



Aljabar Linear

DETERMINAN

Pertemuan 3: Bab 2.1-2.4

AGENDA PERTEMUAN 3



metode Gauss



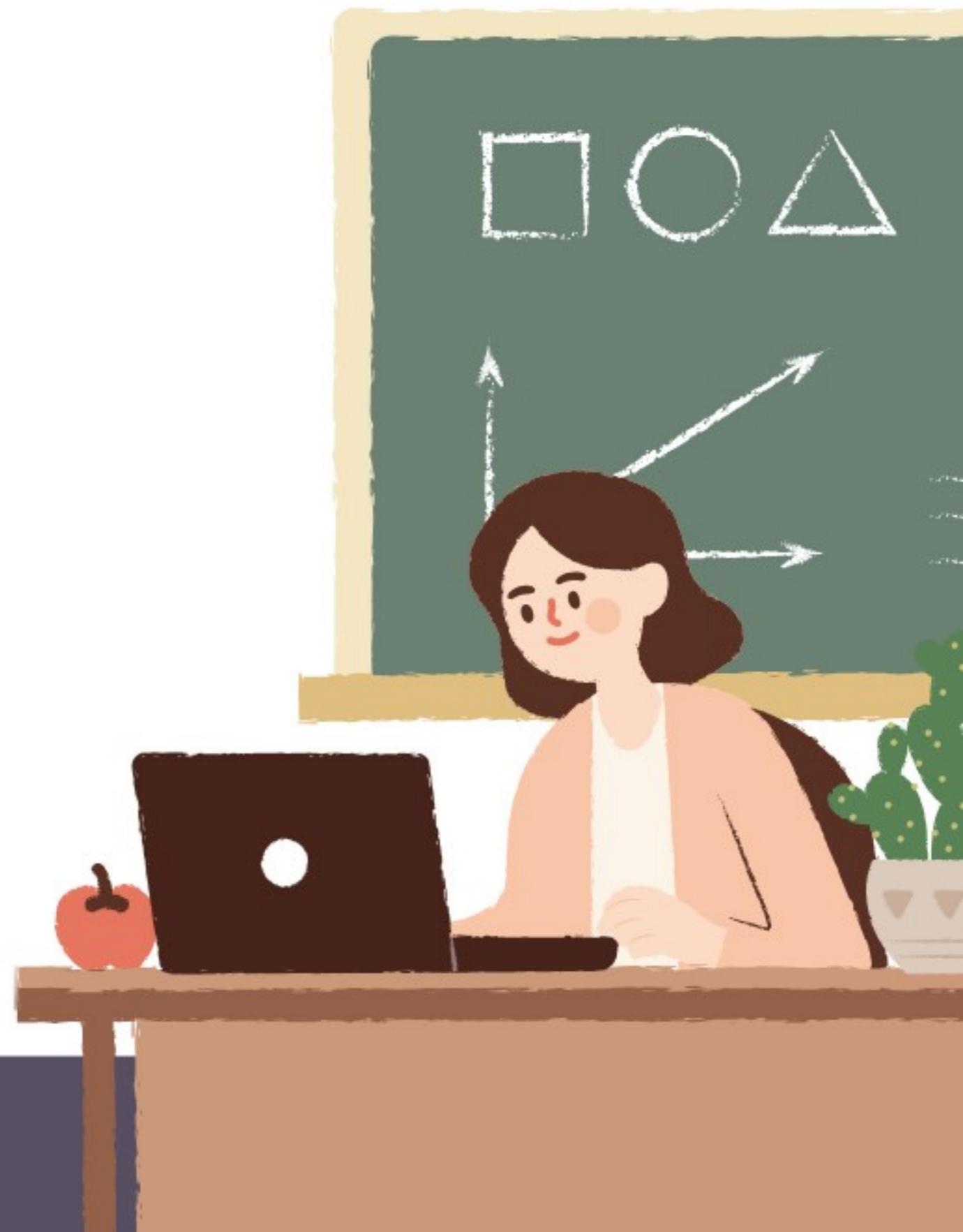
metode
Segitiga Atas



Determinan dengan Kofaktor



SPL dengan determinan
(Aturan Cramer)





TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS

Setelah menyelesaikan pertemuan ini,
mahasiswa diharapkan:

- Dapat Menghitung determinan
- Dapat Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier dengan menggunakan determinan



DETERMINANT METHOD

MATRIKS 3X3

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Cara biasa ~



MATRIKS 4X4

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Segitiga Atas
- Gauss
- Kofaktor

DETERMINAN CARA LAMA

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = 3(-2) - 1(4) = -10$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det}(B) &= (45+84+96) - (105+(-48)+(-72)) \\ &= 240 \end{aligned}$$



Mencari Determinan dengan
OBE
(Operasi Baris Elementer)



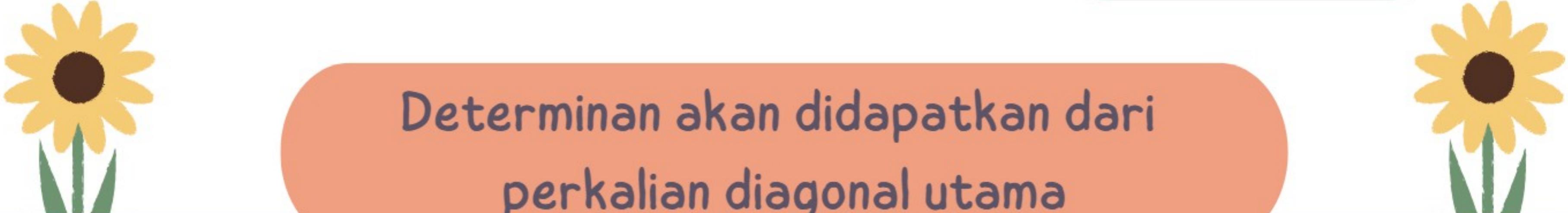
CARA MENGERJAKAN OBE



GAUSS

OBE

SEGITIGA
ATAS/BAWAH

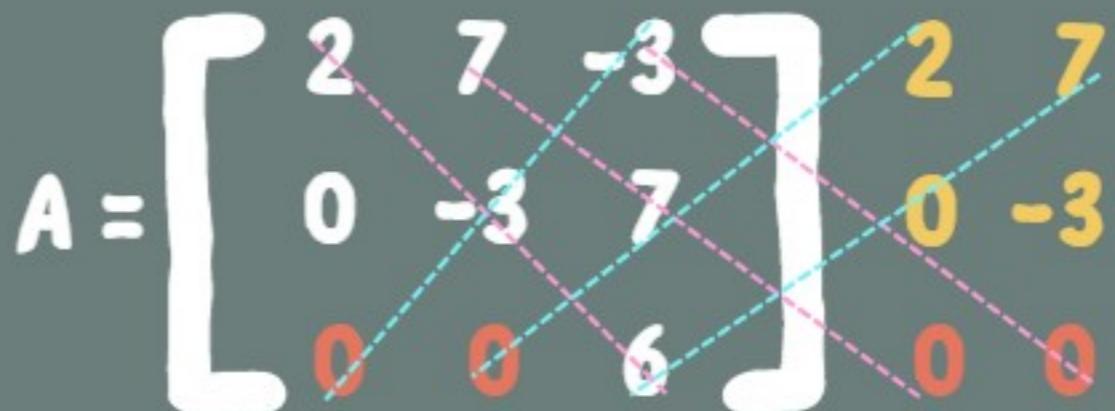


Determinan akan didapatkan dari
perkalian diagonal utama

Bila $A(n \times n)$ matriks segitiga atas, matriks segitiga bawah, atau matriks diagonal, maka $\det(A)$ adalah hasil kali dari elemen-elemen diagonal utama.

Teorema
2.2.2

Pembuktian:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$


Semua perkalian silang menghasilkan 0 kecuali elemen diagonal utama

Sehingga, $\det(A) = 2 \times (-3) \times 6$



PENGARUH OBE TERHADAP DETERMINAN





PENGARUH OBE TERHADAP DETERMINAN

Sebelum melangkah lebih jauh diberikan contoh matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det}(A) &= (1+8+0) - (3+8+0) \\ &= 9 - 11 \\ &= -2 \end{aligned}$$

PENGARUH OBE (1)

Misal, baris pertama (b_1) pada matriks A dikali dengan konstanta 4 menjadi matriks $A1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \times 4 \quad \longrightarrow \quad A1 = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

PENGARUH OBE (1)

Maka akan didapatkan determinan matriks A_1 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\text{Det}(A_1) &= (4+32+0) - (12+32+0) \\ &= 36 - 44 \\ &= -8\end{aligned}$$

$$\text{Det}(A_1) = 4 \text{ Det}(A)$$

Dapat disimpulkan bahwa perkalian suatu baris dengan konstanta k akan mengalikan determinan dengan k .

PENGARUH OBE (2)

Misal, baris pertama (b_1) pada matriks A ditukar dengan baris kedua (b_2) menjadi matriks A2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

PENGARUH OBE (2)

Maka akan didapatkan determinan matriks A2 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\text{Det}(A2) &= (0+3+8) - (8+0+1) \\ &= 11 - 9 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\text{Det}(A2) = - \text{Det}(A)$$

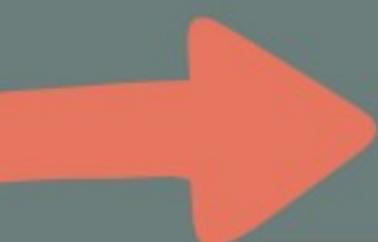
Dapat disimpulkan bahwa operasi tukar baris akan mengubah nilai determinan dari positif ke negatif atau sebaliknya.

