XI კლასი

1. ცნობილია, რომ *a*>0 და როცა $x \in [-8;-2]$, მაშინ $f(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^{ax+2}$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა $6\frac{1}{4}$-ის ტოლია. იპოვეთ $f(-4a)$.

რადგან a>0 და $0<\frac{2}{5}<1$, ამიტომ $f(x)$ კლებადი ფუნქციაა და $[-8;-2]$ შუალედზე მისი უდიდესი მნიშვნელობა იქნება $f(-8)=\left(\frac{2}{5}\right)^{-8a+2}$, რაც პირობის თანახმად $6\frac{1}{4}$-ის ანუ $\frac{25}{4}$-ის ტოლია.

$\left(\frac{2}{5}\right)^{-8a+2}=\frac{25}{4}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{-8a+2}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$; $-8a=-2$; $a=\frac{1}{2}$. $f(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}x+2}$,

მაშინ $f(-4a)=f(-2)=\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}(-2)+2}=\frac{2}{5}$

პასუხი: $\frac{2}{5}$.

ა) შენიშნა, რომ $f(x)$ კლებადი ფუნქციაა

ბ) გამოთვალა $f(-8)=\left(\frac{2}{5}\right)^{-8a+2}$ ან $f(-4a)=\left(\frac{2}{5}\right)^{-4a^2+2}$

გ) დაწერა $\left(\frac{2}{5}\right)^{-8a+2}=\frac{25}{4}$ განტოლება.

დ) იპოვა $a=\frac{1}{2}$

ე) მიიღო პასუხი $f(-4a)=\frac{2}{5}$

1 ქულა - ა) ან ბ)
2 ქულა - ა) და ბ)
3 ქულა - გ)
4ქულა - დ)
5 ქულა - ე)

2. გამოთვალეთ 8^x+8^{-x}, თუ ცნობილია, რომ $4^x+4^{-x}=23$.

$4^x+4^{-x}=\left(2^x+2^{-x}\right)^2-2\cdot2^x\cdot2^{-x}=\left(2^x+2^{-x}\right)^2-2$

$\left(2^x+2^{-x}\right)^2=4^x+4^{-x}+2=25,$

ამასთან, $2^x+2^{-x}>0$, ე.ი. $2^x+2^{-x}=5$

$8^x+8^{-x}=\left(2^x+2^{-x}\right)^3-3\cdot2^x\cdot2^{-x}\left(2^x+2^{-x}\right)=\left(2^x+2^{-x}\right)^3-3\cdot\left(2^x+2^{-x}\right)=5^3-3\cdot5=110$

პასუხი: 110

ა) დაწერა $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ ან $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

ბ) დაწერა $4^x+4^{-x}=\left(2^x+2^{-x}\right)^2-2$ ან მისი ტოლფასი ტოლობა

გ) გამოთვალა $2^x+2^{-x}=5$

დ) დაწერა $8^x+8^{-x}=\left(2^x+2^{-x}\right)^3-3\cdot\left(2^x+2^{-x}\right)$ ან მისი ტოლფასი ტოლობა

ე) მიიღო პასუხი: $8^x+8^{-x}=110$

1 ქულა - ა)
2 ქულა - ბ) ან დ)
3 ქულა - ბ) და დ) ან გ)
4ქულა - გ) და დ)
5 ქულა - გ) და ე)

3. ამოხსენით განტოლება: $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=4$

რადგან $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$, ამიტომ $\left(2-\sqrt{3}\right)=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^x}=4;\quad \left(2+\sqrt{3}\right)^x\equiv y;\quad y+\frac{1}{y}=4$$

$$y^2-4y+1=0;\quad y_1=2-\sqrt{3}\quad y_2=2+\sqrt{3}$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^x=2-\sqrt{3}$$

ან $\left(2+\sqrt{3}\right)^x=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$ $\quad x=1$

$x=-1$

პასუხი: $x=\pm1$

ა) შენიშნა, რომ $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1$

ბ) შემოიღო აღნიშვნა $\left(2+\sqrt{3}\right)^x=y$ ან $\left(2-\sqrt{3}\right)^x=y$

