

第 6 章

潮汐

6.1 起潮ポテンシャル

日本では，1 日 2 回の満潮と干潮が生じる．なぜ，1 日 2 回なのか．日本海では，潮差は小さく，有明海では大きい．なぜなのか．まず，1 日 2 回の潮と干潮が生じるしくみを見てみよう．地球が公転していることと深い関係がある．地球は太陽の周りを 1 年で公転しているけれど，月と地球の質量中心の周りを公転している．公転による見かけの力（地球ではどこでも同じ）と月または太陽の引力が場所によって異なることから，潮汐が引き起こされる．そこから見ていこう．

慣性系 S_0 に対して加速度 α_0 の並進運動をしている座標系 S では質量 m の物体が力 F の力を受けて運動しているとき， α は物体の座標系 S に対する加速度として運動方程式は

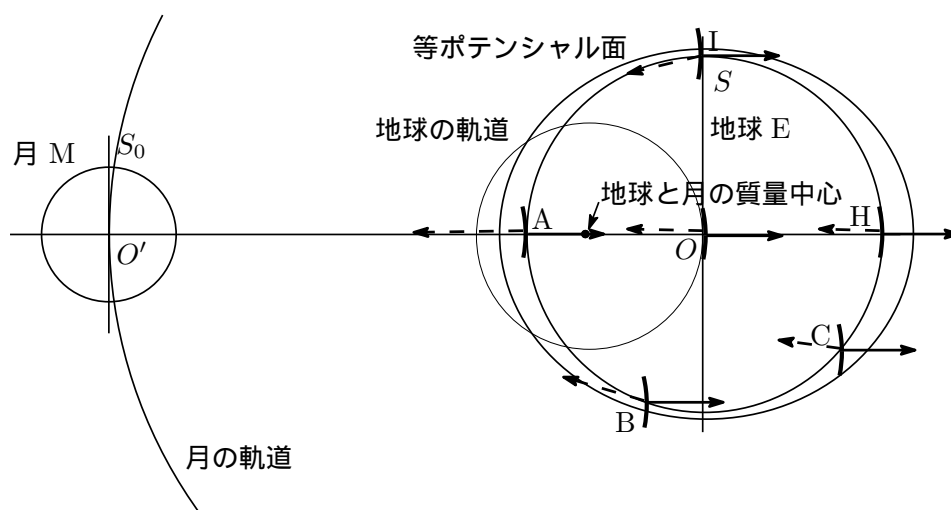


図 6.1 月の引力（破線の矢印）と見かけの力（実線の矢印）．この 2 つの力の合力が起潮力である．地球の自転による遠心力は関係ない

$$m(\alpha + \alpha_0) = F \quad (6.1)$$

で，加速度運動をしている座標系 S からみた運動方程式は

$$m\alpha = F - m\alpha_0 \quad (6.2)$$

となる．座標系 S の加速度運動 α_0 による見かけの力 $-m\alpha_0$ が生じている．この見かけの力 $-m\alpha_0$ は座標系 S 上のどこであっても同じ大きさである．なぜなら，座標系 S が回転せずに座標軸を平行に保ったまま移動している，つまり，並進しているからである．地球と月からなる系を考える．地球と月は地球と月の質量中心いわゆる重心の周りを回転している．月の質量が地球の質量の 0.0123 倍であるので，質量中心は月と地球とを 1 : 0.0123 に内分する点にある．地球から月までの距離は 380000km であるので，質量中心は，地球の中心から $380000 \times 0.0123 / (1 + 0.0123) = 4600\text{km}$ の位置にある．地球の半径は 6300km なので，質量中心は地球の内部にある．地球の中心を座標系 S の原点にとる．座標系 S に固定されている点はどこにあっても，(点 A, B, C, H, I では太線で示した) 同じ曲率の軌跡を同じ速さでたどる．どの点も同じ大きさの加速度運動 (加速度 α_0) をする．海水はどこでも同じ見かけの力 (単位質量あたり α_0) を受けることになる．これは，あなたが乗った大型バスが急ブレーキを掛けると，どこに座っていても同じ力を受けて，前に倒れそうになるのと同じことである．バスの前部であろうが後部であろうが，左であろうが右であろうが同じ力を受ける．月の引力が働くが，その大きさ (月までの距離の 2 乗に逆比例) や向き (月の中心を向いている) は一定ではない．この点は，見かけの力 α_0 とは大きく異なっている．地球の中心において，月の引力と見かけの力は釣り合っている．それ以外の点では，月の引力と見かけの力は釣り合っていない．月の引力と見かけの力の合力を起潮力という．起潮力は地球の自転による遠心力とは全くの関係がない．起潮力の分布は図 ?? に示してある．海水には地球の引力も働くので，起潮力と地球の引力の合力に対して水面は直角になる様に分布する．直角でなければ，海水は運動を始める．海面が力の場の等ポテンシャル面なるように海水は分布しようとする．*1したがって，潮汐の問題は，力より等ポテンシャル面を求めるのが簡単である．

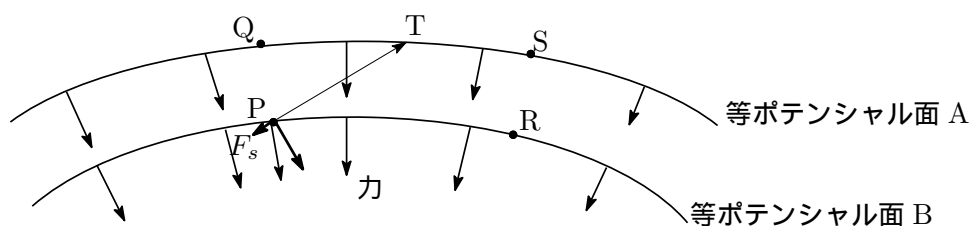
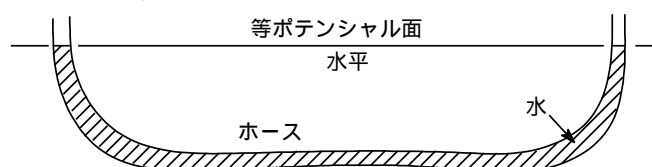


図 6.2 力と等ポテンシャル面．力と等ポテンシャル面は直交する．

ポテンシャルについて説明しよう．図のように力のあるとき，力に直角に移動させると

*1 10m 離れた 2 点で水平面を決めるときには図のように 10m より少し長いホースに水を満たす．ホースの両端



の水面を結ぶ線が求める水平である．

物体に力を加えて仕事をする必要がないので、物体の持つ位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）に変化はない。点 P から点 Q に移動させるときは、単位質量（1 Kg）の物体に力 F が働いていると、反対方向に F を加えて仕事する必要がある。その仕事 $W = F \cdot s$ の分だけ、点 Q の方が点 P よりも位置エネルギー（ポテンシャルエネルギー）が大きい。式で書くと、点 P のポテンシャルエネルギーを $U(P)$ と表して、 $U(Q) - U(P) = F_s$ となる。 $U(P)$ を単にポテンシャルと呼ぶことが多い。点 P から点 T に斜めに移動させるすると、力 F の線分 PT に平行な成分 F_s に逆らい仕事することになるので、

$$U(T) - U(P) = F_s s, \quad s \equiv \overline{PT} \quad (6.3)$$

となる。力 F_s は

$$F_s = \frac{U(T) - U(P)}{s} \quad (6.4)$$

で求められる。どこでも力に直角になっている曲面があるが、つまり、 $F_s = 0 = U(T) - U(P)$ であるような点の集まりがある。それが等ポテンシャル面である。この面内では物体を移動させるのに仕事は不要である。 $U(Q) = U(S)$ である。ポテンシャルの例を挙げていく。図 6.3

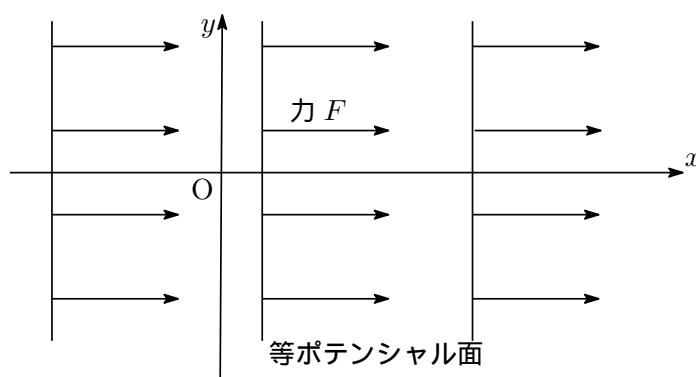


図 6.3 力と等ポテンシャル面。等ポテンシャル面は平面。力と等ポテンシャル面は直交する。

に一定の力の場の場合を示した。 $U(x, y) - U(0, y) = -Fx$ 。 $x = 0$ の点を基準にするので $U(0, y) = 0$ なので、 $U(x, y) = -Fx$ ^{*2}である。力 F は

$$F = -\frac{U(x + s, y) - U(x, y)}{s} \quad (6.5)$$

で計算できる。 s を無限小にとって、力 F の x 成分は

$$F_x = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \quad (6.6)$$

^{*2} 高校物理に重力による位置エネルギー mgh があったと思う。物体の質量を m 、重力加速度を g として、重力 mg に逆らい h だけ上に持ち上げると、物体の位置エネルギーは mgh だけ増える。ここでは単位質量 $m = 1$ の場合を考えている。 F と g が対応し、 $-x$ と h が対応している。

