Materi 6 Aljabar Linear

Dot Product

Kegunaan

1. Mencari proyeksi orthogonal
2. Hitung jarak dari titik ke garis
3. Hitunglah r.t jika diketahui r + t dan r − t

Aljabar Linear

Materi 6

Operasi Dot Product Sederhana

Aljabar Linear

Materi 6

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ = skalar

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \ldots + u_nv_n$$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ jika u dan v ortogonal

Aljabar Linear

Materi 6

Vektor u dan v di Ruang-2 atau di Ruang-3, dengan q sudut apit antara u dan v

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{cases} \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos\theta & \text{jika } \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \text{ dan } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{jika } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ atau } \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Catatan: u dan v saling tegak lurus (θ = 90° & cos θ = 0°) = u . v = 0

Vektor-vektor yang saling tegak lurus disebut vektor-vektor ortogonal

Aljabar Linear

Materi 6

Vektor u dan v di Ruang-2 atau di Ruang-3, dengan θ sudut apit antara u dan v

Catatan: $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in$ Ruang-2 $\rightarrow \mathbf{u} = (u_1, u_2), \mathbf{v} = (v_1, v_2)$

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in$ Ruang-3 $\rightarrow \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$

Formula lain untuk $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$:

Ruang-2: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$

Ruang-3: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

Contoh :

1. Misal $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ dan $\mathbf{v} = (-2, 1, 3)$

Maka $\mathbf{u.v} = -2 + 2 + 9 = 9$

2. Dari soal nomor 1, hitunglah sudut antara **u** dan **v**

$\| \mathbf{u} \| = \sqrt{14}$ dan $\| \mathbf{v} \| = \sqrt{14}$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \| \mathbf{u} \| \; \| \mathbf{v} \| \cos \alpha = 9$ di mana α adalah sudut antara **u** dan **v**

$\cos \alpha = 9 / 14$

$\alpha = \text{arc cos } (9/14)$

Contoh :

Example I As shown in Figure 2, the angle between the vectors u = (0, 0, 1) and v = (0, 2, 2) is 45°. Thus,

$$u.v = \|u\|\|v\|\cos\theta = \left(\sqrt{0^2+0^2+1^2}\right)\left(\sqrt{0^2+2^2+2^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2$$

Aljabar Linear

Materi 6

Contoh :

Jika u = (1,-2,3), v = (-3,4,2), w = (3,6,3)

Maka

- u.v = - 3 - 8+ 6 = -5
- v.w = - 9 + 24 + 6 = 21
- u.w =3 - 12 + 9 = 0

Oleh karena itu, maka

- u dan v membentuk suatu sudut tumpul
- w dan v membentuk suatu sudut lancip
- u dan w saling tegak lurus

Contoh soal No. 1

Diketahui $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ dan $R = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ditanyakan $P \cdot R$ dan tentukan sudut antara P & R

Aljabar Linear

Jawaban dari soal No. 1

Materi 6

jawab :

2 $P \cdot R = 2 \cdot (-5) + (3 \cdot 7) + (5 \cdot 1)$

$= -10 + 21 + 5$

2 $= 16$

$P \cdot R = |P| \cdot |R| \cdot \cos\theta$

2 $16 = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + 7^2 + 1^2} \cdot \cos\theta$

$16 = \sqrt{38} \cdot \sqrt{75} \cdot \cos\theta$

3 $16 = \sqrt{2850} \cdot \cos\theta$

3 $\cos\theta = \dfrac{16}{\sqrt{2850}}$

3 $\theta = \arccos \dfrac{16}{\sqrt{2850}}$

Teorema 3.3.1 - 3.3.2:
Vektor-vektor u, v, w di Ruang-2 atau di Ruang-3; k adalah skalar

- $\mathbf{v}.\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$, atau $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v}.\mathbf{v})^{1/2}$

  Bukti: $\mathbf{v}\,.\,\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos 0^\circ$

  $= \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{v}\|\,(1) = \|\mathbf{v}\|^2$

  $= \|\mathbf{v}\|^2$

  $\mathbf{v}\,.\,\mathbf{v} = v_1v_1 + v_2v_2$

  $= v_1^2 + v_2^2$

  $= \|\mathbf{v}\|^2$

- $\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v} = \mathbf{v}\,.\,\mathbf{u}$