გ) მიიღო $y^2-4y+1=0$ ან მისი ტოლფასი განტოლება

დ) იპოვა $y_1=2-\sqrt{3}$ და $y_2=2+\sqrt{3}$

ე) მიიღო პასუხი $x=\pm1$

1 ქულა - ა) ან ბ)
2 ქულა - ა) და ბ)
3 ქულა - გ)
4ქულა - დ)
5 ქულა - ე)
თუ გამოიცნო ერთი ამონახსნი და შეამოწმა - 1 ქულა
თუ გამოიცნო ორივე ამონახსნი და შეამოწმა - 2 ქულა

4. ამოხსენით უტოლობა $27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x}-12\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{1-x}+19\geq 0$.

$$27\cdot\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}-12\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}+19\geq 0$$

$$12\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}-18\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}+19\geq 0 \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}\equiv y$$

$$12y-\frac{18}{y}+19\geq 0$$

$$12y^2+19y-18\geq 0$$

$$y_1=-\frac{9}{4}\quad y_2=\frac{2}{3}$$

$$y\in\left(-\infty;-\frac{9}{4}\right]\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$$

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}\leq-\frac{9}{4}\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}\geq\frac{2}{3}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing\\ -x\leq 1\end{array}\right. \qquad x\geq -1$$

პასუხი: $x\in[-1;+\infty)$

ა) გამოჰყო $\frac{2}{3}$ -ისა და $\frac{3}{2}$ -ის ერთიდა იგივე ხარისხი

ბ) შემოიღო აღნიშვნა, მაგ.: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}=y$

გ) მიიღო კვადრატული უტოლობა
დ) ამოხსნა კვადრატული უტოლობა
ე) დაწერა მაჩვენებლიანი უტოლობების გაერთიანება
ვ) მიიღო პასუხი.
1 ქულა - ა) ან ბ)
2 ქულა - გ)
3 ქულა - დ)
4 ქულა - ე)
5 ქულა - ვ)

5. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით დაამტკიცეთ, რომ $\forall n\in N$ -თვის
.

შევამოწმოთ *n*=1-სთვის $\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}$

$1-\frac{4}{1}=\frac{1+2}{1-2};\quad -3=-3$ ჭეშმარიტია.

დავუშვათ, ჭეშმარიტება *n*=*k* -სთვის $\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}$

და დავამტკიცოთ, რომ ჭეშმარიტი იქნება $n=k+1$ -სთვის.ანუ ვაჩვენოთ, რომ

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\left(2(k+1)-1\right)^2}\right)=\frac{1+2(k+1)}{1-2(k+1)}=\frac{2k+3}{-2k-1}\cdot$$

მართლაც

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\left(2(k+1)-1\right)^2}\right)=\frac{1+2k}{1-2k}\cdot\left(1-\frac{4}{(2k+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{1+2k}{1-2k}\cdot\left(\frac{(2k+1)^2-4}{(2k+1)^2}\right)=\frac{2k+1}{1-2k}\cdot\frac{(2k-1)(2k+3)}{(2k+1)^2}=-\frac{2k+3}{2k+1}=\frac{2k+3}{-2k-1}\cdot$$

რ.დ.გ.

ტოლობა დამტკიცებულია $\forall n\in N$ -თვის.

ა) შეამოწმა n=1-სთვის

ბ) ჩაწერა მოცემული ტოლობა n=k-თვის და n=k+1-თვის

გ) აღნიშნა ინდუქციის ბიჯი

დ) ბიჯი დაამტკიცა ხარვეზებით ან არაცხადად

ე) დაამტკიცა სრულყოფილად

1 ქულა - ა) ან ბ) ან გ)

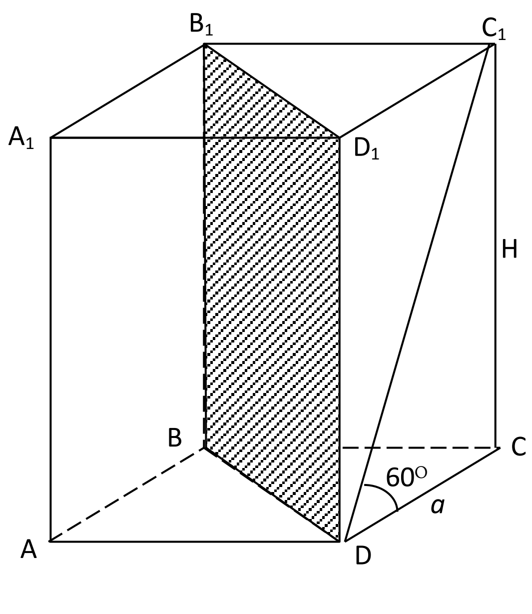
2 ქულა - ა) და ბ) ან ა) და გ)

