Pertemuan I

# PENGANTAR KOMPUTASI NUMERIK

# Materi Minggu Ini

- Pengertian Komputasi Numerik
- Pengertian Akurasi & Presisi
- Aturan Pembulatan
- Pengertian "Kesalahan"
- Deret Taylor
- *Tugas I*

# Apa Itu Komputasi Numerik? (1)

Model Matematis banyak digunakan untuk memformulasikan permasalahan-permasalahan riil.

Terdapat banyak pilihan Model Matematis, diantaranya: Automata, Sistem Persamaan Linier, Sistem Persamaan Non-Linier, dsb.

Selain lebih fleksibel, model seringkali digunakan untuk meminimumkan resiko.

# Apa Itu Komputasi Numerik? (2)

**Ada model yang dapat diselesaikan secara analitis (bisa menghasilkan solusi eksak), ada pula yang tidak.**

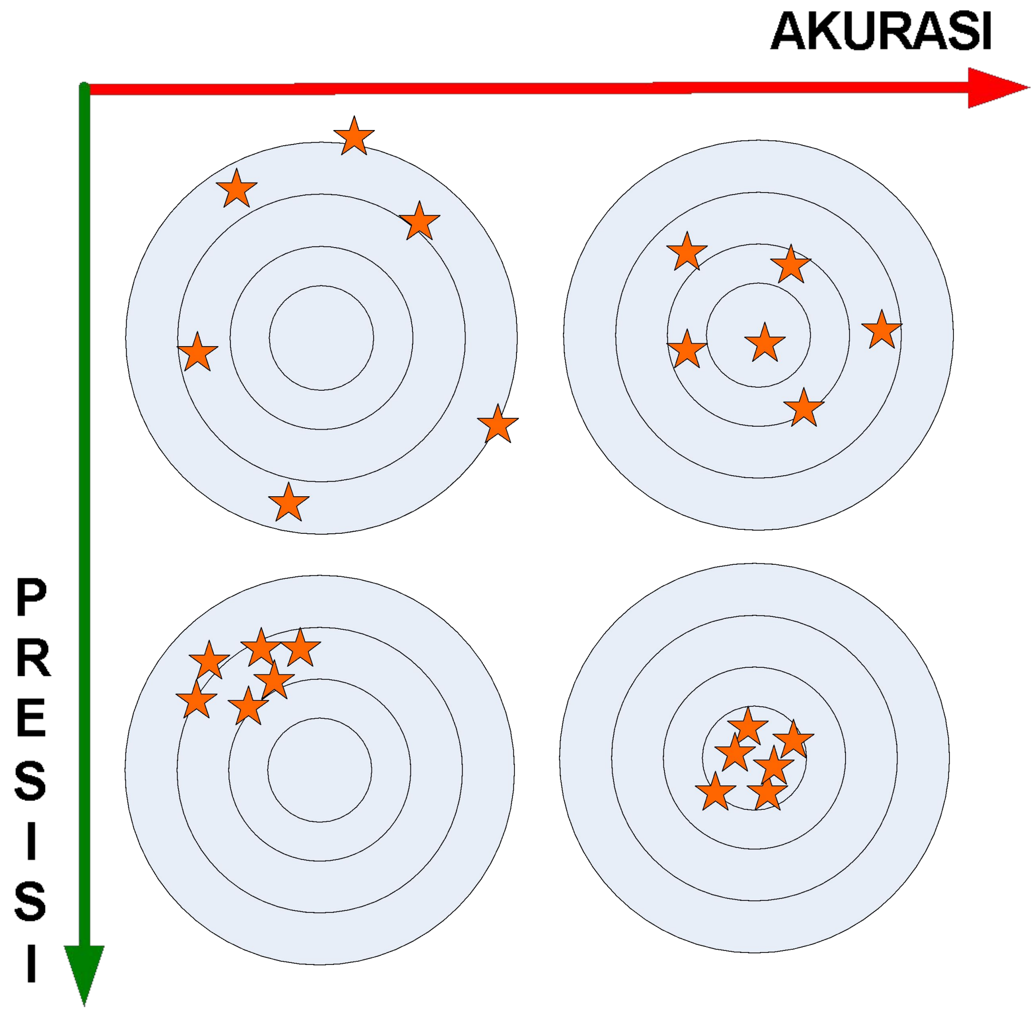
**Sistem Persamaan Non-Linier berukuran besar adalah contoh model yang biasanya tidak dapat (sulit) diselesaikan secara analitis.**

