

Carilah koordinat akhir dari (3, - 8) jika pertama kali dicerminkan terhadap sumbu y, kemudian di cerminkan terhadap sumbu x, kemudian di cerminkan terhadap garis $x = y$ dan terakhir dilakukan rotasi sebesar 30.

($\sin 30=0,5$ dan $\cos 30=0,87$).

Untuk mengerjakan soal di atas terdapat 2 cara pengerjaan, yaitu:

1. Mengalikan koordinat dengan matriks perubahan setiap ada perubahan
2. Mengalikan matriks perubahan terlebih dahulu hingga selesai, baru dikalikan dengan koordinat awal (Komposisi Transformasi)

Cara 1:

Transformasi 1: Dicerminkan terhadap sumbu-y :

Matriks Transformasi * Koordinat = Hasil Transformasi

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Perhitungan perkalian Matriks:

$$\begin{pmatrix} [3 \cdot -1] + [0 \cdot -8] \\ [3 \cdot 0] + [1 \cdot -8] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Transformasi 2: Dicerminkan terhadap sumbu-x :

Matriks Transformasi * Hasil sebelumnya = Hasil Transformasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -3 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Perhitungan perkalian Matriks:

$$\begin{pmatrix} [-3 \cdot 1] + [0 \cdot -8] \\ [-3 \cdot 0] + [-1 \cdot -8] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Transformasi 3: Dicerminkan terhadap garis $x=y$:

Matriks Transformasi * Koordinat Sebelumnya = Hasil Transformasi

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Perhitungan perkalian Matriks:

$$\begin{pmatrix} [-3 \cdot 0] + [1 \cdot 8] \\ [-3 \cdot 1] + [0 \cdot 8] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Transformasi 4: Rotasi 30:

Matriks Transformasi * Koordinat Sebelumnya = Hasil Transformasi

| | | | | | |
|---------|-----------|---|----|---|------|
| Cos 30° | - sin 30° | * | 8 | = | 8,46 |
| Sin 30° | Cos 30° | | -3 | | 1,39 |

| | | | |
|------|-------|---|----|
| 0,87 | - 0,5 | * | 8 |
| 0,5 | 0,87 | | -3 |

Perhitungan perkalian matriks:

$$\begin{pmatrix} [0,87 \cdot 8] + [-0,5 \cdot -3] \\ [0,5 \cdot 8] + [0,87 \cdot -3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,96 + 1,5 \\ 4 + (-2,61) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,46 \\ 1,39 \end{pmatrix}$$

Cara 2:

Langkah 1: Matriks Transformasi 1 * Matriks Transformasi 2 = Hasil Transformasi 1

Matriks Transformasi 1 * Matriks Transformasi 2 = Hasil Transformasi 1
(Pencerminan Sumbu Y) (Pencerminan Sumbu X)

| | | | | | | | |
|----|---|---|---|----|---|----|----|
| -1 | 0 | * | 1 | 0 | = | -1 | 0 |
| 0 | 1 | | 0 | -1 | | 0 | -1 |

Perhitungan perkalian matriks:

$$\begin{pmatrix} [-1 \cdot 1] + [0 \cdot 0] & [-1 \cdot 0] + [0 \cdot -1] \\ [0 \cdot 1] + [1 \cdot 0] & [0 \cdot 0] + [1 \cdot -1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Langkah 2: Matriks Transformasi 3 * Hasil Transformasi 1 = Hasil Transformasi 2

Matriks Transformasi 3 * Hasil Transformasi 1 = Hasil Transformasi 1
(Pencerminan garis x=y)

| | | | | | | | |
|---|---|---|----|----|---|----|----|
| 0 | 1 | * | -1 | 0 | = | 0 | -1 |
| 1 | 0 | | 0 | -1 | | -1 | 0 |

Perhitungan perkalian matriks:

$$\begin{pmatrix} [0 \cdot -1] + [1 \cdot 0] & [0 \cdot 0] + [1 \cdot -1] \\ [1 \cdot -1] + [0 \cdot 0] & [1 \cdot 0] + [0 \cdot -1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Langkah 3: Matriks Transformasi 4 * Hasil Transformasi 2 = Hasil Transformasi 3

Matriks Transformasi 3 * Hasil Transformasi 2 = Hasil Transformasi 3
(Rotasi 30°)

| | | | | | | | |
|---------|-----------|---|----|----|---|-------|-------|
| Cos 30° | - sin 30° | * | 0 | -1 | = | 0,5 | -0,87 |
| Sin 30° | Cos 30° | | -1 | 0 | | -0,87 | -0,5 |

| | | | | |
|------|-------|---|----|----|
| 0,87 | - 0,5 | * | 0 | -1 |
| 0,5 | 0,87 | | -1 | 0 |

