Déchiffre et Delettre Partie 2
Chiffrement asymétrique (RSA)

RSA (Rivest, Shamir et Adleman).

Chiffrement avec clé publique / déchiffrement avec clé privée:
Les clés sont construites par le destinataire qui donne la clé publique à (aux) expéditeur(s).
Seule la clé privée permet le décodage.
Utilisation de grands nombres pour construire les clés (>512 ou 2048 bits).

RSA est basé sur le fait qu'il est très difficile de factoriser en 2 nombres 1ers, un nombre entier très grand. Même avec un ordinateur le calcul prend un temps "exponentiellement" long.
Ex : A partir de 15 il est facile de dire que 5x3=15 mais donner moi les facteurs de 221 (17x13). Avec 283.189 (503 x 563)

Avantages/Inconvénients :
Le temps de calcul pour retrouver la clé privée doit être supérieur au temps durant lequel le secret doit être conservé.
Nous ne sommes pas à l'abri d'un(e) mathématicien(e) "génial(e)" trouvant un algorithme rapide de factorisation.
Par contre RSA est adapté aux échanges fréquents et anonymes sur Internet.

Théorie :
Base du chiffrement/déchiffrement général :
Avec la clé publique composée d'un nombre 'e' et 'n' on chiffre ainsi :

$$C = M^{\mathbf{e}} \text{ modulo } n$$

Avec la clé privé composée d'un nombre 'd' et du même nombre 'n' on déchiffre ainsi :

$$M = C^{\mathbf{d}} \text{ modulo } n$$

Une analogie pourrait être que le récepteur des messages donnerait des cadenas au émetteurs potentiels mais garderait pour lui seul la clé ouvrant les cadenas.

Liens :
Wikipedia rsa :https://fr.wikipedia.org/wiki/Chiffrement_RSA
Pdf rsa: http://culturemath.ens.fr/maths/pdf/nombres/RSA.pdf
Vidéos : https://www.youtube.com/watch?v=6KfJXl-Kvws&t=413s et suivants

Liste nombres 1ers : http://compoasso.free.fr/primelistweb/page/prime/liste_online.php
Conversion binaire,hexa,décimal : http://sebastienguillon.com/test/javascript/convertisseur.html

Construction de la clé publique :

Choix de 2 nombre premiers p et q.	=>	p	=239 et q=293
Calcul de n = p x q	=> 239x293	n	=70 027
Calcul d'un nombre φ = (p-1 x q-1)	=> 238x292	phi	=69 496

et d'un nombre e qui doit être

1/ > à 2

2/ premier par rapport à φ

soit (PGCD(e,φ)==1) => e=295

nb : Il faut un algo. pour le calculer (voir plus avant).

On a donc la clé publique (e,n) => **e=295 et n=70 027**

Variables de départ et calculs intermédiaires
p=239 et q=293
n=70 027
φ=69 496
Clé publique
e=295 et n=70 027

Note :

On emploi le terme "chiffrer" plutôt que coder ou crypter.
Coder c'est stocker ou afficher une même donnée selon différents formats. (binaire,décimal,texte)
Chiffrer c'est remplacer une donnée numérique par une autre qui pourra ensuite être déchiffrée.
Crypter c'est comme chiffrer mais sans possibilité inverse (hashage).

n doit être plus grand que le nombre que l'on veut chiffrer. Ex : si on veut chiffrer une suite de nombres sur 16 bits alors n doit être plus grand que 2^16 soit 65536.

Rappeler que une lettre, un caractère est déjà codé en un nombre en informatique. C'est le code ascii.
Ex à 'A' correspond le nombre 65.
et on peut regrouper plusieurs de ces caractères/nombres en un nombre encore plus grand
ex :

'AB' sur 2 octets ~ 16706 ~ 0100.0001 | 0100.0010

En ligne (ou sur mon pc)

Avant la pratique faire la démonstration expliquée du programme terminé...