となる^{*3}．同様に考えて，力 F の y 成分は

$$F_y = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \quad (6.7)$$

となる．この例では $F_y = 0$ である．

次に地球や月の引力のポテンシャルを月や地球の中心を原点にとって図 6.4 に示した． $x = r$ から $x = r + s$ に物体を動かすと， $U(r + s, 0, 0) - U(r, 0, 0) = F_x(r)s = \frac{s}{r^2} \approx \frac{1}{r} - \frac{1}{r + s}$ ， $x_0 = r$ ， $x_n = r + ns$ ($n = \text{自然数として}$ ，

$$U(x_1, 0, 0) - U(x_0, 0, 0) = -\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_0} \quad (6.8)$$

$$U(x_2, 0, 0) - U(x_1, 0, 0) = -\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} \quad (6.9)$$

$$\dots = \dots \quad (6.10)$$

$$U(x_n, 0, 0) - U(x_{n-1}, 0, 0) = -\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n-1}} \quad (6.11)$$

辺辺加えると

$$U(x_n, 0, 0) - U(x_0 = r, 0, 0) = -\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{r + ns} + \frac{1}{r} \quad (6.12)$$

となる．無限遠をポテンシャルの基準にする，つまり， $U(\infty, 0, 0) = 0$ とし， n を無限大にとると $x_n = \infty$ となって， $-\frac{1}{r + ns} \rightarrow 0$ なので，

$$U(r, 0, 0) = -\frac{1}{r} \quad (6.13)$$

となる． x 軸はどの方向にとっても，同じ議論が成り立つので，

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{r} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (6.14)$$

となる．月や地球の引力の等ポテンシャル面は球面となる．

地球は月や太陽などによって加速度運動させられている．地球の質量を E ，月の質量を M とする．図 6.1 の配置のときに座標系 S_0 で地球を $(D, 0, 0)$ ，月を原点 O' にとる．月が地球に及ぼす引力は x 軸に平行で負の方向を向いている．したがって， k を万有引力定数として，万有引力の法則から

$$E\alpha_{0x} = -kEM/D^2, \quad \alpha_{0y} = 0, \quad \alpha_{0z} = 0 \quad (6.15)$$

となっている．つまり，質量 m の物体に働く見かけの力は

$$m\alpha_{0x} = -kmM/D^2, \quad \alpha_{0y} = 0, \quad \alpha_{0z} = 0 \quad (6.16)$$

である．これは，単位質量 ($m = 1$) の物体に働く力は

$$\alpha_0 = (-kM/D^2, 0, 0). \quad (6.17)$$

^{*3} 偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}$ は $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$ で定義され， y, z を定数として，関数 $f(x, y, z)$ を x で微分したものである．

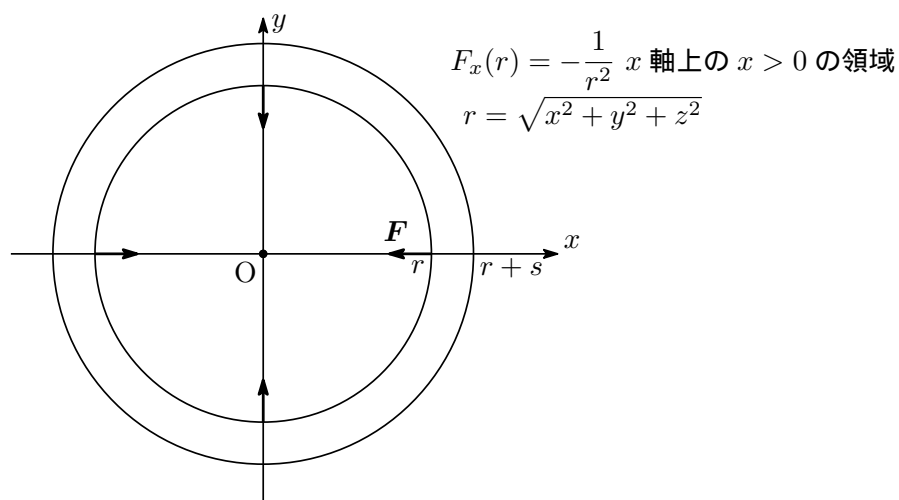


図 6.4 力と等ポテンシャル面．等ポテンシャル面は球面．力と等ポテンシャル面は直交する．

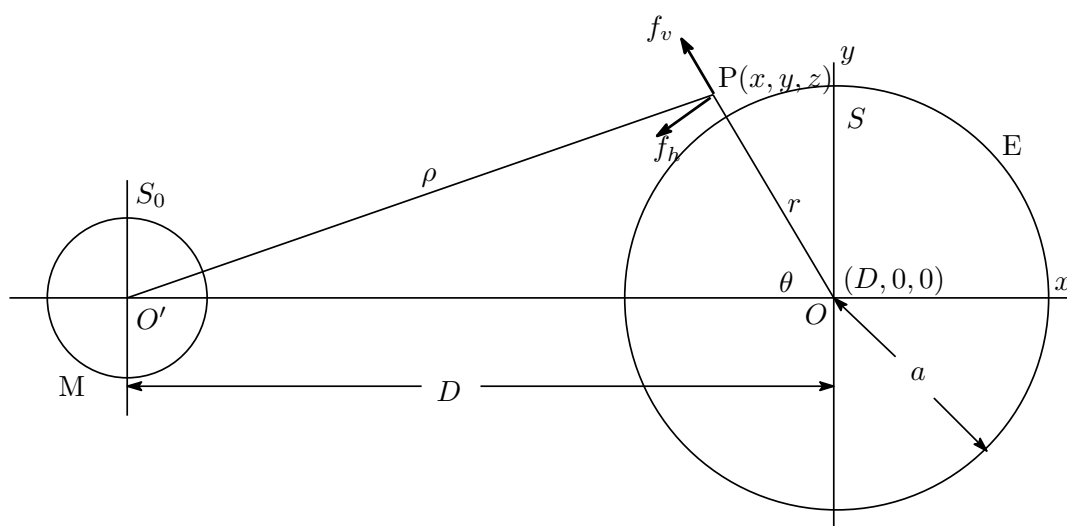


図 6.5 月と地球の配置

座標系 S でみると見かけの力のポテンシャルは次の形に書けて

$$U_a(x, y, z) = -\frac{kM}{D^2}x = \frac{kM}{D^2}r \cos \theta. \quad (6.18)$$

は地球の引力による重力ポテンシャル $U_E(x, y, z)$ と月の引力による重力ポテンシャル $U_M(x, y, z)$ は単位質量の物体に働く重力がそれぞれ

$$F_E = -\frac{kE}{r^2}, \quad F_M = -\frac{kM}{\rho^2}, \quad (6.19)$$

であり， $F = -\frac{1}{r^2}$ のとき， $U(x, y, z) = -\frac{1}{r}$ なので

$$U_E(x, y, z) = -kE/r, \quad U_M(x, y, z) = -kM/\rho \quad (6.20)$$

である．ただし， $r = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ， $\rho = \overline{O'P} = \sqrt{(x - (-D))^2 + y^2 + z^2}$ ．潮汐に関係するポテンシャル Ω は月の引力のポテンシャルと地球の加速度運動に起因する見かけの力 apparent force のポテンシャルの和で

$$\Omega = U_M + U_a = -\frac{kM}{\rho} + \frac{kM}{D^2} r \cos \theta + c. \quad (6.21)$$

これを起潮ポテンシャル tide generating potential という．

$$-\text{grad} \Omega \equiv -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) \quad (6.22)$$

を起潮力 tide-generating force という．地表面付近の起潮ポテンシャルを (x, y, z) の関数として表すよりも地球の中心からの距離 r と角度 θ を使う方が便利であるので， r と θ を利用する．

$$\rho^2 = D^2 + r^2 - 2Dr \cos \theta \quad (6.23)$$

$x = (r/D)^2 - 2(r/D) \cos \theta$ とおいて， $x \ll 1$ のとき $1/\sqrt{1+x} = 1 - x/2 + \dots$ で展開できるので

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{D\sqrt{1 + (r/D)^2 - 2(r/D) \cos \theta}} = \frac{1}{D} \left[1 - \frac{1}{2} ((r/D)^2 - 2(r/D) \cos \theta) + \dots \right] \quad (6.24)$$

と計算できるが，恒等式を使う方が楽である． $|r/D| < 1$ であれば

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{D} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{D}\right)^l P_l(\cos \theta). \quad (6.25)$$

