

## XI კლასი

1. ცნობილია, რომ  $a > 0$  და როცა  $x \in [-8; -2]$ , მაშინ  $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{ax+2}$  ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა  $6\frac{1}{4}$ -ის ტოლია. იპოვეთ  $f(-4a)$ .
2. გამოთვალეთ  $8^x + 8^{-x}$ , თუ ცნობილია, რომ  $4^x + 4^{-x} = 23$
3. ამოხსენით განტოლება:  $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4$
4. ამოხსენით უტოლობა:  $27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} - 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{1-x} + 19 \geq 0$
5. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური  $n$ -სთვის  $\left(1 - \frac{4}{1}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{25}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1+2n}{1-2n}$
6. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის დიაგონალური კვეთის ფართობია  $6\sqrt{6}$  სმ<sup>2</sup>. გვერდითი წახნაგის დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს  $60^\circ$ -იან კუთხეს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.
7.  $ABCA_1B_1C_1$  მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძე  $ABC$  მართკუთხა სამკუთხედი.  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $\sin \angle ABC = 0,6$ ;  $AB_1 = 12$  და  $\angle CB_1A = 30^\circ$ . იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.
8. წესიერი წაკვეთილი სამკუთხა პირამიდის ფუძეების გვერდების სიგრძეებია 2 სმ და 4 სმ. გვერდითი წიბოები ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია  $60^\circ$ -იანი კუთხით. იპოვეთ გვერდით წიბოსა და დიდი ფუძის ცენტრზე გამავალი კვეთის ფართობი.

## XI კლასი

1. ცნობილია, რომ  $a > 0$  და როცა  $x \in [-8; -2]$ , მაშინ  $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{ax+2}$  ფუნქციის უდიდესი

მნიშვნელობა  $6\frac{1}{4}$ -ის ტოლია. იპოვეთ  $f(-4a)$ .

რადგან  $a > 0$  და  $0 < \frac{2}{5} < 1$ , ამიტომ  $f(x)$  კლებადი ფუნქციაა და  $[-8; -2]$  შუალედზე მისი

უდიდესი მნიშვნელობა იქნება  $f(-8) = \left(\frac{2}{5}\right)^{-8a+2}$ , რაც პირობის თანახმად  $6\frac{1}{4}$ -ის ანუ  $\frac{25}{4}$ -ის

ტოლია.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-8a+2} = \frac{25}{4}; \quad \left(\frac{2}{5}\right)^{-8a+2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}; \quad -8a = -2; \quad a = \frac{1}{2} \quad . \quad f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}x+2},$$

$$\text{მაშინ } f(-4a) = f(-2) = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}(-2)+2} = \frac{2}{5}$$

პასუხი:  $\frac{2}{5}$ .

ა) შენიშნა, რომ  $f(x)$  კლებადი ფუნქციაა

$$\text{ბ) გამოთვალა } f(-8) = \left(\frac{2}{5}\right)^{-8a+2} \text{ ან } f(-4a) = \left(\frac{2}{5}\right)^{-4a^2+2}$$

$$\text{გ) დაწერა } \left(\frac{2}{5}\right)^{-8a+2} = \frac{25}{4} \text{ განტოლება.}$$

$$\text{დ) იპოვა } a = \frac{1}{2}$$

$$\text{ე) მიიღო პასუხი } f(-4a) = \frac{2}{5}$$

1 ქულა - ა) ან ბ)

2 ქულა - ა) და ბ)

3 ქულა - გ)

4 ქულა - დ)

5 ქულა - ე)

2. გამოთვალეთ  $8^x + 8^{-x}$ , თუ ცნობილია, რომ  $4^x + 4^{-x} = 23$ .

$$4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2$$

$$(2^x + 2^{-x})^2 = 4^x + 4^{-x} + 2 = 25,$$

$$\text{ამასთან, } 2^x + 2^{-x} > 0, \text{ ე.ი. } 2^x + 2^{-x} = 5$$

$$8^x + 8^{-x} = (2^x + 2^{-x})^3 - 3 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} (2^x + 2^{-x}) = (2^x + 2^{-x})^3 - 3 \cdot (2^x + 2^{-x}) = 5^3 - 3 \cdot 5 = 110$$

