

内容版权万学所有，盗版必究

2024年全国硕士研究生招生考试数学(三)试题



选择题 (共10题, 共50分)

1. (单选题) 5分

设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+nx^{2n}}$, 则 $f(x)()$

- A. 在 $x = 1$, $x = -1$ 处都连续 B. 在 $x = 1$ 处连续, $x = -1$ 处不连续
 C. 在 $x = 1$, $x = -1$ 处都不连续 D. 在 $x = 1$ 处不连续, $x = -1$ 处连续

2. (单选题) 5分

设 $I = \int_a^{a+k\pi} |\sin x| dx$, k 为整数, 则 I 的值()

- A. 只与 a 有关 B. 只与 k 有关 C. 与 a , k 均有关 D. 与 a , k 均无关

3. (单选题) 5分

设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = ()$

- A. $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx$ B. $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx$
 C. $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx$ D. $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx$

4. (单选题) 5分

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $\ln(2+x)$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_{2n} = ()$

- A. $-\frac{1}{6}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{3}$

5. (单选题) 5分

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 在正交变换下可化成 $y_1^2 - 2y_2^2 + 3y_3^2$, 则二次型的矩阵 A 的行列式与迹分别为()

- A. -6, -2 B. 6, -2 C. -6, 2 D. 6, 2

6. (单选题) 5分

设 A 为 3 阶矩阵, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 若 $P^T A P^2 = \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}$, 则 $A = ()$

- A. $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

7. (单选题) 5分

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a+1 & b & 3 \\ a & \frac{b}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, M_{ij} 表示 A 的 i 行 j 列元素的余子式. 若 $|A| = -\frac{1}{2}$, 且 $-M_{21} + M_{22} - M_{23} = 0$, 则()

- A. $a = 0$ 或 $a = -\frac{3}{2}$ B. $a = 0$ 或 $a = \frac{3}{2}$ C. $b = 1$ 或 $b = -\frac{1}{2}$ D. $b = -1$ 或 $b = \frac{1}{2}$

8. (单选题) 5分

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则 X 的三阶中心距

$$E(X - EX)^3 = ()$$

- A. $-\frac{1}{32}$ B. 0 C. $\frac{1}{16}$ D. $\frac{1}{2}$

9. (单选题) 5分

随机变量X, Y相互独立, 其 $X \sim N(0, 2)$, $Y \sim N(-1, 1)$, 记

$$p_1 = P\{2X > Y\}, \quad p_2 = P\{X - 2Y > 1\}, \text{ 则} ()$$

- A. $p_1 > p_2 > \frac{1}{2}$ B. $p_2 > p_1 > \frac{1}{2}$ C. $p_1 < p_2 < \frac{1}{2}$ D. $p_2 < p_1 < \frac{1}{2}$

10. (单选题) 5分

设随机变量X, Y相互独立, 且均服从参数为 λ 的指数分布, 令 $Z = |X - Y|$, 则下列随机变量中与Z同分布的是()

- A. $X + Y$ B. $\frac{X+Y}{2}$ C. $2X$ D. X

选择题 (共10题, 共50分)

1. (单选题) 5分

设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+nx^{2n}}$, 则 $f(x) ()$

- A. 在 $x = 1$, $x = -1$ 处都连续 B. 在 $x = 1$ 处连续, $x = -1$ 处不连续
C. 在 $x = 1$, $x = -1$ 处都不连续 D. 在 $x = 1$ 处不连续, $x = -1$ 处连续

2. (单选题) 5分

设 $I = \int_a^{a+k\pi} |\sin x| dx$, k 为整数, 则 I 的值()

- A. 只与 a 有关 B. 只与 k 有关 C. 与 a , k 均有关 D. 与 a , k 均无关

3. (单选题) 5分

设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = ()$

- A. $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx$ B. $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx$
C. $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx$ D. $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx$

4. (单选题) 5分

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $\ln(2+x)$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_{2n} = ()$

A. $-\frac{1}{6}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{3}$

5. (单选题) 5分

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 在正交变换下可化成 $y_1^2 - 2y_2^2 + 3y_3^2$, 则二次型f的矩阵A的行列式与迹分别为()

A. -6, -2 B. 6, -2 C. -6, 2 D. 6, 2

6. (单选题) 5分

设A为3阶矩阵, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 若 $P^T A P^2 = \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}$, 则 $A = ()$

A. $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

7. (单选题) 5分

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a+1 & b & 3 \\ a & \frac{b}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, M_{ij} 表示A的i行j列元素的余子式. 若 $|A| = -\frac{1}{2}$, 且 $-M_{21} + M_{22} - M_{23} = 0$, 则()

A. $a = 0$ 或 $a = -\frac{3}{2}$ B. $a = 0$ 或 $a = \frac{3}{2}$ C. $b = 1$ 或 $b = -\frac{1}{2}$ D. $b = -1$ 或 $b = \frac{1}{2}$

8. (单选题) 5分

设随机变量X的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则X的三阶中心距 $E(X - EX)^3 = ()$

A. $-\frac{1}{32}$ B. 0 C. $\frac{1}{16}$ D. $\frac{1}{2}$

9. (单选题) 5分

随机变量X, Y相互独立, 其 $X \sim N(0, 2)$, $Y \sim N(-1, 1)$, 记

$p_1 = P\{2X > Y\}$, $p_2 = P\{X - 2Y > 1\}$, 则()

A. $p_1 > p_2 > \frac{1}{2}$ B. $p_2 > p_1 > \frac{1}{2}$ C. $p_1 < p_2 < \frac{1}{2}$ D. $p_2 < p_1 < \frac{1}{2}$

10. (单选题) 5分

设随机变量X, Y相互独立, 且均服从参数为 λ 的指数分布, 令 $Z = |X - Y|$, 则下列随机变量中与Z同分布的是()

A. $X + Y$ B. $\frac{X+Y}{2}$ C. $2X$ D. X

填空题 (共6题, 共30分)

11. (填空题) 5分

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^x \frac{(1+t^2) \sin t^2}{1+\cos t^2} dt$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. (填空题) 5分

$$\int_2^{+\infty} \frac{5}{x^4 + 3x^2 - 4} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

13. (填空题) 5分

函数 $f(x, y) = 2x^3 - 9x^2 - 6y^4 + 12x + 24y$ 的极值点是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. (填空题) 5分

某产品的价格函数为 $p = \begin{cases} 25 - 0.25Q, & Q \leq 20, \\ 35 - 0.75Q, & Q > 20 \end{cases}$ (p 为单价, 单位: 万元; Q 为产量, 单位: 件), 总成本函数为 $C = 150 + 5Q + 0.25Q^2$ (万元), 则经营该产品可获得的最大利润为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (万元).

15. (填空题) 5分

设 A 为 3 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, E 为 3 阶单位矩阵. 若 $r(2E - A) = 1$, $r(E + A) = 2$, 则 $|A^*| = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. (填空题) 5分

设随机试验每次成功的概率为 p , 现进行 3 次独立重复试验, 在至少成功 1 次的条件下 3 次试验全部成功的概率为 $\frac{4}{13}$, 则 $p = \underline{\hspace{2cm}}$.

填空题 (共6题, 共30分)

11. (填空题) 5分

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^x \frac{(1+t^2) \sin t^2}{1+\cos t^2} dt$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. (填空题) 5分

$$\int_2^{+\infty} \frac{5}{x^4 + 3x^2 - 4} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

13. (填空题) 5分

函数 $f(x, y) = 2x^3 - 9x^2 - 6y^4 + 12x + 24y$ 的极值点是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. (填空题) 5分

某产品的价格函数为 $p = \begin{cases} 25 - 0.25Q, & Q \leq 20, \\ 35 - 0.75Q, & Q > 20 \end{cases}$ (p 为单价, 单位: 万元; Q 为产量, 单位: 件), 总成本函数为 $C = 150 + 5Q + 0.25Q^2$ (万元), 则经营该产品可获得的最大利润为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (万元).

15. (填空题) 5分

设 A 为 3 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, E 为 3 阶单位矩阵. 若 $r(2E - A) = 1$, $r(E + A) = 2$, 则 $|A^*| = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. (填空题) 5分

设随机试验每次成功的概率为 p , 现进行 3 次独立重复试验, 在至少成功 1 次的条件下 3 次试验全部成功的概率为 $\frac{4}{13}$, 则 $p = \underline{\hspace{2cm}}$.

解答题 (共6题, 共70分)

17. (解答题) 10分

设平面有界区域 D 位于第一象限, 由曲线 $xy = \frac{1}{3}$, $xy = 3$ 与直线 $y = \frac{1}{3}x$, $y = 3x$ 围成, 计算 $\iint_D (1 + x - y) dx dy$.

18. (解答题) 12分

设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z + e^x - y \ln(1 + z^2) = 0$ 确定, 求 $(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2})|_{(0,0)}$.

19. (解答题) 12分

设 $t > 0$, 平面有界区域 D 由曲线 $y = xe^{-2x}$ 与直线 $x = t$, $x = 2t$ 及 x 轴围成, D 的面积为 $S(t)$, 求 $S(t)$ 的最大值.

20. (解答题) 12分

设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, 且 $f'(0) = f'(1)$, $|f''(x)| \leq 1$. 证明:

(1) 当 $x \in (0, 1)$ 时, $|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}$;

(2) $|\int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2}| \leq \frac{1}{12}$.

21. (解答题) 12分

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & a-1 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, 向量

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(1) 证明: 方程组 $Ax = \alpha$ 的解均为方程组 $Bx = \beta$ 的解;

(2) 若方程组 $Ax = \alpha$ 与方程组 $Bx = \beta$ 不同解, 求 a 的值.