が恒等的に成り立つ．ここに， $P_l(x)$ は Legendre の多項式である．

$$P_0(x) = 1 \quad (6.26)$$

$$P_1(x) = x \quad (6.27)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad (6.28)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad (6.29)$$

式 (6.25) を使うと，式 (6.21) は

$$\Omega = -\frac{kM}{D} \left[\frac{r^2}{D^2} P_2(\cos \theta) + \frac{r^3}{D^3} P_3(\cos \theta) + \dots \right] + c. \quad (6.30)$$

$r/D \ll 1$ なので， $[\quad]$ の第2項以下を無視する．

r と θ で表した起潮ポテンシャルは

起潮ポテンシャル

$$\Omega = -\frac{kMr^2}{2D^3} (3 \cos^2 \theta - 1) + c = -\frac{kM}{2D^3} (2x^2 - y^2 - z^2) \quad (6.31)$$

となる．月と地球を結ぶ線上の起潮ポテンシャル ($\Omega = -\frac{kM}{D^3} x^2 \leq 0$) については図 6.6

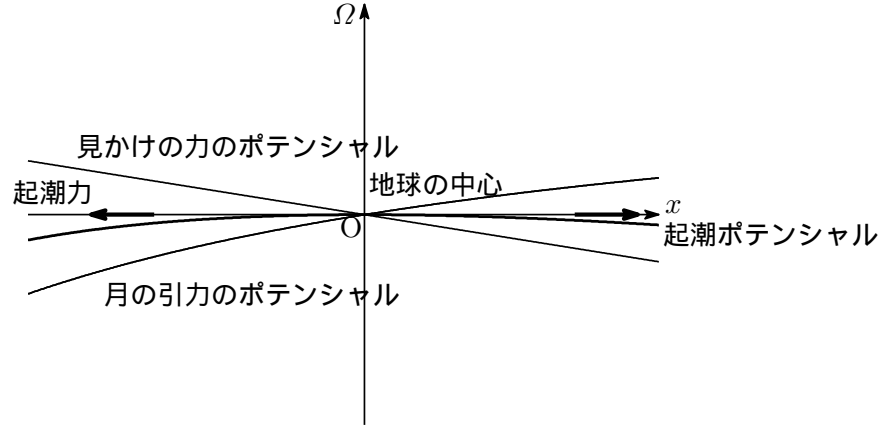


図 6.6 月と地球を結ぶ線上の起潮ポテンシャルの模式図 ($c = 0$ として) . ポテンシャルが小さくなる方向に起潮力が働く .

に示した . 起潮力は地球の中心への向きとは反対方向を向いている . $\theta = \pi/2$ のときは , $\Omega = \frac{kM}{2D^3}y^2 \geq 0$ となる . 起潮力は地球の中心へ向いている . 起潮ポテンシャルを $z = 0$ の平面で (x, y) の関数と見たとき , 地球の中心は起潮ポテンシャルの鞍点になっている .

地点 $(x, y) = (-a, 0)$ の起潮力は $g \equiv kE/a^2$ を利用して , k を消去し , $E/M = 81.53$, $a = 6370\text{km}$, $D/a = 60.26$ を代入すると

$$-\frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\frac{2kMa}{D^3} = -\frac{2Ma^3}{ED^3}g = -\frac{2}{81.53 \times 60.26^3}g = 1.12 \times 10^{-7}g \quad (6.32)$$

起潮力の加速度は地表の重力加速度 g の 1 千万分の 1 の大きさである .

起潮力 f_v と f_h は図 6.1 に示したように向きをとり , 式 (6.3) と同じように考えて

$$f_v \Delta r = -[\Omega(r + \Delta r, \theta) - \Omega(r, \theta)] \quad (6.33)$$

$$f_h r \Delta \theta = \Omega(r, \theta + \Delta \theta) - \Omega(r, \theta) \quad (\theta \text{ が小さくなる方向を正として}) \quad (6.34)$$

なので , 地表面 ($r = a$) の起潮力は Δr を微小量として

$$f_v = -\frac{\Omega(r + \Delta r, \theta) - \Omega(r, \theta)}{\Delta r} = -\left. \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right|_{r=a} \quad (6.35)$$

$$f_h = \frac{\Omega(r, \theta + \Delta \theta) - \Omega(r, \theta)}{r \Delta \theta} = \left. \frac{\partial \Omega}{r \partial \theta} \right|_{r=a} \quad (\theta \text{ が小さくなる方向を正として}) \quad (6.36)$$

起潮力を計算すると

$$\Omega = -\frac{mr^2}{a} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) \quad \text{として} \quad (6.37)$$

$$f_v = 2m \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) \quad (6.38)$$

$$f_h = m \sin 2\theta \quad (6.39)$$

となる .

6.2 平衡潮汐 (equilibrium tide equilibrium tide) 論

図 6.7 に等ポテンシャル面と海面が一致していないときに海水にどのような力がかかり，どのように運動するかを示した． x 軸を等ポテンシャル面に平行に，鉛直方向に z 軸をとった．この図では，右の方が水位が高く，右から左に力が掛かっている．海水は左の方向に運動し，海面は右側の水位が下がり，左側の水位が上がる．海水が受ける水平方向の力（圧力傾度力の水平成分）は深さによらず一定である．そのため，流体は全層に渡って同じように流れる．等ポテンシャル面が極めてゆっくりと変化している場合は，海面が等ポテンシャル面に一致するように運動する．ポテンシャルは

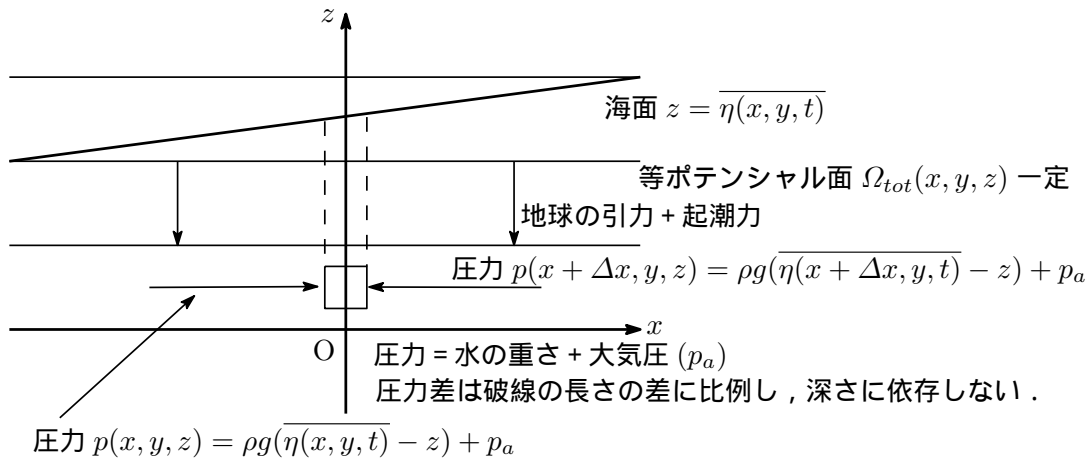


図 6.7 海水の鉛直方向に加速度運動はないので，流体粒子にかかる圧力傾度力は深さに依存しない．流体粒子は深さによらず同じ速度で運動する．浅水波として伝わる．

$$\Omega_{tot} = -\frac{kE}{r} + \Omega \quad (6.40)$$

大気圧 P が一定であれば，式 (5.36) から，海面は Ω_{tot} が一定の面となる．起潮力と地球による重力の合力と水平面とは直交する． Ω_{tot} が一定の面が海面である．地表付近のみを考える．上昇水位を $\bar{\eta}(r = a + \bar{\eta})$ ， $g \equiv kE/a^2$ とする．

$kE/(a + \bar{\eta}) = kE/a - (kE/a^2)\bar{\eta} = kE/a - g\bar{\eta}$ となるので，

$$\Omega_{tot} = -\frac{kE}{a} + g\bar{\eta} + \Omega = \text{const} \quad (6.41)$$

地表面付近では，地球の重力ポテンシャル $-\frac{kE}{r}$ は $g\bar{\eta} + \text{定数}$ なので，定数分を差し引いて

$$\Omega_{tot} = g\bar{\eta} + \Omega = \text{const} \quad (6.42)$$

となる $\bar{\eta}$ が潮位となる．

$$\bar{\eta} = -\frac{\Omega(r = a)}{g} + C \quad (6.43)$$

$g \equiv kE/a^2$ を使うと

$$\bar{\eta} = \frac{Ma^4}{2ED^3}(3\cos^2\theta - 1) + C \quad (6.44)$$

地球表面全体の平均水位上昇は0であることから, $C = 0$ である. 図 6.8 に起潮力が働かない

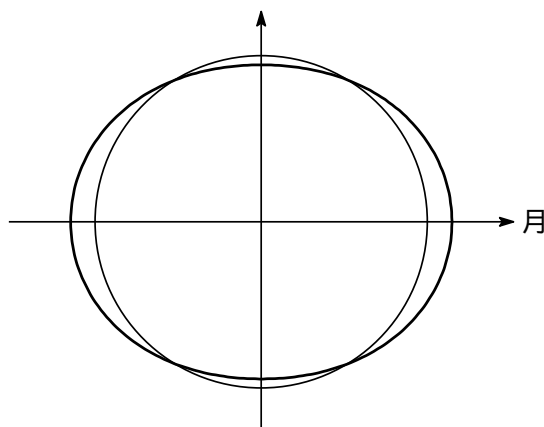


図 6.8 起潮力が働かないときの球の等ポテンシャル面と起潮力が働いたときのすこし細長い等ポテンシャル面.

