AKAR PERSAMAAN:
Metode Akolade

Materi Minggu Ini

- Pengertian Akar Persamaan ▶
- Metode Grafik ▶
- Metode Tabulasi ▶
- Metode Bolzano ▶
- Metode Regula Falsi ▶
- *Tugas II* ▶

Pengertian Akar Persamaan (1)

Dalam 2 pertemuan ke depan kita akan mempelajari beberapa metode untuk mencari akar^2 persamaan.

Untuk polynomial berderajat 2, tersedia *magical formula* "ABC", yang secara analitis dapat membantu mencari akar^2 persamaan tersebut.

Sementara untuk polynomial berderajat 3 atau 4, rumus^2 yang ada cukup kompleks. Kita perlu berkali^2 mengucap "gladium laviosa" sebelum dapat menggunakannya. Tetapi bagaimanapun juga (secara analitis) rumus^2 tsb masih dapat digunakan.

Tapi untuk polynomial berderajat > 4 ?...

yang bisa kita lakukan hanyalah mencoba menyelesaikan melalui serangkaian pendekatan numeris. Dan untuk itu tersedia beragam metode yang dapat kita pilih.

Pengertian Akar Persamaan (2)

Cara termudah mencari akar persamaan polynomial berderajat tinggi adalah dengan menggambarkan fungsi tersebut pada koordinat cartesian. Kemudian mencari titik potong fungsi pada sumbu X.

Cara mudah lainnya?!...

Ada, tapi butuh kesabaran. Yaitu dengan mencoba^2 (*trial error*). Tetapkan sebarang nilai x dan teliti apakah anda bisa mendapatkan f(x) = 0.

Jika gagal, coba nilai x lainnya. Sampai anda 'beruntung' menemukan f(x) = 0.

Kedua cara di atas sebenarnya sudah dapat dikategorikan sebagai upaya pendekatan (walaupun tidak sistematis). Di sisi lain terdapat banyak teknik pendekatan yang secara garis besar dikelompokkan dalam 2 kelompok besar, yaitu :

Kelompok **Metode Akolade** (minggu ini)

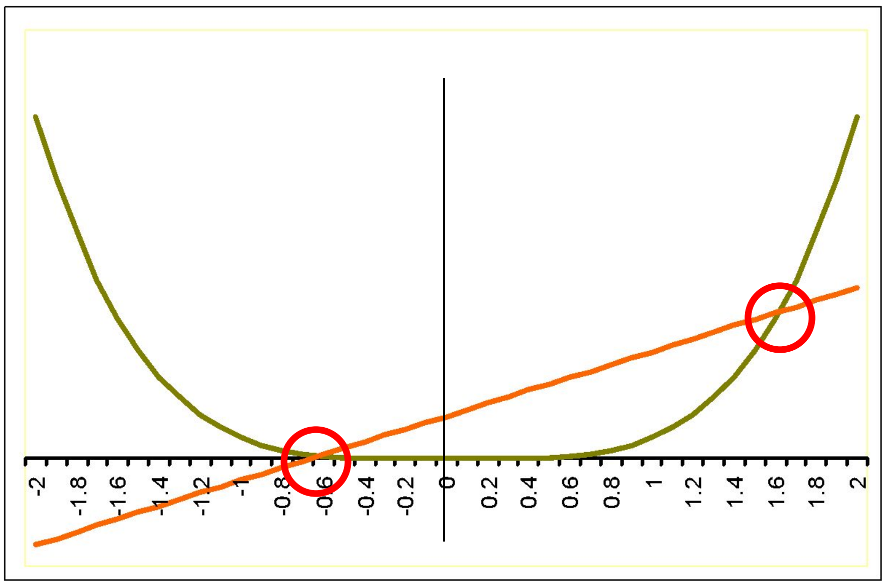
Kelompok **Metode Terbuka** (pertemuan berikutnya)

Metode Grafik

contoh :

