

# ALJABAR

## Linier



Pertemuan 2: Matrix



# Agenda Kita

1. Definisi Matrix
2. Mencari Invers Matrix
3. Solving SPL dengan Invers Matrix
4. Pekerjaan Rumah



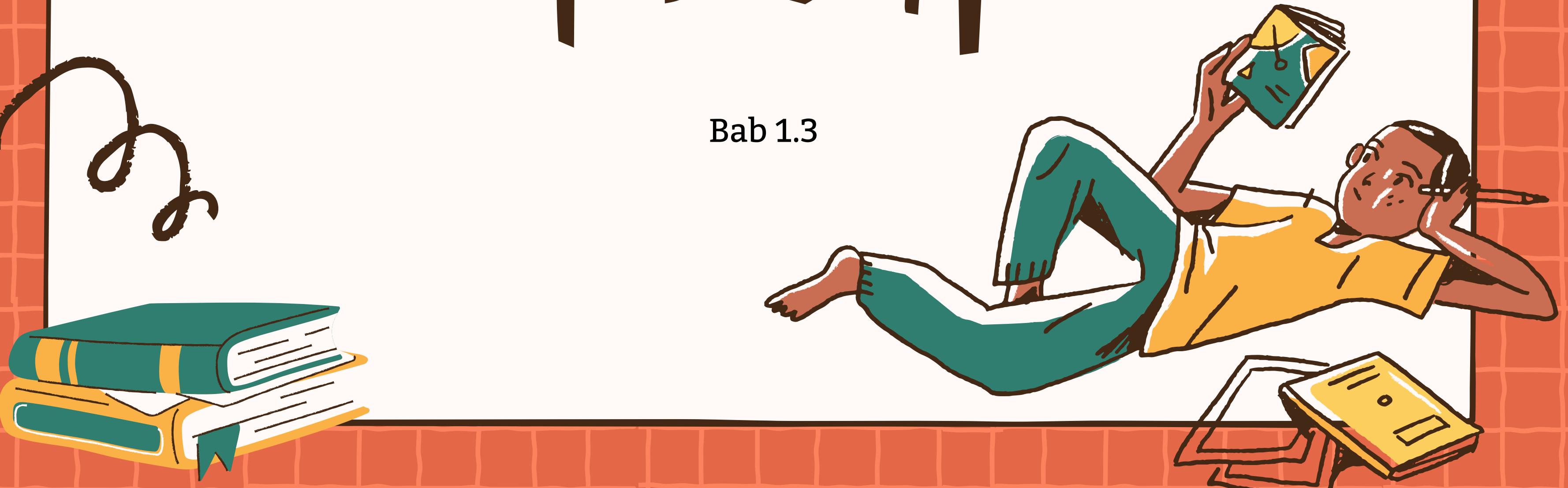
# Learning Outcomes

1. Mengetahui Definisi Matrix
2. Dapat mencari invers
3. Dapat menyelesaikan SPL dengan Invers Matrix



# Matriks & Operasinya

Bab 1.3



# Review or Summary



## 1. Matriks

- Suatu kumpulan nilai bentuk empat persegi panjang
- Terdiri dari **baris-baris** dan **kolom-kolom**
- Tiap nilai dalam matriks disebut **entri**; cara menyebutkan entri adalah dengan **subskrip / indeks (baris, kolom)**

# Review or Summary



## Matriks: Contoh

$$\text{Matriks } A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Semua entri: real

Matriks A terdiri dari 2 baris dan 3 kolom :

$$A_{1,1} = 1 \quad A_{1,2} = 5 \quad A_{1,3} = 9$$

$$A_{2,1} = 7 \quad A_{2,2} = 3 \quad A_{2,3} = 0$$

# Definisi-definisi:

1. Matriks  $A =$  Matriks  $B$  jika ukuran baris  $A$  & baris  $B$  dan ukuran kolom  $A$  & kolom  $B$  sama; dan entri  $A_{i,j} =$  entri  $B_{i,j}$
2. Jika  $C = A \pm B$ , maka  $C_{i,j} = A_{i,j} \pm B_{i,j}$
3. Jika  $M = cA$  ( dengan  $c =$  real / skalar), maka  $M_{i,j} = cA_{i,j}$
4. 1.Jika  $A_1, A_2, \dots, A_n$  adalah matriks-matriks berukuran sama, dan  $c_1, c_2, \dots, c_n$  adalah bilangan-bilangan skalar, maka  $c_1 A_1 + c_2 A_2 + \dots + c_n A_n$  disebut kombinasi linier dari  $A_1, A_2, \dots, A_n$  dengan koefisien  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .



