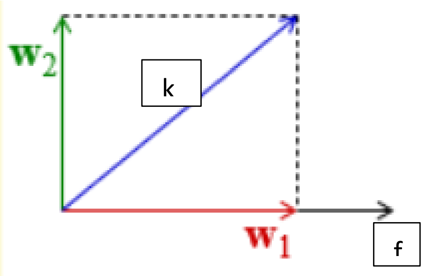
Pembahasan Kunci Jawaban Quiz 2

Diketahui titik f (4,9,-3) dan k (-4,5,-6),

carilah proyeksi orthogonal vector k terhadap f



Maka kita akan mencari w_1

$$w_1 = \frac{k \cdot f}{\|f\|^2} \cdot f$$

$$k \cdot f = k_1 \cdot f_1 + k_2 \cdot f_2 + k_3 \cdot f_3$$

$$k \cdot f = (-4 \cdot 4) + (5 \cdot 9) + (-6 \cdot -3)$$

$$k \cdot f = -16 + 45 + 18 = 47$$

$$\|f\| = \sqrt{(f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2}$$

$$\|f\| = \sqrt{(4)^2 + (9)^2 + (-3)^2}$$

$$\|f\| = \sqrt{16 + 81 + 9} = \sqrt{106}$$

$$\|f\|^2 = (\sqrt{106})^2 = 106$$

$$\therefore w_1 = \frac{47}{106} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = 0{,}44 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1{,}77 \\ 3{,}99 \\ -1{,}33 \end{pmatrix} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}$$

carilah komponen vector k yang orthogonal thdp f

Maka kita akan mencari w_2

$$w_2 = k - w_1$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1{,}76 \\ 3{,}96 \\ -1{,}32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5{,}76 \\ 1{,}04 \\ -4{,}68 \end{pmatrix} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}$$

Berapakah jarak antara titik (-4, 8) ke garis $8x - 5 = 7y$?

Untuk menemukan jawaban dari pertanyaan ini, kita bisa menggunakan rumus:

$$\|d\| = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Lalu kita akan identifikasi terlebih dahulu masing-masing komponen terhadap persamaan di atas.

Persamaan Garis bisa kita ubah menjadi bentuk : $8x - 7y - 5 = 0$

Sehingga,

$a = 8$ $\quad$ $x_0 = -4$

$b = -7$ $\quad$ $y_0 = 8$

$c = -5$

Sehingga

$$\|d\| = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\|d\| = \frac{|8 \cdot -4 + (-7) \cdot 8 + (-5)|}{\sqrt{8^2 + (-7)^2}} = \frac{|-32 + (-56) + (-5)|}{\sqrt{64 + 49}} = \frac{|-93|}{\sqrt{113}} = \frac{93}{\sqrt{113}} = 8{,}75$$

Hitung $h \cdot k$ jika diketahui $h + k = (-4, 6, -2)$ dan $h - k = (6, -3, 7)$

Untuk mencari perkalian cross, jika diketahui penjumlahan dan pengurangan vector bisa menggunakan rumus:

$$h \cdot k = \frac{1}{4} \cdot \|h + k\|^2 - \frac{1}{4} \cdot \|h - k\|^2$$

$\|h + k\| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 36 + 4} = \sqrt{56}$

$\|h + k\|^2 = (\sqrt{56})^2 = 56$

$\|h - k\| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 7^2} = \sqrt{36 + 9 + 49} = \sqrt{94}$

$\|h - k\|^2 = (\sqrt{91})^2 = 94$

$\therefore h \cdot k = \frac{1}{4} \cdot 56 - \frac{1}{4} \cdot 94 = 14 - 23{,}5 = -9{,}5$

Carilah luas segitiga yang ditentukan dengan titik a (-4,8,3) b (7, -4, 2) dan c (-5 , 5, 7). Titik pusatnya adalah A dan perkalian cross nya adalah $ab \times ac$

Untuk mencari luas segitiga, kita bisa menggunakan rumus:

$$L\Delta = \frac{1}{2} \cdot \|ab \times ac\|$$

Dengan persamaan di atas, kita perlu mencari hasil perkalian cross dari $ab \times ac$ lalu kia cari Panjang dari hasil perkalian cross tersebut. Setelah itu kita kalikan dengan 0,5

$ab = b - a$

$= \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 11 \\ -12 \\ -1 \end{pmatrix}$

$ac = c - a$

$= \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\therefore ab \times ac = \begin{vmatrix} 11 & -12 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

$= \left(\begin{vmatrix} -12 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}, \; -\begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} 11 & -12 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \right)$

$= \begin{pmatrix} -51, & -43, & -45 \\ x & y & z \end{pmatrix}$

Setelah kita menemukan hasil perkalian cross $ab \times ac$, kita akan melanjutkan untuk menghitung Panjang dari hasil cross tersebut

$$\|ab \times ac\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-51)^2 + (-43)^2 + (-45)^2} = \sqrt{6475} = 80{,}47$$

Luas Segitiga: $\frac{1}{2} \cdot \|ab \times ac\| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6475} = \frac{\sqrt{6475}}{2}$ atau $\frac{1}{2} \cdot 80{,}47 = 40{,}24$

Luas Jajaran Genjang: $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \|ab \times ac\| = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6475} = \sqrt{6475}$ atau $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 80{,}47 = 80{,}47$

Apakah a (9, -5, 3) b (-8, 5, -7) c (9, -4, 7) berada pada bidang datar yang sama?

