Pertemuan II

Basis untuk persamaan homogen.
Koordinat titik pada basis standar dan basis baru.
General Solusi.

Bab Pembahasan

- 1. Basis untuk persamaan homogen
- 2. Koordinat titik pada basis standar dan basis baru
- 3. General Solusi

Soal 1

Basis untuk persamaan homogen

Contoh 37 :

Tent : basis / dimensi } u ruang pemecahan dr sist. homogen :

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 - x_3 \phantom{{}-3x_4} + x_5 &= 0 \\
-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\
x_1 + x_2 - 2x_3 \phantom{{}-3x_4} - x_5 &= 0 \\
x_3 + x_4 + x_5 &= 0
\end{aligned}
$$

jwb:

Tujuan : mencari vector-vector basis

jwb:

→ kita rubah pers homogen menj. pers bebas Linier

$$\overline{0} = \overset{x_1}{\overset{\uparrow}{k_1}}\,\overline{v_1} + \overset{x_2}{\overset{\uparrow}{k_2}}\,\overline{v_2} + \overset{x_3}{\overset{\uparrow}{k_3}}\,\overline{v_3} + \overset{x_4}{\overset{\uparrow}{k_4}}\,\overline{v_4} + \overset{x_5}{\overset{\uparrow}{k_5}}\,\overline{v_5}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

→ skg kita cari nilai x_1 x_2 x_3 x_4 x_5

if $x_1 \ldots x_5 = 0$ mk bebas Linier,

if $x_1 \ldots x_5$ ada nilai lain, mk ≠ bebas Linier

Dari ex. 6 bab 1.2 è yang diumpamakan selalu index yang besar

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -s-t \\ x_2 &= s \\ x_3 &= -t \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= t \end{aligned}\right\}$$

ternyata ada banyak nilai u $x_1 \dots x_5$, shg → bebas linier, skg bgm cara mencari basis & dimensi dr hasil ini?! ... caranya :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

∴ basis → $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ & $\bar{v}_{\cancel{x}\,2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Cari X1,x2, x3, x4 dan x5 dengan gauss jordan

Example 4 Find a basis for the nullspace of

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Example 4 Find a basis for the nullspace of

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution. The nullspace of A is the solution space of the homogeneous system

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

X1 = -s-t

X2 = s

X3 = -t

X4 = 0

X5 = t

In Example 10 of Section 5.4 we showed that the vectors

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

form a basis for this space.

Contoh 4: Nullspace (A) = Solution space dari $A\vec{x} = \vec{0}$

catatan: $\vec{x} \in R^5$ (perhatikan $A\ (4 \times 5)$)

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ m & n \end{array}$$

Basis dari Nullspace (A) = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

Tambahan (1) Dimensi ~~Basis~~ Nullspace (A) = 2

(2) Semua vektor di Nullspace (A) merupakan vektor-vektor solusi (yang memenuhi) $A\vec{x} = \vec{0}$ dan dinyatakan dengan $\vec{x} = s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$ (Lihat Contoh 10 Bab 5.4. untuk proses penyelesaiannya)

Basis: Nullspace (A)
↳ Rentang Nullspace (A)
↳ Basis Lin. Indept

- Jadi $\vec{x}$ kombinasi linier dari $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ atau Nullspace (A) direntang oleh $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

- $k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 = \vec{0}$

$$k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Penyelesaiannya (coba sendiri): $k_1 = 0,\ k_2 = 0$

Jadi $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ lin. independent

Koordinat titik pada basis standar dan basis baru

Contoh: (lihat Example 3 halaman 246) Dalam contoh ini ditunjukkan dua basis untuk R3

$B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ dan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

di mana $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$; $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$; $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$

$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$; $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$; $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$

Bukti bahwa B adalah basis untuk R^3. B disebut basis standar untuk R^3.

B linearly independent?

$k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B linearly independent

B merentang R^3?