Perhitungan perkalian matriks:

$$\begin{pmatrix} [0,87 \cdot 0] + [-0,5 \cdot -1] & [0,87 \cdot -1] + [-0,5 \cdot 0] \\ [0,5 \cdot 0] + [0,87 \cdot -1] & [0,5 \cdot -1] + [0,87 \cdot 0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,87 \\ -0,87 & -0,5 \end{pmatrix}$$

Langkah 4: Hasil Transformasi 3 * Vektor / Koordinat Awal = Koordinat Akhir

Matriks Transformasi 3 * Vektor / Koordinat Awal = Koordinat Akhir

| | |
|-------|-------|
| 0,5 | -0,87 |
| -0,87 | -0,5 |

*

| |
|----|
| 3 |
| -8 |

=

| |
|-------|
| 0,5 |
| -0,87 |

Perhitungan perkalian matriks:

$$\begin{pmatrix} [0,5 \cdot 3] + [-0,87 \cdot -8] \\ [-0,87 \cdot 3] + [-0,5 \cdot -8] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 + 6,96 \\ (-2,61) + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,46 \\ 1,39 \end{pmatrix}$$

TIPS:

- Ingat kembali operasi dasar perkalian matriks yaa

Kalikan sesuai urutannya

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \\ t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br+ct & aq+bs+cu \\ dp+er+ft & dq+es+fu \\ gp+hr+it & gq+hs+iu \end{pmatrix}$$

Syarat perkalian: Ukuran **kolom** matriks 1 harus sama dengan **baris** matriks 2

Contoh di atas

matriks 1 memiliki 3 baris dan 3 kolom (A:3x3)

matriks 2 memiliki 3 baris dan 2 kolom (B:3x2)

- Hafalkan macam-macam matriks transformasi yang ada di **PPT 9**

Nyatakanlah $(-43, 50, -49, 76)$ sebagai kombinasi linier dari $(-5, 6, -5, 9)$, $(6, -7, 6, -8)$ dan $(-2, 2, -4, 5)$. Carilah nilai k_1 , k_2 dan k_3 dengan menggunakan Gauss-Jordan.

Langkah berikutnya, kita perlu mengubah vector-vektor di atas menjadi sebuah matriks Bernama A

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -2 & -43 \\ 6 & -7 & 2 & 50 \\ -5 & 6 & -4 & -49 \\ 9 & -8 & 5 & 76 \end{pmatrix}$$

Kita perlu mengubah matriks tersebut menjadi bentuk gauss-jordan

$$\text{iterasi 1: } B_1 = B_1 \cdot \frac{1}{-5}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -2 \\ -43 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-5}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1,2 \\ 0,4 \\ 8,6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1,2 & 0,4 & 8,6 \\ 6 & -7 & 2 & 50 \\ -5 & 6 & -4 & -49 \\ 9 & -8 & 5 & 76 \end{pmatrix}$$

$$\text{iterasi 2: } B_2 = B_1 + B_2 \cdot -6$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 2 \\ 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1,2 \\ 0,4 \\ 8,6 \end{pmatrix} \cdot -6$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 2 \\ 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 7,2 \\ -2,4 \\ -51,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,2 \\ -0,4 \\ -1,6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1,2 & 0,4 & 8,6 \\ 0 & 0,2 & -0,4 & -1,6 \\ -5 & 6 & -4 & -49 \\ 9 & -8 & 5 & 76 \end{pmatrix}$$

TIPS:

- Perhatikan peletakan urutan vector
- Hati-hati dalam melakukan penghitungan

Carilah general solusi untuk $A \cdot X = B$. Kerjakan dengan Gauss – Jordan

| | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|-----|
| 5 | X1 | -4 | X2 | 6 | X3 | 5 | X4 | 6 | X5 | -2 | X6 | = | 17 |
| 6 | X1 | 9 | X2 | -3 | X3 | -4 | X4 | -3 | X5 | 9 | X6 | = | -22 |
| -2 | X1 | 2 | X2 | 5 | X3 | 7 | X4 | 9 | X5 | -2 | X6 | = | 90 |

Kita mengubah persamaan di atas menjadi bentuk matriks

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 6 & 5 & 6 & -2 & 17 \\ 6 & 9 & -3 & -4 & -3 & 9 & -22 \\ -2 & 2 & 5 & 7 & 9 & -2 & 90 \end{pmatrix}$$