პასუხი: 110

- ა) დაწერა  $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$  ან  $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$   
 ბ) დაწერა  $4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2$  ან მისი ტოლფასი ტოლობა  
 გ) გამოთვალა  $2^x + 2^{-x} = 5$   
 დ) დაწერა  $8^x + 8^{-x} = (2^x + 2^{-x})^3 - 3 \cdot (2^x + 2^{-x})$  ან მისი ტოლფასი ტოლობა  
 ე) მიიღო პასუხი:  $8^x + 8^{-x} = 110$

- 1 ქულა - ა)  
 2 ქულა - ბ) ან დ)  
 3 ქულა - ბ) და დ) ან გ)  
 4 ქულა - გ) და დ)  
 5 ქულა - გ) და ე)

3. ამოხსენით განტოლება:  $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4$

რადგან  $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$ , ამიტომ  $(2 - \sqrt{3}) = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$

$$(2 + \sqrt{3})^x + \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^x} = 4; \quad (2 + \sqrt{3})^x \equiv y; \quad y + \frac{1}{y} = 4$$

$$y^2 - 4y + 1 = 0; \quad y_1 = 2 - \sqrt{3} \quad y_2 = 2 + \sqrt{3}$$

$$(2 + \sqrt{3})^x = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{ან } (2 + \sqrt{3})^x = (2 + \sqrt{3})^{-1} \quad x = 1$$

$$x = -1$$

პასუხი:  $x = \pm 1$

- ა) შენიშნა, რომ  $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$   
 ბ) შემოიღო აღნიშვნა  $(2 + \sqrt{3})^x = y$  ან  $(2 - \sqrt{3})^x = y$   
 გ) მიიღო  $y^2 - 4y + 1 = 0$  ან მისი ტოლფასი განტოლება  
 დ) იპოვა  $y_1 = 2 - \sqrt{3}$  და  $y_2 = 2 + \sqrt{3}$   
 ე) მიიღო პასუხი  $x = \pm 1$

- 1 ქულა - ა) ან ბ)  
 2 ქულა - ა) და ბ)  
 3 ქულა - გ)  
 4 ქულა - დ)  
 5 ქულა - ე)

თუ გამოიცნო ერთი ამონახსნი და შეამოწმა - 1 ქულა  
 თუ გამოიცნო ორივე ამონახსნი და შეამოწმა - 2 ქულა

4. ამოხსენით უტოლობა  $27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} - 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{1-x} + 19 \geq 0$ .

$$27 \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-x} - 12 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} + 19 \geq 0$$

$$12 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-x} - 18 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} + 19 \geq 0 \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-x} \equiv y$$

$$12y - \frac{18}{y} + 19 \geq 0$$

$$12y^2 + 19y - 18 \geq 0$$

$$y_1 = -\frac{9}{4} \quad y_2 = \frac{2}{3}$$

$$y \in \left(-\infty; -\frac{9}{4}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{-x} \leq -\frac{9}{4} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-x} \geq \frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x \in \emptyset \\ -x \leq 1 \end{cases} \quad x \geq -1$$

პასუხი:  $x \in [-1; +\infty)$

ა) გამოჰყო  $\frac{2}{3}$ -ისა და  $\frac{3}{2}$ -ის ერთიდა იგივე ხარისხი

ბ) შემოიღო აღნიშვნა, მაგ.:  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x} = y$

გ) მიიღო კვადრატული უტოლობა

დ) ამოხსნა კვადრატული უტოლობა

ე) დაწერა მაჩვენებლიანი უტოლობების გაერთიანება

ვ) მიიღო პასუხი.