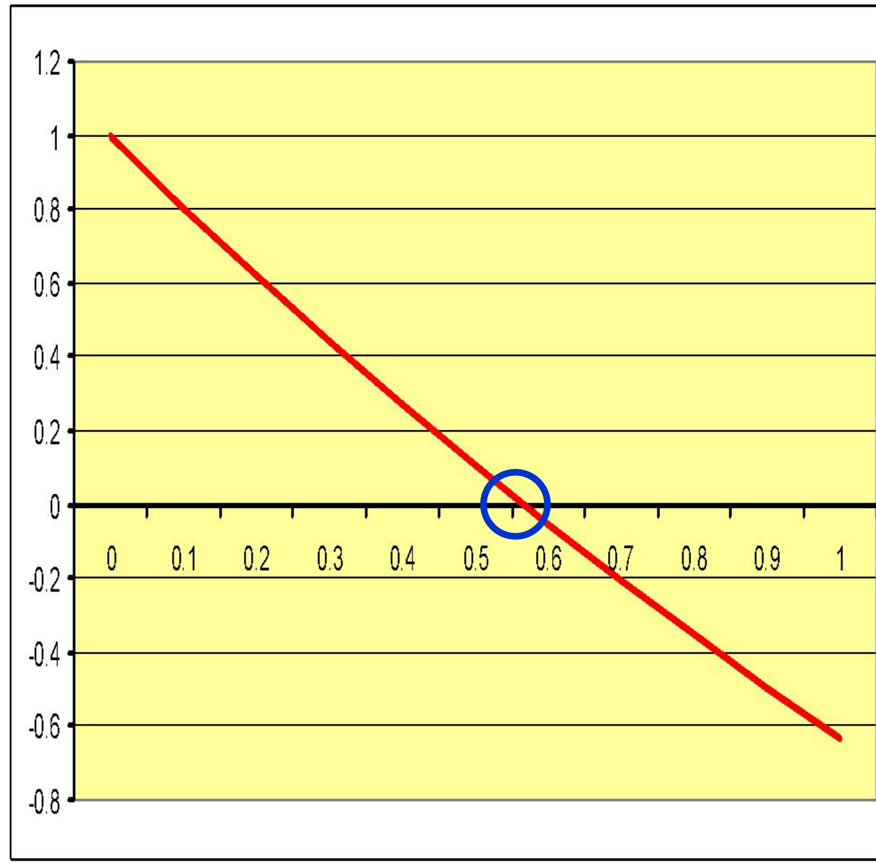
dapatkan akar-akar persamaan $x^4 - 3x - 2 = 0$

Persamaan di atas dapat ditulis $x^4 = 3x + 2$. Atau $y = x^4$ dan $y = 3x + 2$



contoh :

dapatkan akar pendekatan dari persamaan $f(x) = e^{-x} - x$



Metode Tabulasi

Metode Tabulasi ini sebenarnya merupakan perluasan dari metode Grafik. Karena Metode Grafik hanya memberikan pendekatan kasar, maka hasil lebih presisi dapat diperoleh melalui metode Tabulasi ini.

contoh :

dapatkan akar pendekatan dari persamaan $f(x) = e^{-x} - x$

x	f(x)
0	1
0.1	0.804837
0.2	0.618731
0.3	0.440818
0.4	0.27032
0.5	**0.106531**
0.6	**-0.05119**
0.7	-0.20341
0.8	-0.35067
0.9	-0.49343
1	-0.63212

x	f(x)
0.5	0.106531
0.51	0.090496
0.52	0.074521
0.53	0.058605
0.54	0.042748
0.55	0.02695
0.56	**0.011209**
0.57	**-0.00447**
0.58	-0.0201
0.59	-0.03567
0.6	-0.05119

x	f(x)
0.56	0.011209
0.561	0.009638
0.562	0.008068
0.563	0.006498
0.564	0.004929
0.565	0.00336
0.566	0.001792
0.567	**0.000225**
0.568	**-0.00134**
0.569	-0.00291
0.57	-0.00447

Metode Bolzano (1)

Disebut pula sebagai metode Setengah Interval (*Interval Halving*), metode Bagi Dua, metode Biseksi, atau metode Pemotongan Biner.

