Pertemuan VII

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA: Single-Step Methods

Materi Minggu Ini

- Pengantar PDB
  - Metode Euler-Cauchy
  - Metode Heun SS
  - Metode Runge-Kutta
  - Metode Picard
  - Metode Taylor

- Tugas VII

Pengantar PDB (9)

Metode^2 dalam penyelesaian persamaan diferensial biasa dapat dikategorikan ke dalam 2 pendekatan besar, yaitu :

Pendekatan Satu-Langkah (Single-Step Methods)

Metode^2 dalam kelompok pendekatan ini hanya memanfaatkan sebuah variabel dependen y_{i+1} pada titik x_{i+1} yang berasosiasi dengan nilai variabel tersebut.

Pendekatan Banyak-Langkah (Multi-Steps Methods)

Metode^2 dalam kelompok pendekatan ini memerlukan lebih banyak informasi tambahan (berupa titik^2 dan nilai^2 fungsi yang berasosiasi dengannya) untuk dapat memberikan solusi. Karena lengkungan garis yang menghubungkan titik2 tersebut menyediakan informasi mengenai trayektori dari solusi yang sedang dicari.

Metode Euler-Cauchy (1)

Penyelesaian PDB dengan metode Euler adalah proses mencari nilai fungsi pada titik x dari sebuah persamaan diferensial biasa f(x, y).

Sebenarnya rumusan metode Euler diturunkan dari deret Taylor (dengan mengabaikan suku berpangkat > 2 yang nilainya sangat kecil) :

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\,\Delta x$$

 dengan $\Delta x = (x_n - x_0) / n$

Metode Euler memang sederhana, namun tingkat kesalahan terhadap hasil pendekatannya biasanya cukup tinggi.

Untuk menekan tingkat kesalahan tersebut, dapat digunakan Δx yang cukup kecil. Tetapi konsekuensinya adalah bertambahnya jumlah iterasi.

Menggunakan Metode Euler mudah, karena tidak perlu mencari turunan^2 fungsi terlebih dahulu.

Metode Euler-Cauchy (2)

contoh : carilah nilai y(0,1) dari persamaan diferensial berikut, jika diketahui
$y(0) = 2$:

$$f(x, y) = dy / dx = (y - x) / (y + x)$$

Langkah 1 : mencari nilai Δx (asumsi misal n = 5)

$$\Delta x = (x_n - x_0) / n = (0,1 - 0) / 5 = 0,02$$

Langkah 2 : mencari penyelesaian y(0,1) melalui iterasi

$n = 1$ $x_0 = 0$

$\Delta y_0 = f(x_0, y_0)\,\Delta x = [(y_0 - x_0) / (y_0 + x_0)]\,\Delta x = 0,02$

$y_1 = y(0,02) = y_0 + \Delta y_0 = 2 + 0,02 = 2,02$

$n = 2$ $x_1 = x_0 + \Delta x = 0 + 0,02 = 0,02$

$\Delta y_1 = f(x_1, y_1)\,\Delta x = [(y_1 - x_1) / (y_1 + x_1)]\,\Delta x = 0,01961$

$y_2 = y(0,04) = y_1 + \Delta y_1 = 2,02 + 0,01961 = 2,03961$

$n = 3$ $x_2 = x_1 + \Delta x = 0,02 + 0,02 = 0,04$

$\Delta y_2 = f(x_2, y_2)\,\Delta x = [(y_2 - x_2) / (y_2 + x_2)]\,\Delta x = 0,01923$

$y_3 = y(0,06) = y_2 + \Delta y_2 = 2,03961 + 0,01923 = 2,05884$

$n = 4$ $x_3 = x_2 + \Delta x = 0,04 + 0,02 = 0,06$

$\Delta y_3 = f(x_3, y_3)\,\Delta x = [(y_3 - x_3) / (y_3 + x_3)]\,\Delta x = 0,01887$

$y_4 = y(0,08) = y_3 + \Delta y_3 = 2,05884 + 0,01887 = 2,07771$

$n = 5$ $x_4 = x_3 + \Delta x = 0,08 + 0,02 = 0,1$

$\Delta y_4 = f(x_4, y_4)\,\Delta x = [(y_4 - x_4) / (y_4 + x_4)]\,\Delta x = 0,01852$

$y_5 = y(0,1) = y_4 + \Delta y_4 = 2,07771 + 0,01852 = 2,09623$

Metode Heun SS (1)

Banyak metode dalam penyelesaian PDB yang dapat dikategorikan sebagai perbaikan maupun modifikasi terhadap metode Euler-Cauchy. Aplikasi suku^2 berorde tinggi dari deret Taylor dan aplikasi aturan Trapezoid adalah 2 di antara sekian banyak metode yang dimaksud.