$\mathbf{u} = (x, y, z) \in R^3$

$c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

B merentang R^3

•Koordinat titik pada basis B è $(k1, k2, k3) = V$

–Basis è $e1, e2, e3$

•Koordinat titik pada basis S è $(c1, c2, c3) = V_s$

–Basis è $v1, v2, v3$

- Lama = baru
- $k1e1 + k2e2 + k3e3 = c1v1 + c2v2 + c3v3$
- $K1(1,0,0) + k2(0,1,0) + k3(0,0,1) = c1v1 + c2v2 + c3v3$
- $(k1, k2, k3) = c1v1 + c2v2 + c3v3$
- $v = c1v1 + c2v2 + c3v3$

Bukti bahwa S = {v1, v2, v3} juga basis R3 bisa dibaca di buku.
Jadi benar bahwa B dan S adalah basis untuk R3
B = {e1, e2, e3} dan S = {v1, v2, v3}
di mana e1 = (1, 0, 0); e2 = (0, 1, 0); e3 = (0, 0, 1)
v1 = (1, 2, 1); v2 = (2, 9, 0); v3 = (3, 3, 4)

Koordinat sebuah vektor akan berbeda jika dinyatakan berdasarkan dua basis yang berbeda.
lihat Example 4 halaman 247
(5, -1, 9)B "ekivalen" (1, -1, 2)S
(11, 31, 7)B"ekivalen" (-1, 3, 2)S

Soal 2

Example 4 Let $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ be the basis for R^3 in the preceding example.

Soal 2

(a) Find the coordinate vector of $\mathbf{v} = (5, -1, 9)$ with respect to S.

(b) Find the vector $\mathbf{v}$ in R^3 whose coordinate vector with respect to the basis S is $(\mathbf{v})_S = (-1, 3, 2)$.

$B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ dan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

di mana $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$; $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$; $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$

$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$; $\mathbf{v}_2 = (2, 9, 0)$; $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$

Solution (*a*). We must find scalars c_1, c_2, c_3 such that

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$$

or, in terms of components,

$$(5, -1, 9) = c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)$$

Equating corresponding components gives

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 5 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= -1 \\ c_1 + 4c_3 &= 9 \end{aligned}$$

Carilah nilai c1, c2 dan c dengan gauss jourdan

Solving this system, we obtain $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 2$ (verify). Therefore,

$$(\mathbf{v})_S = (1, -1, 2)$$

Solution (*b*). Using the definition of the coordinate vector $(\mathbf{v})_S$, we obtain

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (-1)\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 \\ &= (-1)(1, 2, 1) + 3(2, 9, 0) + 2(3, 3, 4) = (11, 31, 7) \end{aligned}$$

Let S = {v1, v2, v3} be the basis for R3.
Find the coordinate vektor of v = (14, 60, -20) with respect to S
v1 = (-6, 4, 3)   v2 = (7, -4, 2) v3 = (9, 6, -3)
Carilah nilai c1, c2 dan c3 dengan menggunakan gauss-jordan

-6.00	7.00	9.00	14.00		
4.00	-4.00	6.00	60.00		
3.00	2.00	-3.00	-20.00		
1.00	-1.17	-1.50	-2.33	Pada iterasi ke 1, berapa isi sel A(1,4)	-2.33
4.00	-4.00	6.00	60.00		
3.00	2.00	-3.00	-20.00		
1.00	-1.17	-1.50	-2.33	Pada iterasi ke 2, berapa isi sel A(2,3)	12
0.00	0.68	12.00	69.32		
3.00	2.00	-3.00	-20.00		
1.00	-1.17	-1.50	-2.33	Pada iterasi ke 3, berapa isi sel A(3,2)	5.51
0.00	0.68	12.00	69.32		
0.00	5.51	1.50	-13.01		

1.00	-1.17	-1.50	-2.33	Pada iterasi ke 4, berapa isi sel A(2,4)	101.94
0.00	1.00	17.65	101.94		
0.00	5.51	1.50	-13.01		
1.00	-1.17	-1.50	-2.33	Pada iterasi ke 5, berapa isi sel A(3,4)	-574.7
0.00	1.00	17.65	101.94		
0.00	0.00	-95.75	-574.70		
1.00	-1.17	-1.50	-2.33	Pada iterasi ke 6, berapa isi sel A(3,4)	6
0.00	1.00	17.65	101.94		
0.00	0.00	1.00	6.00		
1.00	-1.17	-1.50	-2.33	Pada iterasi ke 7, berapa isi sel A(2,4)	-3.96
0.00	1.00	0.00	-3.96		
0.00	0.00	1.00	6.00		
1.00	-1.17	0.00	6.67	Pada iterasi ke 8, berapa isi sel A(1,4)	6.67
0.00	1.00	0.00	-3.96		
0.00	0.00	1.00	6.00		
1.00	0.00	0.00	2.04	Pada iterasi ke 9, berapa isi sel A(1,4)	2.04
0.00	1.00	0.00	-3.96		
0.00	0.00	1.00	6.00		

General Solusi

Ruang baris, Ruang kolom, Basis untuk Null Space.

