Pertemuan III

AKAR PERSAMAAN:
Metode Terbuka

Materi Minggu Ini

- Pengertian Konvergensi & Divergensi ▶
- Metode Iterasi ▶
- Metode Newton-Raphson ▶
- Metode Secant ▶
- Metode Faktorisasi ▶
- Tugas III ▶

Konvergensi vs Divergensi

Jika anda jeli, anda tentu bisa melihat bahwa akar^2 persamaan yang didapatkan melalui metode Akolade selalu terletak dalam interval yang kita tentukan mulai dari 2 nilai awal (x_0 dan x_1 atau x_1 dan x_2)

Secara iteratif, interval yang terbentuk akan semakin menyempit dan (secara bersamaan) nilai akar taksiran akan 'tergiring' mendekati nilai yang sebenarnya. Fenomena ini disebut *konvergensi*.

Sebaliknya, dalam metode Terbuka, nilai awal iterasi biasanya cukup 1. Tetapi selama proses iterasi, nilai taksiran mungkin saja bergerak menjauh & mendekati nilai yang sebenarnya (*divergensi*). Hal inilah yang membuat proses metode Terbuka terkadang lebih lama dibanding metode Akolade.

Tetapi jika prosesnya cenderung konvergen, proses metode Terbuka biasanya justru lebih cepat dibandingkan metode Akolade.

Metode Iterasi (1)

Langkah awal metode ini adalah memodifikasi fungsi $f(x) = 0$ yang diberikan menjadi $x = g(x)$.

Kemudian bentuk relasi berulang $x_{n+1} = g(x_n)$.
Dan (secara *iterative*) didapatkan nilai² x_{n+1} yang semakin mendekati nilai akar yang dicari.

Perlu diketahui bahwa proses iterasi ini dapat segera konvergen jika dipenuhi syarat untuk akar pendekatan awal x_0, yaitu :

$$h'(x_0) < 1$$

Metode Iterasi (2)

contoh : dengan metode Iterasi dapatkan akar persamaan sin x = 5x – 2 di sekitar titik x = 0,5 (sampai dengan 5 iterasi)

Modifikasi f(x) : $x = 1/5 \,.\, (\sin x + 2)$

$h(x) = 1/5 \,.\, (\sin x + 2)$
$h'(x) = 1/5 \,.\, \cos x$

$x_0 = 0,5$
$h'(0,5) = 1/5 \,.\, \cos 0,5 = 0,2$

$|h'(x_0)| < 1 \longrightarrow |h'(0,5)| < 1$
Kondisi di atas mengisyaratkan bahwa proses akan berlangsung konvergen.

$x_{n+1} = 1/5 \,.\, (\sin x_n + 2)$

$x_1 = 1/5\ (0,479425 + 2) = 0,495885$
$x_2 = 1/5\ (0,475810 + 2) = 0,495162$
$x_3 = 1/5\ (0,475208 + 2) = 0,495042$
$x_4 = 1/5\ (0,475069 + 2) = 0,495014$
$x_5 = 1/5\ (0,475044 + 2) = 0,495009$

Metode Iterasi (3)

contoh : dengan metode Iterasi dapatkan akar persamaan $f(x) = e^{-x} - x$

$E_r = (E_a / v_a) \times 100\%$

$E_e = [(x^{n+1} - x^n)/x^{n+1}] \times 100\%$

Modifikasi f(x) :

$x = e^{-x}$

Dibentuk menjadi relasi berulang :

$x_{n+1} = e^{-x_n}$

$h(x) = e^{-x}$

$h'(x) = -e^{-x}$

Jika diasumsikan $x_0 = 0$, maka

$h'(x_0) = -1$ (< 1)

