Mathematik

Kantonsschule Stadelhofen — Semester 1

Impressum

Präambel Eine geschlechtsneutrale Bezeichnung von Personen oder eine Bezeichnung verschiedener Geschlechter wurde weitgehend vermieden, um die Lesbarkeit des vorliegenden Dokuments zu erleichtern. Alle Leser sind selbstverständlich gleichermaßen angesprochen.

Version: 0.8.1 (LaTeX)

Grafik/Bilder/Fotos (sofern nichts anderes vermerkt): Ph. G. Freimann

Editiert durch: GNU Emacs 26.3

Verleger: LaTeX pdfTeX 3.14159265-2.6-1.40.20 (TeX Live 2019/Debian)

Quellecode des Skripts: `https://github.com/pheek/bbwMathe`

(Feedback an `philipp.freimann@bbw.ch`)

Über den Autor Ph. G. Freimann studierte an der Universität Zürich Mathematik, Informatik und Physik. Von den Lieblingsfächern im Gymnasium waren Mathematik und Deutsch seine drei gutesten.

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Algebra I

1 Zahlen

«Im 15. Jahrhundert — genauer im Jahre 1413 — am zwölften elften um zehn Uhr neun haben acht der sieben Schlauesten gesagt: “So sechs wie wir fünf gibt’s keine vier mehr, denn wir drei sind die zwei einzigen Nullen.“»

Lernziele

- Zahlmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$
- Näherungswerte, Runden
- Wissenschaftliche Notation
- Ordnungsrelationen ($=$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$)
- Betrag

Theorie [**?**]: Seite 13 Nr. 1.1

1.1 Die natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$)

Definition 1.1 (natürliche Zahlen): Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ sind ganze positive Zahlen: $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$..

Bemerkung 1.1 (Null): Selten wird auch die Menge $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ als die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet. Wenn die Unterscheidung wesentlich ist, verzichten wir auf die Schreibweise $\mathbb{N}$ und verwenden

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

bzw.

$$\mathbb{N} \backslash \{0\} = \mathbb{N}^* = \mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Mit natürlichen Zahlen können wir beliebig

- **addieren** $(+)$ und
- **multiplizieren** $(\cdot)$.

1.2 Ganze Zahlen ($\mathbb{Z}$)

Definition 1.2 (ganze Zahlen):
Mit $\mathbb{Z}$ bezeichnen wir alle ganzen Zahlen, sowohl die positiven ($\mathbb{N}$), wie auch die negativen.

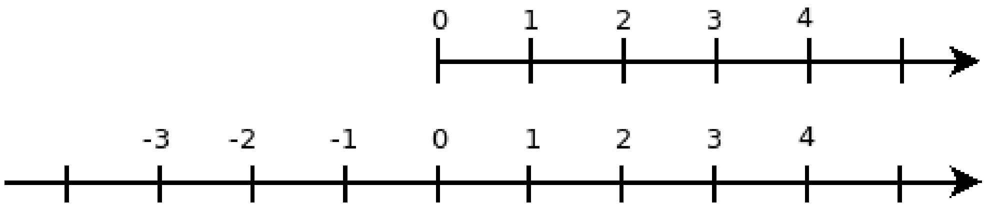
$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Zusätzlich zu den natürlichen Zahlen können wir nun eine

- **Subtraktion** $(-)$

uneingeschränkt durchführen.

1.2.1 Zahlenstrahl / Zahlengerade



Der Zahlenstrahl hat den Startpunkt 0 (Null)[1], wohingegen die Zahlengerade auf beiden Seiten uneingeschränkt weiterläuft.

[1]... manchmal den Startpunkt 1 ...

1.3 Rationale Zahlen ($\mathbb{Q}$)

Definition 1.3 (rationale Zahlen): Zahlen, welche sich als Bruch mit ganzen Zahlen schreiben lassen, werden als **rationale Zahlen** bezeichnet.

$$\mathbb{Q} = \left\{ q = \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \backslash \{0\} \right\}$$

1.3.1 Dezimalbrüche

Jeder Bruch ($\frac{a}{b}$) lässt sich als abbrechender oder periodischer Dezimalbruch schreiben. Beispiel:

Abbrechend:

$$\frac{175}{8} = \underline{\hspace{4cm}}$$

Periodisch:

$$\frac{5}{70} = \underline{\hspace{4cm}}$$

Dasselbe gilt umgekehrt. Für abbrechende Dezimalbrüche ist dies trivial:

$$47.386 = \underline{\hspace{4cm}}$$

Für periodische, nicht abbrechende Dezimalbrüche sieht die Sache etwas komplizierter aus, gilt jedoch auch:

$$0.\overline{13} = 0.131313... = \underline{\hspace{4cm}}$$

Aufgaben

Zeigen Sie, dass die folgenden Dezimalzahlen rational sind. Schreiben Sie dazu diese Zahlen als gewöhnliche, gekürzte Brüche:

$0.8 =$ ______________	$-2.03 =$ ______________	$2.125 =$ ______________
$3.\overline{3} =$ ______________	$4.\overline{16} =$ ______________	$1.\overline{538461} =$ ______________

1.4 Runden

In der Regel sind wir bei Dezimalbrüchen nicht an allen auftretenden Stellen interessiert, sondern begnügen uns mit einer Näherung.

1.4.1 Dezimalen (Nachkommastellen)

Als Dezimalen, Dezimalstellen oder Nachkommastellen werden die Stellen **nach** dem Komma bezeichnet.

Rezept 1.1 (Runden): Beim **Runden** auf die n-te Stelle, wird die $n+1$-te Stelle betrachtet. Ist diese >=5, so wird **aufgerundet**, ansonsten **abgerundet**.

Runden auf die vierte **Dezimale** (= vierte **Nachkommastelle**):

$$36.4699432 \approx \underline{\hspace{3cm}}$$

$$36.4699618 \approx \underline{\hspace{3cm}}$$

Vorsicht bei Zahlen nahe an Null. So wird die Zahl

$$0.002468$$

beim Runden auf vier Dezimalen wie folgt gerundet:

$$0.0025$$

Runden Sie auf vier Dezimalen:

$$\begin{array}{rcl}
55.55555 & \approx & \underline{\hspace{3cm}} \\
8.55695 & \approx & \underline{\hspace{3cm}} \\
3.3339499 & \approx & \underline{\hspace{3cm}} \\
1000.0001 & \approx & \underline{\hspace{3cm}} \\
10\,000.00001 & \approx & \underline{\hspace{3cm}} \\
-6.99999 & \approx & \underline{\hspace{3cm}} \\
0.000040447 & \approx & \underline{\hspace{3cm}}
\end{array}$$

1.4.2 Signifikante Stellen

Rezept 1.2 (Auf signifikante Ziffern runden):
Beim Runden auf **vier signifikante Ziffern** wird

- von links nach rechts die erste von Null verschiedene Ziffer gesucht. Dies ist die erste signifikante Ziffer.
- Danach werden die nächsten drei Ziffern genommen, egal ob sie Null sind oder nicht.
- Mit diesen drei Ziffern bilden die Ziffern zusammen die vier signifikanten Ziffern.
- Die 5. Ziffer wird nur noch zum Auf- oder Abrunden verwendet.

Geben Sie **vier signifikante** Ziffern an und runden Sie wenn nötig:

$$0.000040447 \approx \underline{\hspace{3cm}}$$
$$36.4699432 \approx \underline{\hspace{3cm}}$$
$$36.9952831 \approx \underline{\hspace{3cm}}$$
$$30009.78 \approx \underline{\hspace{3cm}}$$
$$0.0439899 \approx \underline{\hspace{3cm}}$$
$$1\,000\,000 \approx \underline{\hspace{3cm}}$$
$$0.00001 \approx \underline{\hspace{3cm}}$$

Aufgaben

Runden Sie die Zahl 3.21459 auf zwei Dezimalen: __________________. Runden Sie die selbe Zahl 3.21459 auf drei Dezimalen: __________________ und runden Sie nun das gerundete Resultat auf zwei Dezimalen: __________________. Was ist davon zu halten?

1.4.3 Wissenschaftliche Notation

Bei Zahlen größer als 10 können wir einer Zahl manchmal nicht ansehen, wie viel Stellen denn nun signifikant sind.

$$679\,946 \text{ Einwohner} \approx \underline{\hspace{4cm}} \text{ Einwohner}$$
$$680\,023 \text{ Einwohner} \approx \underline{\hspace{4cm}} \text{ Einwohner}$$

Daher bietet sich die wissenschaftliche Notation an.[2] Bei der wissenschaftlichen Notation wird die erste signifikante Ziffer vor das Komma geschrieben. Nach dem Komma stehen **alle** weiteren signifikanten Stellen. Zuletzt wird die Zahl mit Zehnerpotenzen ($10^n : n \in \mathbb{Z}$) «an die richtige Stelle» gerückt:

$$64\,038.6 = \underline{\hspace{4cm}} \approx \underline{\hspace{4cm}}$$
$$0.00463640 = \underline{\hspace{4cm}} \approx \underline{\hspace{4cm}}$$

Dabei bezeichnen negative Exponenten die Zehntel, Hundertstel, etc. Erst in der wissenschaftlichen Notation können wir die signifikanten Stellen auch bei gerundeten Zahlen größer als 10 effektiv ablesen.

[2] Die **wissenschaftliche Notation** wird vorwiegend für sehr große aber auch für Zahlen sehr nahe an Null verwendet.

Taschenrechner Auf Taschenrechnern oder in Programmiersprachen wird die Exponentialschreibweise i. d. R. mit dem Buchstaben «e» angegeben. Also «en» anstelle von «$\cdot 10^n$». Beispiele:

$5\,000 = 5 \cdot 10^3 = 5\text{e}3$

$0.063 = 6.3 \cdot 10^{-2} = 6.3\text{e}{-2}$

Berechnen und interpretieren Sie mit dem Taschenrechner:

$5.7^{15} =$ ____________________ = ____________________

$0.44^{28} =$ ____________________ = ____________________

Rezept 1.3 (EE): Um 5.77 Millionen auf Ihrem Taschenrechner **einzugeben** tippen Sie:

Stellen Sie in Wissenschaftlicher Notation dar:

$0.00479 =$ ______________

0.08 Milliarden = ______________

1.5 Irrationale und reelle Zahlen ($\mathbb{R}$)

Youtube

Simple-Club: Irrationale Zahlen

Youtube

Dorfuchs: Wurzel zwei ist irrational.

Zahlen auf der Zahlengerade, welche nicht als Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ dargestellt werden können, werden als **irrational** bezeichnet.

Wichtigste Vertreter:

Definition 1.4 (Reelle Zahl): Die Vereinigungsmenge der rationalen ($\mathbb{Q}$) und der irrationalen Zahlen nennen wir die **reellen** Zahlen und bezeichnen die Menge mit $\mathbb{R}$.

Dass π oder $\sqrt{2}$ irrational sind, ist nicht trivial. Daher noch zwei Vertreter irrationaler Zahlen, bei denen sofort klar ist, dass es sich nicht um periodische Dezimalbrüche handelt:

Gesetz 1.1 (Zahlmengen Beziehungen):

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \subset \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \subset \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \subset \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Bemerkung 1.2 (Mächtigkeit): Dabei ist $\mathbb{R}$ die mächtigste der vier Mengen.

Aufgaben zum Kapitel Zahlmengen

Geben Sie jeweils an, zu welchen der Zahlmengen $\mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ die folgenden Zahlen gehören:

- $5 - 8$ ______________
- $-3.\overline{17}$ ______________
- $\sqrt{2.00} - \sqrt{\frac{50}{25}}$ ______________
- $\frac{3}{\pi}$ ______________
- $\sqrt{2^5}$ ______________
- $4.\overline{9}$ ______________
- $3.\overline{18} + \frac{20}{11}$ ______________
- $0.313113111311113111113...$ ______________
- $\sqrt{-6}$ ______________

1.6 Ordnungsrelationen

$a = b$	Gleichheit
$\pi \neq 3$	.....
$\pi \approx \frac{355}{113}$	.....
$a < b$	.....
$3 > 1$	.....
$1 \ll 6.022 \cdot 10^{23}$	.....
$10^{100} \gg 1000$	.....
$a \leq b$	.....
$a \geq 4$	.....

1.6.1 Intervall-Notation

Relation	Zahlenstrahl	Intervallschreibweise
$a \geq 4$		$[4; \infty[$
$x \leq 5$ und $x > -2$		....
$-42 > z$		....

Aufgaben zu Ordnungsrelationen

Setzen Sie das richtige Zeichen ($<$, $>$, $=$) zwischen die folgenden Zahlen:

π ______________ $\sqrt{10}$ (π ist die Kreiszahl)

$-\sqrt{5}$ ______________ $\sqrt{2} - \sqrt{13}$

$\frac{10}{3}$ ______________ 0.3333333333

e ______________ $\frac{163}{60}$ (e ist die Eulersche Zahl)

$8.\overline{9}$ ______________ $18.33 - \frac{933}{100}$

$-\sqrt{6}$ ______________ $\sqrt{-6}$

Ordnen Sie die folgenden Werte der Zahlen bzw. Terme der Reihe nach (auch hier bezeichnet e die Eulersche Zahl):

π, $\frac{10}{3}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{3^3} - 2$, $(-2.2) \cdot (-1.5)$, $\mathrm{e} + \frac{41}{50}$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr (auch hier ist e die Eulersche Zahl)?

$\pi > \mathrm{e}$

$\pi = 3.14$

$\pi = 3.14159265$

$\pi \approx 3.14259265$

$0.1\overline{6} < \frac{1}{6}$

$\mathrm{e} \approx 2.7183$

$-\sqrt{3} < 0 - \sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{8^8}{\mathrm{e} \cdot \pi}} > 1.9646 \cdot 10^6$

1.7 Betrag

«*Wo ist negativ positiv? Beim Alkohol-Test!*»

Lernziele

- Symbol
- Bedeutung als Abstand
- Gleichungen mit Betrag lösen

Definition 1.5 (Betrag): Unter dem **Betrag** oder **Absolutbetrag** einer Zahl versteht man deren (positiven) **Abstand** zum Nullpunkt. Das Symbol zum Betrag sind zwei senkrechte Striche:
$|a| := a$, wenn a positiv
bzw.
$|a| := -a$ falls a negativ.