22. (解答题) 12分

设总体 X 服从 $[0, \theta]$ 上的均匀分布, 其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数. X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, 记 $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$,

$T_c = cX_{(n)}$.

(1) 求 c , 使得 $E(T_c) = \theta$;

(2) 记 $h(c) = E(T_c - \theta)^2$, 求 c 使得 $h(c)$ 最小.

解答题 (共6题, 共70分)

17. (解答题) 10分

设平面有界区域 D 位于第一象限, 由曲线 $xy = \frac{1}{3}$, $xy = 3$ 与直线 $y = \frac{1}{3}x$, $y = 3x$ 围成, 计算 $\iint_D (1 + x - y) dx dy$.

18. (解答题) 12分

设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z + e^x - y \ln(1 + z^2) = 0$ 确定, 求 $(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2})|_{(0,0)}$.

19. (解答题) 12分

设 $t > 0$, 平面有界区域 D 由曲线 $y = xe^{-2x}$ 与直线 $x = t$, $x = 2t$ 及 x 轴围成, D 的面积为 $S(t)$, 求 $S(t)$ 的最大值.

20. (解答题) 12分

设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, 且 $f'(0) = f'(1)$, $|f''(x)| \leq 1$. 证明:

(1) 当 $x \in (0, 1)$ 时, $|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}$;

(2) $|\int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2}| \leq \frac{1}{12}$.

21. (解答题) 12分

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & a-1 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, 向量 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(1) 证明: 方程组 $Ax = \alpha$ 的解均为方程组 $Bx = \beta$ 的解;

(2) 若方程组 $Ax = \alpha$ 与方程组 $Bx = \beta$ 不同解, 求 a 的值.

22. (解答题) 12分

设总体 X 服从 $[0, \theta]$ 上的均匀分布, 其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数. X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, 记 $X_{(n)} = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$,

$T_c = cX_{(n)}$.

(1) 求 c , 使得 $E(T_c) = \theta$;

(2) 记 $h(c) = E(T_c - \theta)^2$, 求 c 使得 $h(c)$ 最小.

答案与解析

答案与解析

选择题

1. (单选题)

[正确答案] D

[试题解析]:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & |x| < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不连续.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 = f(-1)$,

所以 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处连续.

故选(D).

2. (单选题)

[正确答案] B

[试题解析]:

由于 $|\sin x|$ 的周期是 π ,

所以

$$\begin{aligned} I &= \int_a^{a+k\pi} |\sin x| dx \\ &= \int_0^{k\pi} |\sin x| dx = k \int_0^\pi |\sin x| dx = 2k, \end{aligned}$$

因此, 该积分值只与 k 有关.

故选(B).

3. (单选题)

[正确答案] A

[试题解析]:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx, \text{ 故选A.}$$

4. (单选题)

[正确答案] A

[试题解析]:

$$\begin{aligned} \ln(2+x) &= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2}x\right) \\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{n}. \end{aligned}$$

$$\text{所以, } a_n = \begin{cases} \ln 2, & n = 0 \\ (-1)^{n-1} \frac{1}{n 2^n}, & n \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{当 } n \geq 1, a_{2n} = -\frac{1}{2n \cdot 2^{2n}}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以, } \sum_{n=0}^{\infty} n a_{2n} &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(-\frac{1}{2n \cdot 2^{2n}}\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{6}, \end{aligned}$$

故选(A).

5. (单选题)

[正确答案] C

[试题解析]:

由题可知, A 的特征值为 $1, -2, 3$,

故 $|A| = 1 \times (-2) \times 3 = -6$, $tr(A) = 1 + (-2) + 3 = 2$, 故选C.

6. (单选题)

[正确答案] C

[试题解析]:

$$\text{由 } P^T A P^2 = \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 \text{则 } A &= (P^T)^{-1} \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix} (P^2)^{-1} \\
 &= (P^{-1})^T \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix} (P^{-1})^2 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \\
 &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

故选C.

7. (单选题)

[正确答案] B

[试题解析]:

由 $-M_{21} + M_{22} - M_{23} = 0$, 得 $A_{21} + A_{22} + A_{23} = 0$.

而 $A_{21} + A_{22} + A_{23}$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} a+1 & b & 3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & b-a-1 & 2-a \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a-b+1 = 0,
 \end{aligned}$$

于是 $b = a+1$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & a+1 & 3 \\ a & \frac{a+1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{(1-a)(2a-1)}{2} = -\frac{1}{2},$$

得 $a = 0$ 或 $a = \frac{3}{2}$.

故选(B).

8. (单选题)

[正确答案] B

[试题解析]:

$$EX = \int_0^1 x \cdot 6x(1-x)dx = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}
 E(X - EX)^3 &= \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^3 \cdot 6x(1-x)dx \\
 &= \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^3 \cdot 6x(1-x)dx = 0.
 \end{aligned}$$

故选(B).

9. (单选题)

[正确答案] B

[试题解析]:

$Y - 2X \sim N(-1, 3^2)$,

则 $p_1 = \Phi\left(\frac{0+1}{3}\right) = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) > \Phi(0) = \frac{1}{2}$.

$2Y - X \sim N(-2, \sqrt{6}^2)$,

则 $p_2 = \Phi\left(\frac{-1+2}{\sqrt{6}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) > \Phi(0) = \frac{1}{2}$.

因为 $\Phi(x)$ 单增, $\frac{\sqrt{6}}{6} > \frac{1}{3}$, 所以 $p_2 > p_1 > \frac{1}{2}$.
故选(B).

10. (单选题)

[正确答案] D

[试题解析]:

令 $Z = |X - Y|$, 则 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{|X - Y| \leq z\}$.

当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$;

当 $z \geq 0$ 时,

$$F_Z(z) = \iint_{|x-y| \leq z} f(x, y) dx dy = \iint_{|x-y| \leq z} \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx dy$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} dy \int_y^{y+z} \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx = 1 - e^{-\lambda z}.$$

所以 $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - e^{-\lambda z}, & z \geq 0 \end{cases}$. 显然 $Z = |X - Y|$ 与 X 同分布.

故选(D).

选择题

1. (单选题)

[正确答案] D

[试题解析]:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & |x| < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不连续.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$,

所以 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 = f(-1)$,

所以 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处连续.

故选(D).

2. (单选题)

[正确答案] B

[试题解析]:

由于 $|\sin x|$ 的周期是 π ,

所以

$$\begin{aligned} I &= \int_a^{a+k\pi} |\sin x| dx \\ &= \int_0^{k\pi} |\sin x| dx = k \int_0^{\pi} |\sin x| dx = 2k, \end{aligned}$$

因此, 该积分值只与 k 有关.

故选(B).

3. (单选题)

[正确答案] A

[试题解析]:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx, \text{ 故选A.}$$

4. (单选题)

[正确答案] A

[试题解析]:

$$\begin{aligned} \ln(2+x) &= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2}x\right) \\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{n}. \end{aligned}$$

$$\text{所以, } a_n = \begin{cases} \ln 2, & n = 0 \\ (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{2^2}}, & n \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{当 } n \geq 1, \quad a_{2n} = -\frac{1}{2n \cdot 2^{2n}}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以, } \sum_{n=0}^{\infty} n a_{2n} &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(-\frac{1}{2n \cdot 2^{2n}}\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{6}, \end{aligned}$$

故选(A).

5. (单选题)

[正确答案] C

[试题解析]:

由题可知, A 的特征值为 $1, -2, 3$,

故 $|A| = 1 \times (-2) \times 3 = -6$, $tr(A) = 1 + (-2) + 3 = 2$, 故选C.

6. (单选题)

[正确答案] C

[试题解析]:

$$\text{由 } P^T A P^2 = \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix},$$

$$\text{则 } A = (P^T)^{-1} \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix} (P^2)^{-1}$$

$$= (P^{-1})^T \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix} (P^{-1})^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

故选C.

7. (单选题)

[正确答案] B

[试题解析]:

由 $-M_{21} + M_{22} - M_{23} = 0$, 得 $A_{21} + A_{22} + A_{23} = 0$.

而 $A_{21} + A_{22} + A_{23}$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} a+1 & b & 3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & b-a-1 & 2-a \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a-b+1 = 0,
 \end{aligned}$$

于是 $b = a+1$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & a+1 & 3 \\ a & \frac{a+1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{(1-a)(2a-1)}{2} = -\frac{1}{2},$$

得 $a = 0$ 或 $a = \frac{3}{2}$.

故选(B).

8. (单选题)

[正确答案] B

[试题解析]:

$$EX = \int_0^1 x \cdot 6x(1-x)dx = \frac{1}{2},$$

$$E(X-EX)^3 = \int_0^1 (x-EX)^3 \cdot 6x(1-x)dx$$

$$= \int_0^1 (x-\frac{1}{2})^3 \cdot 6x(1-x)dx = 0.$$

故选(B).

9. (单选题)

[正确答案] B

[试题解析]:

$$Y-2X \sim N(-1, 3^2),$$

$$\text{则 } p_1 = \Phi\left(\frac{0+1}{3}\right) = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) > \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

$$2Y-X \sim N(-2, \sqrt{6}^2),$$

$$\text{则 } p_2 = \Phi\left(\frac{-1+2}{\sqrt{6}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) > \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

因为 $\Phi(x)$ 单增, $\frac{\sqrt{6}}{6} > \frac{1}{3}$, 所以 $p_2 > p_1 > \frac{1}{2}$.

