Pertemuan VI

INTEGRASI NUMERIK

Materi Minggu Ini

- Integrasi Numerik

  Metode Trapezoida

  Metode Simpson

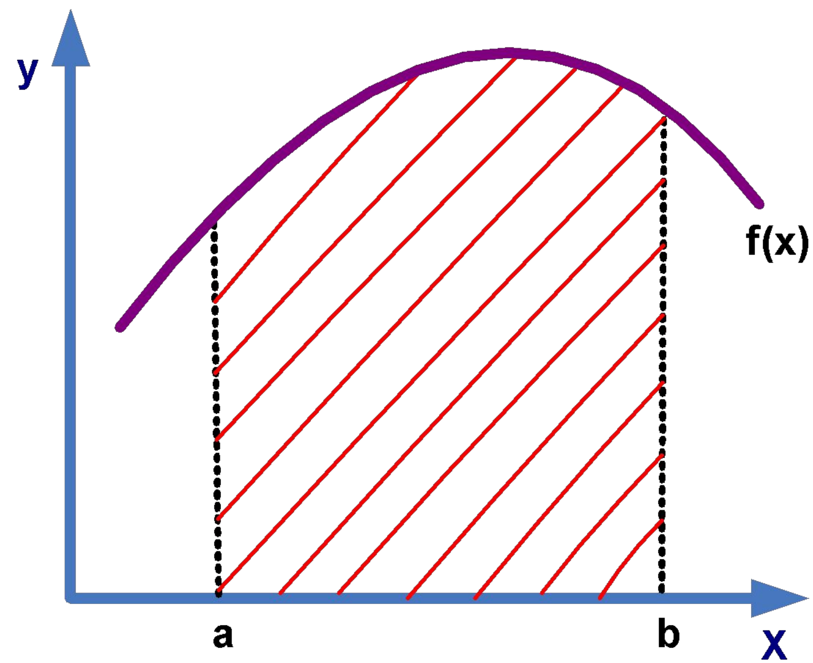
- Tugas VI

Integrasi Numerik (1)

Integrasi suatu fungsi secara umum dinyatakan sebagai :

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

yang memberikan makna nilai luasan/area yang dibatasi oleh fungsi f(x), sumbu x, x = a, dan x = b.



Integrasi Numerik (2)

Menyelesaikan permasalahan integrasi secara analitis sudah anda pelajari. Yang belum adalah mencari nilai integral sebuah fungsi melalui pendekatan numeris.

Integrasi numeris diperlukan, jika :

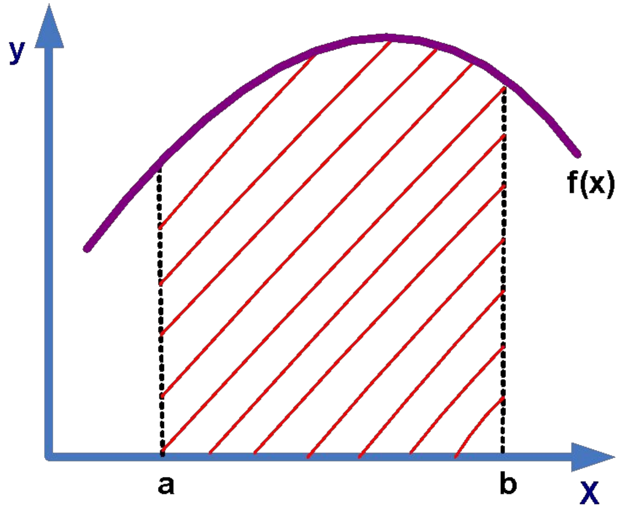
Integrasi analitis tidak mungkin (terlalu sulit) dilakukan; atau

