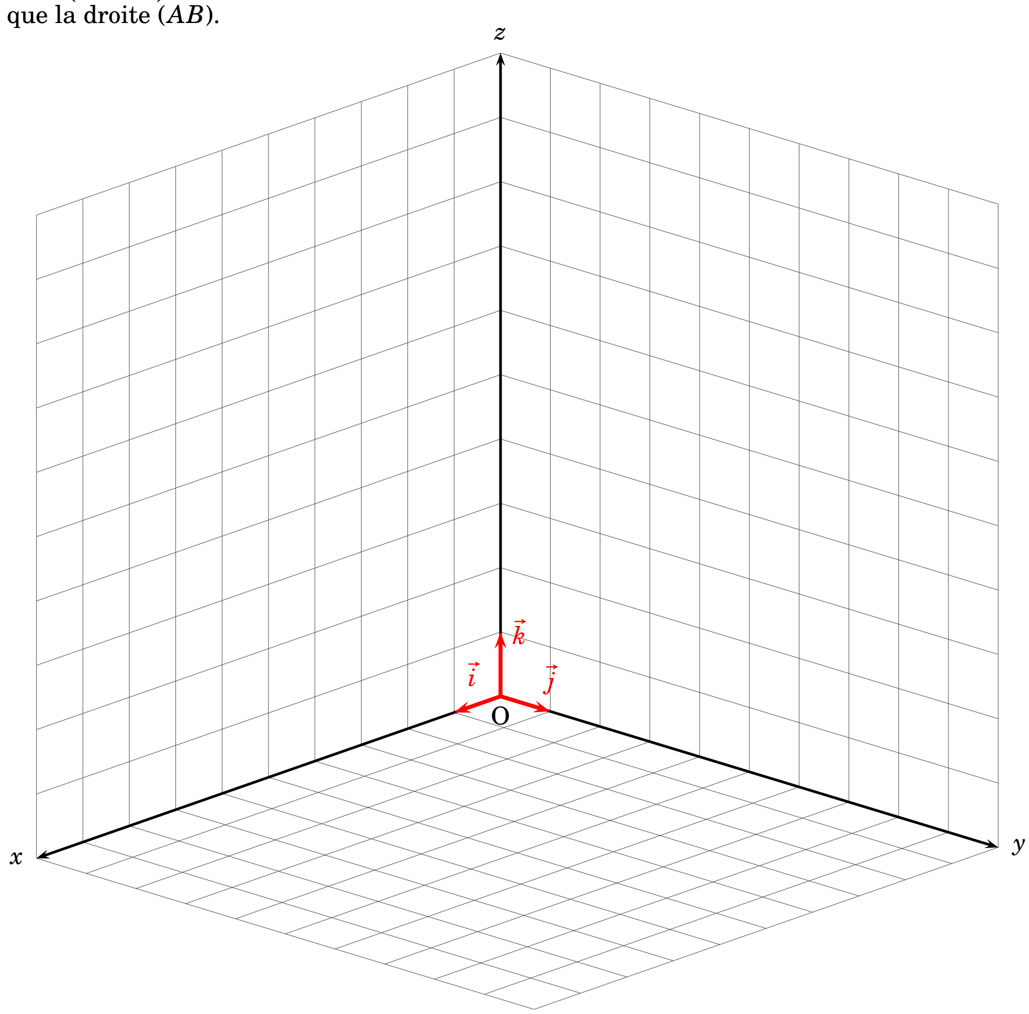
2. Déterminer une équation cartésienne du plan Q parallèle à l'axe (Oy) et passant par les points A et B.

3. Soit d la droite caractérisée par le système :

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x+y & = & 4 \\ 3x+2z & = & 12 \end{array}\right.$$

Les points A et B sont-ils sur la droite d ?

4. Dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ci-dessous, représenter les plans P et Q par leurs traces avec les plans de base ainsi que la droite (AB).



Exercice nº 20

L'espace est muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ orthonormal représenté en annexe ci-dessous.