Metode^2 lain yang secara ekplisit memberikan rumusan berbeda adalah metode Heun dan metode Runge-Kutta (dengan bermacam^2 orde-nya).

Metode Heun menekankan perbaikan atas perkiraan kemiringan garis singgung (*slope*) melalui penentuan 2 turunan untuk interval (di titik awal dan titik akhir).

Rerata kedua turunan tersebut selanjutnya digunakan untuk memperbaiki perkiraan *slope* yang berlaku untuk seluruh rentang interval.

Metode Heun SS (2)

Jika Euler menggunakan persamaan berikut untuk mensolusikan masalah :

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + \Delta x \, f(x_n, y_n)$$

Maka Heun menggunakan persamaan di atas untuk memprediksi solusi. Sehingga persamaan di atas disebut sebagai persamaan Predictor.

Dan solusi sebenarnya (versi Heun) dihasilkan melalui ekstrapolasi linier dari rerata hasil penggabungan *slope* awal $y_n' = f(x_n, y_n)$ dan *slope* akhir $y_{n+1}' = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})$:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})}{2} \Delta x$$

Persamaan ini disebut sebagai persamaan Corrector.

Metode Heun SS (3)

contoh : gunakan metode Heun untuk mengintegrasikan $y' = 4e^{0,8x} - 0,5y$
dari $x = 0$ sampai $x = 4$, jika diketahui $\Delta x = 1$ dan $y(0) = 2$

Hasil secara analitis adalah : $y = 4/1,3\ (e^{0,8x} - e^{-0,5x}) + 2e^{-0,5x}$

Solusi awal dari metode Heun adalah berupa prediksi (dari persamaan predictor) dari harga² inisialisasi, yaitu :

$Y_1^{(0)} = 2 + 1\ .\ [4e^0 - 0,5(2)] = 5$ ini adalah hasil yang juga diperoleh jika menggunakan metode Euler.

Slope awal : $y_0^1 = 4e^0 - 0,5(2) = 3$
Slope akhir : $y_1' = f(x_1, y_1^0) = 4e^{0,8(1)} - 0,5(5) = 6,40216371$

Persamaan Corrector : $y_1 = 2 + [(3 + 6,40216371) / 2]\ .\ 1 = 6,70108186$

Jika dilakukan iterasi terhadap persamaan Corrector, maka didapat :

Iterasi 1 : $y_1 = 2 + [((3 + 4e^{0,8(1)} - 0,5(6,70108186)) / 2]\ .\ 1 = 6,27581139$
Iterasi 2 : $y_1 = 2 + [((3 + 4e^{0,8(1)} - 0,5(6,27581139)) / 2]\ .\ 1 = 6,38212901$

Metode Runge-Kutta (RK) (1)

Metode Runge-Kutta (RK) dapat dikatakan sebagai metode yang paling populer di dalam menyelesaikan masalah^2 diferensial.

Metode ini memiliki akurasi yang lebih tinggi dibanding metode Euler. Tetapi, walaupun akurasinya masih sebanding dengan metode Taylor, namun metode ini tetap disuka karena tidak memerlukan turunan fungsi dalam aplikasinya.

Selain itu, tingkat akurasi yang tinggi dapat dicapai melalui jumlah iterasi yang relatif sedikit.

Metode Runge-Kutta sendiri dikembangkan dari deret Taylor (dan dapat dikatakan merupakan perluasan deret Taylor).

Jumlah suku (n) pada *increment function* dari persamaan RK menentukan orde/derajat dari metode tersebut.

Keunikan metode RK ini adalah jika n = 1 maka persamaan RK identik dengan metode Euler. Sementara itu banyak metode diferensiasi lain yang mengembangkan persamaannya berdasarkan RK orde-2.