Bemerkung 1.3: Mit $|a-b|$ wird der Abstand der Zahlen a und b berechnet. Ist nämlich $b > a$, so ist die Differenz negativ und wird mit dem $|\cdot|$-Symbol ins Positive gekehrt.

Bemerkung 1.4: Einfach zum Merken: Dem Abstand zwischen zwei Punkten ist egal, in welche Richtung er gemessen wird. So liegt Zürich genauso weit von Bern entfernt, wie Bern von Zürich entfernt ist. Somit gilt $|a-b| = |b-a|$.

1.7.1 Beispiele

Für welche Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt

$|4| = x$

$|4| = -x$

$|-4| = x$

$|-4| = -x$

$|x| = 4$

$|x| = -4$

$|-x| = 4$

$|-x| = -4$

Theorieaufgabe:

$$\big|7 - |-3|\big| - |-7 - 3|$$

2. Beispiel:

Für welche x gilt folgendes:

$$|x - 3| = 8$$

Aufgaben

1. a) bis e) und 2. a) bis g)
Arbeitsblatt: Betrag [A1B]

1.7.2 Kontrolle

Berechnen Sie:

$$||4-8|-11| = \rule{4cm}{0.4pt}$$

Challenge: Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:

$$|x| = 11.4 \Longrightarrow \mathbb{L}_x = \rule{4cm}{0.4pt}$$

$$|x-3| = 7 \Longrightarrow \mathbb{L}_x = \rule{4cm}{0.4pt}$$

Für welche Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|-x| = -x$$

$$\mathbb{L}_x = \rule{4cm}{0.4pt}$$

Youtube
Mathe Mann/Mathe Frau: Betrag

2 Terme

«*Römische Bäder?*»

Lernziele

- Termanalyse (Summe, Differenz, Produkt, Quotient, Potenz)
- Hierarchie der Terme (Vorrangregeln)
- Termumformungen
- Ausmultiplizieren

Theorie [**?**]: Seite 17 Nr. 1.3

2.1 Term-Definition

Definition 2.1 (Term): Ein **Term** ist entweder

- ein Atom (eine Zahl (z. B. 4.86) oder eine Variable (z. B. a, x))
- ein Klammerausdruck (z. B. $\boxed{(T)}$, inkl. Wurzeln $\boxed{\sqrt{T}}$)[a]
- eine **Potenz**[b] ($\boxed{T_1^{T_2}}$ z. B. a^3, $(2a-4)^{x+2}$)
- ein Bruchterm[c] ($\boxed{\frac{T_1}{T_2}}$ z. B. $\frac{2^x}{x^2}$)
- ein implizites **Produkt**[d] (z. B. $4aT$)[e]
- ein explizites **Produkt** ($\cdot$; $T_1 \cdot T_2$ z. B. $a \cdot (-1)$) bzw. ein expliziter **Quotient** (:, /, $\div$; $6a \cdot 3b$ bzw. $T_1 : T_2$ z. B. $36m^2 : 12m^2$)
- eine **Summe** (bzw. **Differenz**) von Monomen (Zum Beispiel bilden die folgenden vier «Pakete» eine Differenz):
  $-4x^2 + \frac{3a+b}{x} + \sqrt{5y^2-6} - 5t : 2t$

(In obiger Aufzählung hat der am höchsten stehende Term die größte «Bindungskraft». Beispiel «Punkt vor Strich».)

[a] Dabei wird der horizontale Strich wie eine Klammer aufgefasst.

[b] Als Exponent darf ein beliebiger Term eingesetzt werden, wohingegen als Basis lediglich Atome, Klammerausdrücke und Wurzelterme verwendet werden dürfen, wegen der Verwechslungsgefahr. Bei $\frac{a}{b}^c$ ist nämlich nicht klar, wohin das c denn gehört.

[c] Wie bei der Wurzel, dient der Bruchstrich als Klammerpaar: $\frac{U}{V} = (U) : (V)$

[d] Ein implizites Produkt ist mit Koeffizienten angereicherter Ausdruck **ohne** Multiplikationszeichen.

[e] Tritt eine Zahl auf, so ist diese immer ganz links zu schreiben. Zahlen rechts von Ausdrücken werden mit einem Multiplikationszeichen ($\cdot$) versehen: $5x$, aber $x \cdot 5$.

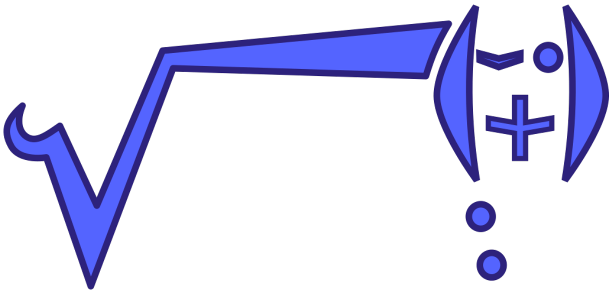
Gegenbeispiele Keine Terme sind z. B. : $x \cdot -8$, $\sqrt{+^2}$, $4 + *($, $\frac{7}{+}$, $\frac{(a+b}{-c-d)}$.

Generell werden die fünf wichtigsten Termarten in die folgenden drei Kategorien eingeteilt:

- Potenz
- Produkt und Quotient
- Summe und Differenz

2.2 Vorrangregeln

Es gilt Punkt vor Strich. Daneben bindet ein Exponent (z. B. 5^8) noch stärker. Am stärksten binden Klammern oder horizontale Linien (Bruchstrich, Wurzelzeichen).



Das *Klapopustri* meint dazu:

Klammern vor **Potenzen** vor **Punkt** vor **Strich**

Beispiel:

$$-10^4 = \underline{\hspace{4cm}}$$

2.2.1 Terme benennen

Nicht jeder Term, der ein Pluszeichen enthält, ist automatisch eine Summe.

Teilen Sie die folgenden Terme in die Kategorie «Summe/Differenz», «Produkt/Quotient» und «Potenz/Wurzel» ein. Tipp: Setzen Sie vorab «unnötige» Klammern und Multiplikationspunkte:

Term	mit Klammern	Zuordnung
$3x^{4-a} - y^{b+2}$	$\left(3 \cdot \left(x^{(4-a)}\right)\right) - \left(y^{(b+2)}\right)$	Differenz
$ax + 2b$		
$\frac{5+x}{5x}$		
$\sqrt{2x^3 + 5}$		
$(a+b)^{c+d}$		
$(5-3y)c^8$		
$(\sqrt{x-3} + \sqrt{8-b})^2$		
$2 \cdot 7^{3-y}$		
$\frac{1}{5} - 2 \cdot 4^{x+1}$		

Achtung Bei zusammengeschriebenen Faktoren (z. B. ab) bindet die Multiplikation stärker als beim expliziten verwenden des Multiplikationszeichens (z. B. $a \cdot b$). Beispiel $a \cdot bm = a \cdot (b \cdot m)$.

Gleich ein Beispiel, wo dies eine Rolle spielt:

$$111x : 37x = (111x) : (37x) = 3$$

Aber

$$111 \cdot x : 37 \cdot x = ((111 \cdot x) : 37) \cdot x = 3x^2$$

Aufgaben

Aufgaben aus dem Buch[?]: Seite 23ff Nr. 21. und 22.

2.3 Terme mit Namen

Oft gibt man Termen Namen, um sie einfacher identifizieren und bezeichnen zu können. So könnte z. B. die Oberfläche einer Konservendose mit A (Area) wie folgt bezeichnet werden, wenn r den Radius bzw. h die Höhe bezeichnen:

$$A(r,h) = r^2\pi + r^2\pi + 2r\pi h$$

Dabei ist A der Name des Terms und r bzw. h sind die Parameter.

Beispiel 2.1 (Werte einsetzen): Wir betrachten den Term
$T(a,x) = 5ax - a + 7$.
Nun gilt, dass für jeden Parameter im Term (hier a bzw. x) jede Zahl eingesetzt werden kann.

$T(2,-3) =$ ________________

Es können auch Terme anstelle der Parameter eingesetzt werden[a]:

$T(z-4, 2y) =$ ________________

[a] Beachten Sie, dass beim Einsetzen von Termen in der Regel Klammern gesetzt werden müssen!

Bemerkung 2.1: Achten Sie beim Ersetzen des Parameters durch das Argument auf die Klammersetzung. Wenn nicht sicher: Immer Klammern um die Argumente setzen, welche für die Parameter eingesetzt werden:

$$a = z - 4$$
$$a \to (z-4)$$

Gesetz 2.1 (Einsetzen): Beim Einsetzen eines Term in eine Variable sind **immer** Klammern zu setzen!

2.3.1 Übungsbeispiel

$$T(b,y) = 7y^2 - 4by$$

Wir berechnen

$T(\underbrace{s}_{b}, \underbrace{-t}_{y}) =$..

und

$T(x, 2b) =$ ....

Aufgaben

Berechnen Sie die Werte der folgenden Terme und kontrollieren Sie anschließend Ihre Resultate mit dem Taschenrechner:

-10^4	____________
$(-10)^5$	____________
$(-100)^2$	____________
x^6, für $x = -1$	$x^6 =$ ____________
$-x^5$, für $x = -10$	$-x^5 =$ ____________
$(-x)^3$, für $x = -2$	$(-x)^3 =$ ____________
$A(r) = r^2\pi$	$A(4) =$ ____________
$T(x) = -x^2 \cdot x^1$	$T(3) =$ ____________
$f(x) = -x^2 \cdot x^3$	$f(-2) =$ ____________
$D(a; b; c) = b^2 - 4ac$	$D(1; -2; -3) =$ ____________

Füllen Sie die folgende Tablele aus:

x	5	3	-1	0
a	2	$\frac{1}{2}$	0	-3
b	0	2	-1	1
x^2	25	________	________	________
x^3	________	________	________	________
$-x^2$	________	________	________	________
$a-b^2$	________	________	________	________
$10x^2$	________	________	________	________
$\left(-\frac{b}{-a}\right)$	________	________	________	________

Weitere Trainingsaufgaben im Buch. Beispiel:

Aufgaben aus dem Buch[**?**]: Seite 24ff Nr. 26. a) b) c), 27. a) 28. und 29.

3 Grundoperationen

«*Im Grunde ganz einfach?*»

Lernziele

- Addition, Subtraktion
- Multiplikation
- Distributivgesetz, Assoziativgesetz, Kommutativgesetz

Theorie [**?**]: Seite 28 Nr. 2

3.1 Addition und Subtraktion

Beispiel 3.1:

$$x^2 - ((x^3 - x^2) - (-(-x + x^2) - (x^2 - x^3)))$$

Regeln:

- Klammern werden von innen nach außen aufgelöst.
- Gleichwertige Operationen[3] werden von links nach rechts *geklammert*:

$$10 - 4 + 5 = (10 - 4) + 5 \neq 10 - (4 + 5)$$

- Negative Vorzeichen vor Klammern wechseln die Vorzeichen der Summanden innerhalb der Klammer.
- Es können nur gleiche Variable (bzw. Produkte von Faktoren) addiert (bzw. subtrahiert) werden.

[3] Zum Beispiel alles Minus und Plus oder aber zum Beispiel alles *Punkt*-Operationen (Produkt/Quotient).

Aufgaben

1. und 2.
Arbeitsblatt: Grundoperationen [A1G]

3.2 Multiplikation

Theorie [?]: Seite 29 Nr. 2.2

Für die Addition und die Multiplikation gelten die drei folgenden Gesetze:

Gesetz 3.1:

- Assoziativgesetz: $a + (b + c) = (a + b) + c$ und $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- Kommutativgesetz: $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$
- Distributivgesetz[a]:
  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
  $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$
  $(a + b) \cdot c = ac + bc$
  $(a - b) \cdot c = ac - bc$
  $(a + b) : c = a : c + b : c$
  $(a - b) : c = a : c - b : c$

[a] lat. ***distribuere*** = verteilen

3.2.1 Ausmultiplizieren

Beim Ausmultiplizieren wird jeder Summand in der Klammer mit dem Faktor vor (bzw. nach) der Klammer multipliziert.

Beispiel 3.2: $4 \cdot (x + 5) =$ __________________

Beispiel 3.3:

$$(x + 7) \cdot (8 - y) = x \cdot (8 - y) + 7 \cdot (8 - y) = 8x - xy + 56 - 7y$$

oder

$$(x + 7) \cdot (8 - y) = (x + 7) \cdot 8 - (x + 7) \cdot y = 8x + 56 - xy - 7y$$

3.2.2 Kein Distributivgesetz bei Multiplikation eines Produktes

Berechnen Sie

$$a \cdot (4 + b) = \underline{\hspace{5cm}}$$

... und ...

$$a \cdot (4 \cdot b) = \underline{\hspace{5cm}}$$

3.2.3 Achtung

Auch wenn die folgenden Ausdrücke sehr ähnlich aussehen, so handelt es sich beim ersten um eine **Differenz** und bei den anderen um ein **Produkt**!

$$10 - (x - 4) = \underline{\hspace{3cm}}$$

$$-10(x - 4) = \underline{\hspace{3cm}}$$

$$-10(x \cdot (-4)) = \underline{\hspace{3cm}}$$

Diese Unterschied wird auf dem Taschenrechner besonders gut deutlich:

$7 - 3 = 4$

$7 \cdot (-3) = -21$

3.2.4 Referenzaufgabe

$$3ab - (x - a(2 - b)) \cdot 3$$

Aufgaben

3., 4. und 5.

Arbeitsblatt: Grundoperationen [A1G]

3.2.5 Minus mal Minus (optional)

Wir können uns vorstellen, dass $3 \cdot (-4)$ dasselbe ist wie $(-4)+(-4)+(-4)$. Daher gilt

- $3 \cdot 4 = 12$
- $3 \cdot (-4) = (-12)$
- $(-3) \cdot 4 = (-12)$

Warum soll aber $(-3) \cdot (-4)$ gleich $+12$ sein?