Pratique :

Note :

Dans le prog. principal, on a

```
const MAX_POW=9999;
const START_E= 788 ;      // On utilisera ces constantes plus tard

var p,q;
p=239 ; q=293 ;
const by=2 ;    // On va regrouper les caractères du message clair par 2. POURQUOI ?
                // pour ne pas avoir le même code qui se répète.

var n   = computeN(p,q);
var phi = phiOf (p,q) ;
var e   = primeOf(phi,START_E);

// On affiche la clé publique crée :
log("=> Clé publique  = ("+e+" , "+n+")");
```

On écrit les fonctions :

```
/**
* @param pp        First integer
* @param qq        Second integer
* @return          N part of public key (p*q)
*/
function computeN (pp,qq) {
        if (pp*qq<1000000000000000) // <=1 000 000 000 000 000 soit pas plus de 15 chiffres
        {
                //log("15 chiffres ou moins");
                return pp*qq;
        } else {
                //log("plus de 15 chiffres");
                return new BigNumber(pp.toString()).times(new BigNumber(qq.toString())).toFixed() ;
        }
}
```

Voir

<script type="text/javascript" src="js/bignumber.js"></script>dans index.html

et

https://mikemcl.github.io/bignumber.js/

```
/**
* @param pp        First integer
* @param qq        Second integer
* @return Phi
*/
function phiOf (pp,qq) {
	if ((pp-1)*(qq-1)<99999999999999) return (pp-1)*(qq-1);
	else return (new BigNumber(pp.toString()).minus(1)
		.times(new BigNumber(qq.toString()).minus(1))).toFixed();
}
```

ET

```
/**
* Creation of number e used to cipher
* @param phii      (p-1) * (q-1)
* @param min       Start value for e
* @param pp        first prime number
* @param qq        second prime number
* @return the e number
*/
function primeOf(phii,min=0) {
	//...
	if (phi<999999) gcdPhi=easyGCD ; else gcdPhi=GCD ;
	for (var ee=min;ee<phii;ee++) {
		if (gcdPhi(phii,ee)==1) break;
	}
	return ee;
}
```

Note :
Dans le prog. principal :
// On vérifie que la valeur d'un bloc de 'by' octets est plus petit que n

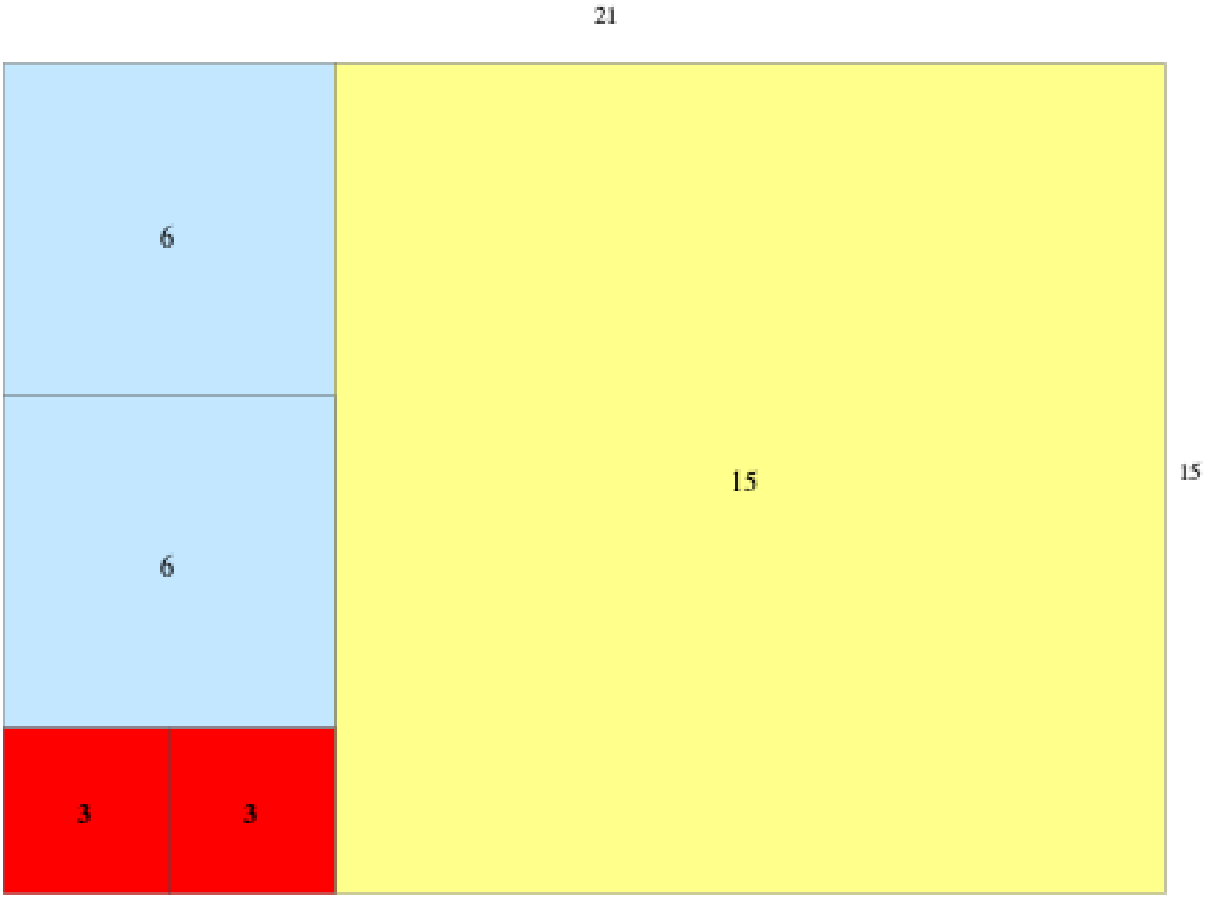
```
if (Math.pow(256,by)>n) error("Public key's n="+n+" too small !");
```