  Bukti: $\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta$

  $= \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{u}\| \cos\theta$

  $= \mathbf{v}\,.\,\mathbf{u}$

Aljabar Linear

Materi 6

Teorema 3.3.1 - 3.3.2:
Vektor-vektor u, v, w di Ruang-2 atau di Ruang-3; k adalah skalar

- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

<u>Bukti:</u>

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3) \\
&= u_1(v_1+w_1) + u_2(v_2+w_2) + u_3(v_3+w_3) \\
&= (u_1v_1+u_1w_1) + (u_2v_2+u_2w_2) + (u_3v_3+u_3w_3) \\
&= (u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3) + (u_1w_1 + u_2w_2+u_3w_3) \\
&= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}
\end{aligned}$$

$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$

$$\begin{aligned}
k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= k(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \\
&= (ku_1v_1 + ku_2v_2 + ku_3v_3) \\
&= (ku_1)v_1 + (ku_2)v_2 + (ku_3)v_3 \\
&= (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}
\end{aligned}$$

....

$$\begin{aligned}
&= (u_1kv_1 + u_2kv_2 + u_3kv_3) \\
&= u_1(kv_1) + u_2(kv_2) + u_3(kv_3) \\
&= \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})
\end{aligned}$$

Dot Product

Aljabar Linear

Materi 6

Teorema 3.3.1 - 3.3.2:
Vektor-vektor u, v, w di Ruang-2 atau di Ruang-3;
k adalah skalar

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$ jika $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ dan $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ (skalar) jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (vektor)

Aljabar Linear

Materi 6

Teorema 3.3.1 - 3.3.2:
Vektor-vektor u, v, w di Ruang-2 atau di Ruang-3; k adalah skalar

- $\mathbf{v}.\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$, atau $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v}.\mathbf{v})^{1/2}$
- jika $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ dan mengapit sudut θ, maka

  θ lancip $\leftrightarrow$ $\mathbf{u}.\mathbf{v} > 0$

  θ tumpul $\leftrightarrow$ $\mathbf{u}.\mathbf{v} < 0$

  $\theta = 90^\circ$ $\leftrightarrow$ $\mathbf{u}.\mathbf{v} = 0$
- $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \mathbf{v}.\mathbf{u}$
- $\mathbf{u}.(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}.\mathbf{v} + \mathbf{u}.\mathbf{w}$
- $k(\mathbf{u}.\mathbf{v}) = (k\mathbf{u}).\mathbf{v} = \mathbf{u}.(k\mathbf{v})$
- $\mathbf{v}.\mathbf{v} > 0$ jika $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ dan $\mathbf{v}.\mathbf{v} = 0$ jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

Contoh :

Jika u = (1,-2,3), v = (-3,4,2), w = (3,6,3)

Maka u.v = - 3 - 8+ 6 = -5

v.w = - 9 + 24 + 6 = 21

u.w =3 - 12 + 9 = 0

Oleh karena itu, maka:

u dan v membentuk suatu sudut tumpul

w dan v membentuk suatu sudut lancip

u dan w saling tegak lurus

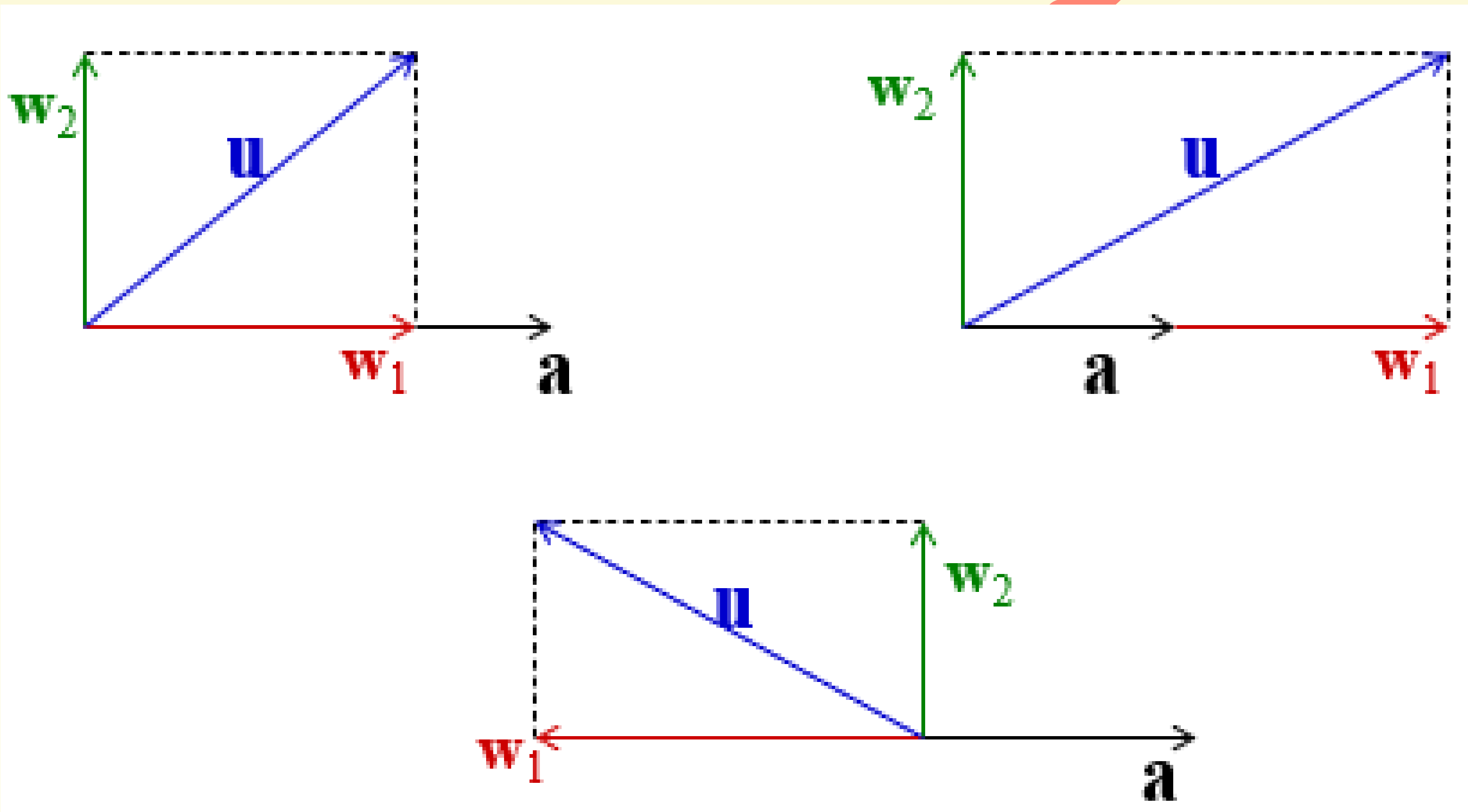
Aljabar Linear

Materi 6

Proyeksi Ortogonal

Aljabar Linear

Materi 6



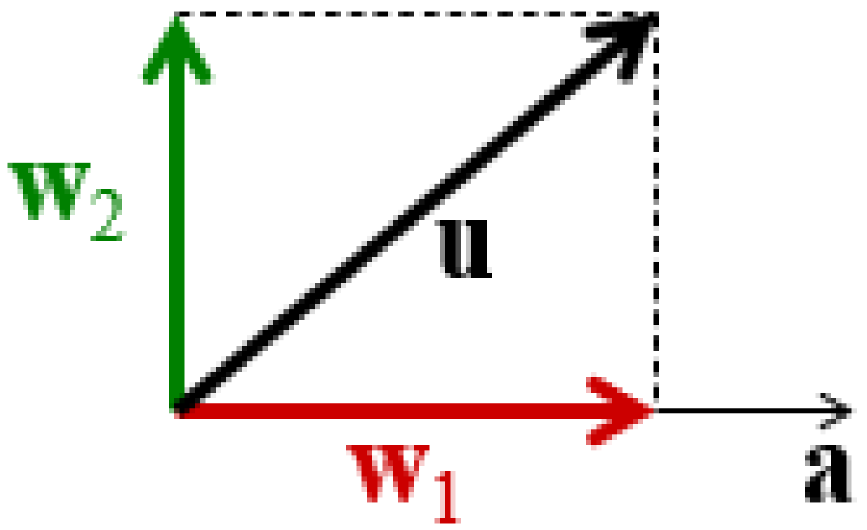
w1 = proyeksi ortogonal dari vektor u pada vektor a