故选(B).

10. (单选题)

[正确答案] D

[试题解析]:

令 $Z = |X - Y|$, 则 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{|X - Y| \leq z\}$.当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$;当 $z \geq 0$ 时,

$$F_Z(z) = \iint_{|x-y| \leq z} f(x, y) dx dy = \iint_{|x-y| \leq z} \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx dy \\ = 2 \int_0^{+\infty} dy \int_y^{y+z} \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx = 1 - e^{-\lambda z}.$$

所以 $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - e^{-\lambda z}, & z \geq 0 \end{cases}$. 显然 $Z = |X - Y|$ 与 X 同分布.

故选(D).

填空题

11. (填空题)

令 $f(x) = \int_0^x \frac{(1+t^2) \sin t^2}{1+\cos t^2} dt$, 则 $f'(x) = \frac{(1+x^2) \sin x^2}{1+\cos^2 x} \sim \frac{x^2}{2}$,所以 $f(x) \sim \frac{x^3}{6}$, 则 $k = 3$.

12. (填空题)

$$\begin{aligned} \text{令 } f(x) &= \frac{5}{x^4 + 3x^2 - 4} = \frac{5}{(x^2 + 4)(x^2 - 1)} \\ &= \frac{5}{(x-1)(x+1)(x^2+4)} \\ &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} \\ &= \frac{A(x+1)(x^2+4) + B(x-1)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+4)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (4A+4B-C)x + (4A-4B-D)}{(x-1)(x+1)(x^2+4)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - B + D = 0 \\ 4A + 4B - C = 0 \\ 4A - 4B - D = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \\ C = 0 \\ D = -1 \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+4}$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= \int_2^{+\infty} \frac{5}{x^4 + 3x^2 - 4} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx - \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+4} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} \Big|_2^{+\infty} - \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \Big|_2^{+\infty} \\ &= 0 - \frac{1}{2} \times \ln \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{8}\pi. \end{aligned}$$

13. (填空题)

$$\text{由 } \begin{cases} f'_x(x, y) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \\ f'_y(x, y) = -24y^3 + 24 = 0 \end{cases}$$

得: 驻点 $(1, 1)$ 和 $(2, 1)$

$$f''_{xx}(x, y) = 12x - 18, \quad f''_{yy}(x, y) = -72y^2, \quad f''_{xy}(x, y) = 0.$$

1)对于驻点(1, 1): $A = -6$, $B = 0$, $C = -72$,

由 $AC - B^2 > 0$ 且 $A < 0$ 可知, 驻点(1, 1)是 $f(x, y)$ 的极小值点.

2)对于驻点(2, 1): $A = 6$, $B = 0$, $C = -72$,

由 $AC - B^2 < 0$ 可知, 驻点(2, 1)不是 $f(x, y)$ 的极值点.

故 $f(x, y)$ 的极值点是(1, 1).

14. (填空题)

$$L(Q) = R - C = PQ - C \\ = \begin{cases} -0.5Q^2 + 20Q - 150, & Q \leq 20 \\ -Q^2 + 30Q - 150, & Q > 20 \end{cases}$$

$$L'(Q) = \begin{cases} -Q + 20, & Q < 20 \\ -2Q + 30, & Q > 20 \end{cases}$$

$$L'_{+}(20) = -10, L'_{-}(20) = 0,$$

则 $Q = 20$ 为 $L(Q)$ 的不可导点.

$Q < 20$ 时, $L'(Q) > 0$; $Q > 20$ 时, $L'(Q) < -10 < 0$,

则 $Q = 20$ 为唯一极大值点, 也是最大值点.

$L(20) = 50$, 所以最大利润为50.

15. (填空题)

$r(2E - A) = 1$, 故 $\lambda = 2$ 至少为 A 的二重特征值.

由 $r(E + A) = 2$, 故 $\lambda = -1$ 至少为 A 的一重特征值,

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$, 则 $|A| = -4$,

$$|A^*| = |A|^2 = 16.$$

16. (填空题)

设随机变量 X 表示三次试验中成功的次数, 则 $X \sim B(3, p)$.

$$\text{所以 } P\{X = 3 | X \geq 1\} = \frac{P\{X=3, X \geq 1\}}{P\{X \geq 1\}} = \frac{P\{X=3\}}{P\{X \geq 1\}}$$

$$= \frac{C_3^3 p^3}{1 - C_3^0 (1-p)^3} = \frac{4}{13},$$

$$\text{故 } p = \frac{2}{3}.$$

填空题

11. (填空题)

$$\text{令 } f(x) = \int_0^x \frac{(1+t^2) \sin t^2}{1+\cos t^2} dt, \text{ 则 } f'(x) = \frac{(1+x^2) \sin x^2}{1+\cos^2 x} \sim \frac{x^2}{2},$$

$$\text{所以 } f(x) \sim \frac{x^3}{6}, \text{ 则 } k = 3.$$

12. (填空题)

$$\text{令 } f(x) = \frac{5}{x^4 + 3x^2 - 4} = \frac{5}{(x^2 + 4)(x^2 - 1)}$$

$$= \frac{5}{(x-1)(x+1)(x^2+4)}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$= \frac{A(x+1)(x^2+4) + B(x-1)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-1)}{A(x+1)(x^2+4) + B(x-1)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-1)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x-1)(x+1)(x^2+4)}{(A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (4A+4B-C)x + (4A-4B-D)} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ 4A+4B-C=0 \\ 4A-4B-D=5 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=0 \\ D=-1 \end{array} \right. \\
 \therefore & \left\{ \begin{array}{l} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=0 \\ D=-1 \end{array} \right. \\
 \therefore f(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^4+3x^2-4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+4} - \frac{1}{x^2+4} \\
 \therefore I &= \int_2^{\infty} \frac{5}{x^4+3x^2-4} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_2^{\infty} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx - \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2+4} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|_2^{\infty} - \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} |_2^{\infty} \\
 &= 0 - \frac{1}{2} \times \ln \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{8} \pi.
 \end{aligned}$$

13. (填空题)

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \\ f'_y(x, y) = -24y^3 + 24 = 0 \end{cases}$$

得: 驻点(1, 1)和(2, 1)

$$f''_{xx}(x, y) = 12x - 18, \quad f''_{yy}(x, y) = -72y^2, \quad f''_{xy}(x, y) = 0.$$

1) 对于驻点(1, 1): $A = -6, B = 0, C = -72$,由 $AC - B^2 > 0$ 且 $A < 0$ 可知, 驻点(1, 1)是 $f(x, y)$ 的极小值点.2) 对于驻点(2, 1): $A = 6, B = 0, C = -72$,由 $AC - B^2 < 0$ 可知, 驻点(2, 1)不是 $f(x, y)$ 的极值点.故 $f(x, y)$ 的极值点是(1, 1).

14. (填空题)

$$\begin{aligned}
 L(Q) &= R - C = PQ - C \\
 &= \begin{cases} -0.5Q^2 + 20Q - 150, & Q \leq 20 \\ -Q^2 + 30Q - 150, & Q > 20 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$L'(Q) = \begin{cases} -Q + 20, & Q < 20 \\ -2Q + 30, & Q > 20 \end{cases}$$

$$L'_{+}(20) = -10, \quad L'_{-}(20) = 0,$$

则 $Q = 20$ 为 $L(Q)$ 的不可导点. $Q < 20$ 时, $L'(Q) > 0$; $Q > 20$ 时, $L'(Q) < -10 < 0$,则 $Q = 20$ 为唯一极大值点, 也是最大值点. $L(20) = 50$, 所以最大利润为50.

15. (填空题)

 $r(2E - A) = 1$, 故 $\lambda = 2$ 至少为 A 的二重特征值.由 $r(E + A) = 2$, 故 $\lambda = -1$ 至少为 A 的一重特征值,故 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$, 则 $|A| = -4$,

$$|A^*| = |A|^2 = 16.$$

16. (填空题)

设随机变量 X 表示三次试验中成功的次数, 则 $X \sim B(3, p)$.

所以 $P\{X=3|X \geq 1\} = \frac{P\{X=3, X \geq 1\}}{P\{X \geq 1\}} = \frac{P\{X=3\}}{P\{X \geq 1\}}$
 $= \frac{C_3^3 p^3}{1 - C_3^0 (1-p)^3} = \frac{4}{13}$,
故 $p = \frac{2}{3}$.

解答题

17. (解答题)

积分区域 D 关于 $y = x$ 对称, 由轮换对称性可得,

$$\iint_D (1+x-y) dx dy = \iint_D (1+y-x) dx dy,$$

故

$$\begin{aligned} & \iint_D (1+x-y) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\iint_D (1+x-y) dx dy + \iint_D (1+y-x) dx dy \right) \\ &= \iint_D 1 dx dy \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^1 (3x - \frac{1}{3x}) dx + \int_1^3 (\frac{3}{x} - \frac{x}{3}) dx \\ &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \ln 3 + 3 \ln 3 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \ln 3. \end{aligned}$$

18. (解答题)

将 $(x, y) = (0, 0)$ 代入原方程得 $z(0, 0) = -1$;

原方程对 x 求偏导, 得: $z'_x + e^x - y \cdot \frac{2zz'_x}{1+z^2} = 0$ ①,

从而 $z'_x(0, 0) = -1$;

①式对 x 求偏导, 得: $z''_{xx} + e^x - y \cdot \frac{\partial(\frac{2zz'_x}{1+z^2})}{\partial x} = 0$,

从而 $z''_{xx}(0, 0) = -1$;

原方程对 y 求偏导, 得: $z'_y - \ln(1+z^2) - y \cdot \frac{2zz'_y}{1+z^2} = 0$ ②,

从而 $z'_y(0, 0) = \ln 2$;

②式对 y 求偏导得 $z''_{yy} - \frac{2zz'_y}{1+z^2} - \frac{2zz'_y}{1+z^2} - y \cdot \frac{\partial(\frac{2zz'_y}{1+z^2})}{\partial y} = 0$,

从而 $z''_{yy}(0, 0) = -2 \ln 2$;

综上, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \Big|_{(0,0)} = -1 - 2 \ln 2$.

