Pembahasan Quiz 4 Aljabar Linear 2023 tipe A

Carilah nilai eigen dan vector eigen dari matrix A

	-1	4	-2
A =	-3	4	0
	-3	1	3

Untuk mencari nilai eigen, menggunakan persamaan: $\mathbf{det}(\lambda \cdot \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$

$$(\lambda \cdot I - A)$$
$$= \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -4 & 2 \\ 3 & \lambda - 4 & 0 \\ 3 & -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

Karena kita perlu mencari determinan dari matriks di atas, kita bisa menggunakan metode kofaktor, gauss, dsb. Pada kali ini kita akan menggunakan metode kofaktor kolom ketiga

Selanjutnya, kita perlu mencari matriks kofaktor $(\lambda \cdot I - A)$, terutama kolom ketiga

$$A = \begin{pmatrix} +\cdots & -\cdots & +M_{13} \\ -\cdots & \mp\cdots & -M_{23} \\ +\cdots & -\cdots & +M_{33} \end{pmatrix}$$

M_{13}
$= \begin{vmatrix} 3 & \lambda - 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$
$= [3 \cdot -1] - [3 \cdot (\lambda - 4)]$
$= [-3] - [3\lambda - 12]$
$= -3 - 3\lambda + 12$
$= -3\lambda + 9$

M_{22}
$= \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$
$= [(\lambda + 1) \cdot -1] - [3 \cdot -4]$
$= [-\lambda - 1] - [-12]$
$= -\lambda - 1 + 12$
$= -\lambda + 11$

M_{32}
$= \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -4 \\ 3 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$
$= [(\lambda + 1) \cdot (\lambda - 4)] - [3 \cdot -4]$
$= [(\lambda^2 - 3\lambda - 4)] - [-12]$
$= \lambda^2 - 3\lambda - 4 + 12$
$= \lambda^2 - 3\lambda + 8$

$$(\lambda \cdot I - A) = \begin{pmatrix} \dots & \dots & +(-3\lambda + 9) \\ \dots & \dots & -(-\lambda + 11) \\ \dots & \dots & +(\lambda^2 - 3\lambda + 8) \end{pmatrix}$$

Sehingga, nilai kofaktor kolom ketiga: $(\lambda \cdot I - A) = \begin{pmatrix} \dots & \dots & (-3\lambda + 9) \\ \dots & \dots & (\lambda - 11) \\ \dots & \dots & (\lambda^2 - 3\lambda + 8) \end{pmatrix}$

$\therefore$ *Determinan matriks* $(\lambda \cdot I - A)$:
$a_{13} \cdot c_{13} + a_{23} \cdot c_{23} + a_{33} \cdot c_{33}$
$= [2 \cdot (-3\lambda + 9)] + [0 \cdot (\lambda - 11)] + [(\lambda - 3) \cdot (\lambda^2 - 3\lambda + 16)]$
$= [-6\lambda + 18] + 0 + [\lambda^3 - 6\lambda^2 + 17\lambda - 24]$
$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$

Sehingga:

1. Nilai dari var. λ^3 = 1
2. Nilai dari var. λ^2 = - 6
3. Nilai dari var. λ = 11
4. Nilai dari var. Konstanta = -6

Untuk mencari nilai λ:

$$\mathbf{det}(\lambda \cdot \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$$
$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

Karena bentuk determinan adalah polynomial derajat tiga (Suku banyak berpangkat paling tinggi nya 3), kita bisa menggunakan **METODE HORNER**

[Cara Menentukan Akar-akar Persamaan Polinomial – idschool.net]

Langkah-langkah metode ini:

1. Tentukan seluruh factor dari **KONSTANTA** pada persamaan polynomial

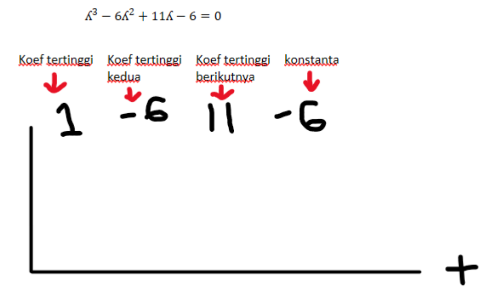
   Dimana dalam persamaan polynomial sebelumnya, diperoleh angka **6**. Lalu kita perlu mencari seluruh factor bilangan dari angka 6, diperoleh: $\pm 1, \pm 2, dan\ \pm 3$