= komponen vektor u di sepanjang vektor a

w2 = komponen vektor u ortogonal terhadap vektor a

Aljabar Linear

Materi 6



$\mathbf{w}_1$ = proyeksi ortogonal dari vektor **u** pada vektor **a**

$\mathbf{w}_2$ = komponen vektor **u** ortogonal terhadap vektor **a**

$$\boxed{\mathbf{w}_1 = (\mathbf{u} \,.\, \mathbf{a} \,/\, \|\mathbf{a}\|^2)\, \mathbf{a}}$$

$$\boxed{\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \,.\, \mathbf{a} \,/\, \|\mathbf{a}\|^2)\, \mathbf{a}}$$

Aljabar Linear

Materi 6

Bukti: $\mathbf{w}_1 = (\,k\,)\,\mathbf{a} \;\rightarrow\; k = (\,\mathbf{u}\,.\,\mathbf{a} \,/\, \|\,\mathbf{a}\,\|^2\,)$?

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = k\,\mathbf{a} + \mathbf{w}_2$$

$$\mathbf{u}\,.\,\mathbf{a} = (k\,\mathbf{a} + \mathbf{w}_2)\,.\,\mathbf{a}$$

$$= k\mathbf{a}\,.\,\mathbf{a} + \mathbf{w}_2\,.\,\mathbf{a}$$

$$= k\,\|\,\mathbf{a}\,\|^2 + 0 = k\,\|\,\mathbf{a}\,\|^2$$

$$k = (\,\mathbf{u}\,.\,\mathbf{a}\,) \,/\, \|\,\mathbf{a}\,\|^2$$

Norm vektor $\mathbf{w}_1$: $\boxed{\|\,\mathbf{w}_1\,\| = |\,\mathbf{u}\,.\,\mathbf{a}\,|\,\|\,\mathbf{a}\,\| \,/\, \|\,\mathbf{a}\,\|^2 = |\,\mathbf{u}\,.\,\mathbf{a}\,| \,/\, \|\,\mathbf{a}\,\|}$

Aljabar Linear

Materi 6

Contoh soal No. 2

Diketahui d (-3,5,12) dan e (5,7,-2)
Carilah proyeksi orthogonal vector e pada vector d
Carikah komponen vektor e yang orthogonal terhadap d
Ketelitian 2 angka dibelakang koma (titik)

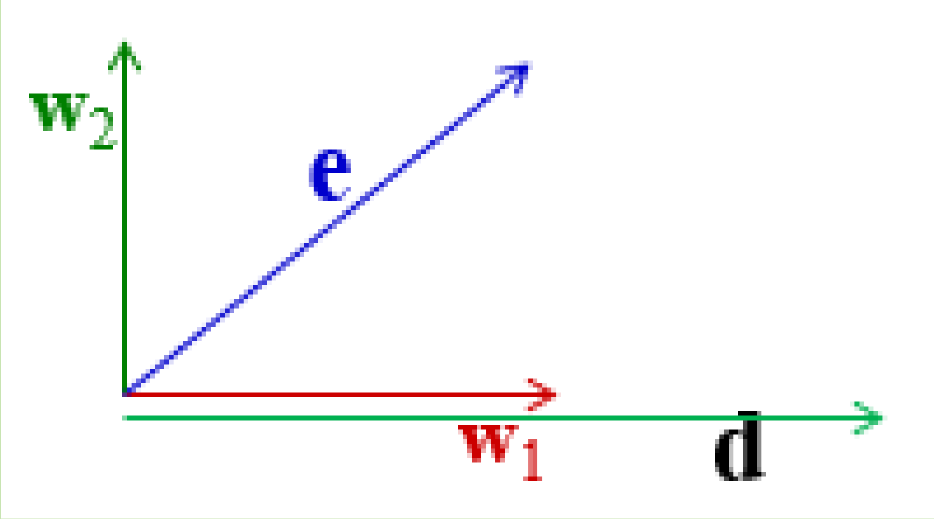
Aljabar Linear

Materi 6

Jawaban soal No. 2

W1 = (e.d) / |d|^2 . d
W2 = e - w1

e.d = -4
|d|^2 = 178



c	(	-4	/	178	)	.	(	-3	5	12	)
w1 =	0.07	-0.11	-0.27								

w2 =	e	-	w1
w2 =	4.93	7.11	-1.73

Contoh proyeksi

Diketahui d (-3,5,12),e (5,7,-2)
Carilah proyeksi orthogonal vector e pada vector d
Carikah komponen vektor e yang orthogonal terhadap d
Ketelitian 2 angka dibelakang koma (titik)

