Pembahasan Kuis 2 Alin 2023 Tipe B

Hitunglah $h \cdot k$ jika diketahui h + k $= (-5,-7,-3)$ dan h − k $= (9,6,-4)$

Untuk menyelesaikan perkalian cross di atas, kita bisa menggunakan persamaan:

$$h \cdot k = \frac{1}{4} \cdot \|h+k\|^2 - \frac{1}{4} \cdot \|h-k\|^2$$

$\|h+k\| = \sqrt{(-5)^2 + (-7)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25+49+9} = \sqrt{83}$

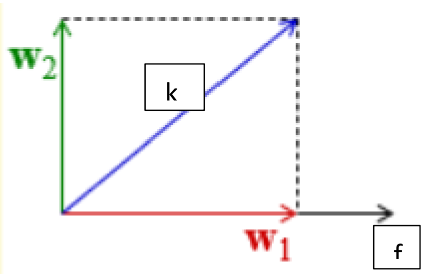
$\|h+k\|^2 = (\sqrt{83})^2 = 83$

$\|h-k\| = \sqrt{9^2 + 6^2 + (-4)^2} = \sqrt{81+36+16} = \sqrt{133}$

$\|h-k\|^2 = (\sqrt{133})^2 = 133$

$\therefore h \cdot k = \frac{1}{4} \cdot 83 - \frac{1}{4} \cdot 133 = 20{,}75 - 33{,}25 = -12{,}5$

Diketahui f (-8, -6, 2) dan k (6, 7, -6), carilah proyeksi orthogonal vector k terhadap f.



$$\therefore w_1 = \frac{-102}{104} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = -0{,}98 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}85 & x \\ 5{,}88 & y \\ -1{,}96 & z \end{pmatrix}$$

Maka kita akan mencari w_1: $w_1 = \frac{k \cdot f}{\|f\|^2} \cdot f$

$k \cdot f = k_1 \cdot f_1 + k_2 \cdot f_2 + k_3 \cdot f_3$

$k \cdot f = (6 \cdot -8) + (7 \cdot -6) + (-6 \cdot 2)$

$k \cdot f = -48 + (-42) + (-12) = -102$

$\|f\| = \sqrt{(f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2}$

$\|f\| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2 + (2)^2}$

$\|f\| = \sqrt{64+36+4} = \sqrt{104}$

$\|f\|^2 = (\sqrt{104})^2 = 104$

Carilah komponen vector k yang orthogonal terhadap f

Maka kita akan mencari w_2

$w_2 = k - w_1$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7{,}85 \\ 5{,}88 \\ -1{,}96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}85 & x \\ 1{,}12 & y \\ -4{,}04 & z \end{pmatrix}$$

Berapakah jarak antara titik (9,4) ke garis $9x + 9 = 4y$?

Untuk menemukan jawaban dari pertanyaan ini, kita bisa menggunakan rumus:

$$\|d\| = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Lalu kita akan identifikasi terlebih dahulu masing-masing komponen terhadap persamaan di atas.

Persamaan Garis bisa kita ubah menjadi bentuk : $9x - 4y + 9 = 0$

Sehingga,

$a = 9$ $\qquad x_0 = 9$

$b = -4$ $\qquad y_0 = 4$

$c = 9$

Sehingga

$$\|d\| = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\|d\| = \frac{|9 \cdot 9 + (-4) \cdot 4 + 9|}{\sqrt{9^2 + (-4)^2}} = \frac{|81 + (-16) + 9|}{\sqrt{81 + 16}} = \frac{|74|}{\sqrt{97}} = \frac{74}{\sqrt{97}} = 7{,}51$$

Carilah luas segitiga yang ditentukan oleh titik a (4, -5, -7) b (9, -6, 6) c (3, -4, -6). Titik pusat adalah c dan perkalian cross nya adalah ca x cb.

Untuk mencari luas segitiga, kita bisa menggunakan rumus:

$$L\Delta = \frac{1}{2} \cdot \|ca \times cb\|$$

Dengan persamaan di atas, kita perlu mencari hasil perkalian cross dari $ca \times cb$ lalu kia cari Panjang dari hasil perkalian cross tersebut. Setelah itu kita kalikan dengan 0,5

$ca = a - c$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$cb = b - c$

$$= \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\therefore ab \times ac = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 12 \end{vmatrix}, \ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} -14, & -18, & 4 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

Setelah kita menemukan hasil perkalian cross $ab \times ac$, kita akan melanjutkan untuk menghitung Panjang dari hasil cross tersebut

$$\|ab \times ac\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-14)^2 + (-18)^2 + (4)^2} = \sqrt{536} = 23{,}15$$

Luas Segitiga: $\frac{1}{2} \cdot \|ab \times ac\| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{536} = \frac{\sqrt{536}}{2}$ atau $\frac{1}{2} \cdot 23{,}15 = 11{,}58$

Luas Jajaran Genjang: $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \|ab \times ac\| = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{536} = \sqrt{536}$ atau $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 23{,}15 = 23{,}15$

Carilah persamaan bidang yang melalui titik d (8, -4, 7) f (4,4, -5) g (-4, 9, -6). Titik pusat adalah d sehingga vektor normal adalah $df \times dg$ dan $P_o = g$