Hier einige Erklärungsversuche:

Negativer Krankheits-Befund Wer negativ auf einen schlimmen Virus- oder Bakterienbefall getestet wurde, kann die sich doch in einer positiven Situation sehen.

Vorzeichen: Sehen wir die Zahl (-4) als Gegenzahl von 4, so können wir auch die Gegenzahl der Gegenzahl betrachten: $4 = -(-4) = -(1 \cdot (-4)) = (-1) \cdot (-4)$. Somit ist $(-1) \cdot (-4) = +4$.

Rechengesetze einhalten: Wir versuchen den Rechengesetzen, die wir von den positiven Zahlen her kennen, Allgemeingültigkeit zu verleihen, dann müssen sie auch für die negativen Zahlen gelten. Somit ist

$$(-4) \cdot 0 = 0$$

Null anders schreiben:

$$(-4) \cdot (3 - 3) = 0$$

Gegenzahl addieren:

$$(-4) \cdot (3 + (-3)) = 0$$

Distributivgesetz:

$$(-4) \cdot 3 + (-4) \cdot (-3) = 0$$

Term $(-4) \cdot 3$ ausrechnen:

$$-12 + (-4) \cdot (-3) = 0$$

Der Gleichung links und rechts 12 hinzufügen (addieren):

$$(-4) \cdot (-3) = 12$$

Schuldscheine abgeben: Eine anschauliche, aus dem Leben gegriffene, Analogie ist das «Verschenken von Schuldscheinen». Bezeichnen wir Banknoten als Kreditscheine, so besitzt eine 50er Note einen Wert von +50. So hat ein Schuldschein von 50.– Franken (oder Euros) den Wert (−50).

GeldwertGewinn/Verlust	Effekt	
+ 50.– (Banknote)	3 (erhalten)	+ 150.– (Gewinn)
- 50.– (Schuldschein)	3 (erhalten)	- 150.– (Verlust)
+ 50.– (Banknote)	-3 (abgeben)	- 150.– (Verlust)
- 50.– (Schuldschein)	-3 (abgeben)	+ 150.– (Gewinn)

4 Binomische Formeln

«2: Zwei, bi-, di-, zwie-, doppel, binär, duo, dual, Boole'sch, paar, stereo, sekund-, …[4]*»*

Youtube

Binomische Formeln (10:37)

Youtube

Binomische Formeln Daniel Jung (4:07)

Lernziele

- Erste: $(a+b)^2$
- Zweite: $(a-b)^2$
- Dritte: $(a+b)(a-b)$
- $1-x^2=(1+x)\cdot(1-x)$

Theorie [?]: Seite 29 Nr. 2.2.1

[4]Zürich unterscheidet die Zahl 2 je nach Geschlecht: «zwoo Fraue», «zwéé Mane» und «zwäi Chinde»

4.1 Binomische Formeln

Es gilt:

Daraus folgen die drei binomischen Formeln

Gesetz 4.1 (Binomische Formeln):

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Graphischer Beweis der 1. binomischen Formel:

Beispiel 4.1:
Typische Anwendungen der binomischen Formeln:

$$(x+5)\cdot(x-5) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$(t+1)\cdot(t-1) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$(x-2)\cdot(x-2) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

4.2 Pascalsches Dreieck

Berechnen Sie $(a+b)^4$:

Zeichnen Sie das Pascalsche Dreieck:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & ... & & ... & & ... & & ... & \\
1 & & ... & & ... & & ... & & ... & & ...
\end{array}
$$

Aufgaben

1.) und 2.)

Arbeitsblatt: Binomische Formeln [A1Bi]

4.3 Das Summenzeichen

«Der Mathematiker zählt lieber, als dass er glaubt.»

4.3.1 Notation

Um Summen mit vielen Summanden abzukürzen, wird das mathematische Summenzeichen (ein griechisches Sigma) $\sum$ benutzt:

Definition 4.1:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 =: \sum_{z=1}^{5} z$$

Sprich «Summe über alle z; von z gleich eins bis fünf».

4.3.2 Laufvariable

Es spielt keine Rolle, mit welchem Variablennamen der Laufindex abgekürzt wird. Üblich sind Buchstaben wie i, j, k, m, n:

$$\sum_{n=1}^{5} n = \sum_{i=1}^{5} i = \sum_{k=1}^{5} k = 15$$

Die Laufvariable erhöht ihren Wert für jeden Summanden um 1 (eins).

Beispiel 4.2 (Summenzeichen):

$$\sum_{n=3}^{5} n^7 = 3^7 + 4^7 + 5^7$$

Beispiel 4.3:

$$\sum_{s=5}^{8} (3s - 4) = (3 \cdot 5 - 4) + (3 \cdot 6 - 4) + (3 \cdot 7 - 4) + (3 \cdot 8 - 4)$$

Aber:

Beispiel 4.4:

$$\sum_{s=5}^{8} 3s - 4 = (3 \cdot 5) + (3 \cdot 6) + (3 \cdot 7) + (3 \cdot 8) - 4$$

4.3.3 Übungsaufgaben

Berechnen Sie

$$\sum_{x=3}^{5} x^2 = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\sum_{x=2}^{4} (x+1)^2 = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\sum_{n=-40}^{60} (n-10) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

Für Spezialisten:

$$\sum_{i=3}^{10} \left(i^6 - (i-1)^6\right) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

Tipp: Schreiben Sie die ersten drei und die letzten beiden Summanden explizit hin.

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^i(x-1) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

4.3.4 Mittelwert, Indizes

Im Zusammenhang mit Indizes (i) (z. B. bei Datenreihen) wird meist diese Notation benutzt.

Seien also $x_1 = 5$, $x_2 = 8$, $x_3 = 6$ und $x_4 = 5$ vier Messwerte. Betrachten wir die Summe über alle x_i von i gleich eins bis vier:

$$5 + 8 + 6 + 5 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =: \sum_{i=1}^{4} x_i = 24$$

Dies wird z. B. beim Mittelwert (arithmetisches Mittel) verwendet. Seien wieder $x_1 = 5$, $x_2 = 8$, $x_3 = 6$ und $x_4 = 5$. So ist $\bar{x}$ wie folgt berechnet:

$$\bar{x} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^{4} x_i$$

Dabei ist

$$\frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^{4} x_i = \frac{1}{4} \cdot \left(\sum_{i=1}^{4} x_i \right) = \frac{1}{4} \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

oder ganz allgemein für n Datensätze. Der Mittelwert der n Datensätze ist der n-te Teil der Summe über alle x_i für i gleich eins bis n:

Gesetz 4.2 (Mittelwert):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Ausgeschrieben:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)$$

Teil II

Geometrie I

5 Dreiecke

«... nein, wir sind nicht Asterix und Obelix: Wir sind Römer, wir sind Sinus und Cosinus ...[5]*»*

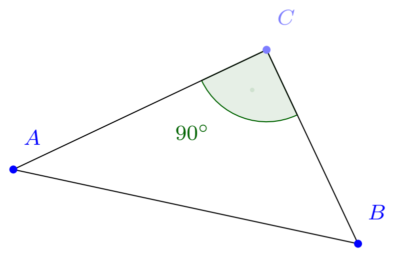
Lernziele

- Satz des Pythagoras anwenden
- Winkelsumme = 180°
- Höhensatz

Theorie [**?**]: Seite 28 Nr. 2.3

[5] S. Asterix – Tour de France – Seite 40

5.1 Rechtwinkliges Dreieck



Definition 5.1 (Rechtwinkliges Dreieck): Im **rechtwinkligen** Dreieck misst der Winkel gegenüber der längsten Seite 90°.

5.2 Satz des Pythagoras

Gesetz 5.1 (Satz des Pythagoras): Im rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse c gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

5.3 Höhensatz (optional)

Im rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenusenabschnitten p und q gilt:

$$h^2 = p \cdot q$$

Beweise:

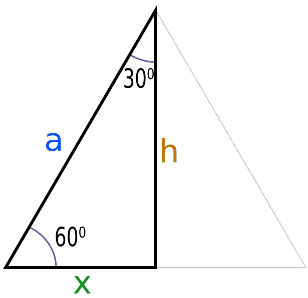
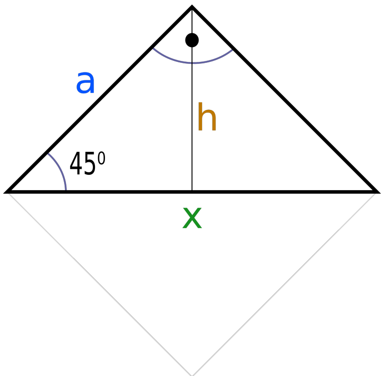
Aufgaben aus dem Buch[**?**]: Seite 37 Nr. 8., 9., 11., 12., 13., 15., 28., 29., 30.

5.4 Winkelsumme im Dreieck

Gesetz 5.2 (Winkelsumme im Dreieck): In jdem Dreieck mit Winkeln α, β und γ gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

5.5 gleichseitiges Dreieck und halbes Quadrat

	$x = \frac{a}{2}$ $h = \sqrt{3} \cdot x$ $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$
	$x = \sqrt{2} \cdot a$ $h = \frac{x}{2}$ $h = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a$ $a = \sqrt{2} \cdot h$

Aufgaben

Aufgaben aus dem Buch[**?**]: Seite 37 Nr. 7., 19., 20., 21., 24., 26., 33., 34., 40. und 41.

6 Kreise

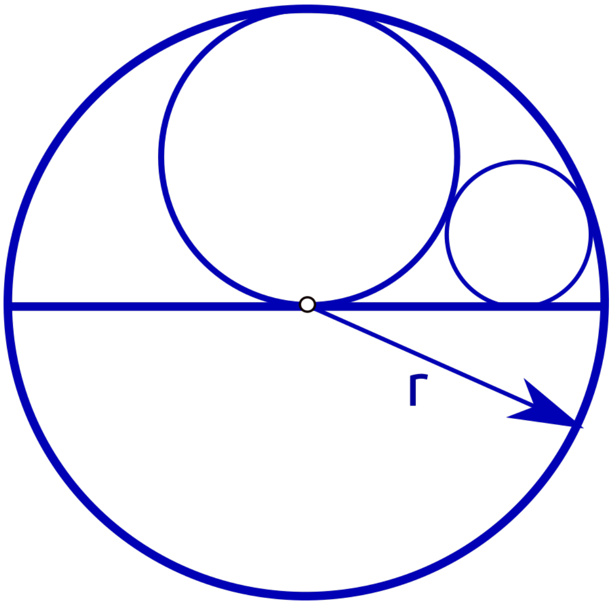
«*Warum sind Seeräuber so schlecht in Geometrie? — Weil sie* π *raten!*»

Lernziele

- einfache Kreisberechnungen
- Kreisring
- Tangente
- Sehne (und Sekante)
- Segment und Sektor

Theorie [**?**]: Seite 56 Nr. 4

6.1 Kreisberührung



In obigem Kreis sind zwei kleinere Kreise einbeschrieben. Berechnen Sie den Radius k des kleinsten Kreises aus dem gegebenen Radius r des großen Kreises.

Rezept 6.1 (Kreisberührung): Bei Aufgaben, bei denen sich zwei Kreise **berühren**, ist es von Vorteil, die Mittelpunkte der Kreise mit den Tangentenpunkten zu verbinden.
Danach suchen Sie rechtwinklige Dreiecke.

6.2 Umfang und Fläche

Gesetz 6.1 (Kreislinie): Die Länge der Kreislinie wird aus dem Durchmesser $d = 2r$ mittels Kreiszahl π berechnet. Es gilt für den Umfang U:

$$U = 2r\pi = d\pi$$

Gesetz 6.2 (Kreisfläche): Die Kreisfläche A eines Kreises mit Radius r wird wie folgt berechnet:

$$A = r^2\pi$$

Herleitung

6.3 Kreisteile

Gesetz 6.3 (Kreisring): Die Kreisringfläche ist die Differenz der umgebenden Kreisfläche (Radius R) und der inneren Kreisfläche (Radius r):

$$A = A(R) - A(r) = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi$$

Gesetz 6.4 (Kreisbogen und Kreissektor): Für den Sektorwinkel φ werden Bogen b und Sektorfläche A_{SK} wie folgt berechnet:

$$b = 2r\pi \cdot \frac{\varphi}{360°} = r\pi \cdot \frac{\varphi}{180°}$$

$$A_{SK} = r^2\pi \cdot \frac{\varphi}{360°} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r$$

Rezept 6.2 (Geometrische Aufgaben): Um geometrische Aufgaben zu lösen, hat bei mir folgendes meist geholfen:

1. Machen Sie eine Skizze
2. Machen Sie eine möglichst genaue Konstruktion
3. Geben Sie Gegebenem und Gesuchtem Namen
4. Verwenden Sie Farben für Gegebenes
5. Verwenden Sie die selben Farben (od. Symbole) für die selben Streckenlängen, Winkel, Flächen
6. Bei Aufgaben mit Kreisen: Verbinden Sie die Mittelpunkte
7. Suchen Sie rechtwinklige Dreiecke (Pythagoras)

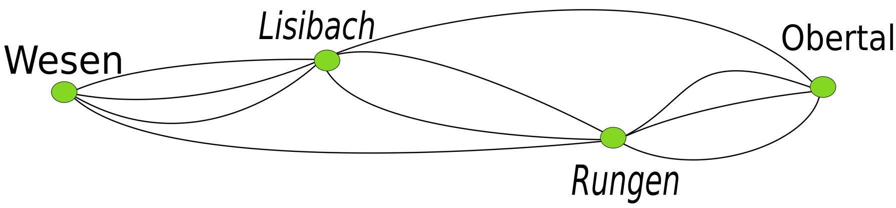
Teil III

Stochastik I

7 Kombinatorik

Die Kombinatorik befasst sich damit, wie viele Möglichkeiten für verschiedene Konstellationen zur Wahl stehen.