19. (解答题)

$$S(t) = \int_t^{2t} x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \left[(2t + \frac{1}{2}) e^{-4t} - (t + \frac{1}{2}) e^{-2t} \right]$$

则 $S'(t) = -te^{-2t}(1-4e^{-2t})$, 令 $S'(t) = 0 \Rightarrow t = \ln 2$,

$\because t \in (\ln 2 - \delta, \ln 2)$ 有 $S'(t) > 0$, $t \in (\ln 2, \ln 2 + \delta)$ 有

$S'(t) < 0$,

$\therefore t = \ln 2$ 为 $S(t)$ 的唯一的极大值点, 也是最大值点,

故最大值为 $S(\ln 2) = \frac{1}{16}(\ln 2 + \frac{3}{4})$.

20. (解答题)

(1) 因 $|f''(x)| \leq 1$, 则 $-1 \leq f''(x) \leq 1$.

令 $F(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x - \frac{x(1-x)}{2}$, $x \in (0, 1)$.

$F(0) = 0$, $F(1) = 0$, $F''(x) = f''(x) + 1 \geq 0$,

则 $F(x)$ 为凹函数, 所以 $F(x) \leq 0$.

故 $f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \leq \frac{x(1-x)}{2}$ ①.

令 $G(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x + \frac{x(1-x)}{2}$, $x \in (0, 1)$

$G(0) = 0$, $G(1) = 0$, $G''(x) = f''(x) - 1 \leq 0$,

则 $G(x)$ 为凸函数, 所以 $G(x) \geq 0$.

故 $f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \geq -\frac{x(1-x)}{2}$ ②.

综上①②, 得: $|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}$,

$x \in (0, 1)$.

(2) 由①知, $f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \leq \frac{x(1-x)}{2}$, $x \in (0, 1)$.

$\Rightarrow \int_0^1 [f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x] dx \leq \int_0^1 \frac{x(1-x)}{2} dx$,

$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \leq \frac{1}{12}$. ③

由②知, $f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \geq -\frac{x(1-x)}{2}$, $x \in (0, 1)$.

$\Rightarrow \int_0^1 [f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x] dx \geq \int_0^1 -\frac{x(1-x)}{2} dx$,

$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \geq -\frac{1}{12}$. ④

综上③④: $\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \right| \leq \frac{1}{12}$.

21. (解答题)

(1) 证明:

由于 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a & a-1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $r \begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix} = r(A \alpha)$, 故 $\begin{cases} Ax = \alpha \\ Bx = \beta \end{cases}$ 与 $Ax = \alpha$ 同解,

所以 $Ax = \alpha$ 的解均为 $Bx = \beta$ 的解.

(2) 由于 $Ax = \alpha$ 的解均为 $Bx = \beta$ 的解,

若 $Ax = \alpha$ 与 $Bx = \beta$ 同解, 则与题意矛盾, 故 $Ax = \alpha$ 的解是 $Bx = \beta$ 解的真子集, 故 $Ax = 0$ 基础解系中解向量的个数小于 $Bx = 0$ 基础解系中解向量的个数, 则 $3 - r(A) < 3 - r(B)$, 故 $r(A) > r(B)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

又 $r(A) = 3$, 故 $r(B) < 3$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$, 得 $a = 1$.

22. (解答题)

(1) X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\theta}x, & 0 \leq x < \theta \\ 1, & x \geq \theta \end{cases}$.

$X_{(n)}$ 的分布函数为:

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(x) &= P\{\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq x\} \\ &= P\{X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x\} \\ &= P\{X_1 \leq x\} \cdot P\{X_2 \leq x\} \cdots \cdots P\{X_n \leq x\} = F^n(x), \end{aligned}$$

$X_{(n)}$ 概率密度为

$$\begin{aligned} f_{X_{(n)}}(x) &= nF^{n-1}(x) \cdot f(x) \\ &= \begin{cases} \frac{n}{\theta^n}x^{n-1}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}. \end{aligned}$$

$$E(T_c) = cE(X_{(n)}) = c \int_0^\theta x \cdot \frac{n}{\theta^n}x^{n-1} dx = \frac{cn}{n+1}\theta.$$

$$\text{令 } E(T_c) = \frac{cn}{n+1}\theta = \theta, \text{ 得 } c = \frac{n+1}{n}.$$

$$(2) E(T_c^2) = c^2 E(X_{(n)}^2) = c^2 \int_0^\theta x^2 \cdot \frac{n}{\theta^n}x^{n-1} dx = \frac{c^2 n}{n+2}\theta^2.$$

$$\begin{aligned} \text{又 } h(c) &= E(T_c - \theta)^2 \\ &= E(T_c^2 - 2\theta T_c + \theta^2) \\ &= E(T_c^2) - 2\theta E(T_c) + \theta^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{c^2 n}{n+2}\theta^2 - \frac{2cn}{n+1}\theta^2 + \theta^2.$$

$$h'(c) = \frac{2cn}{n+2}\theta^2 - \frac{2n}{n+1}\theta^2,$$

$$\text{令 } h'(c) = 0 \text{ 得 } c = \frac{n+2}{n+1}.$$

$$h''(c) = \frac{2n}{n+2}\theta^2 > 0,$$

所以当 $c = \frac{n+2}{n+1}$ 时, $h(c)$ 最小.

选择题 (共10题, 共50分)

1. (单选题) 5分

设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+nx^{2n}}$, 则 $f(x)()$

- A. 在 $x = 1$, $x = -1$ 处都连续 B. 在 $x = 1$ 处连续, $x = -1$ 处不连续
 C. 在 $x = 1$, $x = -1$ 处都不连续 D. 在 $x = 1$ 处不连续, $x = -1$ 处连续

2. (单选题) 5分

设 $I = \int_a^{a+k\pi} |\sin x| dx$, k 为整数, 则 I 的值()

- A. 只与 a 有关 B. 只与 k 有关 C. 与 a , k 均有关 D. 与 a , k 均无关

3. (单选题) 5分

设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = ()$

- A. $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx$ B. $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx$
 C. $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx$ D. $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx$

4. (单选题) 5分

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $\ln(2+x)$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_{2n} = ()$

- A. $-\frac{1}{6}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{3}$

5. (单选题) 5分

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 在正交变换下可化成 $y_1^2 - 2y_2^2 + 3y_3^2$, 则二次型的矩阵 A 的行列式与迹分别为()

- A. -6, -2 B. 6, -2 C. -6, 2 D. 6, 2

6. (单选题) 5分

设 A 为 3 阶矩阵, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 若 $P^T A P^2 = \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}$, 则 $A = ()$

- A. $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

7. (单选题) 5分

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a+1 & b & 3 \\ a & \frac{b}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, M_{ij} 表示 A 的 i 行 j 列元素的余子式. 若 $|A| = -\frac{1}{2}$, 且 $-M_{21} + M_{22} - M_{23} = 0$, 则()

- A. $a = 0$ 或 $a = -\frac{3}{2}$ B. $a = 0$ 或 $a = \frac{3}{2}$ C. $b = 1$ 或 $b = -\frac{1}{2}$ D. $b = -1$ 或 $b = \frac{1}{2}$

8. (单选题) 5分

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则 X 的三阶中心距

$$E(X - EX)^3 = ()$$

- A. $-\frac{1}{32}$ B. 0 C. $\frac{1}{16}$ D. $\frac{1}{2}$

9. (单选题) 5分

随机变量X, Y相互独立, 其 $X \sim N(0, 2)$, $Y \sim N(-1, 1)$, 记

$$p_1 = P\{2X > Y\}, \quad p_2 = P\{X - 2Y > 1\}, \text{ 则} ()$$

- A. $p_1 > p_2 > \frac{1}{2}$ B. $p_2 > p_1 > \frac{1}{2}$ C. $p_1 < p_2 < \frac{1}{2}$ D. $p_2 < p_1 < \frac{1}{2}$

10. (单选题) 5分

设随机变量X, Y相互独立, 且均服从参数为 λ 的指数分布, 令 $Z = |X - Y|$, 则下列随机变量中与Z同分布的是()

- A. $X + Y$ B. $\frac{X+Y}{2}$ C. $2X$ D. X

选择题 (共10题, 共50分)

1. (单选题) 5分

设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+nx^{2n}}$, 则 $f(x) ()$

- A. 在 $x = 1$, $x = -1$ 处都连续 B. 在 $x = 1$ 处连续, $x = -1$ 处不连续
C. 在 $x = 1$, $x = -1$ 处都不连续 D. 在 $x = 1$ 处不连续, $x = -1$ 处连续

2. (单选题) 5分

设 $I = \int_a^{a+k\pi} |\sin x| dx$, k 为整数, 则 I 的值()

- A. 只与 a 有关 B. 只与 k 有关 C. 与 a , k 均有关 D. 与 a , k 均无关

3. (单选题) 5分

设 $f(x, y)$ 是连续函数, 则 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = ()$

- A. $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx$ B. $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx$
C. $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx$ D. $\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx$