Metode Runge-Kutta (RK) (2)

Ini bentuk RK orde-1 yang disebut2 'mirip' / identik dengan metode Euler

Bentuk umum persamaan RK adalah :

$$y_{i+1} = y_i + \Phi(x_i, y_i)\,\Delta x$$

Seperti diketahui Φ adalah *increment function* yang dapat diartikan sebagai *slope* / kemiringan garis singgung rata[2] di sepanjang interval.

$\Phi(x_i, y_i)$ dapat ditulis sebagai :

$$\Phi(x_i, y_i) = a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n$$

dengan a adalah konstanta dan k adalah :

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + p_1\,\Delta x,\ y_i + q_{11}k_1\,\Delta x)$$
$$k_3 = f(x_i + p_2\,\Delta x,\ y_i + q_{21}k_1\,\Delta x + q_{22}k_2\,\Delta x)$$
$$\dots$$
$$k_n = f(x_i + p_{n-1}\,\Delta x,\ y_i + q_{(n-1)1}k_1\,\Delta x + q_{(n-1)2}k_2\,\Delta x + \dots + q_{(n-1)(n-1)}\,k_{(n-1)}\,\Delta x)$$

Perhatikan bahwa harga k berbentuk *recurrence relation*. Ini salah satu alasan mengapa metode RK menjadi mudah dan efisien untuk dikomputasikan.

Metode Runge-Kutta (RK) (3)

Secara umum bentuk persamaan RK orde-2 (RK-2) dapat ditulis sebagai :

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)\,\Delta x$$

dimana a adalah konstanta dan k adalah :

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + p_1 \Delta x,\; y_i + q_{11} k_1 \Delta x)$$

Harga² a_1, a_2, p_1, dan q_{11} dapat dicari melalui perluasan deret Taylor dan dihasilkan :

$$a_1 + a_2 = 1 \qquad\qquad a_1 = 1 - a_2$$
$$a_2 p_1 = \tfrac{1}{2} \qquad \text{atau}$$
$$a_2 q_{11} = \tfrac{1}{2} \qquad\qquad p_1 = q_{11} = 1/2a_2$$

karena harga a_2 bisa tak hingga macamnya, maka bermunculanlah sejumlah pendekatan untuk RK-2 ini. Hebatnya, setiap pendekatan memberikan hasil yang sama secara eksak, jika PDB yang diselesaikan berbentuk kuadratik, linier atau konstanta. '*The top three*' dari pendekatan² yang telah dibuat untuk RK-2 adalah :

Metode Runge-Kutta (RK) (4)

Metode Heun dengan Korektor Tunggal

Asumsi yang digunakan adalah :

$a_2 = \frac{1}{2}$

$a_1 = \frac{1}{2}$

$p_1 = q_{11} = 1$

Bentuk persamaan RK-2 menjadi :

$$y_{i+1} = y_i + \left(\tfrac{1}{2} k_1 + \tfrac{1}{2} k_2 \right) \Delta x$$

dengan k adalah :

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + \Delta x, y_i + k_1 \Delta x)$

Ingat! Heun selalu menganggap bahwa k_1 adalah *slope* awal interval dan k_2 adalah *slope* akhir interval.

Metode Runge-Kutta (RK) (5)

Metode Polygon yang diperbaiki

Asumsi yang digunakan adalah :

$a_2 = 1$

$a_1 = 0$

$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2}$

Bentuk persamaan RK-2 menjadi :

$y_{i+1} = y_i + k_2 \, \Delta x$

dengan k adalah :

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2} k_1 \Delta x)$

Metode Runge-Kutta (RK) (6)

Metode Ralston (1962) & Ralston-Rabinowitz (1978)

Asumsi yang digunakan adalah :

$a_2 = 2/3$
$a_1 = 1/3$
$p_1 = q_{11} = \frac{3}{4}$

Bentuk persamaan RK-2 menjadi :

$$y_{i+1} = y_i + \left(1/3\ k_1 + 2/3\ k_2 \right) \Delta x$$

dengan k adalah :

$k_1 = f(x_i, y_i)$
$k_2 = f(x_i + \frac{3}{4} \Delta x,\ y_i + \frac{3}{4} k_1 \Delta x)$

Metode Runge-Kutta (RK) (7)

Secara umum bentuk persamaan RK orde-3 (RK-3) dapat ditulis sebagai :

$$y_{i+1} = y_i + [1/6\ (k_1 + 4k_2 + k_3)]\ \Delta x$$

dimana k adalah :

$$k_1 = f(x_i,\ y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + \tfrac{1}{2}\ \Delta x,\ y_i + \tfrac{1}{2}\ k_1\ \Delta x)$$
$$k_3 = f(x_i + \Delta x,\ y_i - k_1\ \Delta x + 2\ k_2\ \Delta x)$$

Anda akan menemukan begitu banyak versi pendekatan untuk RK-3 ini.