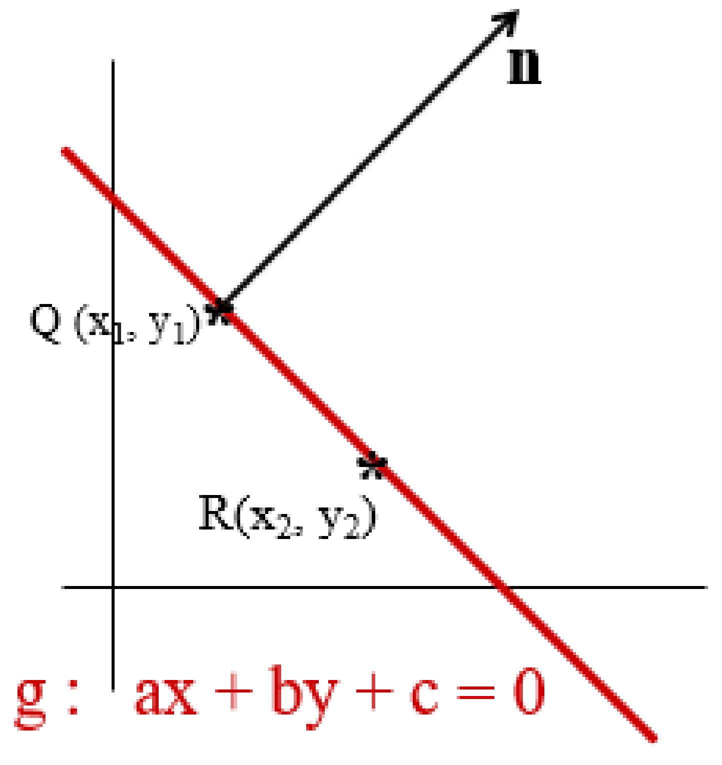
Q16	nilai variabel x pada W1 adalah			0.07
Q17	nilai variabel y pada W1 adalah			- 0.11
Q18	nilai variabel z pada W1 adalah			- 0.27
Q19	nilai variabel x pada W2 adalah			4.93
Q20	nilai variabel y pada W2 adalah			7.11
Q21	nilai variabel z pada W2 adalah			- 1.73

e =	5	7	-2
d =	-3	5	12
w1 =	(e.d) / |d|^2 . d		

Aljabar Linear

Materi 6

Jarak titik P0 (x0, y0) ke garis lurus g : ax +by +c+= 0



Vektor n = (a, b) ortogonal garis g

Bukti bahwa n = (a, b)ortogonal garis g

Vektor QR = $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Dengan perkalian titik: n . QR = $a(x_2 - x_1) + b\,(y_2 - y_1)$