Keyword

- Bab terdahulu
  - Kombinasi linier
  - Merentang
  - Bebas Linier
  - Basis

- Bab sekarang
  - Row vektor/vektor baris
  - Colomn vector/ vektor kolom
  - Row space/ruang baris
  - Colomn space / ruang kolom
  - Null space/ruang nol
  - General Solusi
  - Partikular Solusi
  - Basis untuk Null Space

Pengertian

1) kombinasi Linier

$\overline{w}$ → kombinasi Linier dr $\overline{v_1}$ $\overline{v_2}$ ... $\overline{v_n}$ jk
$\overline{w}$ dpt diungkapkan dlm bentuk :

→ $\overline{w} = k_1 \overline{v_1} + k_2 \overline{v_2} + \ldots + k_n \overline{v_n}$
dimana
k_1, k_2 ... k_n → skalar

ingat !! baris di atas bkn hanya satu baris,
tp terdiri dari beberapa baris
or kombinasi Linier → ada nilai u k_1 k_2 ... k_n

Merentang = spanning

4.5

2. Merentang :

- $\bar{v}_1\ \bar{v}_2 \ldots \bar{v}_n$ merentang ruang vektor V jk sembarang vektor pd ruang vektor V dpt dinyatakan sbg kombinasi linier dr $\bar{v}_1\ \bar{v}_2 \ldots \bar{v}_n$
- ada banyak nilai $k_1\ k_2 \ldots k_n$
- det $\neq 0$ (jk bisa dicari det)

ex:

tent. apakah $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ & $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ merentang R^2

jwb: merentang jk → sembarang vektor pd R^2 dpt dinyatakan sbg kombinasi linier $\bar{v}_1$ $\bar{v}_2$

5.3 Kebebasan Linier

- $\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \ldots \quad \bar{v}_n \longrightarrow$ bebas Linier jk **hanya** ada **satu** pemecanan u persamaan :

  $$k_1 \bar{v}_1 + k_2 \bar{v}_2 + \ldots + k_n \bar{v}_n = \bar{0}$$

  yaitu $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ //

- det $\neq 0$ (jk bisa dicari det)
- jk ada sebuah or lebih vektor dpt dinyatakan sbg k. L vektor lainnya mk $\neq$ bebas Linier

ex:

Basis

$\{ \bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \dots \ \bar{v}_n \}$

→ merentang

$\bar{x} = k_1 \bar{v}_1 + k_2 \bar{v}_2 + \dots + k_n \bar{v}_n$

$\bar{x}$ = sembarang vektor

$k_1 \quad k_2 \quad \dots \ k_n$ → ada nilai-nya

or

$\text{Det} \neq 0$

→ bebas Linier

$\bar{0} = k_1 \bar{v}_1 + k_2 \bar{v}_2 + \dots + k_n \bar{v}_n$

$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ → hanya satu jawaban

or

$\text{Det} \neq 0$

$$\text{matriks } A\ (m \times n) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots\cdots & a_{3n} \\ \cdots\cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\text{vektor-vektor } \left.\begin{array}{l} \mathbf{r_1} = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \cdots\cdots\ a_{1n}) \in R^n \\ \mathbf{r_2} = (a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \cdots\cdots\ a_{2n}) \in R^n \\ \cdots\cdots \\ \mathbf{r_m} = (a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3}\ \cdots\cdots\ a_{mn}) \in R^n \end{array}\right\} \text{ disebut vektor-vektor baris dari A}$$

$$\text{vektor-vektor } \mathbf{c_1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \in R^m \qquad \mathbf{c_2} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \in R^m \qquad \cdots\cdots \qquad \mathbf{c_n} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \in R^m$$

disebut vektor-vektor kolom dari A

Row, colom and null space

- Row space/ruang baris è
  - Sub ruang dari Rn yang direntang oleh {rl, r2, ..., rm}{vektorbaris}
  - Matriks yang dibentuk dari {rl, r2, ..., rm}
  - Merupakan sebuah himpunan {rl, r2, ..., rm}

- Colomn space/ruang kolom è
  - Sub ruang dari Rm yang direntang oleh {cl, c2, ..., cn}{vektorkolom}
  - Matriks yang dibentuk dari {cl, c2, ..., cn}
  - Merupakan sebuah himpunan {cl, c2, ..., cn}