PENGARUH OBE (3)

Misal, baris kedua (b_2) pada matriks A dijumlahkan dengan hasil perkalian baris pertama (b_1) dengan -2 , menghasilkan matriks A_3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = b_2 + (-2)b_1$$



$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

PENGARUH OBE (3)

Maka akan didapatkan determinan matriks A_3 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\text{Det}(A_3) &= ((-3)+(-4)+(-12)) - ((-9)+(-4)+(-4)) \\ &= (-19) - (-17) \\ &= -2\end{aligned}$$

$$\text{Det}(A_3) = \text{Det}(A)$$

Dapat disimpulkan bahwa operasi perkalian sebuah baris dengan konstanta k dan ditambah pada baris lain tidak akan merubah nilai determinan


$$\text{Hitung } \det A \text{ dimana } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

dengan mengubah matriks menjadi bentuk:

1. Gauss
 2. Segitiga Atas
- 

SOAL 1

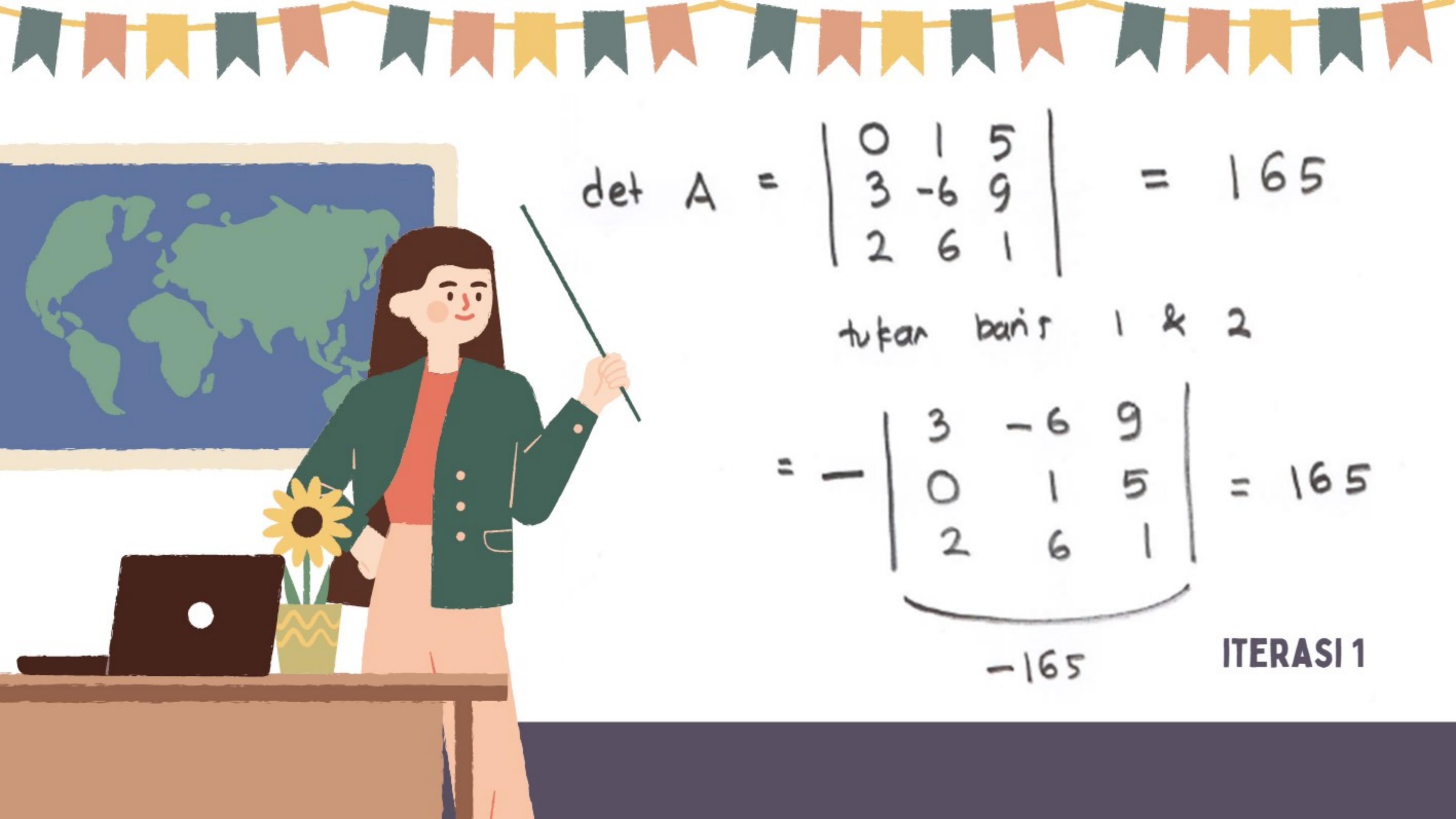
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det A = 165$

mencari $\det A$ dgn cara $\xrightarrow{\text{OBE}} \text{menj. bentuk }$ gauss
eselon baris

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 165$$





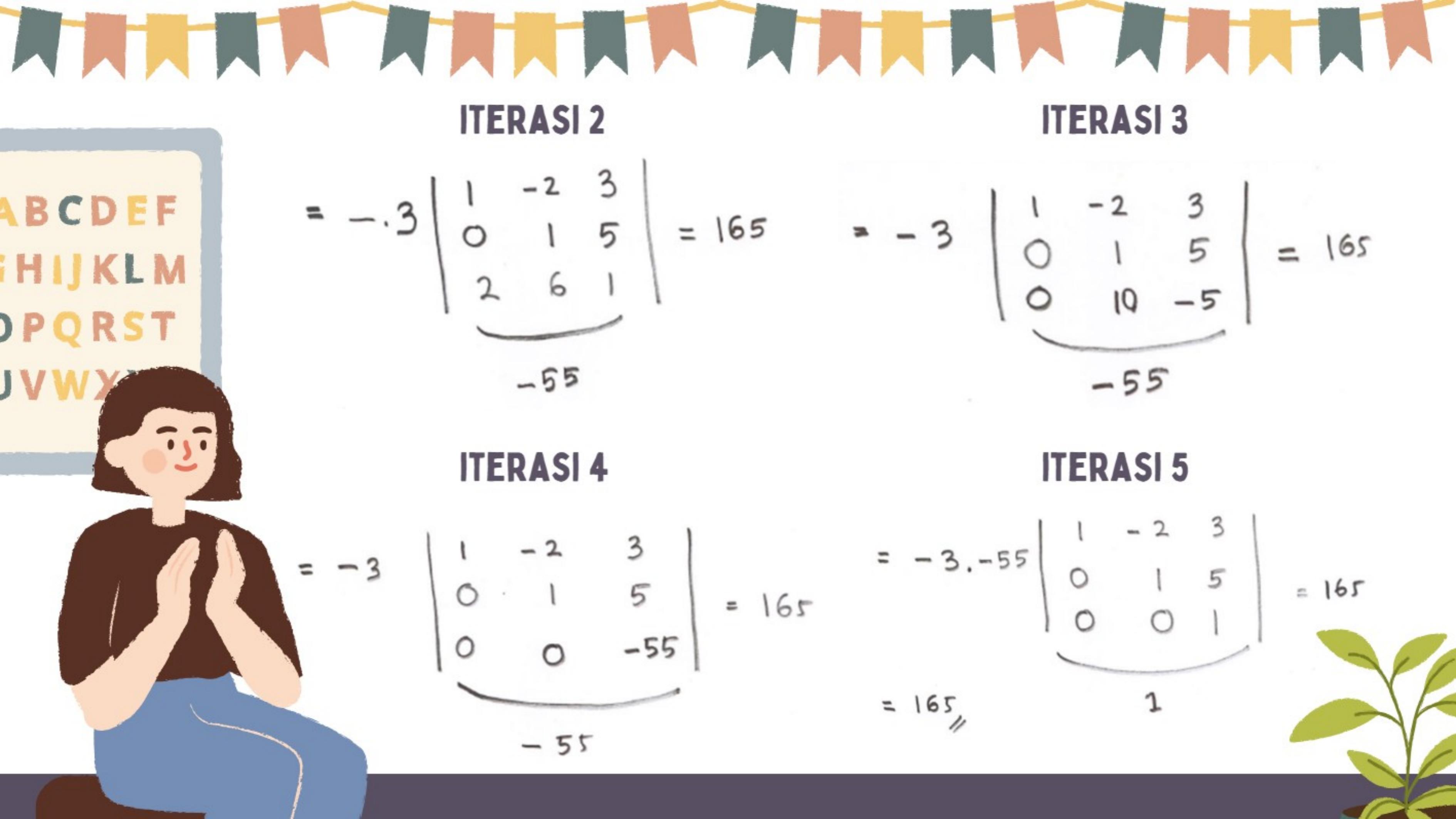
$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 165$$

tukar baris 1 & 2

$$= - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 165$$

-165

ITERASI 1



ITERASI 2

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 165$$

-55

ITERASI 3

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} = 165$$

-55

ITERASI 4

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} = 165$$

-55

ITERASI 5

$$= -3 \cdot -55 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 165$$

1

$= 165 //$

SOAL 2

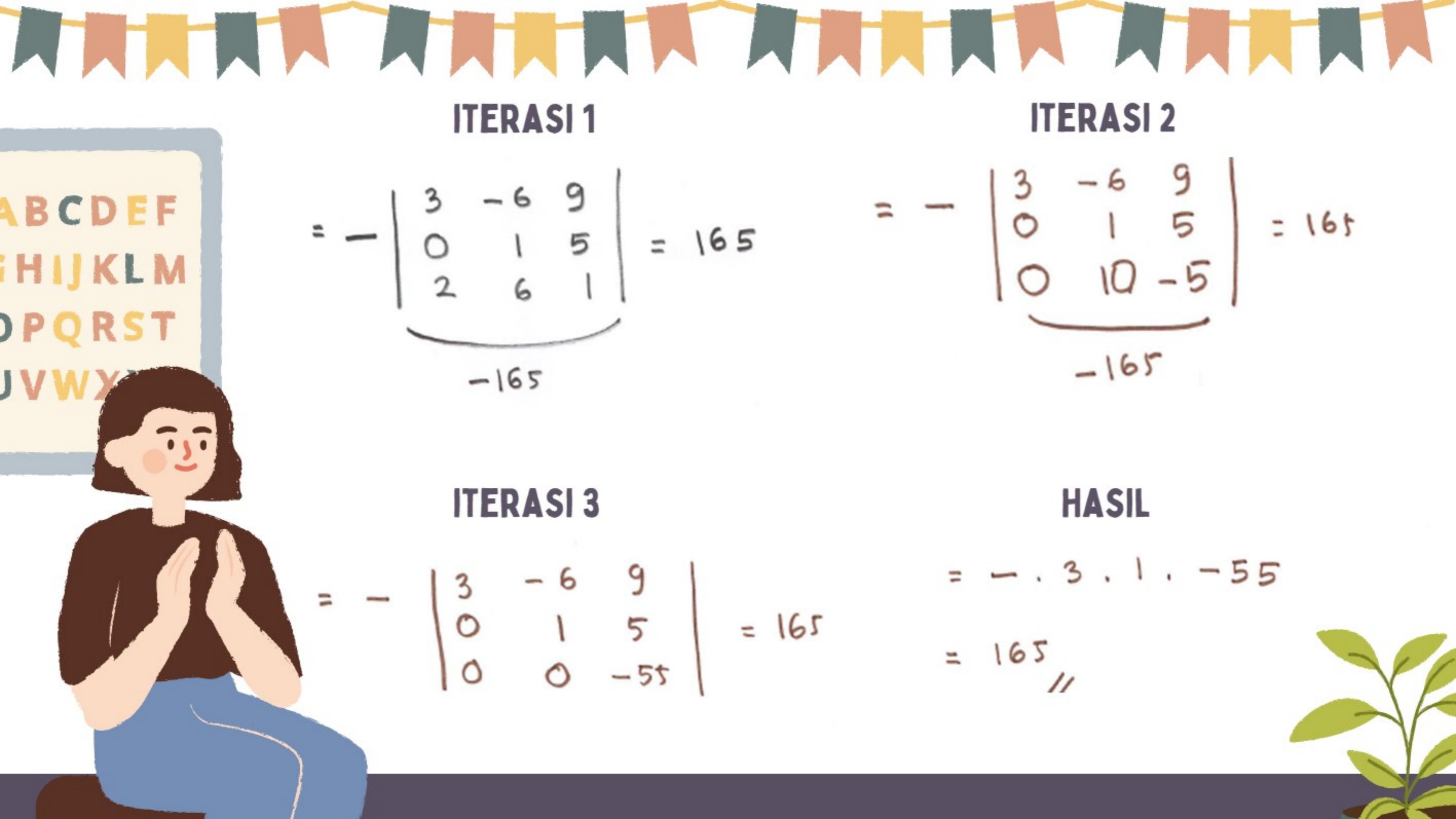
mencari $\det A$ dgn cara $\xrightarrow{\text{OBE}}$ menj. bentuk Δ atas