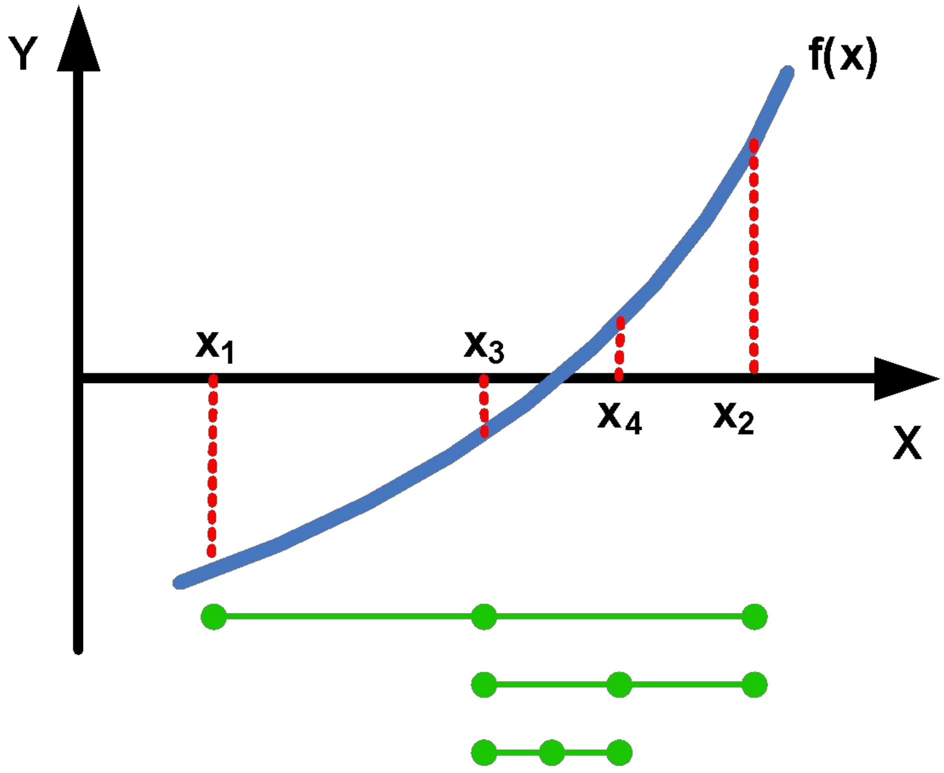
Langkah-langkah yang harus dilakukan pada metode Bolzano adalah :

1. Hitung fungsi pada interval yang sama dari x hingga terjadi <u>perubahan tanda</u> dari $f(x_n)$ dan $f(x_{n+1})$. Atau dengan kata lain: $f(x_n) \times f(x_{n+1}) < 0$;
2. Estimasi pertama untuk akar persamaan dapat diperoleh melalui : $x_t = (x_n + x_{n+1}) / 2$;
3. Lakukan evaluasi untuk menentukan dalam interval mana akar persamaan berada :
   a. Jika $f(x_n) \times f(x_{n+1}) < 0$
      akar persamaan dalam sub-interval pertama, tetapkan $x_{n+1} = x_t$, dan lanjutkan ke langkah 4;
   b. Jika $f(x_n) \times f(x_{n+1}) > 0$
      akar persamaan dalam sub-interval kedua, tetapkan $x_n = x_t$, dan lanjutkan ke langkah 4;
   c. Jika $f(x_n) \times f(x_{n+1}) = 0$
      akar persamaan adalah x_t, dan hitungan selesai;
4. Kembali ke langkah 2 untuk menghitung nilai perkiraan akar yang baru;
5. Jika nilai yang didapat pada no. 4 sudah sesuai denga batasan yang ditentukan, maka proses selesai, dan x_t adalah akar yang dicari.

Metode Bolzano (2)

Istilah "perubahan tanda" dalam metode ini memiliki arti penting. Karena mengingat sifat fungsi yang kontinu, maka adanya 2 nilai fungsi $f(x_i)$ dan $f(x_{i+n})$ yang memiliki tanda berbeda menunjukkan fungsi tersebut memotong koordinat (setidaknya satu kali) di antara x_i dan x_{i+n}

(ingat!... yang kita cari adalah nilai x dimana $f(x) = 0$)



Metode Bolzano (3)

contoh : dapatkan akar dari persamaan $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$ yang terletak di antara $x = 1$ dan $x = 2$.

Untuk $x = 1$: $f(1) = (1)^3 + (1)^2 - 3.1 - 3 = -4$

Untuk $x = 2$: $f(2) = (2)^3 + (2)^2 - 3.2 - 3 = 3$

Ada perubahan tanda antara x=1 dan x=2, jadi salah satu akar persamaan memang terletak di antara x=1 dan x=2. sekarang kita tentukan interval yang baru :