- Null space è sub ruang dari Rn yang merupakan ruang solusi dari SPL homogen A.X = O

- RANK (A) : dimensi ruang baris (A) = dimensi ruang kolom(A)

  NULITAS (A) / nullity(A) : dimensi ruang nol (A)

- Dimensi => banyaknya vektor pada suatu baris

  Teorema 5.6.1 è rank (A) + nullity (A) = n

  n = jumlah kolom

- Catatan:
  1. Ruang / space : himpunan / set
  2. Subruang / subspace: subset dari ruang-vektor yang memenuhi aksioma (1) dan (6)
  3. Ruang vektor V direntang $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n \}$: semua vektor $\mathbf{x} \in V$ bisa dinyatakan sebagai kombinasi linier dari S; $\mathbf{x} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + ... + k_n \mathbf{v}_n$
  4. Ruang vektor V punya basis $B = \{ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_n \}$: B merupakan himpunan yang linearly independent, dan B merupakan rentang ruang vektor V
  5. Dimensi ruang vektor V: jika basis ruang vektor V adalah B, dimensi $V = | B |$

ex : 1 hal 258

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = [2\ 1\ 0] \in R^3 \\ r_2 = [3\ -1\ 4] \in R^3 \end{array}\right\} \text{vektor baris dari A}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in R^2 \\ c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in R^2 \\ c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \in R^2 \end{array}\right\} \text{vektor kolom dari A}$$

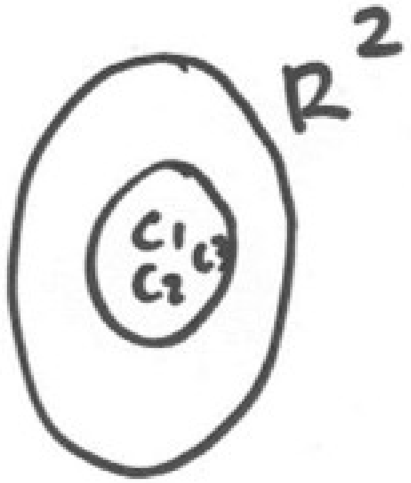
∙) ruang baris / row space A :

- sub ruang dari R^3 yg direntang
  o $\{ r_1 , r_2 \}$
- $\bar{x} = k_1 r_1 + k_2 r_2$
  - untuk sembarang nilai $\bar{x}$
  - ada nilai u k_1 x k_2

·) ruang kolom / colomn space A :

- subruang dari R^2 yg direntang
- o $\{c_1, c_2, c_3\}$
- $\bar{x} = k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3$

- u sembarang vektor $\bar{x}$
- ada nilai u k_1 k_2 k_3



Soal 3

Theorem 5.5.1. *A system of linear equations $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is consistent if and only if $\mathbf{b}$ is in the column space of A.*

Example 2 Let $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ be the linear system

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Show that $\mathbf{b}$ is in the column space of A, and express $\mathbf{b}$ as a linear combination of the column vectors of A.

Theorem 5.5.1. *A system of linear equations* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *is consistent if and only if* $\mathbf{b}$ *is in the column space of* A.

Example 2 Let $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ be the linear system

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Show that $\mathbf{b}$ is in the column space of A, and express $\mathbf{b}$ as a linear combination of the column vectors of A.

Solution. Solving the system by Gaussian elimination yields (verify)

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3$$

Since the system is consistent, $\mathbf{b}$ is in the column space of A. Moreover, from (2) and the solution obtained, it follows that

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$A\vec{x} = \vec{b}$

Buktikan $\vec{b} \in$ Ruang kolom A) defn. Ruang kolom

artinya : $\vec{b}$ direntang $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$) defn. Rentang

— " — : $\vec{b}$ kombinasi linier $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$

— " — : $\vec{b} = k_1\vec{c}_1 + k_2\vec{c}_2 + k_3\vec{c}_3$

$k_1 = ?$ $k_2 = ?$ $k_3 = ?$

Dalam soal ini : $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$

Solusinya : $k_1 = 2$, $k_2 = -1$, $k_3 = 3$

Maka : TERBUKTI bahwa $\vec{b} \in$ Ruang kolom A

dan $\vec{b} = (2)\vec{c}_1 + (-1)\vec{c}_2 + (3)\vec{c}_3$

Theorem 5.5.2. *If $\mathbf{x}_0$ denotes any single solution of a consistent nonhomogeneous linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, and if $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ form a basis for the nullspace of A, that is, the solution space of the homogeneous system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, then every solution of $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ can be expressed in the form*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \tag{3}$$

and, conversely, for all choices of scalars $c_1, c_2, \ldots, c_k$, the vector $\mathbf{x}$ in this formula is a solution of $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