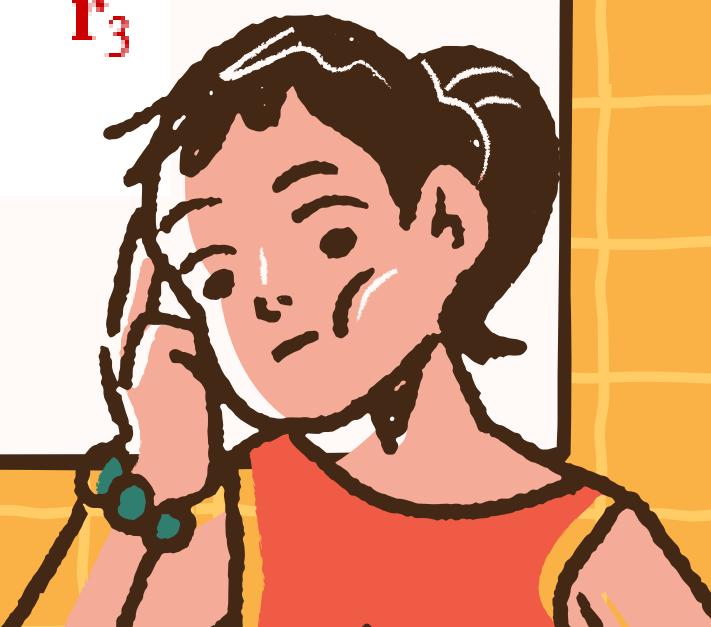
# Definisi-definisi:

5. Suatu matriks dapat di-partisi menjadi beberapa submatriks dengan “menarik” garis horizontal dan/atau garis vertikal.

Contoh:

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} & A_{11} & & A_{21} \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline & A_{21} & & A_{22} \end{array} \right)$$

$$A = \left( \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right) \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{matrix}$$



# Definisi-definisi:

6. Matriks A dikalikan dengan matriks B; syaratnya adalah banyaknya kolom A = banyaknya baris B.

Catatan: perhatikan bahwa perkalian matriks (kedua matriks bujur sangkar dengan ukuran sama) tidak komutatif ( $AB \neq BA$ )

**Contoh:**  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$        $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$
       $BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

**kesimpulan :**  $AB \neq BA$



# Definisi-definisi:

7.  $\text{Transpos}(A)$  = matriks A dengan baris-kolom ditukar tempatnya
8.  $\text{Trace}(A)$  = jumlah semua entri diagonal  $A = A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn}$



# Sifat-Sifat Matriks



## 1. Sifat perkalian matriks:

Jika  $A$  matriks bujur sangkar, maka:

1.  $(A^r)(A^s) = A^{(r+s)}$
2.  $(A^r)^s = A^{(rs)}$

## 2. Sifat matriks transpos:

1.  $(A^T)^T = A$
2.  $(kA)^T = k(A^T)$
3.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
4.  $(AB)^T = B^T A^T$

# **Matriks-matriks khusus:**

- 1. Matriks  $O$  = matriks nol; semua entrinya nol**
- 2. Matriks  $I_n$  = matriks identitas berukuran  $(n \times n)$ ;  
semua entri diagonalnya = 1, entri lain = 0**
- 3. Matriks (vektor) baris adalah matriks dengan 1 baris.**
- 4. Matriks (vektor) kolom adalah matriks dengan 1 kolom.**



**Teorema:** A, B, C merepresentasikan matriks  
a, b merepresentasikan bilangan Skalar

1.  $A + B = B + A$
2.  $A + (B + C) = (A + B) + C$
3.  $A(BC) = (AB)C$
4.  $A(B \pm C) = AB \pm AC$
5.  $(B \pm C)A = BA \pm CA$
6.  $a(B \pm C) = aB \pm aC$
7.  $(a \pm b)C = aC \pm bC$
8.  $a(bC) = (ab)C$
9.  $a(BC) = (aB)C = B(aC)$