2. Uji coba seluruh factor yang sudah ditemukan ke dalam skema horner, mulai dari factor paling terkecil. Cari yang menghasilkan 0 (tidak menghasilkan sisa)

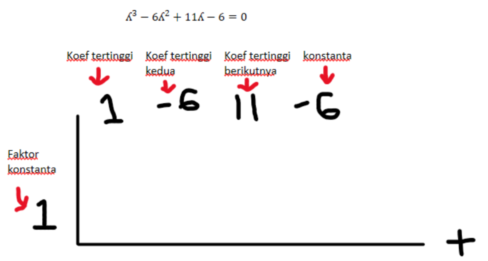
   Dari factor angka 6 yang telah ditemukan tadi, kita masukkan ke dalam skema horner. Jika menghasilkan angka 0, maka akar penyelesaian (nilai lambda) sudah ditemukan

   Skema Horner:

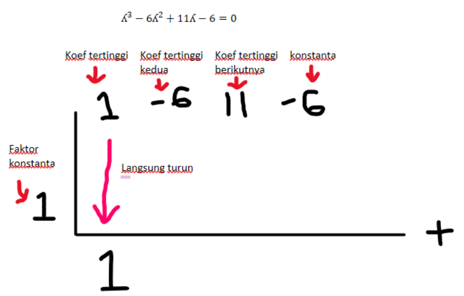
   - Susun Koefisien dari tiap variabel seperti dibawah



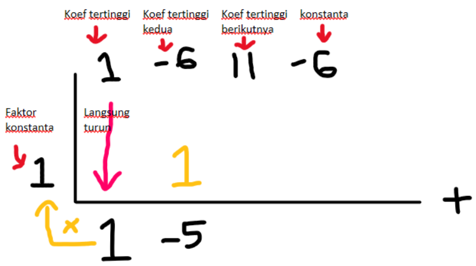
   - Masukkan factor dari konstanta yang akan dicoba



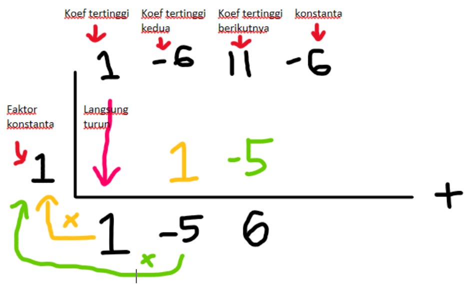
   - Koefisien derajat / pangkat paling tinggi langsung turun

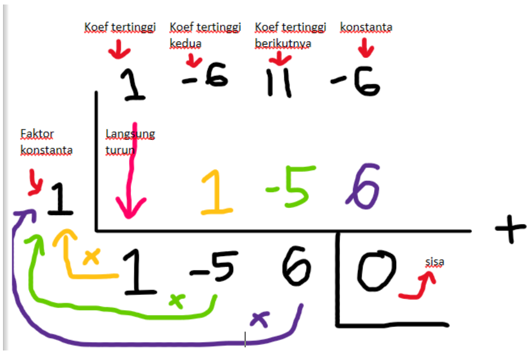


- Koefisien yang turun dikali dengan factor, lalu diletakkan di bawah koefisien dengan pangkat terendah setelahnya. Lalu dijumlahkan



- Ulangi Langkah yang sama sampai semua koefisien dan konstanta berhasil dijumlahkan