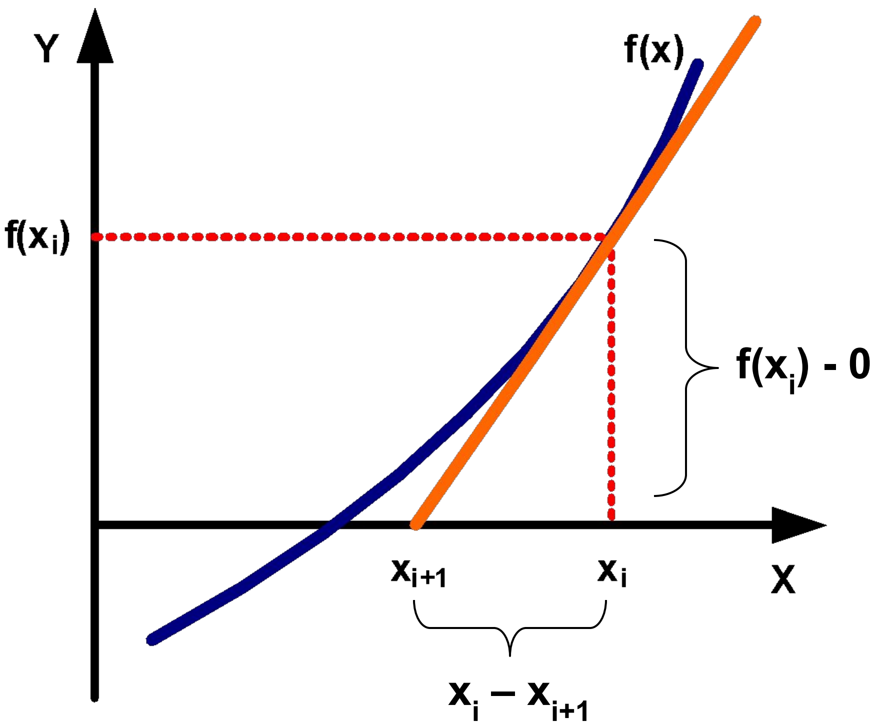
Iterasi	x_n	E_r (%)	E_e (%)
0	0	100	n/a
1	1,000000	76,3	100,0
2	0,367879	35,1	171,8
3	0,692201	22,1	46,9
4	0,500473	11,8	38,3
5	0,606244	6,89	17,4
6	0,545396	3,83	11,2
7	0,579612	2,20	5,90
8	0,560115	1,24	3,48
9	0,571143	0,705	1,93
10	0,564879	0,399	1,11

Nilai akar yang dicari
Adalah 0,56714329

Metode Newton-Raphson (1)

Most famous method ?!…

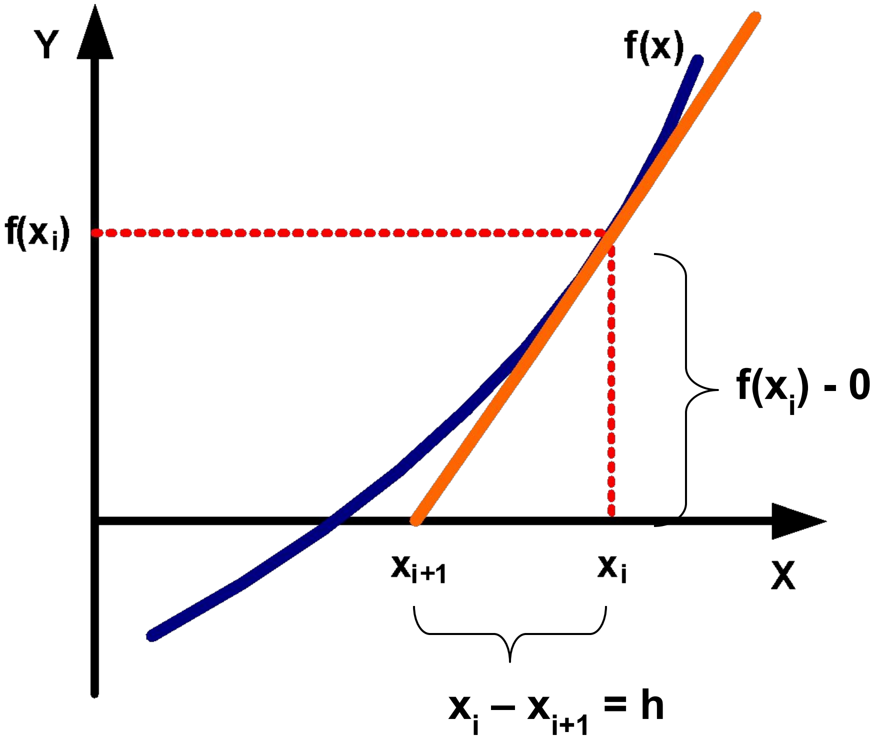
Yup!... Metode Newton-Raphson memang paling dikenal dan paling banyak digunakan dibanding metode^2 lain.



Jika nilai perkiraan awal adalah x_i, maka dapat dibuat sebuah garis yang menyinggung fungsi f(x) di titik (x_i, f(x_i)).

Garis singgung ini diyakini akan memotong sumbu X di suatu titik di dekat nilai yang kita cari.

Metode Newton-Raphson (2)



Untuk menunjukkan <u>persamaan garis singgung</u> tersebut, kita dapat menggunakan turunan pertama pada titik x_i (yang menyatakan gradien/ kemiringan garis singgung tersebut).

