

Mathematik

Kantonsschule Stadelhofen — Brüche

Inhaltsverzeichnis

1	Bruchterme	3
1.1	Erweitern und Kürzen	4
1.2	Definitionsmenge	5
1.3	Rechnen mit Bruchtermen	8

1 Bruchterme

«*Wer sich mit einem Mathematiker anlegt, muss mit einem Bruch rechnen.*»

Lernziele

- Begriffe: Dividend (Zähler) : Divisor (Nenner) = Quotient (Bruch)
- Kürzen (und erweitern)
- Gleichnamig machen, Hauptnenner (kgV)
- Brüche addieren/subtrahieren
- multiplizieren
- Doppelbrüche (Brüche dividieren)

1.1 Erweitern und Kürzen

Jeder Bruch kann ohne ändern seines Wertes erweitert bzw. gekürzt werden:

Kürzen:

$$\frac{130}{50} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Erweitern:

$$\frac{4.6}{9.45} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Erweitern mit Minus 1:

$$\frac{a-b}{b-a} = \frac{(-1) \cdot (a-b)}{(-1) \cdot (b-a)} = \frac{(-1) \cdot (a-b)}{a-b} = -1$$

Rezept 1.1:

Bei Brüchen, das steht hier gedruckt:
«**Wir kürzen nur aus dem Produkt.**»
Ich habe deshalb mir geschworen.
Ich kürz' ab jetzt nur noch Faktoren.
Steht jedoch was zum Addieren,
muss ich erst !

Beispiel 1.1:

$$\frac{ax^2 - a}{(a^2 + 1)(ax + a)} =$$

1.2 Definitionsmenge

Definition 1.1 (Definitionsmenge): Die Menge aller Zahlen, die für die Variable in einem Bruch eingesetzt werden darf, nennen wir die **Definitionsmenge** \mathbb{D} oder den **Definitinosbereich**.

Bruch	Was darf nicht eingesetzt werden?	\mathbb{D} Definitionsmenge
$\frac{1}{x}$		
$\frac{1}{2-x}$		
$\frac{x}{(x-5)(x+3)}$		
$\frac{5}{5x^5-5x-60}$		

Aufgaben

5. Kürzen Sie so weit wie möglich:

a) $\frac{18}{12g}$ b) $\frac{-15abc}{35bcd}$ c) $\frac{-48x^5y^4}{-36x^2y}$ d) $\frac{-42m^6n^2}{-35m^5n^3}$

6. Kürzen Sie mithilfe von Ausklammern:

a) $\frac{4c-24}{4}$ b) $\frac{15d^2+25d}{5d}$ c) $\frac{-81x^4y^2}{9x^3y^2-45x^3y^2}$
d) $\frac{8k-16}{8k+36}$ e) $\frac{ax+bx}{ay+by}$ f) $\frac{2v^4-2v^3}{v^3-v^2}$

7. Kürzen Sie mithilfe der binomischen Formeln:

a) $\frac{5x-5y}{x^2-y^2}$ b) $\frac{c^4-c^2}{c^2+c}$ c) $\frac{m^2+2mn+n^2}{5m+5n}$
d) $\frac{12e^2-12e+3}{8e-4}$ e) $\frac{p^3-2p^2+p}{pq-q}$ f) $\frac{4z^2-25}{8z^2+40z+50}$

8. Kürzen Sie durch Ausklammern von Teilsummen:

a) $\frac{ax-ay+bx-by}{3x-3y}$ b) $\frac{rs+r+s+1}{rt+t+r+1}$ c) $\frac{4\lambda+4}{6\lambda^2-\omega-\lambda\omega+6\lambda}$
d) $\frac{ef+2e-f-2}{ef-e-f+1}$ e) $\frac{c^2-d^2}{c^2-d^2+10c+10d}$ f) $\frac{5a^2-5ac-ab+bc}{25a^2-10ab+b^2}$

9. Kürzen Sie durch Faktorisieren mithilfe des Zweiklammeransatzes:

a) $\frac{a^2+5a-24}{a^2-5a+6}$ b) $\frac{k^2+k-6}{k^2-k-12}$ c) $\frac{x^2+3xy-10y^2}{x^2+xy-6y^2}$
d) $\frac{w^2-10w+25}{w^2-w-20}$ e) $\frac{ac-3c}{5a^2-10a-15}$ f) $\frac{p^2-q^2+p+q}{2p-2q+2}$
g) $\frac{b^4-1}{b^4-11b^2+10}$ h) $\frac{y^4-5y^3}{y^3-y^2-20y}$ i) $\frac{10\phi^2-130\phi+220}{10\phi^2-40\phi+40}$