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 165$$

$$= - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 165$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 -165





ITERASI 1

$$= - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 165$$

-165

ITERASI 2

$$= - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} = 165$$

-165

ITERASI 3

$$= - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} = 165$$

HASIL

$$\begin{aligned} &= - \cdot 3 \cdot 1 \cdot -55 \\ &= 165 // \end{aligned}$$

SOAL 3

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & 5 \\ -5 & -1 & 7 & 2 \\ 9 & 4 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

cari determinan matriks
disamping dengan
mengubahnya menjadi
bentuk gauss



Proses Iterasi

A B C D E F
G H I J K L M
P Q R S T
U V W X



1	2	-1	1.67
-5	-1	7	-2
3	9	4	-2
4	-5	6	6

iterasi ke 1, berapa isi sel A(1,4) 1.67

1	2	-1	1.67
0	9	2	6.35
9	4	-2	3
4	-5	6	6

iterasi ke 2, berapa isi sel A(2,4) 6.35

1	2	-1	1.67
0	9	2	6.35
0	-14	7	-12.03
4	-5	6	6

iterasi ke 3, berapa isi sel A(3,4) -12.03

1	2	-1	1.67
0	9	2	6.35
0	-14	7	-12.03
0	-13	10	-0.68

iterasi ke 4, berapa isi sel A(4,2) -13



Proses Iterasi

A B C D E F
G H I J K L M
P Q R S T
J V W X



	1	2	-1	1.67
3 x 9	0	1	0.22	0.71
	0	-14	7	-12.03
	0	-13	10	-0.68

iterasi ke 5, berapa isi sel A(2,4) 0.71

	1	2	-1	1.67
	0	1	0.22	0.71
	0	0	10.08	-2.09
	0	-13	10	-0.68

iterasi ke 6, berapa isi sel A(3,3) 10.08

	1	2	-1	1.67
	0	1	0.22	0.71
	0	0	10.08	-2.09
	0	0	12.86	8.55

iterasi ke 7, berapa isi sel A(4,4) 8.55



Proses Iterasi

A B C D E F
G H I J K L M
P Q R S T
J V W X



$3 \times 9 \times 10.08$	1	2	-1	1.67	iterasi ke 8, berapa isi sel A(3,4)	-0.21
	0	1	0.22	0.71		
	0	0	1	-0.21		
	0	0	12.86	8.55		
	1	2	-1	1.67	iterasi ke 9, berapa isi sel A(4,4)	11.25
	0	1	0.22	0.71		
	0	0	1	-0.21		
	0	0	0	11.25		
$3 \times 9 \times 10.08 \times 11.25$	1	2	-1	1.67	iterasi ke 10, berapa isi sel A(4,6)	
	0	1	0.22	0.71		
	0	0	1	-0.21		
	0	0	0	1	Determinan A =	3062



SOAL 4

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & 5 \\ -5 & -1 & 7 & 2 \\ 9 & 4 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

cari determinan matriks
disamping dengan
mengubahnya menjadi
bentuk segitiga atas

DIKERJAIN DI PAPAN GAK SIH??



Proses Iterasi

A B C D E F
G H I J K L M
P Q R S T
V W X



3	6	-3	5
0	9	2	6.33
9	4	-2	3
4	-5	6	6

iterasi ke 1, berapa isi sel A(2,4)

6.33

3	6	-3	5
0	9	2	6.33
0	-14	7	-12
4	-5	6	6

iterasi ke 2, berapa isi sel A(3,3)

7

3	6	-3	5
0	9	2	6.33
0	-14	7	-12
0	-13	10	-0.67

iterasi ke 3, berapa isi sel A(4,4)

-0.67

3	6	-3	5
0	9	2	6.33
0	0	10.11	-2.15
0	-13	10	-0.67

iterasi ke 4, berapa isi sel A(3,3)

10.11





Proses Iterasi

A B C D E F
G H I J K L M
P Q R S T
J V W X



3	6	-3	5	iterasi ke 5, berapa isi sel A(4,3)	12.89
0	9	2	6.33		
0	0	10.11	-2.15		
0	0	12.89	8.47		
3	6	-3	5	iterasi ke 6, berapa isi sel A(4,4)	11.21
0	9	2	6.33		
0	0	10.11	-2.15	3059.99	
0	0	0	11.21		

$$\text{Det} = 3 \times 9 \times 10.11 \times 11.21 = 3059.99$$





SIFAT-SIFAT FUNGSI DETERMINAN



SIFAT DETERMINAN (1)

Determinan bisa bernilai 0, jika memenuhi syarat-syarat berikut:

- ada 2 kolom yang sebanding
- ada 2 baris yang sebanding
- ada 1 baris yang seluruhnya bernilai 0



NIHH BUKTINYA!!!

A B C D E F
G H I J K L M
P Q R S T
U V W X



$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Dari Matriks A di atas, secara kasat mata kita tahu bahwa kolom 2 adalah kelipatan -2 dari kolom 1

Dengan melakukan OBE agar kita mencari bentuk segitiga atas, akan diperoleh hasil akhir:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det}(A) &= (1 \cdot 0 \cdot (-11)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Det}(A) = 0$$





Bila A adalah matriks persegi ($n \times n$), maka:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

A^T adalah bentuk transpose dari matriks A



Teorema

Pembuktian:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = -2$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^T) = -2$$

TEOREMA
TERBUKTI



SIFAT DETERMINAN (3)

$$\det(k \cdot A) = k^n \det(A)$$

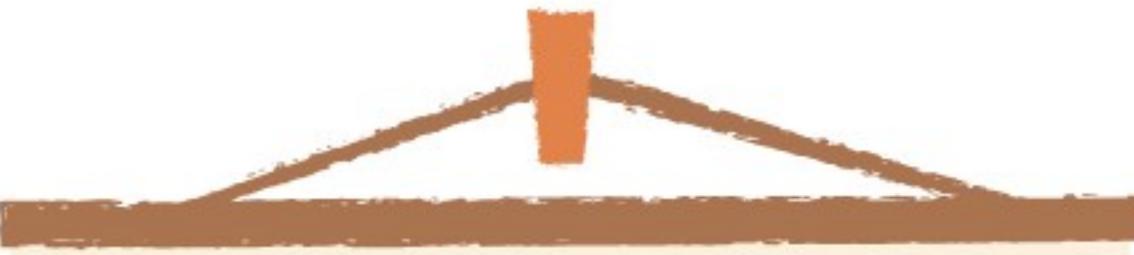
*n = jumlah baris

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Det}(A) = 4$$

$$5A = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{Det}(5A) = 100$$

Maka:
 $\text{Det}(5A) = 5^2 \times 4$

Dapat disimpulkan
kalau sifat tersebut
TERBUKTI


$$\det(A'') = \det(A) + \det(A')$$

JIKA
ada 1 baris pada A'' yang
entri nya penjumlahan
dari entri A dan A'

Teorema

Pembuktian:

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7-1 \end{bmatrix} \quad \det(A'') = -28$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = -49$$

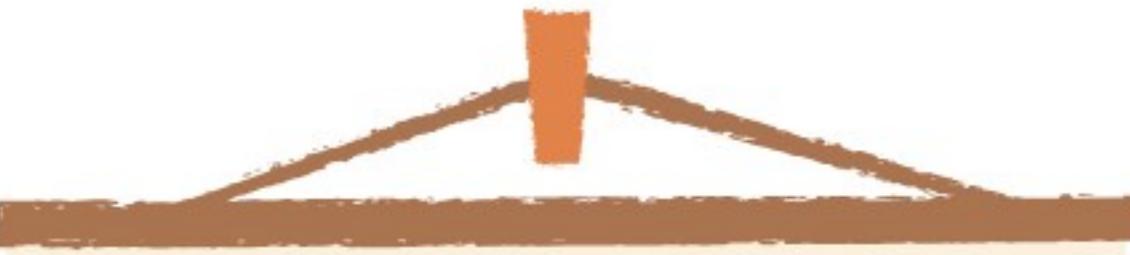
$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A') = 21$$

sesuai teorema:

$$\begin{aligned} \det(A'') &= \det(A) + \det(A') \\ &= -49 + 21 = -28 \end{aligned}$$

TEOREMA
TERBUKTI



Jika A dan B matriks kuadrat ($n \times n$) berukuran sama:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Teorema

Pembuktian:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = -23$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix} \quad \det(AB) = -23$$

sesuai teorema:

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(A) \cdot \det(B) \\ &= 1 \cdot -23 = -23 \end{aligned}$$

TEOREMA
TERBUKTI



Sebuah matriks A ($n \times n$) dapat dibalik (invers) jika:

$$\det(A) \neq 0$$

maka,
 $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

Teorema

Pembuktian:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = -10$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0,1 & 0,43 \\ 0,3 & -0,2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^{-1}) = -0,1$$

sesuai teorema:

$$\begin{aligned}\det(A^{-1}) &= 1 / \det(A) \\ &= 1 / -10 \\ &= -0,1\end{aligned}$$

TEOREMA
TERBUKTI



Mencari Determinan dengan

KOFAKTOR

MINOR

adalah HASIL DETERMINAN matriks bagian dari suatu matriks yang diperoleh dengan menghilangkan elemen-elemen dari baris i dan kolom j.