Als Einstiegsbeispiel dient die folgende Wanderung:



Auf wie viele Arten kann der Wanderer von Wesen (im Westen) nach Obertal (im Osten) gelangen, wenn er ausschließlich von West nach Ost wandern will?

Die Antwort kann durch Abzählen (oder eine Kombination von Abzählen und Multiplizieren) gefunden werden:

7.1 Variation mit Wiederholung (Produktregel)

Ein Zahlenschloss hat vier Ringe und auf jedem Ring sind die Zahlen von 1 - 6 einstellbar. Also pro Ring sechs Möglichkeiten. Wie viele Variationen gibt es im ganzen für dieses Zahlenschloss?

Definition 7.1 (Variation): Eine **Variation** ist eine **geordnete** Stichprobe.

Dieses Experiment entspricht im **Urnenmodell** dem...

Gesetz 7.1 (...Ziehen mit Zurücklegen / Reihenfolge wesentlich.): Bei diesem Urnenmodell kann jeder Zug unabhängig vom vorangehenden wieder alle Werte annehmen. Die **Reihenfolge** der gewählten Kugeln ist hier **wesentlich**. Für k Züge aus genau n Kugeln, die alle verschieden sind, gibt es N Möglichkeiten:

$$N = n^k$$

$N \quad =$

$n \quad =$

$k \quad =$

Referenzaufgabe Zahlenschloss

Ein Zahlenschloss wie eben soll gebaut werden. Dabei hat jeder Ring die Ziffern von 0 bis 6 (also insgesamt 7 Ziffern). Das Schloss soll mindestens 20 000 Variationen anbieten. Wie viele Ringe muss ich nehmen?

Aufgaben

Die vier Freundinnen Anna, Barbara, Chloris und Danielle werden nach den Ferien in die acht Klassen 3a-3h eingeteilt. Auf wie viele Variationen ist dies möglich?

In einer Urne liegen 20 verschiedenfarbige Kugeln. Vier mal nacheinander wird blindlings eine Kugel gezogen, die Farbe wird notiert und die Kugel wird wieder zurückgelegt. Wie viele Farbschemata sind möglich? Dabei darf eine Farbe im Schema auch mehrfach auftreten.

Kim hat vier Pullover, drei Paar Hosen und 2 Paar Schuhe. Auf wie viele Arten kann sich Kim bekleiden?

Bei einem Spiel wird zunächst eine Münze geworfen (Kopf oder Zahl), danach ein Spielwürfel geworfen (1-6) und zu letzt mit dem Kompass eine der vier Himmelsrichtungen (N,O,S,W) bestimmt. Ein Möglicher Ausgang wäre (Kopf, Drei, Ost). Ein anderer möglicher Ausgang wäre (Zahl, Zwei, Süd). Wie viele solche Ausgänge sind denkbar?

7.2 Variation ohne Wiederholung

7.2.1 Permutationen (Fakultät)

Lateinisch «permutare» = vertauschen

Hanna und Igor fahren Bus. Die beiden für sie reservierten Plätze sind nebeneinander, doch nur einer davon ist ein Fensterplatz. Auf wie viele Arten können sich die beiden Personen auf die beiden Plätze verteilen?

Das Problem ist etwas komplizierter, wenn nun Hanna, Igor mit Jana eine Flugreise machen. Die drei reservierten Plätze sind wieder nebeneinander. Ein Platz ist am Fenster, einer zum Gang und der dritte Platz ist zwischen den beiden anderen. Auf wie viele Arten können nun Hanna, Igor und Jana ihre Plätze wählen?

Machen Sie die selbe Überlegung noch mit vier Personen[6] und vier Plätzen...

... und mit fünf Plätzen und fünf Personen[7].

[6] Ach ja: Die vierte Person ist Karl.

[7] Die fünfte Person heißt übrigens Lena, auch wenn es für die Berechnung keine Rolle spielt.

7.2.2 Fakultät als Operation

Ganz allgemein gilt: Bei n Personen auf n Plätzen gibt es

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$$

Möglichkeiten.

Diese Rechnung ist im Taschenrechner unter der Operation "Fakultät" bekannt und wird üblicherweise mit der Taste $\boxed{\text{n!}}$ bezeichnet. Auf Ihrem Rechner ist es die Taste ! nCr nPr.

Berechnen Sie die Fakultät von 3, 4, 5 und 20 mit dem Taschenrechner.

Auf wie viele Arten können Sie sich als Klasse in Ihre Bänke verteilen? Machen Sie die Überlegung so, wie es aussehen würde, wenn es keine leeren Plätze gäbe.

Dies entspricht im Urnenmodell dem ...

Gesetz 7.2 (Ziehen aller Objekte ohne Zurücklegen / Reihenfolge wesentlich.): In diesem Urnenmodell entspricht die Fakultät einer Urne mit n Kugeln, die alle verschieden sind. **Alle** n Kugeln werden genau einmal gezogen (**ohne** Wiederholung).

$$N = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

N = Variationen

n = Alle Objekte kommen genau einmal vor ($n = k$)

Ein alter Bekannter (optional):

Bemerkung 7.1 (Summenzeichen): Erinnern Sie sich an das Summenzeichen? Berechnen Sie

$$\sum_{n=0}^{15} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{15!}$$

Das Summenzeichen finden Sie unter der Taste math 5.[a]

[a] Gönnen Sie sich ein Glas süßen Sirup, während Ihr Taschenrechner diese Summe für Sie berechnet.

Erinnern Sie sich auch an dieses Resultat?

Aufgaben

7.2.3 Permutation einer Teilmenge

Stellen wir uns vor, wir könnten sechs Kunstbände (Bücher) in ein schmales Regal stellen. Mehr geht nicht, weniger wollen wir nicht. Nun haben wir zehn solcher Bücher zur Auswahl. Auf wie viele Arten können wir nun sechs Bücher in unser Regal einordnen?

Oder als Formel:

Gesetz 7.3 (Ziehen ohne Zurücklegen / Reihenfolge wesentlich): Im Urnenmodell entspricht dies dem Ziehen von k Kugeln aus einer Urne mit total n Kugeln. Die Kugeln werden nicht zurückgelegt, jedoch ist die Reihenfolge der Züge wesentlich:

$$N = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$N =$ Variationen
$n =$ Objekte zur (optionalen) Auswahl
$k =$ auszuwählende nicht wiederholbare Objekte

Veranschaulichung (2 aus 5):

12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54

Das sind fünf Blöcke mit je vier Objekten $= 5 \cdot 4 = \frac{5!}{(5-2)!}$.

Bemerkung 7.2: Wenn wir alle n Objekte geordnet auswählen, so erhalten wir $\frac{n!}{(n-n)!} = n!$, was dem bereits bekannten Spezialfall der **Permutation** entspricht.

Gesetz 7.4 (Variation ohne Wiederholung): Bei n Objekten zur Auswahl und k geordnet ausgewählten Objekten davon, ist immer

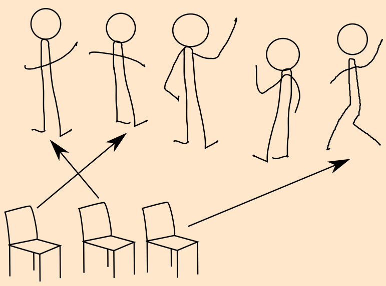
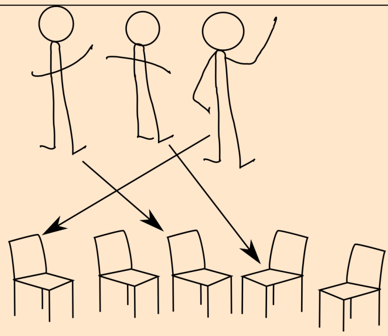
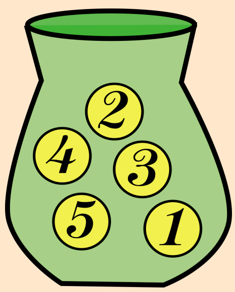
$$n \geq k.$$

7.2.4 Freie Plätze?

Wie viele Möglichkeiten hat eine Klasse mit k Lernenden, sich auf $k+1$ Plätze zu verteilen?

Wie viele Sitzordnungen sind möglich, wenn es zwei oder mehr freie Plätze gibt?

Bemerkung 7.3 («Plätze» ist nicht gleich «Stühle»): Nicht immer sind die zur Verfügung stehenden Objekte die Personen und nicht immer wird die Reihenfolge durch die Plätze (Stühle) festgesetzt:

	$n = 5$ $k = 3$	
Hier sind fünf Personen **zur Auswahl**, somit ist $n = 5$. Die Ordnung wird als Reihenfolge der Stühle betrachtet ($k = 3$).	$N = \frac{5!}{(5-3)!}$	Hier sind fünf Stühle **zur Auswahl**, somit ist $n = 5$. Die Ordnung wird als Reihenfolge der Personen (z. B. 1. Person auf Stuhl C) betrachtet ($k = 3$).
Im Urnenmodell bezeichnen fünf Kugeln die fünf Personen und ich ziehe **der Reihe nach** drei heraus, die ich in eben dieser Reihenfolge auf die Stühle setze.		Im Urnenmodell bezeichnen fünf Kugeln die fünf Stühle und ich ziehe **der Reihe nach** drei heraus, die ich in eben dieser Reihenfolge den Personen zuordne.
Es wäre eine andere Problemstellung, für die 1. Person drei mögliche Stühle, für die 2. Person zwei Stühle und für die 3. Person den 3. verbleibenden Stuhl auszuwählen. Hier kämen die Personen 4 und 5 gar nie zum Sitzen und das Problem würde sich auf die Permutationen von 3 (also 3!) beschränken.		

Bemerkung/Konvention: Das n ist immer die größere der beiden Zahlen: $\boxed{\text{n} > \text{k}}$, denn für **jedes** der k muss eine Option aus n vorhanden sein. Hingegen von den n Optionen werden i. d. R. nicht alle ausgewählt.

Aufgaben

In einer Urne sind sieben Kugeln beschriftet mit «A», «B», «C», «D», «E», «F» und «G». Sie ziehen drei davon heraus, ohne diese wieder zurückzulegen, um ein dreibuchstabiges Akronym für ihr «Startup-Unternehmen» zu schaffen. Beispiel «EFC», «DAB», «GEA», ...
Wie viele dreibuchstabige Akronyme mit nur verschiedenen dieser Buchstaben sind denkbar?

Ein Zahlenschloss mit vier Ringen wird verdreht. Jeder Ring hat alle Ziffern von 0..9 (also zehn Ziffern) als wählbare Möglichkeiten. Auf wie viele Arten kann ich das Zahlenschloss verdrehen, wenn jede Ziffer genau einmal vorkommen darf?

(*kombinierte Aufgabe*) Das selbe Zahlenschloss wird so verdreht, dass eine Ziffer dreimal und eine andere Ziffer einmal vorkommt. Wie viele Varianten sind das?

(optional; schwierig) Das selbe Zahlenschloss wird so verdreht, dass eine Ziffer maximal zweimal auftreten kann. Wie viele Varianten gibt es nun?

7.3 Kombinationen

Im Folgenden betrachten wir die Familie G. aus W.:

- Mutter, klein, dunkelhaarig, ...
- Vater, groß, blond, ...
- 1. Kind: Tochter, groß, blond, Teenager, ...
- 2. Kind: Sohn, klein, blond, Teenager, ...
- 3. Kind: Tochter, klein, dunkelhaarig (noch kein Teenager), ...

Die Familie hat gemerkt, dass es meist nicht nötig ist, alle Namen aufzuzählen, wenn eine Teilmenge der Familie angesprochen werden soll:

- «Heute kochen die Teenager.»
- «Die großen dürfen heute ausnahmsweise länger aufbleiben.»
- «Die Eltern sind heute nicht zu Hause.»
- ...

Suchen Sie für einige «**Dreiergruppen**» der Familie G. eine treffende Bezeichnung:

Wie viele “Teilmengen”, solcher **Kombinationen**, bestehend aus genau **drei** Familienmitgliedern sind möglich?

Die Anzahl der Möglichkeiten, drei Objekte aus einer Menge mit total fünf Objekten auszuwählen, wird in der Mathematik mit dem Binomialkoeffizienten angegeben:

Berechnet wird dies mit der Fakultät (Anzahl der Permutationen), indem alle fünf Objekte permutiert werden. Wir erhalten so zu viele Möglichkeiten. Wir dividieren die Zahl durch die Anzahl aller Permutationen der gewählten Personen, aber auch durch die Anzahl aller Permutationen der nicht gewählten Personen:

Definition 7.2 (Kombination): Eine **Kombination** ist eine **un**geordnete Stichprobe.

Wenn die Reihenfolge der Objekte keine Rolle spielt, gilt:

Die Anzahl der Möglichkeiten, k Objekte aus einer Grundgesamtheit von n Objekten auszuwählen, ist gleich

Definition 7.3 (Binomialkoeffizient):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Berechnen Sie gleich:

- $\binom{5}{3}$
- $\binom{5}{2}$ (begründe)

Diese Zahl wird Binomialkoeffizient genannt und kann mit dem Taschenrechner einfach mittels ! nCr nPr[8] berechnet werden.

Gesetz 7.5 (Ziehen ohne Zurücklegen / Reihenfolge egal.): Im Urnenmodell entspricht der Binomialkoeffizient dem Ziehen von k Kugeln aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln.

- Die Reihenfolge der gewählten Kugeln ist hier nicht relevant.
- Die Kugeln werden **nicht** zurückgelegt (ohne Wiederholung).

$$N = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$\begin{aligned} N &= \\ n &= \\ k &= \end{aligned}$$

[8] Zweimaliges Drücken der Taste: Wählen Sie für den Binomialkoeffizienten “nCr”, nicht “nPr”.