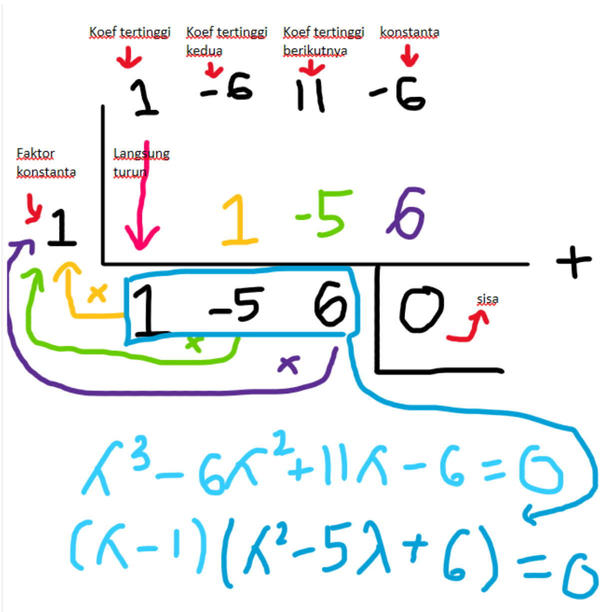
Karena factor konstanta 1 menghasilkan sisa 0, Langkah ini dihentikan. Dapat disimpulkan bahwa $\lambda = 1$ adalah akar penyelesaian dari persamaan di atas.

JIKA BELUM MENGHASILKAN SISA 0, ULANGI LANGKAH DIATAS MENGGUNAKAN FAKTOR KONSTANTA YANG LAIN

Tips:

- Mulai dari factor konstannta terkecil dahulu

3. Jika salah satu akar ditemukan, maka derajat polinom akan berkurang satu. Ulangi Langkah sebelumnya hingga derajat polinom menjadi 2. Jika sudah polinom derajat 2, akar-akar penyelesaian bisa menggunakan rumus kuadratik atau cara biasa.



Berikutnya, kita mencari akar-akar persamaan dari $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Untuk mencari persamaan ini bisa menggunakan rumus kuadratik atau pemecahan akar biasa.

Rumus kuadratik: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -5 \quad c = 6$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$$

$$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{25 - [4.1.6]}}{2.1}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm 1}{2}$$

1 $\quad \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

2 $\quad \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Sehingga diperoleh nilai λ:

5. $\lambda 1$ = 1
6. $\lambda 2$ = 2
7. $\lambda 3$ = 3

Berikutnya, kita akan mencari vector Eigen

Untuk mencari vector eigen, kita menggunakan persamaan: $(\lambda \cdot \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \cdot \overline{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{0}$

$$(\lambda \cdot I - A) = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -4 & 2 \\ 3 & \lambda - 4 & 0 \\ 3 & -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (\lambda \cdot I - A) \cdot \bar{X} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda + 1 & -4 & 2 \\ 3 & \lambda - 4 & 0 \\ 3 & -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kita ganti nilai λ dengan 3 nilai yang sudah ditemukan tadi

Untuk $\lambda 1 = 1$

$$\begin{pmatrix} \lambda + 1 & -4 & 2 \\ 3 & \lambda - 4 & 0 \\ 3 & -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 1 & -4 & 2 \\ 3 & 1 - 4 & 0 \\ 3 & -1 & 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Lalu kita mencari nilai x_1, x_2, x_3 menggunakan metode Gauss

***iterasi* 1**: $B_1 = B_1 \cdot \frac{1}{2}$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

***iterasi* 2**: $B_2 = B_2 + B_1 \cdot -3$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot -3$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

***iterasi* 3**: $B_3 = B_3 + B_1 \cdot -3$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot -3$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

***iterasi* 4**: $B_2 = B_2 \cdot \frac{1}{3}$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

***iterasi* 5**: $B_3 = B_3 + B_2 \cdot -5$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot -5$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan operasi Gauss di atas, diperoleh 2 persamaan:

1. $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$
2. $x_2 - x_3 = 0$

Dari persamaan ke-2, kita bisa mengubahnya menjadi: $x_2 = x_3$

Dari informasi tersebut juga mengindikasikan bahwa nilai x_2 akan sama berapapun nilainya dengan x_3. Kita juga bisa mendapati info bahwa seluruh angka bernilai benar atau bisa dikatakan kita bisa mengisi nilai x_2 dan x_3 berapapun angkanya. Sehingga nilai x_2 bisa kita misalkan dengan t, otomatis nilai x_3 juga bernilai t. Lalu kita bisa mengubah nilai x_1 menjadi:

$x_1 = 2x_2 - x_3 = 2t - t = t$

Sehingga Vektor Eigen untuk ⅄1 = 1: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$

karena memiliki factor yang sama, kita bisa mengeluarkan t dan merubahnya menjadi: $\begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Maka $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$adalah vector eigen dari ⅄1 = 1

Berikutnya untuk $\lambda 2 = 2$

$$\begin{pmatrix} \lambda + 1 & -4 & 2 \\ 3 & \lambda - 4 & 0 \\ 3 & -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 - 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lalu kita mencari nilai x_1, x_2, x_3 menggunakan metode Gauss

$\boldsymbol{iterasi\ 1}$: $B_1 = B_1 \cdot \frac{1}{3}$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}33 \\ 0{,}67 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1{,}33 & 0{,}67 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{iterasi\ 2}$: $B_2 = B_2 + B_1 \cdot -3$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}33 \\ 0{,}67 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot -3$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2{,}01 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2{,}01 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1{,}33 & 0{,}67 & 0 \\ 0 & 2 & -2{,}01 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{iterasi\ 3}$: $B_3 = B_3 + B_1 \cdot -3$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}33 \\ 0{,}67 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot -3$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3{,}99 \\ -2{,}01 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}99 \\ -3{,}01 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1{,}33 & 0{,}67 & 0 \\ 0 & 2 & -2{,}01 & 0 \\ 0 & 2{,}99 & -3{,}01 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{iterasi\ 4}$: $B_2 = B_2 \cdot \frac{1}{2}$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2{,}01 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1{,}01 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1{,}33 & 0{,}67 & 0 \\ 0 & 1 & -1{,}01 & 0 \\ 0 & 2{,}99 & -3{,}01 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{iterasi\ 5}$: $B_3 = B_3 + B_2 \cdot -2{,}99$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}99 \\ -3{,}01 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1{,}01 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot -2{,}99$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}99 \\ -3{,}01 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2{,}99 \\ 3{,}01 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1{,}33 & 0{,}67 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan operasi Gauss di atas, diperoleh 2 persamaan:

1. $x_1 - 1{,}33x_2 + 0{,}67x_3 = 0$
2. $x_2 - x_3 = 0$

Dari persamaan ke-2, kita bisa mengubahnya menjadi: $x_2 = x_3$

Dari informasi tersebut juga mengindikasikan bahwa nilai x_2 akan sama berapapun nilainya dengan x_3. Kita juga bisa mendapati info bahwa seluruh angka bernilai benar atau bisa dikatakan kita bisa mengisi nilai x_2 dan x_3 berapapun angkanya. Sehingga nilai x_2 bisa kita misalkan dengan t, otomatis nilai x_3 juga bernilai t. Lalu kita bisa mengubah nilai x_1 menjadi:

$$x_1 = 1{,}33x_2 - 0{,}67x_3 = 1{,}33t - 0{,}67t = 0{,}66t$$

Sehingga Vektor Eigen untuk ʎ1 = 2: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}66t \\ t \\ t \end{pmatrix}$

karena memiliki factor yang sama, kita bisa mengeluarkan t dan merubahnya menjadi: $\begin{pmatrix} 0{,}66t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0{,}66 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Maka $\begin{pmatrix} 0{,}66 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$adalah vector eigen dari ʎ1 = 2

Berikutnya untuk ʎ3 = 3

$$\begin{pmatrix} \lambda+1 & -4 & 2 \\ 3 & \lambda-4 & 0 \\ 3 & -1 & \lambda-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 & -4 & 2 \\ 3 & 3-4 & 0 \\ 3 & -1 & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lalu kita mencari nilai x_1, x_2, x_3 menggunakan metode Gauss