Untuk melakukan pengecekan ini, kita perlu melakukan operasi menggunakan persamaan:

$$\det a \cdot (b \times c) = 0$$

Dimana jika mencari determinan tersebut menghasilkan nilai 0, maka ketiga titik tersebut berada pada bidang yang sama.

Berikutnya kita akan membuat matriks $a \cdot (b \times c)$ terlebih dahulu, Dimana matriks ini akan berbentuk:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{b_3} \\ \boldsymbol{c_1} & \boldsymbol{c_2} & \boldsymbol{c_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{5} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{9} & \mathbf{-4} & \mathbf{7} \end{vmatrix}$$

Setelah kita membentuk matriks tersebut, kita akan mencari meggunakan salah satu dari 3 metode yang telah diajarkan, yakni: Gauss, Segitiga Atas, Kofaktor baris, dan Kofaktor kolom. Pada kali ini, kita akan menggunakan metode Gauss

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{5} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{9} & \mathbf{-4} & \mathbf{7} \end{vmatrix}$$

$iterasi\ 1: B_1 = B_1 \cdot \frac{1}{9}$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,56 \\ 0,33 \end{pmatrix}$$

$$9 \begin{vmatrix} 1 & -0,56 & 0,33 \\ -8 & 5 & -7 \\ 9 & -4 & 7 \end{vmatrix}$$

$iterasi\ 2: B_2 = B_2 + B_1 \cdot 8$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -0,56 \\ 0,33 \end{pmatrix} \cdot 8$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -4,48 \\ 2,64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,52 \\ -4,36 \end{pmatrix}$$

$$9 \begin{vmatrix} 1 & -0,56 & 0,33 \\ 0 & 0,52 & -4,36 \\ 9 & -4 & 7 \end{vmatrix}$$

$iterasi\ 3: B_3 = B_3 + B_1 \cdot -9$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -0,56 \\ 0,33 \end{pmatrix} \cdot -9$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ 5,04 \\ -2,97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,04 \\ 4,03 \end{pmatrix}$$

$$9 \begin{vmatrix} 1 & -0,56 & 0,33 \\ 0 & 0,52 & -4,36 \\ 0 & 1,04 & 4,03 \end{vmatrix}$$

$iterasi\ 4: B_2 = B_2 \cdot \frac{1}{0,52}$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,52 \\ -4,36 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{0,52}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -8,38 \end{pmatrix}$$

$$9 \cdot 0,52 \begin{vmatrix} 1 & -0,56 & 0,33 \\ 0 & 1 & -8,38 \\ 0 & 1,04 & 4,03 \end{vmatrix}$$

$iterasi\ 5: B_3 = B_3 + B_2 \cdot -1,04$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,04 \\ 4,03 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -8,38 \end{pmatrix} \cdot -1,04$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,04 \\ 4,03 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1,04 \\ 8,72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12,75 \end{pmatrix}$$

$$9 \cdot 0,52 \begin{vmatrix} 1 & -0,56 & 0,33 \\ 0 & 1 & -8,38 \\ 0 & 0 & 12,75 \end{vmatrix}$$

$iterasi\ 6: B_3 = B_3 \cdot \frac{1}{12,75}$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12,75 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{12,75}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$9 \cdot 0,52 \cdot 12,75 \begin{vmatrix} 1 & -0,56 & 0,33 \\ 0 & 1 & -8,38 \\ 0 & 0 & 12,75 \end{vmatrix}$$

Nilai Determinan A: $9 \cdot 0,52 \cdot 12,75 = 59,67$

Cari Persamaan bidang yang melalui titik d (-5, 7, -4) f (8, -4, 6) g (-6, 9, 4). Titik pusat adalah d, sehingga vector normal nya $df \times dg$. Dan $P_0 = g$

Untuk mengerjakan soal ini, kita bisa menggunakan persamaan:

$$\overline{P_oP} \cdot \bar{n} = 0$$

$P_o = g = (-6,9,4)$

$P = (x, y, z)$

$\bar{n} = df \times dg$

$df = f - d$

$= \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -11 \\ 10 \end{pmatrix}$

$dg = g - d$

$= \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\therefore df \times dg = \begin{vmatrix} 13 & -11 & 10 \\ -1 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

$\bar{n} = \left(\begin{vmatrix} -11 & 10 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}, \ -\begin{vmatrix} 13 & 10 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} 13 & -11 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right)$

$\bar{n} = (-108\,, \quad -114, \quad 15)$

$\therefore \overline{P_oP} \cdot \bar{n} = 0$

$[P - g)] \cdot \bar{n} = 0$

$\big[(x - (-6)), (y - 9), (z - 4)\big] \cdot (-108, \quad -114, \quad 15) = 0$

$[-108 \cdot (x + 6)] + [-114 \cdot (y - 9)] + [15 \cdot (z - 4)] = 0$

$(-108x - 648) + (-114y + 1026) + (15z - 60) = 0$

$-108x - 114y + 15z + 318 = 0$

Variabel X = -108

Variabel Y = -114

Variabel Z = 15

Variabel Konstanta = 318