Minor dilambangkan dengan:

$$M_{ij}$$

Jumlah Minor dalam suatu matriks itu bergantung dengan jumlah elemen matriks asalnya, jika Matriks asal berukuran 2×2 maka Minor matriks tersebut berjumlah 4. Sedangkan untuk matriks berukuran 3×3 maka Minor matriks tersebut berjumlah 9



CONTOH:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

**CARI SELURUH MINOR DARI
MATRIKS TERSEBUT !**



pada matriks 3×3 , minor yang terdapat
pada matriks tersebut berjumlah 9

$$M_{11}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 12$$

$$M_{12}$$

$$M_{12}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -6$$

$$M_{13}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= -16$$

$$M_{21}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -4$$

$$M_{22}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2$$

$$M_{13}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= -16$$

LANJUTAN:

$$M_{31}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 12$$

$$M_{32}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 10$$

$$M_{33}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= 16$$

PERLU
DIPERHATIKAN !!

PASTIKAN TIAP
BARIS DAN KOLOM
SESUAI DENGAN
PERMINTAAN SOAL

KOFAKTOR

adalah perkalian MINOR dengan suatu angka yang besar nya menuruti aturan, yakni:

$$(-1)^{i+j}$$

dimana i adalah baris dan j adalah kolom. Kofaktor suatu elemen baris ke-i dan kolom ke-j seringkali disimbolkan dalam bentuk c_{ij} . Rumus dari kofaktor:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \times M_{ij}$$


$$\text{Kofaktor } A = \begin{pmatrix} + m_{11} & - m_{12} & + m_{13} \\ - m_{21} & + m_{22} & - m_{23} \\ + m_{31} & - m_{32} & + m_{33} \end{pmatrix}$$

Gambar di atas adalah contoh matriks Kofaktor dari Matriks A

Dimana tiap elemen matriks kofaktor A adalah nilai kofaktor dari Matriks A



CONTOH:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

**CARI KOFAKTOR DARI
MATRIKS TERSEBUT !**

berdasarkan hasil dari minor matriks A sebelumnya,
kita bisa menemukan matriks kofaktor dari matriks A

kofaktor $A = \begin{bmatrix} +12 & -(-6) & +(-16) \\ -(-4) & +2 & -(-16) \\ +12 & -10 & +16 \end{bmatrix}$

kofaktor $A = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$

MENCARI DETERMINAN DENGAN KOFAKTOR!!

kita bisa mencari determinan suatu matriks dengan kofaktor baris-n atau kolom ke-n

misalkan kita menggunakan kofaktor
baris pertama:

$$\det(A) = a_{11} \cdot c_{11} + a_{12} \cdot c_{12} + a_{13} \cdot c_{13}$$

* a = elemen matriks A

* c = elemen matriks kofaktor A



CONTOH!!

kita mencari determinan matriks A menggunakan kofaktor baris pertama:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(A) =$

$$a_{11} \cdot c_{11} + a_{12} \cdot c_{12} + a_{13} \cdot c_{13}$$

$\det A$ dgn cara baris pertama

$$\begin{aligned}\det A &= 3 \cdot 12 + 2 \cdot 6 + -1 \cdot (-16) \\ &= 36 + 12 + 16 \\ &= 64\end{aligned}$$



CONTOH 2 !!

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

kita mencari determinan matriks A menggunakan kofaktor kolom ketiga:

$$\det(A) =$$

$$a_{13} \cdot C_{13} + a_{23} \cdot C_{23} + a_{33} \cdot C_{33}$$

det A dgn cara kolom kehingga

$$\det A = -1 \cdot (-16) + 3 \cdot 16 + 0 \cdot 16$$

$$= 16 + 48 + 0$$

$$= 64$$





SPL DENGAN DETERMINAN (CRAMER)



Solusi untuk Sistem Persamaan Linier

$$Ax = b$$

A matriks koefisien;
b vektor ($n \times 1$);
x vektor yang dicari

Teorema
2.4.3

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

di mana A_i adalah matriks A dengan
menggantikan kolom- i dengan (vektor) b

ATURAN CRAMER :

$$A \cdot X = B$$

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$$

$$x_3 = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

Untuk $A_j \rightarrow$ mengganti kolom ke j dengan matrix B

SOAL 5

Gunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan SPL berikut :

A B C D E F
G H I J K L M
D P Q R S T
J V W X



$$\begin{aligned}x_1 &+ 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -1x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8\end{aligned}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{16}{11}$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$



SOAL 6

Carilah nilai x, y dan z dengan menggunakan aturan cramer :

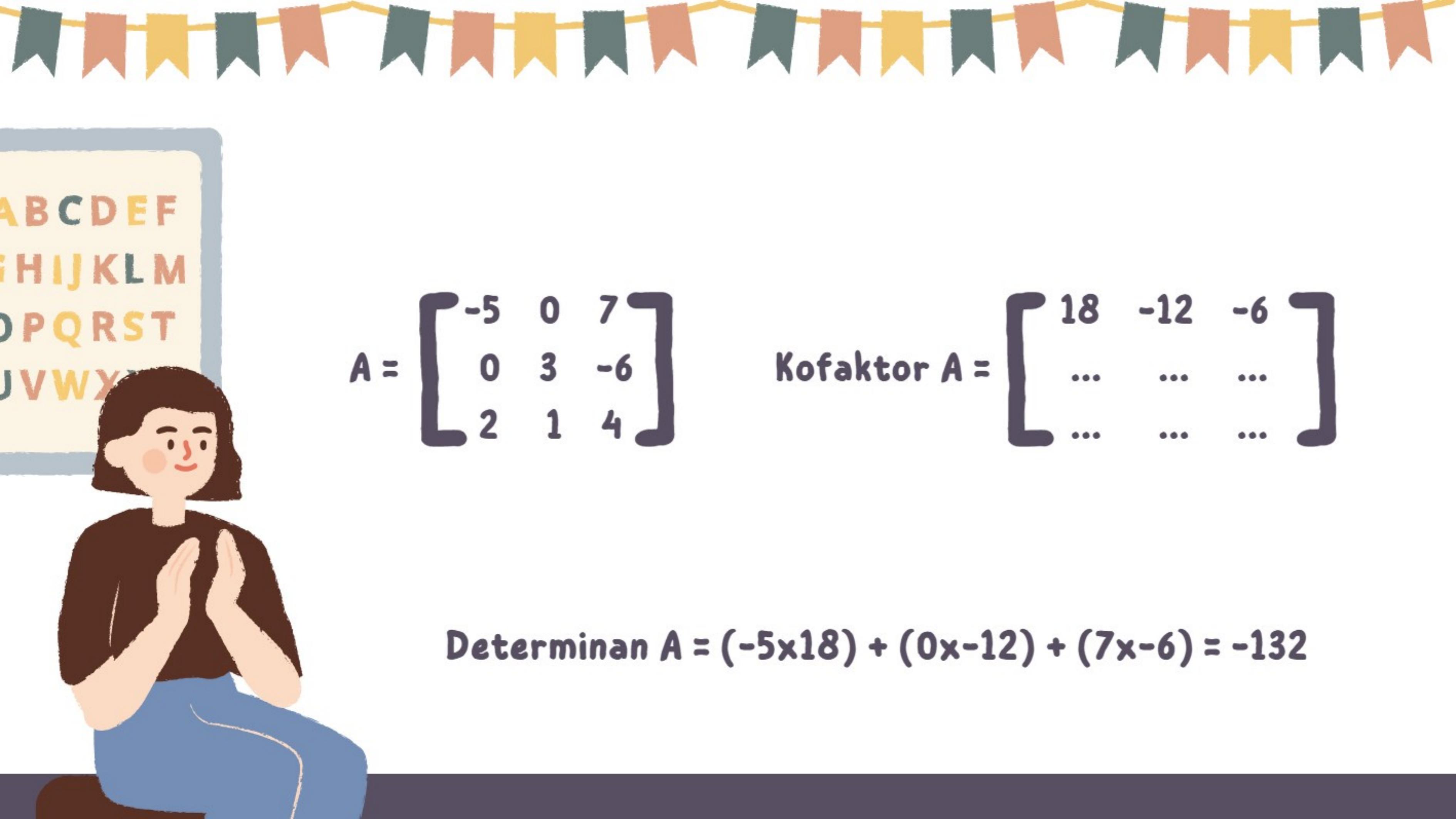
- Carilah determinan A dengan menggunakan perkalian kofaktor untuk baris pertama
- Carilah determinan $A(x)$ dengan menggunakan perkalian kofaktor untuk baris kedua
- Carilah determinan $A(y)$ dengan menggunakan perkalian kofaktor untuk kolom pertama
- Carilah determinan $A(z)$ dengan menggunakan perkalian kofaktor untuk kolom ketiga