1. Tracer les droites d'intersection du plan π d'équation $5x+5y+6z=15$ avec les plans de coordonnées du repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

2. On considère le plan $\psi \equiv 3x+4y=6$.

(a) Préciser la nature de l'ensemble Δ des points M de l'espace dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} 5x+5y+6z = 15 \\ 3x+4y = 6 \end{cases}$$

(b) Représenter l'ensemble Δ dans le repère $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

3. On donne les points $D(1;0;0)$, $E(0;-3;0)$, $F(-1;-3;4)$ et $G(0;0;4)$.

(a) Montrer que les points D, E et F déterminent un plan.

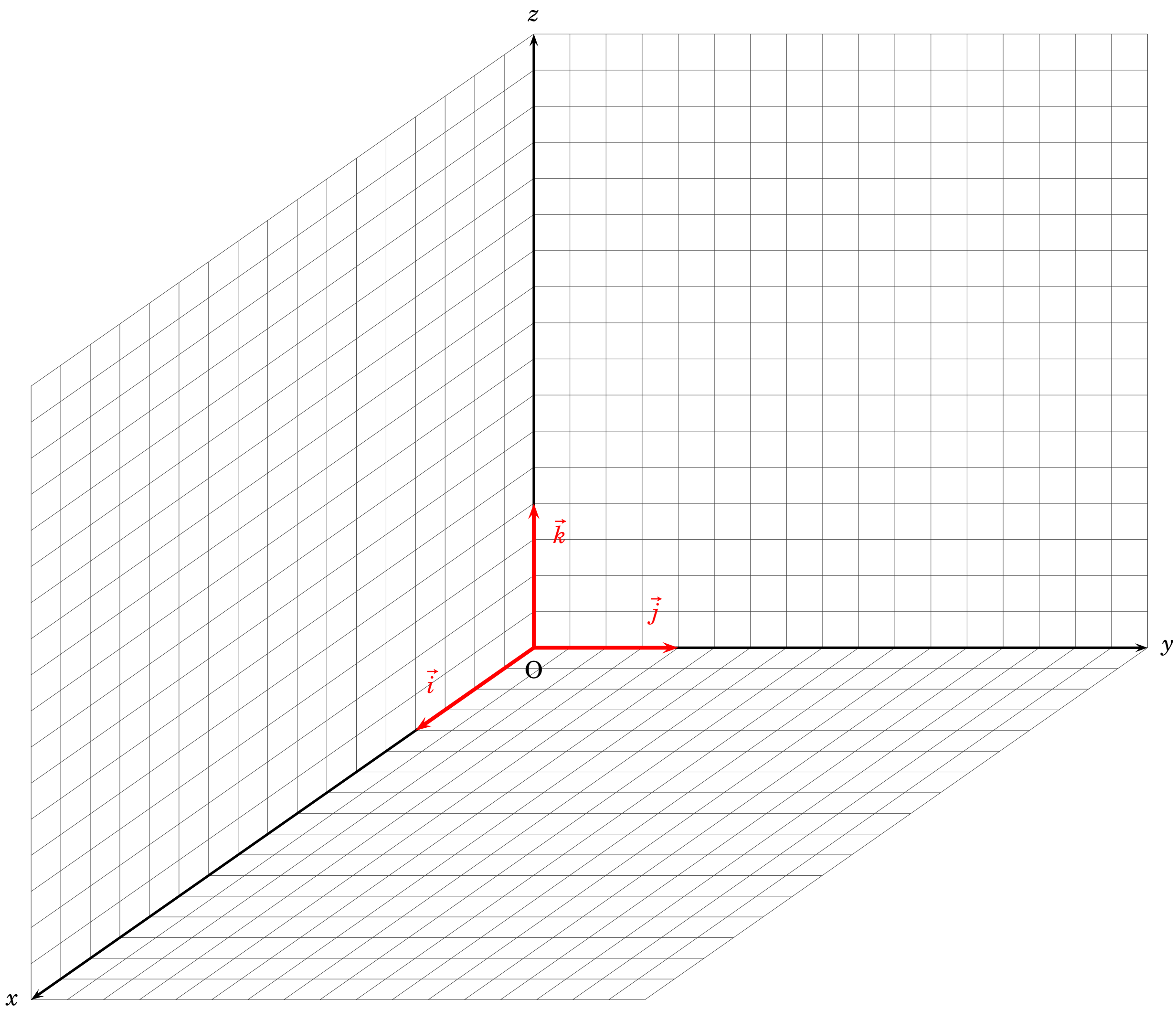
(b) Les points D, E, F et G sont-ils coplanaires ?

