Lösungsformel zur quadratischen Gleichung

Zur Auflösungsformel für die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge jeder Gleichung. In der Regel hat jede Gleichung **zwei** Lösungen. Schreiben Sie Ihre Gedankengänge auf. Insbesondere: Was ist neu gegenüber der vorangehenden Aufgabe. Vereinfachen Sie die Wurzeln so, dass

a) **keine Wurzeln im Nenner** vorkommen (Erweitern)

b) jede Wurzel **maximal ausgezogen** ist (Bsp. : $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2}$)

(1.) $x^2 = 4$

Beidseitig Wurzel ziehen. $\pm\sqrt{}$

$x = 2$ negative Lösung beachten

$x_1 = 2$ $\quad \underline{x_2 = -2}$ $\quad \mathbb{L}_x = \{-2, 2\}$

(2.) $x^2 - 3 = 0$

Erst 3 auf die andere Seite bringen

$x^2 - 3 = 0 \quad | +3$

$x^2 = 3 \quad | \pm\sqrt{}$

$x = \pm\sqrt{3}$ $\quad \mathbb{L}_x = \{-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\}$

(3.) $2x^2 - 1 = 0$

$2x^2 - 1 = 0 \quad | +1$

$2x^2 = 1 \quad | :2$

$x^2 = \frac{1}{2} \quad | \pm\sqrt{}$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\pm\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$

$\mathbb{L}_x = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

(4.) $x^2 = 6$

$x^2 = 6 \quad \pm\sqrt{}$

$x = \pm\sqrt{6}$

$\mathbb{L}_x = \{-\sqrt{6}, +\sqrt{6}\}$

(5.) $(x+2)^2 = 6$

$x^2 + \cancel{4x} + 4 = 6$

Sackgasse

$(x+2)^2 = 6 \quad | \pm\sqrt{}$

$(x+2) = \pm\sqrt{6} \quad | -2$

$x = \pm\sqrt{6} - 2$

$\mathbb{L}_x = \{-2-\sqrt{6}, -2+\sqrt{6}\}$

(6.) $x^2 - 6x + 9 = \frac{25}{4}$

$x^2 - 6x + 9 = \frac{25}{4} \quad |$ TU (Binom..)

$(x-3)^2 = \frac{25}{4} \quad | \pm\sqrt{}$

$x - 3 = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} = \pm\frac{5}{2} \quad | +3$

$x = 3 \pm \frac{5}{2}$

$\mathbb{L}_x = \{\frac{1}{2}, 5.5\} = \underline{\underline{\{\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\}}}$

(7.) $x^2 - 6x = 31$ ← die „9" von vorhin fehlt

$x^2 - 6x = 31 \quad | +9$

$x^2 - 6x + 9 = 40 \quad |$ TU (Binom)

$(x-3)^2 = 40 \quad | \pm\sqrt{}$

$x - 3 = \pm\sqrt{40} \quad |$ TU (Wurzel ausziehen)

$x - 3 = \pm 2\sqrt{10} \quad | +3$

$x = 3 \pm 2\sqrt{10}$

$\mathbb{L}_x = \{3 - 2\sqrt{10}, 3 + 2\sqrt{10}\}$

(8.) $x^2 + 4x = -\frac{7}{4}$ $\longleftarrow$ eine 4 wäre schön

$$x^2 + 4x = -\frac{7}{4} \quad | +4$$
$$x^2 + 4x + 4 = 4 - \frac{7}{4} = \frac{9}{4} \quad | \text{ TU}$$
$$(x+2)^2 = \frac{9}{4} \quad | \pm\sqrt{\ }$$
$$x + 2 = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2} \quad | -2$$
$$x = -2 \pm \frac{3}{2}$$
$$\mathbb{L}_x = \{-3.5, -0.5\} = \underline{\underline{\left\{\frac{-7}{2}, \frac{-1}{2}\right\}}}$$

(9.) $x^2 - \frac{2}{3}x = -\frac{1}{9}$ $\longleftarrow$ was fehlt da? $\frac{2}{3}$ halbieren und quadrieren!

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right):2\right]^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x = -\frac{1}{9} \quad | +\frac{1}{9}$$
$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0 \quad | \text{ TU}$$
$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = 0 \quad | \pm\sqrt{\ }$$
$$x - \frac{1}{3} = \pm\sqrt{0} = \pm 0 = 0 \quad | +\frac{1}{3}$$
$$x = \frac{1}{3}$$
$$\mathbb{L}_x = \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

Links so ergänzen, dass ein Binom entsteht

$$\boxed{x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2}$$

(10.) $x^2 - 3x = -\frac{25}{4}$

$$x^2 - 3x = -\frac{25}{4} \quad | +\frac{9}{4}$$
$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = -\frac{25}{4} + \frac{9}{4} = -\frac{16}{4}$$
$$\underbrace{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}_{\geq 0} = \underbrace{-\frac{16}{4}}_{< 0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{L}_x = \{\ \}$$

(11.) $2x^2 + 4x - 7 = 0$

$$2x^2 + 4x - 7 = 0 \quad | +7$$
$$2x^2 + 4x = 7 \quad | :2$$
$$x^2 + 2x = \frac{7}{2} \quad | +1 \qquad \text{(quadratisch ergänzen)}$$
$$x^2 + 2x + 1 = \frac{7}{2} + 1 = \frac{9}{2} \quad | \text{TU}$$
$$(x+1)^2 = \frac{9}{2} \quad | \pm\sqrt{}$$
$$x + 1 = \pm\sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\pm 3}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2} \quad | -1$$
$$x = -1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$$
$$\underline{\mathbb{L}_x = \left\{-1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\,,\ -1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right\}}$$

(12.) $\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{6} = 0$

$$\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{6} = 0 \quad | \cdot 12 \qquad \text{(kgV)}$$
$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \quad | +2$$
$$2x^2 - 3x = 2 \quad | :2$$
$$x^2 - \frac{3}{2}x = 1 \quad | +\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$\left(\frac{3}{2}\right)$ halbieren und quadrieren $= \left(\frac{3}{4}\right)^2$

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad | \text{TU} \qquad \text{Binom}$$
$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \quad | \pm\sqrt{}$$
$$x - \frac{3}{4} = \pm\sqrt{\frac{25}{16}} = \pm\frac{5}{4} \quad | +\frac{3}{4}$$
$$x = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$$
$$\mathbb{L}_x = \left\{\frac{-2}{4}\,,\ \frac{8}{4}\right\} = \underline{\underline{\left\{-\frac{1}{2}\,,\ 2\right\}}}$$

(13.) $x^2 + 2px + q = 0$

$$x^2 + 2px + q = 0 \quad | -q$$

$$x^2 + 2px = -q \quad | +p^2$$

$$x^2 + 2px + p^2 = p^2 - q \quad | \text{ TU} \qquad \text{Binom}$$

$$(x+p)^2 = p^2 - q \quad | \pm\sqrt{}$$

$$x + p = \pm\sqrt{p^2 - q} \quad | -p$$

$$x = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$$

$$\mathbb{L}_x = \left\{ -p - \sqrt{p^2 - q}\,,\; -p + \sqrt{p^2 - q} \right\}$$

(14.) $ax^2 + bx + c = 0$

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \mid -c$$

$$ax^2 + bx = -c \qquad \mid :a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a} \qquad \mid + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad \mid \text{TU} \qquad \text{Binom}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \qquad \mid \pm\sqrt{}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}} = \pm\sqrt{\frac{-4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \mid + \frac{b}{2a}$$

$$x = \frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \underline{\underline{\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$$

a-b-c Formel