ときの球の等ポテンシャル面と起潮力が働いたときのすこし細長い等ポテンシャル面を示す. これから, 地球上のある点では一日に2回の高潮 high water (満潮 high water) と低潮 low water (干潮) があることがわかる. このような起潮力によって起こされる潮汐を天文潮 astronomical tide といい, 気象によって引き起こされる海面変動を気象潮 という.

- 月の場合は $E/M = 81.53$, $a = 6370\text{km}$, $D/a = 60.26$ を代入して,

$$\bar{\eta} = 26.7 \left(\cos 2\theta + \frac{1}{3} \right) \quad (6.45)$$

となる. 最高: 35.6cm, 最低: -17.8cm, 潮差 (高潮と低潮の差): 53.4cm

- 太陽の場合は

$$\bar{\eta}_s = 12.3 \left(\cos 2\theta_s + \frac{1}{3} \right) \quad (6.46)$$

最高: 16.4cm, 最低: -8.2cm, 潮差: 24.6cm

月と太陽の潮差の比は 1:0.46 で, 月の影響の方が大きい. 月と太陽と地球が一直線状に並んだ (新月や満月^{*4}) ときは, 等ポテンシャル面が伸びた方向が重なるので, 潮差が大きく,

^{*4} 上弦の月は, 弦の部分が上に来るためといわれていますが, 実際には中国において, 「上中下」は月の旬を, 弦は半月で, 上弦の月は月の始め頃に見られる半円形の月の形だという説があるようです. 本当はどうなのでしょう.

A

上弦の月、下弦の月の見分け方として、しばしば登場するのが、月の明暗境界の (弓に模した場合の弦の) 部分が、西の空に沈むときに、地平線に対して上にあるか、下にあるかという判断です。しかしながら、これは後世に便宜的に導入された一種の覚え方で、もともとの意味とは全く違います。かつては月を基準とした太陰暦と

このときの潮汐を大潮 spring tide と呼ぶ。月と太陽とが地球から見て直角の方向に位置する半月のときは、等ポテンシャル面が伸びた方向が直交するので、潮差は小さくなる。このときの潮汐を小潮 neap tide と呼ぶ。

- 大潮時の潮差 ($\theta - \theta_s = 0, \pi$) $53.4 + 24.6 = 78.0$ cm
- 小潮時の潮差 ($\theta - \theta_s = \pm\pi/2$) $53.4 - 24.6 = 28.8$ cm

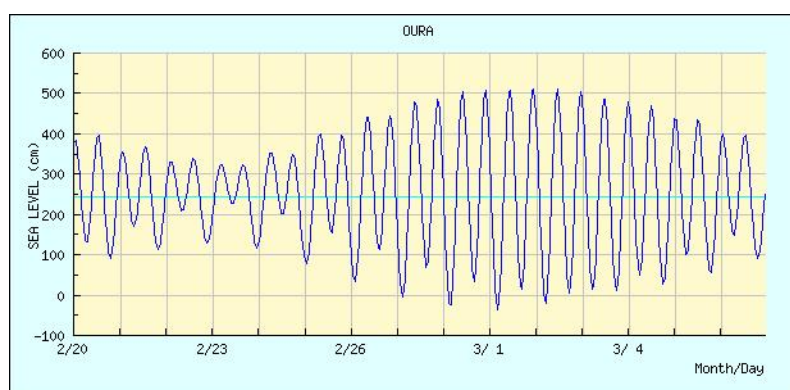


図 6.9 佐賀県の大浦の潮位表データ (2006 年 2 月 20 日 ~ 3 月 6 日)。2 月 21 日が下弦の月 (小潮), 2 月 28 日は新月 (大潮)。気象庁ウェブサイトより

いう暦を使っていました。その当時は、たとえば 3 月 3 日というのは、月が新月から数えて三日目であり、かならず西空には三日月が見えていました。十五夜というのはまさに 15 日目であり、満月が東から上がってきます。ですから、月そのものが暦の「月」の起源になっています。

さて、こういった暦では、その月の前半を上、半ばを中、後半を下と言っていました。現代で言う上旬、中旬、下旬ですね。また、ちょうど上旬に当たる 7 日頃と、満月を過ぎた下旬に当たる 21 日頃には、月の形が半月形になり、いわゆる弓を張ったような形という意味で「弦」と呼ばれることになります。(といっても、弦という言葉はかなり古くから、それだけで半月を意味しますので、弓が先なのか、月が先なのかわかりませんが...) いずれにしろ、これらの二つが結びついて、上弦の月、下弦の月と命名されたと考えられています。(月情報探査ステーション http://moon.jaxa.jp/ja/index_f1.shtml の Q&A から)

図 6.9 に佐賀県大浦（有明海）の潮位の予測値を示す．大潮時に潮差は大きく，小潮の時の潮差は小さいことが分かる．

月が赤道の上を運行中であれば，2 回の干満は同じ大きさになる．図 6.10 のように月が赤道の上になければ，赤道以外では 2 回の干満の大きさは異なる．これを日潮不等 diurnal inequality という．図 6.10 は，球が起潮力が働いていないときの水位を表し，M の方向に伸びたラグビーボールに似た曲面が起潮力が働くときの水位である．矢印 P が地軸を表している．地球の周囲に緯度の異なる 4 点の水位（起潮力が働くときの水位と起潮力が働いていないときの水位（一定））の 1 日の時間変化を示している．数式を用いた説明は次節でおこなう．日潮不等の例を図 6.12 に示す．

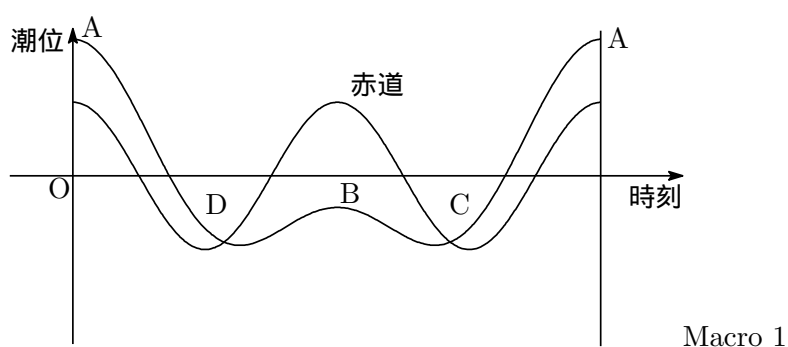


図 6.10 日潮不等

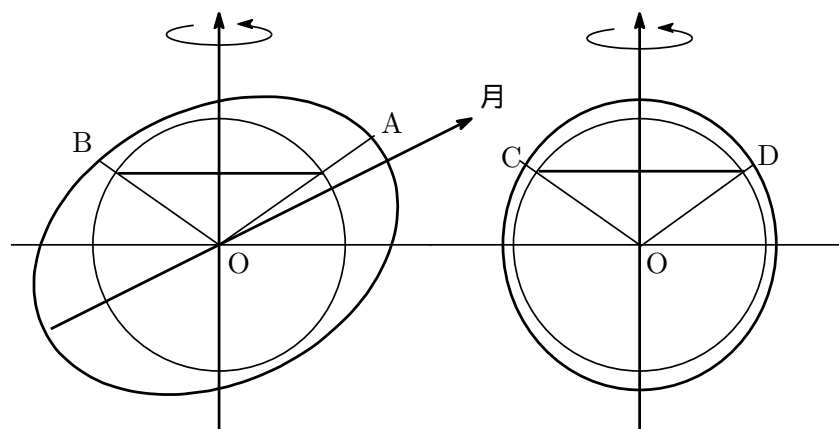
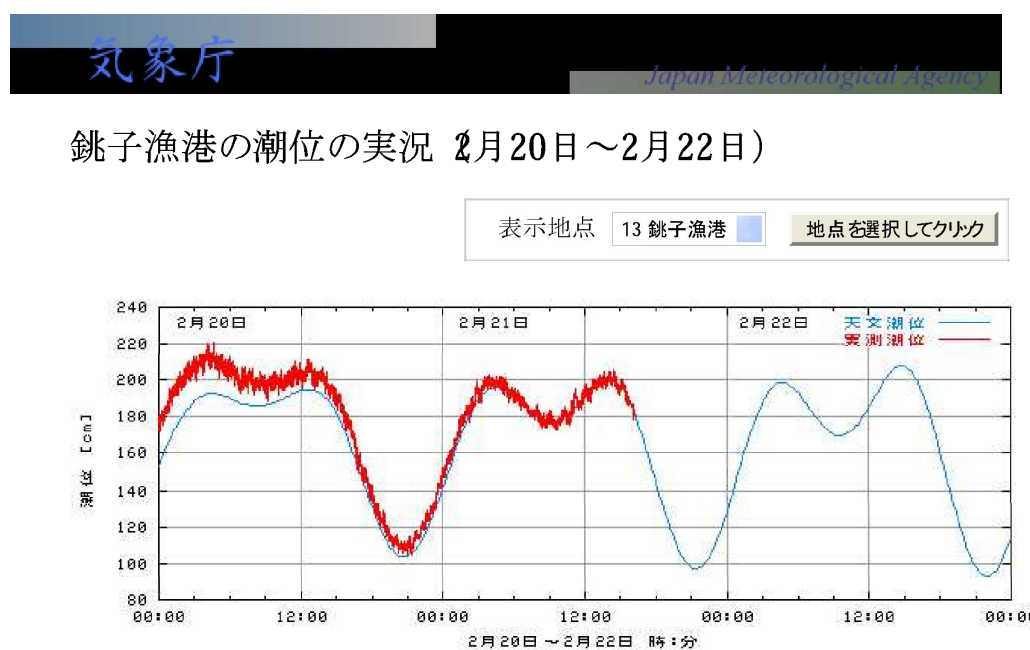


