

Mathematik

Kantonsschule Stadelhofen — Brüche

Inhaltsverzeichnis

1	Bruchterme	3
1.1	Erweitern und Kürzen	4
1.2	Definitionsmenge	5
1.3	Rechnen mit Bruchtermen	8

1 Bruchterme

«*Wer sich mit einem Mathematiker anlegt, muss mit einem Bruch rechnen.*»

Lernziele

- Begriffe: Dividend (Zähler) : Divisor (Nenner) = Quotient (Bruch)
- Kürzen (und erweitern)
- Gleichnamig machen, Hauptnenner (kgV)
- Brüche addieren/subtrahieren
- multiplizieren
- Doppelbrüche (Brüche dividieren)

1.1 Erweitern und Kürzen

Jeder Bruch kann ohne ändern seines Wertes erweitert bzw. gekürzt werden:

Kürzen:

$$\frac{130}{50} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Erweitern:

$$\frac{4.6}{9.45} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Erweitern mit Minus 1:

$$\frac{a-b}{b-a} = \frac{(-1) \cdot (a-b)}{(-1) \cdot (b-a)} = \frac{(-1) \cdot (a-b)}{a-b} = -1$$

Rezept 1.1:

Bei Brüchen, das steht hier gedruckt:
«**Wir kürzen nur aus dem Produkt.**»
Ich habe deshalb mir geschworen.
Ich kürz' ab jetzt nur noch Faktoren.
Steht jedoch was zum Addieren,
muss ich erst !

Beispiel 1.1:

$$\frac{ax^2 - a}{(a^2 + 1)(ax + a)} =$$

1.2 Definitionsmenge

Definition 1.1 (Definitionsmenge): Die Menge aller Zahlen, die für die Variable in einem Bruch eingesetzt werden darf, nennen wir die **Definitionsmenge** \mathbb{D} oder den **Definitinosbereich**.

Bruch	Was darf nicht eingesetzt werden?	\mathbb{D} Definitionsmenge
$\frac{1}{x}$		
$\frac{1}{2-x}$		
$\frac{x}{(x-5)(x+3)}$		
$\frac{5}{5x^5-5x-60}$		

Aufgaben

1.3 Rechnen mit Bruchtermen

1.3.1 Addition und Subtraktion von Bruchtermen

Gesetz 1.1 (Addieren von Brüchen):

$$\frac{a}{b} \pm \frac{x}{y} = \frac{ay \pm bx}{by}$$

Herleitung

$$\frac{a}{b} \pm \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{y} \pm \frac{x}{y} \cdot \frac{b}{b} = \frac{a \cdot y}{b \cdot y} \pm \frac{x \cdot b}{y \cdot b} = \frac{ay}{by} \pm \frac{xb}{yb} = \frac{ay \pm bx}{by}$$

Beispiel 1.2:

$$\frac{a+1}{-a} + \frac{a}{a-1} =$$

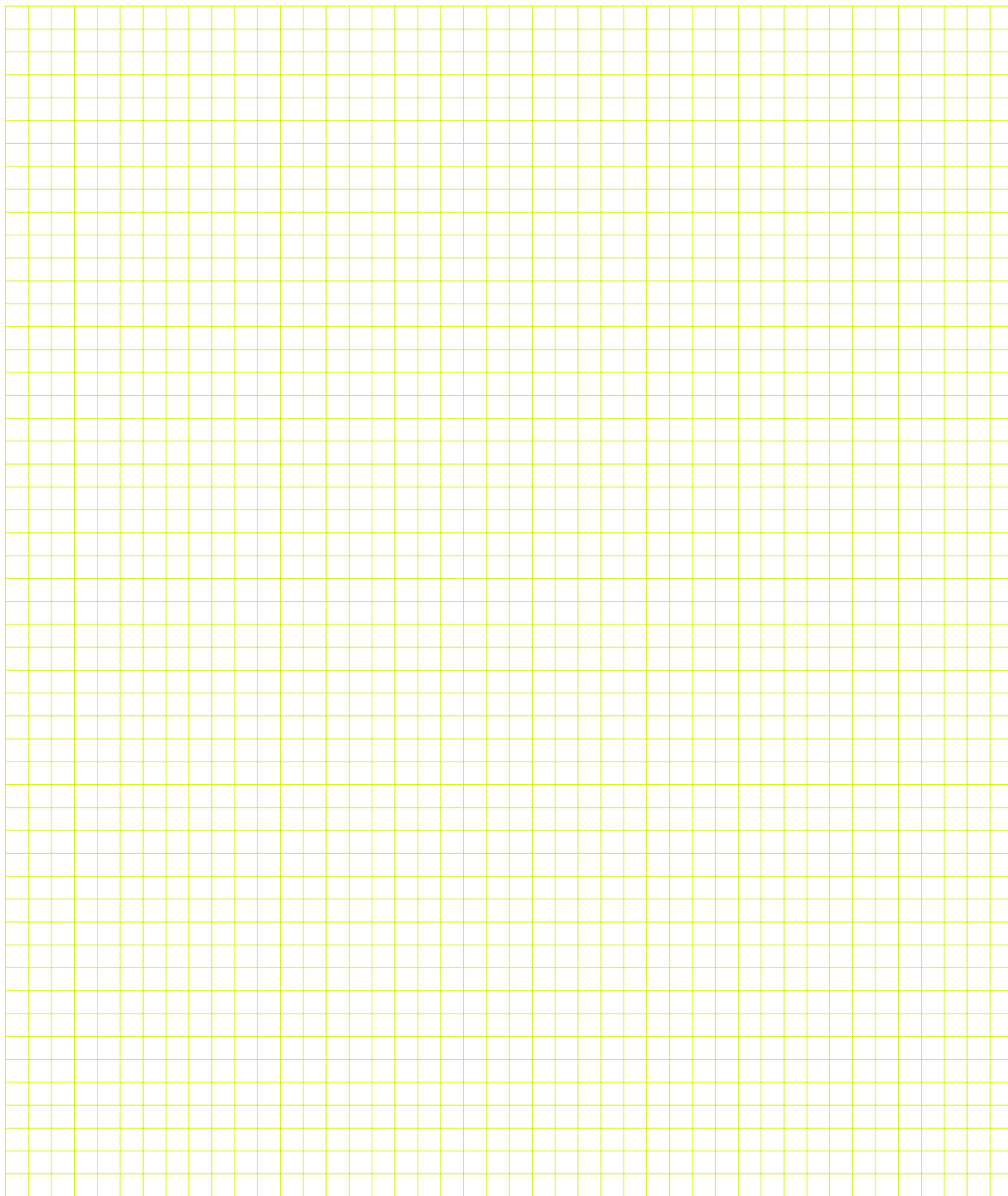
Gesetz 1.2: Merksatz: Nur gleichnamige Brüche dürfen addiert (bzw. subtrahiert) werden.

Rezept 1.2 (Brüche addieren):

1. Einzelbrüche faktorisieren
2. Einzelbrüche kürzen
3. gemeinsamen Nenner finden (Hauptnenner, von Vorteil kgV)
4. Brüche auf Hauptnenner erweitern
5. Alle Zähler auf den selben Bruchstrich schreiben (Vorzeichen beachten, Klammern setzen)
6. Im Zähler ausmultiplizieren
7. Im Zähler zusammenfassen und vereinfachen
8. Zähler und Nenner faktorisieren
9. kürzen

Vorzeigeaufgabe nach obigem Verfahren:

$$\frac{2r}{r^2 - 9} + \frac{15}{30 - 10r}$$



Aufgaben

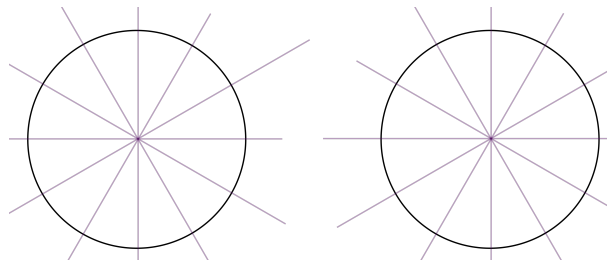
1.3.2 Multiplikation von Bruchtermen

Gesetz 1.3:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{a \cdot x}{b \cdot y} = \frac{ax}{by}$$

Merksatz: «mal = von¹»:

$$\frac{3}{4} \text{ von } \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \text{ von } \frac{3}{4}$$



1.3.3 Division von Bruchtermen

Gesetz 1.4:

$$\frac{a}{b} : \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x} = \frac{a \cdot y}{b \cdot x} = \frac{ay}{bx}$$