$\boldsymbol{iterasi\ 1}$: $B_1 = B_1 \cdot \frac{1}{4}$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0{,}5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{iterasi\ 2}$: $B_2 = B_2 + B_1 \cdot -3$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot -3$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 2 & -1{,}5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{iterasi\ 3}$: $B_3 = B_3 + B_1 \cdot -3$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot -3$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 2 & -1{,}5 & 0 \\ 0 & 2 & -1{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{iterasi\ 4}$: $B_2 = B_2 \cdot \frac{1}{2}$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0{,}75 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}75 & 0 \\ 0 & 2 & -1{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{iterasi\ 5}$: $B_3 = B_3 + B_2 \cdot -2$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0{,}75 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot -2$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan operasi Gauss di atas, diperoleh 2 persamaan:

1. $x_1 - x_2 + 0{,}5x_3 = 0$
2. $x_2 - 0{,}75x_3 = 0$

Dari Persamaan di atas, kita bia memisalkan x_3 menjadi t. Sehingga persamaan di atas berubah menjadi:

$x_3 = t$

$x_2 = 0{,}75t$

$x_1 = x_2 - 0{,}5t = 0{,}75t - 0{,}5t = 0{,}25t$

Sehingga Vektor Eigen untuk ʎ1 = 3: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25t \\ 0{,}75t \\ t \end{pmatrix}$

karena memiliki factor yang sama, kita bisa mengeluarkan t dan merubahnya menjadi: $\begin{pmatrix} 0{,}25t \\ 0{,}75t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}75 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Maka $\begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}75 \\ 1 \end{pmatrix}$adalah vector eigen dari ʎ3 = 3

Carilah P^{-1} dengan menggunakan OBE

Urutan matrix P adalah ::

a. kolom 1 ➔ nilai eigen terkecil

b. kolom 2 ➔ nilai eigen terkecil berikutnya

c. kolom 3 ➔ nilai eigen terbesar

Berikutnya kita mencari P^{-1} dimana P adalah Matriks yang berisi kumpulan Vektor Eigen yang sudah ditemukan sebelumnya. Perlu diperhatikan juga petunjuk yang diberikan di atas untuk menentukan urutan matriks. Sehingga:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}66 & 0{,}25 \\ 1 & 1 & 0{,}75 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berikutnya, kita bisa mencari invers dari Matriks P dengan Metode Gauss

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}66 & 0{,}25 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0{,}75 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{iterasi\ 1}: B_2 = B_2 + B_1 \cdot -1$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0{,}75 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}66 \\ 0{,}25 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot -1$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0{,}75 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}66 \\ -0{,}25 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}34 \\ 0{,}5 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}66 & 0{,}25 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}34 & 0{,}5 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{iterasi\ 2}: B_3 = B_3 + B_1 \cdot -1$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}66 \\ 0{,}25 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot -1$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}66 \\ -0{,}25 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}34 \\ 0{,}75 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}66 & 0{,}25 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}34 & 0{,}5 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}34 & 0{,}75 & \vdots & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{iterasi\ 3}$: $B_2 = B_2 \cdot \frac{1}{0,34}$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,34 \\ 0,5 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{0,34}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1,47 \\ -2,94 \\ 2,94 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0,66 & 0,25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1,47 & -2,94 & 2,94 & 0 \\ 0 & 0,34 & 0,75 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\boldsymbol{iterasi\ 4}$: $B_3 = B_3 + B_2 \cdot -0,34$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,34 \\ 0,75 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1,47 \\ -2,94 \\ 2,94 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot -0,34$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,34 \\ 0,75 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0,34 \\ -0,5 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,25 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0,66 & 0,25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1,47 & -2,94 & 2,94 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$\boldsymbol{iterasi\ 5}$: $B_3 = B_3 \cdot \frac{1}{0,25}$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,25 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{0,25}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0,66 & 0,25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1,47 & -2,94 & 2,94 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

$\boldsymbol{iterasi\ 6}$: $B_2 = B_2 + B_3 \cdot -1,47$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1,47 \\ -2,94 \\ 2,94 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot -1,47$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1,47 \\ -2,94 \\ 2,94 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1,47 \\ 0 \\ 5,88 \\ -5,88 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2,94 \\ 8,82 \\ -5,88 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0,66 & 0,25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2,94 & 8,82 & -5,88 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right)$$