**Model yang demikian hanya dapat diselesaikan melalui pendekatan/aproksimasi yang melibatkan banyak operasi aritmatis & perhitungan$^2$ iteratif.**

**Teknik/cara inilah yang disebut <u>Komputasi Numerik</u>**

# Akurasi dan Presisi

Perhatikan gambar di bawah. Apa pendapat anda mengenai istilah "Akurasi" dan "Presisi" ?



# Aturan Pembulatan (1)

Membulatkan bilangan sampai dengan n bilangan berarti, dapat mengacu pada aturan berikut :

a. Jika bilangan yang dibuang kurang dari setengah satuan, maka bilangan ke n tetap;

b. Jika bilangan yang dibuang lebih dari setengah satuan, maka bilangan ke n akan bertambah 1;

c. Jika bilangan yang dibuang tepat setengah satuan, maka bilangan ke n akan tetap (jika n adalah bilangan genap). Sebaliknya n akan bertambah 1 (jika n adalah bilangan ganjil);

Jika sebuah bilangan sudah dibulatkan, maka selanjutnya bilangan tersebut hanya dikatakan benar sampai n bilangan berarti!

contoh : bilangan $\pi$ = 3,14159265358979…

dibulatkan sampai 4 bilangan berarti = 3.142
dibulatkan sampai 6 bilangan berarti = 3.14159

# Aturan Pembulatan (2)

## Pembulatan pada penjumlahan dan pengurangan 2 bilangan

Bilangan yang ketelitiannya lebih tinggi dibulatkan hingga jumlah angka berarti (di belakang tanda desimal) <u>sama dengan</u> bilangan yang ketelitiannya paling rendah.

## Pembulatan pada penjumlahan dan pengurangan banyak bilangan

Bilangan-bilangan yang ketelitiannya lebih tinggi dibulatkan hingga jumlah angka berarti (di belakang tanda desimal) 1 lebih banyak dibanding bilangan-bilangan yang ketelitiannya paling rendah.

Kemudian hasilnya dibulatkan sampai jumlah angka berarti (di belakang tanda desimal) <u>sama dengan</u> bilangan yang ketelitiannya paling rendah.

## Pembulatan pada perkalian, pembagian dan perpangkatan

Bilangan-bilangan yang ketelitiannya lebih tinggi dibulatkan hingga jumlah angka berarti 1 lebih banyak dibanding bilangan-bilangan yang ketelitiannya paling rendah.

Kemudian hasilnya dibulatkan sampai jumlah angka berarti <u>sama dengan</u> bilangan yang ketelitiannya paling rendah.

# Aturan Pembulatan (3)

contoh : Kurangkan 779,8 dengan 46,365.
779,8 – 46,4 = 733,4

contoh : Jumlahkan 561,32 ; 491,6 ; 86,954 ; 3,9462. Diketahui semua bilangan benar sampai angka terakhir.
561,32 + 491,6 + 86,95 + 3,95 = 1143,82 ≈ 1143,8

contoh : Jumlahkan 36490 ; 994 ; 557,32 ; 29500 ; 86939. Diketahui 29500 hanya memiliki 3 angka berarti.
36490 + 990 + 560 + 29500 + 86940 = 154480 ≈ 154500

contoh : Kalikan 349,1 dan 863,4
349,1 x 863,4 = 301412,94 ≈ 301400

contoh : Bagilah 56,3 dengan √5
diambil √5 = 2,236, sehingga 56,3 : 2,236 = 25,178890… ≈ 25,2

# Pengertian “Kesalahan” (1)

Penyelesaian secara numerik terhadap persamaan matematis akan menghasilkan nilai perkiraan yang mendekati nilai sebenarnya / eksak (yang diperoleh melalui penyelesaian secara analitis).

