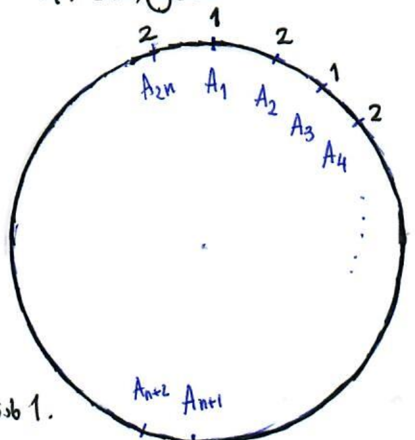
4. ამოცანა




ნახ 1.

მოვნიშნოთ $2n$ კუთხედის წვეროები $A_1A_2 \dots A_{2n}$, ცხადია მივიღებთ $n$ სხვადასხვა სიგრძის ქორდას $A_1A_2, A_1A_3, \dots$ $\dots A_1A_n, A_1A_{n+1}$ (აქედან ბოლო დიამეტრია)

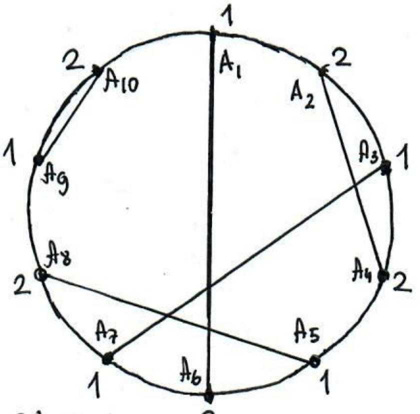
ყველა სხვა ქორდა ზემოჩამოთვლილი $n$-ცალიდან რომელიმეს ტოლია შესაბამისად, თუ შევძლებთ გავავლოთ ამოცანის პირობის $n$ ქორდა ისე, რომ ყველა წერტილზე გადიოდეს მხოლოდ 1 ქორდა, ამასთან $n$ ქორდა გამოიყენებს ზუსტად თითო-თითოს ყველა შესაძლო სიგრძეებიდან ზემოაღნიშნული $n$-ცალის — 1 ქ.

განვიხილოთ ინვარიანტი. ყველა კენტინდექსიანი $A$ აღვნიშნოთ 1-ით ხოლო ყველა ლუწინდექსიანი კი 2-ით. მაშინ $2n$ წერტილიდან $n$ ცალი 1-იანი და $n$ ცალი 2-იანი გვექნება. ამასთან თუ $n$ კენტია $A_n$ იქნება 1, ხოლო $A_{n+1}$ – 2, ხოლო თუ $n$ ლუწია – პირიქით — 2 ქ.

თუ ქორდა $A_kA_p$-ს $k$ და $p$ ინდექსები ორივე კენტია, ან ორივე ლუწი, მაშინ ქორდას დავარქვათ ლუწი. ხოლო თუ $k$ და $p$-ს შორის ერთი კენტია და მეორე ლუწი მაშინ ქორდას დავარქვათ კენტი — 3 ქ.

ცხადია, რადგან $A_1A_2$ კენტია, განსხვავებული სიგრძის ქორდებს თუ ზრდადობით დავალაგებთ კენტი და ლუწი ქორდები მორიგეობით დალაგდება. ანუ კენტი ქორდები და ლუწი ქორდების ცალ-ცალკე რაოდენობა ან ტოლია ან ერთით მეტია. ამოცანის პირობის შესრულებისთვის მოითხოვება რომ შესაძლებელი იყოს თუ ლუწი ქორდის რაოდენობა ლუწია ($2K$) აქედან $K$ რაოდენობის ქორდა აერთებს 1-იანებს (კენტ ინდექსებს), ხოლო $K$ რაოდენობის ქორდა კი 2-იანებს (მოითხოვს ამ შემთხვევაში ერთნაირ რაოდენობას კენტი და ლუწი ინდექსები). შესაბამისად კენტი ქორდების რაოდენობა ან $2K$-ს ტოლია ან $2K+1$-ის — 4 ქ.

შესაბამისად აუცილებელია $n=4K$ ან $n=4K+1$ თუ გვინდა რომ ამოცანის პირობა შესრულდეს, ყველა სხვა შემთხვევაში, ანუ როცა $n=4K+2$ ან $n=4K+3$ – ვერ მოხერხდება - 5 ქ.

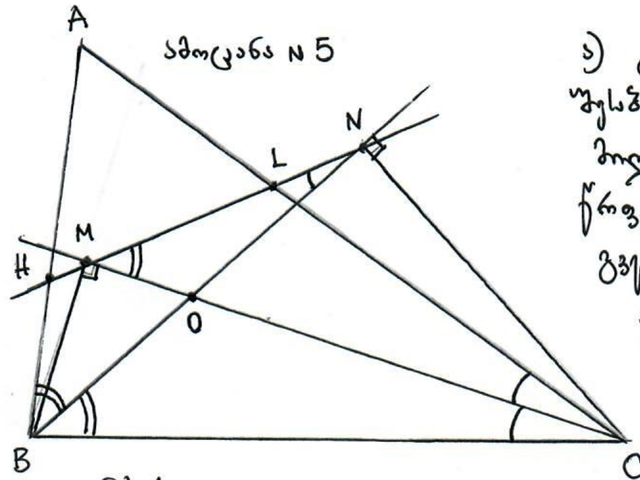



ნახ. 2.