図 6.11 日潮不等．月の公転面に近い側が満潮が高い．点 A の時の満潮が点 B の満潮より潮位が高い．右の図は，回転軸を含む，左の図に垂直な断面で見た地表面と海面をあらわす．

巻の潮位の実況

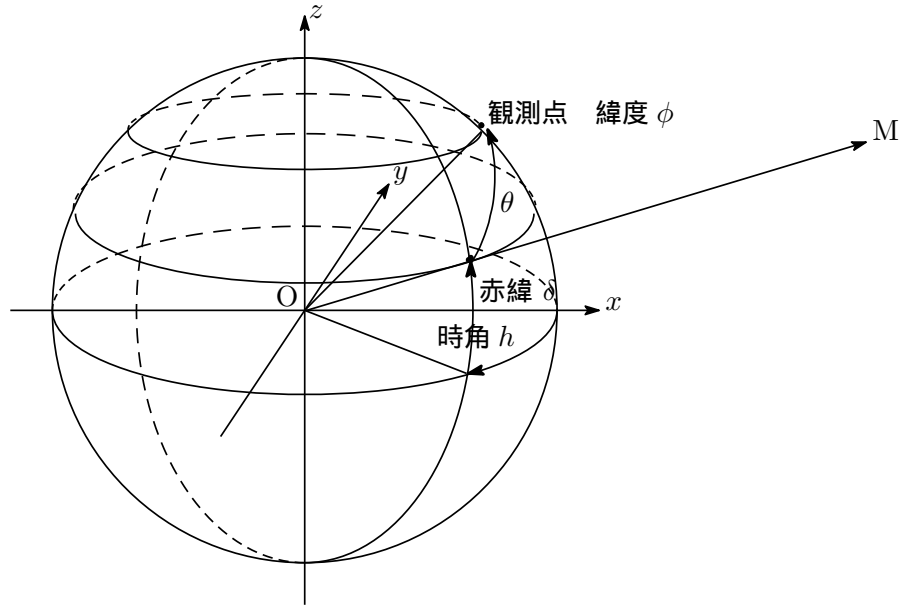
<http://www.data.kishou.go.jp/marine/tide/realtime/realtime3.php?...>



注意 [解説](#))

- ・ 潮位は、**観測基準面からの高さ**で表示しています。これを標高に換算するには、168.9cmを引算してください。
- ・ このグラフに表示される実測潮位は、観測機器の保守作業や故障に伴う異常な値を示すことがあります。また、データ伝送システムの障害により、観測データが一時的に途絶える可能性がありますので、利用の際にはご注意ください。
- ・ このグラフは、毎時30分頃に更新します。ブラウザの更新ボタンをクリックし、最新の情報をお使いください。

図 6.12 日潮不等の例，気象庁ウェブサイトより

図 6.13 地球の中心から見た観測点と月のなす角 θ

6.3 分潮と潮汐の予報

平衡潮汐論で潮汐の基本的な性質は理解できるが、実際の潮汐では平衡潮汐論の潮差や時刻がかなり異なる。海洋を大きな流体の振動系と考え、周期的な起潮力による強制振動が発生していると考え。強制振動は外力と同じ周期を持ち、外力と一定の位相差をもっている。天体の配置によって決まる起潮ポテンシャルは天体の運動の周期性によって決まる周期を持っている。厳密には、完全な周期関数ではなく、概周期関数^{*5}である。 ϕ を観測点の緯度、 δ を月の赤緯（赤道から子午線に沿って南北に測った角、北を正）、 h を時角（観測点を通る子午線から月を通る子午線までの角、西を正）とする。

地球の中心から観測点への単位ベクトルを $(\cos \phi, 0, \sin \phi)$ とすると、地球の中心から月への単位ベクトルは $(\cos \delta \cos h, -\cos \delta \sin h, \sin \delta)$ である。この2つのベクトルの内積を考えて、

$$\cos \theta = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos h \quad (6.47)$$

が成り立つ。潮位は

$$\bar{\eta} = \frac{Ma^4}{2ED^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (6.48)$$

で与えられるので、

$$\bar{\eta} = \frac{3Ma^4}{4ED^3} \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \phi \cdot \cos^2 \delta \cdot \cos 2h \\ + \sin 2\phi \cdot \sin 2\delta \cdot \cos h \\ + 3 \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \phi \right) \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \delta \right) \end{array} \right\} \quad (6.49)$$

^{*5} 式 (6.55) で、 $T_i/T_j (i \neq j)$ が無理数のとき、完全な周期関数にならず、概ね周期的な関数と成る。

となる．これから，日潮不等の現象がどのようにして説明される見てみよう．

6.3.1 日潮不等

日潮不等について説明する． h を含む項だけを取り出して，そのほかはまとめて，次のようにパラメータで置き換える．

$$a = \frac{3Ma^4}{4ED^3} \sin 2\phi \cdot \sin 2\delta \cdot \quad (6.50)$$

$$b = \frac{3Ma^4}{4ED^3} \cos^2 \phi \cdot \cos^2 \delta \cdot \quad (6.51)$$

として，

$$\bar{\eta} = a \cos h + b \cos 2h \quad (6.52)$$

となる． a も b もゆっくりと変化する量であるが，定数とみなせる．一日の $\bar{\eta}$ の時間変化は， $\cos h$ と $\cos 2h$ で決まる．北半球 ($\phi > 0$) で，月の赤緯が北 ($\delta > 0$) のとき， $h = 0$ と $h = \pi$ のとき，高潮で， $\bar{\eta}(0) = a + b$ ， $\bar{\eta}(\pi) = b - a$ となる．低潮は $\bar{\eta}(\pi/2) = \bar{\eta}(3\pi/2) = -b$ である．しかし，観測点が赤道にあるときは， $a = 0$ となって，

$$\bar{\eta} = b \sin 2h \quad (6.53)$$

となり，一日 2 回の高潮は等しい．同じく，月が赤道にあるときは $\delta = 0$ なので， $a = 0$ となって， $\bar{\eta}(0) = \bar{\eta}(\pi) = b$ である．

6.3.2 調和分析

対象地点の平衡潮高 $\bar{\eta}$ は，

$$\bar{\eta} = \frac{3Ma^4}{4ED^3} \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \phi \cdot \cos^2 \delta \cdot \cos 2h \\ + \sin 2\phi \cdot \sin 2\delta \cdot \cos h \\ + 3 \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \phi \right) \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \delta \right) \end{array} \right\} \quad (6.54)$$

である．月の時角は 1 太陰日の周期で変化する．月の赤緯 δ は約 27 日の周期で $0 \sim \pm 28^\circ$ の範囲で変化する．これらの変化から，約半日の周期 (半日周潮 semi-diurnal tide，図 6.14)，1 日の周期 (日周潮 diurnal tide，図 6.15)，約半月の周期 (長周期潮 long period tide，図 6.15) で変化する潮位の成分 (半月周潮 fortnightly tide がでてくる．太陽の場合も同様である．そのほか，月までの距離 D も変動している (長周期潮，図 6.16)．したがって，次式のようにいろいろな周期 T_i で変動の重ね合わせとなる^{*6}．

