可換環の局所化

ふらすか *

2022 年 9 月 25 日

以下, 環といえば可換環を指すものとする.

1　環の局所化

definition 1.1. R を環とする. R の空でない部分集合 S が $1 \in S$ かつ, $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$ を満たす時, S を積閉集合という.

proposition 1.2. R を環とし, S をその積閉集合とする. $R \times S$ に次のような関係 ” $\sim$ ” を定める.
任意の $(a, s), (b, t) \in R \times S$ に対して,
$(a, s) \sim (b, t) :\Leftrightarrow$ ある $u \in S$ が存在して,$u(at - bs) = 0$
このようにして定めた関係 $\sim$ は同値関係になる.

proof 1. 推移律のみ示す.
$(a, s) \sim (b, t), (b, t) \sim (c, u)$ と仮定する. この時ある $v, w \in S$ が存在して,$v(at - bs) = 0,\ w(bu - ct) = 0$ となる. $wv(at - bs)u = 0,\ vw(bu - ct)s = 0$ であるから,$wvatu - wvcts = wvt(au - cs) = 0$ を得る. 積閉集合の定義から $wvt \in S$ であるから, $(a, s) \sim (c, u)$ である.♡

definition 1.3. R を環とし,S をその積閉集合とする. 上で得られた同値関係 $\sim$ によって $R \times S$ を割ることにより環 $S^{-1}R := (R \times S)/\sim$ を得る. この操作を環の局所化と言い, $S^{-1}R$ を S に関する R の商環という. また $(a, s) \in R \times S$ を代表元とする $S^{-1}R$ の元を a/s で表す.

proposition 1.4. 任意の $a/s, b/s \in S^{-1}R$ に対して, 和を $a/s + b/t := (at + bs)/st$, 積を $a/s \times b/t := ab/st$ と定めることにより $S^{-1}R$ は環になる.

本来ならば上で定めた演算（写像）が well-defind であることを示さなければならないが, ここでは割愛する.

2　環の局所化は完全関手

* Twitter:@flasca495, mail:flasca495@gmail.com