Berikutnya kita mengubah matriks A menjadi bentuk gauss-jordan

$$\text{iterasi 1: } B_1 = B_1 \cdot \frac{1}{5}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \\ 5 \\ 6 \\ -2 \\ 17 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ 1,2 \\ 1 \\ 1,2 \\ -0,4 \\ 3,4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0,8 & 1,2 & 1 & 1,2 & -0,4 & 3,4 \\ 6 & 9 & -3 & -4 & -3 & 9 & -22 \\ -2 & 2 & 5 & 7 & 9 & -2 & 90 \end{pmatrix}$$

$$\text{iterasi 3: } B_3 = B_3 + B_1 \cdot 2$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ -2 \\ 90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ 1,2 \\ 1 \\ 1,2 \\ -0,4 \\ 3,4 \end{pmatrix} \cdot 2$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ -2 \\ 90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1,6 \\ 2,4 \\ 2 \\ 2,4 \\ -0,8 \\ 6,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,4 \\ 7,4 \\ 9 \\ 11,4 \\ -2,8 \\ 96,8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0,8 & 1,2 & 1 & 1,2 & -0,4 & 3,4 \\ 0 & 13,8 & -10,2 & -10 & -10,2 & 11,4 & -42,4 \\ 0 & 0,4 & 7,4 & 9 & 11,4 & -2,8 & 96,8 \end{pmatrix}$$

$$\text{iterasi 2: } B_2 = B_2 + B_1 \cdot -6$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -3 \\ -4 \\ -3 \\ 9 \\ -22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ 1,2 \\ 1 \\ 1,2 \\ -0,4 \\ 3,4 \end{pmatrix} \cdot -6$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -3 \\ -4 \\ -3 \\ 9 \\ -22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 4,8 \\ -7,2 \\ -6 \\ -7,2 \\ 2,4 \\ -20,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13,8 \\ -10,2 \\ -10 \\ -10,2 \\ 11,4 \\ -42,4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0,8 & 1,2 & 1 & 1,2 & -0,4 & 3,4 \\ 0 & 13,8 & -10,2 & -10 & -10,2 & 11,4 & -42,4 \\ -2 & 2 & 5 & 7 & 9 & -2 & 90 \end{pmatrix}$$

$$\text{iterasi 4: } B_2 = B_2 \cdot \frac{1}{13,8}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 13,8 \\ -10,2 \\ -10 \\ -10,2 \\ 11,4 \\ -42,4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{13,8}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,74 \\ -0,72 \\ -0,74 \\ 0,83 \\ -3,07 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0,8 & 1,2 & 1 & 1,2 & -0,4 & 3,4 \\ 0 & 1 & -0,74 & -0,72 & -0,74 & 0,83 & -3,07 \\ 0 & 0,4 & 7,4 & 9 & 11,4 & -2,8 & 96,8 \end{pmatrix}$$

$$\text{iterasi 5: } B_3 = B_3 + B_2 \cdot -0,4$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,4 \\ 7,4 \\ 9 \\ 11,4 \\ -2,8 \\ 96,8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,74 \\ -0,72 \\ -0,74 \\ 0,83 \\ -3,07 \end{pmatrix} \cdot -0,4$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,4 \\ 7,4 \\ 9 \\ 11,4 \\ -2,8 \\ 96,8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0,4 \\ 0,3 \\ 0,29 \\ 0,3 \\ -0,33 \\ 1,23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7,7 \\ 9,29 \\ 11,7 \\ -3,13 \\ 98,03 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0,8 & 1,2 & 1 & 1,2 & -0,4 & 3,4 \\ 0 & 1 & -0,74 & -0,72 & -0,74 & 0,83 & -3,07 \\ 0 & 0 & 7,7 & 9,29 & 11,7 & -3,13 & 98,03 \end{pmatrix}$$

$$\text{iterasi 6: } B_3 = B_3 \cdot \frac{1}{7,7}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7,7 \\ 9,29 \\ 11,7 \\ -3,13 \\ 98,03 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7,7}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1,21 \\ 1,52 \\ -0,41 \\ 12,73 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0,8 & 1,2 & 1 & 1,2 & -0,4 & 3,4 \\ 0 & 1 & -0,74 & -0,72 & -0,74 & 0,83 & -3,07 \\ 0 & 0 & 1 & 1,21 & 1,52 & -0,41 & 12,73 \end{pmatrix}$$