$$-5x + 7z = -32$$

$$3y - 6z = 48$$

$$2x + y + 4z = -24$$

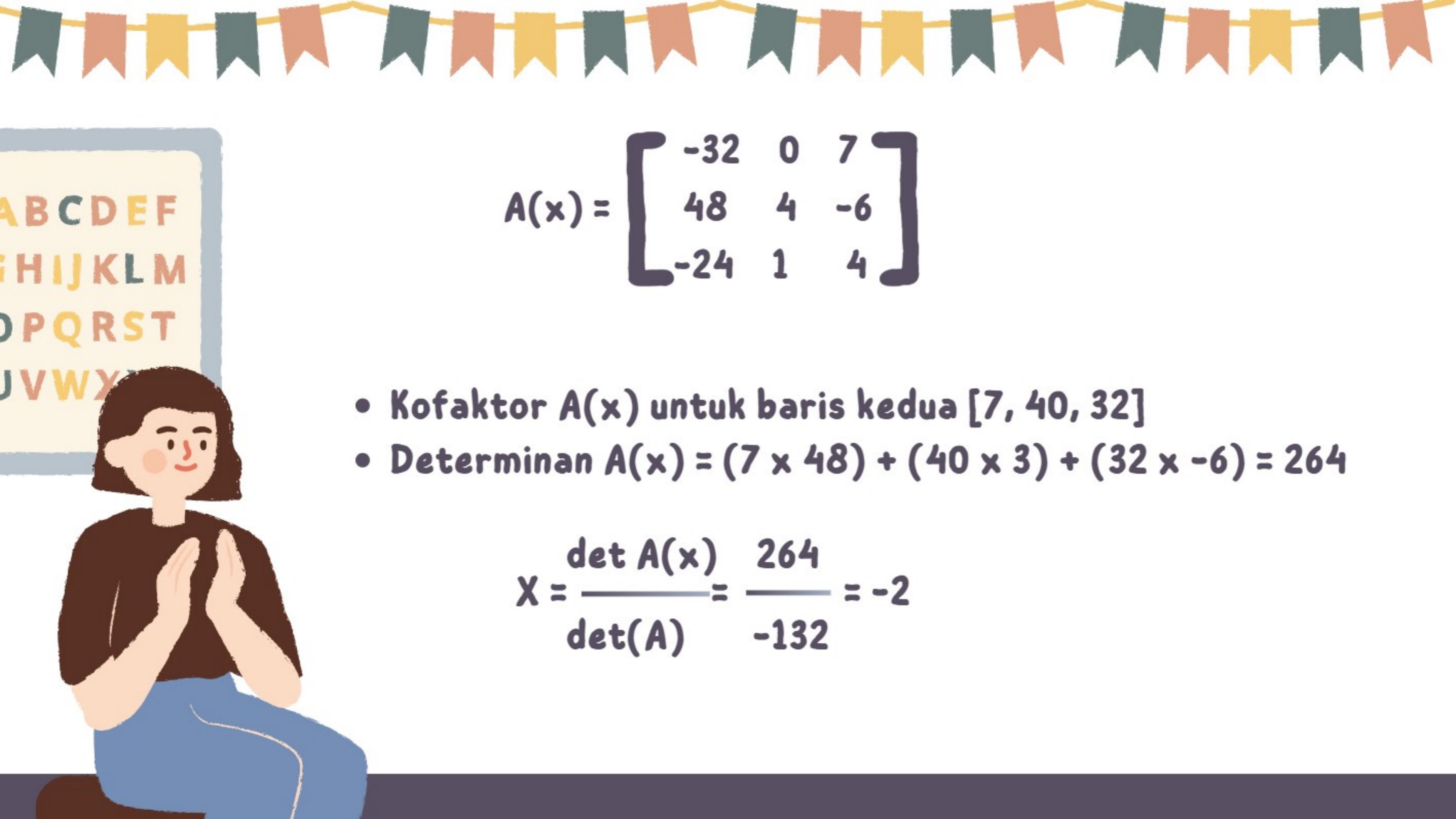




$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Kofaktor } A = \begin{bmatrix} 18 & -12 & -6 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

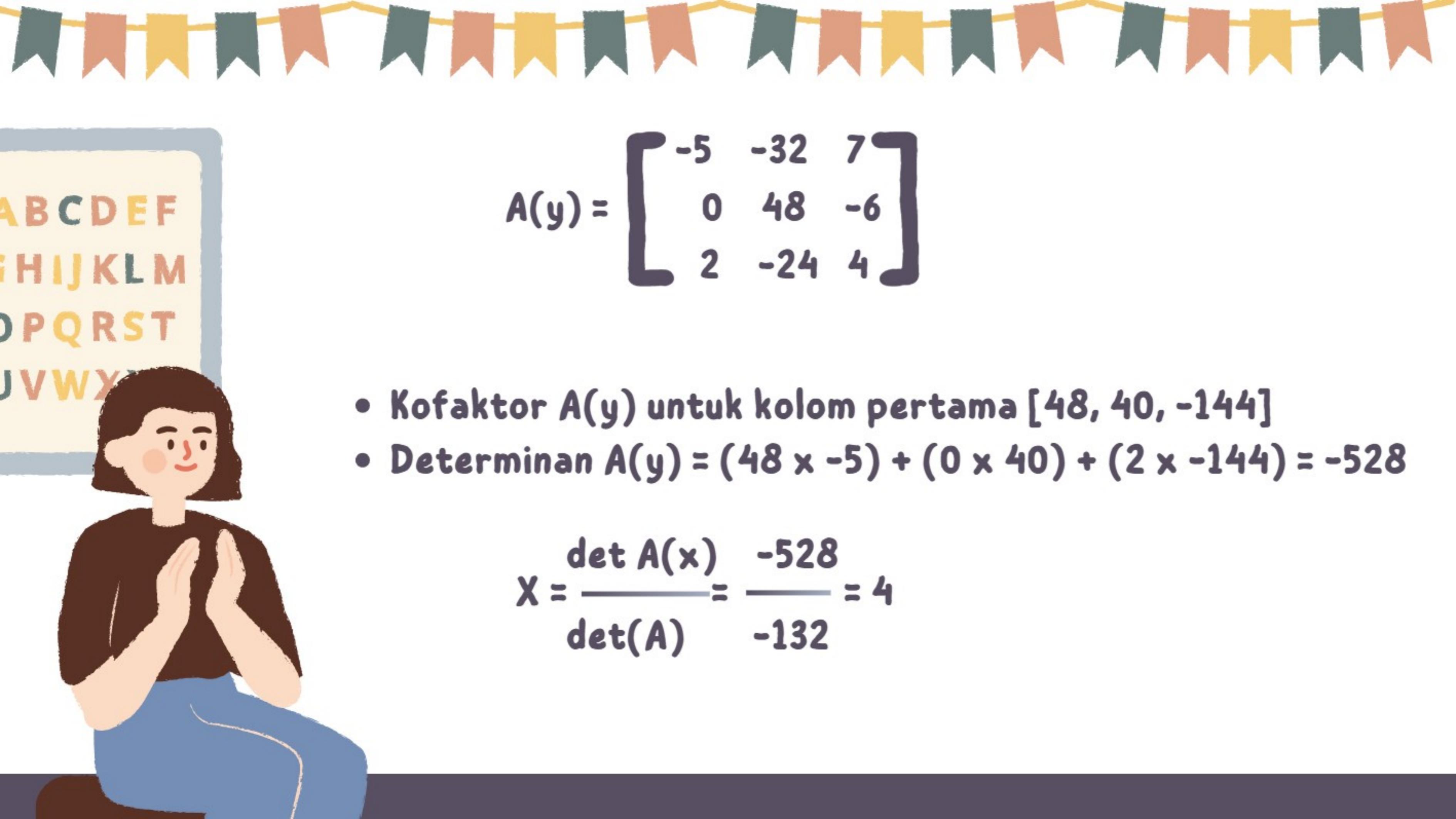
$$\text{Determinan } A = (-5 \times 18) + (0 \times -12) + (7 \times -6) = -132$$



$$A(x) = \begin{bmatrix} -32 & 0 & 7 \\ 48 & 4 & -6 \\ -24 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

- Kofaktor $A(x)$ untuk baris kedua [7, 40, 32]
- Determinan $A(x) = (7 \times 48) + (40 \times 3) + (32 \times -6) = 264$

$$x = \frac{\det A(x)}{\det(A)} = \frac{264}{-132} = -2$$

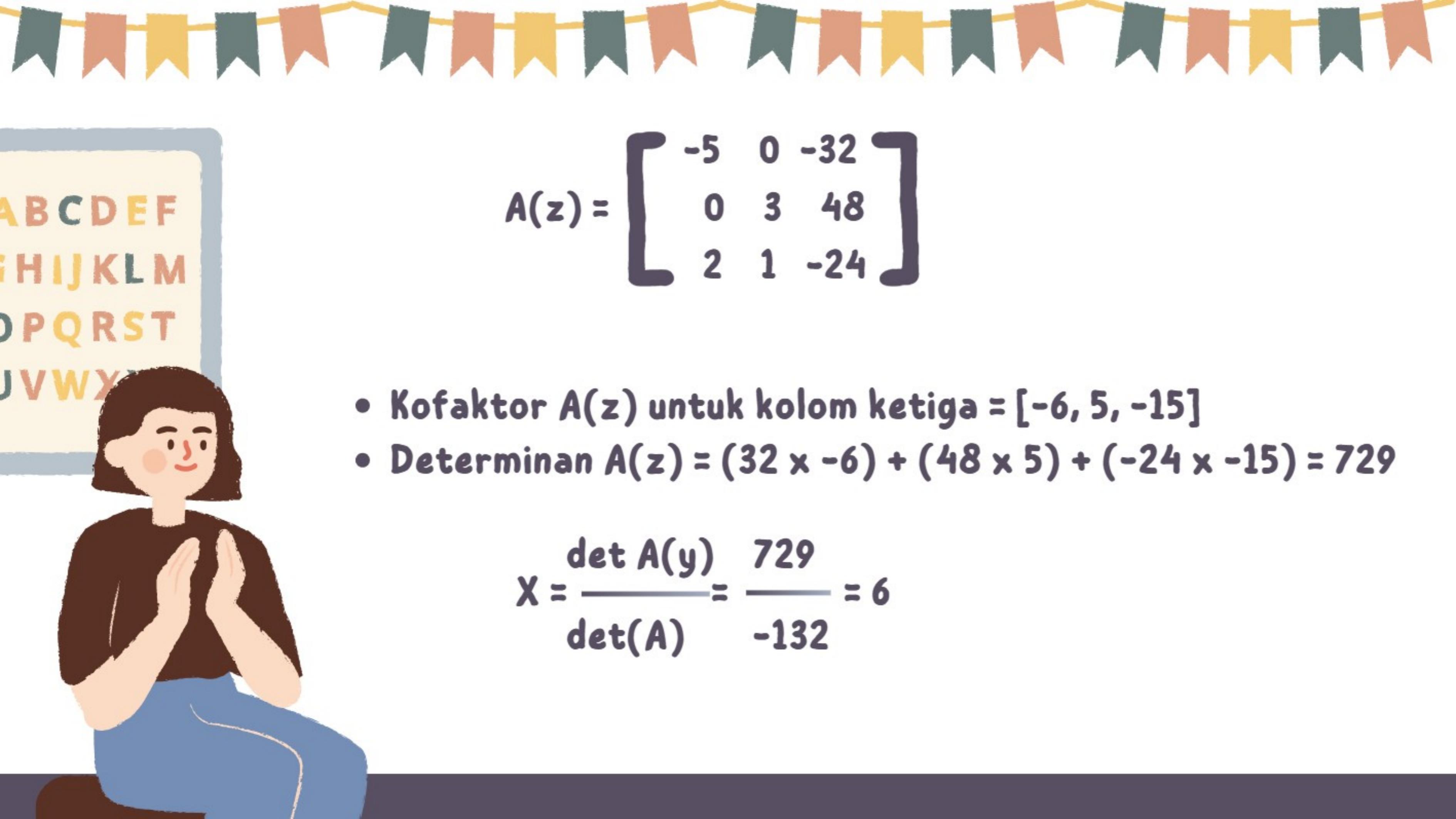


A B C D E F
G H I J K L M
P Q R S T
V W X

$$A(y) = \begin{bmatrix} -5 & -32 & 7 \\ 0 & 48 & -6 \\ 2 & -24 & 4 \end{bmatrix}$$