**Teorema:**  $O$  merepresentasikan matriks  
 $O$  adalah matriks nol (Semua entrinya = nol)

1.  $A + O = O + A = A$
2.  $A - A = O$
3.  $O - A = -A$
4.  $AO = O; OA = O$



# Review or Summary



## Matriks: Contoh

$$\text{Matriks } A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Semua entri: real

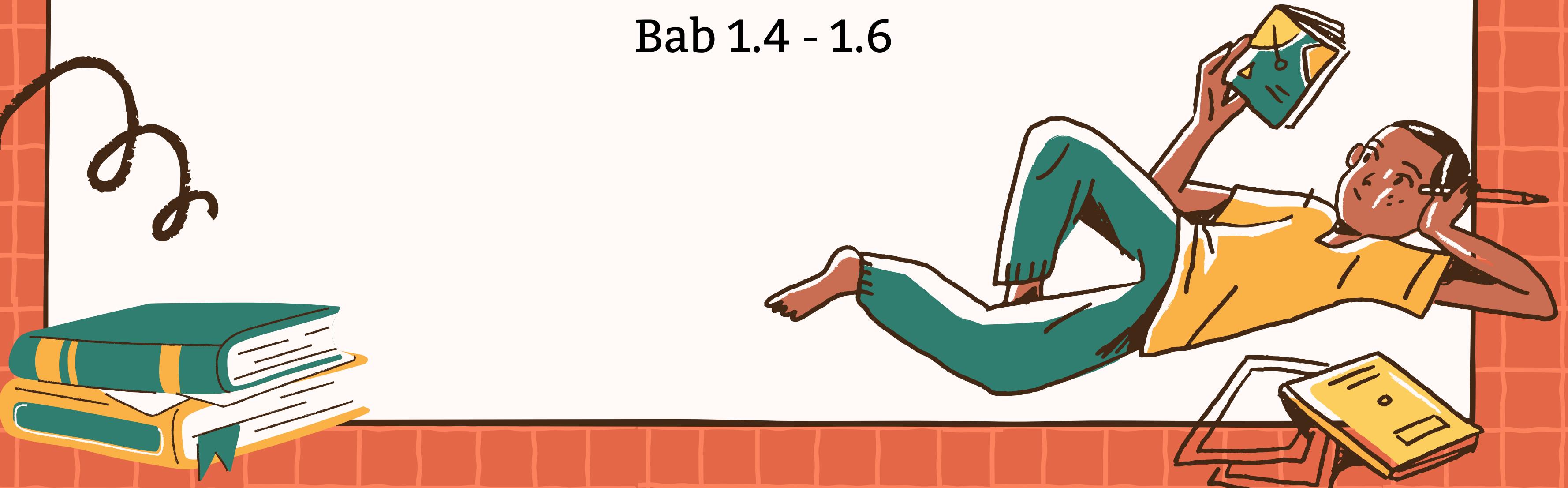
Matriks A terdiri dari 2 baris dan 3 kolom :

$$A_{1,1} = 1 \quad A_{1,2} = 5 \quad A_{1,3} = 9$$

$$A_{2,1} = 7 \quad A_{2,2} = 3 \quad A_{2,3} = 0$$

# MATRiKS iNVERS

Bab 1.4 - 1.6



# invers dari Sebuah Matriks

A adalah matriks bujur sangkar

Jika  $AB = BA = I$  maka B adalah invers dari A dan A adalah invers dari B. (invers matriks A dinotasikan dengan  $A^{-1}$ )

Jika B invers dari A dan C juga invers dari A maka  $B = C$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dan  $D = ad - bc \neq 0$ , maka invers A dapat dihitung dengan

$$A^{-1} = (1/D) \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$



# Sifat-sifat Matriks inverse



Matriks A, B adalah matriks-matriks invertibel

1.  $(A^{-1})^{-1} = A$
2.  $A^n$  invertibel dan  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
3.  $(kA)$  adalah matriks invertibel dan  $(kA)^{-1} = (1/k) A^{-1}$
4.  $A^T$  invertibel dan  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
5. A dan B keduanya matriks invertibel, maka  $AB$  invertibel dan  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