10. Kürzen Sie, indem Sie -1 ausklammern:

a) $\frac{2x-y}{y-2x}$ b) $\frac{uv-uv}{v-w}$ c) $\frac{a^3-a^2}{1-a^2}$
d) $\frac{32-4k}{k^2-3k-40}$ e) $\frac{g^2-g-20}{-g^2-g+30}$ f) $\frac{-4\delta^2+4\delta\epsilon-\epsilon^2}{8\delta^2-2\epsilon^2}$

11. Vereinfachen Sie durch Kürzen:

a) $\frac{2k+lm}{2klm}$ b) $\frac{5n^2-3n-2}{25n^2+20n+4}$ c) $\frac{c^2+4cd+4d^2-4e^2}{c^2-4ce+4e^2-4d^2}$
d) $\frac{3x^2+3y^2+6xy-3z^2}{4x+4y-4z}$ e) $\frac{(p+4)^2-(q-1)^2}{p+11-(q+6)}$ f) $\frac{49\gamma^2-4(\gamma+2)^2}{45\gamma^2-16\gamma-16}$

12. Kürzen Sie:

a) $\frac{20cx-15dx+8cy-6dy}{24cx+60cy-18dx-45dy}$ b) $\frac{-x^2+x^3+2xy-2x^2y-y^2+xy^2}{x^2-xy-x+y}$

13. Erweitern Sie mit -1 :

a) $\frac{1-k}{-k-2}$ b) $\frac{-a}{2c+d}$ c) $\frac{-x-y+8}{-8xy}$
d) $\frac{-4 \cdot (m-7)}{-n}$ e) $\frac{(r-s) \cdot (-r-2s)}{t}$ f) $\frac{e^2-5ef+f^2}{f^2-3ef+e^2}$

1.3 Rechnen mit Bruchtermen

1.3.1 Addition und Subtraktion von Bruchtermen

Gesetz 1.1 (Addieren von Brüchen):

$$\frac{a}{b} \pm \frac{x}{y} = \frac{ay \pm bx}{by}$$

Herleitung

$$\frac{a}{b} \pm \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{y} \pm \frac{x}{y} \cdot \frac{b}{b} = \frac{a \cdot y}{b \cdot y} \pm \frac{x \cdot b}{y \cdot b} = \frac{ay}{by} \pm \frac{xb}{yb} = \frac{ay \pm bx}{by}$$

Beispiel 1.2:

$$\frac{a+1}{-a} + \frac{a}{a-1} =$$

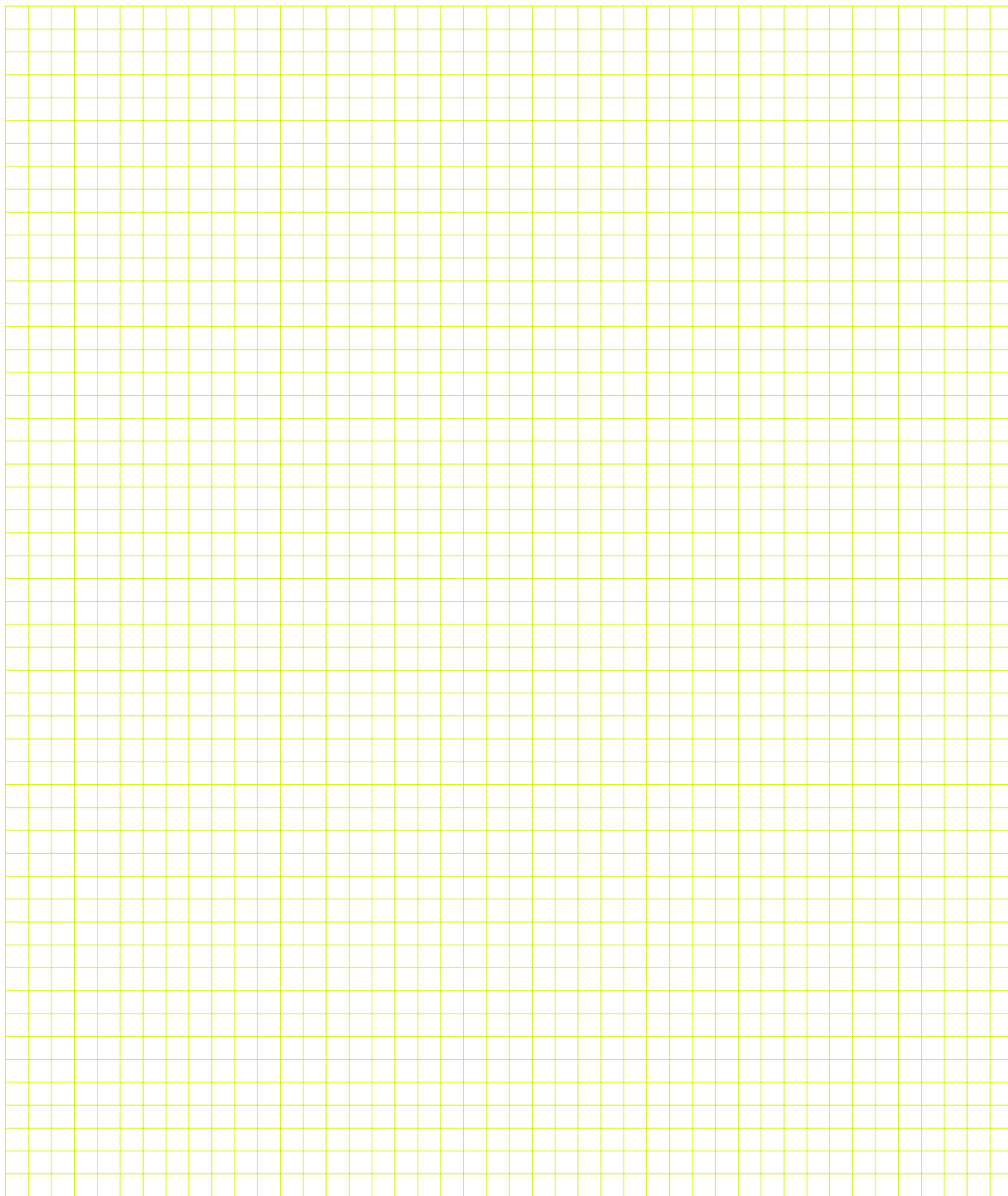
Gesetz 1.2: Merksatz: Nur gleichnamige Brüche dürfen addiert (bzw. subtrahiert) werden.

Rezept 1.2 (Brüche addieren):

1. Einzelbrüche faktorisieren
2. Einzelbrüche kürzen
3. gemeinsamen Nenner finden (Hauptnenner, von Vorteil kgV)
4. Brüche auf Hauptnenner erweitern
5. Alle Zähler auf den selben Bruchstrich schreiben (Vorzeichen beachten, Klammern setzen)
6. Im Zähler ausmultiplizieren
7. Im Zähler zusammenfassen und vereinfachen
8. Zähler und Nenner faktorisieren
9. kürzen

Vorzeigeaufgabe nach obigem Verfahren:

$$\frac{2r}{r^2 - 9} + \frac{15}{30 - 10r}$$



Aufgaben

17. Bestimmen Sie das kgV der folgenden Terme:

- a) $4x^2; 12xy^3; 9x^3y^2z$ b) $a; a-b; a-c$
 c) $a^2; 2a; a^2-a$ d) $4a-4; 2a+2; 1-a^2$

19. Machen Sie die Brüche gleichnamig:

- a) $\frac{1}{2x}, \frac{2}{y}, \frac{3}{z}$ b) $\frac{c}{3cd^2}, \frac{d}{12c^3d}$
 c) $\frac{1}{(e+2)}, \frac{(e+1)}{(e-2)}$ d) $\frac{8}{3-\mu}, \frac{3}{\mu-3}$
 e) $\frac{1}{x^4-4y^2}, \frac{x}{2y-x^2}$ f) $\frac{10}{2a+2b}, \frac{20}{3a+3b}, \frac{30}{5a+5b}$