- Kofaktor $A(y)$ untuk kolom pertama $[48, 40, -144]$
- Determinan $A(y) = (48 \times -5) + (0 \times 40) + (2 \times -144) = -528$

$$x = \frac{\det A(x)}{\det(A)} = \frac{-528}{-132} = 4$$



$$A(z) = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -32 \\ 0 & 3 & 48 \\ 2 & 1 & -24 \end{bmatrix}$$

- Kofaktor $A(z)$ untuk kolom ketiga = $[-6, 5, -15]$
- Determinan $A(z) = (32 \times -6) + (48 \times 5) + (-24 \times -15) = 729$

$$X = \frac{\det A(y)}{\det(A)} = \frac{729}{-132} = 6$$

SOAL 7

Carilah nilai X, Y, Z dengan menggunakan aturan **cramer** dengan merubah menjadi bentuk gauss

$$4x - 3z = 40$$

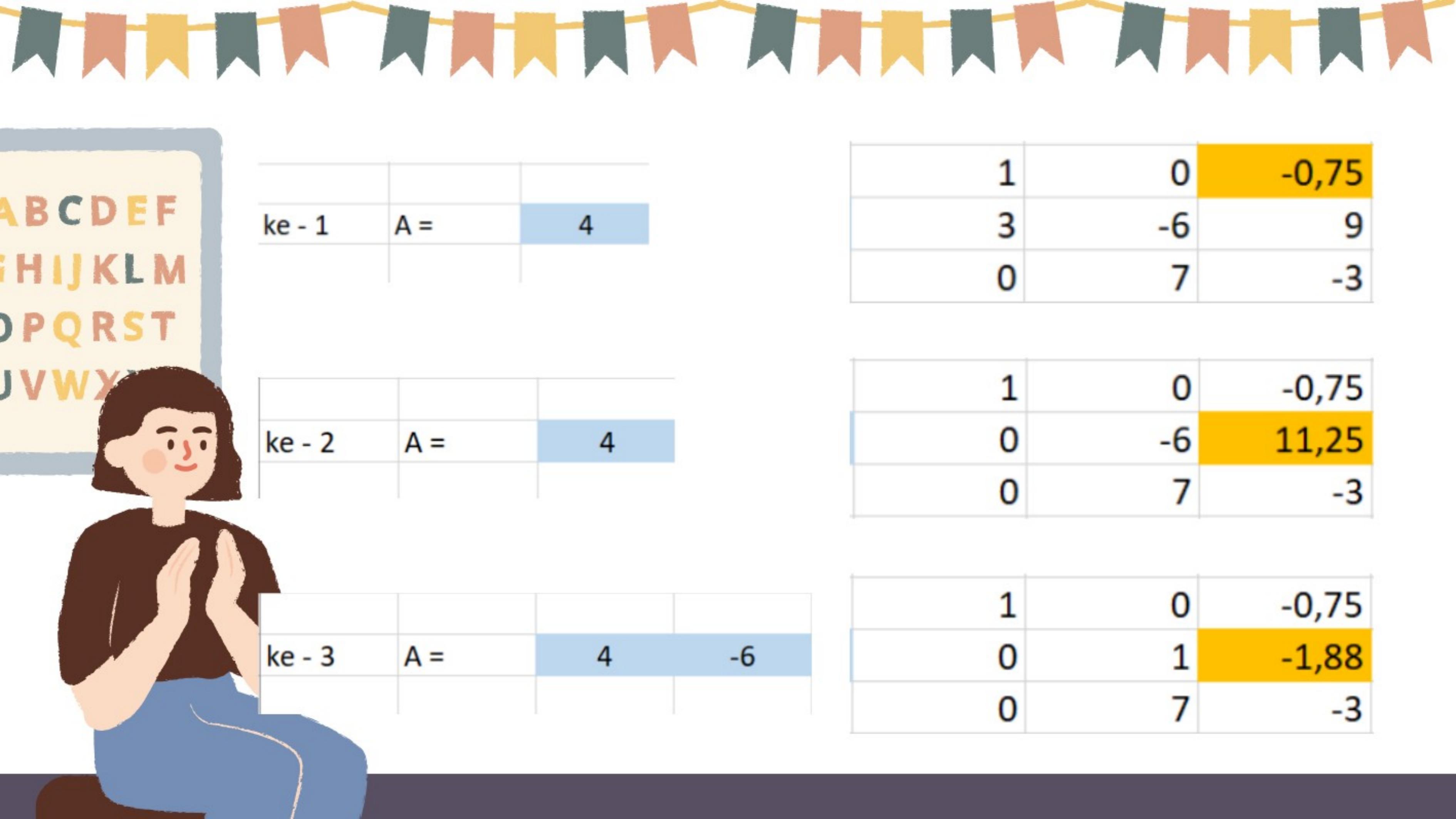
$$3x - 6y + 9z = 15$$

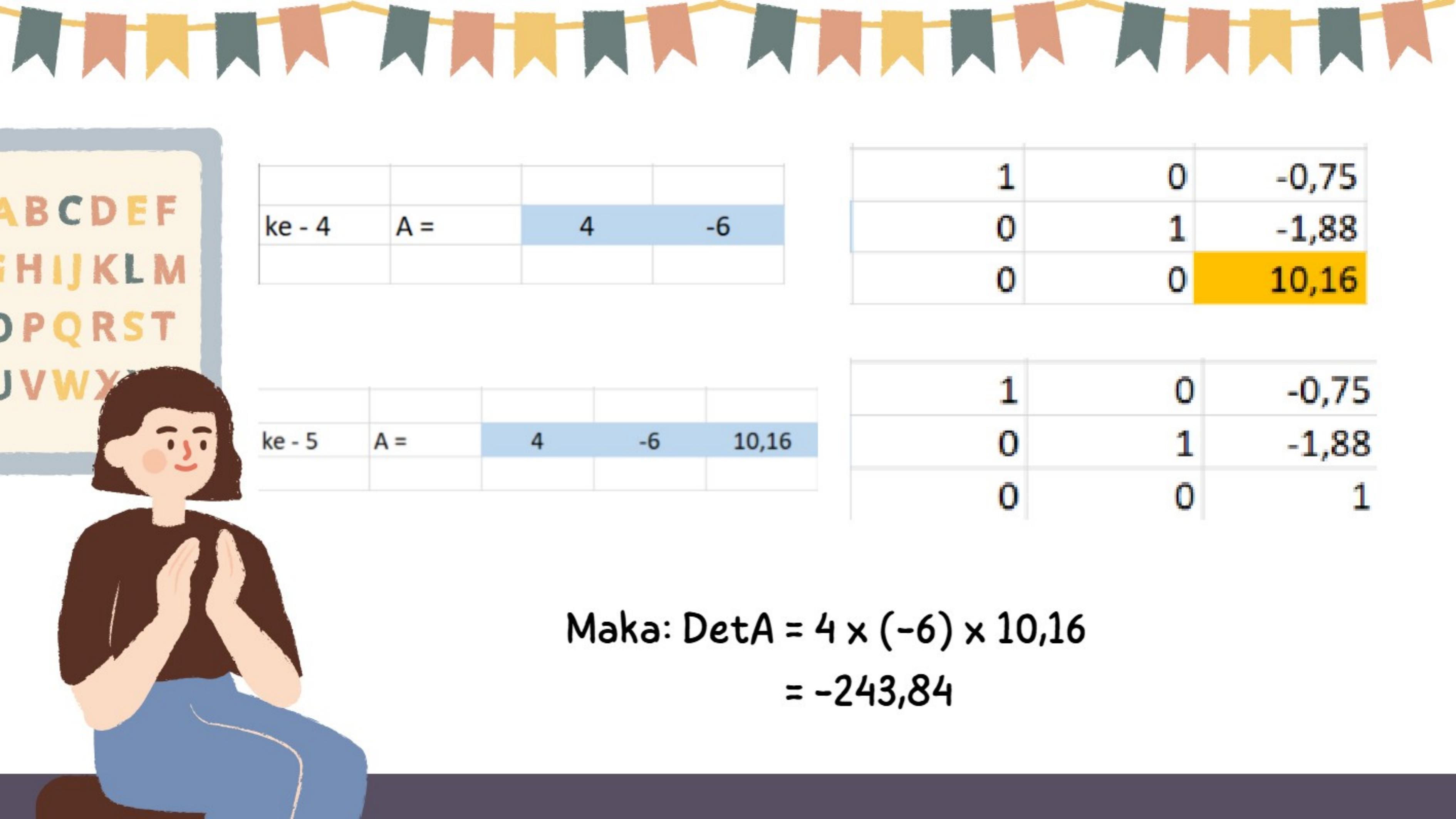
$$7y - 3z = -23$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ 0 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$



1. Pada iterasi ke-1, berapa isi sel $A(1,3) = -0,75$
2. Pada iterasi ke-2, berapa isi sel $A(2,3) = 11,25$
3. Pada iterasi ke-3, berapa isi sel $A(2,3) = -1,88$
4. Pada iterasi ke-4, berapa isi sel $A(3,3) = 10,16$
5. Berapakah determinan matriks $A = -243,8$