4. (单选题) 5分

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数为 $\ln(2+x)$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_{2n} = ()$

A. $-\frac{1}{6}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{3}$

5. (单选题) 5分

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 在正交变换下可化成 $y_1^2 - 2y_2^2 + 3y_3^2$, 则二次型f的矩阵A的行列式与迹分别为()

A. -6, -2 B. 6, -2 C. -6, 2 D. 6, 2

6. (单选题) 5分

设A为3阶矩阵, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 若 $P^T A P^2 = \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix}$, 则 $A = ()$

A. $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

7. (单选题) 5分

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a+1 & b & 3 \\ a & \frac{b}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, M_{ij} 表示A的i行j列元素的余子式. 若 $|A| = -\frac{1}{2}$, 且 $-M_{21} + M_{22} - M_{23} = 0$, 则()

A. $a = 0$ 或 $a = -\frac{3}{2}$ B. $a = 0$ 或 $a = \frac{3}{2}$ C. $b = 1$ 或 $b = -\frac{1}{2}$ D. $b = -1$ 或 $b = \frac{1}{2}$

8. (单选题) 5分

设随机变量X的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则X的三阶中心距 $E(X - EX)^3 = ()$

A. $-\frac{1}{32}$ B. 0 C. $\frac{1}{16}$ D. $\frac{1}{2}$

9. (单选题) 5分

随机变量X, Y相互独立, 其 $X \sim N(0, 2)$, $Y \sim N(-1, 1)$, 记

$p_1 = P\{2X > Y\}$, $p_2 = P\{X - 2Y > 1\}$, 则()

A. $p_1 > p_2 > \frac{1}{2}$ B. $p_2 > p_1 > \frac{1}{2}$ C. $p_1 < p_2 < \frac{1}{2}$ D. $p_2 < p_1 < \frac{1}{2}$

10. (单选题) 5分

设随机变量X, Y相互独立, 且均服从参数为 λ 的指数分布, 令 $Z = |X - Y|$, 则下列随机变量中与Z同分布的是()

A. $X + Y$ B. $\frac{X+Y}{2}$ C. $2X$ D. X

填空题 (共6题, 共30分)

11. (填空题) 5分

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^x \frac{(1+t^2) \sin t^2}{1+\cos t^2} dt$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. (填空题) 5分

$$\int_2^{+\infty} \frac{5}{x^4 + 3x^2 - 4} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

13. (填空题) 5分

函数 $f(x, y) = 2x^3 - 9x^2 - 6y^4 + 12x + 24y$ 的极值点是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. (填空题) 5分

某产品的价格函数为 $p = \begin{cases} 25 - 0.25Q, & Q \leq 20, \\ 35 - 0.75Q, & Q > 20 \end{cases}$ (p 为单价, 单位: 万元; Q 为产

量, 单位: 件), 总成本函数为 $C = 150 + 5Q + 0.25Q^2$ (万元), 则经营该产品可获得的最大利润为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (万元).

15. (填空题) 5分

设 A 为 3 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, E 为 3 阶单位矩阵. 若 $r(2E - A) = 1$, $r(E + A) = 2$, 则 $|A^*| = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. (填空题) 5分

设随机试验每次成功的概率为 p , 现进行 3 次独立重复试验, 在至少成功 1 次的条件下 3 次试验全部成功的概率为 $\frac{4}{13}$, 则 $p = \underline{\hspace{2cm}}$.

填空题 (共6题, 共30分)

11. (填空题) 5分

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^x \frac{(1+t^2) \sin t^2}{1+\cos t^2} dt$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. (填空题) 5分

$$\int_2^{+\infty} \frac{5}{x^4 + 3x^2 - 4} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

13. (填空题) 5分

函数 $f(x, y) = 2x^3 - 9x^2 - 6y^4 + 12x + 24y$ 的极值点是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. (填空题) 5分

某产品的价格函数为 $p = \begin{cases} 25 - 0.25Q, & Q \leq 20, \\ 35 - 0.75Q, & Q > 20 \end{cases}$ (p 为单价, 单位: 万元; Q 为产

量, 单位: 件), 总成本函数为 $C = 150 + 5Q + 0.25Q^2$ (万元), 则经营该产品可获得的最大利润为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (万元).

15. (填空题) 5分

设 A 为 3 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, E 为 3 阶单位矩阵. 若 $r(2E - A) = 1$, $r(E + A) = 2$, 则 $|A^*| = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. (填空题) 5分

设随机试验每次成功的概率为 p , 现进行 3 次独立重复试验, 在至少成功 1 次的条件下 3 次试验全部成功的概率为 $\frac{4}{13}$, 则 $p = \underline{\hspace{2cm}}$.

解答题 (共6题, 共70分)

17. (解答题) 10分

设平面有界区域 D 位于第一象限, 由曲线 $xy = \frac{1}{3}$, $xy = 3$ 与直线 $y = \frac{1}{3}x$, $y = 3x$ 围成, 计算 $\iint_D (1 + x - y) dx dy$.

18. (解答题) 12分

设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z + e^x - y \ln(1 + z^2) = 0$ 确定, 求 $(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2})|_{(0,0)}$.

19. (解答题) 12分

设 $t > 0$, 平面有界区域 D 由曲线 $y = xe^{-2x}$ 与直线 $x = t$, $x = 2t$ 及 x 轴围成, D 的面积为 $S(t)$, 求 $S(t)$ 的最大值.

20. (解答题) 12分

设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, 且 $f'(0) = f'(1)$, $|f''(x)| \leq 1$. 证明:

(1) 当 $x \in (0, 1)$ 时, $|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}$;

(2) $|\int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2}| \leq \frac{1}{12}$.

21. (解答题) 12分

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & a-1 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, 向量

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(1) 证明: 方程组 $Ax = \alpha$ 的解均为方程组 $Bx = \beta$ 的解;

(2) 若方程组 $Ax = \alpha$ 与方程组 $Bx = \beta$ 不同解, 求 a 的值.

22. (解答题) 12分

设总体 X 服从 $[0, \theta]$ 上的均匀分布, 其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数. X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, 记 $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$,

$T_c = cX_{(n)}$.

(1) 求 c , 使得 $E(T_c) = \theta$;

(2) 记 $h(c) = E(T_c - \theta)^2$, 求 c 使得 $h(c)$ 最小.

解答题 (共6题, 共70分)

17. (解答题) 10分

设平面有界区域 D 位于第一象限, 由曲线 $xy = \frac{1}{3}$, $xy = 3$ 与直线 $y = \frac{1}{3}x$, $y = 3x$ 围成, 计算 $\iint_D (1 + x - y) dx dy$.

18. (解答题) 12分

设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z + e^x - y \ln(1 + z^2) = 0$ 确定, 求 $(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2})|_{(0,0)}$.

19. (解答题) 12分

设 $t > 0$, 平面有界区域 D 由曲线 $y = xe^{-2x}$ 与直线 $x = t$, $x = 2t$ 及 x 轴围成, D 的面积为 $S(t)$, 求 $S(t)$ 的最大值.

20. (解答题) 12分

设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, 且 $f'(0) = f'(1)$, $|f''(x)| \leq 1$. 证明:

(1) 当 $x \in (0, 1)$ 时, $|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}$;

(2) $|\int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2}| \leq \frac{1}{12}$.

21. (解答题) 12分

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & a-1 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, 向量 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(1) 证明: 方程组 $Ax = \alpha$ 的解均为方程组 $Bx = \beta$ 的解;

(2) 若方程组 $Ax = \alpha$ 与方程组 $Bx = \beta$ 不同解, 求 a 的值.

22. (解答题) 12分

设总体 X 服从 $[0, \theta]$ 上的均匀分布, 其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数. X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, 记 $X_{(n)} = \max \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$,

$T_c = cX_{(n)}$.

(1) 求 c , 使得 $E(T_c) = \theta$;

(2) 记 $h(c) = E(T_c - \theta)^2$, 求 c 使得 $h(c)$ 最小.

答案与解析

答案与解析

选择题

1. (单选题)

[正确答案] D

[试题解析]:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & |x| < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不连续.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 = f(-1)$,

所以 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处连续.

故选(D).

2. (单选题)

[正确答案] B

[试题解析]:

由于 $|\sin x|$ 的周期是 π ,

所以

$$\begin{aligned} I &= \int_a^{a+k\pi} |\sin x| dx \\ &= \int_0^{k\pi} |\sin x| dx = k \int_0^\pi |\sin x| dx = 2k, \end{aligned}$$

因此, 该积分值只与 k 有关.

故选(B).

3. (单选题)

[正确答案] A

[试题解析]:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx, \text{ 故选A.}$$

4. (单选题)

[正确答案] A

[试题解析]:

$$\begin{aligned} \ln(2+x) &= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2}x\right) \\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{n}. \end{aligned}$$

$$\text{所以, } a_n = \begin{cases} \ln 2, & n = 0 \\ (-1)^{n-1} \frac{1}{n 2^n}, & n \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{当 } n \geq 1, \quad a_{2n} = -\frac{1}{2n \cdot 2^{2n}}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以, } \sum_{n=0}^{\infty} n a_{2n} &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(-\frac{1}{2n \cdot 2^{2n}}\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{6}, \end{aligned}$$

故选(A).

5. (单选题)

[正确答案] C

[试题解析]:

由题可知, A 的特征值为 $1, -2, 3$,

故 $|A| = 1 \times (-2) \times 3 = -6$, $tr(A) = 1 + (-2) + 3 = 2$, 故选C.