Artinya, ada kemungkinan nilai perkiraan akan mengandung kesalahan jika dibandingkan nilai eksaknya. Dan secara umum, bentuk kesalahan numerik ini dibedakan menjadi 3 macam :

a. Kesalahan Bawaan

   kesalahan dari nilai data. Salah tulis, salah salin, salah baca, dlsb;

b. Kesalahan Pembulatan

   karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan;

c. Kesalahan Pemotongan

   karena tidak dilakukannya penghitungan sesuai dengan prosedur yang benar. misalnya menghentikan proses tak-hingga menjadi proses berhingga (deret Maclaurin : $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \ldots$);

# Pengertian “Kesalahan” (2)

Sementara itu, hubungan antara nilai eksak, nilai perkiraan dan kesalahannya dapat diberikan dalam bentuk-bentuk berikut :

a. Kesalahan Absolut

tidak menunjukkan besarnya tingkat kesalahan.

$E_a = v_a - v_e$

b. Kesalahan Relatif

menunjukkan besarnya tingkat kesalahan.

$E_r = E_a / v_a$ atau $E_r = (E_a / v_a) \times 100\%$

c. Kesalahan Perkiraan

jika nilai eksak tidak diketahui, maka yang dapat dilakukan adalah menghitung kesalahan berdasar nilai perkiraan terbaik.

$E_e = (E_e^* / v_e^*) \times 100\%$

untuk proses iteratif : $E_e = [(v_e^{n+1} - v_e^{n})/ v_e^{n+1}] \times 100\%$

$E_a$ = kesalahan absolut
$E_r$ = kesalahan relatif
$E_e$ = kesalahan perkiraan
$v_a$ = nilai absolut
$v_e$ = nilai perkiraan
$E_e^*$ = kesalahan perkiraan thd $v_e^*$
$v_e^*$ = nilai perkiraan terbaik
$v_e^n$ = nilai perkiraan ke n
$v_e^{n+1}$ = nilai perkiraan ke n+1

# Pengertian “Kesalahan” (3)

contoh : Pengukuran panjang sebuah jembatan dan sebuah pensil memberikan hasil masing-masing 9.999 cm dan 9 cm.
Jika panjang eksak jembatan adalah 10.000 cm dan pensil 10 cm, hitunglah kesalahan absolut dan kesalahan relatifnya.

**Kesalahan absolut**

Jembatan : $E_a = v_a - v_e = 10.000 - 9.999 = 1$ cm
Pensil : $E_a = 10 - 9 = 1$ cm

**Kesalahan relatif**

Jembatan : $E_r = (E_a/p) \times 100\% = (1/10.000) \times 100\% = 0.01\%$
Pensil : $E_r = (1/10) \times 100\% = 10\%$

Dapat dilihat bahwa kesalahan relatif lebih bisa memberikan gambaran mengenaidampak kesalahan terhadap suatu obyek (ketimbang kesalahan absolut).

Dari penghitungan kesalahan relatif dapat disimpulkan bahwa hasil pengukuranterhadap jembatan lebih memuaskan dibanding hasil pengukuran pada pensil.

# Deret Taylor (1)

Deret Taylor sering dipakai sebagai dasar untuk menyelesaikan banyak permasalahan numerik (khususnya yang berkaitan dengan persamaan diferensial).

Dengan menggunakan nilai dan turunan fungsi f(x) di sekitar titik $x_i$, deret Taylor dapat memberikan rumusan untuk meramalkan harga suatu fungsi f(x) pada titik ($x_{i+1}$).

Bentuk umum deret Taylor adalah sebagai berikut :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + f''(x_i)/2! \,.\, (x_{i+1} - x_i)^2 + \ldots + f^n(x_i)/n! \,.\, (x_{i+1} - x_i)^n + R_n$$

dengan

$$Rn = [\ f^{(n+1)}(\xi) \ / \ (n+1)!\ ] \,.\, (x_{i+1} - x_i)^{n+1}$$

dimana :