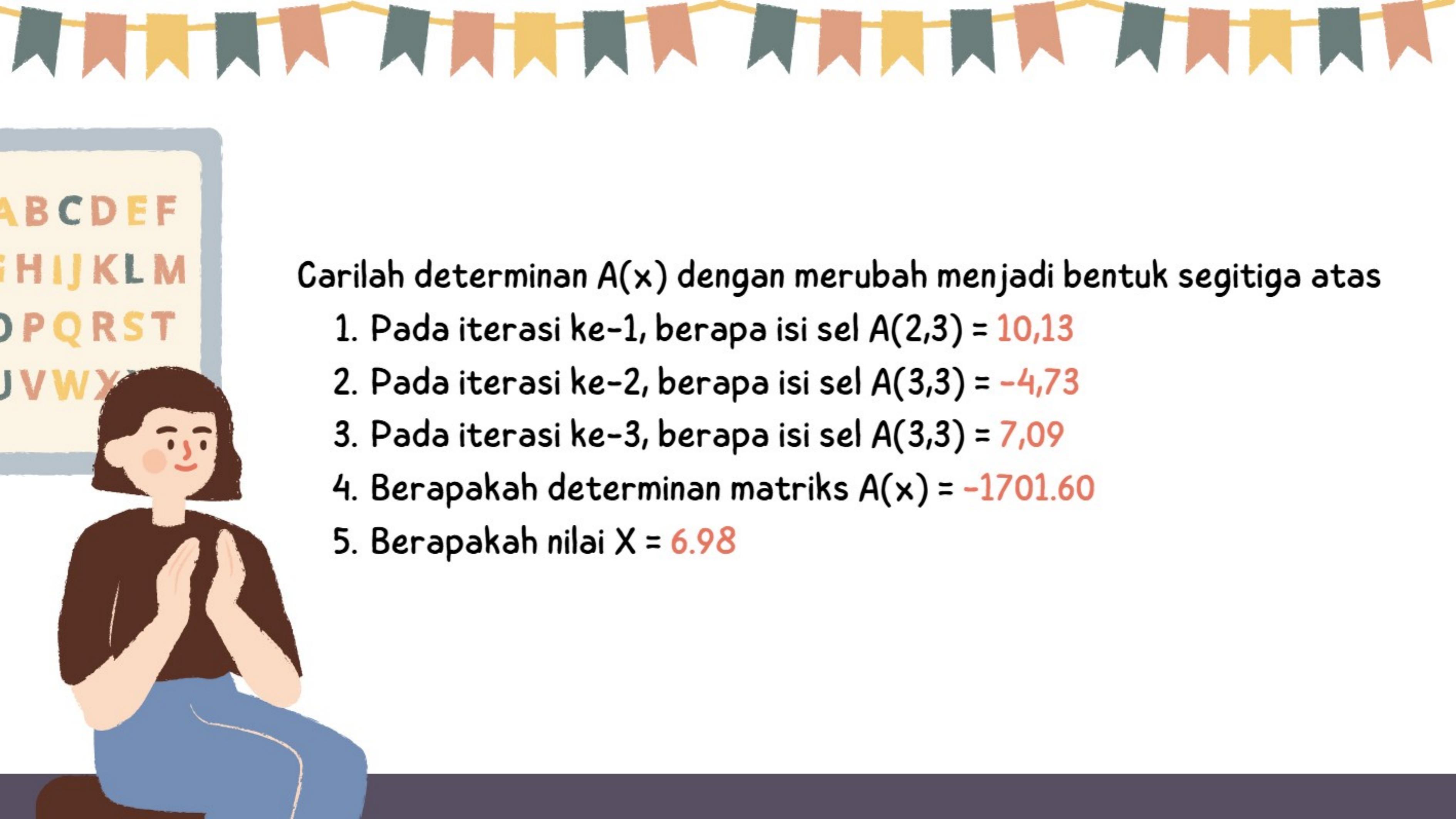
	A =	4	-6
ke - 4			

1	0	-0,75
0	1	-1,88
0	0	10,16

	A =	4	-6	10,16
ke - 5				

1	0	-0,75
0	1	-1,88
0	0	1

$$\begin{aligned}\text{Maka: } \text{Det}A &= 4 \times (-6) \times 10,16 \\ &= -243,84\end{aligned}$$



A B C D E F

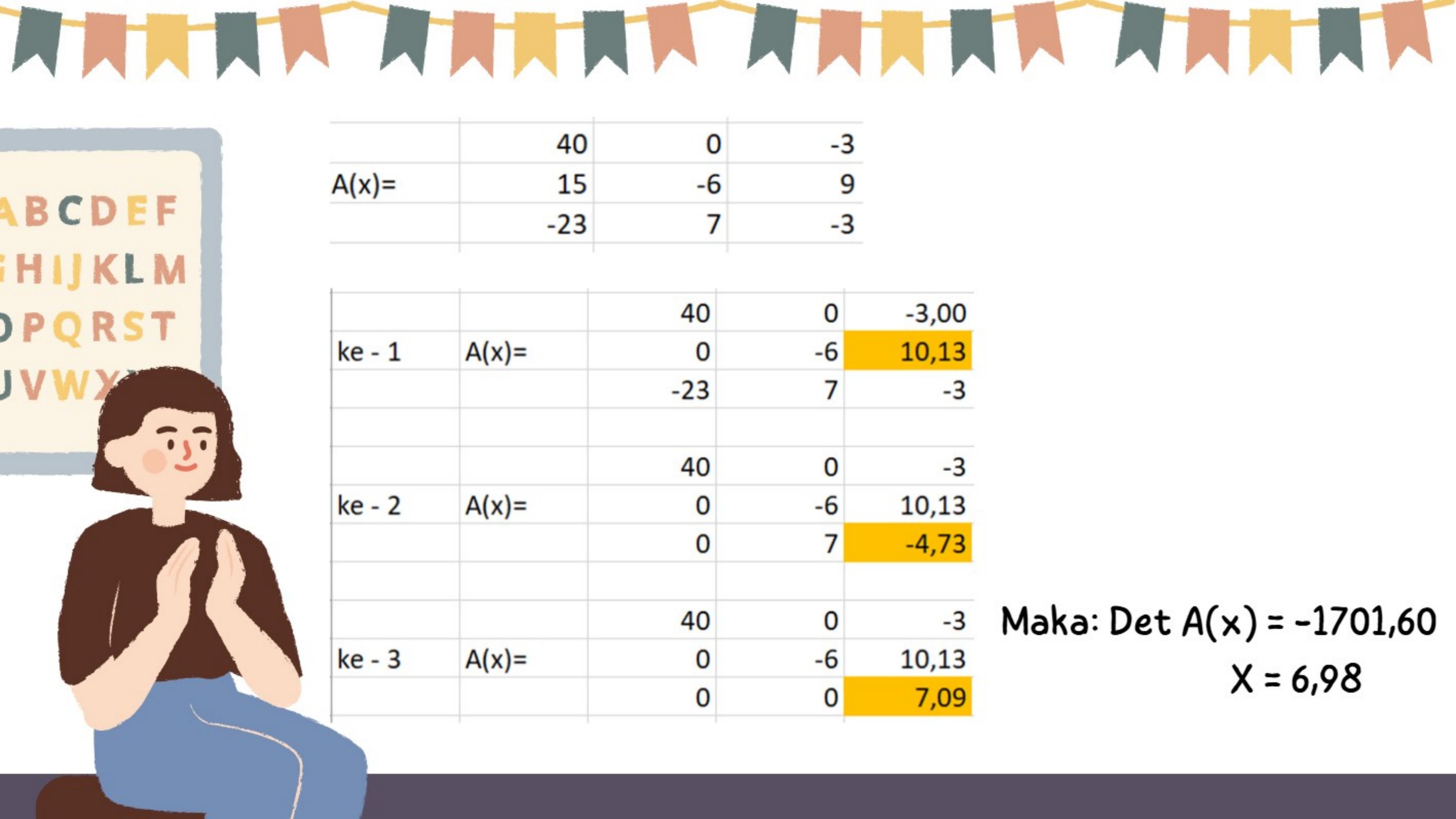
G H I J K L M

D P Q R S T

J V W X

Carilah determinan $A(x)$ dengan merubah menjadi bentuk segitiga atas

1. Pada iterasi ke-1, berapa isi sel $A(2,3) = 10,13$
2. Pada iterasi ke-2, berapa isi sel $A(3,3) = -4,73$
3. Pada iterasi ke-3, berapa isi sel $A(3,3) = 7,09$
4. Berapakah determinan matriks $A(x) = -1701.60$
5. Berapakah nilai $X = 6.98$



$$A(x) = \begin{vmatrix} 40 & 0 & -3 \\ 15 & -6 & 9 \\ -23 & 7 & -3 \end{vmatrix}$$

ke - 1

$$A(x) = \begin{vmatrix} 40 & 0 & -3,00 \\ 0 & -6 & 10,13 \\ -23 & 7 & -3 \end{vmatrix}$$

ke - 2

$$A(x) = \begin{vmatrix} 40 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 10,13 \\ 0 & 7 & -4,73 \end{vmatrix}$$

ke - 3

$$A(x) = \begin{vmatrix} 40 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 10,13 \\ 0 & 0 & 7,09 \end{vmatrix}$$

Maka: $\text{Det } A(x) = -1701,60$
 $X = 6,98$

Carilah determinan $A(y)$ dengan menggunakan perkalian kofaktor kolom kedua

1. Berapa Kofaktor $Ay(1,2) = 9$
2. Berapa Kofaktor $Ay(2,2) = -12$
3. Berapa Kofaktor $Ay(3,2) = -45$
4. Berapa determinan $Ay(x) = 1215$
5. Berapa nilai $Y = -4,98$



$$A(y) =$$

4	40	-3
3	15	9
0	-23	-3

Carilah determinan $A(z)$ dengan menggunakan perkalian kofaktor baris ketiga

1. Berapa Kofaktor $Az(3,1) = 240$
2. Berapa Kofaktor $Az(3,2) = 60$
3. Berapa Kofaktor $Az(3,3) = -24$
4. Berapa determinan $A(z) = 972$
5. Berapa nilai Z = $-3,99$



$A(z) =$	4	0	40
	3	-6	15
	0	7	-23

SOAL 8

CARILAH NILAI X, Y, Z DENGAN MENGGUNAKAN ATURAN CRAMER

$$6x + y + 9z = 4$$

$$5x - 2y - 3z = -48$$

$$-7x + 6y - 2z = 71$$

KERJAKAN DI
PAPAN :)

- 
1. Carilah determinan A dengan menggunakan perkalian kofaktor kolom ketiga Berapa kofaktor $A(1,3)$? **16**
 2. Berapa kofaktor $A(2,3)$? **-43**
 3. Berapa kofaktor $A(3,3)$? **-17**
 4. Berapa determinan matriks A? **307**
- 

	4	1	9
A(x)=	-48	-2	-3
	71	6	-2

Carilah determinan $A(x)$ dengan merubah menjadi bentuk gauss

- Pada iterasi ke-1, berapa isi sel $Ax(1,3)$? 2.25
- Pada iterasi ke-2, berapa isi sel $Ax(2,2)$? 10
- Pada iterasi ke-3, berapa isi sel $Ax(3,3)$? -11.75
- Pada iterasi ke-4, berapa isi sel $Ax(3,3)$? 10.5
- Pada iterasi ke-5, berapa isi sel $Ax(3,3)$? -38.38
- Berapakah determinan $A(x)$? -1535.20
- Berapakah nilai X? -5