6. (单选题)

[正确答案] C

[试题解析]:

$$\text{由 } P^T A P^2 = \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 \text{则 } A &= (P^T)^{-1} \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix} (P^2)^{-1} \\
 &= (P^{-1})^T \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix} (P^{-1})^2 \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \\
 &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

故选C.

7. (单选题)

[正确答案] B

[试题解析]:

由 $-M_{21} + M_{22} - M_{23} = 0$, 得 $A_{21} + A_{22} + A_{23} = 0$.

而 $A_{21} + A_{22} + A_{23}$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} a+1 & b & 3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & b-a-1 & 2-a \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a-b+1 = 0,
 \end{aligned}$$

于是 $b = a+1$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & a+1 & 3 \\ a & \frac{a+1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{(1-a)(2a-1)}{2} = -\frac{1}{2},$$

得 $a = 0$ 或 $a = \frac{3}{2}$.

故选(B).

8. (单选题)

[正确答案] B

[试题解析]:

$$EX = \int_0^1 x \cdot 6x(1-x)dx = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}
 E(X - EX)^3 &= \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^3 \cdot 6x(1-x)dx \\
 &= \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^3 \cdot 6x(1-x)dx = 0.
 \end{aligned}$$

故选(B).

9. (单选题)

[正确答案] B

[试题解析]:

$Y - 2X \sim N(-1, 3^2)$,

则 $p_1 = \Phi\left(\frac{0+1}{3}\right) = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) > \Phi(0) = \frac{1}{2}$.

$2Y - X \sim N(-2, \sqrt{6}^2)$,

则 $p_2 = \Phi\left(\frac{-1+2}{\sqrt{6}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) > \Phi(0) = \frac{1}{2}$.

因为 $\Phi(x)$ 单增, $\frac{\sqrt{6}}{6} > \frac{1}{3}$, 所以 $p_2 > p_1 > \frac{1}{2}$.
故选(B).

10. (单选题)

[正确答案] D

[试题解析]:

令 $Z = |X - Y|$, 则 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{|X - Y| \leq z\}$.

当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$;

当 $z \geq 0$ 时,

$$F_Z(z) = \iint_{|x-y| \leq z} f(x, y) dx dy = \iint_{|x-y| \leq z} \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx dy$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} dy \int_y^{y+z} \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx = 1 - e^{-\lambda z}.$$

所以 $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - e^{-\lambda z}, & z \geq 0 \end{cases}$. 显然 $Z = |X - Y|$ 与 X 同分布.

故选(D).

选择题

1. (单选题)

[正确答案] D

[试题解析]:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & |x| < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不连续.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$,

所以 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 = f(-1)$,

所以 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处连续.

故选(D).

2. (单选题)

[正确答案] B

[试题解析]:

由于 $|\sin x|$ 的周期是 π ,

所以

$$\begin{aligned} I &= \int_a^{a+k\pi} |\sin x| dx \\ &= \int_0^{k\pi} |\sin x| dx = k \int_0^{\pi} |\sin x| dx = 2k, \end{aligned}$$

因此, 该积分值只与 k 有关.

故选(B).

3. (单选题)

[正确答案] A

[试题解析]:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y} f(x, y) dx, \text{ 故选A.}$$

4. (单选题)

[正确答案] A

[试题解析]:

$$\begin{aligned} \ln(2+x) &= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2}x\right) \\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{n}. \end{aligned}$$

$$\text{所以, } a_n = \begin{cases} \ln 2, & n = 0 \\ (-1)^{n-1} \frac{1}{n^{2^2}}, & n \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{当 } n \geq 1, \quad a_{2n} = -\frac{1}{2n \cdot 2^{2n}}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以, } \sum_{n=0}^{\infty} n a_{2n} &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(-\frac{1}{2n \cdot 2^{2n}}\right) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{6}, \end{aligned}$$

故选(A).

5. (单选题)

[正确答案] C

[试题解析]:

由题可知, A 的特征值为 $1, -2, 3$,

故 $|A| = 1 \times (-2) \times 3 = -6$, $tr(A) = 1 + (-2) + 3 = 2$, 故选C.

6. (单选题)

[正确答案] C

[试题解析]:

$$\text{由 } P^T A P^2 = \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix},$$

$$\text{则 } A = (P^T)^{-1} \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix} (P^2)^{-1}$$

$$= (P^{-1})^T \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix} (P^{-1})^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+2c & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 2c & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

故选C.

7. (单选题)

[正确答案] B

[试题解析]:

由 $-M_{21} + M_{22} - M_{23} = 0$, 得 $A_{21} + A_{22} + A_{23} = 0$.

而 $A_{21} + A_{22} + A_{23}$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} a+1 & b & 3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & b-a-1 & 2-a \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a-b+1 = 0,
 \end{aligned}$$

于是 $b = a+1$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a+1 & a+1 & 3 \\ a & \frac{a+1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{(1-a)(2a-1)}{2} = -\frac{1}{2},$$

得 $a = 0$ 或 $a = \frac{3}{2}$.

故选(B).

8. (单选题)

[正确答案] B

[试题解析]:

$$EX = \int_0^1 x \cdot 6x(1-x)dx = \frac{1}{2},$$

$$E(X-EX)^3 = \int_0^1 (x-EX)^3 \cdot 6x(1-x)dx$$

$$= \int_0^1 (x-\frac{1}{2})^3 \cdot 6x(1-x)dx = 0.$$

故选(B).

9. (单选题)

[正确答案] B

[试题解析]:

$$Y-2X \sim N(-1, 3^2),$$

$$\text{则 } p_1 = \Phi\left(\frac{0+1}{3}\right) = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) > \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

$$2Y-X \sim N(-2, \sqrt{6}^2),$$

$$\text{则 } p_2 = \Phi\left(\frac{-1+2}{\sqrt{6}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) > \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

因为 $\Phi(x)$ 单增, $\frac{\sqrt{6}}{6} > \frac{1}{3}$, 所以 $p_2 > p_1 > \frac{1}{2}$.

故选(B).

10. (单选题)

[正确答案] D

[试题解析]:

令 $Z = |X - Y|$, 则 $F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{|X - Y| \leq z\}$.当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$;当 $z \geq 0$ 时,

$$F_Z(z) = \iint_{|x-y| \leq z} f(x, y) dx dy = \iint_{|x-y| \leq z} \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx dy \\ = 2 \int_0^{+\infty} dy \int_y^{y+z} \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx = 1 - e^{-\lambda z}.$$

所以 $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - e^{-\lambda z}, & z \geq 0 \end{cases}$. 显然 $Z = |X - Y|$ 与 X 同分布.

故选(D).

填空题

11. (填空题)

令 $f(x) = \int_0^x \frac{(1+t^2) \sin t^2}{1+\cos t^2} dt$, 则 $f'(x) = \frac{(1+x^2) \sin x^2}{1+\cos^2 x} \sim \frac{x^2}{2}$,所以 $f(x) \sim \frac{x^3}{6}$, 则 $k = 3$.

12. (填空题)

$$\begin{aligned} \text{令 } f(x) &= \frac{5}{x^4 + 3x^2 - 4} = \frac{5}{(x^2 + 4)(x^2 - 1)} \\ &= \frac{5}{(x-1)(x+1)(x^2+4)} \\ &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} \\ &= \frac{A(x+1)(x^2+4) + B(x-1)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+4)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (4A+4B-C)x + (4A-4B-D)}{(x-1)(x+1)(x^2+4)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - B + D = 0 \\ 4A + 4B - C = 0 \\ 4A - 4B - D = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \\ C = 0 \\ D = -1 \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+4}$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= \int_2^{+\infty} \frac{5}{x^4 + 3x^2 - 4} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx - \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+4} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} \Big|_2^{+\infty} - \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \Big|_2^{+\infty} \\ &= 0 - \frac{1}{2} \times \ln \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{8}\pi. \end{aligned}$$

13. (填空题)

$$\text{由 } \begin{cases} f'_x(x, y) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \\ f'_y(x, y) = -24y^3 + 24 = 0 \end{cases}$$

得: 驻点 $(1, 1)$ 和 $(2, 1)$

$$f''_{xx}(x, y) = 12x - 18, \quad f''_{yy}(x, y) = -72y^2, \quad f''_{xy}(x, y) = 0.$$

1)对于驻点(1, 1): $A = -6$, $B = 0$, $C = -72$,

由 $AC - B^2 > 0$ 且 $A < 0$ 可知, 驻点(1, 1)是 $f(x, y)$ 的极小值点.

2)对于驻点(2, 1): $A = 6$, $B = 0$, $C = -72$,

由 $AC - B^2 < 0$ 可知, 驻点(2, 1)不是 $f(x, y)$ 的极值点.

故 $f(x, y)$ 的极值点是(1, 1).

14. (填空题)

$$L(Q) = R - C = PQ - C \\ = \begin{cases} -0.5Q^2 + 20Q - 150, & Q \leq 20 \\ -Q^2 + 30Q - 150, & Q > 20 \end{cases}$$

$$L'(Q) = \begin{cases} -Q + 20, & Q < 20 \\ -2Q + 30, & Q > 20 \end{cases}$$

$$L'_{+}(20) = -10, L'_{-}(20) = 0,$$

则 $Q = 20$ 为 $L(Q)$ 的不可导点.

$Q < 20$ 时, $L'(Q) > 0$; $Q > 20$ 时, $L'(Q) < -10 < 0$,

则 $Q = 20$ 为唯一极大值点, 也是最大值点.