# iNVERSE dengan OBE

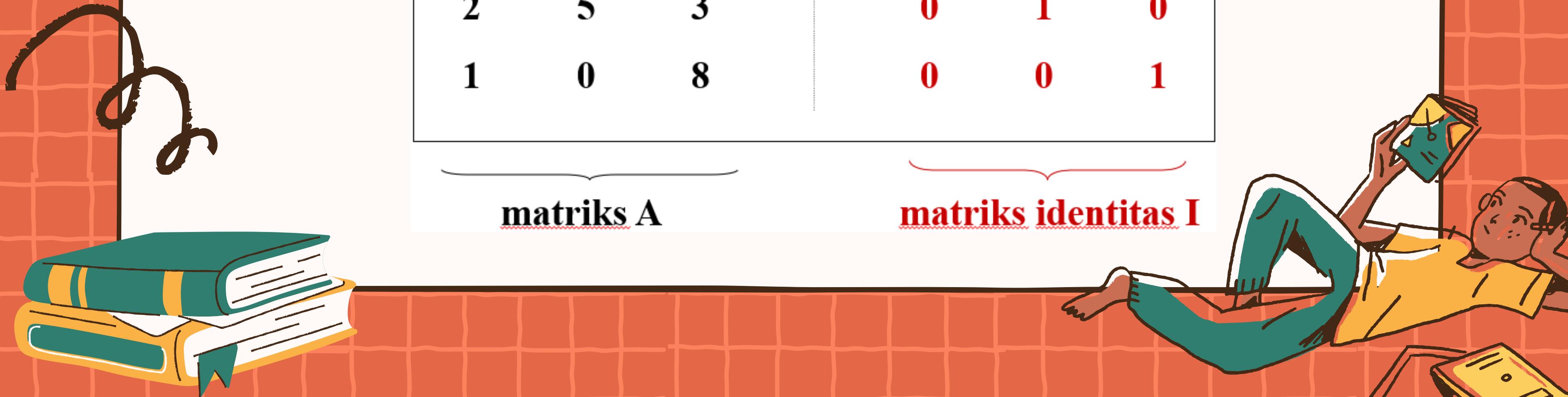
Algoritma untuk mencari invers sebuahmatriks A ( $n \times n$ )  
ubah menjadi matrix identitas dengan menggunakan OBE.

Contoh:

1	2	3	1	0	0
2	5	3	0	1	0
1	0	8	0	0	1

matriks A

matriks identitas I



matriks A

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

dengan OBE dihasilkan

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{array}$$

invers A

matriks A

1	2	3	-40	16	9
2	5	3	13	-5	-3
1	0	8	5	-2	-1

invers A

jika kedua matriks ini dikalikan, akan didapat

$$\left\{ \begin{array}{l} -40 + 26 + 15 = 1 \quad 16 - 10 - 6 = 0 \quad 9 - 6 - 3 = 0 \\ -80 + 65 + 15 = 0 \quad 32 - 25 - 6 = 1 \quad 18 - 15 - 3 = 0 \\ -40 + 0 + 40 = 0 \quad 16 - 0 - 16 = 0 \quad 9 - 0 - 8 = 1 \end{array} \right.$$



# INVERSE MATRIX MATHLAB



```
>> k = [1 2 3; 2 5 3; 1 0 8]  
  
k =  
  
1 2 3  
2 5 3  
1 0 8  
  
>> r = inv (k)  
  
r =  
  
-40.0000 16.0000 9.0000  
13.0000 -5.0000 -3.0000  
5.0000 -2.0000 -1.0000
```

# PERKALIAN MATRIX MATHLAB

```
>> a = [1 2; 1 3]  
  
a =  
  
    1     2  
    1     3  
  
>> j = a*a*a  
  
j =  
  
   11     30  
   15     41
```



# invers matrix menggunakan excel

Cari Inverse  
Matrix Dari

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

A-1 menggunakan OBE

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$b_2 = b_1 * -2 + b_2 \Rightarrow$  Iterasi 1

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$b_3 = b_1 * -1 + b_3 \Rightarrow$  Iterasi 2

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$b_3 = b_2 * 2 + b_3 \Rightarrow$  Iterasi 3

