

## Pertemuan VIII

# PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA: Multi-Steps Methods

# Materi Minggu Ini

---

- Multi-Step Methods
  - Metode Heun MS ▶
  - Metode Adam ▶
  - Metode Milne ▶
  - Metode Adam-Moulton ▶
- *Tugas VIII* ▶

# Metode Heun MS (1)

Di dalam pendekatan *multi-steps*, metode Heun sering disebut sebagai *non self-starting Heun method*.

Hal ini dikarenakan, Heun *multi-steps* menggunakan  $y_{n-1}$  (bukan harga  $y_n$ ) untuk memprediksi harga  $y_{n+1}$ . Padahal harga  $y_{n-1}$  umumnya tidak tersedia sebagai informasi awal dalam permasalahan nilai awal.

Predictor :

$$y_{n+1}^{(0)} = y_{n-1}^{(m)} + f(x_n, y_n^{(m)}) \Delta x$$

Corrector :

$$y_{n+1}^{(j)} = y_n^{(m)} + \frac{f(x_n, y_n^{(m)}) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(j-1)})}{2} \Delta x$$

untuk  $j = 1, 2, \dots, m$

# Metode Adam <sup>(1)</sup>

---

Berbeda dari metode<sup>2</sup> satu-langkah, metode Adam memerlukan lebih dari satu informasi nilai fungsi untuk dapat menjalankan proses numerisnya.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

Dapat dilihat bahwa dibutuhkan informasi nilai  $f_n$ ,  $f_{n-1}$ ,  $f_{n-2}$ , dan  $f_{n-3}$ .

Kelebihan metode Adam adalah walaupun sederhana, namun memiliki tingkat akurasi yang lebih baik dibanding metode Euler.

Sementara kelemahannya adalah hanya mampu menyelesaikan permasalahan<sup>2</sup> yang bersifat *equispaced* saja.

# Metode Adam (2)



contoh : carilah nilai  $y(0,6)$  dari persamaan diferensial  $f(x, y) = dy / dx = y + x$   
jika diketahui :

x	0,2	0,3	0,4	0,5
y	1,2428	1,3997	1,5839	1,7974

$$h = x_2 - x_1 = 0,3 - 0,2 = 0,1$$

$$f_n = f_4 = y_4 + x_4 = 1,7974 + 0,5 = 2,2974$$

$$f_{n-1} = f_3 = y_3 + x_3 = 1,5836 + 0,4 = 1,9836$$

$$f_{n-2} = f_2 = y_2 + x_2 = 1,3997 + 0,3 = 1,6997$$

$$f_{n-3} = f_1 = y_1 + x_1 = 1,2428 + 0,2 = 1,4428$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

$$= 1,7974 + (0,1/24)[(55(2,2974) - 59(1,9836) + 37(1,6997) - 9(1,4428)]$$

$$= 2,0442$$

# Metode Milne (1)

---

Sebagai alternatif lain dari kelompok metode *multi-step*, Milne menawarkan akurasi yang lebih baik dibanding metode Adam. Namun dengan konsekuensi langkah penyelesaian yang lebih panjang.

Predictor :

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3} (2f_{n-2} - f_{n-1} + 2f_n)$$

Corrector :

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3} (f_{n-1} + 4f_n + f_{n+1})$$

Sama halnya dengan metode Adam, Milne juga hanya mampu menyelesaikan permasalahan<sup>2</sup> yang bersifat *equispaced* saja.

# Metode Milne (2)



contoh : carilah nilai  $y(0,6)$  dari persamaan diferensial  $f(x, y) = dy / dx = y + x$  jika diketahui :

x	0,2	0,3	0,4	0,5
y	1,2428	1,3997	1,5839	1,7974

$$h = x_2 - x_1 = 0,3 - 0,2 = 0,1$$

$$f_n = f_4 = y_4 + x_4 = 1,7974 + 0,5 = 2,2974$$

$$f_{n-1} = f_3 = y_3 + x_3 = 1,5836 + 0,4 = 1,9836$$

$$f_{n-2} = f_2 = y_2 + x_2 = 1,3997 + 0,3 = 1,6997$$

$$f_{n-3} = f_1 = y_1 + x_1 = 1,2428 + 0,2 = 1,4428$$

Prediksi :

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3} (2f_{n-2} - f_{n-1} + 2f_n)$$

$$= 1,2428 + [4 (0,1) / 3][2(1,6997) - 1,9836 + 2(2,2974)]$$

$$= 2,04421333$$

Koreksi :

$$f_{n+1} = y_{n+1} + x_{n+1} = 2,04421333 + 0,6 = 2,64421333$$

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3} (f_{n-1} + 4f_n + f_{n+1})$$

$$= 1,5836 + (0,1/3)[1,9836 + 4(2,2974) + 2,64421333]$$

$$= 2,04419$$

# Metode Adam-Moulton (1)

---

Juga sebagai alternatif lain dari kelompok metode *multi-steps*, Adam-Moulton merupakan perbaikan dari metode Adam, dengan mengadopsi pendekatan metode Milne. Yaitu menggunakan persamaan *predictor* dan *corrector*. Akurasi lebih baik dari metode Adam. Namun langkah penyelesaiannya lebih panjang.

Predictor :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

Corrector :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$

Sama dengan sebelumnya, Adam-Moulton hanya menyelesaikan permasalahan<sup>2</sup> *equispaced* saja.



# Metode Adam-Moulton (2)



contoh : carilah nilai  $y(0,6)$  dari persamaan diferensial  $f(x, y) = dy / dx = y + x$  jika diketahui :

x	0,2	0,3	0,4	0,5
y	1,2428	1,3997	1,5839	1,7974

$$h = x_2 - x_1 = 0,3 - 0,2 = 0,1$$

$$f_n = f_4 = y_4 + x_4 = 1,7974 + 0,5 = 2,2974$$

$$f_{n-1} = f_3 = y_3 + x_3 = 1,5836 + 0,4 = 1,9836$$

$$f_{n-2} = f_2 = y_2 + x_2 = 1,3997 + 0,3 = 1,6997$$

$$f_{n-3} = f_1 = y_1 + x_1 = 1,2428 + 0,2 = 1,4428$$

Prediksi :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \\ &= 1,7974 + (0,1/24)[55(2,2974) - 59(1,9836) \\ &\quad + 37(1,6997) - 9(1,4428)] \\ &= 2,04418 \end{aligned}$$

Koreksi :

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= y_{n+1} + x_{n+1} \\ &= 2,04418 + 0,6 = 2,64418 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{24} (9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} - f_{n-2}) \\ &= 1,7974 + (0,1/24)[9(2,64418) \\ &\quad + 19(2,2974) - 5(1,9836) + 1,6997] \\ &= 2,04419 \end{aligned}$$

# Latihan

---

Carilah nilai  $y(0,6)$  dari persamaan diferensial di bawah ini:

$$f(x,y) = \frac{dy}{dx} = x + y$$

1. Menggunakan metode Adam
2. Menggunakan metode Milne
3. Menggunakan metode Adam-Moulton

Jika diketahui:

s	x	y
1	0,2	1,2428
2	0,3	1,3997
3	0,4	1,5839
4	0,5	1,7974