3 ქულა - ა) ბ) გ)

4 ქულა - ა) გ) დ)

5 ქულა - ე)

6. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის დიაგონალური კვეთის ფართობია $6\sqrt{6}$ სმ². გვერდითი წახნაგის დიაგონალური ფუძის სიბრტყესთან ადგენს 60^0-იან კუთხეს.იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.



$CD\equiv a$, $CC_1\equiv H$

$V=S_ფ\cdot H=a^2\cdot H$

$S_{კვ}=BD\cdot H=a\sqrt{2}\cdot H=6\sqrt{6}$

$a\cdot H=6\sqrt{3}$

ΔCC_1D მართკუთხაა $H=a tg60^O=a\sqrt{3}$

$a\cdot a\sqrt{3}=6\sqrt{3},\quad a^2=6,\quad a=\sqrt{6}$

$H=\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}=3\sqrt{2}$

$V=6\cdot 3\sqrt{2}=18\sqrt{2}$

პასუხი: $18\sqrt{2}$ სმ².

ა) ააგო ნახაზი კვეთის და 60^0-იანი კუთხის მითითებით

ბ) დაწერა მოცულობის ფორმულა $V=S_ფ\cdot H$

გ) დაწერა $S_{გვ}= aH\sqrt{2}$

დ) დაწერა $H = a\sqrt{3}$

ე) დაწერა $a \cdot H = 6\sqrt{3}$

ვ) გამოთვალა ფუძის გვერდი ან ფართობი

ზ) გამოთვალა სიმაღლე

თ) იპოვა მოცულობა

1 ქულა - ა) ან ბ) ან გ) ან დ)

2 ქულა - ა), ბ), გ), დ) პუნქტებიდან რომელიმე ორი, ან ე)

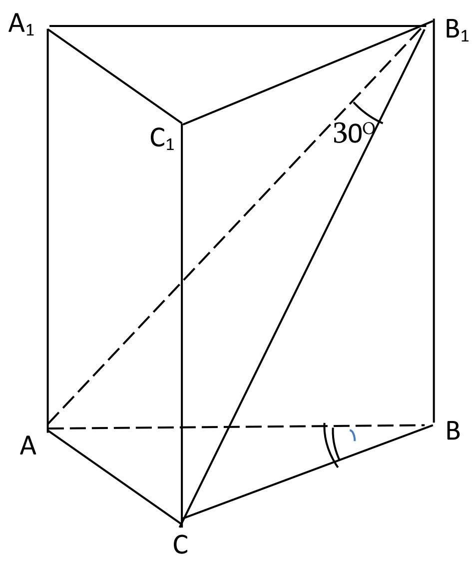
3 ქულა - ვ) ან ზ)

4 ქულა - ე) ვ) ან ე) ზ)

5 ქულა - თ)

7. $ABCA_1B_1C_1$ მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძე ABC მართკუთხა სამკუთხედია. $\angle ACB = 90^o, \quad \sin\angle ABC = 0{,}6; \quad AB_1 = 12$ და $\angle CB_1A = 30^o$.

იპოვეთ პრიზმის მოცულობა



$V = S_ფ \cdot H$

B_1C დახრილის გეგმილი ფუძის სიბრტყეზე არის BC და $B_1C \perp AC$.

თეორემის თანახმად -დან $AC = \frac{AB_1}{2} = 6$.

მართკუთხა ΔACB - ΔACB_1 დან

$$AB = \frac{AC}{\sin\angle ABC} = \frac{6}{0{,}6} = 10$$

$$BC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

მართკუთხა ΔABB_1-დან

$$H = \sqrt{AB_1^2 - AB^2} = \sqrt{144 - 100} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

$$S_ფ = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$$

$V = 24 \cdot 2\sqrt{11} = 48\sqrt{11}$

პასუხი: $48\sqrt{11}$.