$$\text{iterasi 7: } B_2 = B_2 + B_3 \cdot 0,74$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,74 \\ -0,72 \\ -0,74 \\ 0,83 \\ -3,07 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1,21 \\ 1,52 \\ -0,41 \\ 12,73 \end{pmatrix} \cdot 0,74$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,74 \\ -0,72 \\ -0,74 \\ 0,83 \\ -3,07 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,74 \\ 0,9 \\ 1,12 \\ -0,3 \\ 9,42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0,18 \\ 0,38 \\ 0,53 \\ 6,35 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0,8 & 1,2 & 1 & 1,2 & -0,4 & 3,4 \\ 0 & 1 & 0 & 0,18 & 0,38 & 0,53 & 6,35 \\ 0 & 0 & 1 & 1,21 & 1,52 & -0,41 & 12,73 \end{pmatrix}$$

iterasi 8: $B_1 = B_1 + B_3 \cdot -1,2$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ 1,2 \\ 1 \\ 1,2 \\ -0,4 \\ 3,4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1,21 \\ 1,52 \\ -0,41 \\ 12,73 \end{pmatrix} \cdot -1,2$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ 1,2 \\ 1 \\ 1,2 \\ -0,4 \\ 3,4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1,2 \\ -1,45 \\ -1,82 \\ 0,49 \\ -15,28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ 0 \\ -0,45 \\ -0,62 \\ 0,09 \\ -11,88 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0,8 & 0 & -0,45 & -0,62 & 0,09 & -11,88 \\ 0 & 1 & 0 & 0,18 & 0,38 & 0,53 & 6,35 \\ 0 & 0 & 1 & 1,21 & 1,52 & -0,41 & 12,73 \end{pmatrix}$$

iterasi 9: $B_1 = B_1 + B_2 \cdot 0,8$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ 0 \\ -0,45 \\ -0,62 \\ 0,09 \\ -11,88 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0,18 \\ 0,38 \\ 0,53 \\ 6,35 \end{pmatrix} \cdot 0,8$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,8 \\ 0 \\ -0,45 \\ -0,62 \\ 0,09 \\ -11,88 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,8 \\ 0 \\ 0,14 \\ 0,3 \\ 0,42 \\ 5,08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0,31 \\ -0,32 \\ 0,51 \\ -6,8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0,31 & -0,32 & 0,51 & -6,8 \\ 0 & 1 & 0 & 0,18 & 0,38 & 0,53 & 6,35 \\ 0 & 0 & 1 & 1,21 & 1,52 & -0,41 & 12,73 \end{pmatrix}$$

Setelah mengerjakan dengan metode gauss-jordan, diperoleh hasil akhir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0,31 & -0,32 & 0,51 & -6,8 \\ 0 & 1 & 0 & 0,18 & 0,38 & 0,53 & 6,35 \\ 0 & 0 & 1 & 1,21 & 1,52 & -0,41 & 12,73 \end{pmatrix}$$

Dari matriks tersebut, kita bisa memperoleh 3 persamaan:

1. $x_1 - 0,31x_4 - 0,32x_5 + 0,51x_6 = -6,8$
2. $x_2 + 0,18x_4 + 0,38x_5 + 0,53x_6 = 6,35$
3. $x_3 + 1,21x_4 + 1,52x_5 - 0,41x_6 = 12,73$

Dari ketiga persamaan akhir yang diperoleh, kita mendapati bahwa x_1, x_2 , dan x_3 tidak memiliki koefisien di depannya.

Sehingga kita bisa mengubah menjadi:

1. $x_1 = -6,8 + 0,31x_4 + 0,32x_5 - 0,51x_6$
2. $x_2 = 6,35 - 0,18x_4 - 0,38x_5 - 0,53x_6$
3. $x_3 = 14,73 - 1,21x_4 - 1,52x_5 + 0,41x_6$

Dari hasil di atas, kita dapat pula bahwa nilai x_4, x_5 , dan x_6 bisa diisi angka berapapun atau bisa dikatakan jika kita masukkan sembarang angka maka hasil akan selalu benar. Maka, kita bisa memisalkan 3 variabel tersebut dengan sembarang huruf, kali ini kita akan memisalkan dengan r, s, dan t

Untuk pemisalan ini, kita bisa urutkan permisalan dari indeks x terbesar ke terkecil. Dalam kasus seperti ini, maka kita perlu memisalkan x_6 terlebih dahulu, baru x_5 dan terakhir x_4 . Sehingga :

$$x_6 = r$$

$$x_5 = s$$

$$x_4 = t$$

$$x_3 = 12,73 - 1,21t - 1,52s + 0,41r$$

$$x_2 = 6,35 - 0,18t - 0,38s - 0,53r$$

$$x_1 = -6,8 + 0,31t + 0,32s - 0,51r$$