- Cari "General Solution" dari $A.x = b$
  $X = X_0 + r.V1 + s.V2 + t.V3$
- Cari "particular Solution" dari $A.x = b$
  X_0
- Cari "General Solution" dari $A.x = 0$
  $X = r.V1 + s.V2 + t.V3$
- Cari basis untuk null space A
  v1, v2 dan v3

Soal 4

Cari solusi untuk A.X = b dan A.X = 0

Example 3 In Example 3 of Section 1.2 we solved the nonhomogeneous linear system

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\qquad + 2x_5 \qquad\qquad &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\
5x_3 + 10x_4 \qquad\qquad + 15x_6 &= 5 \\
2x_1 + 6x_2 \qquad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6
\end{aligned} \tag{4}
$$

Cari solusi untuk A.X = b dan A.X = 0

Example 3 In Example 3 of Section 1.2 we solved the nonhomogeneous linear system

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad\quad + 2x_5 \qquad\quad &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\
5x_3 + 10x_4 \qquad\quad + 15x_6 &= 5 \\
2x_1 + 6x_2 \qquad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6
\end{aligned}
\tag{4}
$$

and obtained

$$x_1 = -3r - 4s - 2t, \quad x_2 = r, \quad x_3 = -2s, \quad x_4 = s, \quad x_5 = t, \quad x_6 = \tfrac{1}{3}$$

This result can be written in vector form as

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3r - 4s - 2t \\ r \\ -2s \\ s \\ t \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

which is the general solution of (4). Comparing this to (3), the vector

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

is a particular solution of (4) and

$$\mathbf{x} = r\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

is the general solution of the homogeneous system

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \phantom{{}- 2x_4} + 2x_5 \phantom{{}- 3x_6} &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= 0 \\ 5x_3 + 10x_4 \phantom{{}+ 4x_5} + 15x_6 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 \phantom{{}- 5x_3} + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 0 \end{aligned}$$

(verify). ▲

Contoh 3: Penerapan Teorema 5.5.2.

$$\underset{\substack{(4\times 6)\\ \uparrow\ \ \uparrow\\ m\ \ n}}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ruang Solusi (Solution SET/space) dari $A\vec{x} = \vec{b}$
(catatan: $\vec{x} \in R^6$)

bilangan real

$$\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_0} + r \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_3}$$

$\vec{x} = \vec{x}_0 + r\vec{v}_1 + s\vec{v}_2 + t\vec{v}_3$ disebut "General Solution" dari $A\vec{x} = \vec{b}$

$\vec{x}_0$ disebut "Particular Solution" dari $A\vec{x} = \vec{b}$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ adalah basis dari Nullspace (A)/Solution Space $A\vec{x} = \vec{0}$

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \overline{x_0} + r\overline{x_1} + s\overline{v_2} + t\overline{v_3}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

misal

$$r = 1,\ s = 0,\ t = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

→ masukkan ke pers → nilainya benar

$$r = 0,\ s = 1,\ t = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

→ masukkan ke pers → nilainya benar

∴ u sembarang

nilai r, s, t → hasil benar jk di masukkan ke persamaan.

$$A\,\bar{x} = \bar{0}$$

$\bar{x}$ → berapa nilai $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ agar menjadi $A.\bar{x} = \bar{0}$ → $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

jawab → $\bar{x} = r\,\bar{v_1} + s\,\bar{v_2} + t\,\bar{v_3}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

misal :

→ $r=1$, $s=0$, $t=0$ → $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ → masukkan ke pers $A.\bar{x} = \bar{0}$ → hasil benar

→ $r=0$, $s=1$, $t=0$ → $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ → masukkan ke pers $A.\bar{x} = \bar{0}$ → hasil benar