^{*6} 調和振動子 (例 微小振幅の振り子) のような線形の力学系に $A \sin \omega t$ のような力を加えて，強制振動させると，調和振動子の固有振動数がいくらであっても，調和振動子は角周波数 ω で振動する．いろいろな周波数の強制力を加えると，調和振動子は，作用している外力のすべての振動数を含むような振動をする．強制力と振動子の位相関係は，振動子の固有振動数に比べて強制力の振動数がはるかに小さいとき，同位相である．振動子の固有振動数に比べて強制力の振動数がはるかに大きいとき，強制力と振動子の位相関係は逆位相になる．これは，次のようにすると容易に試すことができる．手で持った糸の先に錘をつけて，揺らしてみる．手をゆっくり振動させると，手の動きと同じであるが，素早く動かすと，手の動きと錘の動きは逆になる．いずれの場合も錘の振動数は手の動きの振動数と同じである．錘の振幅は手の動きを固有振動数に等しくなるように動かすときに，共振してどんどん大きくなる

ポテンシャルで表すと

$$\Omega(t) = g \sum_i A_i \cos\left(\frac{2\pi t}{T_i} + u_i\right) \quad (6.55)$$

ただし, A_i は水位換算のポテンシャルの振幅, T_i と u_i は上のように天文データから決まる周期と位相である. これを強制力として, 海洋が振動しているので, 強制力と同じ振動数の振動が励起される. しかし, 応答の位相は, 強制力とは, 異なっている. 振幅も A_i に比例しているわけではない. したがって, ある地点の潮位は

$$H(t) = \sum_i H_i \cos\left(\frac{2\pi t}{T_i} + u_i - \kappa_i\right) \quad (6.56)$$

と書ける. H_i は周期 T_i を持つ起潮力成分に対する潮汐の振幅である. κ_i は起潮力成分に対する位相の遅れ (遅角) である.

適当な期間の実測潮位を用いて, 上の式の振幅 H_i と遅角 κ_i を各周期成分について求める. これを潮汐の調和分析 harmonic analysis of tides tidal analysis という. 一定の振幅と一定の周期をもつ成分を分潮 component tide constituent tide をいう. 重要な分潮は次の 4 つの主太陰半日周潮 principal lunar semidiurnal tide (M_2 , 周期 12.42 時間), 主太陽半日周潮 principal solar semidiurnal tide (S_2 , 周期 12 時間), 日月合成日周潮 luni-solar diurnal tide (K_1 , 周期 23.93 時間), 主太陰日周潮 principal lunar diurnal tide (O_1 , 周期 25.82 時間) である.

Doodson (1922) は式 6.54 をフーリエ級数に展開した. そのときに, 表 6.1 の周波数を使用した. 太陰時のかわりに太陽時の使用もできるが, 太陰時を使用することで, とてもうまく分解することができた. Doodson の展開を用いると, 潮汐の基本成分の周波数は

$$f = n_1 f_1 + n_2 f_2 + n_3 f_3 + n_4 f_4 + n_5 f_5 + n_6 f_6 \quad (6.57)$$

と書くことができる. ただし, $n_1 = 1, 2, 3$ をとり, n_2, \dots, n_6 は -5 以上 5 未満の整数をとる. 表 6.1 に基本的な周波数をまとめた. 整数 $n_1(n_2 + 5)(n_3 + 5)(n_4 + 5)(n_5 + 5)(n_6 + 5)$ は Doodson 数という. 例えば, 主太陰半日周潮に対応した Doodson 数は 255.555 ($n_1 = 1, n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = 0$ に対応している) である. Doodson は n_2 から n_6 に 5 を加えることで, 負の数が出てくるのを避けた.

式 (6.57) のように和になるのは次の理由による.

$$\Omega(t) = (A + B \cos(\sigma' t)) \cos(\sigma t) \quad (6.58)$$

$$= A \cos(\sigma t) + \frac{1}{2} B \cos(\sigma - \sigma') t + \frac{1}{2} B \cos(\sigma + \sigma') t \quad (6.59)$$

$\Omega(t)$ の周波数 σ と $\sigma - \sigma'$, $\sigma + \sigma'$ は 3 個の周波数成分からなる. つまり, $\Omega(t)$ が三角関数の 2 つ以上の積になっているためである.

表 6.1 基本潮汐周波数 Fundamental Tidal Frequencies

	角速度 Frequency (° /hour)		周期 Period	起源 Source
f_1	14.49205211	1	太陰日 lunar day	平均太陰時間 Local mean lunar time
f_2	0.54901653	1	month month	月の平均黄経 Moon's mean longitude
f_3	0.04106864	1	年 year	太陽の平均黄経 Sun's mean longitude
f_4	>0.00464184	8.847	年 years	月の近地点の平均黄経 Longitude of Moon's perigee
f_5	-0.00220641	18.613	年 years	月の昇交点の黄経 Longitude of Moon's ascending node
f_6	0.00000196	20,940	年 years	太陽の近地点の黄経 Longitude of sun's perigee

表 6.2 主な分潮

分潮の名称 Tidal Species	記号 Name	n1	n2	n3	n4	n5	振幅 Equilibrium Amplitude *(m)	周期 Period(hr) (hr)
半日周潮 Semidiurnal	$n_1 = 2$							
主太陰半日周潮 Principal lunar	M_2	2	0	0	0	0	0.242334	12.4206
主太陽半日周潮 Principal solar	S_2	2	2	-2	0	0	0.112841	12.0000
主太陰楕円潮 Lunar elliptic	N_2	2	-1	0	1	0	0.046398	12.6584
日月合成半日周潮 Lunisolar	K_2	2	2	0	0	0	0.030704	11.9673
日周潮 Diurnal	$n_1 = 1$							
日月合成日周潮 Lunisolar	K_1	1	1	0	0	0	0.141565	23.9344
主太陰日周潮 Principal lunar	O_1	1	-1	0	0	0	0.100514	25.8194
主太陽日周潮 Principal solar	P_1	1	1	-2	0	0	0.046843	24.0659
楕円月周潮 Elliptic lunar	Q_1	1	-2	0	1	0	0.019256	26.8684
Long Period	$n_1 = 0$							
Fortnightly	M_f	0	2	0	0	0	0.041742	327.85
Monthly	M_m	0	1	0	-1	0	0.022026	661.31
Semiannual	S_{sa}	0	0	2	0	0	0.019446	4383.05

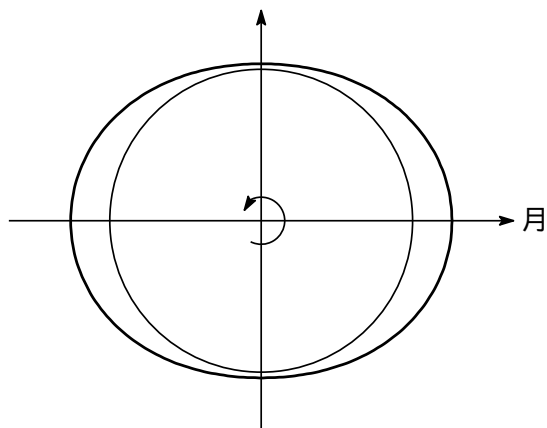


図 6.14 1 日に 2 回の干満がある． $\cos 2h$ の半日の周期が出てくる．

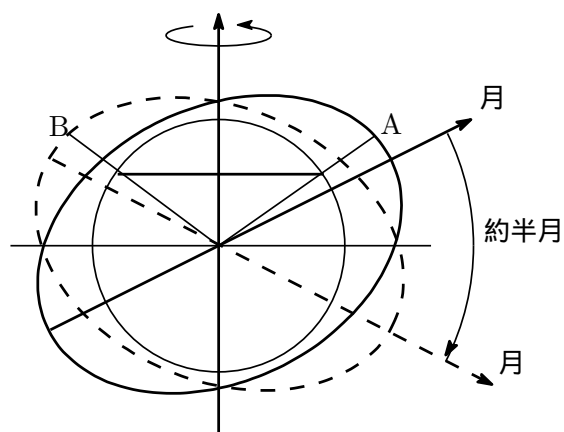


図 6.15 $\cos h$ の 1 日の周期 (1 日で A から A に戻る) と $\cos^2 \delta = \frac{1 + \cos 2\delta}{2}$ と $\sin 2\delta$ の約半月 (月の赤緯 δ が 0 度から 0 度に戻るまでの時間) の周期が出てくる．