7.3.1 Begründung (Optional)

Am Beispiel mit den fünf Personen kann man die Formel erkennen:
Es gibt insgesamt 5! Variationen, die fünf Personen in einer Reihe aufzustellen:

AB	CDE
AB	CED
AB	DCE
AB	DEC
AB	ECD
AB	EDC
AC	BDE
AC	BED
...	...
BA	CDE
BA	CED
BA	DCE
...	...
...	...
ED	CBA

Somit haben wir insgesamt:

Bemerkung 7.4 (Herleitung der Formel): Stellen Sie die n Objekte in eine Reihe. Dazu gibt es $n!$ Möglichkeiten. Nun dividieren wir die Vertauschungen der gewählten Objekte ($k!$) und die Vertauschungen der nicht gewählten Objekte $(n-k)!$ davon weg, es bleibt:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

7.3.2 Optional: Name Binomialkoeffizient

Wie viele “Teilmengen”, nicht nur mit drei Personen, gibt es in obiger fünfköpfigen Familie im Ganzen?

Erklärung: Zahlenschloss (Variation mit Wiederholung):

Für jedes Objekt hat es zwei Optionen:“dabei” (x) bzw. “nicht dabei” (-):

A	B	C	D	E	n ausgewählt
-	-	-	-	-	0
x	-	-	-	-	1
-	x	-	-	-	1
-	-	x	-	-	1
-	-	-	x	-	1
-	-	-	-	x	1
x	x	-	-	-	2
x	-	x	-	-	2
x	-	-	x	-	2
x	x	x	-	-	3
x	x	-	x	-	3
x	x	-	-	x	3
x	x	x	x	x	5

Für jede Person muss ich die Entscheidung “dabei” (x), “nicht dabei” (-) treffen ($n = 2$). Es müssen aber nicht unbedingt beide Optionen vorkommen. Somit ergeben sich 2^5 Variationen ($n = 2; k = 5$).

Bemerkung 7.5 (Binomialkoeffizient): Jedes Objekt hat zwei Möglichkeiten, entweder es wird in die besagte Menge aufgenommen, oder er wird ausgeschlossen. Hier haben wir also 2 Möglichkeiten für jedes der Objekte. Dies ergibt für n Objekte insgesamt 2^n Möglichkeiten.
Somit gilt für eine Anzahl von n Objekten, dass es 2^n mögliche Teilmengen gibt.

Bemerkung 7.6 (Binomialkoeffizient): Zudem gilt für **Binome**:

$$(a+b)^3 = \binom{3}{3}a^3 + \binom{3}{2}a^2b + \binom{3}{1}ab^2 + \binom{3}{0}b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

7.3.3 Referenzaufgabe Euromillions

Beim Glücksspiel «Euromillions» werden fünf aus 50 Zahlen und zwei aus zwölf Sternen angekreuzt. Auf wie viel Arten ist dies möglich?

Aufgaben

Berechnen Sie $\binom{15}{4} = $ ____________

Begründen Sie, warum «5 aus 7» dasselbe ist, wie «2 aus 7»:

Auf wie viele Arten kann ich eine Delegation von drei Klassendelegierten aus einer Klasse von 21 Schülerinnen bzw. Schülern auswählen?

Swiss LOTTO (ohne den Stern): Auf wie viele Arten können Sie den Swiss-LOTTO Schein ausfüllen? Sie müssen 6 Zahlen aus 42 möglichen Zahlen ankreuzen:

7.4 Zusammenfassung

N = Anzahl Möglichkeiten, um k Elemente aus total n Elementen auszuwählen.

	mit Wiederholung (= mit Zurücklegen)	**ohne** Wiederholung (= ohne Zurücklegen)
Variation Reihenfolge wesentlich	$\boxed{N = n^k}$ Bsp.: Anzahl Wörter der Länge 4, die man aus 10 vorgegebenen Buchstaben bilden kann: $10^4 = 10\,000$	$\boxed{N = \frac{n!}{(n-k)!}}$ Bsp.: Anzahl Möglichkeiten, 4 Leute auf 10 Sitzplätze zu verteilen. $\frac{10!}{(10-4)!} = 5040$
Kombination Reihenfolge irrelevant	$N = \binom{n+k-1}{k}$ Bsp.: Anzahl Möglichkeiten, 4 Brote aus 10 Sorten auszuwählen: $\binom{10+4-1}{4} = 715$	$\boxed{N = \binom{n}{k}}$ Bsp.: Anzahl Möglichkeiten, 4 Karten aus 10 zu ziehen: $\binom{10}{4} = 210$

Teil IV

Gleichungen I

8 Lineare Gleichungen I

«*... weil keine zwei Dinge gleicher sein können.*[9]»

Lernziele

- Lineare Gleichungen
- Äquivalenzumformung / Lösungsmenge
- Grundform (GF) linearer Gleichungen
- Textaufgaben, die zu Gleichungen (ev. mit Parametern) führen.
- Einsatz des Taschenrechners

Theorie [**?**]: Seite 115 Nr. 8

[9] *Robert Recorde* (1557; *Der Wetzstein des Wissens*) über das Gleichheitszeichen als zwei Parallele: «... weil keine zwei Dinge gleicher sein können.»

Beispiel 8.1 (Einstiegsbeispiel):
$2x - 7 + 3x = 5x - 6 - \frac{x}{2}$

Definition 8.1 (Lineare Gleichung): Bei einer **linearen Gleichung** kommt die Gesuchte in der 1. Potenz vor; z. B. $x (= x^1)$.

Definition 8.2 (Grundform): **Grundform**:

$$ax + b = 0 \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Gesetz 8.1 (Lösungsformel): Lösung der linearen Gleichung in der Grundform

$$ax + b = 0$$

$$x = \frac{-b}{a}$$

Grundform

Beispiel 8.2 (Grundform): Bringen Sie die folgende lineare Gleichung auf die Grundform:

$$2x - 10 = -3x$$

Grundform: ____________ $= 0$
$a =$ ____________
$b =$ ____________
und somit

$$x = \frac{-(\quad)}{\quad} = \underline{\qquad\qquad}$$

Beispiel 8.3 (Lineare Gleichung): Die Gleichung $3x = -7$ ist äquivalent zur Grundform $3x + 7 = 0$ und somit ist die Lösung ____________

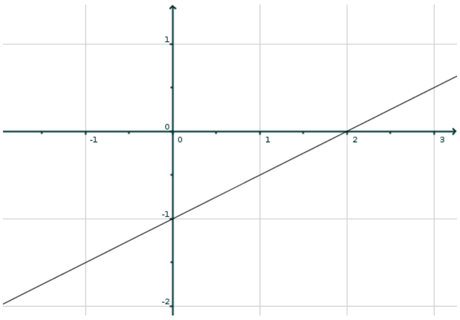
Beispiel 8.4 (Lineare Gleichung): Die Gleichung $-5x = 8$ ist äquivalent zur Grundform $-5x - 8 = 0$ und somit ist die Lösung ____________

8.1 Graphische Interpretation

Graphische Interpretation der Grundform:
In der Form

$$ax + b = 0$$

ist a die Steigung[10] der Geraden und b der Abschnitt auf der y-Achse[11]:



Charakteristische Punkte Die charakteristischen Punkte (spezielle Punkte) der linearen Funktion in Grundform sind

- $b = y$-Achsenabschnitt: Wo schneidet die Gerade die y-Achse?
- $a =$ Steigung der Geraden pro eine Einheit nach rechts (in x-Richtung)
- $\frac{-b}{a} =$ Lösung der Gleichung $ax + b = 0$. Dies ist der x-Achsenabschnitt.

[10] Steigung: Eine Einheit nach rechts: Um wie viele Einheiten steigt die Gerade an?
[11] y-Achsenabschnitt: Wo schneidet die Gerade die y-Achse.

8.2 Äquivalenzumformungen

Äqui... = Gleich...; ...valenz = ...wertig

Äquivalenzumformungen sind

Umformung	Beschreibung	Beispiel
$\mid$ TU	Termumformung	Beispiel: Links des Gleichheitszeichens a ausklammern; gilt , sofern sich die Definitionsmenge des Terms nicht ändert!
$\mid +T(x)$	Term beidseitig addieren.	$\mid + 4$, $\mid + \sqrt{x}$, $\mid + 8 \cdot x^2$
$\mid -T(x)$	Term beidseitig subtrahieren.	$\mid - 6$, $\mid - x^3$, $\mid - 5x$
$\mid \cdot T$	Mit von Null verschiedenem Term T multiplizieren.	$\mid \cdot 3$, $\mid \cdot (2 + \sqrt{5})$, $\mid \cdot a^2; a \neq 0$
$\mid : T$	Durch von Null verschiedenem Term T dividieren.	$\mid : 6$, $\mid : \frac{\pi}{6}$, $\mid : \sqrt{b}; b > 0$

keine Äquivalenzumformungen sind

Umformung	Beschreibung	Lösungen können...	Beispiel
$\mid$ potenzieren	Beide Seiten potenzieren	______________	$\mid \square^6$
$\mid$ radizieren	Auf beiden Seiten die Wurzel ziehen	______________	$\mid \sqrt[4]{}$
$\mid \cdot T(x)$	mit der Unbekannten multiplizieren	______________	$\mid \cdot (x+4)$, $\mid \cdot 3x^2$
$\mid : T(x)$	durch Unbekannte dividieren	______________	$\mid : (x-8)$, $\mid : \sqrt{x}$

8.2.1 Finde Äquivalenzumformungen

Der folgende Lösungsweg ist definitiv falsch. Irgendwo ist eine Umformung vorgenommen worden, die nicht gültig ist. Schreiben Sie bei jeder Umformung hin, um welche der oben angegebenen gültigen Äquivalenzumformung es sich handelt. Finden Sie den Fehler:

Im folgenden seien π und a als die Kreiszahl 3.14159... definiert. Es gilt also $\pi = a$.

	$a=\pi$	nach Voraussetzung
$\Longrightarrow$	$a \cdot a=a \cdot \pi$	wegen ....
$\Longrightarrow$	$a^2=a\pi$	....
$\Longrightarrow$	$a^2+a^2=a\pi+a^2$	....
$\Longrightarrow$	$2a^2=a\pi+a^2$	....
$\Longrightarrow$	$2a^2-2a\pi=a\pi+a^2-2a\pi$	....
$\Longrightarrow$	$2a^2-2a\pi=a^2-a\pi$	....
$\Longrightarrow$	$2a^2-2a\pi=a\cdot(a-\pi)$	....
$\Longrightarrow$	$2a\cdot(a-\pi)=a\cdot(a-\pi)$	....
$\Longrightarrow$	$\frac{2a\cdot(a-\pi)}{a-\pi}=\frac{a\cdot(a-\pi)}{a-\pi}$	....
$\Longrightarrow$	$2a=\frac{a\cdot(a-\pi)}{a-\pi}$	....
$\Longrightarrow$	$2a=a$	....
$\Longrightarrow$	$2=1$	....

8.3 Spezielle lineare Gleichungen

Typ A

$$1 + 4x + 2 = 5x - (x - 3)$$

Typ B

$$3x + 8 = 5x - (2x - 6)$$

8.4 Lösungsmenge

Die Zahlmenge, der gefundenen Lösungen einer Gleichung, nennen wir die Lösungsmenge und beschriften diese $\mathbb{L}$. Falls die gefundene Variable x z. B. den Wert 4 hat, dann schreiben wir:

____

Eine Gleichung ohne Lösung hat die leere Menge als Lösungsmenge und wir schreiben:

____

Falls alle Zahlen x die Gleichung lösen, so schreiben wir:

____

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}_x$ zur allgemeinen Grundform $ax + b = 0$ lautet somit

____

- Im Spezialfall **Typ A** gilt $a = 0$ und $b = 0$. Hier kann ich für x alles einsetzen und somit gilt $\mathbb{L}_x = \mathbb{R}$.
- Im Spezialfall **Typ B** gilt $a = 0$ und $b \neq 0$. Hier wird die Gleichung falsch, egal, was ich für x einsetze; somit ist $\mathbb{L}_x = \{\}$.

Aufgaben

Aufgaben aus dem Buch[**?**]: Seite 127ff Nr. 2. a) f), 3. a) h), 4. f) und 6. a) d) e) f)

9 Textaufgaben

«*Auf dem Schiff sind 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?*»

Lernziele

- Texte analysieren, Unbekannte bestimmen
- Gleichung aufstellen
- Probe, Lösungsmenge

(Beispiele: Zahlenrätsel, Geschwindigkeit, Arbeit, Leistung)

Theorie [**?**]: Seite 124 Nr. 8.5

Rezept 9.1 (systematischer Lösen von Textaufgaben): Die folgenden Vorgehensschritte[a] sind sehr hilfreich, auch wenn einige davon bei einfacheren Aufgaben gut übersprungen werden können:

1. Aufgabe analysieren und verstehen:
   - zuerst ganz durchlesen
   - Situation in eigenen Worten formulieren / Aufgabe verstehen.
   - gegebene & gesuchte Informationen herausschreiben (ev. eine Skizze / Tabelle machen)
2. Unbekannte Größe(n) eindeutig einführen (Variable immer möglichst präzise (inkl. Einheiten) definieren!)
3. mit den gegebenen Informationen Terme bilden
4. mit den Termen Gleichung(en) aufstellen (Gesuchtes & Gegebenes in eine Beziehung zueinander bringen.)
5. Gleichung lösen
6. Kontrolle: Ergibt mein Ergebnis Sinn? (Plausibilitätsüberlegung)
7. Antwortsatz geben (d.h. die mathematische Lösung sprachlich beschreiben)

[a] Entliehen aus dem Skript von Michael Rohner (BBW)

«Mathe ist der einzige Ort, wo Leute 144 Eier kaufen
und sich keiner fragt wozu.»

Aufgaben

Aufgaben aus dem Buch[?]: Seite 131ff Nr. 24., 25., 27., 28., 29., 32., 33., 35., 42., 43., 46., Geometrie: 47.-51., 54., 59. 62. schwierige Aufgaben: 26., 30., 31.