$L(20) = 50$, 所以最大利润为50.

15. (填空题)

$r(2E - A) = 1$, 故 $\lambda = 2$ 至少为 A 的二重特征值.

由 $r(E + A) = 2$, 故 $\lambda = -1$ 至少为 A 的一重特征值,

故 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$, 则 $|A| = -4$,

$$|A^*| = |A|^2 = 16.$$

16. (填空题)

设随机变量 X 表示三次试验中成功的次数, 则 $X \sim B(3, p)$.

$$\text{所以 } P\{X = 3 | X \geq 1\} = \frac{P\{X=3, X \geq 1\}}{P\{X \geq 1\}} = \frac{P\{X=3\}}{P\{X \geq 1\}}$$

$$= \frac{C_3^3 p^3}{1 - C_3^0 (1-p)^3} = \frac{4}{13},$$

$$\text{故 } p = \frac{2}{3}.$$

填空题

11. (填空题)

$$\text{令 } f(x) = \int_0^x \frac{(1+t^2) \sin t^2}{1+\cos t^2} dt, \text{ 则 } f'(x) = \frac{(1+x^2) \sin x^2}{1+\cos^2 x} \sim \frac{x^2}{2},$$

$$\text{所以 } f(x) \sim \frac{x^3}{6}, \text{ 则 } k = 3.$$

12. (填空题)

$$\text{令 } f(x) = \frac{5}{x^4 + 3x^2 - 4} = \frac{5}{(x^2 + 4)(x^2 - 1)}$$

$$= \frac{5}{(x-1)(x+1)(x^2+4)}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$= \frac{A(x+1)(x^2+4) + B(x-1)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-1)}{A(x+1)(x^2+4) + B(x-1)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-1)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x-1)(x+1)(x^2+4)}{(A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (4A+4B-C)x + (4A-4B-D)} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ 4A+4B-C=0 \\ 4A-4B-D=5 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=0 \\ D=-1 \end{array} \right. \\
 \therefore & \left\{ \begin{array}{l} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=0 \\ D=-1 \end{array} \right. \\
 \therefore f(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^4+3x^2-4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+4} - \frac{1}{x^2+4} \\
 \therefore I &= \int_2^{\infty} \frac{5}{x^4+3x^2-4} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_2^{\infty} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx - \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2+4} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|_2^{\infty} - \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} |_2^{\infty} \\
 &= 0 - \frac{1}{2} \times \ln \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{8} \pi.
 \end{aligned}$$

13. (填空题)

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \\ f'_y(x, y) = -24y^3 + 24 = 0 \end{cases}$$

得: 驻点(1, 1)和(2, 1)

$$f''_{xx}(x, y) = 12x - 18, \quad f''_{yy}(x, y) = -72y^2, \quad f''_{xy}(x, y) = 0.$$

1) 对于驻点(1, 1): $A = -6, B = 0, C = -72$,由 $AC - B^2 > 0$ 且 $A < 0$ 可知, 驻点(1, 1)是 $f(x, y)$ 的极小值点.2) 对于驻点(2, 1): $A = 6, B = 0, C = -72$,由 $AC - B^2 < 0$ 可知, 驻点(2, 1)不是 $f(x, y)$ 的极值点.故 $f(x, y)$ 的极值点是(1, 1).

14. (填空题)

$$\begin{aligned}
 L(Q) &= R - C = PQ - C \\
 &= \begin{cases} -0.5Q^2 + 20Q - 150, & Q \leq 20 \\ -Q^2 + 30Q - 150, & Q > 20 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$L'(Q) = \begin{cases} -Q + 20, & Q < 20 \\ -2Q + 30, & Q > 20 \end{cases}$$

$$L'_+(20) = -10, \quad L'_-(20) = 0,$$

则 $Q = 20$ 为 $L(Q)$ 的不可导点. $Q < 20$ 时, $L'(Q) > 0$; $Q > 20$ 时, $L'(Q) < -10 < 0$,则 $Q = 20$ 为唯一极大值点, 也是最大值点. $L(20) = 50$, 所以最大利润为50.

15. (填空题)

 $r(2E - A) = 1$, 故 $\lambda = 2$ 至少为 A 的二重特征值.由 $r(E + A) = 2$, 故 $\lambda = -1$ 至少为 A 的一重特征值,故 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$, 则 $|A| = -4$,

$$|A^*| = |A|^2 = 16.$$

16. (填空题)

设随机变量 X 表示三次试验中成功的次数, 则 $X \sim B(3, p)$.

所以 $P\{X=3|X \geq 1\} = \frac{P\{X=3, X \geq 1\}}{P\{X \geq 1\}} = \frac{P\{X=3\}}{P\{X \geq 1\}}$
 $= \frac{C_3^3 p^3}{1 - C_3^0 (1-p)^3} = \frac{4}{13}$,
故 $p = \frac{2}{3}$.

解答题

17. (解答题)

积分区域 D 关于 $y = x$ 对称, 由轮换对称性可得,

$$\iint_D (1+x-y) dx dy = \iint_D (1+y-x) dx dy,$$

故

$$\begin{aligned} & \iint_D (1+x-y) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\iint_D (1+x-y) dx dy + \iint_D (1+y-x) dx dy \right) \\ &= \iint_D 1 dx dy \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^1 (3x - \frac{1}{3x}) dx + \int_1^3 (\frac{3}{x} - \frac{x}{3}) dx \\ &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \ln 3 + 3 \ln 3 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \ln 3. \end{aligned}$$

18. (解答题)

将 $(x, y) = (0, 0)$ 代入原方程得 $z(0, 0) = -1$;

原方程对 x 求偏导, 得: $z'_x + e^x - y \cdot \frac{2zz'_x}{1+z^2} = 0$ ①,

从而 $z'_x(0, 0) = -1$;

①式对 x 求偏导, 得: $z''_{xx} + e^x - y \cdot \frac{\partial(\frac{2zz'_x}{1+z^2})}{\partial x} = 0$,

从而 $z''_{xx}(0, 0) = -1$;

原方程对 y 求偏导, 得: $z'_y - \ln(1+z^2) - y \cdot \frac{2zz'_y}{1+z^2} = 0$ ②,

从而 $z'_y(0, 0) = \ln 2$;

②式对 y 求偏导得 $z''_{yy} - \frac{2zz'_y}{1+z^2} - \frac{2zz'_y}{1+z^2} - y \cdot \frac{\partial(\frac{2zz'_y}{1+z^2})}{\partial y} = 0$,

从而 $z''_{yy}(0, 0) = -2 \ln 2$;

综上, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \Big|_{(0,0)} = -1 - 2 \ln 2$.

19. (解答题)

$$S(t) = \int_t^{2t} x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \left[(2t + \frac{1}{2}) e^{-4t} - (t + \frac{1}{2}) e^{-2t} \right]$$

则 $S'(t) = -te^{-2t}(1-4e^{-2t})$, 令 $S'(t) = 0 \Rightarrow t = \ln 2$,

$\because t \in (\ln 2 - \delta, \ln 2)$ 有 $S'(t) > 0$, $t \in (\ln 2, \ln 2 + \delta)$ 有

$S'(t) < 0$,

$\therefore t = \ln 2$ 为 $S(t)$ 的唯一的极大值点, 也是最大值点,

故最大值为 $S(\ln 2) = \frac{1}{16}(\ln 2 + \frac{3}{4})$.

20. (解答题)

(1) 因 $|f''(x)| \leq 1$, 则 $-1 \leq f''(x) \leq 1$.

令 $F(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x - \frac{x(1-x)}{2}$, $x \in (0, 1)$.

$F(0) = 0$, $F(1) = 0$, $F''(x) = f''(x) + 1 \geq 0$,

则 $F(x)$ 为凹函数, 所以 $F(x) \leq 0$.

故 $f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \leq \frac{x(1-x)}{2}$ ①.

令 $G(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x + \frac{x(1-x)}{2}$, $x \in (0, 1)$

$G(0) = 0$, $G(1) = 0$, $G''(x) = f''(x) - 1 \leq 0$,

则 $G(x)$ 为凸函数, 所以 $G(x) \geq 0$.

故 $f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \geq -\frac{x(1-x)}{2}$ ②.

综上①②, 得: $|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}$,

$x \in (0, 1)$.

(2) 由①知, $f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \leq \frac{x(1-x)}{2}$, $x \in (0, 1)$.

$\Rightarrow \int_0^1 [f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x] dx \leq \int_0^1 \frac{x(1-x)}{2} dx$,

$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \leq \frac{1}{12}$. ③

由②知, $f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \geq -\frac{x(1-x)}{2}$, $x \in (0, 1)$.

$\Rightarrow \int_0^1 [f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x] dx \geq \int_0^1 -\frac{x(1-x)}{2} dx$,

$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \geq -\frac{1}{12}$. ④

综上③④: $\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \right| \leq \frac{1}{12}$.

21. (解答题)

(1) 证明:

由于 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a & a-1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $r \begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix} = r(A \alpha)$, 故 $\begin{cases} Ax = \alpha \\ Bx = \beta \end{cases}$ 与 $Ax = \alpha$ 同解,

所以 $Ax = \alpha$ 的解均为 $Bx = \beta$ 的解.