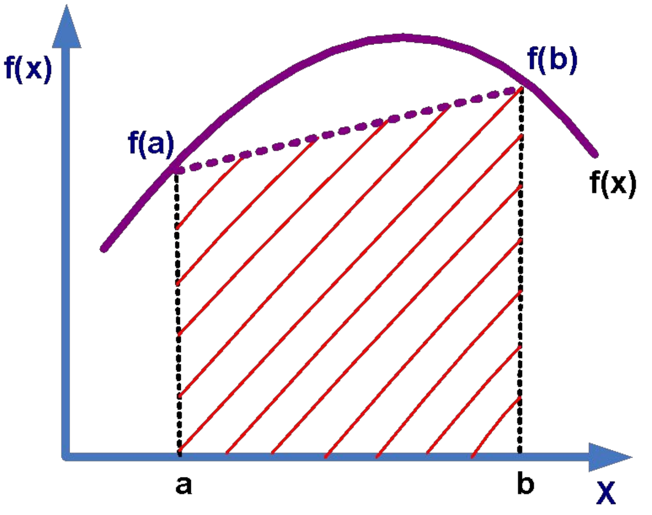
Fungsi asal tidak diketahui, tapi tersedia himpunan nilai fungsinya.

Konsep penyelesaian integrasi secara numeris sebenarnya mudah, yaitu kita bagi luasan dimaksud menjadi pilar^2/pias^2. Dan nilai integrasi yang kita cari adalah jumlah luasan dari semua pias tersebut.

Secara umum, metode integrasi numeris dapat dibedakan menjadi 2, yaitu kelompok metode Newton-Cotes dan metode Gauss.

Metode Trapezoida (1)



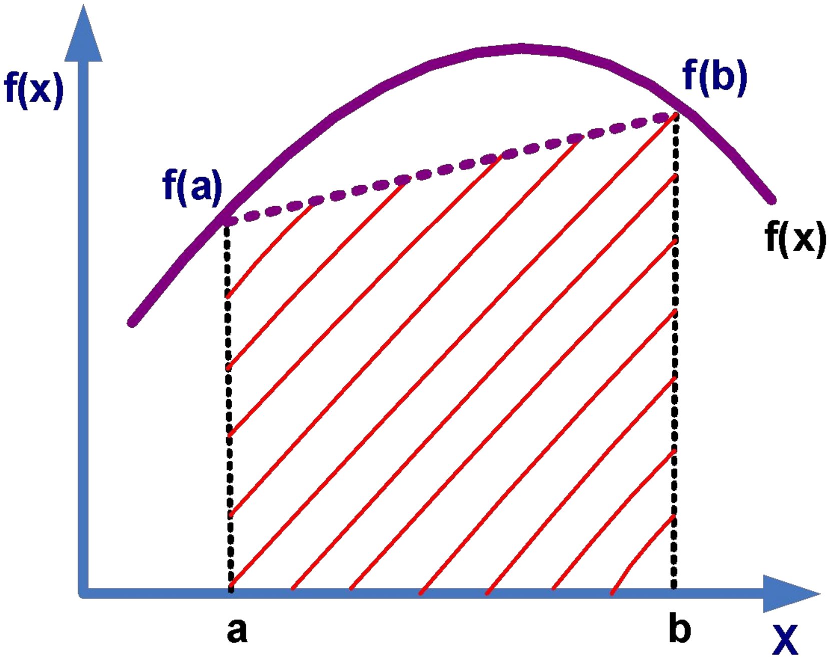


Cara termudah mempelajari integrasi numerik adalah dengan mengaplikasikan metode Trapezoida. Metode ini masuk dalam kelompok metode Newton-Cotes orde-1.

Disebut orde-1 karena kita akan menggantikan kurva lengkung fungsi f(x) dengan garis lurus (lihat garis lurus antara f(a) dan f(b)).

Sehingga integrasi f(x) adalah luasan trapesium yang dibatasi oleh sumbu X, f(a), f(b), dan garis lurus yang menghubungkan f(a) dengan f(b).

Metode Trapezoida (2)



Secara geometris, luasan arsiran dapat didekati sebagai berikut :