$f(x_i)$ = fungsi di titik $x_i$

$f(x_{i+1})$ = fungsi di titik $x_{i+1}$

f', f'', … = turunan fungsi f

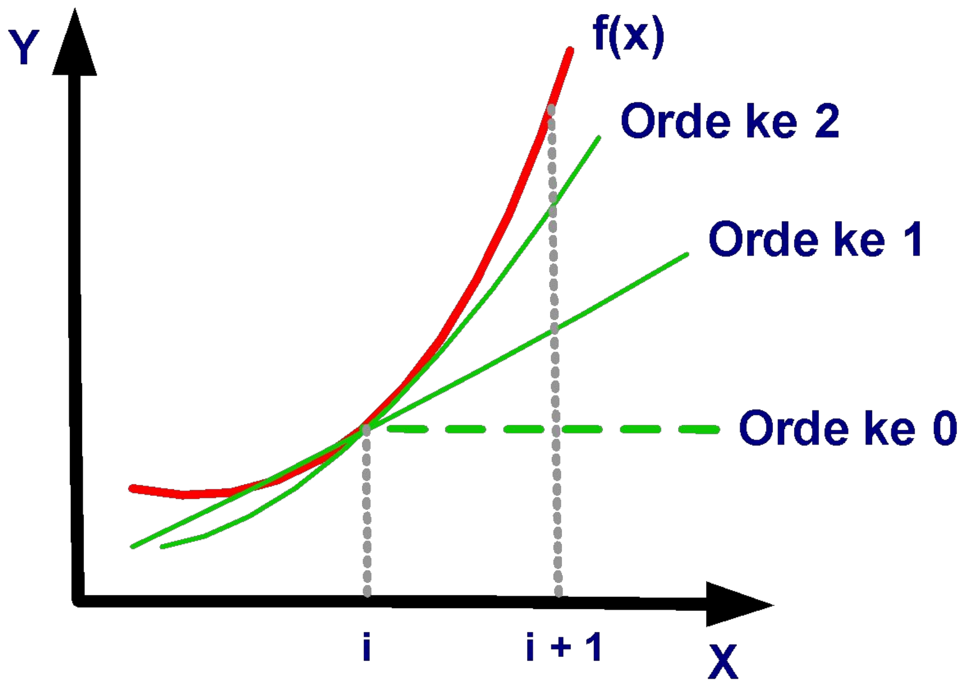
$R_n$ = kesalahan pemotongan

$\xi$ = harga x yang terletak di antara $x_i$ dan $x_{i+1}$

# Deret Taylor (2)

Deret Taylor sangat baik digunakan untuk melakukan pendekatan terhadap sebuah fungsi yang belum kita ketahui karakteristiknya

Deret Taylor memiliki suku tak berhingga, sehingga kita dapat melakukan pemotongan pada sebarang suku untuk mempelajari perilaku deret tersebut dalam membentuk dan memaknai suku-sukunya.



# Deret Taylor (3)

Jadi jika deret Taylor dapat ditulis seperti berikut :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + f''(x_i)/2! \; . \; (x_{i+1} - x_i)^2 + \ldots + f^n(x_i)/n! \; . \; (x_{i+1} - x_i)^n + R_n$$

Maka orde ke-0 (*zero order*) adalah :

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i)$$

Orde ke-1 (*first order*) adalah :

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Orde ke-2 (*second order*) adalah :

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + f''(x_i)/2! \; . \; (x_{i+1} - x_i)^2$$

Dan orde ke-3 (*third order*) adalah :

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + f''(x_i)/2! \; . \; (x_{i+1} - x_i)^2 + f'''(x_i)/3! \; . \; (x_{i+1} - x_i)^3$$

# Deret Taylor (4)

contoh : Gunakan perluasan deret Taylor orde ke-0 hingga orde ke-4 untuk menaksir fungsi : $f(x) = -0{,}1x^4 - 0{,}15x^3 - 0{,}5x^2 - 0{,}25x + 1{,}2$

jika diketahui $x_0 = 0$ dan $h = x_{i+1} - x_i = 1$

atau, hitung nilai taksiran fungsi pada $x_1 = 1$.

solusi :

perilaku fungsi di atas adalah seperti berikut :

untuk $x = 0 \rightarrow f(0) = 1{,}2$

untuk $x = 1 \rightarrow f(1) = 0{,}2$


jadi tugas kita sekarang adalah melakukan perhitungan numerik untuk mendekati nilai 0,2 tersebut.

perlu diingat bahwa pada banyak kasus, perilaku fungsi yang asli seringkali tidak diketahui!