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}$$

$b_3 = b_3 * -1 \Rightarrow$  Iterasi 4

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}$$

$b_2 = b_3 * 3 + b_2 \Rightarrow$  Iterasi 5

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}$$

$b_1 = b_3 * -3 + b_1 \Rightarrow$  Iterasi 6

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}$$

$b_1 = b_3 * -3 + b_1 \Rightarrow$  Iterasi 7

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}$$

# Step by step mencari matrix invers

Find the invers of A =

$$\begin{matrix} 12 & 17 & -16 \\ 24 & 18 & -4 \\ -15 & -4 & 31 \end{matrix}$$

12.00	17.00	-16.00	1.00	0.00	0.00
24.00	18.00	-4.00	0.00	1.00	0.00
-15.00	-4.00	31.00	0.00	0.00	1.00

1.00	1.42	-1.33	0.08	0.00	0.00
24.00	18.00	-4.00	0.00	1.00	0.00
-15.00	-4.00	31.00	0.00	0.00	1.00

1.00	1.42	-1.33	0.08	0.00	0.00
0.00	-16.08	27.92	-1.92	1.00	0.00
-15.00	-4.00	31.00	0.00	0.00	1.00

1.00	1.42	-1.33	0.08	0.00	0.00
0.00	-16.08	27.92	-1.92	1.00	0.00
0.00	17.30	11.05	1.20	0.00	1.00

Pada iterasi ke 1 berapa isi sel A(1,2) = 1.42

Pada iterasi ke 2 berapa isi sel A(2,3) = 27.92

Pada iterasi ke 3 berapa isi sel A(3,3) = 11.05

# Step by Step mencari matrix invers

1.00	1.42	-1.33	0.08	0.00	0.00
0.00	1.00	-1.74	0.12	-0.06	0.00
0.00	17.30	11.05	1.20	0.00	1.00

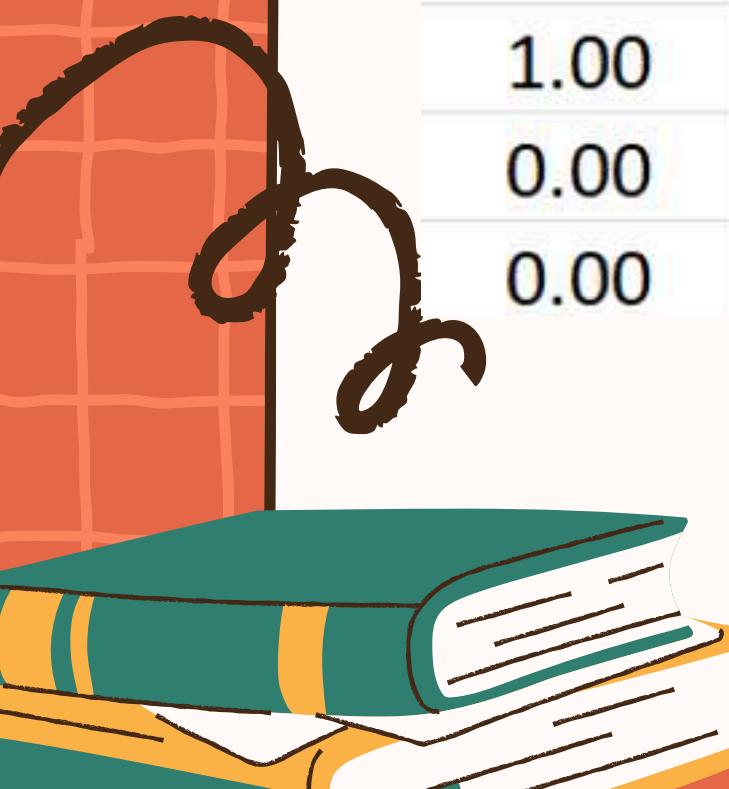
Pada iterasi ke 4 berapa isi sel  $A(2,3) = -1.74$

1.00	1.42	-1.33	0.08	0.00	0.00
0.00	1.00	-1.74	0.12	-0.06	0.00
0.00	0.00	41.15	-0.88	1.04	1.00

Pada iterasi ke 5 berapa isi sel  $A(3,4) = -0.88$

1.00	1.42	-1.33	0.08	0.00	0.00
0.00	1.00	-1.74	0.12	-0.06	0.00
0.00	0.00	1.00	-0.02	0.03	0.02