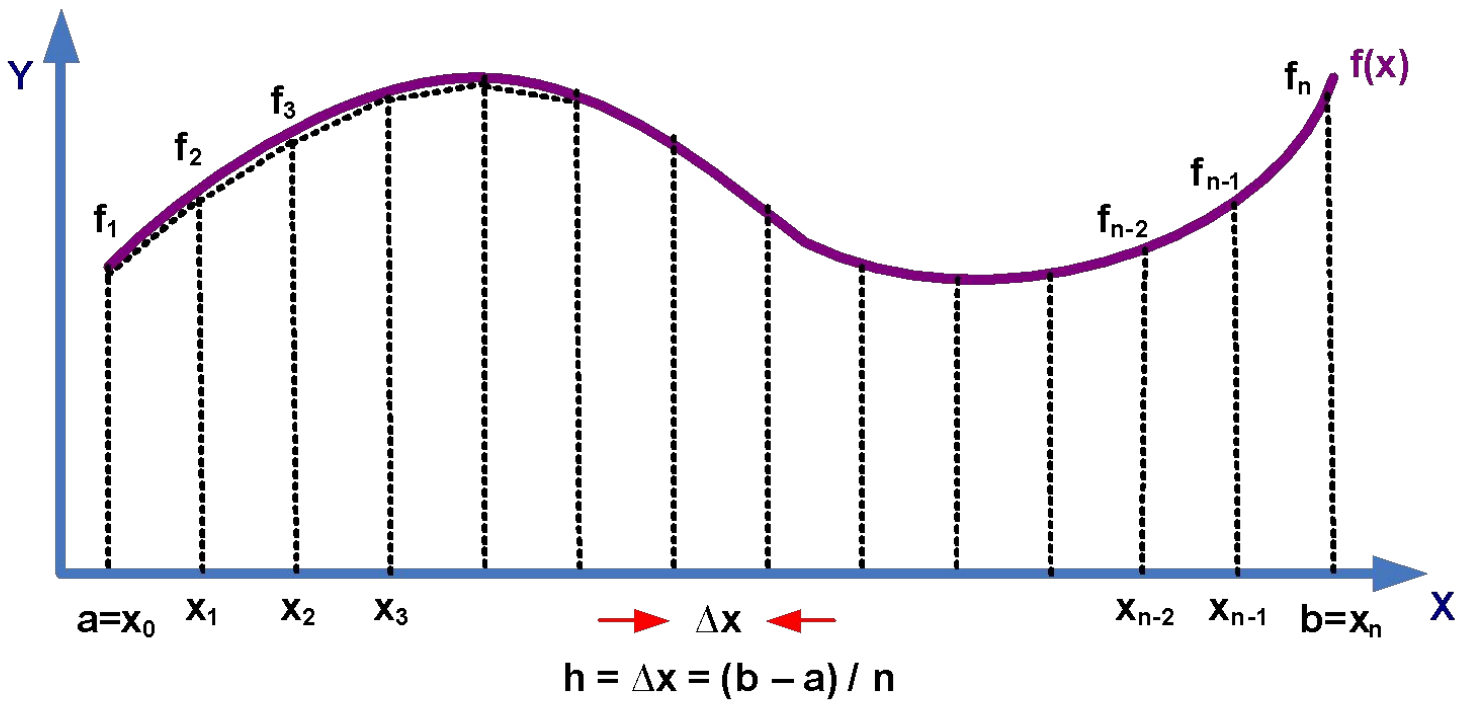
$$I \approx (b - a)\,\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Tapi pendekatan dengan 1 buah trapesoida akan menyebabkan kesalahan taksiran yang cukup besar (lihat area yang tidak terarsir di antara kurva f(x) dengan garis f(a)-f(b)).

Metode Trapezoida (3)

Alternatif yang lebih baik adalah dengan membuat banyak pias/trapezoids. Dengan demikian ruang yang tidak *ter-cover* arsiran dapat diminimalkan. (selain juga untuk mengantisipasi bentuk kurva fungsi yang kompleks)

Didn't know why, tetapi ada referensi yg menyebutkan bahwa metode Trapezoida lebih efektif jika menggunakan jumlah pias ganjil.



Metode Trapezoida (4)

Integral total untuk permasalahan *equispaced* dapat ditulis sebagai :