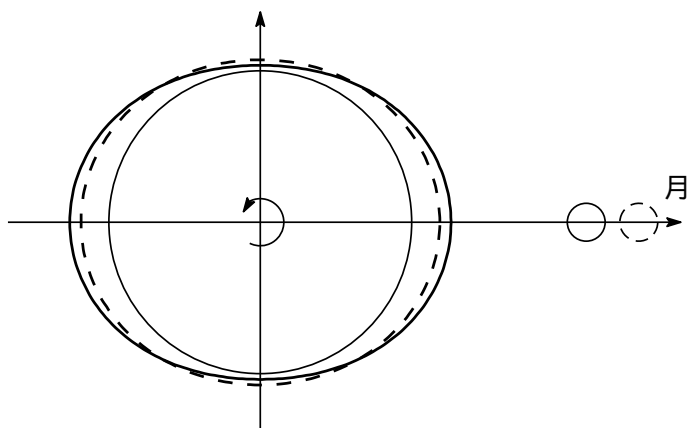


図 6.16 月と地球との距離 D が約一月の周期で変化する．

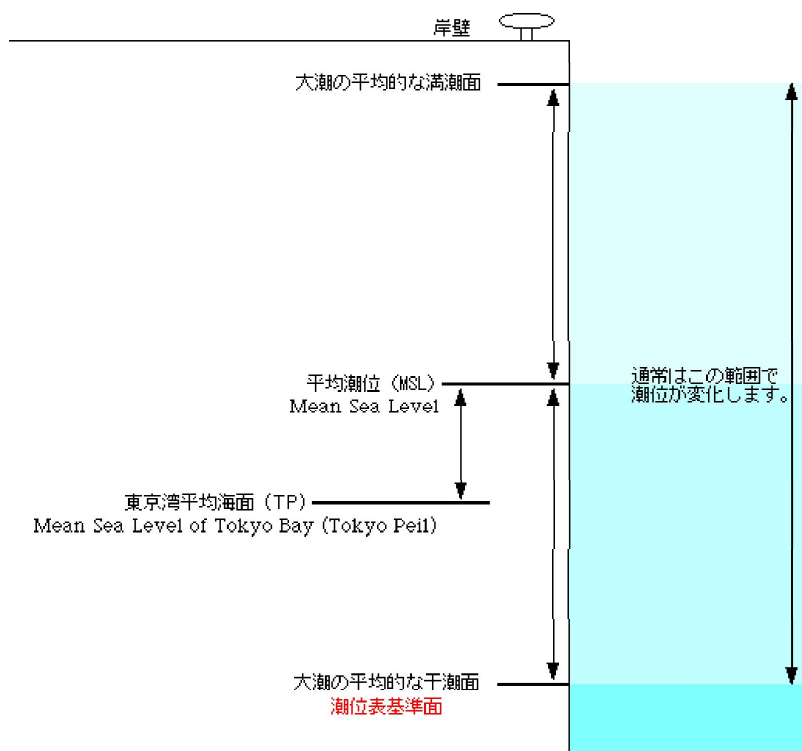


図 6.17 潮位表基準面。気象庁ウェブサイトから

気象庁では 60 個の分潮を用いて潮位の予測を行っている。過去に観測された潮位データの解析をもとにして計算した潮位の予測値（天文潮位）をまとめた資料を潮位表として発表している。潮位は、潮位表基準面^{*7}表示（潮位表基準面からの高さ）および TP 表示（標高）^{*8}を cm 単位で表している。

6.4 海洋潮汐 ocean tide と小さい湾の潮汐

平衡潮汐論では、等ポテンシャル面に海面が一致するとしたが、実際は地球が自転しているので、海面と等ポテンシャル面はずれている。海水は海面が等ポテンシャル面に一致するように動こうとする。海水は浅水波^{*9}として運動する。図 6.18 に模式的に海水のふくらみと等ポテ

^{*7} 潮位表は、大潮の平均的な干潮面の高さを基準（海図の水深 0 m にほぼ相当）として、予測潮位（天文潮位）を掲載しています。「MSL-潮位表基準面」の欄は、大潮の潮位の片振幅に相当する、MSL（平均潮位）の潮位表基準面からの高さです。「潮位表基準面の標高」の欄は、潮位表基準面の標高です。これは、「MSL-潮位表基準面」と、表に記載している「MSL の標高」（平均潮位の標高）をもとにして換算します。

^{*8} TP(Tokyo Peil, Peil (ペイル) は、オランダ語で水準面) は東京湾平均海面 Tokyo Bay mean sea level を表す。山の高さ（標高 elevation）が TP を基準にしているのに対して、水深は海面が大体それよりも低下することがほとんどない面、最低水面（Low Water）からの深さである。瀬戸大橋のような橋の高さは最高水面からの高さである。

^{*9} 地球の自転の影響、つまり、コリオリ力の影響を受けた波となる。北半球では、流れは進行方向の右側へ曲げようとする力が働くので、岸が右手なるように進行し、岸に近いほど振幅が大きい波となる。この波をケ

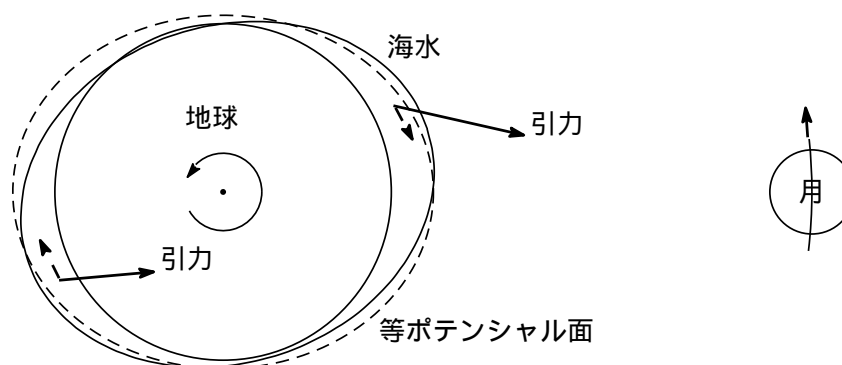


図 6.18 地球が自転しているために海水のふくらみは月の方向とは自転方向に少しずれたところにある。海水のふくらみが等ポテンシャル面に一致するように海水は動く。月からの海水のふくらみへの引力の大きさに違いによって、地球の自転速度は小さくなる（1日は長くなる）。月の公転速度は大きくなる。角運動量の保存則から軌道半径は大きくなる。月は現在 3 cm / 年地球から遠ざかっているとされ、また地球の自転速度は 10 万年に 1 秒遅くなると言われている。

http://www.soc.nii.ac.jp/geod-soc/web-text/part3/matsumoto/matsumoto-3_files/fig4.jpg

図 6.19 海面高度計の観測値とモデル計算の結果とを組み合わせさせた結果。周期 12 時間 25 分の M_2 分潮のモデルを図化したものである。位相（等値線は 30° 毎）を白線で、振幅（cm）を色分けして描いてある。

ンシャル面のふくらみがずれた様子を示した。波の山や谷が伝わる速度（波の位相速度）と実際の海水の運動とは、波浪の章で見たように別物であるがあるので、当然であるが、海水が地球を 1 日 1 回、回っているわけではない。数 km 移動しているだけである。海水の流れの収束が続くと、そこが波の山となる。海水の流れが発散が続くと、そこが谷になる。海水の流速と波の山の移動速度（位相速度）は異なる。

数値計算と観測値を組み合わせ得られた各点の M_2 分潮（主太陰半日周潮）の振幅と位相とを全球の図 6.19 に示す。北太平洋では、カナダやアラスカの沖では振幅が大きい。日本海では振幅が小さい。つまり、日本海では干満の潮差が小さい（図 6.21 に舞鶴の潮位を示した）。等位相線では、同じ時刻に高潮（満潮）になる。位相は 30° 毎に引かれているので、 M_2 分潮（主太陰半日周潮）では、1 周期（位相は 0° から 360° ）が 12 時間 25 分で隣り合わせの線では、例えば、満潮の時刻が約 1 時間ずれていることになる。北半球では、満潮のところは反時計回りに回っている。Wikipedia からの図を図 6.20 に示す。図 6.20 は等潮差図で潮差（高潮と低潮との差）の等値線図である。小さい閉曲線で囲まれた点（たとえば、ハワイとアメ

ルビン波 Kelvin wave と呼んでいる。流体粒子が進行方向に進むとき（波の山の方にあるとき）にコリオリ力が流体粒子を岸側に押し付けようとするので、岸のほうほど水位が高くなる。流体粒子が進行方向と逆方向に進むとき、沖側にコリオリ力が働くので、岸側の水位が下がる。岸で水位の上下動が一番大きい。
http://dennou.gaia.h.kyoto-u.ac.jp/library/gfd_exp/exp_j/doc/kw/guide03.htm にケルビン波の室内実験のビデオとケルビン波の簡単な解説がある