Pada iterasi ke 6 berapa isi sel  $A(3,5) = 0.03$



# Step by step mencari matrix invers

1.00	1.42	-1.33	0.08	0.00	0.00
0.00	1.00	0.00	0.09	-0.01	0.03
0.00	0.00	1.00	-0.02	0.03	0.02

Pada iterasi ke 7 berapa isi sel  $A(2,6) = 0.03$

1.00	1.42	0.00	0.05	0.04	0.03
0.00	1.00	0.00	0.09	-0.01	0.03
0.00	0.00	1.00	-0.02	0.03	0.02

Pada iterasi ke 8 berapa isi sel  $A(1,5) = 0.04$

1.00	0.00	0.00	-0.08	0.05	-0.01
0.00	1.00	0.00	0.09	-0.01	0.03
0.00	0.00	1.00	-0.02	0.03	0.02

Pada iterasi ke 9 berapa isi sel  $A(1,6) = -0.01$



**Carilah invers matrix  
berikut dengan  
menggunakan OBE**

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$



```
>> a=[-5 4 1 1 0 0;3 2 7 0 1 0;6 -4 3 0 0 1]

a =

-5      4      1      1      0      0
3      2      7      0      1      0
6     -4      3      0      0      1
```

```
>> a(1,:)=a(1,:)*-1/5

a =

1.0000   -0.8000   -0.2000   -0.2000      0      0
3.0000    2.0000    7.0000      0    1.0000      0
6.0000   -4.0000    3.0000      0      0    1.0000
```

```
>> a(2,:)=a(1,:)*-3 + a(2,:)
```

```
a =
```

1.0000	-0.8000	-0.2000	-0.2000	0	0
0	4.4000	7.6000	0.6000	1.0000	0
6.0000	-4.0000	3.0000	0	0	1.0000

4

4

```
>> a(3,:)=a(1,:)*-6 + a(3,:)
```

```
a =
```

1.0000	-0.8000	-0.2000	-0.2000	0	0
0	4.4000	7.6000	0.6000	1.0000	0
0	0.8000	4.2000	1.2000	0	1.0000

4

4

```
>> a(2,:)=a(2,:)*1/4.4
```

```
a =
```

1.0000	-0.8000	-0.2000	-0.2000	0	0
0	1.0000	1.7273	0.1364	0.2273	0
0	0.8000	4.2000	1.2000	0	1.0000

4

4



```
>> a(3,:)=a(2,:)*-0.8 + a(3,:)
```

a =

1.0000	-0.8000	-0.2000	-0.2000	4	0	4
0	1.0000	1.7273	0.1364	0.2273	0	0
0	0.0000	2.8182	1.0909	-0.1818	1.0000	

```
>> a(3,:)=a(3,:)*1/2.8182
```

a =

1.0000	-0.8000	-0.2000	-0.2000	4	0	4
0	1.0000	1.7273	0.1364	0.2273	0	0
0	0.0000	1.0000	0.3871	-0.0645	0.3548	

```
>> a(2,:)=a(3,:)*-1.7273 + a(2,:)
```

a =

1.0000	-0.8000	-0.2000	-0.2000	4	0	0
0	1.0000	-0.0000	-0.5323	0.3387	-0.6129	
0	0.0000	1.0000	0.3871	-0.0645	0.3548	



```
>> a(1,:)=a(3,:)*0.2 + a(1,:)
```

```
a =
```

1.0000	-0.8000	-0.0000	-0.1226	-0.0129	0.0710
0	1.0000	-0.0000	-0.5323	0.3387	-0.6129
0	0.0000	1.0000	0.3871	-0.0645	0.3548

4

4

```
>> a(1,:)=a(2,:)*0.8 + a(1,:)
```

```
a =
```

1.0000	-0.0000	-0.0000	-0.5484	0.2581	-0.4194
0	1.0000	-0.0000	-0.5323	0.3387	-0.6129
0	0.0000	1.0000	0.3871	-0.0645	0.3548

4

4



## Example 7 page 44

Consider the matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Applying the formula in theorem 1.4.5, we obtain

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad AB^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

therefore  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ , as guaranteed by theorem 1.4.6

## Example 10 page 44

Consider the matrices

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Applying Theorem 1.4.5 yields

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \quad (A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

As guaranteed by Theorem 1.4.10, these matrices satisfy (4)

# Matrix yang tidak dapat dibalik

Jika pada suatu tahap muncul baris bilangan nol pada ruas kiri -> maka hentikan perhitungan

Example 5 Hal 56

$$A = \begin{matrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{matrix}$$

Gunakan Prosedur Pada Example 4

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

.....