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

atau,

$$I = \Delta x \frac{f(x_1) + f(x_0)}{2} + \Delta x \frac{f(x_2) + f(x_1)}{2} + \ldots + \Delta x \frac{f(x_n) + f(x_{n-1})}{2}$$

atau,

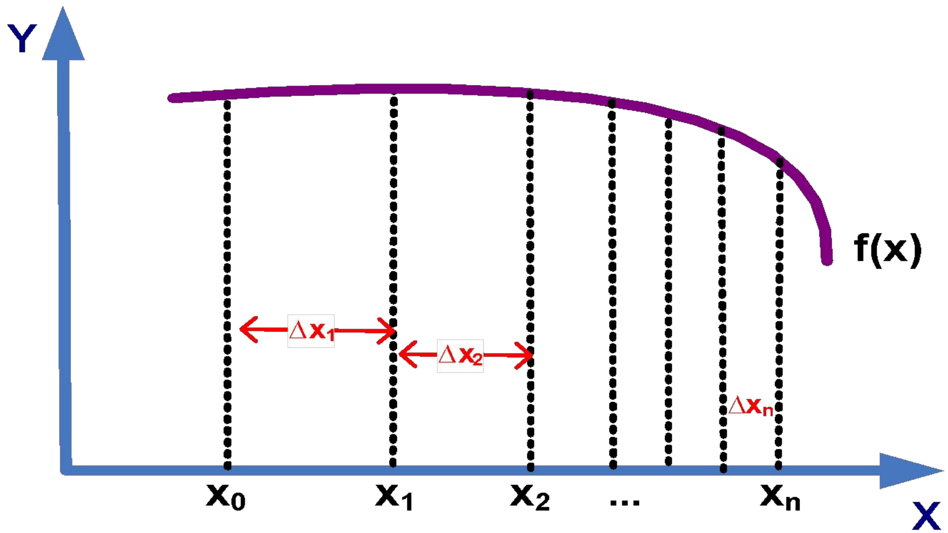
$$I = \frac{\Delta x}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

atau jika fungsi koreksi-ujung diakomodasi ke dalam persamaan Trapezoida :

$$I = \frac{\Delta x}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] - \frac{\Delta x^2}{12} \left[f'(x_n) - f'(x_0) \right]$$

Metode Trapezoida (6)

Jika dijumpai kasus dimana harus dibuat pias² dengan lebar tidak sama (*non equispaced*), maka metode Trapezoida dapat digunakan dengan sedikit modifikasi.



$$I = \Delta x_1 \frac{f(x_1) + f(x_0)}{2} + \Delta x_2 \frac{f(x_2) + f(x_1)}{2} + \ldots + \Delta x_n \frac{f(x_n) + f(x_{n-1})}{2}$$

atau,

$$I = \frac{(x_1 - x_0)}{2}(f_1 + f_0) + \frac{(x_2 - x_1)}{2}(f_2 + f_1) + \ldots + \frac{(x_n - x_{n-1})}{2}(f_n + f_{n-1})$$

Metode Trapezoida (5)

contoh :

hitunglah $I = \int_0^4 e^x \, dx$ dengan metode Trapezoida.

secara analitis :

$I = e^4 - e^0 = 53{,}598150$

Integrasi Trapezoida menggunakan 1 pias (lebar * rerata tinggi) :

$I = (b - a)\ [(f(b) - f(a) / 2\ ]$

$I = (4 - 0)[(e^4 - e^0)/2] = 111{,}1963$

$Er = [(53{,}598150 - 111{,}1963)/53{,}598150] \times 100\% = 107{,}46\%$

Integrasi Trapezoida menggunakan 4 pias (asumsi lebar pias (Δx) = 1) :

$I = \frac{1}{2}\ [\ e^0 + 2(e^1 + e^2 + e^3) + e^4\ ] = 57{,}991950$

$Er = [(53{,}598150 - 57{,}991950)/53{,}598150] \times 100\% = 8{,}2\%$

Integrasi Trapezoida menggunakan fungsi koreksi-ujung :

$I = \frac{1}{2}\ [\ e^0 + 2(e^1 + e^2 + e^3) + e^4\ ] - 1/12\ (e^4 - e^0) = 53{,}525437$