ამოცანის პირობით განსახილავია $n=5$, $n=6$ და $n=7$ შემთხვევები, ნათელია, რომ $6 \equiv 2 \pmod 4$ $7 \equiv 3 \pmod 4$ ამიტომ წრეწირზე 12 კუთხედისა და 14 კუთხედის ვერ მოიძებნება სხვადასხვა სიგრძის ქორდები ზუსტად ამოცანის პირობის დაცვით — 6 ქ.

რაც შეეხება $n=5$ შემთხვევას, ინვარიანტის ყველა პირობა დაკმაყოფილებულია, თუმცა ჩვენ უნდა ავაგოთ მაგალითი, რომელიც სრულდება. (იხ. ნახ 2) — 7 ქ.

ამოცანა N 5




ნახ 1.

ა) გავავლოთ შესაბამისი ბისექტრისები და შესაბამისი მართობები $BN \perp NC$; $CM \perp BM$. მიღებულ $M$ და $N$ წერტილებზე გავავლებული წრფე $AB$ გვერდს კვეთს $H$ წერტილში ხოლო $AC$ გვერდს კი $L$ წერტილში. დავამტკიცოთ, რომ $ABC$ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირი, რომლის ცენტრი ბისექტრისების გადაკვეთის $O$ წერტილია, $ABC$ სამკუთხედის $AB$ და $AC$ გვერდებს ეხება $H$ და $L$ წერტილებში (იხ. ნახ 1). — 1 ქულა.

ბ) $BMNC$ ოთხკუთხედი ჩახაზულია, რადგან $\angle BMC = \angle BNC = 90^\circ$ ამიტომ $\angle BCM = \angle BNM$ ($\overset{\frown}{BM}$-ზე დაყრდნობილი კუთხეები), მაგრამ რადგან $\angle BCM = \angle MCL \Rightarrow \angle BNM = \angle ONL = \angle MCL = \angle OCL$ — 3 ქულა.

გ) რადგან $\angle ONL = \angle OCL \Rightarrow OLNC$ ოთხკუთხედიც ჩახაზულია $\Rightarrow$
$\Rightarrow OC$ ხაზზე (დიამეტრზე) დაყრდნობილი კუთხეები ტოლია $\Rightarrow$
$\angle ONC = \angle OLC = 90^\circ \Rightarrow OL \perp AC$ — 5 ქულა.

დ) ანალოგიურად გ) მივიღებთ $\angle NBC = \angle NMC$ ($NC$ ხაზზე დაყრდნობილი) მაგრამ $\angle NBC = \angle HBO \Rightarrow \angle HBO = \angle NMO$ ანუ $BHMO$ ოთხკუთხედი ჩახაზულია საიდანაც $\angle BMO = \angle BHO$ ($BO$ ხაზზე, დიამეტრზე, დაყრდნობილი) $\Rightarrow \angle BHO = 90^\circ$ — 6 ქულა.

ე) $OL \perp AC$; $OH \perp AB$, $O$ ჩახაზული წრეწირის ცენტრია $\Rightarrow H$ და $L$ წერტილები წრეწირის შეხების გვერდებთან შეხების წერტილები ყოფილა. — 7 ქულა.

ამოცანა N 6. ა) $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ გარდაქმნიდან $x_{n+1} = x_n(x_n+1)$ საიდანაც

$$\frac{1}{x_n+1} = \frac{x_n}{x_{n+1}} \quad (*)$$

ყოველი $n = 1, 2, 3 \ldots$ რიცხვისთვის — 1 ქულა.

ბ) ცხადია, რომ მიმდევრობის ყველა წევრი დადებითია, რადგან $x_1 = \frac{1}{2}$ და ყოველი შემდეგი წევრი დადებითი რიცხვების ნამრავლით მიიღება, ამასთან რადგან $x_{n+1} - x_n = x_n^2 > 0$ მიმდევრობა მკაცრად ზრდადია — 2 ქულა.

გ) (*) და შევკრიბოთ მივიღებთ $\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n(x_n+1)} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n+1}$ — 3 ქულა

დ) ბოლო გარდაქმნიდან $\frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}$ (**) საიდანაც — 4 ქულა

ე) $\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \frac{1}{x_3+1} + \cdots + \frac{1}{x_{100}+1} = \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}\right) + \left(\frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_4}\right) + \cdots$

$+ \cdots + \left(\frac{1}{x_{100}} - \frac{1}{x_{101}}\right) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{101}} = 2 - \frac{1}{x_{101}} > 1$ რადგან როგორც

შევამჩნიეთ, $x_n$ მიმდევრობა ზრდადია და უკვე $x_3 = \frac{21}{16} > 1$ — 6 ქულა

ვ) პასუხი: $\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{100}+1}$ რიცხვის მთელი ნაწილია 1. — 7 ქულა.