20. Schreiben Sie auf einen Bruchstrich und vereinfachen Sie falls möglich:

- a) $\frac{10x}{5} + \frac{11x}{5}$ b) $\frac{12}{4y} - \frac{7}{4y}$ c) $\frac{13z}{8} - \frac{-z}{8}$
 d) $\frac{5}{2a} - \frac{3}{2a} + \frac{-7}{2a}$ e) $\frac{b+2c}{b} + \frac{b-2c}{b}$ f) $\frac{\lambda}{\lambda-3} - \frac{3}{\lambda-3}$
 g) $\frac{4m-3}{2} - \frac{7m-9}{2}$ h) $\frac{r-t}{r^2} + \frac{t-2r}{r^2}$ i) $\frac{-p^2+p}{gh} - \frac{-p^2-p}{gh}$

21. Schreiben Sie auf einen Bruchstrich und vereinfachen Sie:

- a) $\frac{10x}{2} + \frac{11x}{12}$ b) $\frac{4y}{5} + \frac{9y}{11}$ c) $\frac{-z}{24} + \frac{21z}{64}$
 d) $\frac{6a}{5c} + \frac{11a}{15c}$ e) $\frac{12}{4ef} - \frac{7}{4fg}$ f) $\frac{13p}{q^2} - \frac{-p}{2q}$

22. Schreiben Sie auf einen Bruchstrich und vereinfachen Sie:

- a) $3 + \frac{k}{4}$ b) $6\theta - \frac{5}{3\beta}$ c) $\frac{4}{w} - 2 + 3w$
 d) $11 + \frac{2b-3}{7}$ e) $6c - \frac{3c+d}{8}$ f) $m + 2 - \frac{3m-m^2}{m}$

23. Addieren und subtrahieren Sie die folgenden Brüche:

- a) $\frac{v^2}{v-1} + \frac{2v}{4}$ b) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y-z}$
 c) $\frac{5}{r-s} - \frac{4}{r+s}$ d) $\frac{a}{a+2} + \frac{a+1}{a-3}$
 e) $\frac{b-4}{b^2+1} - \frac{b+10}{b^2-5}$ f) $\frac{d-2}{24d-12e} + \frac{5-3d}{36d-18e}$
 g) $\frac{2e-f}{12e^2+16ef} - \frac{1.5}{9e+12f}$ h) $u - \frac{u^3-6}{u^2-6}$

24. Vereinfachen Sie durch Addieren und Subtrahieren:

a) $\frac{m+n}{m^2+4mn+4n^2} - \frac{3}{3m+6n}$

b) $\frac{1}{4a^2-20ab+25b^2} - \frac{2}{8a^2-50b^2}$

c) $\frac{6y-2z}{18y^2-2z^2} - \frac{2y-z}{6y^2+2yz}$

d) $\frac{e}{e-f} + \frac{-f^2}{e^2-f^2} - \frac{f}{e+f}$

e) $\frac{2}{k-5} - \frac{8}{k^2-k-20}$

f) $\frac{h+1.5}{h^2-11h-26} - \frac{2h-1}{2h^2-26h}$

25. Vereinfachen Sie durch Addieren und Subtrahieren:

a) $\frac{u+6}{u^2+5u-14} + \frac{3-u}{u^2-4u+4}$

b) $\frac{10}{5q-5} + \frac{11}{4-4q}$

c) $\frac{2u}{u^2-9} + \frac{3}{6-2u}$

d) $\frac{\mu}{2\mu-3\phi} + \frac{\phi}{3\phi-2\mu} - \frac{\mu\phi}{4\mu^2-9\phi^2}$

e) $\frac{v^2-8v}{2v^2+v-15} - \frac{v}{5-2v}$

f) $\frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a} - \frac{a+b-1}{a+b}$

26. Vereinfachen Sie:

a) $\frac{-a^2b}{a^2+4a-ab-4b} + \frac{4a^4b}{4a^4+16a^3}$

b) $\frac{2h}{h^3+3h^2-4h-12} - \frac{3h}{h^3-3h^2-4h+12}$

c) $\frac{1}{5d^2-5e^2} + \frac{1}{10d+10e} - \frac{1}{2e-2d}$

d) $\frac{1}{(x-1) \cdot (y-1)} + \frac{1}{(y-1) \cdot (z-1)} - \frac{1}{(x-1) \cdot (z-1)}$