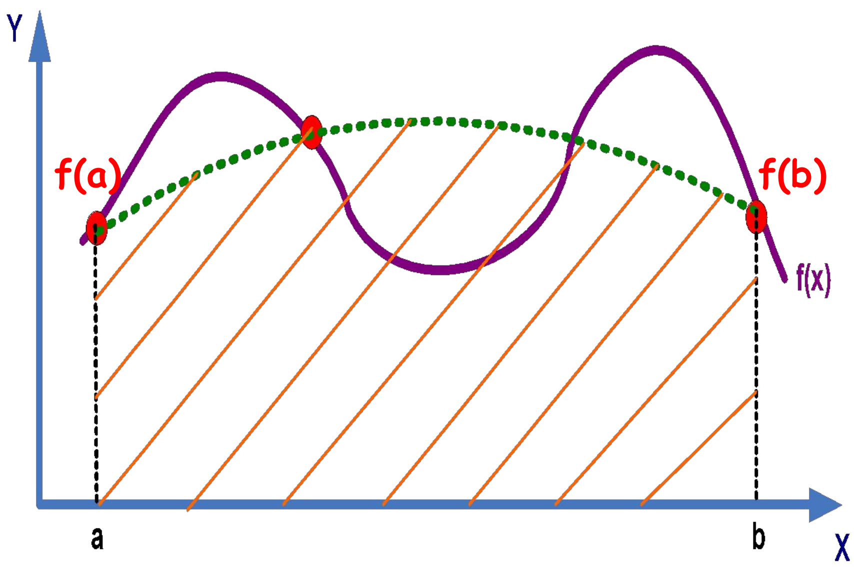
$Er = [(53{,}598150 - 53{,}535437)/53{,}598150] \times 100\% = 0{,}14\%$

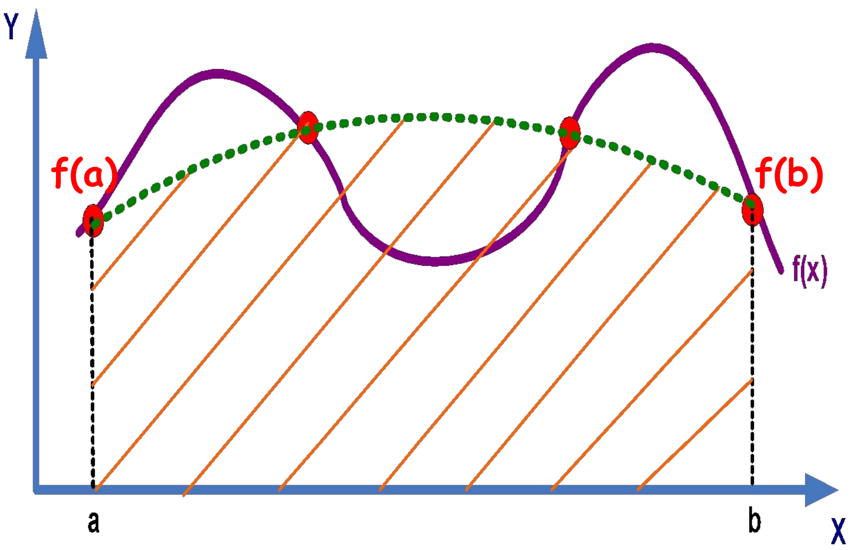
Metode Simpson (1)

Alternatif lain untuk mendapatkan hasil pendekatan integrasi numeris adalah dengan menggunakan polynomial ber-orde lebih tinggi (ingat, metode Trapezoid hanya memanfaatkan persamaan berderajat 1).

Jika ditambahkan 1 titik diantara f(a) dan f(b), maka ada 3 titik yang dapat dihubungkan oleh sebuah polynom ber-orde 2.

Atau bisa juga digunakan polynom ber-orde 3, jika ditambahkan 2 titik di antara f(a) dan f(b).





Metode Simpson (2)

Aturan/metode Simpson menyediakan 2 pilihan pendekatan, yaitu Aturan Simpson 1/3 dan Aturan Simpson 3/8.

Aturan Simpson 1/3 menggunakan rumus integral Newton-Cotes ber-orde 2 (yang diturunkan dari deret Taylor). Sementara Aturan Simpson 3/8 memanfaatkan polynomial Lagrange ber-orde 3.

Aturan Simpson 1/3 optimal jika menggunakan jumlah pias genap. Sedangkan Aturan Simpson 3/8 optimal jika menggunakan jumlah pias kelipatan 3.

Namun kelemahan metode ini adalah hanya dapat digunakan untuk permasalahan yang bersifat *equispaced* saja.