# Deret Taylor (5)

Orde ke-0 (n = 0) : $f(x_{i+1}) = f(x_i)$

$f(0) = 1,2$

berarti kesalahan pemotongannya adalah : $E_a = v_a - v_e = 0,2 - 1,2 = -1,0$

Orde ke-1 (n = 1) : $f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$

$f(0) = 1,2$

$f'(0) = -0,4(0.0)^3 - 0,45(0,0)^2 - 1,0(0,0) - 0,25 = -0,25$

$f(x_{i+1}) = 1,2 - 0,25(x_{i+1} - x_i)$

$f(1) = 0,95$

$E_a = 0,2 - 0,95 = -0,75$

Orde ke-2 (n = 2) : $f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + [\ f'(x_i)/2!\ ](x_{i+1} - x_i)^2$

$f(0) = 1,2$

$f'(0) = -0,25$

$f''(0) = -1,2(0,0)^2 - 0,9(0,0) - 1,0 = -1,0$

$f(x_{i+1}) = 1,2 - 0,25(x_{i+1} - x_i) - 0,5(x_{i+1} - x_i)^2$

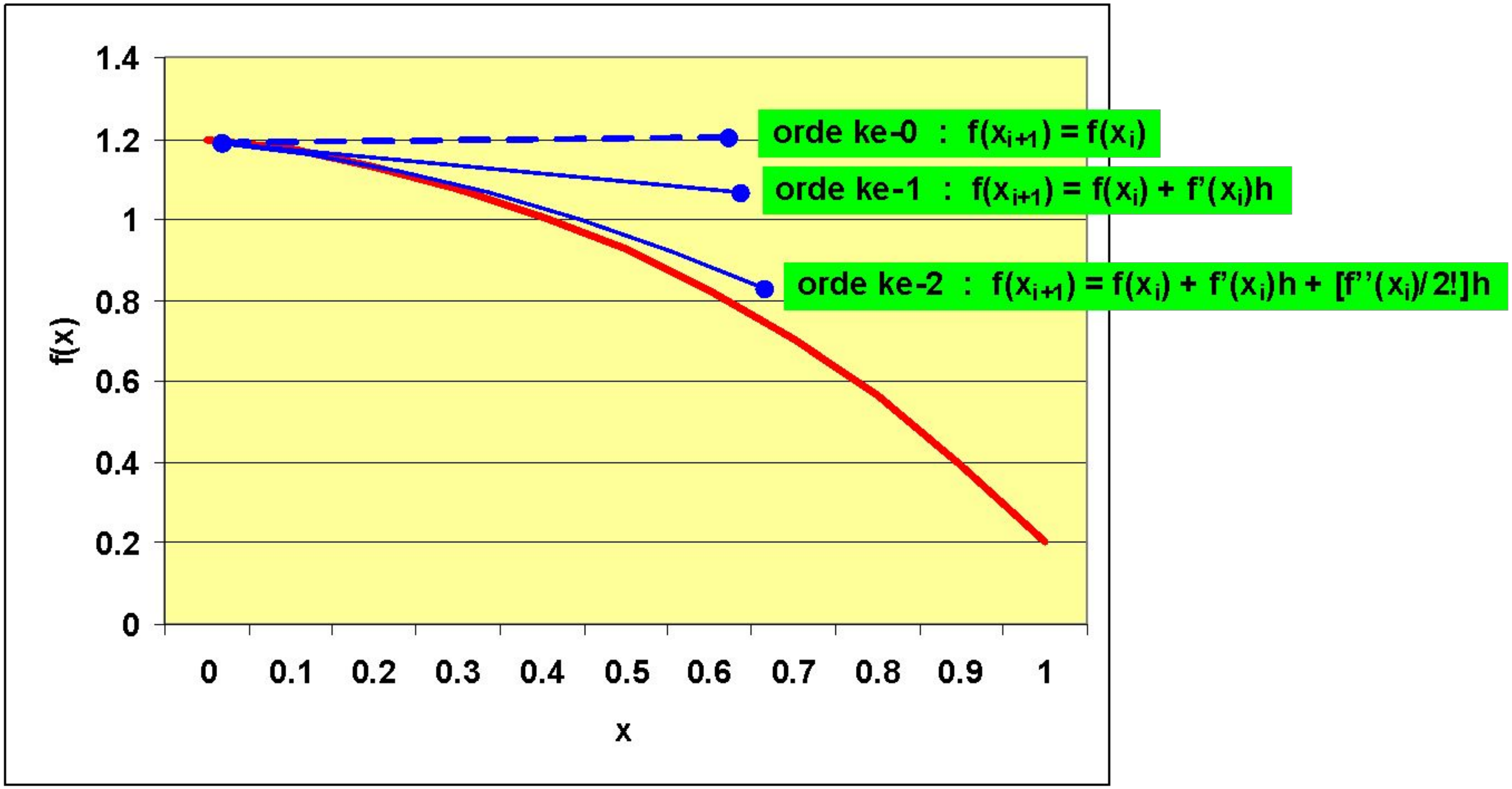
$f(1) = 0,45$

$E_a = 0,2 - 0,45 = -0,25$

# Deret Taylor (6)

Turunan ketiga dan keempat pada suku-suku deret Taylor menghasilkan persamaan yang sama. Dan nilai fungsi orde ke-4 pada $x_{i+1}$ = 1 adalah sebuah taksiran yang sudah mendekati nilai yang diharapkan ($R_4$ = 0) :

$f(1) = 1.2 - 0.25(1) - 0.5(1)^2 - 0.15(1)^3 - 0.10(1)^4 = 0.2$



# Latihan (1)

1. Berapa jumlah (dan sebutkan) bilangan angka berarti dari bilangan berikut :
   a. $0,84 \times 10^2$ d. 0,00460
   b. 70,0 e. $8,0 \times 10^3$
   c. 0,04600 f. 8.000

2. Bulatkan bilangan berikut sampai 3 angka berarti :
   a. 8.755 d. $5,445 \times 10^3$
   b. $0,368124 \times 10^2$ e. 0,999500
   c. 4.255,0002 f. 48,365