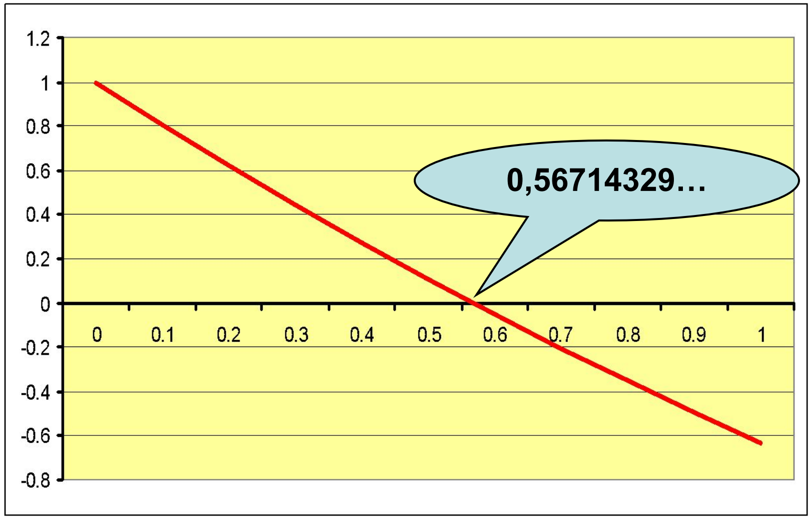
$x_t = (x_1 + x_2) / 2 = (1 + 2) / 2 = 1,5 \rightarrow f(x_t=1,5) = -1,875$

Sehingga interval yang baru antara x = 1,5 dan x = 2.

iterasi	x_1	x_2	x_3	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$
1	1	2	1,5	- 4,0	3,0	- 1,875
2	1,5	2	1,75	- 1,875	3,0	0,17187
3	1,5	1,75	1,625	- 1,875	0,17187	- 0,94335
4	1,625	1,75	1,6875	- 0,94335	0,17187	- 0,40942
5	1,6875	1,75	1,71875	- 0,40942	0,17187	- 0,12478
...						
∞			1,73205			- 0,00000

Metode Bolzano (4)

contoh : **bagaimana jika fungsi yang digunakan adalah $f(x) = e^{-x} - x$?**



Kita dapat menggunakan grafiknya untuk menentukan nilai awal iterasi, yaitu $x_1=0$ dan $x_2=1$ (krn terlihat grafik memotong sumbu X di antara 0 sampai 1).

Jadi $x_3 = (0 + 1) / 2 = 0,5$

$E_a = 0,56714329 - 0,5 = 0,06714329$

Atau, $Er = (0,06714329/0,56714329) \, . \, 100\%$

$= 11,8\%$

Ingat, $f(0) = 1$ dan $f(1) = -0,63212$.

Dan $f(0,5) = 0,06531$.

Jadi akar terletak antara 0,5 sampai 1.