Begründung — mit Kehrwert erweitern:

$$5 : \frac{3}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$$

¹Bei Bruchtermen, Prozentzahlen und Häufigkeitsfaktoren kann man das «von» als Multiplikation auffassen. 20% von 67 = 0.2 · 67; aber auch $\frac{1}{3}$ von 53 = $\frac{1}{3} \cdot 53 = \frac{53}{3}$. Dies stimmt jedoch nur bei Brüchen, Prozentzahlen und Häufigkeitsfaktoren: Bei Anzahlen, metrischen Werten und dergleichen ist dann das «von» durch eine Division zu ersetzen und wir erhalten dann den Bruch (bzw. Prozentsatz). Beispiel: Drei von fünf Kindern heißt $\frac{3}{5} = 60\% = 0.6$.

1.3.4 Doppelbrüche

Definition 1.2 (Doppelbruch): Doppelbrüche sind lediglich eine andere Schreibweise für die Division zweier Brüche:

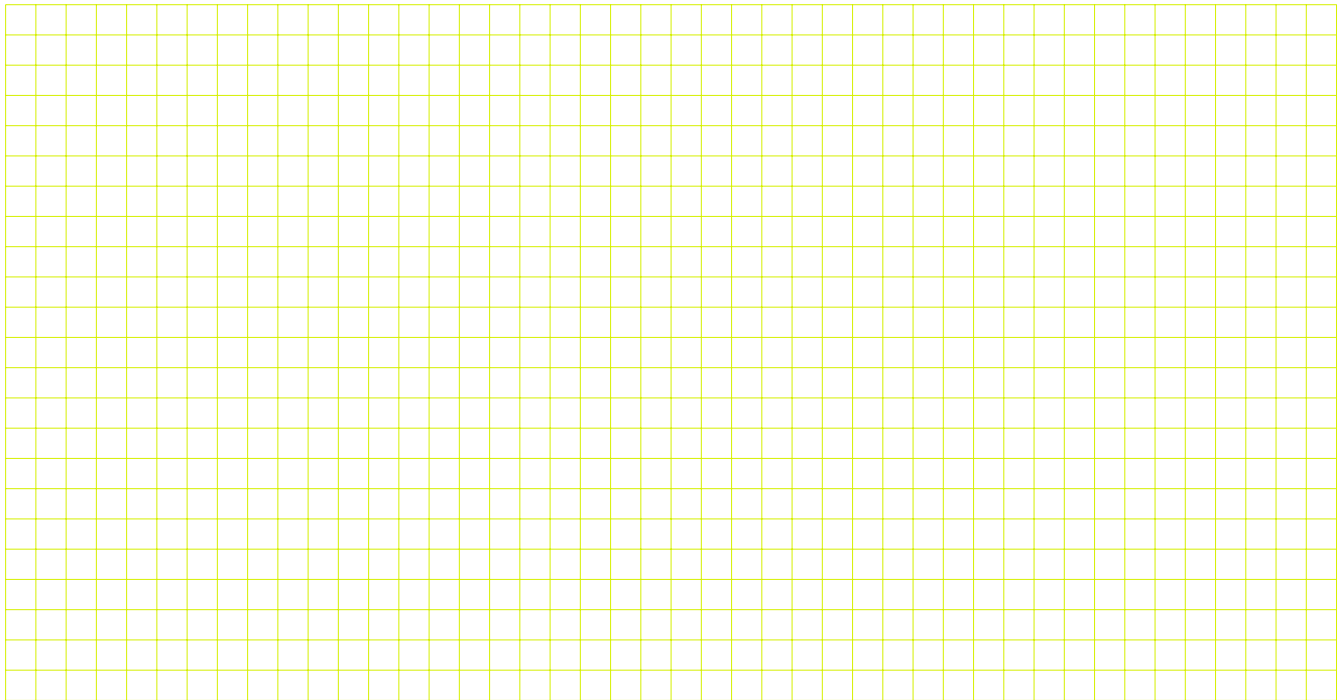
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$$

Gesetz 1.5 (Doppelbruch): Brüche werden dividiert, indem man mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Beispiel 1.3:

$$\frac{\frac{x+1}{x^2-1}}{\frac{x^2+2x+1}{-2-2x}}$$



Aufgaben