Perlu diketahui bahwa jika turunan tersebut hanya berasal dari sebuah fungsi x, maka RK-3 ini menyerupai aturan Simpson 1/3.

Hal ini senada dengan aturan Simpson 1/3 yang dapat memberikan hasil perkiraan integral yang eksak untuk permasalahan^2 kubik.

Metode Runge-Kutta (RK) (8)

Secara umum bentuk persamaan RK orde-4 (RK-4) dapat ditulis sebagai :

$$y_{i+1} = y_i + [1/6\ (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)]\ \Delta x$$

dimana k adalah :

$$k_1 = f(x_i,\ y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + \tfrac{1}{2}\Delta x,\ y_i + \tfrac{1}{2} k_1 \Delta x)$$
$$k_3 = f(x_i + \tfrac{1}{2}\Delta x,\ y_i + \tfrac{1}{2} k_2 \Delta x)$$
$$k_4 = f(x_i + \Delta x,\ y_i + k_3 \Delta x)$$

Pendekatan^2 untuk RK-4 juga sudah banyak 'beredar' di 'pasaran' (tentu dengan berbagai versi untuk nilai a_i, p_i dan q_{ij}-nya).

Pendekatan yang tertulis di atas biasa disebut sebagai pendekatan RK-4 klasik, dan ekivalen pula dengan aturan Simpson 1/3.

Metode Runge-Kutta (RK) (9)

Higher-order Runge-Kutta seperti misalnya RK orde-5 Butcher (RK-5B) dapat ditulis sebagai :

$$y_{i+1} = y_i + [1/90\ (7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)]\ \Delta x$$

dimana k adalah :

$k_1 = f(x_i, y_i)$
$k_2 = f(x_i + \frac{1}{4}\Delta x,\ y_i + \frac{1}{4} k_1 \Delta x)$
$k_3 = f(x_i + \frac{1}{4}\Delta x,\ y_i + 1/8\ k_1 \Delta x + 1/8\ k_2 \Delta x)$
$k_4 = f(x_i + \frac{1}{2}\Delta x,\ y_i - \frac{1}{2} k_2 \Delta x + k_3 \Delta x)$
$k_5 = f(x_i + \frac{3}{4}\Delta x,\ y_i + 3/16\ k_1 \Delta x + 9/16\ k_4 \Delta x)$
$k_6 = f(x_i + \Delta x,\ y_i - 3/7\ k_1 \Delta x + 2/7\ k_2 \Delta x + 12/7\ k_3 \Delta x - 12/7\ k_4 \Delta x + 8/7\ k_5 \Delta x)$

Metode Picard (1)

Misal terdapat PDB sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \text{dengan syarat } y = y_0 \text{ dan } x = x_0$$

Jika diintegralkan, bentuk di atas menjadi :

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx$$

Perbaikan terhadap nilai y dapat dilakukan secara iteratif :

Pendekatan 1 : $y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx$

Pendekatan 2 : $y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\, dx$

…

Pendekatan n : $y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\, dx$

Metode Picard (2)

contoh : dapatkan penyelesaian untuk y(0,1) dan y(0,2) dari PDB berikut :

$f(x, y) = dy / dx = y + x$, dengan syarat awal $y = 1$ jika $x = 0$

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx = 1 + \int_{x_0}^{x} (x + 1)\, dx = 1 + x + \tfrac{1}{2} x^2$$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\, dx = 1 + \int_{x_0}^{x} (x + 1 + x + \tfrac{1}{2} x^2)\, dx = 1 + x + x^2 + x^3/31$$