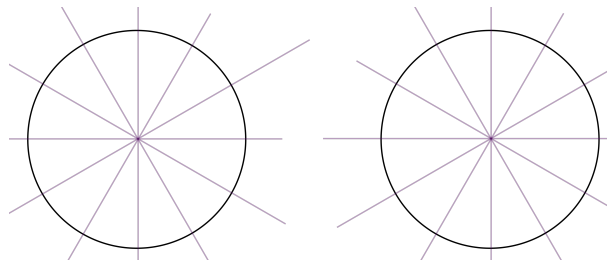
1.3.2 Multiplikation von Bruchtermen

Gesetz 1.3:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{a \cdot x}{b \cdot y} = \frac{ax}{by}$$

Merksatz: «mal = von¹»:

$$\frac{3}{4} \text{ von } \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \text{ von } \frac{3}{4}$$



1.3.3 Division von Bruchtermen

Gesetz 1.4:

$$\frac{a}{b} : \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x} = \frac{a \cdot y}{b \cdot x} = \frac{ay}{bx}$$

Begründung — mit Kehrwert erweitern:

$$5 : \frac{3}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$$

¹Bei Bruchtermen, Prozentzahlen und Häufigkeitsfaktoren kann man das «von» als Multiplikation auffassen. 20% von 67 = 0.2 · 67; aber auch $\frac{1}{3}$ von 53 = $\frac{1}{3} \cdot 53 = \frac{53}{3}$. Dies stimmt jedoch nur bei Brüchen, Prozentzahlen und Häufigkeitsfaktoren: Bei Anzahlen, metrischen Werten und dergleichen ist dann das «von» durch eine Division zu ersetzen und wir erhalten dann den Bruch (bzw. Prozentsatz). Beispiel: Drei von fünf Kindern heißt $\frac{3}{5} = 60\% = 0.6$.

1.3.4 Doppelbrüche

Definition 1.2 (Doppelbruch): Doppelbrüche sind lediglich eine andere Schreibweise für die Division zweier Brüche:

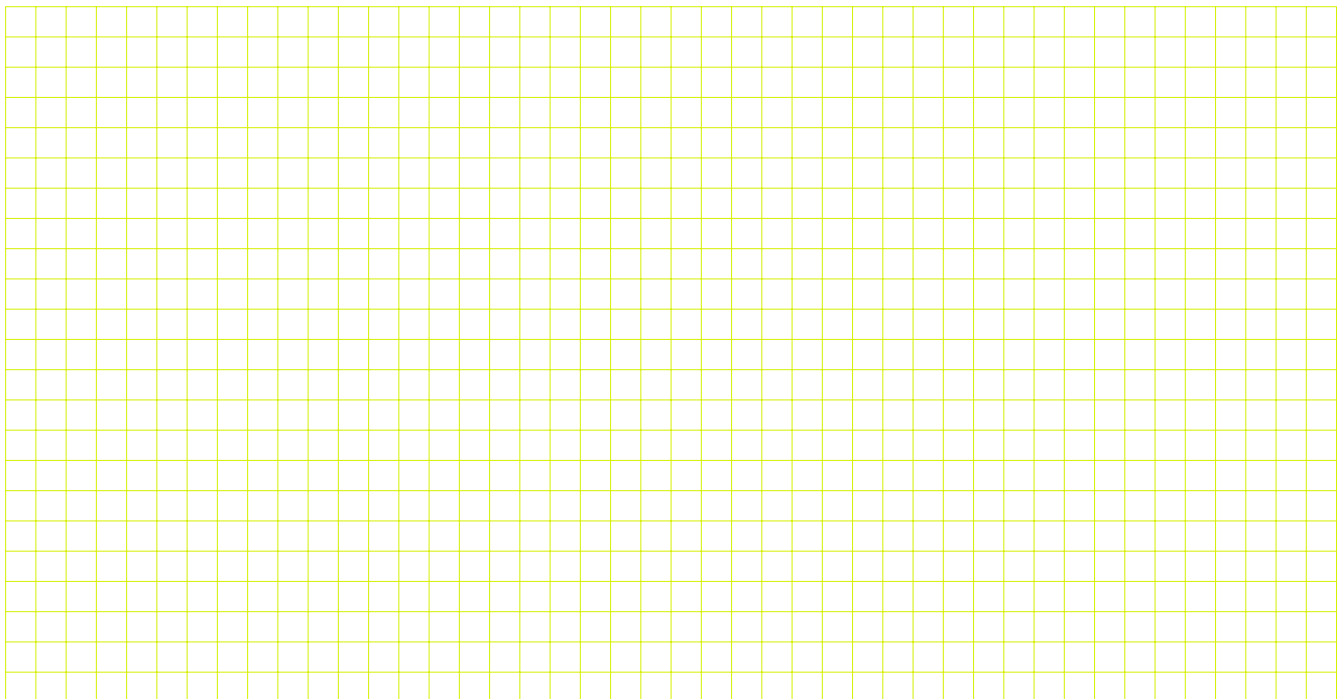
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$$