Metode Simpson (3)

Integrasi Simpson 1/3 dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$I = \frac{\Delta x}{3} [f(x_0) + 4 (f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1})) + 2 (f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-2}) + f(x_n))]$$

Sedangkan Integrasi Simpson 3/8 adalah seperti berikut :

$$I = \frac{3\Delta x}{8} [f(x_0) + 3 (f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_5) + \dots + f(x_{n-1})) + 3 (f(x_3) + f(x_6) + \dots + f(x_{n-3}) + f(x_n))]$$

Metode Simpson (4)

contoh :

hitunglah $I = \int_0^4 e^x \, dx$ dengan metode Simpson 1/3.

secara analitis :

$I = e^4 - e^0 = 53{,}598150$

Integrasi Simpson 1/3 menggunakan 2 pias (krn Simpson paling sedikit membutuhkan 3 titik). Itu berarti $\Delta x = (b - a)/2$:

$I = ((b - a)/2 \;.\; 1/3) \, [\, f(a) + 4f(c) + f(b) \,]$

$I = (b - a)/6 \, [\, f(a) + 4f(c) + f(b) \,]$

$I = (4 - 0)/6 \, [\, e^0 + 4e^2 + e^4 \,] = 56{,}7696$

$Er = [(53{,}598150 - 56{,}7696)/53{,}598150] \times 100\% = 5{,}917\%$

Integrasi Simpson 1/3 menggunakan 4 pias (asumsi lebar pias $(\Delta x) = 1$) :

$I = (1 \;.\; 1/3) \, [\, e^0 + 4(e^1 + e^3) + 2e^2 + e^4 \,] = 53{,}863846$

$Er = [(53{,}598150 - 53{,}863846)/53{,}598150] \times 100\% = 0{,}5\%$

Metode Simpson (5)

contoh :

hitunglah $I = \int_0^4 e^x \, dx$ dengan metode Simpson 3/8.

secara analitis :

$I = e^4 - e^0 = 53{,}598150$

Integrasi Simpson 3/8 menggunakan 3 pias (krn Simpson 3/8 membutuhkan paling sedikit 4 titik).
Atau berarti $\Delta x = (b - a)/3$:

$I = ((b - a)/3 \; . \; 3/8) \, [\, f(a) + 3f(c) + 3f(d) + f(b) \,]$

$I = (4 - 0)/8 \, [\, e^0 + 3e^{1,3333} + 3e^{2,6667} + e^4 \,] = 55{,}07798$

$Er = [(53{,}598150 - 55{,}07798)/53{,}598150] \times 100\% = 2{,}761\%$

Integrasi gabungan Simpson 1/3 dan 3/8 (asumsi digunakan 5 pias dengan $\Delta x = 0{,}8$) :

jadi batas² pias adalah : e^0, $e^{0,8}$, $e^{1,6}$, $e^{2,4}$, $e^{3,2}$, dan e^4

2 pias pertama dengan Simpson 1/3 :

$I_{1-2} = (1{,}6 - 0)/6 \, [\, e^0 + 4\, e^{0,8} + e^{1,6} \,] = 3{,}96138$

3 pias selanjutnya dengan Simpson 3/8 :

$I_{3-4-5} = (4 - 1{,}6)/8 \, [\, e^{1,6} + 3\, e^{2,4} + 3\, e^{3,2} + e^4 \,] = 49{,}86549$

Integral total :

$Itot = I_{1-2} + I_{3-4-5} = 53{,}826873$

$Er = [(53{,}598150 - 53{,}826873)/53{,}598150] \times 100\% = 0{,}427\%$

Latihan

1. Carilah f(x) dx dari data-data berikut dengan batas x=1 sampai x=7 menggunakan integrasi Trapezoida, Simpson 1/3, & Simpson 3/8 jika diketahui $data^2$ berikut :

x	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
f(x)	1,8287	5,6575	11,4862	19,3149	29,1437	40,9724	54,8011

x	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
f(x)	2,1353	6,2707	12,4060	20,5413	30,6767	42,8120	56,9473

x	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
f(x)	1,8419	5,6838	11,5257	19,3676	29,2095	41,0514	54,8933

Praktikum - 2

Salah satu kelemahan dari metode Trapezoidal adalah kita harus menggunakan jumlah interval yang besar untuk memperoleh akurasi yang diharapkan. Buatlah sebuah program komputer untuk menjelaskan bagaimana metode *Integrasi Romberg* dapat mengatasi kelemahan tersebut.