	4	1	9
$A(x) =$	-48	-2	-3
	71	6	-2



A B C D E F
G H I J K L M
P Q R S T
V W X



ABCDEF
GHIJKLMNOP
OPQRSTUVWXYZ

				1	0.25	2.25
ke-1	$A(x) =$	4	-48	-2	-3	
			71	6	-2	
				1	0.25	2.25
ke-2	$A(x) =$	4	0	10	105	
			71	6	-2	
				1	0.25	2.25
ke-3	$A(x) =$	4	0	10	105	
			0	-11.75	-161.75	



ABCDEF
GHIJKLMNOP
PQRSTUVWXYZ

ke-4	A(x)=	4	10	
------	-------	---	----	--

ke-5	A(x)=	4	10	
------	-------	---	----	--

ke-6	A(x)=	4	10	-38.38
------	-------	---	----	--------

Maka: $\text{Det } A(x) = 4 \times 10 \times (-38,38)$
 $= -1535,2$

Sehingga nilai x adalah -5

1	0.25	2.25
0	1	10.5
0	-11.75	-161.75

1	0.25	2.25
0	1	10.5
0	0	-38.38

1	0.25	2.25
0	1	10.5
0	0	1

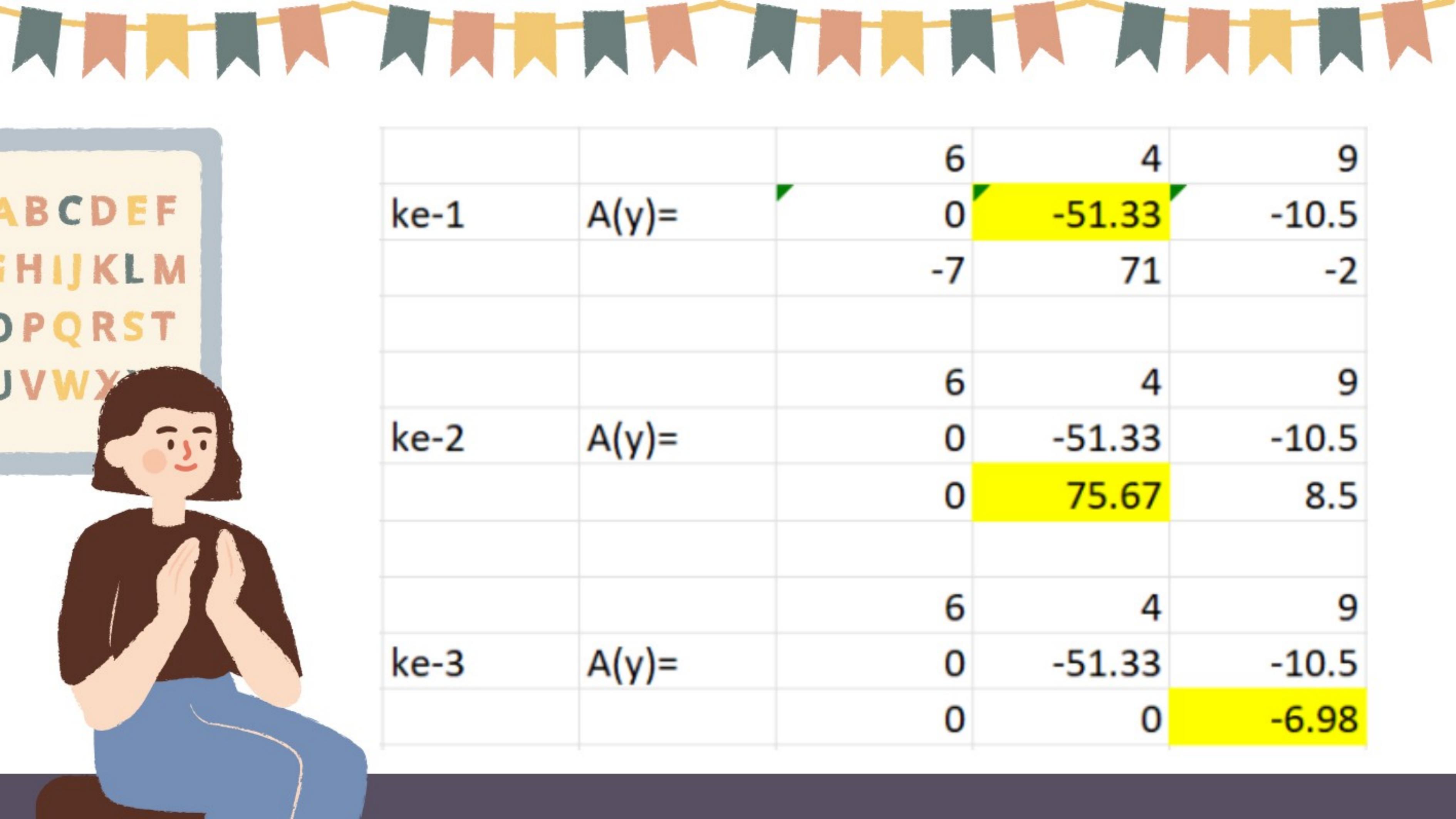
Carilah determinan $A(y)$ dengan merubah menjadi segitiga atas

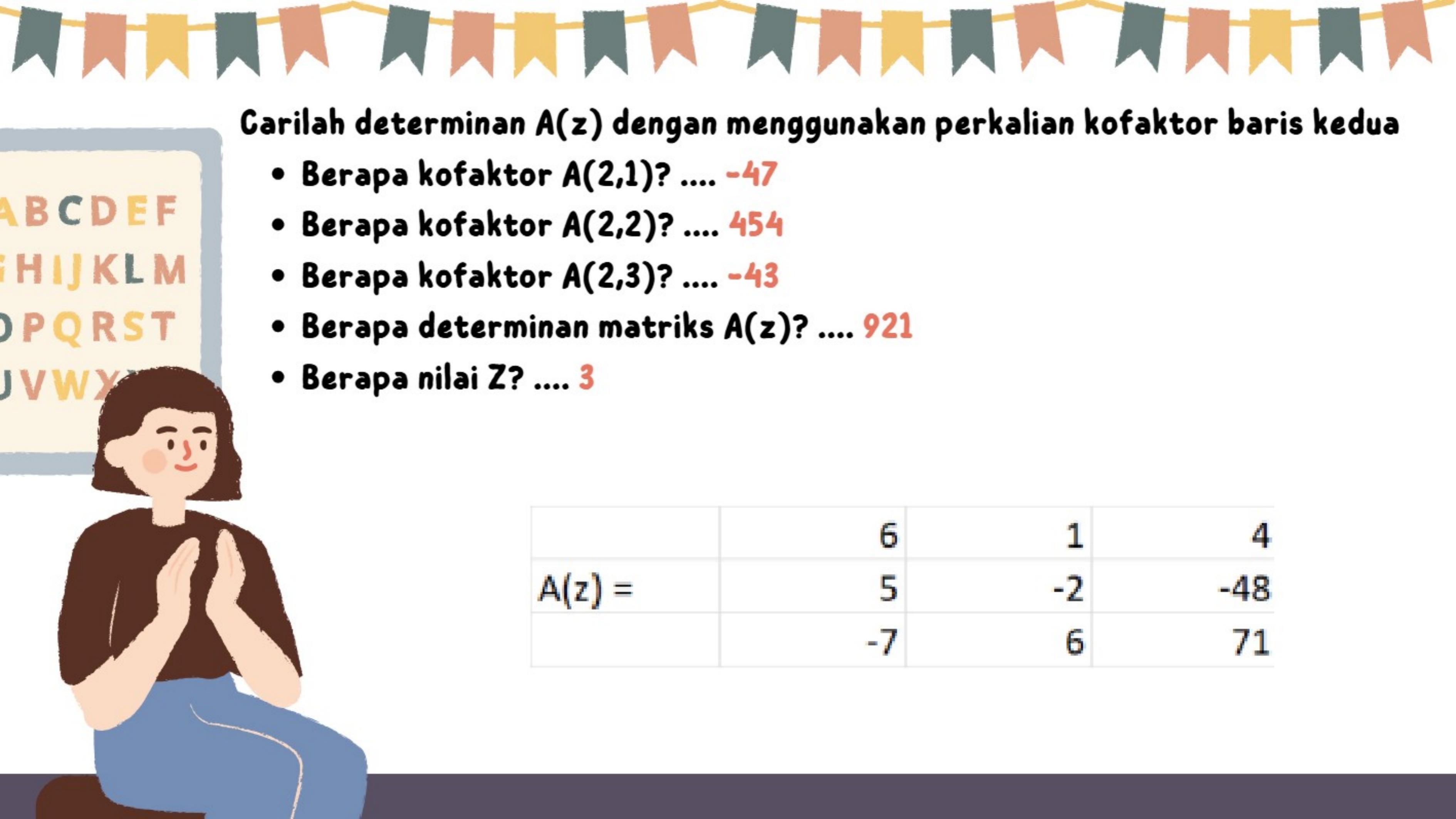
- Pada iterasi ke-1, berapa isi sel $Ay(2,2)$? -51.33**
- Pada iterasi ke-2, berapa isi sel $Ay(3,2)$? 75.67**
- Pada iterasi ke-3, berapa isi sel $Ay(3,3)$? -6.98**
- Berapakah determinan $A(y)$? 2149.70**
- Berapakah nilai Y ? 7**



$A(y) =$

6	4	9
5	-48	-3
-7	71	-2





Carilah determinan $A(z)$ dengan menggunakan perkalian kofaktor baris kedua

- Berapa kofaktor $A(2,1)$? **-47**
- Berapa kofaktor $A(2,2)$? **454**
- Berapa kofaktor $A(2,3)$? **-43**
- Berapa determinan matriks $A(z)$? **921**
- Berapa nilai Z? **3**

$A(z) =$	6	1	4
	5	-2	-48
	-7	6	71



RUANG SOLUSI DARI SISTEM PERSAMAAN LINIER $AX = B$

Dapat dicari dengan cara:

1. Eliminasi-substitusi
2. Eliminasi Gauss & substitusi balik
3. Eliminasi Gauss-Jordan
4. Menentukan invers A^{-1} , lalu $x = A^{-1}b$
5. Aturan Cramer



TUGAS KELOMPOK!!!

- Membuat contoh soal seputar determinan, boleh mengarang sendiri atau dari internet.
- Dijawab step by step seperti yang ada di presentasi tadi lalu dimasukkan ke PPT Tugas
- Nilai max PR adalah : 91,
- Jika ada yang tidak aktif, anggota yang aktif langsung memberi tau asisten, dan asisten akan mengurangi nilai nya

THANK
YOU!

