Pembahasan Kuis 2 Alin 2023 Tipe C

Apakah a (-4, 8, 3) b (7, -4, 2) c (-5, 5, 7) terletak pada bidang datar yang sama ?. Carilah Determinan A dengan merubah menjadi gauss.

Untuk melakukan pengecekan ini, kita perlu melakukan operasi menggunakan persamaan:

$$\det a \cdot (b \times c) = 0$$

Dimana jika mencari determinan tersebut menghasilkan nilai 0, maka ketiga titik tersebut berada pada bidang yang sama.

Berikutnya kita akan membuat matriks $a \cdot (b \times c)$ terlebih dahulu, Dimana matriks ini akan berbentuk:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{b_3} \\ \boldsymbol{c_1} & \boldsymbol{c_2} & \boldsymbol{c_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 8 & 3 \\ 7 & -4 & 2 \\ -5 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

Setelah kita membentuk matriks tersebut, kita akan mencari meggunakan salah satu dari 3 metode yang telah diajarkan, yakni: Gauss, Segitiga Atas, Kofaktor baris, dan Kofaktor kolom. Pada kali ini, kita akan menggunakan metode Gauss

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} -4 & 8 & 3 \\ 7 & -4 & 2 \\ -5 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$iterasi\ 1: B_1 = B_1 \cdot -\frac{1}{4}$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot -\frac{1}{4}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -0{,}75 \end{pmatrix}$$

$$-4 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -0{,}75 \\ 7 & -4 & 2 \\ -5 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$iterasi\ 2: B_2 = B_2 + B_1 \cdot -7$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -0{,}75 \end{pmatrix} \cdot -7$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ 5{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 7{,}25 \end{pmatrix}$$

$iterasi\ 4: B_2 = B_2 \cdot \frac{1}{5{,}45}$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 7{,}25 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0{,}73 \end{pmatrix}$$

$$-4 \cdot 10 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -0{,}75 \\ 0 & 1 & 0{,}73 \\ 0 & -5 & 325 \end{vmatrix}$$

$iterasi\ 5: B_3 = B_3 + B_2 \cdot 5$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3{,}25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0{,}73 \end{pmatrix} \cdot 5$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3{,}25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3{,}65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6{,}9 \end{pmatrix}$$

$$-4\begin{vmatrix} 1 & -2 & -0{,}75 \\ 0 & 10 & 7{,}25 \\ -5 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$iterasi\ 3: B_3 = B_3 + B_1 \cdot 5$

$$B_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -0{,}75 \end{pmatrix} \cdot 5$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ -3{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3{,}25 \end{pmatrix}$$

$$-4\begin{vmatrix} 1 & -2 & -0{,}75 \\ 0 & 10 & 7{,}25 \\ 0 & -5 & 3{,}25 \end{vmatrix}$$

$$-4 \cdot 10\begin{vmatrix} 1 & -2 & -0{,}75 \\ 0 & 1 & 0{,}73 \\ 0 & 0 & 6{,}9 \end{vmatrix}$$

$iterasi\ 6: B_3 = B_3 \cdot \frac{1}{8{,}56}$

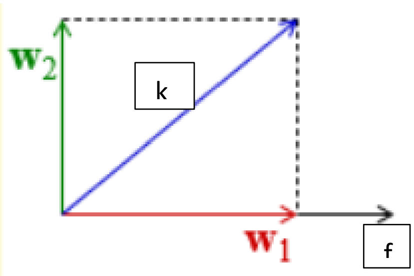
$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6{,}9 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6{,}9}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-4 \cdot 10 \cdot 6{,}9\begin{vmatrix} 1 & -2 & -0{,}75 \\ 0 & 1 & 0{,}73 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Nilai Determinan A: $-4 \cdot 10 \cdot 6{,}9 = -276$

Diketahui k (-8, 7, 3) dan f (-6, 3, 5), carilah proyeksi orthogonal vector k terhadap f.



Maka kita akan mencari w_1: $w_1 = \frac{k \cdot f}{\|f\|^2} \cdot f$

$$\therefore w_1 = \frac{84}{70} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 1{,}2 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7{,}2 & x \\ 3{,}6 & y \\ 6 & z \end{pmatrix}$$

$$k \cdot f = k_1 \cdot f_1 + k_2 \cdot f_2 + k_3 \cdot f_3$$

$$k \cdot f = (-8 \cdot -6) + (7 \cdot 3) + (3 \cdot 5)$$

$$k \cdot f = 48 + 21 + 15 = 84$$

$$\|f\| = \sqrt{(f_1)^2 + (f_2)^2 + (f_3)^2}$$

$$\|f\| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 5^2}$$

$$\|f\| = \sqrt{36 + 9 + 25} = \sqrt{70}$$

$$\|f\|^2 = (\sqrt{70})^2 = 70$$

Carilah komponen vector k yang orthogonal terhadap f

Maka kita akan mencari w_2

$$w_2 = k - w_1$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7{,}2 \\ 3{,}6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}8 & x \\ 3{,}4 & y \\ -3 & z \end{pmatrix}$$

Berapakah jarak antara titik (3, -7) ke garis 8 x - 5 = 7 y

Untuk menemukan jawaban dari pertanyaan ini, kita bisa menggunakan rumus:

$$\|d\| = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Lalu kita akan identifikasi terlebih dahulu masing-masing komponen terhadap persamaan di atas.