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i)}{h} \quad \text{atau} \quad h = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Jika garis singgung pada titik x_i memotong sumbu X di x_{i+1}, maka

$h = x_i - x_{i+1}$ atau $x_{i+1} = x_i - h$

Secara iteratif, nilai pendekatan untuk akar (x_{i+1}) persamaan dapat dicari melalui rumusan :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Metode Newton-Raphson (3)

contoh : sekali lagi, carilah akar persamaan $f(x) = e^{-x} - x$ menggunakan metode Newton-Raphson dengan nilai awal $x_0 = 0$

Turunan pertama fungsi $f(x) = e^{-x} - x$ adalah $f'(x) = -e^{-x} - 1$
kemudian substitusikan ke dalam formulasi Newton-Raphson menjadi :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x} - x_i}{-e^{-x} - 1}$$

iterasinya ditunjukkan pada tabel berikut :

Iterasi	x_n	E_r (%)
0	0	100
1	0,500000000	11,8
2	0,566311003	0,147
3	0,567143165	0,0000220
4	0,567143290	$< 10^{-8}$

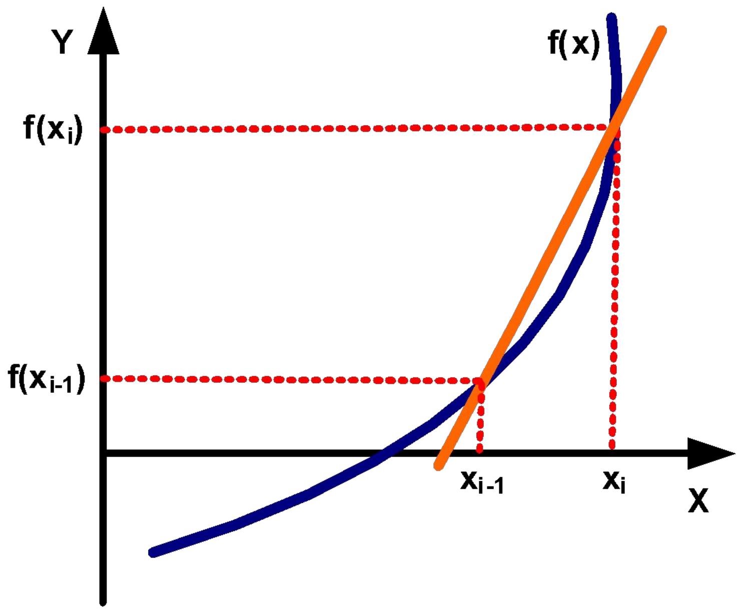
perhatikan jumlah iterasi dan kecepatan penurunan kesalahan relatifnya!

Nilai akar yang dicari Adalah 0,56714329…

Metode Secant (1)

Membuat 'turunan' sebuah fungsi kadang memang tidak mudah. Dan itu menjadi salah satu kelemahan metode Newton-Raphson.

Metode Secant menawarkan pendekatan lain, yaitu dengan membuat 'differensial beda hingga'. Dalam arti, taksiran suatu akar diramalkan melalui ekstrapolasi sebuah garis singgung fungsi f(x) terhadap sumbu X.



$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)\,.\,(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

Secant lebih memilih diferensiasi untuk mendekati kemiringan/gradien/slope garis singgung drpd menggunakan turunan.

Metode Secant (2)

contoh : dengan metode Secant dapatkan akar persamaan $f(x) = e^{-x} - x$

Gunakan nilai awal $x_{-1} = 0$ dan $x_0 = 1$

> Metode Secant memang memerlukan 2 nilai awal x. Tetapi tidak mensyaratkan perubahan tanda sebagai batas intervalnya. Sehingga metode ini tidak digolongkan ke dalam kelompok metode Akolade.

Iterasi 1 :

$x_{-1} = 0 \qquad f(x_{-1}) = 1,00000$

$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = -0,63212$

$$x_1 = 1 - \frac{-0,63212\ (0-1)}{1 - (-0,63212)}$$

$= 0,61270$

$E_r = 8,0\%$

Iterasi 2 :

$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = -0,63212$

$x_1 = 0,61270 \qquad f(x_1) = -0,07081$

$x_2 = 0,56384$

$E_r = 0,58\%$

Iterasi 3 :

$x_1 = 0,61270 \qquad f(x_0) = -0,07081$

$x_2 = 0,56384 \qquad f(x_1) = 0,00518$

$x_3 = 0,56717$

$E_r = 0,0048\%$

Bandingkan dg nilai yg dicari 0,56714329…

Metode Faktorisasi (1)