$\therefore$ solusi u $A.\bar{x} = \bar{b}$ adalah

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + r\bar{v}_1 + s\bar{v}_2 + t\bar{v}_3$$

solusi u $A.\bar{x} = \bar{0}$ adalah

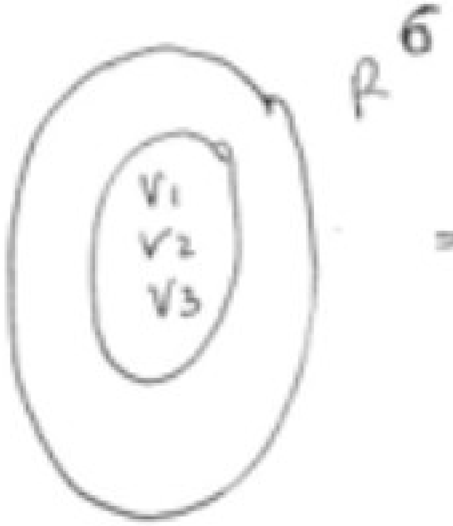
$$\bar{x} = r\bar{v}_1 + s\bar{v}_2 + t\bar{v}_3$$

$A\bar{x} = \bar{0}$

$\uparrow$

<u>dan</u> $\Rightarrow \{v_1\ v_2\ v_3\}$ adalah basis u nullspace (A)

<u>bukan</u> basis u $A\bar{x} = \bar{b}$



$\Rightarrow \{v_1\ v_2\ v_3\}$ ruang nol $\Rightarrow$ yg menghasilkan $\bar{0}$ pada $A.\bar{x}$

Carilah general solusi untuk A . X = B
kerjakan dengan Gauss – Jordan.

-6	X1	-4	X2	6	X3	5	X4	6	X5	-2	X6	=	-96
3	X1	9	X2	-3	X3	-4	X4	-3	X5	9	X6	=	160
9	X1	2	X2	5	X3	7	X4	9	X5	-2	X6	=	16

-6	-4	6	5	6	-2	-96		
3	9	-3	-4	-3	9	160		
9	2	5	7	9	-2	16		
1	0.67	-1	-0.83	-1	0.33	16	Pada iterasi ke 1, berapa isi sel A(1,5)	-1
3	9	-3	-4	-3	9	160		
9	2	5	7	9	-2	16		
1	0.67	-1	-0.83	-1	0.33	16	Pada iterasi ke 2, berapa isi sel A(2,7)	112
0	6.99	0	-1.51	0	8.01	112		
9	2	5	7	9	-2	16		
1	0.67	-1	-0.83	-1	0.33	16	Pada iterasi ke 3, berapa isi sel A(3,3)	14
0	6.99	0	-1.51	0	8.01	112		
0	-4.03	14	14.47	18	-4.97	-128		

1	0.67	-1	-0.83	-1	0.33	16	Pada iterasi ke 4, berapa isi sel A(2,6) ….. 1.15
0	1	0	-0.22	0	1.15	16.02	
0	-4.03	14	14.47	18	-4.97	-128	
1	0.67	-1	-0.83	-1	0.33	16	Pada iterasi ke 5, berapa isi sel A(3,4) ….. 13.58
0	1	0	-0.22	0	1.15	16.02	
0	0	14	13.58	18	-0.34	-63.44	
1	0.67	-1	-0.83	-1	0.33	16	Pada iterasi ke 6, berapa isi sel A(3,7) ….. -4.53
0	1	0	-0.22	0	1.15	16.02	
0	0	1	0.97	1.29	-0.02	-4.53	
1	0.67	-1	-0.83	-1	0.33	16	Pada iterasi ke 7, berapa isi sel A(2,5) ….. 0
0	1	0	-0.22	0	1.15	16.02	
0	0	1	0.97	1.29	-0.02	-4.53	
1	0.67	0	0.14	0.29	0.31	11.47	Pada iterasi ke 8, berapa isi sel A(1,6) ….. 0.31
0	1	0	-0.22	0	1.15	16.02	
0	0	1	0.97	1.29	-0.02	-4.53	
1	0	0	0.29	0.29	-0.46	0.74	Pada iterasi ke 9, berapa isi sel A(1,4) ….. 0.29
0	1	0	-0.22	0	1.15	16.02	
0	0	1	0.97	1.29	-0.02	-4.53	

20. X1 = -0,29 t – 0,29 s + 0,46 r +0,74
21. X2 = 0,22 t – 1,15 r + 16,02
22. X3 = - 0,97 t – 1,29 s + 0,02 r – 4,53
23. X4 = t
24. X5 = s
25. X6 = r

Thank you for your attention!

See you next time!