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2)\, dx = 1 + \int_{x_0}^{x} (x + 1 + x + x^2 + x^3/31)\, dx = 1 + x + x^2 + x^3/31 + x^4/24$$

untuk $x = 0,1$ $y(0,1) = (0,1)^4/24 + (0,1)^3/31 + (0,1)^2 + 0,1 + 1 = 1,1103$

Y(0,1) = 1,1103 digunakan sebagai syarat awal baru untuk penghitungan y(0,2) :

$$y_1 = y_0 + \int_{0,1}^{x} f(x, y_0)\, dx = 1,1103 + \int_{0,1}^{x} (x + 1,1103)\, dx = 0,9943 + 1,1103x + \tfrac{1}{2} x^2$$

$$y_2 = y_0 + \int_{0,1}^{x} f(x, y_1)\, dx = 1,1103 + \int_{0,1}^{x} (x + 0,9943 + 1,1103x + \tfrac{1}{2} x^2)\, dx$$

$$= 1,001 + 0,9943x + 1,0552x^2 + x^3/6$$

$$y_3 = y_0 + \int_{0,1}^{x} f(x, y_2)\, dx = 1 + \int_{0,1}^{x} (x + 1,001 + 0,9943x + 1,0552x^2 + x^3/6)\, dx$$

$= 1 + 1,001x + 0,9972x^2 + 0,3517x^3 + x^4/24$ $y(0,2) = 1,2428$

Metode Taylor (1)

Penyelesaian PDB dengan metode Taylor dapat diartikan sebagai proses mencari nilai fungsi y(x) pada titik x dari suatu persamaan diferensial f(x, y).

Misal terdapat PDB : $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$

f(x, y) adalah sebuah fungsi bernilai tunggal untuk setiap pasangan nilai x dan y.

Jika diketahui $x = x_0$ dan $y = y_0$, maka untuk mendapatkan nilai di titik[2] :
$x_1 = x_0 + h$; $x_2 = x_0 + 2h$; … $x_k = x_0 + kh$
(dimana h adalah selisih dari 2 nilai x yang berurutan), adalah melalui perluasan deret Taylor sbb :

$$y(x_m) = y(x_{m-1}) + \frac{h}{1!} y'(x_{m-1}) + \frac{h^2}{2!} y''(x_{m-1}) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_{m-1}) + \ldots$$

Metode Taylor (2)

contoh : carilah nilai y(0,1) dari persamaan diferensial berikut, jika diketahui y(0) = 1,5 :

$$f(x, y) = dy / dx = y + x$$

$y'(x_0) = f(x_0, y_0) = y(x_0) + x_0 = 1,5 + 0 = 1,5$
$y''(x_0) = f'(x_0, y_0) = y'(x_0) + 1 = 1,5 + 1 = 2,5$
$y'''(x_0) = f''(x_0, y_0) = y''(x_0) = 2,5$
$y''''(x_0) = f'''(x_0, y_0) = y'''(x_0) = 2,5$
…
$y^n(x_0) = f^{n-1}(x_0, y_0) = y^{n-1}(x_0) = 2,5$

Jika diasumsikan bahwa $x_0 = 0$ dan $x_1 = 0,1$, maka $h = x_1 - x_0 = 0,1$. dan nilai taksiran y(0,1) dapat dihitung menurut deret Taylor :

$$y(0,1) = y(0) + \frac{h}{1!} y'(0) + \frac{h^2}{2!} y''(0) + \frac{h^3}{3!} y'''(0) + \dots$$

$$= 1,5 + (0,1/1) \,.\, 1,5 + ((0,1)^2/2) \,.\, 2,5 + ((0,1)^3/6) \,.\, 2.5 + \dots$$

$$= 1,6629273$$

Latihan

Pandang permasalahan harga awal berikut sepanjang interval x = 0 sampai dengan x = 2:

$$\frac{dy}{dx} = yx^2 - y$$

1. Selesaikan permasalahan di atas menggunakan metode Euler dengan (a). h = 0,25; dan (b). h = 0,5. Gambarkan pula grafik solusi yang telah anda buat.

1. Selesaikan permasalahan di atas menggunakan metode Heun dengan (a). h = 0,25; dan (b). h = 0,5. Gambarkan pula grafik solusi yang telah anda buat.

1. Selesaikan permasalahan di atas menggunakan metode RK-2 Ralston dengan (a). h = 0,25; dan (b). h = 0,5. Gambarkan pula grafik solusi yang telah anda buat.

1. Selesaikan permasalahan di atas menggunakan metode Taylor dengan (a). h = 0,25; dan (b). h = 0,5. Gambarkan pula grafik solusi yang telah anda buat