avant de revenir à la pratique … quelques explications sur easyGCD(phii,ee)
en ouvrant au tableau le document :

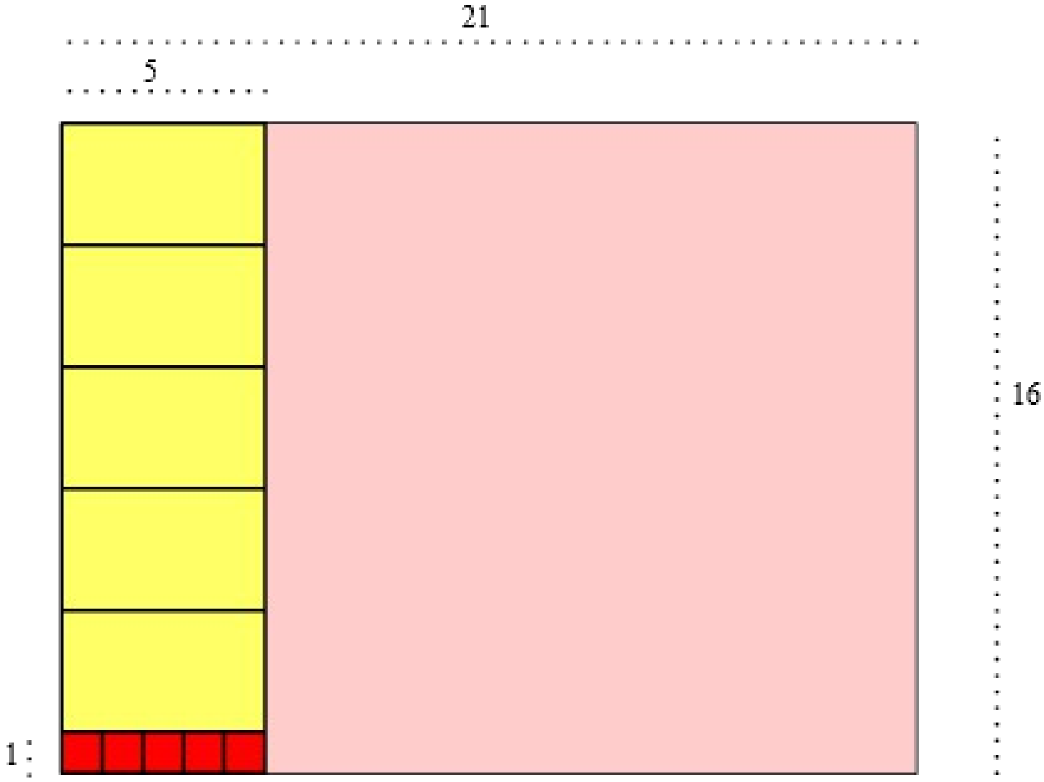
easyGCD.pdf

Théorie

explication de l'algo de GCD()
https://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_d%27Euclide



21%15 = 6
15%6 = 3
6%3 = 0 => PGCD = 3




```
var r=a%b;
   while (r!=0) {
      a=b;
      b=r;
      r=a%b;
   }
   return b;
```

```
a=21 ; b=16 ; r=5
?(r!=0)
   a=16
   b=5
   r=1
?(r!=0)
   a=5;
   b=1
   r=0
?(r!=0)

return 1
```