R terletak pada garis g, maka: $ax_2 + by_2 + c = 0$

Q terletak pada garis g, maka: $ax_1 + by_1 + c = 0$ —

$$a(x_2 - x_1) + b\,(y_2 - y_1) + 0 = 0$$

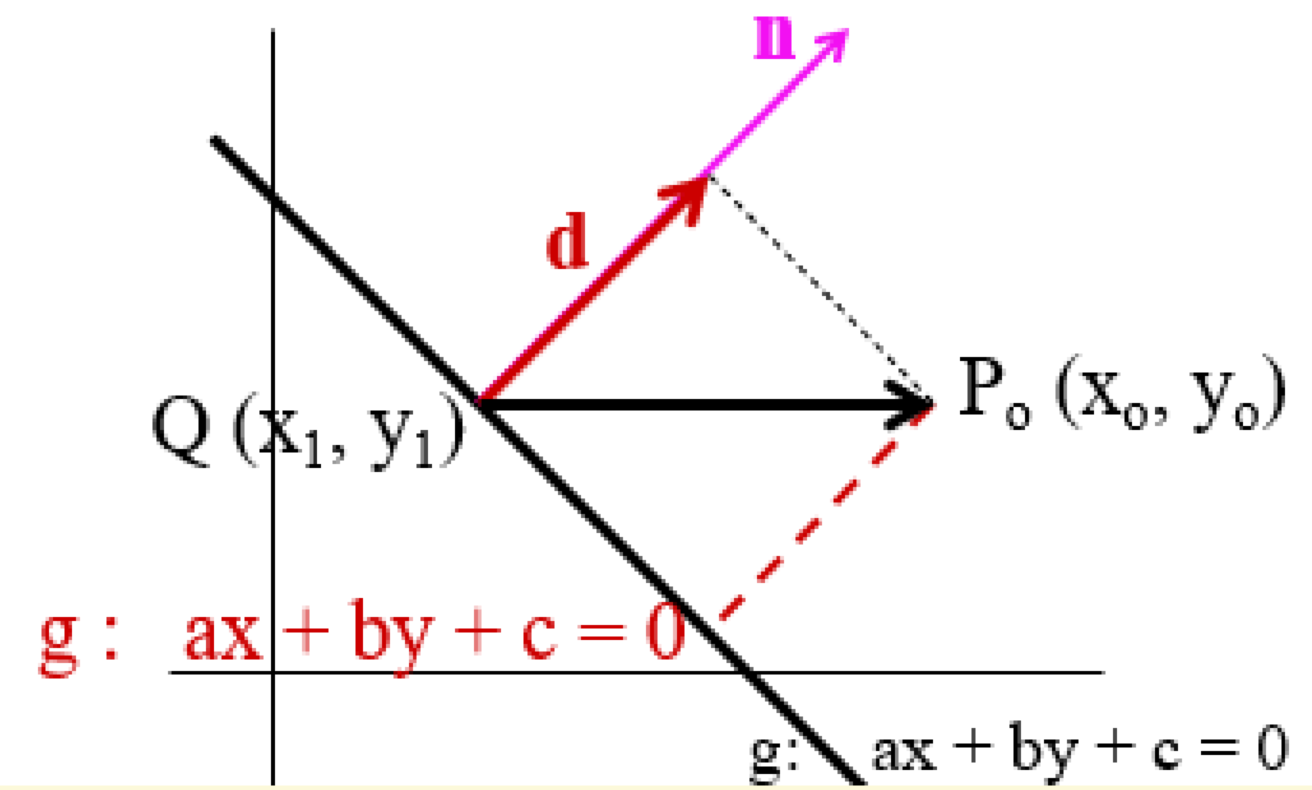
Jadi, n . QR = $a(x_2 - x_1) + b\,(y_2 - y_1) = 0$

artinya vektor n ortogonal QR, sehingga vektor n ortogonal garis g (terbukti)

Aljabar Linear

Materi 6

Jarak titik P0 (x0, y0) ke garis lurus g : ax +by +c+= 0



$\| \mathbf{d} \| = | \overrightarrow{QP}_o \cdot \mathbf{n} \mid / \|\mathbf{n}\| = |(x_o - x_1, y_o - y_1) \cdot (a, b)| / \sqrt{(a^2 + b^2)}$

$= | (x_o - x_1)a + (y_o - y_1)b) \mid / \sqrt{(a^2 + b^2)} = | x_o a - x_1 a + y_o b - y_1 b \mid / \sqrt{(a^2 + b^2)}$

tetapi Q terletak di g, maka $ax_1 + by_1 + c = 0$ atau $c = -ax_1 - by_1$

Maka $\| \mathbf{d} \| = | ax_o + by_o - ax_1 - by_1| / \sqrt{(a^2 + b^2)}$

$$\boxed{\| \mathbf{d} \| = | ax_o + by_o + c| / \sqrt{(a^2 + b^2)}}$$

Vektor $\overrightarrow{QP}_o = (x_o - x_1, y_o - y_1)$

(vektor $\overrightarrow{QP}_o$ seperti vektor **u**;

vektor **n** seperti vektor **a**

vektor **d** seperti vektor $\mathbf{w}_1$)

jarak dari titik P_o ke garis g = $\| \mathbf{d} \|$

$\| \mathbf{w}_1 \| = | \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} | / \| \mathbf{a} \|$

Aljabar Linear

Materi 6

soal No. 3

Contoh (1) :

Hitunglah jarak antara titik (1,-2) ke garis 3x + 4y - 6 = 0

Penyelesaian :

$$D = \frac{|3.1 + (4.-2) - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$$

= 2,2

Contoh (2) :

Hitunglah jarak antara titik (1,-2) ke garis 2 = 4y - 2x

Penyelesaian : garis diubah menjadi -2x + 4y -2 = 0

$$D = \frac{|-2.1 + (4.-2) - 2|}{\sqrt{-2^2 + 4^2}} = \frac{|-12|}{\sqrt{20}} = \frac{12}{\sqrt{20}}$$