3. Operasikan bilangan-bilangan berikut dan tuliskan hasilnya dengan jumlah bilangan berarti yang benar :
   a. $0,00432 + (25,1 \times 10^{-3}) + (10,322 \times 10^{-2})$
   b. $(4,68 \times 10^6) - (8,2 \times 10^2)$
   c. $(7,7 \times 10^{-5}) - (5,409 \times 10^{-6}) + (7,0 \times 10^{-4})$
   d. $(8,38 \times 10^5) \times (6,9 \times 10^{-5})$
   e. $\left| (8,38 \times 10^4) \times (6,90 \times 10^{-4}) \right|$
   f. $[(4,68 \times 10^{-6}) - (4,45 \times 10^{-5})] / (7,777 \times 10^3) + 9,6$
   g. $[(4,81 \times 10^{-3}) / [(6,9134 \times 10^3) + 32,26]] - 6,7845 \times 10^{-6}$
   h. $[58,6 \times (12 \times 10^{-6}) - (208 \times 10^{-6}) \times 1.801] / (468,94 \times 10^{-6})$

# Latihan (2)

4. Gunakan perluasan deret Taylor orde ke-0 sampai orde ke-4 untuk menaksir nilai f(2) dari fungsi : $f(x) = e^{-x}$
   Gunakan titik basis perhitungan x = 1. Dan hitung kesalahan relatif untuk setiap langkah aproksimasi.

5. Gunakan perluasan deret Taylor orde ke-0 sampai orde ke-3 untuk menaksir nilai f(3) dari fungsi : $f(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88$
   Gunakan titik basis perhitungan x = 2. Dan hitung kesalahan relatif untuk setiap langkah aproksimasi.

6. Gunakan perluasan deret Taylor orde ke-0 sampai orde ke-4 untuk menaksir nilai f(4) dari fungsi : $f(x) = \ln x$
   Gunakan titik basis perhitungan x = 2. Dan hitung kesalahan relatif untuk setiap langkah aproksimasi.