Pratique :

```
/**
* Compute the Greatest Common Denominator between a and b
* @param a  First integer
* @param b  Second integer
* @return the GCD
*/
function GCD (a,b) {
        var r=a%b;
        while (r!=0) {
                a=b;    b=r; r=a%b;
        }
        return b;
}
```

On teste la création de la clé publique par Alice

Création de la clé privée 'd' :

Théorie au tableau :

calcul du nombre 'd' :

A partir de φ et e on calcul

le 1er nombre **d** supérieur à e et inférieur à φ (par une boucle)
qui vérifie :

(e * d) % φ est égal à 1 … Par un petit algorithme.

Exemple

Avec :		
	p	=239 et q=293
	n	=70027
	φ	=69496
La clé privé est :		
	d=66237 et n=70027	

Je ne fais pas ici la démonstration mathématique

Voir

https://fr.wikipedia.org/wiki/Chiffrement_RSA ou
http://culturemath.ens.fr/maths/pdf/nombres/RSA.pdf

On note juste qu''il est quasiment impossible de retrouver le dividende d'une division si on a que le diviseur et le reste.

Ex : si on a : $c=m^3$ % 100 = **11** impossible de retrouver m avec uniquement 100, 11 et 3.

par contre en faisant : 11^7 % 100 on a **71** et effectivement m était bien égal à 71 .

vérifions que 71^3 % 100 = 11.

Pratique

Dans le prog. principal, on a :
var d=dCompute(e,phi);

```
/**
* Compute of number d of private key (d,n)
* @param ee          Number e (of public key)
* @param phii        (p-1) * (q-1)
* @return the d number
*/
function dCompute(ee,phii) {
        if (phi<999999)       return dComputeEasy(ee,phii);
        else return extendedEuclide(ee,phii);
}
```

On écrit la fonction *dCompute* en appelant dComputeEasy() que l'on va écrire.
Mais avec une valeur de N importante, il faudra lui substituer un algo optimisé (Euclide étendu) qui est déjà écrit dans le source.

```
function dComputeEasy(ee,phii) {
        for (var dd=ee;dd<phii;dd++) {
                if ((ee*dd)%phii==1) break;
        }
        return dd;
}
```

Note :
Explication du théorème d'Euclide étendu
https://www.youtube.com/watch?v=M7vOxKVLsVY
http://www.bibmath.net/crypto/index.php?action=affiche&quoi=complements/algoeuclid
https://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_d%27Euclide_%C3%A9tendu

On teste la création de la clé d...

Chiffrement du message :

Théorie au tableau

Rappel du principe :

Pour chaque groupe de 2 caractères (16 bits) ,
si la valeur en clair est dans
m
on calcul la valeur chiffrée c par
c = (m^e)%n
ou e et n sont les composants de la clé publique.

Pratique :

```
// Bob a reçu (comme tout le monde) la clé publique,
// Prisonnier dans une tour par un dragon il envoie un message à Alice...
// il écrit son message à Alice
var plainTxt="Help me. I'm lost!";

// Les octets de son message sont regroupés 2 par 2 dans un tableau.
var arrBy= stringToArrayBy(plainTxt,by);
// On a déjà vu cette fonction dans le programme avec clé secrète
// On va la regarder rapidement.
// faire un essai avec by=1 et on verra que les caractères Identiques donnent des chiffrements identiques

puis
// Chiffrement
var cipherArr=cipher (arrBy,e,n);
```

On va écrire la fonction *cipher*

```
/**
* Ciphering with public key (e,n)
* @param arr          16 bits elements array with plain text
* @param ee           Number e of public key
* @param nn           Number n (p*q)
* @return 16 bits elements array with ciphered text
*/
function cipher (arr,ee,nn) {
	var arrOut=[];
	for (var i in arr) {
		if (ee<MAX_POW) {
			arrOut.push (new BigNumber(arr[i].toString()).pow(ee).mod(nn).toFixed()) ;
				// arrOut.push ( Math.pow(arr[i],ee)%nn ) ;
				// log("pow "+ee+" ="+new BigNumber(arr[i]).pow(ee).toFixed());
		}
		else arrOut.push(powMod(arr[i],ee,nn));
	}
	return arrOut;
}
```

Au lieu de Math.pow(arr[i],ee) % nn ; qui ne marche qu'avec de très petits nombres e et arr[i], on utilise l'API BigNumber.