= 2,68

Contoh soal

hitunglah jarak antara titik (-5, 8) ke garis 9 - 4y = -5x

Ketelitian 2 angka dibelakang koma (titik)

titik	-5	8
persamaan garis		
5 x - 4 y + 9 = 0		

Jarak antara titik dan garis adalah 7.5

Teorema 4.1.6 – 4.1.7

Aljabar Linear

Materi 6

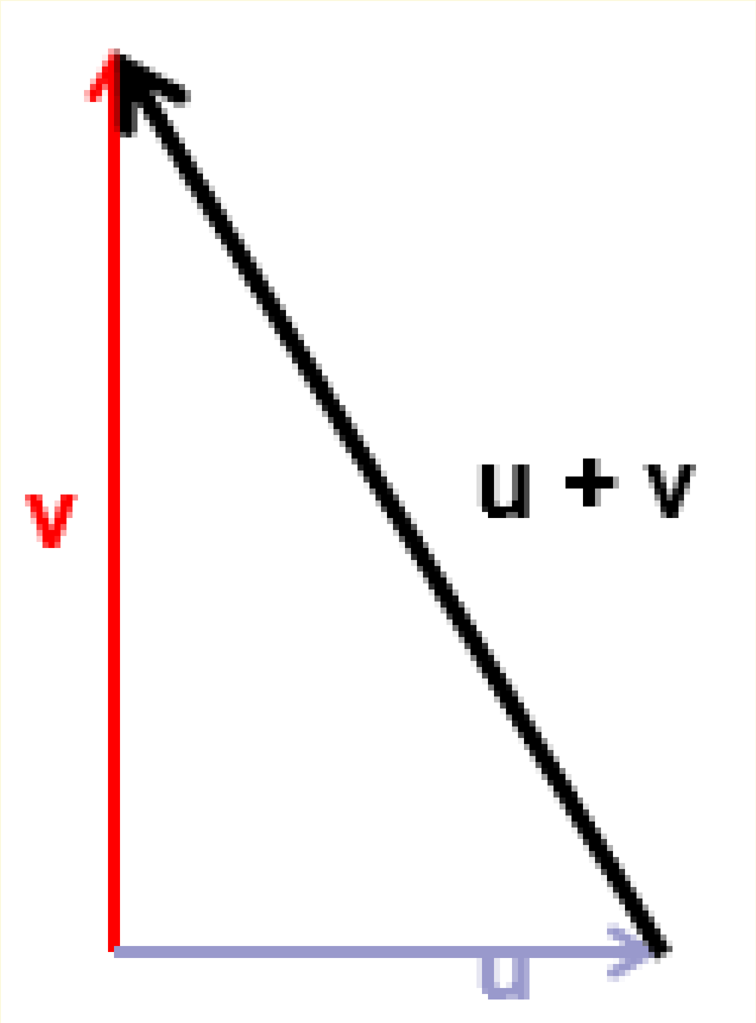
Teorema 4.1.6 – 4.1.7:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \tfrac{1}{4} \| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|^2 - \tfrac{1}{4} \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|^2$$

<u>Teorema Pythagoras</u>

<u>➔ jika u ortogonal v</u>

$$\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|^2 = \| \mathbf{u} \|^2 + \| \mathbf{v} \|^2$$



Aljabar Linear

Materi 6

soal No. 4

Hitunglah $u \cdot v$ jk diketahui $u + v = (2, 2, 3)$ dan

$u - v = (-4, 2, 7)$

Jawaban No. 4

jawab:

$$u \cdot v = \frac{1}{4}|u+v|^2 - \frac{1}{4}|u-v|^2$$

$$|u+v|^2 = \left(\sqrt{2^2+2^2+3^2}\right)^2$$ 3

$$= 4+4+9$$

$$= 17$$ 3

$$|u-v|^2 = \left(\sqrt{-4^2+2^2+7^2}\right)^2$$ 3

$$= 16+4+49$$

$$= 69$$

$$u \cdot v = \frac{1}{4} \cdot 17 - \frac{1}{4} \cdot 69$$ 3

$$= -\frac{52}{4}$$

$$= -13$$ 3

Aljabar Linear

Materi 6

Contoh soal

Hitunglah r.t jika diketahui r + t = (-4,7,9) dan r - t = (8, -3, 6)		
Ketelitian 2 angka dibelakang koma (titik)		

nilai (r+t)^2 adalah			146
nilai (r-t)^2 adalah			109
nilai r. t adalah			9.25

Thank You