10 Lineare Gleichungen mit Parametern

«*Alle Zahlen sind gleich; nur einige sind gleicher.*»

Lernziele

- Lineare Gleichungen mit Parametern

Theorie [**?**]: Seite 116 Nr. 8.2

Parameter = (wörtlich) «Neben-Maß»
Griechisch $\pi\alpha\rho\alpha$ (para), deutsch: ‚neben' und $\mu\epsilon\tau\rho\omega\nu$ (metron) deutsch: ‚Maß'
Vorzeigeaufgabe:

Aufgaben

Aufgaben aus dem Buch[**?**]: Seite 128 Nr. 7. a) b) c) e), 8. a) d) e) f), 9. a) b) c) e) f), 10. a) b) , 11. b) und 12. a) d) e)

Teil V

Funktionen I

11 Koordinatensystem

«Was man nicht gut beschreiben kann, kann man auch nicht messen (René Descartes: franz. Philosoph und Mathematiker).»

Lernziele

- x-Achse und y-Achse
- Einheitsstrecke (e_x, e_y)
- kartesisch (nach René Descartes)
- Quadrant
- Ursprung, Nullpunkt

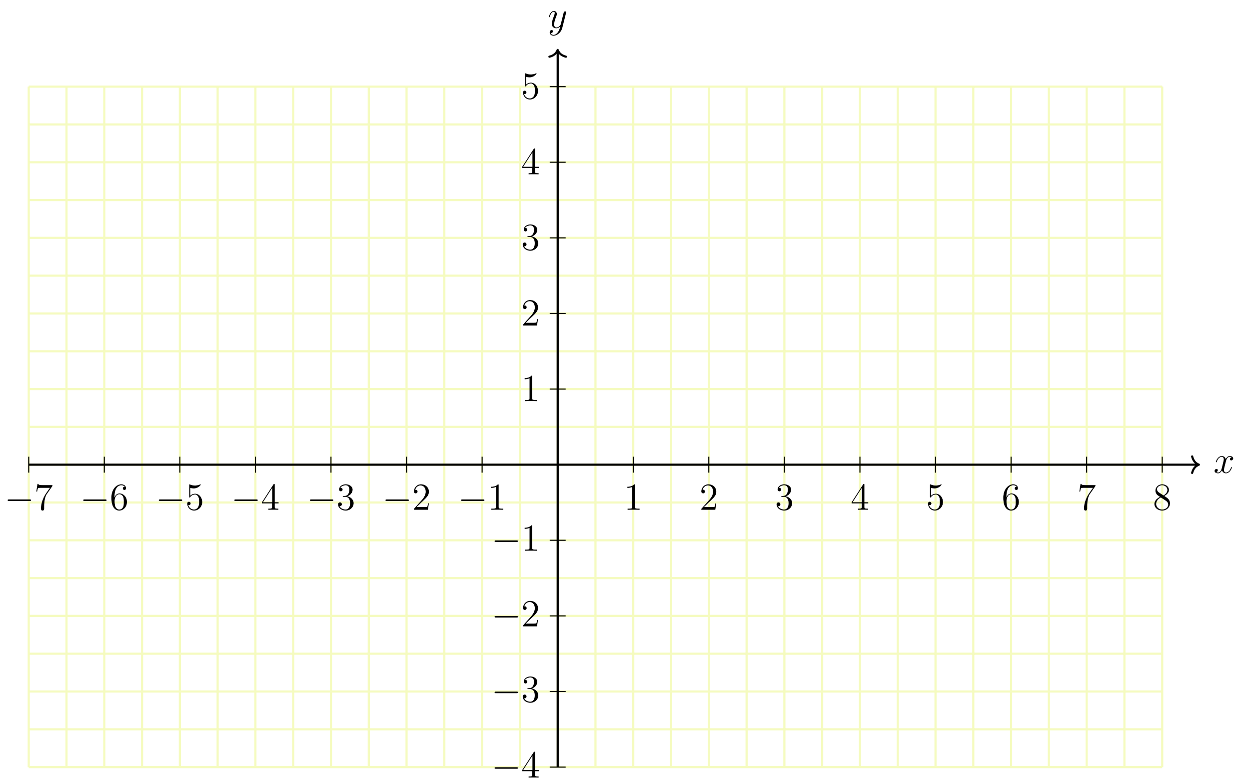
Theorie [**?**]: Seite 211 Nr. 13.1

11.1 Das kartesische Koordinatensystem

In einem Koordinatensystem kann man Zahlenpaare ($P = (x|y)$) als Punkte darstellen.

Bemerkung 11.1: Auch wenn in einigen Lehrbüchern die Bezeichnung $P(x/y)$ für Punkte gebräuchlich ist ([**?**]), ist sie jedoch die unglücklichste von allen. Gerade bei $P = (1/2, 5)$ treten im deutschsprachigen Raum Verwechslungen auf. Ist $P = (1/2, 5)$ nun gleich $P = (1|2.5)$ oder gleich $P = (\frac{1}{2}|5)$? Daher verwende ich lieber den senkrechten Strich, was auch in den BMS Abschlussprüfungen so gehandhabt wird. Im Lehrbuch wird jedoch konsequent der Divisionsstrich (/) verwendet, sodass hier auch keine Verwechslung auftreten kann.

11.2 Bezeichnungen im Koordinatensystem



Dabei bezeichnen e_x und e_y die Einheiten (z. B. cm, km, CHF, kg, ...) der entsprechenden Achsen.

Die x-Koordinate wird auch Abszisse und die y-Koordinate wird auch Ordinate genannt.

Aufgaben

Aufgaben aus dem Buch[**?**]: Seite 165 Nr. 577. e) f) 578. b) 579. a) c) 580. a) c) 581. b) 582.

12 Funktionen

«longitudo, latitudo (Begriffe nach Nikolaus von Oresme)»

Lernziele

- Zuordnung
- Mengenbegriffe: Definitionsmenge (= Definitionsbereich) vs. Quellbereich
- Wertebereich (= Bildmenge) vs. Zielmenge (=Zielmenge oder Wertevorrat)
- Darstellungsarten
  - Wertetabelle
  - Graphen
  - Funktionsterm
- verschiedene Notationen
- Gleichungen visualisieren
- Achsen
- Funktionsgleichung
- Abhängige, unabhängige Variable / Argument, Parameter, Funktionswert

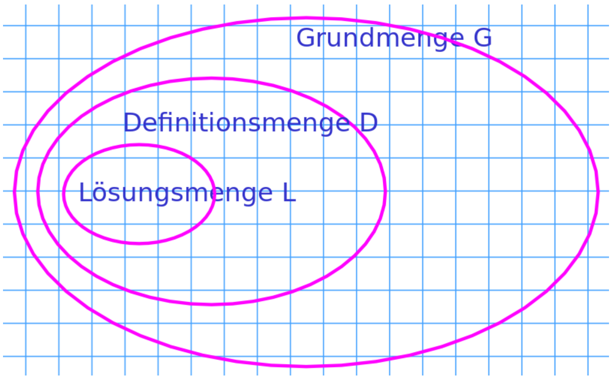
Theorie [**?**]: Seite 211 Nr. 13

12.1 Allgemeiner Funktionsbegriff

Definition 12.1 (Funktion): Eine **Funktion** ist eine **Zuordnung**, die jeder Zahl x aus einer Definitionsmenge **genau** eine Zahl y aus einer Zielmenge zuordnet.

Die Menge aller getroffenen Werte aus der Zielmenge wird **Wertebereich** (oder Bildmenge) genannt.

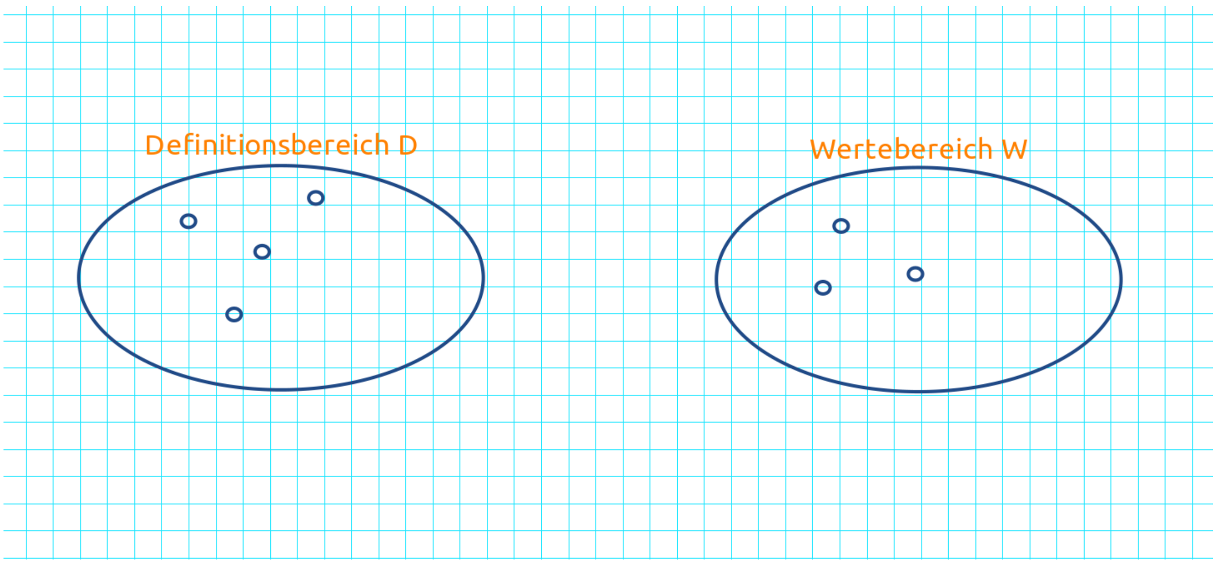
Mengenbezeichnungen bei Gleichungen (Diese Mengen sind bereits bekannt[12]):



Beispiel

$$\frac{1}{x-3} = 5$$
$$\mathbb{G} = \mathbb{R}$$
$$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{3\}$$
$$\mathbb{L}_x = 3.2$$

Mengenbezeichnungen bei Funktionen:



Beispiel 12.1 (reelle Funktion): Funktion Sinus $\sin()$: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$; $\mathbb{W} = [-1;1]$

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1;1] \text{ mit } \varphi \mapsto \sin(\varphi)$$

[12]Die Definitionsmenge bezeichnet hier die Menge aller Zahlen für die alle Terme definiert sind.

Beispiel 12.2: Funktion Tangens tan(): $\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{\pm 90°, \pm 270°, \pm 450°, ...\}$; $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

$$\tan : \mathbb{R} \backslash \{90° + z \cdot 180° | z \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \alpha \mapsto \tan(\alpha)$$

Bemerkung 12.1: Zum Wertebereich: Wo der Begriff Quellbereich (eine theoretische Obermenge des Definitionsbereichs) kaum praktische Bedeutung hat, wird jedoch in speziellen Fällen statt dem Wertebereich die **Zielmenge**[a] angegeben; meist daher, weil der Wertebereich in komplexen, fraktalen, sprungstetigen oder sonstwie komplizierten Funktionen schlicht und ergreifend nicht bekannt ist.[b]

[a] Die Zielmenge wird auch Zielbereich, Wertevorrat, Cobereich oder Nachbereich genannt ([**?**]).

[b] **Beispiel 1**: Bei der Funktion «mittlere Tagestemperatur» ist zwar die Zielmenge ($\mathbb{R}[°]$) bekannt, jedoch sind die effektiv getroffenen Bildwerte meist nur zwischen $-40°$ und $+50°$ vorzufinden (daher ist der effektiv eintretende Wertebereich erst dann bekannt, wenn das Wetter bereits eingetreten ist bzw. auch gemessen wurde).
Beispiel 2: (Sei π die Kreiszahl.) Der Funktion $f : n \mapsto f(n)$; $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}mitf(n)$ = «millionste Nachkommastelle von $n\pi$» kann der effektive Wertebereich nicht angesehen werden, bevor wir genügend oft die millionste Ziffer von $n\pi$ berechnet haben. Hier ist vorerst nur die Zielmenge, nicht aber der Wertebereich bekannt.

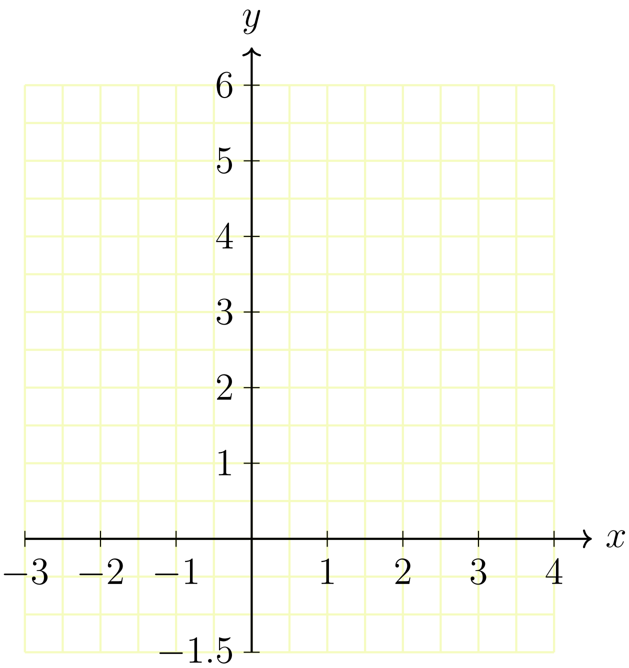
Aufgaben aus dem Buch[**?**]: Seite 232 Nr. 20., 21. und 22.