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

# MATRIKS INVERS

if  $A = \text{matrix } nxn$  yang dapat dibalik, maka :

$$A \cdot x = B \Rightarrow x = A^{-1} \cdot B$$

Contoh :

Persamaan linear :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3$$

$$x_1 + 8x_3 = 17$$



Dalam matrix  $A \cdot x = B$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Maka  $x = A^{-1} \cdot B$

$$= \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



# Applikasi:

jika  $A$  = matrix (  $n \times n$  )  
yang punya invers  
(invertible / dapat  
dibalik), maka dalam  
sebuah Sistem  
Persamaan Linier:

$$Ax = B \rightarrow x = A^{-1}B$$

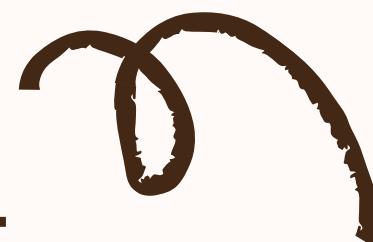
# Contoh:

dalam mendapatkan solusi  
dari Sistem Persamaan Linier

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1$$

$$x_1 + 8x_3 = 1$$



matriks  $A$  berisi koefisien-koefisien dari  $x_1, x_2, x_3$

vektor  $x = (x_1, x_2, x_3)$  yang dicari  
vektor  $B = (1, 1, 1)^T$

# Contoh:

Akan dicari solusi dari  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , di mana

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Solusi dari  $Ax = b$  adalah  $\mathbf{x}$  sbb.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Cek: apakah benar  $Ax = \mathbf{b}$  ?

$$\begin{pmatrix} -15 + 10 + 6 \\ -30 + 25 + 6 \\ -15 + 0 + 16 \end{pmatrix}$$



# MATRIKS ELEMENTER

Matriks  $A(n \times n)$  disebut elementer jika  $A$  dihasilkan dari matriks identitas  $I_n$  dengan satu Operasi Baris Elementer.

Contoh:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



# **MATRİKS-MATRİKS DENGAN BENTUK KHUSUS**

## **BAB 1.7**

**Matriks  $A(n \times n)$  bujur sangkar, artinya banyaknya baris A sama dengan banyaknya kolom A.**

**Bentuk-bentuk khusus sebuah matriks bujur sangkar a. l. :**

- 1. Matriks diagonal D**
- 2. Matriks segi-3 atas**
- 3. Matriks segi-3 bawah**
- 4. Matriks simetrik**



1. Matriks diagonal D:  
 $A_{ij} = 0$  untuk  $i \neq j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}$$



2. Matriks Segi-3 Atas:  
 $A_{ij} = 0$  untuk  $i > j$

$$\left( \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \dots & a_{3n} \\ \dots & & & & & & \\ \dots & & & & & & \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{array} \right)$$