ა) დაწერა $V = S_{ფ} \cdot H$ ფორმულა

ბ) აჩვენა, რომ $B_1C \perp AC$

გ) გამოთვალა AC გვერდის სიგრძე

დ) იპოვა ფუძის ორი გვერდი

ე) იპოვა პრიზმის სიმაღლე

ვ) იპოვა ფუძის ფართობი

ზ) იპოვა მოცულობა

1 ქულა - ა) ან ბ)

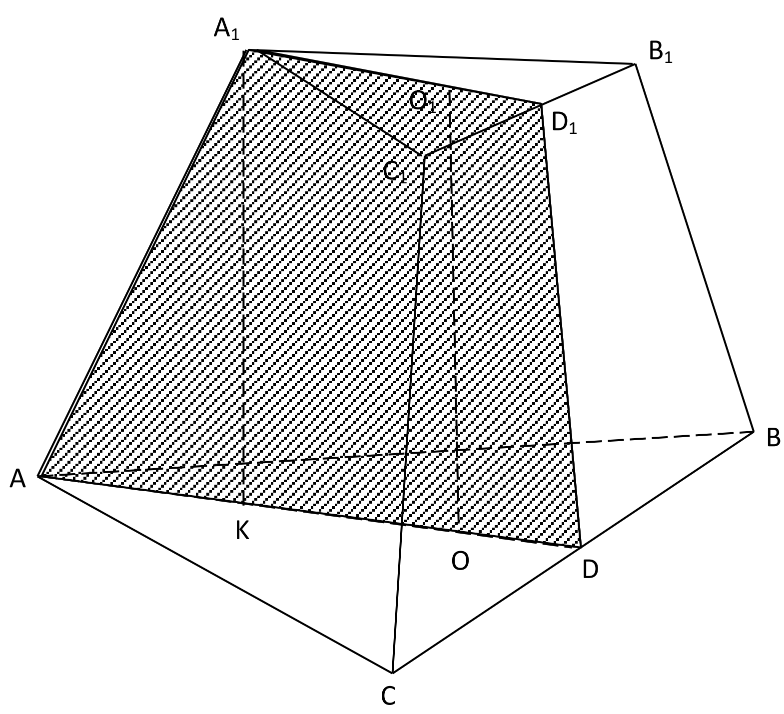
2 ქულა - ა) და ბ) ან გ)

3 ქულა - დ)

4 ქულა - ა) ე) ან ა) ვ)

8. წესიერი წაკვეთილი პირამიდის ფუძეების გვეტდების სიგრეებია 2 სმ და 4 სმ. გვერდითი წიბოები ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია 60^0-იანი კუთხით. იპოვეთ გვერდითი წიბოსა დაა დიდი ფუძის ცენტრზე გამავალი კვეთის ფართობი.

კვეთა პირამიდის ფუძეებს გადაკვეთს პარალელურ წრფეებზე, შესაბამისად, კვეთაში



მიღებული AA_1D_1D ოთხკუთხედი ტრაპეციაა.

$$S_{კვ.} = \frac{AD + A_1D_1}{2} \cdot A_1K \quad (A_1K \perp AD)$$

$$AD = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3};$$

$$A_1D_1 = \frac{A_1B_1\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

ΔAKA_1 მართკუთხაა,

$\angle A_1AK = 60^o.$

$$AK = OA - OK = OA - O_1A_1 = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$A_1K = AK \cdot tg60^O = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 2$$

$$S_{\text{კვ.}} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 3\sqrt{3}$$

პასუხი: $3\sqrt{3}$

ა) ააგო პირამიდის კვეთა

ბ) დაწერა კვეთის ფართობის ფორმულა

გ) იპოვა AD და A_1D_1

დ) იპოვა AK მონაკვეთის სიგრძე

ე) იპოვა AO და A_1O_1

ვ) იპოვა A_1K სიმაღლე

ზ) გამოთვალა კვეთის ფართობი

1 ქულა - ა)

2 ქულა - ა) და ბ)

3 ქულა - ა) ბ) გ) ან ა) ე)დ)

4 ქულა - ა) ბ) ვ)