12.2 Arten der Darstellung

- Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1	2	2.5
$f(x) = y = x^2 - 1$	______	______	______	______	______	______

- Graphen im rechtwinkligen Koordinatensystem



- Funktionsschreibweise
  $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$
  Beispiel:
  $y = f(x)$ z. B. $y = x^2 - 1$
  $f : x \mapsto y$ mit $x \in \mathbb{D}$ und $y \in \mathbb{W}$
  Alternative Notation: $f : x \mapsto f(x)$ oder $x \mapsto x^2 - 1$

Notationen

Begriff	*Beispiel(e)*
Funktionsgleichung	
Funktionsterm	
Funktionsvorschrift	
Funktionsparameter	
Funktionsargumente	
Funktionswert	

Aufgaben

Aufgaben aus dem Buch[?]: Seite 231ff Nr. 17. a) b) und f) und 19. a) b) e) und f)

13 Lineare Funktionen

«$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$»

Lernziele

- Begriff «Lineare Funktion»
- Darstellungen (Wertetabelle, Funktionsgleichung, Graph)
- Charakteristische Punkte
  - y-Achsenabschnitt (Ordinatenabschnitt)
  - Nullstelle
- Steigung
- Taschenrechner: Darstellung von Graphen

Theorie [?]: Seite 237 Nr. 14

13.1 Einstiegsbeispiel Taxiunternehmen

Taxiunternehmen «A» hat eine Grundgebühr von CHF 10.- und kostet danach CHF 0.60 pro gefahrenen Kilometer.

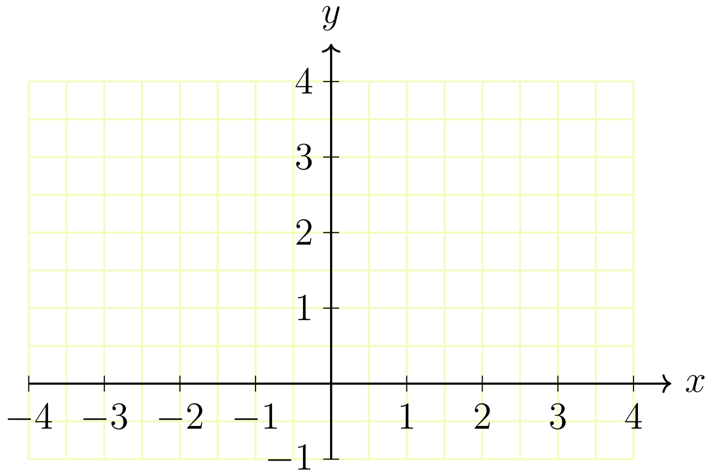
Taxiunternehmen «B» hat eine Grundgebühr von CHF 6.- und kostet danach CHF 0.90 pro gefahrenen Kilometer.

Ab bzw. bis wo lohnt sich das Unternehmen «A» bzw. «B»?

Zeichnen Sie ein Koordinatensystem. x-Achse = km; y-Achse = CHF. (Einteilung je ca. 20 Einheiten im 1. Quadranten.

13.2 Beispiel einer linearen Funktion

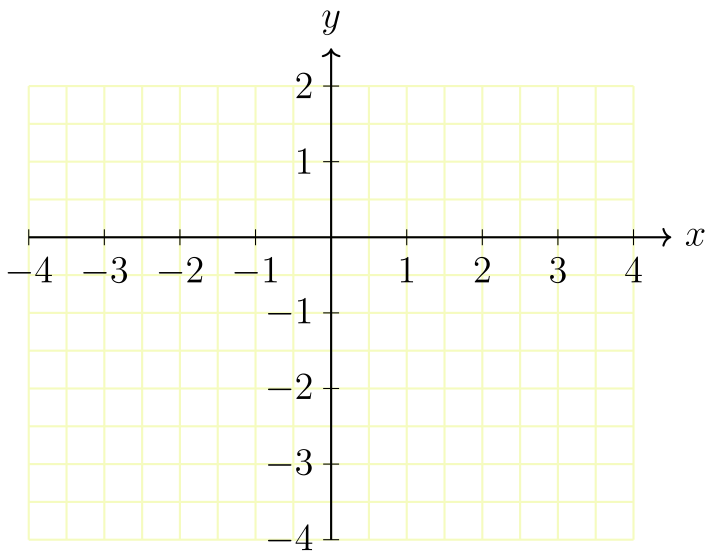
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f : y = -0.5x + 1$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem:



Punkte mit dem Taschenrechner : Mit der “Lists & Spreadsheet hinzufügen”-Funktion auf Ihrem Taschenrechner lassen sich Wertetabellen ganz einfach erstellen. Sind Sie bei einer Seite “Lists & Spreadsheet” (Tabellenkalkulation) angelangt, so drücken Sie die «menu»-Taste und wählen Sie «5: Wertetabelle».

Füllen Sie eine Wertetabelle zur Funktion $f : y = \frac{3}{4}x - 1.5$ aus und zeichnen Sie die Gerade ein ein rechtwinkliges Koordinatensystem:

x	-2	-1	0	1	2
y					



13.3 Definition der linearen Funktion

Definition 13.1:
Eine Funktion $f : x \mapsto f(x)$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ heißt **linear**, wenn sie in der Grundform

$$f(x) = y = a \cdot x + b$$

mit a und b in $\mathbb{R}$ dargestellt werden kann.

Beispiele:

$$f(x) = y = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

(Hier ist $a =$ ____________ und $b =$ ____________.)

$$f(x) = y = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

(Hier ist $a =$ ____________ und $b =$ ____________.)

Ist $b = 0$, so sprechen wir auch von einer Proportionalität.

$$f(x) = y = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

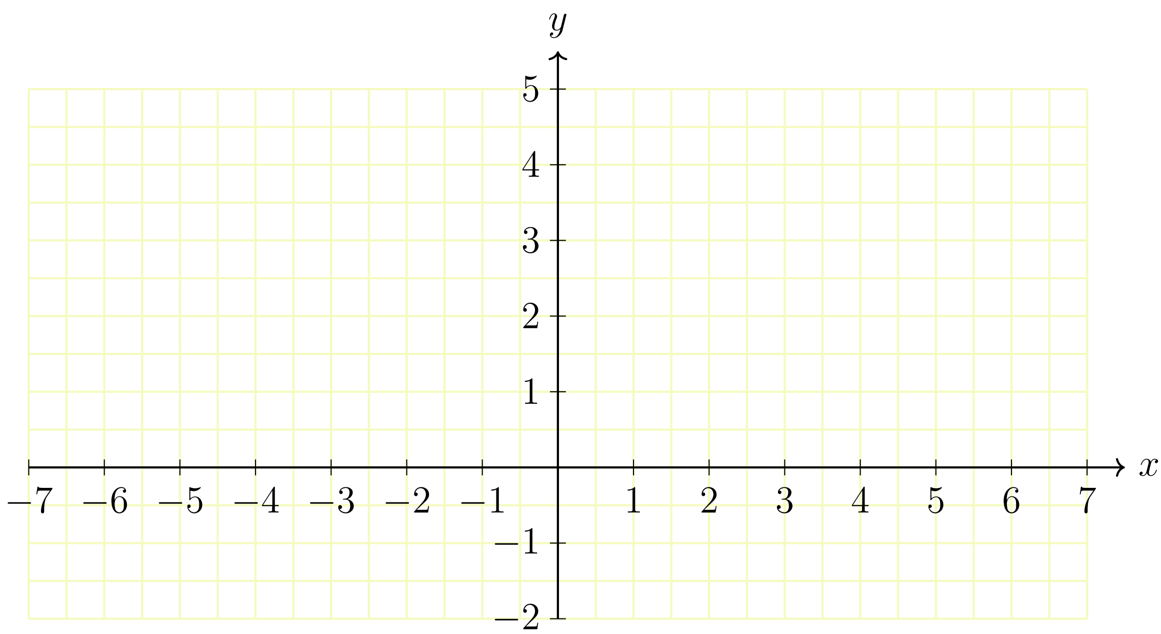
(Hier ist $a =$ ____________ und $b =$ ____________.)

Ist $a = 0$, so sprechen wir auch von der konstanten Funktion.

Jede lineare[13] Funktion schneidet irgendwo die beiden[14] Achsen. Zeichnen Sie die Funktion $f : y = \frac{1}{2}x + 3$ und notieren Sie die Punkte, wo die x- bzw. die y-Achse von unserer Geraden geschnitten wird:

Wertetabelle:

x	0	1	2	4	-4	
y						0



[13] Die linearen Funktionen werden eingeteilt in die **Proportionalitäten** für $b = 0$ und in die **affinen Abbildungen** für $b \neq 0$.

[14] Ausnahme: Konstante. Eine Konstante $y = b$ schneidet nur die y-Achse. Der Spezialfall $y = 0$ **ist** die x-Achse.

13.3.1 y-Achsenabschnitt

Definition 13.2 (y-Achsenabschnitt): Der Parameter b wird y-Achsenabschnitt (oder Ordinatenabschnitt[a]) genannt.
Dieser gibt an, in welcher «Höhe» die Gerade die y-Achse schneidet.

[a] Die y-Koordinate eines Punktes wird auch **Ordinate** und die x-Koordinate wird auch **Abszisse** genannt.

Wir erhalten den y-Achsenabschnitt, indem wir das Funktionsargument x gleich Null (0) setzen: $x = 0$.

Somit wird

$$y = ax + b$$

$$y = a \cdot 0 + b$$

$$y = b$$

Was uns zeigt, dass der Punkt $P = (0|b)$ der Geraden immer auf der y-Achse liegt.

13.3.2 Nullstelle

Wo schneidet der Funktionsgraph die x-Achse?

Dazu setzen wir $f(x) = y = 0$, und lesen wir den Schnittpunkt in obiger Grafik etwa bei $x = -6$ ab.

Definition 13.3 (Nullstelle): Eine **Nullstelle** ist gibt an, an welcher Stelle der Funktionsgraph die x-Achse schneidet.

Die Nullstelle einer linearen Funktion in ihrer Grundform ist die Lösung der entsprechenden linearen Gleichung (mit y=0) in ihrer Grundform. Nämlich:

a) Lineare Gleichung $ax + b = 0$

Gesucht **Lösung** x:

$$x = \frac{-b}{a}$$

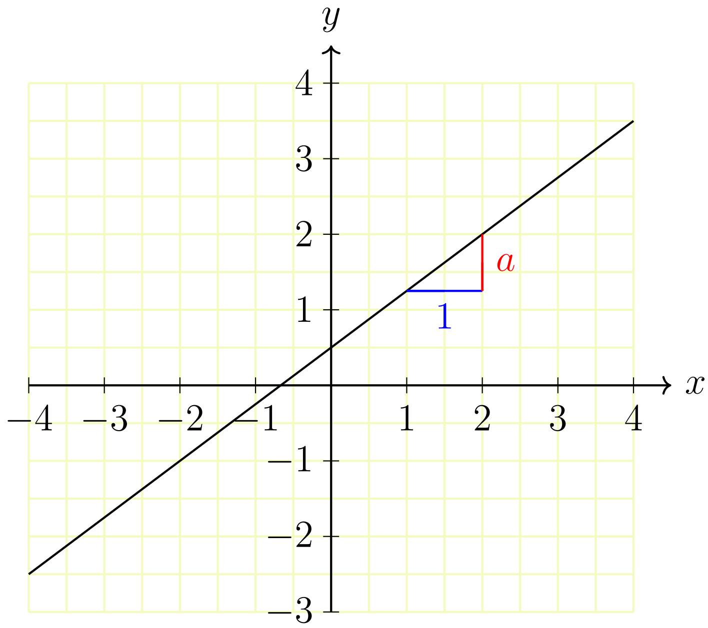
b) Lineare Funktion $f : y = ax + b$

Gesucht **Nullstelle** x_0 bei $y_0 = 0$. Die Gerade schneidet die x-Achse in der Nullstelle x_0 der Geraden. Somit ist der Schnittpunkt wie folgt gegeben:

$$N(x_0|y_0) = N\left(\frac{-b}{a} \,\middle|\, 0\right)$$

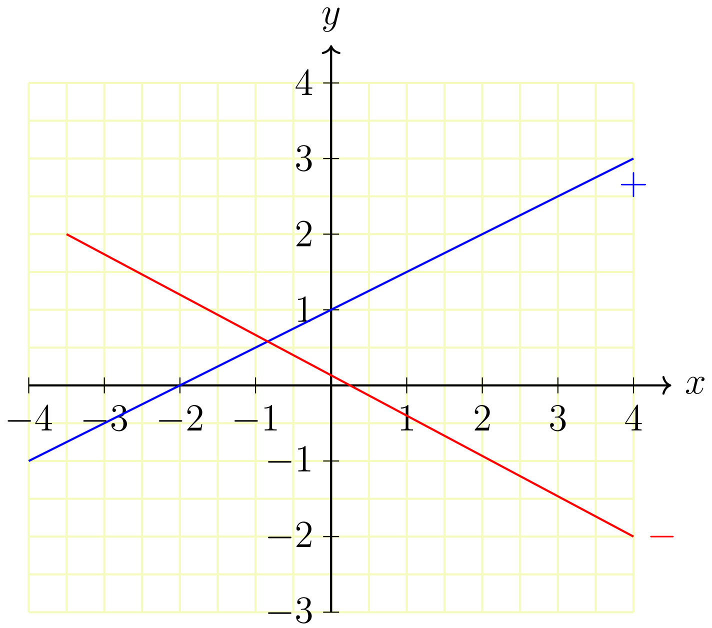
13.3.3 Steigung

Der Parameter a wird Steigung der Geraden genannt. Dies entspricht dem y-Anstieg[15] der Geraden pro Einheit in x-Richtung (e_x):

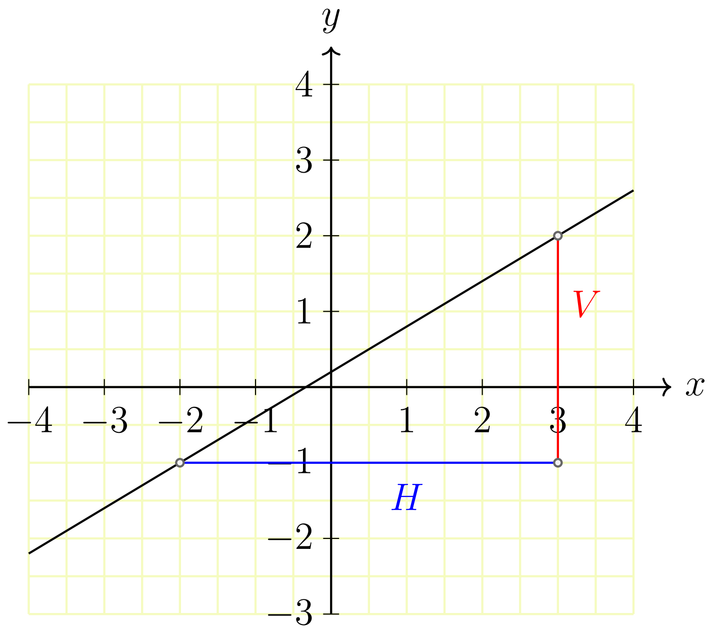


[15] Bei negativem a sprechen wir von «Gefälle», Abstieg, Neigung, Senkung, ...