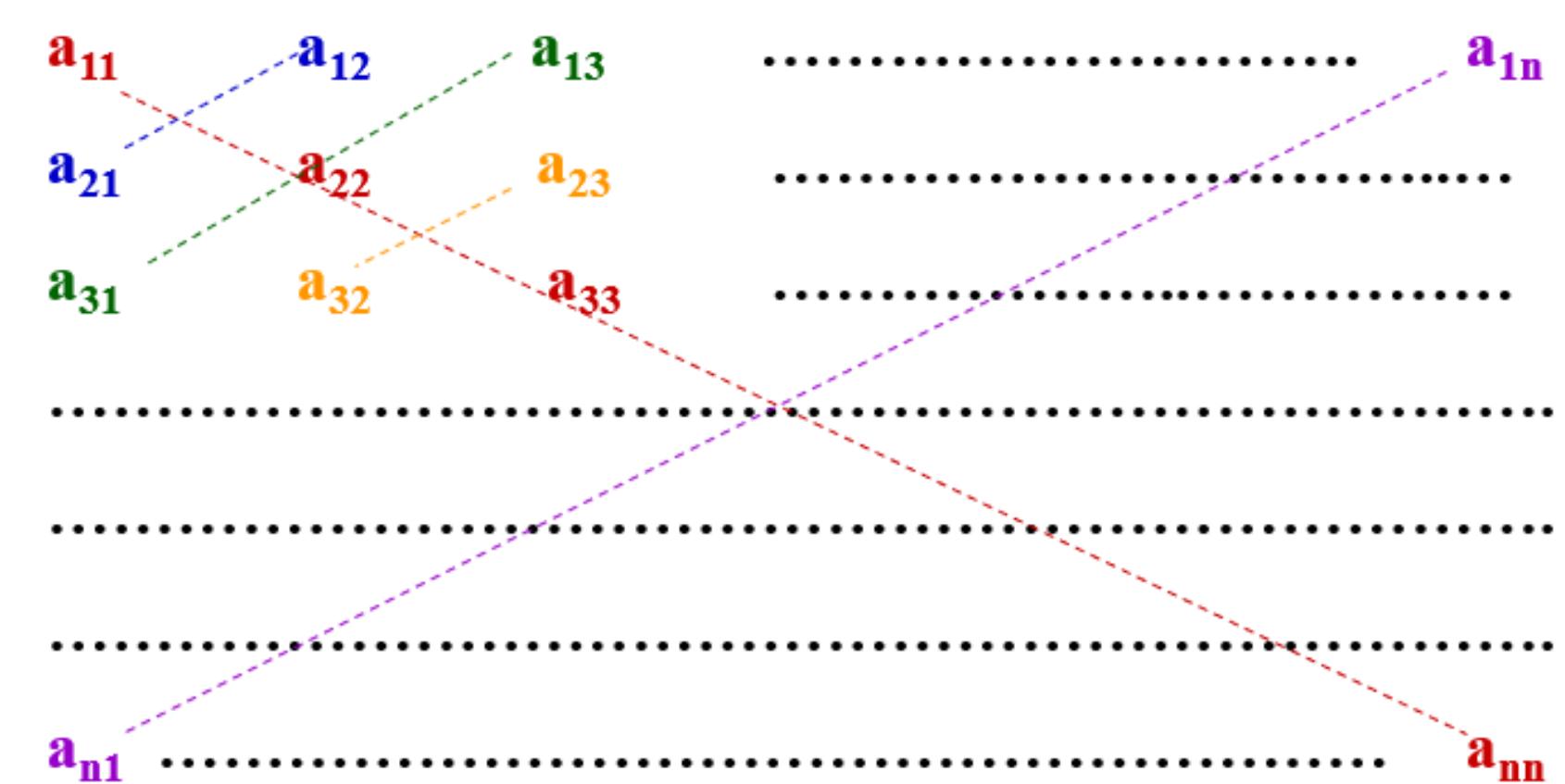


3. Matriks Segi-3 bawah:  
 $A_{ij} = 0$  untuk  $i < j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$



## 4. Matriks Simetrik:

$$A_{ij} = A_{ji}$$


# TEOREMA:

1. Transpos dari matriks segi-3 bawah adalah matriks segi-3 atas; transpos dari matriks segi-3 atas adalah matriks segi-3 bawah.
2. Perkalian dua matriks segi-3 bawah menghasilkan matriks segi-3 bawah; perkalian dua matriks segi-3 atas menghasilkan matriks segi-3 atas.
3. Matriks segi-3 invertibel jika dan hanya jika semua entri diagonalnya tidak nol.
4. Invers dari matriks segi-3 bawah adalah matriks segi-3 bawah.
5. Invers dari matriks segi-3 atas adalah matriks segi-3 atas.



## **TEOREMA:**

**A dan B matriks simetrik, k adalah skalar**

**6.  $A^T$  simetrik**

**7.  $A + B$  simetrik dan  $A - B$  simetrik**

**8. Matriks  $kA$  simetrik**

**9. Jika A invertibel, maka  $A^{-1}$  simetrik**

## **TEOREMA:**

**10. Jika A matriks invertibel, maka  $AA^T$  dan  $A^TA$  juga invertibel.**