Mais ee >= 9999 on utilise la fonction powMod() qui donne le même résultat mais avec de exponentiations et MODulo successifs sur de petits nombres, cela va beaucoup plus vite et ne donne pas d'erreur.

Quelques explications théoriques :

Chiffrement/Déchiffrement du message :

Théorie :
Pour chiffrer ou déchiffrer nous devrions élever le nombre m ou c à des puissances élevées dès que n (p x q) devient grand donc e et surtout d .

Nous devons utiliser une astuce pour éviter ça. (voir l'exponentiation modulaire que nous devons à Bruce Schneier).

L'algo est basé sur :
a x b % c = a%c x b%c donc en particulier a x a % c = a%c x a%c

Exemple : Calculer 8^{26} mod 10 sans calculer 8^{26}

On va décomposer 26 en puissance de 2 :
26 = 16 + 8 + 2
qui s'écrit donc en binaire

16	8	4	2	1
1	1	0	1	0

On va calculer le modulo 10 pour les nombres : 8 élevé à chacune des puissances de 2.

			avec % 10	avec % 100
8^1			modulo 10 = 8	= 8
8^2	= 8^1 x 8^1	=> 8 x 8	modulo 10 = **4**	**= 64**
8^4	= 8^2 x 8^2	=> 4 x 4	modulo 10 = 6	= 96
8^8	= 8^4 x 8^4	=> 6 x 6	modulo 10 = **6**	**= 16**
8^{16}	= 8^8 x 8^8	=> 6 x 6	modulo 10 = **6**	**= 56**

On va multiplier les résultats qui correspondent à la décomposition de 26 soit 2 8 16 dont les modulo obtenus sont respectivement **4 6 6** ; puis prendre le modulo 10
On a donc :

8^{26} mod 10 = 4 x 6 x 6 = 144 modulo 10 = 4 = 44

Vérifiez sur calculatrice : 8^{26} mod 10 est égal à 4 et 8^{26} mod 100 est égal à 44

On va écrire la function() JS de cet algorithme.

Jmd : Afficher cette page en même temps que j'expliquerai powMod()

Pratique :

```
/**
* Cipher or uncipher one char
* @param ic                   input char (unciphered or ciphered )
* @param ed                   key           (e or d)
* @param nn                   Number n (p*q)
* @return                     output char (ciphered or unciphered)
*/
```

Déjà écrite ; à voir si on a le temps de voir la théorie.

```
function powMod (ic,ed,nn) {
        var oc=1;
        ic=new BigNumber(ic);                       // nothing
        nn=new BigNumber(nn.toString());            // nothing
        while(ed>0) {
                if (ed%2!=0) oc=ic.times(oc).mod(nn);   // if (ed%2!=0) oc = (ic * oc) % nn ;
                ic=ic.times(ic).mod(nn);                // ic = (ic * ic) % nn ;
                ed=Math.floor(ed/2);
        }
        return oc.toFixed();                        // return oc
}
```

Voir
<script type="text/javascript" src="js/bignumber.js"></script>dans index.html

et l'API :

On teste le chiffrement de Bob ...

Alice va déchiffrer le message ...

Pratique :

Dans le prog. principal, on a :

```
// déchiffrement
var uncipherArr=uncipher(cipherArr,d,n) ;

// et
// Convertion de l'array déchiffré en text clair.
var unciphText=arrayByToString(uncipherArr,by);
```

La fonction *arrayByToString* déjà écrite, est l'inverse de *stringToArrayBy*.

On ne va écrire que la fonction *uncipher* après avoir regarder rapidement la fonction *arrayByToString* déjà été vue dans l'atelier précédent.

```
/**
* Unciphering with private key (d,n)
* @param arr        16 bits elements array with ciphered text
* @param dd         Number d of private key
* @param nn         Number n (p*q)
* @return 16 bits elements array with unciphered text
*/
function uncipher (arr,dd,nn) {
        return cipher (arr,dd,nn) ;   // on appelle cipher() avec le paramètre dd au lieu de ee.
}
```

Alice lit le message et décide sur son cheval blanc, de partir terrasser le dragon et délivré Bob !!

****** On teste *****