Metode Faktorisasi hanya memberikan rumusan untuk polynomial berderajat 3, 4 dan 5.

a. $P_3(x)$: (1,2)

misal $P_3(x) = x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = (x + b_0)(x^2 + a_1x + a_0)$

maka $b_0 = A_0 / a_0$; $a_1 = A_2 - b_0$; $a_0 = A_1 - a_1b_0$;

sebagai inisialisasi $b_0 = 0$;

dan proses iterasinya dapat ditabelkan seperti berikut :

Iterasi	b_0	a_1	a_0

Metode Faktorisasi (2)

b. $P_4(x)$: (2,2)

misal $P_4(x) = x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = (x^2 + b_1x + b_0)(x^2 + a_1x + a_0)$

maka $b_0 = A_0 / a_0$;

$b_1 = (A_1 - a_1b_0) / a_0$;

$a_1 = A_2 - b_0$;

$a_0 = A_1 - a_1b_0$

sebagai inisialisasi $b_0 = 0$;

dan proses iterasinya dapat ditabelkan seperti berikut :

Iterasi	b_0	b_1	a_1	a_0

Metode Faktorisasi (4)

contoh : Selesaikan persamaan $x^3 + 1,2x^2 - 4x - 4,8 = 0$

Persamaan di atas bertipe $P_3(x) = (1,2)$

$b_0 = 0;$
$a_1 = 1,2 - 0 = 1,2;$
$a_0 = -4 - (1,2)(0) = -4;$

$b_0 = (-4,8) / (-4) = 1,2;$
$a_1 = 1,2 - 1,2 = 0;$
$a_0 = -4 - (0)(1,2) = -4;$

$b_0 = (-4,8) / (-4) = 1,2;$
$a_1 = 1,2 - 1,2 = 0;$
$a_0 = -4 - (0)(1,2) = -4;$

#	b_0	a_1	a_0
1	0	1,2	-4
2	1,2	0	-4
3	1,2	0	-4

$$x^3 + 1,2x^2 - 4x - 4,8 = (x + 1,2)(x^2 - 4) = (x + 1,2)(x + 2)(x - 2)$$

Metode Faktorisasi (5)

contoh : Selesaikan persamaan $x^4 - 8x^3 + 39x^2 - 62x + 50 = 0$

Persamaan di atas bertipe $P_4(x) = (2,2)$

#	b_0	b_1	a_1	a_0
1	0	0	- 8	39
2	1,28	- 1,33	- 6,67	28,85
3	1,73	- 1,85	- 6,15	25,9
4	1,93	- 2,83	- 5,17	22,44
5	2,23	- 2, 25	- 5,75	23,83
6	2,1	- 2,1	- 5,9	24,5
7	2	- 2	- 6	25
8	2	- 2	- 6	25

$x^4 - 8x^3 + 39x^2 - 62x + 50 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 6x + 25) = 0$

$x^2 - 2x + 2 = 0$ dan $x^2 - 6x + 25 = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm i$ dan $x_{3,4} = 3 \pm 4i$

Latihan (1)

Dapatkan akar-akar persamaan berikut :

a. $x^3 + 6,6x^2 - 29,05x + 22,64 = 0$

b. $x^4 - 0,41x^3 + 1,632x^2 - 9,146x + 7,260 = 0$

dengan :

1. Metode Iterasi
2. Metode Faktorisasi

Gunakan metode Newton-Raphson untuk mendapatkan akar persamaan-persamaan :

3. $f(x) = -0,875x^2 + 1,75x + 2,625 \quad (x_i = 3,1)$
4. $f(x) = -2,1 + 6,21x - 3,9x^2 + 0,667x^3$
5. $f(x) = -23,33 + 79,35x - 88,09x^2 + 41,6x^3 - 8,68x^4 + 0,658x^5 \quad (x_i = 3,5)$

Sekarang gunakan metode Secant untuk maksud yang sama dari persamaan :

6. $f(x) = 9,36 - 21,963x + 16,2965x^2 - 3,70377x^3$
7. $f(x) = x^4 - 8,6x^3 - 35,51x^2 + 464x - 998,46 \quad (x_{i-1} = 7 \text{ dan } x_i = 9)$
8. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad (x_{i-1} = 2,5 \text{ dan } x_i = 3,6)$

Latihan (1)

9. **Buatlah sebuah paparan untuk menjelaskan tentang metode Bairstow dan metode Quotient-Difference (Q-D). Dan buatlah sebuah kesimpulan mengenai kemudahan/kesulitan kedua metode tersebut didalam menyelesaikan masalah dibanding dengan metode2 yang telah anda pelajari dalam materi ini.**