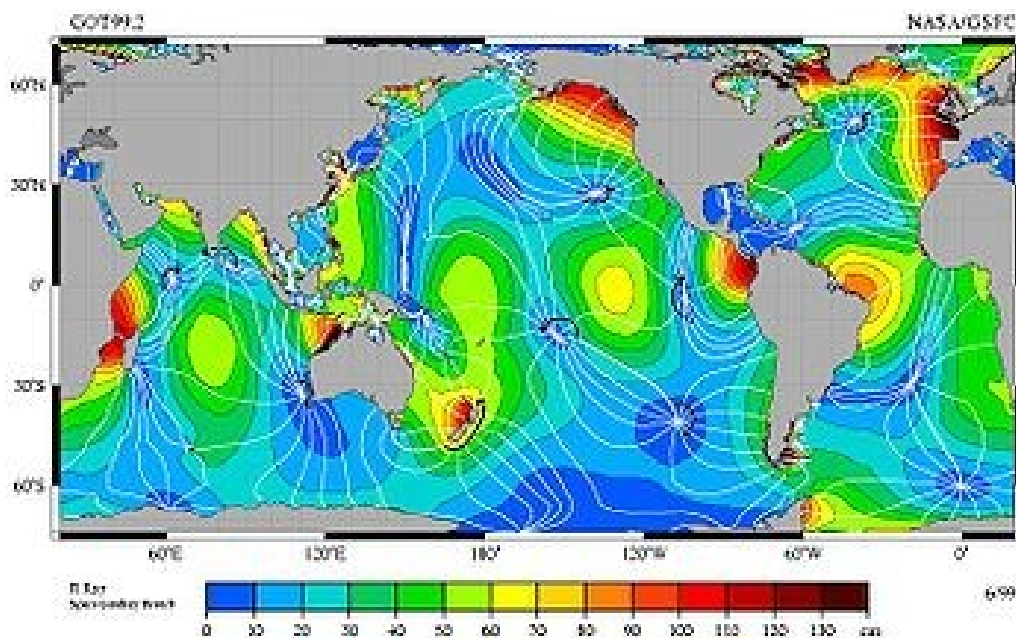


図 6.20 M_2 分潮．位相（等値線は 30° 毎）を白線で，振幅（cm）を色分けして描いてある．Wikipedia から

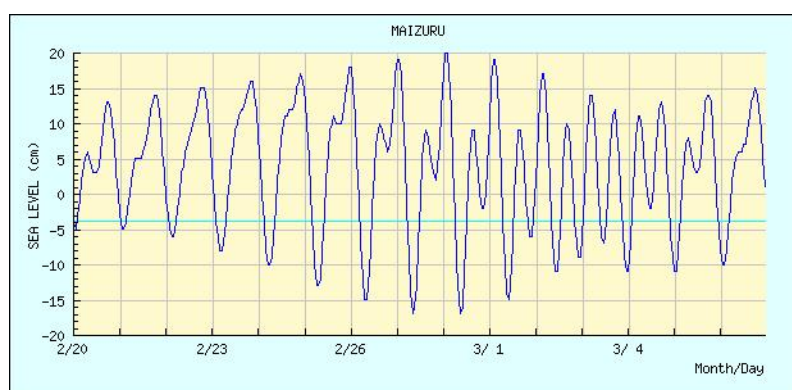


図 6.21 舞鶴の潮位表データ（2006 年 2 月 20 日～3 月 6 日）．2 月 21 日が下弦の月（小潮），2 月 28 日は新月（大潮）．気象庁ウェブサイトより

リカ大陸の中間の点）は無潮点を表し，ここは潮位変動がない点である．図 6.20 は同時潮図でもある．同一線では，同時に高潮や低潮になる．無潮点から，放射状に広がっている．潮汐波は北半球では反時計回りに無潮点のまわりを回っている．

小さい湾に見られる潮汐は外海の潮汐によって引き起こされる強制振動である．その例とし



図 6.22 伊根の舟屋．海面すれすれに建てられている．舞鶴の近くの伊根湾では，潮差は非常に小さく，高波も高潮もないのであろう．伊根町観光協会のウェブサイトから

て水深 h ，長さ l の沿岸域を仮定する．外洋域との境界で外洋域の潮流振動を与え，湾奥で流速が 0 という条件を与える．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (6.60)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6.61)$$

第 1 式は水平方向の加速度は海面の勾配に比例した力で加速されることを表している．第 2 式は連続の方程式を鉛直方向に積分してものである．流体の質量の保存を表している． $hu((h + \eta)u$ であるが， $\eta \ll h$ なので η を無視して) は単位時間あたり単位幅を流れる海水の体積を表しているのだから， hu の勾配は水位 η の時間変化を引き起こす．

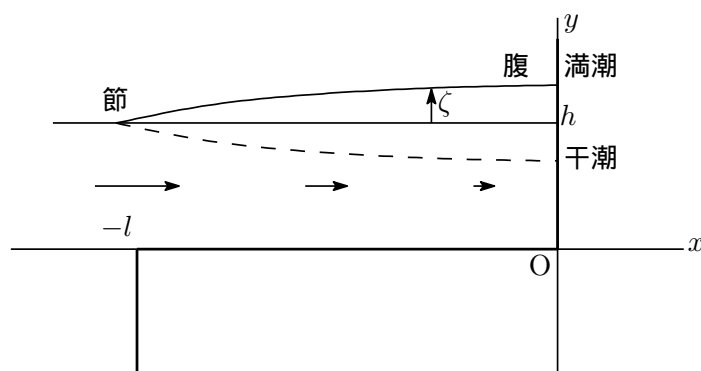


図 6.23 小さい湾の潮汐．流れの矢印は実線の水位分布になっていくとき，共振するときには潮位の節が湾口 ($x = -l$) にある．流速の節は湾の奥 ($x = 0$) にある．

境界条件は

$$u(-l, t) = U_0 \sin(\sigma t) \quad (6.62)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (6.63)$$

となる．式 (6.61) を t を微分し，式 (6.61) に g を掛けて， x で微分し， $g \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t}$ を消去して

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (6.64)$$

を得る．解は

$$u(x, t) = (A \cos kx + B \sin kx)(C \sin \sigma t + D \cos \sigma t) \quad (\sigma = \sqrt{gh}k) \quad (6.65)$$

である． $x = 0$ で

$$u(0, t) = A(C \sin \sigma t + D \cos \sigma t) = 0 \quad (6.66)$$

なので， $A = 0$ ． $x = -l$ で

$$u(-l, t) = -B \sin kl(C \sin \sigma t + D \cos \sigma t) = U_0 \sin(\sigma t) \quad (6.67)$$

$D = 0$ ， $BC \sin kl = -U_0$ となり，

$$u(x, t) = -U_0 \frac{\sin kx}{\sin kl} \sin \sigma t \quad (6.68)$$

式 (6.61) から

$$\eta(x, t) = -U_0 \sqrt{\frac{h}{g}} \frac{\cos kx}{\sin kl} \cos \sigma t \quad (6.69)$$

湾口の潮差に対する湾奥の潮差の増幅率 R は

$$R = \frac{\eta(0, t)}{\eta(-l, t)} = \frac{1}{\cos kl} \quad (6.70)$$

$k_n l = \frac{1}{2}(2n-1)\pi$ ($k \equiv \frac{2\pi}{L}$) ($n = 1, 2, \dots$) のとき ($n = 1$ の場合に最大の波長で L が $L = 4l$ ，その共振周期は $T_1 = \frac{4l}{\sqrt{gh}}$) は共振して^{*10}， R は無限大になる．湾口から海水が流入し始めたときに湾口から浅水波として伝わり (波の位相速度 \sqrt{gh})，湾奥で反射して戻ってきたときに，海水が湾口で流出するようになっていると共振する．波が往復するのに必要な時間は $2l/\sqrt{gh}$ でこれが，潮流の振動の $T/2$ に等しいときに共振する．これから， $T = \frac{4l}{\sqrt{gh}}$ のときに共振することがわかる．実際は摩擦によりエネルギーの散逸を生じるので，無限大になることはない．このような潮汐・潮流 tidal current を共振潮汐 co-oscillating tide という．日本の沿岸海域では，湾の共振周期が短く，大きな増幅はないが，カナダのファンディ湾などでは共振潮汐のために約 12.9m の潮差が生じている．図 6.9 には有明海の大浦の潮位を示した．表 6.3 に日本各地の最大干満差を示す．

^{*10} 一端を閉じた管に生じる気柱の共鳴に似ている．気体の流速は海水の流速に，気体の圧力変動が潮位変動に対応している．



図 6.24 カナダのファンディ湾



図 6.25 日本の沿岸海域では、湾の共振周期が短く、大きな増幅はないが、カナダのファンディ湾では共振潮汐のために約 12.9m の潮差が生じている。Wikipedia より

表 6.3 日本沿岸の干満差・海上保安庁海洋情報部のウェブサイトから

場 所	平均水面の高さ	1989 - 1990 年の最大干満差	
宇 野	1.4 m	2.7 m	瀬戸内海
尾 道	2.0 m	3.7 m	"
呉	2.0 m	4.1 m	"
広 島	2.0 m	4.1 m	"
岩 国	2.0 m	4.0 m	"
徳 山	1.8 m	3.6 m	"
高 松	1.4 m	4.0 m	"
今 治	2.0 m	3.6 m	"
松 山	1.9 m	3.9 m	"
宇和島	1.3 m	2.5 m	宇 和 海
住ノ江	2.96 m	6.0 m	九州有明海
境 港	0.1 m	0.3 m	日 本 海
東 京	1.2 m	2.3 m	太 平 洋
名古屋	1.4 m	2.7 m	"
大 阪	0.95 m	1.9 m	瀬戸内海
博 多	1.1 m	2.3 m	日 本 海