2023 □□□□□□□□□□□□

数学(三)试题

□、□□□:1 ~ 10 □□,□□□ 5 □,□ 50 □.□□□□□□□□□□□□□□,□□□□□□□□□□□□□□□□,□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□.

(1) □□□□ $f(x,y)=\ln(y+|x\sin y|)$,□(　　)

(A) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ □□□,$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ □□　　(B) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ □□,$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ □□□

(C) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$,$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ □□□　　(D) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$,$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ □□□□

(2) □□ $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x\leqslant 0\\ (x+1)\cos x, & x>0\end{cases}$ □□□□□(　　)

(A) $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x), & x\leqslant 0\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0\end{cases}$

(B) $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1, & x\leqslant 0\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x), & x\leqslant 0\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0\end{cases}$

(D) $F(x)=\begin{cases}\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+1, & x\leqslant 0\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0\end{cases}$

(3) □□□□□□ $y''+ay'+by=0$ □□□ $(-\infty,\infty)$ □□□,□(　　)

(A) $a<0,b>0$　　(B) $a>0,b>0$

(C) $a=0,b>0$　　(D) $a=0,b<0$

(4) □□ $a_n<b_n(n=1,2,\cdots)$,□□□ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ □ $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ □□□,□"□□ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ □□□□"□"□□ $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ □□□□"□(　　)

(A) □□□□□□　　(B) □□□□□□□

(C) □□□□□□□　　(D) □□□□□□□□□□

(5) □ $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ □ n □□□□□,$\boldsymbol{E}$ □ n □□□□□,$\boldsymbol{M}^*$ □□□ $\boldsymbol{M}$ □□□□□,□ $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^*=$ (　　)

(A) $\begin{pmatrix} |A|B^* & -B^*A^* \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} |A|B^* & -A^*B^* \\ O & |B|A^* \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} |B|A^* & -B^*A^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} |B|A^* & -A^*B^* \\ O & |A|B^* \end{pmatrix}$

(6) 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2-4(x_2-x_3)^2$的规范形为( )

(A) $y_1^2+y_2^2$ (B) $y_1^2-y_2^2$

(C) $y_1^2+y_2^2-4y_3^2$ (D) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(7) 已知向量$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,若$\gamma$既可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示,也可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$线性表示,则$\gamma=$( )

(A) $k\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix},k\in R$ (B) $k\begin{pmatrix}3\\5\\10\end{pmatrix},k\in R$

(C) $k\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},k\in R$ (D) $k\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix},k\in R$

(8) 设随机变量X服从参数为1的泊松分布,则$E(|X-EX|)=$( )

(A) $\frac{1}{e}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{e}$ (D) 1

(9) 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$N(\mu_1,\sigma^2)$的简单随机样本,$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$为来自总体$N(\mu_2,2\sigma^2)$的简单随机样本,且两样本相互独立,记$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\bar{Y}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i,S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,S_2^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(Y_i-\bar{Y})^2$,则( )

(A) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$ (B) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

(C) $\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n,m)$ (D) $\frac{2S_1^2}{S_2^2}\sim F(n-1,m-1)$

(10) 设X_1,X_2为来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本,其中$\sigma(\sigma>0)$是未知参数,记$\hat{\sigma}=a|X_1-X_2|$,若$E(\hat{\sigma})=\sigma$,则$a=$( )

(A) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ (C) $\sqrt{\pi}$ (D) $\sqrt{2\pi}$

二、填空题:11 ~ 16 小题,每小题 5 分,共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(2-x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)=$ ________.

(12) 已知函数$f(x,y)$ $\mathrm{d}f(x,y)=\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$,$f(1,1)=\dfrac{\pi}{4}$,则$f(\sqrt{3},3)=$ ________.

(13) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=$ ________.

(14) 设 在t 的 为$f(t)$,从0 t 的 均 $\dfrac{f(t)}{t}-t$. 设$f(t)$ 且$f(0)=0$,则$f(t)=$ ________.

(15) 已知线性方程 $\begin{cases}ax_1+x_3=1\\x_1+ax_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\ax_1+bx_2=2\end{cases}$ 有解, a,b 为 数,若$\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=4$,则 $\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=$ ________.

(16) 设随机变量X与Y相互独 ,且$X\sim B(1,p)$,$Y\sim B(2,p)$,$p\in(0,1)$,则$X+Y$与$X-Y$的相 数为________.

三、解答题:17 ~ 22 小题,共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17)(本 分 10 分)

已知可 函数$y=y(x)$ $ae^x+y^2+y-\ln(1+x)\cos y+b=0$,且$y(0)=0$,$y'(0)=0$.

(1) a,b 的 .

(2) $x=0$ 是 为$y(x)$的 .

(18)(本 分 12 分)

已知 $D=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}},x\geqslant 1\right\}$

(1) D 的 .

(2) D x 体的体 .

(19)(本 分 12 分)

已知 $D=\{(x,y)\mid(x-1)^2+y^2\leqslant 1\}$, 二 分$\iint\limits_D\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(20)(本 分 12 分)

设函数$f(x)$在$[-a,a]$上 有 2 阶 数, :

(1) 若$f(0)=0$,则存在$\xi\in(-a,a)$, $f''(\xi)=\dfrac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$.

(2) 若 $f(x)$ 在$(-a,a)$,则存在 $\eta\in(-a,a)$ $|f''(\eta)|\geqslant$

$\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$.

(21)(本题满分 12 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足对任意 x_1,x_2,x_3 均有 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{pmatrix}$

(1) 求 A;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(22)(本题满分 12 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$, $-\infty<x<+\infty$,令 $Y=e^x$.

(1) 求 X 的分布函数;

(2) 求 Y 的概率密度;

(3) Y 的期望是否存在?

2023 □□□(□) □□□□

□、□□□

(1)【答案】(A)　(2)【答案】(D)　(3)【答案】(C)　(4)【答案】(A)

(5)【答案】(B)　(6)【答案】(B)　(7)【答案】(D)　(8)【答案】(C)

(9)【答案】(D)　(10)【答案】(A)

□、□□□

(11)【答案】$\frac{2}{3}$.　(12)【答案】$\frac{\pi}{3}$.　(13)【答案】$\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{2}e^{-x}$.

(14)【答案】$2e^{t}-2t-2$.　(15)【答案】8.　(16)【答案】$-\frac{1}{3}$.

□、□□□

(17)【答案】(1) $a=1, b=-1$;(2) $x=0$ 是 $y(x)$ 的极大值点.

(18)【答案】(1) $\ln(1+\sqrt{2})$;(2) $\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$.

(19)【答案】$-\frac{\pi+32}{9}+3\sqrt{3}$.

(20)【答案】泰勒公式和介值定理.

(21)【答案】(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$; (2) 令 $P=\begin{pmatrix}0 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

(22)【答案】(1) $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{t}}{(1+e^{t})^{2}}\mathrm{d}t=-\frac{1}{1+e^{t}}\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{e^{x}}{1+e^{x}}, x\in R$;

(2) $f_{Y}(y)=\begin{cases}\frac{1}{(1+y)^{2}}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$;(3) Y 的期望不存在.

□□□□□□□《□□□□□□□□□》(□□□)(□□□) □□□□ □□□□□□□□□□□□