Persamaan Garis bisa kita ubah menjadi bentuk : $8x - 7y - 5 = 0$

Sehingga,

$a = 8$ $\quad$ $x_0 = 3$

$b = -7$ $\quad$ $y_0 = -7$

$c = -5$

Sehingga

$$\|d\| = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\|d\| = \frac{|8 \cdot 3 + (-7) \cdot (-7) + (-5)|}{\sqrt{8^2 + (-7)^2}} = \frac{|24 + 49 - 5|}{\sqrt{64 + 49}} = \frac{|68|}{\sqrt{113}} = \frac{68}{\sqrt{113}} = 6{,}4$$

Carilah persamaan bidang yang melalui titik f (6, -7, 3) g (-6, 8, -3) h (8, -6, 3). Vektor normal adalah $hf \times hg$. Dan titik $P_0 = f$

Untuk mengerjakan soal ini, kita bisa menggunakan persamaan:

$$\overline{P_o P} \cdot \bar{n} = 0$$

$P_o = f = (6, -7, 3)$

$P = (x, y, z)$

$\bar{n} = hf \times hg$

$hf = f - h$

$= \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$hg = g - h$

$= \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 14 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\therefore df \times dg = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -14 & 14 & -6 \end{vmatrix}$

$\bar{n} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 14 & -6 \end{vmatrix}, \; - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -14 & -6 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -14 & 14 \end{vmatrix} \right)$

$\bar{n} = (6, \quad -12, \quad -42)$

$\therefore \overline{P_o P} \cdot \bar{n} = 0$

$[P - f] \cdot \bar{n} = 0$

$[(x - 6), (y - (-7)), (z - 3)] \cdot (6, \quad -12, \quad -42) = 0$

$[6 \cdot (x - 6)] + [-12 \cdot (y + 7)] + [-42 \cdot (z - 3)] = 0$

$(6x - 36) + (-12y - 84) + (-42z + 126) = 0$

$6x - 12y - 42z + 6 = 0$

Variabel X = 6

Variabel Y = -12

Variabel Z = -42

Variabel Konstanta = 6

Hitunglah h.k jika diketahui h + k = (7, -5, 8) dan h - k = (5, -4,7)

Untuk menyelesaikan perkalian cross di atas, kita bisa menggunakan persamaan:

$$h \cdot k = \frac{1}{4} \cdot \|h + k\|^2 - \frac{1}{4} \cdot \|h - k\|^2$$

$\|h + k\| = \sqrt{7^2 + (-5)^2 + 8^2} = \sqrt{49 + 25 + 64} = \sqrt{138}$

$\|h + k\|^2 = (\sqrt{138})^2 = 138$

$\|h - k\| = \sqrt{5^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 16 + 49} = \sqrt{90}$

$\|h - k\|^2 = (\sqrt{90})^2 = 90$

$\therefore h \cdot k = \frac{1}{4} \cdot 138 - \frac{1}{4} \cdot 90 = 34{,}5 - 22{,}5 = 12$

Carilah luas segitiga yang ditentukan oleh titik a (9, -5, 3) b (-8, 5, -7) c (9, -4, 7). Titik pusat adalah b dan perkalian cross nya adalah $ba \times bc$.

Untuk mencari luas segitiga, kita bisa menggunakan rumus:

$$L\Delta = \frac{1}{2} \cdot \|ba \times bc\|$$

Dengan persamaan di atas, kita perlu mencari hasil perkalian cross dari $ca \times cb$ lalu kia cari Panjang dari hasil perkalian cross tersebut. Setelah itu kita kalikan dengan 0,5

$ba = a - b$

$$= \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 17 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$bc = c - b$

$$= \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 17 \\ -9 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$\therefore ab \times ac = \begin{vmatrix} 17 & -10 & 10 \\ 17 & -9 & 14 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} -10 & 10 \\ -9 & 14 \end{vmatrix}, \; -\begin{vmatrix} 17 & 10 \\ 17 & 14 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} 17 & -10 \\ 17 & -9 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} -50, & -68, & 17 \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

Setelah kita menemukan hasil perkalian cross $ab \times ac$, kita akan melanjutkan untuk menghitung Panjang dari hasil cross tersebut

$$\|ab \times ac\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-50)^2 + (-68)^2 + (17)^2} = \sqrt{7413} = 86{,}1$$

Luas Segitiga: $\frac{1}{2} \cdot \|ab \times ac\| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7413} = \frac{\sqrt{7413}}{2}$ atau $\frac{1}{2} \cdot 86{,}1 = 43{,}05$

Luas Jajaran Genjang: $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \|ab \times ac\| = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7413} = \sqrt{7413}$ atau $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 86{,}1 = 86{,}1$