(2) 由于 $Ax = \alpha$ 的解均为 $Bx = \beta$ 的解,

若 $Ax = \alpha$ 与 $Bx = \beta$ 同解, 则与题意矛盾, 故 $Ax = \alpha$ 的解是 $Bx = \beta$ 解的真子集, 故 $Ax = 0$ 基础解系中解向量的个数小于 $Bx = 0$ 基础解系中解向量的个数, 则 $3 - r(A) < 3 - r(B)$, 故 $r(A) > r(B)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

又 $r(A) = 3$, 故 $r(B) < 3$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$, 得 $a = 1$.

22. (解答题)

(1) X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\theta}x, & 0 \leq x < \theta \\ 1, & x \geq \theta \end{cases}$.

$X_{(n)}$ 的分布函数为:

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(x) &= P\{\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq x\} \\ &= P\{X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x\} \\ &= P\{X_1 \leq x\} \cdot P\{X_2 \leq x\} \cdots \cdots P\{X_n \leq x\} = F^n(x), \end{aligned}$$

$X_{(n)}$ 概率密度为

$$f_{X_{(n)}}(x) = nF^{n-1}(x) \cdot f(x)$$

$$= \begin{cases} \frac{n}{\theta^n}x^{n-1}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$E(T_c) = cE(X_{(n)}) = c \int_0^\theta x \cdot \frac{n}{\theta^n}x^{n-1} dx = \frac{cn}{n+1}\theta.$$

$$\text{令 } E(T_c) = \frac{cn}{n+1}\theta = \theta, \text{ 得 } c = \frac{n+1}{n}.$$

$$(2) E(T_c^2) = c^2 E(X_{(n)}^2) = c^2 \int_0^\theta x^2 \cdot \frac{n}{\theta^n}x^{n-1} dx = \frac{c^2 n}{n+2}\theta^2.$$

$$\text{又 } h(c) = E(T_c - \theta)^2$$

$$= E(T_c^2 - 2\theta T_c + \theta^2)$$

$$= E(T_c^2) - 2\theta E(T_c) + \theta^2$$

$$= \frac{c^2 n}{n+2}\theta^2 - \frac{2cn}{n+1}\theta^2 + \theta^2.$$

$$h'(c) = \frac{2cn}{n+2}\theta^2 - \frac{2n}{n+1}\theta^2,$$

$$\text{令 } h'(c) = 0 \text{ 得 } c = \frac{n+2}{n+1}.$$

$$h''(c) = \frac{2n}{n+2}\theta^2 > 0,$$

所以当 $c = \frac{n+2}{n+1}$ 时, $h(c)$ 最小.

解答题

17. (解答题)

积分区域 D 关于 $y = x$ 对称, 由轮换对称性可得,

$$\iint_D (1 + x - y) dx dy = \iint_D (1 + y - x) dx dy,$$

故

$$\iint_D (1 + x - y) dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \left(\iint_D (1 + x - y) dx dy + \iint_D (1 + y - x) dx dy \right)$$

$$= \iint_D 1 dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\frac{1}{3}}^1 (3x - \frac{1}{3x}) dx + \int_1^3 (\frac{3}{x} - \frac{x}{3}) dx \\
 &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \ln 3 + 3 \ln 3 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \ln 3.
 \end{aligned}$$

18. (解答题)

将 $(x, y) = (0, 0)$ 代入原方程得 $z(0, 0) = -1$;

原方程对 x 求偏导, 得: $z'_x + e^x - y \cdot \frac{2zz'_x}{1+z^2} = 0$ ①,

从而 $z'_x(0, 0) = -1$;

①式对 x 求偏导, 得: $z''_{xx} + e^x - y \cdot \frac{\partial(\frac{2zz'_x}{1+z^2})}{\partial x} = 0$,

从而 $z''_{xx}(0, 0) = -1$;

原方程对 y 求偏导, 得: $z'_y - \ln(1+z^2) - y \cdot \frac{2zz'_y}{1+z^2} = 0$ ②,

从而 $z'_y(0, 0) = \ln 2$;

②式对 y 求偏导得 $z''_{yy} - \frac{2zz'_y}{1+z^2} - \frac{2zz'_y}{1+z^2} - y \cdot \frac{\partial(\frac{2zz'_y}{1+z^2})}{\partial y} = 0$,

从而 $z''_{yy}(0, 0) = -2 \ln 2$;

综上, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)|_{(0,0)} = -1 - 2 \ln 2$.

19. (解答题)

$$S(t) = \int_t^{2t} x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \left[(2t + \frac{1}{2}) e^{-4t} - (t + \frac{1}{2}) e^{-2t} \right]$$

则 $S'(t) = -te^{-2t}(1 - 4e^{-2t})$, 令 $S'(t) = 0 \Rightarrow t = \ln 2$,

$\because t \in (\ln 2 - \delta, \ln 2)$ 有 $S'(t) > 0$, $t \in (\ln 2, \ln 2 + \delta)$ 有 $S'(t) < 0$,

$\therefore t = \ln 2$ 为 $S(t)$ 的唯一的极大值点, 也是最大值点,

故最大值为 $S(\ln 2) = \frac{1}{16}(\ln 2 + \frac{3}{4})$.

20. (解答题)

(1) 因 $|f''(x)| \leq 1$, 则 $-1 \leq f''(x) \leq 1$.

令 $F(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x - \frac{x(1-x)}{2}$, $x \in (0, 1)$.

$F(0) = 0$, $F(1) = 0$, $F''(x) = f''(x) + 1 \geq 0$,

则 $F(x)$ 为凹函数, 所以 $F(x) \leq 0$.

故 $f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \leq \frac{x(1-x)}{2}$ ①.

令 $G(x) = f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x + \frac{x(1-x)}{2}$, $x \in (0, 1)$

$G(0) = 0$, $G(1) = 0$, $G''(x) = f''(x) - 1 \leq 0$,

则 $G(x)$ 为凸函数, 所以 $G(x) \geq 0$.

故 $f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \geq -\frac{x(1-x)}{2}$ ②.

综上①②, 得: $|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}$,

$x \in (0, 1)$.

(2) 由①知, $f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \leq \frac{x(1-x)}{2}$, $x \in (0, 1)$.

$$\Rightarrow \int_0^1 [f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x] dx \leq \int_0^1 \frac{x(1-x)}{2} dx,$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \leq \frac{1}{12}. \quad \text{③}$$

$$\text{由②知, } f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x \geq -\frac{x(1-x)}{2}, \quad x \in (0, 1).$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x] dx \geq \int_0^1 -\frac{x(1-x)}{2} dx,$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \geq -\frac{1}{12}. \quad \text{④}$$

$$\text{综上③④: } \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{f(0)+f(1)}{2} \right| \leq \frac{1}{12}.$$

21. (解答题)

(1) 证明:

由于 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a & a-1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

则 $r \begin{pmatrix} A & \alpha \\ B & \beta \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & \alpha \end{pmatrix}$, 故 $\begin{cases} Ax = \alpha \\ Bx = \beta \end{cases}$ 与 $Ax = \alpha$ 同解,

所以 $Ax = \alpha$ 的解均为 $Bx = \beta$ 的解.

(2) 由于 $Ax = \alpha$ 的解均为 $Bx = \beta$ 的解,

若 $Ax = \alpha$ 与 $Bx = \beta$ 同解, 则与题意矛盾, 故 $Ax = \alpha$ 的解是 $Bx = \beta$ 解的真子集, 故 $Ax = 0$ 基础解系中解向量的个数小于 $Bx = 0$ 基础解系中解向量的个数, 则 $3 - r(A) < 3 - r(B)$, 故 $r(A) > r(B)$.

$$\text{又 } r(A) = 3, \text{ 故 } r(B) < 3, \text{ 则 } \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ 得 } a = 1.$$

22. (解答题)

(1) X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\theta}x, & 0 \leq x < \theta \\ 1, & x \geq \theta \end{cases}$

$X_{(n)}$ 的分布函数为:

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(x) &= P\{\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq x\} \\ &= P\{X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x\} \\ &= P\{X_1 \leq x\} \cdot P\{X_2 \leq x\} \cdots \cdots P\{X_n \leq x\} = F^n(x), \end{aligned}$$

$X_{(n)}$ 概率密度为

$$f_{X_{(n)}}(x) = nF^{n-1}(x) \cdot f(x)$$

$$= \begin{cases} \frac{n}{\theta^n} x^{n-1}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}.$$

$$E(T_c) = cE(X_{(n)}) = c \int_0^\theta x \cdot \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx = \frac{cn}{n+1} \theta.$$

$$\text{令 } E(T_c) = \frac{cn}{n+1} \theta = \theta, \text{ 得 } c = \frac{n+1}{n}.$$

$$(2) E(T_c^2) = c^2 E(X_{(n)}^2) = c^2 \int_0^\theta x^2 \cdot \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx = \frac{c^2 n}{n+2} \theta^2.$$

$$\text{又 } h(c) = E(T_c - \theta)^2$$

$$= E(T_c^2 - 2\theta T_c + \theta^2)$$

$$= E(T_c^2) - 2\theta E(T_c) + \theta^2$$

$$= \frac{c^2 n}{n+2} \theta^2 - \frac{2cn}{n+1} \theta^2 + \theta^2.$$

$$h'(c) = \frac{2cn}{n+2} \theta^2 - \frac{2n}{n+1} \theta^2,$$

$$\text{令 } h'(c) = 0 \text{ 得 } c = \frac{n+2}{n+1}.$$

$$h''(c) = \frac{2n}{n+2} \theta^2 > 0,$$

所以当 $c = \frac{n+2}{n+1}$ 时, $h(c)$ 最小.



扫一扫，上传答案



打开海文考研APP，扫描上方二维码，
即可查看解析，线上答题