$X_3 = (0,5 + 1) / 2 = 0,75$

$f(0,75) = -0,030$

Jadi akar terletak antara 0,5 sampai 0,75

$X_3 = (0,5 + 0,75) / 2 = 0,625$

$f(0,625) = -0,010$

Jadi akar terletak antara 0,5 dan 0,625

$X_3 = (0,5 + 0,625) / 2 = 0,5625$

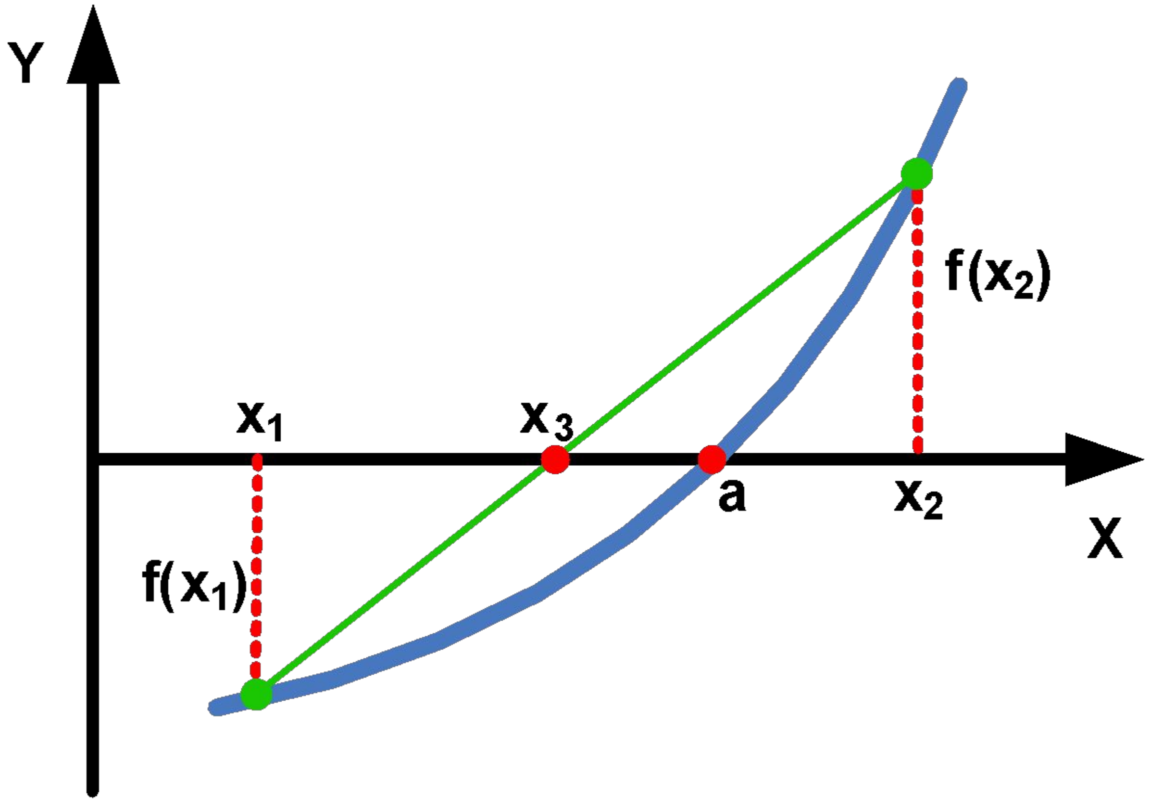
$E_a = 0,56714329 - 0,5625 = 0,004543$

$Er = 0,819\%$

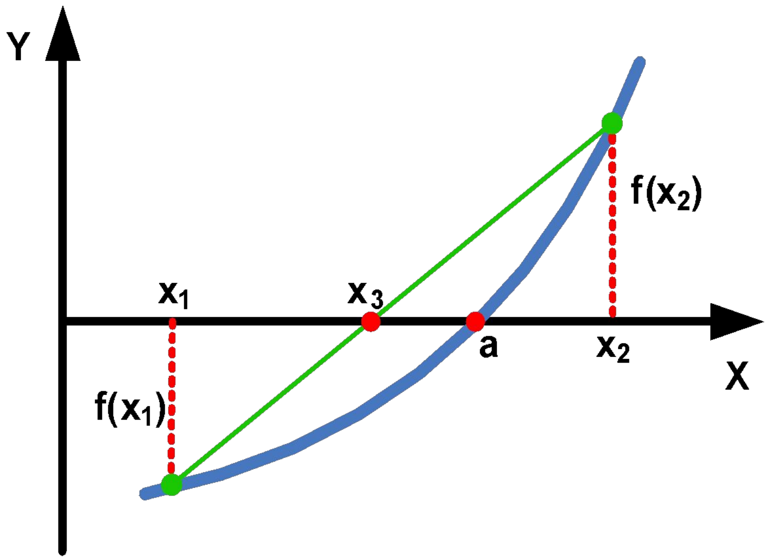
Metode Regula Falsi (1)

Disebut pula metode Posisi Salah atau metode Interpolasi Linier.

Metode yang pada banyak kasus sering memberikan hasil yang lebih baik ketimbang metode Bolzano ini, bekerja dengan meng-interpolasi-kan 2 nilai fungsi yang berlawanan tanda.



Metode Regula Falsi (2)



Persamaan garis yang dimaksud adalah :

$$Y - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

Karena garis tsb melalui titik $(x_3, 0)$, maka :

$$- f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x_3 - x_1)$$

Sebuah garis lurus yang ditarik melalui $(x_1, f(x_1))$ dan $(x_2, f(x_2))$ akan memotong sumbu X di x_3. Dan x_3 ini diyakini lebih dekat ke titik a (titik potong fungsi f(x) dengan sumbu X), daripada a ke x_1 atau x_2.

Persamaan di atas dapat pula ditulis :

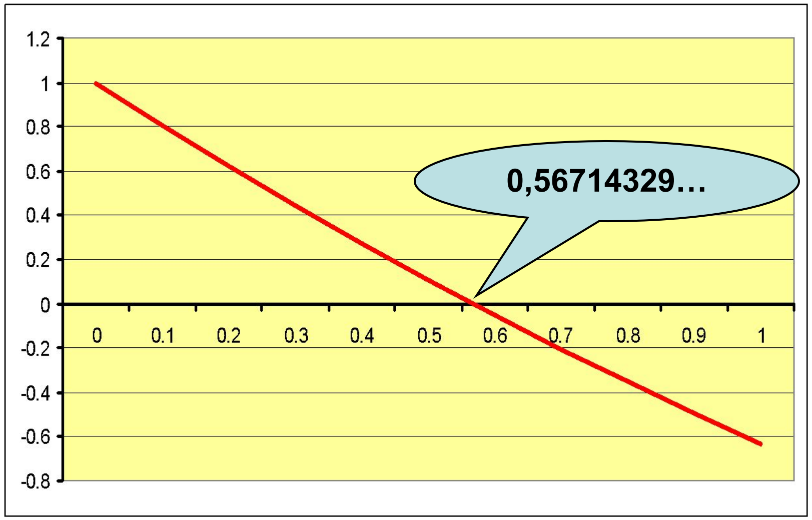
$$x_3 = \frac{x_1 \, f(x_2) - x_2 \, f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