Steigt die Gerade in x-Richtung an, so ist a positiv ($a > 0$); fällt die Gerade in x-Richtung ab, so ist a negativ ($a < 0$).



Die Steigung a kann aus **jedem** Steigungsdreieck berechnet werden, wozu einfach zwei Punkte auf der Geraden zu verwenden sind:



Rezept 13.1 (Finden der Geradensteigung): Die Steigung a ist:

$$a = \frac{V}{H}$$

«Vau durch Haa, das gibt das Ahh!»

Herleitung (optional)

Aufgaben

«Steigung, y-Achsenabschnitt, Nullstelle

Arbeitsblatt: Lineare Funtkionen

Aufgaben aus dem Buch[**?**]: Seite 250ff Nr. 5. a) (1) und b) (1), 7. a), 8. a) [Ursprungsgerade = Gerade durch den Nullpunkt], 10., 23. a) c) e) und optional 20. (Alkohol im Blut)

13.4 Referenzaufgaben

13.4.1 Senkrechte und Parallele

Die zwei Parallelen (Christian Morgenstern)

Es gingen zwei Parallelen
ins Endlose hinaus,
zwei kerzengerade Seelen
und aus solidem Haus.

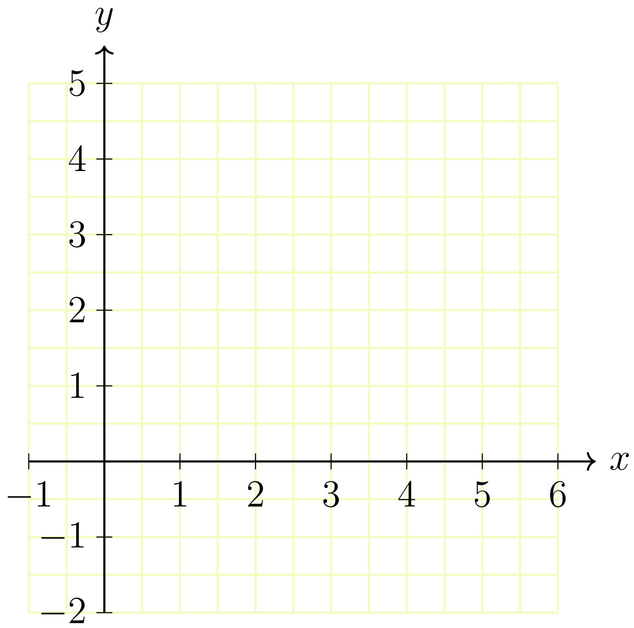
Sie wollten sich nicht schneiden
bis an ihr seliges Grab:
Das war nun einmal der beiden
geheimer Stolz und Stab.

Doch als sie zehn Lichtjahre
gewandert neben sich hin,
da wards dem einsamen Paare
nicht irdisch mehr zu Sinn.

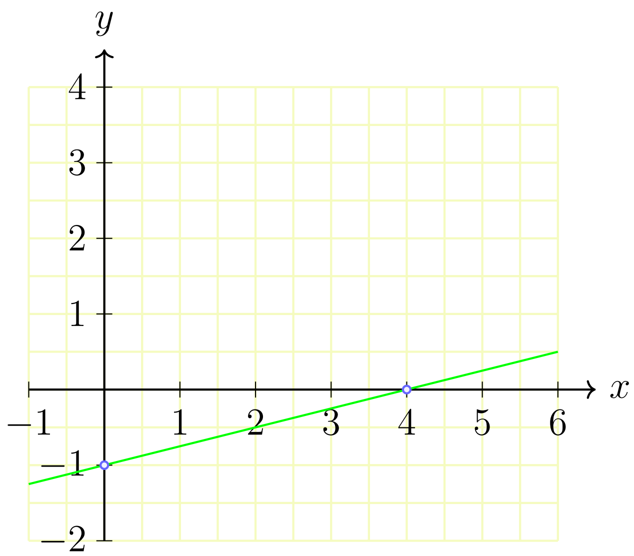
War'n sie noch Parallelen?
Sie wußtens selber nicht, —
sie flossen nur wie zwei Seelen
zusammen durch ewiges Licht.

Das ewige Licht durchdrang sie,
da wurden sie eins in ihm;
die Ewigkeit verschlang sie
als wie zwei Seraphim.

Parallele: Skizzieren Sie $f : y = \frac{1}{4}x + 3$ und $g : y = \frac{1}{4}x - 1$. Was fällt Ihnen auf?



Senkrechte Zeichnen Sie eine Senkrechte zur folgenden Geraden:



Gerade	Parallele	Senkrechte
$y = ax + b_1$	$y = ax + b_2$	$y = -\frac{1}{a}x + b_3$

Da es beliebig viele Senkrechte und Parallele zu einer gegebenen Geraden gibt, kann nur auf die Steigung eine Aussage gemacht werden. Sowohl b_2, wie auch b_3 können erst ermittelt werden, wenn weitere Angaben (wie z. B. ein weiterer Punkt) vorhanden sind.

Beachten Sie, dass hier a natürlich nicht Null (0) sein darf.

13.4.2 Ein Punkt ist gegeben

Bei vielen Anwendungen ist von der Geraden die Steigung a **oder** der y-Achsenabschnitt b gegeben, aber nicht beides. Dabei ist meist ein Punkt P (z. B. $P = (7|4)$) gegeben, durch den die Gerade laufen muss.

Gleich zwei Beispiele:

Steigung gegeben $y = 3 \cdot x + b$	y-Achsenabschnitt gegeben $y = a \cdot x + 1.5$
Punkt $P = (7\|4)$ gegeben	Punkt $P = (7\|4)$ gegeben
einsetzen: $4 = 3 \cdot 7 + b$	einsetzen: $4 = a \cdot 7 + 1.5$
lösen $\longrightarrow b = 4 - 21 = -17$	lösen $\longrightarrow a = \frac{4-1.5}{7} = \frac{2.5}{7} = \frac{5}{14} \approx 0.357$

Rezept 13.2 (Einsetzen): Koordinaten des gegebenen Punktes in die Geradengleichung einsetzen, um a bzw. b zu finden!

13.4.3 Gerade durch zwei gegebene Punkte

Einstiegsaufgaben Frommenwiler: 606. a) c)

Seien die Punkte $P = (10|6)$ und $Q = (-5|3)$ gegeben. Gesucht ist die Funktionsgleichung $f : y = ax + b$ (namentlich a und b), sodass der Graph der Funktion f durch beide Punkte führt.

Rezept I: Graphisch

Rezept II: Rechnerisch (algbraisch)

Rezept 13.3: Um die Funktionsgleichung

$$y = ax + b$$

zu finden, werden die x- und y-Koordinaten der beiden Punkte in die Gleichung eingesetzt und die beiden Gleichungen werden nach a und b aufgelöst.

Dies ergibt das folgende Gleichungssystem[16]:

Die Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt $3 = 15a$, was uns zu $a = \frac{1}{5}$ bringt. Das a kann auch durch das «Steigungsdreieck» berechnet werden:

$$a = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_p} = \underline{\hspace{5cm}}$$

Setzen wir $a = \frac{1}{5}$ in eine der beiden Gleichungen ein, so erhalten wir $b = 4$. Die gesuchte Geradengleichung lautet also:

$$f : y = \underline{\hspace{5cm}}$$

Dies kann auch mit dem Taschenrechner gelöst werden; denn für alle Punkte P auf f gilt ja $P(x|y) = P(x|f(x))$:

$$f(x) := a \cdot x + b$$

$$gls := \begin{cases} f(10) = 6 \\ f(-5) = 3 \end{cases}$$

[16]Für P gilt: $(x_P|y_P) = (x_P|f(x_P)) = (x_P|ax_P + b)$ und somit $y_p = ax_P + b$.

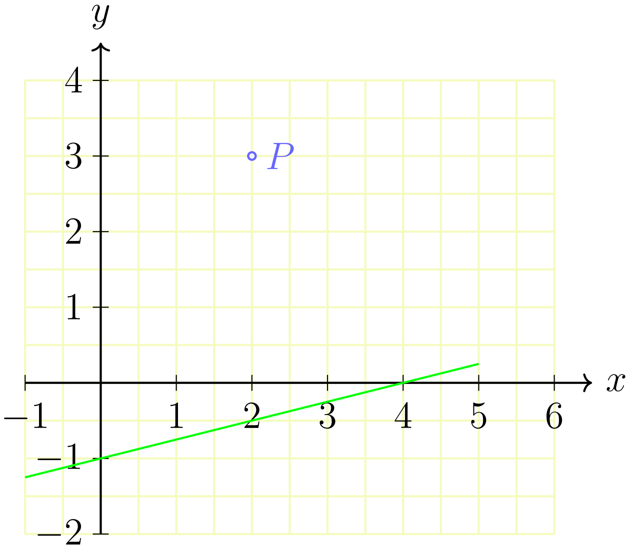
$$solve(gls, \{a, b\})$$

13.4.4 Referenzaufgabe: Abstand

Gegeben ist ein Punkt $P = (2|3)$ und eine Gerade $f : y = \frac{1}{4}x - 1$. Gesucht ist der Abstand des Punktes P zu f.

Wie ist der Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden wohl definiert?

1. Skizze



Suchen Sie in obiger Skizze den Abstand und messen Sie ihn.

2. Senkrechte ($g \perp f$)

3. g durch P ($P \in g$)

4. Schnittpunkt S ($S := g \cap f$)

5. Abstand mit Pythagoras ($\left|\overline{PS}\right|$)

13.4.5 TI nSpire

Wie sieht das mit dem CAS-fähigen Taschenrechner TI nSpire aus? Hier ein Beispiel einer Geraden $f1 : y = \frac{4}{3} - 2$ und dem Punkt $P = (-1|5)$.

Abstand zwischen Punkt (px | py) zur Geraden f1: y=a1 x + b1.

Der Schnittpunkt liegt bei (xs|ys)

$\mathbf{px}:=-1 \blacktriangleright -1$

$\mathbf{py}:=5 \blacktriangleright 5$

$\mathbf{a1}:=\frac{4}{3} \blacktriangleright \frac{4}{3}$

$\mathbf{b1}:=-2 \blacktriangleright -2$

$\mathbf{f1}(x):=\mathbf{a1}\cdot x+\mathbf{b1} \blacktriangleright \textit{Done}$

$\mathbf{a2}:=\frac{-1}{\mathbf{a1}} \blacktriangleright \frac{-3}{4}$

$\mathbf{f2}(x):=\mathbf{a2}\cdot x+b2 \blacktriangleright \textit{Done}$

$$\mathbf{gls}:=\begin{cases}\mathbf{py}=\mathbf{f2}(\mathbf{px})\\ \mathbf{f1}(xs)=\mathbf{f2}(xs)\\ ys=\mathbf{f2}(xs)\\ abst=\sqrt{(\mathbf{px}-xs)^2+(\mathbf{py}-ys)^2}\end{cases} \blacktriangleright \left\{5=b2+\frac{3}{4},\frac{4\cdot xs}{3}-2=b2-\frac{3\cdot xs}{4},ys=b2-\frac{3\cdot xs}{4},abst=\sqrt{xs^2+2\cdot xs+ys^2-10\cdot ys+26}\right\}$$

$\text{solve}(\mathbf{gls},\{abst,b2\}) \blacktriangleright abst=5 \text{ and } b2=\frac{17}{4} \text{ and } xs=3 \text{ and } ys=2$

13.5 Lineare Gleichungen visualisieren

Wir gehen von der linearen[17] Gleichung

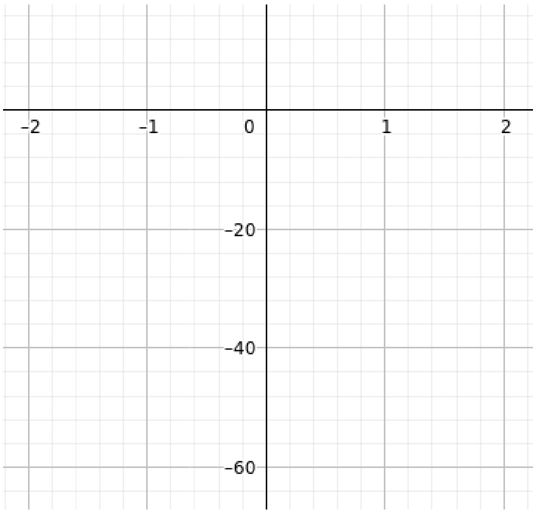
$$4x + 3x - 18 + 16x = 5$$

aus.
Bringen wir alle Summanden nach links, so erhalten wir folgende Gleichung:

Schreiben wir dies als Funktion in x, so können wir folgende Funktion definieren:

$$f(x) : x \mapsto y =$$

Stellen wir diese Funktion nun graphisch dar, so ergibt sich folgendes Bild:



Die Lösung obiger Gleichung kann nun auf der x-Achse ungefähr bei $x = 1.0$ abgelesen werden.

Aufgaben aus dem Buch[**?**]: Seite 249ff Nr. 4., 30.

[17]Eine Gleichung, bzw. ein Term heißt «linear», wenn die Variable (x) nur in der ersten Potenz vorkommt.