(c) Déterminer une équation du plan μ qui contient les points D, E, F.

(d) Représenter l'intersection des trois plans π, ψ et μ dans le repère $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

4. Résoudre le système suivant et en donner une interprétation graphique.

$$\begin{cases} 12x-4y+3z = 12 \\ 5x+5y+6z = 15 \\ 3x+4y = 6 \end{cases}$$



Exercice n° 21

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O};\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
Sur le dessin joint en annexe, on a placé les points $A(0~;~2~;~0)$, $B(0~;~0~;~6)$, $C(4~;~0~;~0)$, $D(0~;~4~;~0)$ et $E(0~;~0~;~4)$.
Soit π le plan d'équation $3y+z=6$.
Il est représenté par ses traces sur le plan de base sur le dessin joint en annexe.

1. (a) Démontrer que les points C, D et E déterminent un plan que l'on notera (CDE).

(b) Vérifier que le plan (CDE) a pour équation $x+y+z=4$.

2. (a) Justifier que les plans π et (CDE) sont sécants. On note Δ leur intersection.

(b) Sans justifier, représenter Δ en couleur (ou à défaut en traits pointillés) sur la figure en annexe.

3. On considère les points $F(2\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et $G(0\ ;\ 3\ ;\ 0)$.
On note ψ le plan parallèle à l'axe $\left(\mathrm{O};\ \vec{k}\right)$ et contenant les points F et G.

(a) Placer sur la figure en annexe les points F et G.
Sans justifier, représenter le plan ψ par ses traces sur les plans de base, d'une autre couleur (ou à défaut en larges pointillés), sur la figure en annexe.

(b) Déterminer les réels a et b tels que $ax+by=6$ soit une équation du plan ψ.

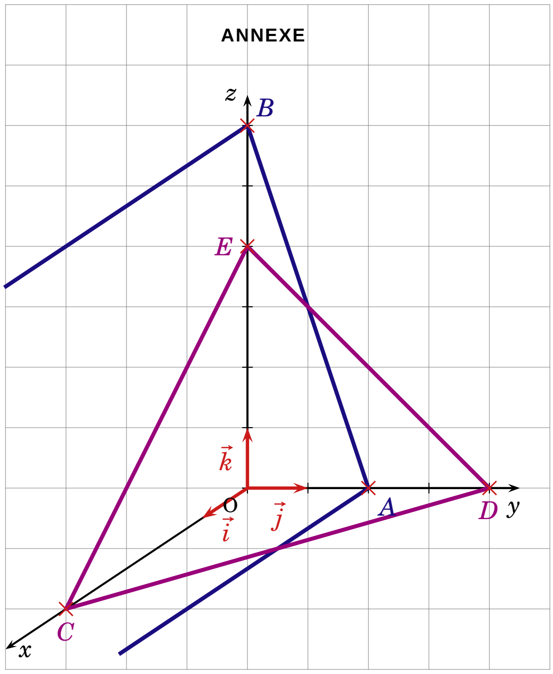
4. L'intersection des plans (CDE) et ψ est la droite Δ'.
Sans justifier, représenter la droite Δ', d'une troisième couleur (ou à défaut en très larges pointillés), sur la figure en annexe.

5. On considère le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3y+z & = & 6 \\ x+y+z & = & 4 \\ 3x+2y & = & 6 \end{array}\right.$$

(a) Résoudre ce système.

(b) Que peut-on alors en déduire pour les droites Δ et Δ' ?



Exercice n° 22

On donne $A(5;0;1)$, $B(2;3;4)$, $C(1;1;1)$ et $D(0;0;3)$. Etudier l'intersection des droites (AB) et (CD).

Exercice n° 23

On considère les plans π d'équation $x+y-2=0$ et ψ d'équation $-x+2y+z=0$. Déterminer l'éventuelle intersection des plans π et ψ.

Exercice n° 24

On considère trois plans π, ψ et ϕ dont on connaît une équation cartésienne :

$$\pi \equiv 2x-y+z=2 \quad \text{et} \quad \psi \equiv 4x-2y+3z=1 \quad \text{et} \quad \phi \equiv x+y+z=1$$

Etudier l'intersection des plans π, ψ et ϕ.