atau,

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2) \cdot (x_1 - x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}$$

Metode Regula Falsi (3)

contoh : **bagaimana proses numeris fungsi $f(x) = e^{-x} - x$ dengan Regula Falsi**



Masih dari grafik & tabulasi, kita mendapatkan harga awal proses kita, yaitu :

$x_1 = 0$ dengan $f(x_1) = 1$

$x_2 = 1$ dengan $f(x_2) = -0,63212$

berarti

$x_3 = 1 - [-0,63212 \,.\, (0-1)] \,/\, 1 - (-0,63212)$

$= 0,6127$

$E_r = 8,0\%$

Iterasi berikutnya:

$f(x_3) = -0,0708$

Karena nilai $f(x_3) > f(x_2)$, maka x_3 menjadi batas atas sub-interval berikutnya:

$x_1 = 0$ dengan $f(x_1) = 1$

$x_3 = 0,6127$ dengan $f(x_3) = -0,0708$

$x_4 = 0,57219$ (dengan $E_r = 7,08\%$)

Iterasi dapat dilanjutkan untuk semakin mendekatkan hasil.

Latihan (1)

1. Dengan metode Grafik, dapatkan akar-akar persamaan :
   a. $e^x - x - 2 = 0$ d. $-2,1 + 6,21x - 3,9x^2 + 0,667x^3$
   b. $10^x = 100 - 2x$ e. $(1 - 0,6x) / x$
   c. $-0,874x^2 + 1,75x + 2,627$ f. $9,36 - 21,963x + 16,2965x^2 - 3,70377x^3$

2. Sekarang lengkapi jawaban no.1 di atas dengan metode Tabulasi.

2. Dengan metode Bolzano, dapatkan akar-akar persamaan :
   a. $x^3 - 3x + 1 = 0$ (x_0=1,5; s/d 3D) d. $\ln x = 1 + 1/x^2$ (x_0=3; s/d 4D)
   b. $\cos x = 3x$ (x_0=0,3; s/d 5D) e. $e^x - \ln x = 20$ (x_0=3; s/d 5D)
   c. $10^x = 100 - 2x$ (x_0=2; s/d 4D) f. $10^x - 1$ (x_0=0; s/d 4D)

4. Dengan metode Regula Falsi, dapatkan akar-akar persamaan :
   a. $\sin x = 5x - 2$ (x_0=0,4; s/d 4D) d. $\ln x = 1 + 1/x^2$ (x_0=3; s/d 4D)
   b. $e^x = 2x + 21$ (x_0=3; s/d 4D) e. $x^x = 10$ (x_0=2,5; s/d 4D)
   c. $\cos x = 3x$ (x_0=0,3; s/d 5D) f. $x^3 - 100$ (x_0=4; s/d 3D)

Latihan (2)

5. Buatlah suatu analisa mengenai metode yang memiliki tingkat akurasi & presisi yang paling tinggi dalam menyelesaikan persamaan berikut :

$$f(x) = (1 – 0,6x) / x$$

perhitungan dibuat sampai 3 iterasi dengan x_0 = 2.

6. Anda sudah mengerti algoritma pemrosesan metode Bolzano, dan anda sudah memahami cara kerjanya. Sekarang anda tinggal mengimplementasikan algoritma tersebut menjadi sebuah program komputer metode Bolzano (yang dapat menampilkan proses iteratif numerik *plus* grafik fungsinya sekaligus).

Praktikum - 1

Anda sudah mengerti algoritma pemrosesan metode Regula Falsi, dan anda sudah memahami cara kerjanya. Sekarang anda tinggal mengimplementasikan algoritma tersebut menjadi sebuah program komputer metode Regula Falsi (yang dapat menampilkan proses iteratif numerik, lengkap dengan grafik fungsinya).