Untuk mengerjakan soal ini, kita bisa menggunakan persamaan:

$$\overline{P_oP} \cdot \bar{n} = 0$$

$P_o = g = (-4,9,-6)$

$P = (x, y, z)$

$\bar{n} = df \times dg$

$df = f - d$

$= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix}$

$dg = g - d$

$= \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 13 \\ -13 \end{pmatrix}$

$\therefore df \times dg = \begin{vmatrix} -4 & 8 & -12 \\ -12 & 13 & -13 \end{vmatrix}$

$\bar{n} = \left(\begin{vmatrix} 8 & -12 \\ 13 & -13 \end{vmatrix}, \quad - \begin{vmatrix} -4 & -12 \\ -12 & -13 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ -12 & 13 \end{vmatrix} \right)$

$\bar{n} = (52\,, \quad 92, \quad 44)$

$\therefore \overline{P_oP} \cdot \bar{n} = 0$

$[P - g] \cdot \bar{n} = 0$

$\left[\left(x - (-4)\right), (y - 9), \left(z - (-6)\right)\right] \cdot (52, \quad 92, \quad 44) = 0$

$[52 \cdot (x + 4)] + [92 \cdot (y - 9)] + [44 \cdot (z + 6)] = 0$

$(52x + 208) + (92y - 828) + (44z + 264) = 0$

$52x + 92y + 44z - 356 = 0$

Variabel X = 52

Variabel Y = 92

Variabel Z = 44

Variabel Konstanta = -356

Apakah a (7, -5, 4) b (-5, 9, -5) c (-7, 9, 3) terletak pada bidang datar yang sama ? Carilah Determinan A dengan merubah menjadi gauss.

Untuk melakukan pengecekan ini, kita perlu melakukan operasi menggunakan persamaan:

$$\det a \cdot (b \times c) = 0$$

Dimana jika mencari determinan tersebut menghasilkan nilai 0, maka ketiga titik tersebut berada pada bidang yang sama.

Berikutnya kita akan membuat matriks $a \cdot (b \times c)$ terlebih dahulu, Dimana matriks ini akan berbentuk:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{b_3} \\ \boldsymbol{c_1} & \boldsymbol{c_2} & \boldsymbol{c_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -5 & 4 \\ -5 & 9 & -5 \\ -7 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

Setelah kita membentuk matriks tersebut, kita akan mencari meggunakan salah satu dari 3 metode yang telah diajarkan, yakni: Gauss, Segitiga Atas, Kofaktor baris, dan Kofaktor kolom. Pada kali ini, kita akan menggunakan metode Gauss

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 7 & -5 & 4 \\ -5 & 9 & -5 \\ -7 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

$iterasi\ 1: B_1 = B_1 \cdot \frac{1}{7}$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}71 \\ 0{,}57 \end{pmatrix}$$

$$7 \begin{vmatrix} 1 & -0{,}71 & 0{,}57 \\ -5 & 9 & -5 \\ -7 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

$iterasi\ 2: B_2 = B_2 + B_1 \cdot 5$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}71 \\ 0{,}57 \end{pmatrix} \cdot 5$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -3{,}55 \\ 2{,}85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5{,}45 \\ -2{,}15 \end{pmatrix}$$

$iterasi\ 4: B_2 = B_2 \cdot \frac{1}{5{,}45}$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5{,}45 \\ -2{,}15 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5{,}45}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0{,}39 \end{pmatrix}$$

$$7 \cdot 5{,}45 \begin{vmatrix} 1 & -0{,}71 & 0{,}57 \\ 0 & 1 & -0{,}39 \\ 0 & 4{,}03 & 6{,}99 \end{vmatrix}$$

$iterasi\ 5: B_3 = B_3 + B_2 \cdot -4{,}03$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}03 \\ 6{,}99 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0{,}39 \end{pmatrix} \cdot -4{,}03$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}03 \\ 6{,}99 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4{,}03 \\ 1{,}57 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8{,}56 \end{pmatrix}$$

$$7\begin{vmatrix} 1 & -0{,}71 & 0{,}57 \\ 0 & 5{,}45 & -2{,}15 \\ -7 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

$iterasi\ 3$: $B_3 = B_3 + B_1 \cdot 7$

$$B_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}71 \\ 0{,}57 \end{pmatrix} \cdot 7$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -4{,}97 \\ 3{,}99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}03 \\ 6{,}99 \end{pmatrix}$$

$$7\begin{vmatrix} 1 & -0{,}71 & 0{,}57 \\ 0 & 5{,}45 & -2{,}15 \\ 0 & 4{,}03 & 6{,}99 \end{vmatrix}$$

$$7 \cdot 5{,}45 \begin{vmatrix} 1 & -0{,}71 & 0{,}57 \\ 0 & 1 & -0{,}39 \\ 0 & 0 & 8{,}56 \end{vmatrix}$$

$iterasi\ 6$: $B_3 = B_3 \cdot \frac{1}{8{,}56}$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8{,}56 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8{,}56}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$7 \cdot 5{,}45 \cdot 8{,}56 \begin{vmatrix} 1 & -0{,}71 & 0{,}57 \\ 0 & 1 & -0{,}39 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Nilai Determinan A: $7 \cdot 5{,}45 \cdot 8{,}56 = 326{,}56$