1 ქულა - ა) ან ბ)

2 ქულა - გ)

3 ქულა - დ)

4 ქულა - ე)

5 ქულა - ვ)

5. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით დაამტკიცეთ, რომ  $\forall n \in N$ -თვის

$$\text{შევამოწმოთ } n=1\text{-სთვის } \left(1 - \frac{4}{1}\right)\left(1 - \frac{4}{9}\right)\left(1 - \frac{4}{25}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1+2n}{1-2n}$$

$$1 - \frac{4}{1} = \frac{1+2}{1-2}; \quad -3 = -3 \text{ ჭეშმარიტია.}$$

$$\text{დავუშვათ, ჭეშმარიტება } n=k\text{-სთვის } \left(1 - \frac{4}{1}\right)\left(1 - \frac{4}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1+2n}{1-2n}$$

და დავამტკიცოთ, რომ ჭეშმარიტი იქნება  $n=k+1$ -სთვის. ანუ ვაჩვენოთ, რომ

$$\left(1 - \frac{4}{1}\right) \left(1 - \frac{4}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(2(k+1)-1)^2}\right) = \frac{1+2(k+1)}{1-2(k+1)} = \frac{2k+3}{-2k-1}.$$

მართლაც

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{4}{1}\right) \left(1 - \frac{4}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(2(k+1)-1)^2}\right) = \frac{1+2k}{1-2k} \cdot \left(1 - \frac{4}{(2k+1)^2}\right) = \\ & = \frac{1+2k}{1-2k} \cdot \frac{(2k+1)^2 - 4}{(2k+1)^2} = \frac{2k+1}{1-2k} \cdot \frac{(2k-1)(2k+3)}{(2k+1)^2} = -\frac{2k+3}{2k+1} = \frac{2k+3}{-2k-1}. \end{aligned}$$

რ.დ.გ.

ტოლობა დამტკიცებულია  $\forall n \in N$ -თვის.

ა) შეამოწმა  $n=1$ -სთვის

ბ) ჩაწერა მოცემული ტოლობა  $n=k$ -თვის და  $n=k+1$ -თვის

გ) აღნიშნა ინდუქციის ბიჯი

დ) ბიჯი დაამტკიცა ხარვეზებით ან არაცხადად

ე) დაამტკიცა სრუყოფილად

1 ქულა - ა) ან ბ) ან გ)

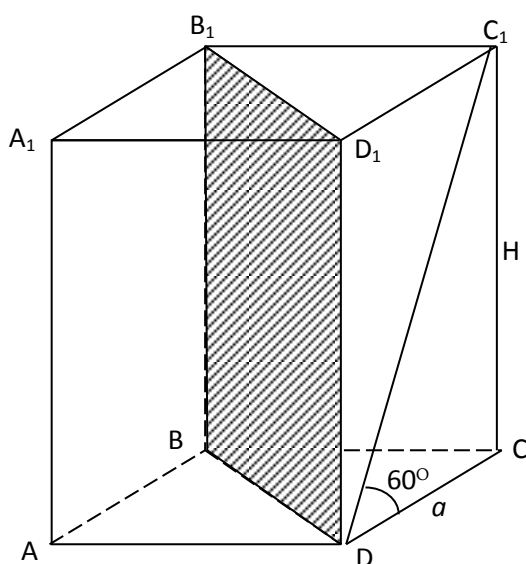
2 ქულა - ა) და ბ) ან ა) და გ)

3 ქულა - ა) ბ) გ)

4 ქულა - ა) გ) დ)

5 ქულა - ე)

6. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის დიაგონალური კვეთის ფართობია  $6\sqrt{6}$  სმ<sup>2</sup>. გვერდითი წახნაგის დიაგონალური ფუძის სიბრტყესთან ადგენს  $60^\circ$ -იან კუთხეს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.



$$CD \equiv a, \quad CC_1 \equiv H$$

$$V = S_{\text{გ}} \cdot H = a^2 \cdot H$$

$$S_{\text{გ}} = BD \cdot H = a\sqrt{2} \cdot H = 6\sqrt{6}$$

$$a \cdot H = 6\sqrt{3}$$

$$\triangle CC_1D \text{ მართკუთხაა } H = \operatorname{tg} 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$a \cdot a\sqrt{3} = 6\sqrt{3}, \quad a^2 = 6, \quad a = \sqrt{6}$$

$$H = \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{2}$$

$$V = 6 \cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$$

პასუხი:  $18\sqrt{2}$  სმ<sup>2</sup>.