Gesetz 1.5 (Doppelbruch): Brüche werden dividiert, indem man mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Beispiel 1.3:

$$\frac{\frac{x+1}{x^2-1}}{\frac{x^2+2x+1}{-2-2x}}$$



Aufgaben

27. Welche der Aussagen sind richtig?

- (1) Beim Dividieren von Bruchtermen wird der Kehrwert des ersten Bruchs mit dem zweiten Bruch multipliziert.
- (2) Beim Multiplizieren von Brüchen muss man zuerst immer durch Ausmultiplizieren die Klammern auflösen.
- (3) Die Vereinfachung bei der Multiplikation und Division von Bruchtermen findet meistens durch Kürzen statt, deshalb sollte man Summen in Produkte mit möglichst vielen Faktoren verwandeln.
- (4) Vor dem Multiplizieren und Dividieren müssen Bruchterme zuerst gleichnamig gemacht werden.

28. Schreiben Sie mit einem Bruchstrich und vereinfachen Sie:

- | | | |
|----------------------------|-------------------------------------|---|
| a) $x \cdot \frac{y}{-z}$ | b) $-x \cdot \frac{-y}{z}$ | c) $x \cdot \frac{x}{y}$ |
| d) $x \cdot \frac{y}{x^2}$ | e) $5ef \cdot \frac{y}{10ef - 5fg}$ | f) $\frac{a-3}{6a^3 - 18a^2} \cdot (-3a^2)$ |

29. Vereinfachen Sie:

- | | |
|--|---|
| a) $\frac{5a-b}{a+b} \cdot (2a+2b)$ | b) $(4p-4q) \cdot \frac{1}{p-q}$ |
| c) $\frac{3x^2-3z^2}{y^3} : (x^3y^2z - xy^2z^3)$ | d) $\frac{2u}{11-u} \cdot (u-11)$ |
| e) $\frac{ef}{3f-3e} \cdot (12e-12f)$ | f) $(33d-33d^2) \cdot \frac{-1}{11d^2-11d}$ |

30. Schreiben Sie mit einem Bruchstrich und vereinfachen Sie:

- | | | |
|------------------------------|---------------------------------------|--|
| a) $\frac{y}{-z} : x$ | b) $\left(-\frac{x}{y}\right) : -z$ | c) $-y : \frac{-z}{x}$ |
| d) $a^2 : \frac{2}{a}$ | e) $\frac{64e^8}{5f^3g} : 80e^6g^3$ | f) $-51\varphi^2\delta^2 : \frac{-34\varphi^2}{3\delta}$ |
| g) $\frac{21v-14}{w} : (-7)$ | h) $\frac{36xy^2-48xy}{-11} : 24x^3y$ | i) $\frac{3b^2-3bc}{c} : (6b-6c)$ |

31. Vereinfachen Sie:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| a) $\frac{2ux^2-x^2w}{y} : (4uv-2vw)$ | b) $(-10r-10s) : \frac{r+s}{-3}$ |
| c) $(4p-12) : \frac{9-3p}{q-1}$ | d) $(cde-2) : \frac{4c^3d^2e-8c^2d}{-8}$ |

32. Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

- | | |
|---|---|
| a) $\frac{v-16}{v^2-16} \cdot (3v^2-12v)$ | b) $\frac{(p+q)^2}{(p-q)^2} \cdot (p^2-q^2)$ |
| c) $\frac{2d}{d^2-2d-24} \cdot (d-6)$ | d) $\frac{1}{4\mu^2+4\mu\omega+\omega^2} \cdot (2\mu^2-3\mu\omega-2\omega^2)$ |
| e) $\frac{u^2-16}{u} : (3u^2-12u)$ | f) $\frac{2a^2+5ab-3b^2}{3ab} : (2a+6b)$ |
| g) $(9x^4+12x^2y^2+4y^4) : \frac{18x^4-8y^4}{-5}$ | h) $(g^2-h^2) : \frac{g^2-2g+gh-2h}{g}$ |

33. Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \frac{-a}{b} \cdot \frac{b}{-a} & \text{b)} & \frac{-4k}{3m} \cdot \frac{-9m}{-2k} & \text{c)} & \frac{-65c^3}{20d^2} \cdot \frac{4d^4}{13c^2} \\ \text{d)} & \frac{-64x^2y}{7z} \cdot \frac{49z^2}{-72xy^3} & \text{e)} & \frac{mno}{p^2q} \cdot \frac{mno}{p^2q} & \text{f)} & \frac{\delta^5}{-4} \cdot \frac{\delta^5}{-4} \end{array}$$

34. Vereinfachen Sie:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \frac{-g}{h} : \frac{-h}{g} & \text{b)} & \frac{-8c}{27d} : \frac{9d}{-16c} \\ \text{c)} & \frac{112v^2w}{-17xy} : \frac{8vw}{17xy^2} & \text{d)} & \frac{-1}{81\epsilon^4\phi^3} : \frac{1}{-56\epsilon^2\phi^2} \end{array}$$

35. Berechnen Sie die folgenden Produkte und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \frac{p+q}{11p} \cdot \frac{3p}{7p+7q} & \text{b)} & \frac{3a-3b}{2c} \cdot \frac{4c^2+2c}{2a^2-2b^2} \\ \text{c)} & \frac{6y^2}{1-x} \cdot \frac{x-1}{-18y} & \text{d)} & \frac{u^2+7u+12}{8-8u} \cdot \frac{2u-2}{u^2-u-12} \\ \text{e)} & \frac{ac-3ad+2bc-6bd}{4a+2b} \cdot \frac{2a^2+ab}{-10a-20b} & \text{f)} & \frac{x-1}{x^4-x^2+x^2y-y} \cdot \frac{1-x^4}{1-x} \end{array}$$

36. Berechnen Sie die folgenden Quotienten und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \frac{a+b}{2a} : \frac{4a^2+4ab}{3b} & \text{b)} & \frac{e+1}{e^2-16e+60} : \frac{2e+2}{e^2-36} \\ \text{c)} & \frac{m^2-n^2}{2-m} : \frac{m-n}{m-2} & \text{d)} & \frac{x^2+2xy}{4x^2-4xy+y^2} : \frac{3xy+6y^2}{2x^2-2x-xy+y} \\ \text{e)} & \frac{\left(\frac{k-2}{3k}\right)^2}{\frac{k^2-3k+2}{18k^2}} & \text{f)} & \frac{\frac{\delta^2-1}{8\sigma-\sigma^2}}{\frac{5\delta+5}{\delta^2-\delta-8\sigma+\sigma}} \end{array}$$

37. Vereinfachen Sie:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & 2ab \cdot \left(\frac{a}{2b} - \frac{b}{2a}\right) & \text{b)} & (6c-3d) \cdot \left(\frac{1}{2c-d} - \frac{d}{4c^2-d^2}\right) \\ \text{c)} & \left(f - \frac{f}{g}\right) \cdot \left(f + \frac{f}{g}\right) & \text{d)} & \left(\frac{e}{f} - \frac{g}{h}\right)^2 \\ \text{e)} & \left(\frac{p}{4} + \frac{2}{p}\right)^2 & \text{f)} & \left(\frac{x}{x+y} + 1\right) \cdot \left(\frac{x}{x+y} - 1\right) \end{array}$$

38. Vereinfachen Sie:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 - \left(\frac{a}{2} + b\right)^2 & \text{b)} & \left(\frac{e}{2} - \frac{f}{3}\right) \cdot \left(\frac{e}{4} + f\right) - \left(\frac{e}{2} + f\right) \cdot \left(\frac{e}{4} - \frac{f}{3}\right) \\ \text{c)} & \left(\frac{h^4}{k^2} - h^3\right) : \frac{-h^2}{k^2} & \text{d)} & \left(\frac{r}{s} - \frac{1}{t}\right) : \left(\frac{r}{s} + \frac{1}{t}\right) \\ \text{e)} & \left(4 - \frac{1}{c^2}\right) : \left(2 + \frac{1}{c}\right) & \text{f)} & \frac{2}{12c} + \frac{6c^2d+2cd^2}{8c+8d} : \frac{3c^2d^2}{c+d} \end{array}$$