ა) ააგო ნახაზი კვეთის და  $60^\circ$ -იანი კუთხის მითითებით

ბ) დაწერა მოცულობის ფორმულა  $V = S_{\text{გ}} \cdot H$

გ) დაწერა  $S_{\text{გ}} = aH\sqrt{2}$

დ) დაწერა  $H = a\sqrt{3}$

ე) დაწერა  $a \cdot H = 6\sqrt{3}$

ვ) გამოთვალა ფუძის გვერდი ან ფართობი

ზ) გამოთვალა სიმაღლე

თ) იპოვა მოცულობა

1 ქულა - ა) ან ბ) ან გ) ან დ)

2 ქულა - ა), ბ), გ), დ) პუნქტებიდან რომელიმე ორი, ან ე)

3 ქულა - ვ) ან ზ)

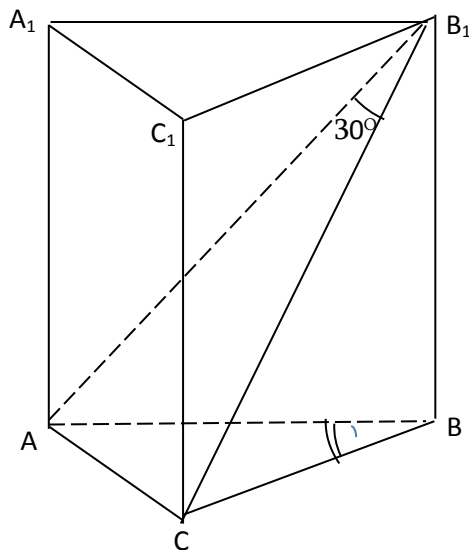
4 ქულა - ე) ვ) ან ე) ზ)

5 ქულა - თ)

7.  $ABCA_1B_1C_1$  მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძე  $ABC$  მართკუთხა სამკუთხედი.

$$\angle ACB = 90^\circ, \quad \sin \angle ABC = 0,6; \quad AB_1 = 12 \quad \text{და} \quad \angle CB_1A = 30^\circ.$$

იპოვეთ პრიზმის მოცულობა



$$V = S_{\text{ფ}} \cdot H$$

$B_1C$  დახრილის გეგმილი ფუძის სიბრტყეზე არის  $BC$  და  $B_1C \perp AC$ .

$$\text{თეორემის თანახმად -დან} \quad AC = \frac{AB_1}{2} = 6.$$

მართკუთხა  $\triangle ACB$  -  $\triangle ACB_1$  დან

$$AB = \frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{6}{0,6} = 10$$

$$BC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

მართკუთხა  $\triangle ABB_1$ -დან

$$H = \sqrt{AB_1^2 - AB^2} = \sqrt{144 - 100} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

$$S_{\text{ფ}} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$$



$$AK = OA - OK = OA - O_1A_1 = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$A_1K = AK \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 2$$

$$S_{\text{კვ.}} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 3\sqrt{3}$$

პასუხი:  $3\sqrt{3}$

ა) ააგო პირამიდის კვეთა

ბ) დაწერა კვეთის ფართობის ფორმულა

გ) იპოვა  $AD$  და  $A_1D_1$

დ) იპოვა  $AK$  მონაკვეთის სიგრძე

ე) იპოვა  $AO$  და  $A_1O_1$

ვ) იპოვა  $A_1K$  სიმაღლე

ზ) გამოთვალა კვეთის ფართობი

1 ქულა - ა)

2 ქულა - ა) და ბ)

3 ქულა - ა) ბ) გ) ან ა) ე)დ)

4 ქულა - ა) ბ) ვ)