

21世纪高等学校研究生教材

数学学科硕士研究生系列教材

黎曼几何基础

L I M A N J I H E J I C H U

北京师范大学数学科学学院 主 编

唐梓洲 / 编 著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP) 数据

黎曼几何基础 / 唐梓洲著. —北京: 北京师范大学出版社, 2011.2

(21 世纪高等学校研究生教材)

ISBN 978-7-303-11815-1

I. ①黎… II. ①唐… III. ①黎曼几何—研究生—教材 IV. O186.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 229245 号

营 销 中 心 电 话	010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网	http://gaojiao.bnup.com.cn
电 子 信 箱	beishida168@126.com

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn

北京新街口外大街 19 号

邮政编码: 100875

印 刷: 北京中印联印务有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 170 mm × 230 mm

印 张: 9.25

字 数: 160 千字

版 次: 2011 年 2 月第 1 版

印 次: 2011 年 2 月第 1 次印刷

定 价: 15.00 元

策划编辑: 岳昌庆 责任编辑: 岳昌庆 程丽娟

美术编辑: 毛 佳 装帧设计: 毛 佳

责任校对: 李 茵 责任印制: 李 啸

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 010-58800697

北京读者服务部电话: 010-58808104

外埠邮购电话: 010-58808083

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-58800825

前 言

研究生教材建设是研究生培养工作的重要环节,是研究生教学改革措施之一,也是衡量学校研究生教学水平和特色的重要依据.纵观我院的研究生教育,可分为几个阶段:1954~1960年是我院研究生教育初创时期,招生为代数、分析、几何等方向的10个研究生班;1962~1965年改为招收少量的硕士研究生;1966~1976年“文化大革命”时期,研究生停止招生.1978年,我院恢复招收硕士研究生,研究生所学课程除外语和自然辩证法公共课程外,主要学习几门专业课.每年导师根据招生情况,分别制订每个研究生的培养计划.从1982年开始,首次开展制订攻读硕士学位研究生培养方案的工作.为拓宽研究生的知识面,对每届研究生开设5门专业基础理论课:泛函分析、抽象代数、实分析、复分析、微分流形,每人至少选3门;从1983年起,增加代数拓扑,共6门基础理论课,安排有经验的教师讲课且相对固定,考试要求严格,使研究生受到正规的训练.由于不同院校开设的本科生课程有一定的差距,经过这个阶段的学习后,基本上达到了一个相同的水平,为从本科生到研究生基础水平过渡提供了保障.在1992年修订教学计划时,增加了概率论基础和计算机基础.这样,基础理论课共开设8门.从1997学年开始,规定研究生每人至少选4门.从2000年开始,改为开设12门基础课,增加现代分析基础、偏微分方程、李群、随机过程.从2007学年开始,改为开设15门基础课,增加高等统计学、最优化理论与算法、非线性泛函分析、动力系统基础,规定研究生每人至少选5门;去掉计算机基础.

经过近30多年系统的研究生培养工作,研究生教育正在逐步走向正规.在此期间,学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了比较丰富的培养经验,将这些经验落实并贯彻到研究生教材编著中去是大有益处的.

随着研究生的扩招,招收研究生的数量越来越大.再加上培养方案的改革,出版研究生系列教材已经提到议事日程上来.在20世纪90年代,北京师范大学出版社已经出版了几部基础课教材:《泛函分析》《实分析》《随机过程通论》等,但未系统策划出版系列教材.2005年5月,由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商,由北京师范大学数学科学学院组编(李仲来教授负责),准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用的北京师范大学出版社出版的几部教材进行修订后再版,进一步计划用几年时间,出版数学一级学科硕士研究生的基础课程系列教材和部分专业课教材.

我们希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者,提出宝贵的修改意见,使其不断改进和完善.

本套教材可供高等院校数学一级学科硕士研究生和课程与教学论(数学)等硕士研究生使用和参考.

北京师范大学数学科学学院
2010年9月18日

作者的话

——谨以此书纪念一代数学大师陈省身先生诞辰100周年

毋庸置疑，黎曼几何在当今，无论是在数学理论本身，还是在理论物理等其他学科，都日益显示出其重要性。

本书共分八章，力求语言和叙述简洁精炼。第一章简述了微分流形的基本内容，是学习后面章节的基础。第二章到第六章是黎曼几何的必备。依本人的兴趣，第七章讲子流形理论，第八章讲复几何。希望所著之书的内容，既在基础理论上自成体系，又能给读者奠定坚实的基础。

自2004年以来，本人在清华大学和北京师范大学为研究生多次讲授黎曼几何课程。本书是在原英文讲稿的基础上，由谢余铨博士翻译和整理而成。为了知识的系统性，他在书中适当添加了部分内容。后来，谢余铨博士、彦文娇、钱超、岳跃朝和徐玲等同学又对本书反复校对和修改。在此向他们表示感谢。

由于作者水平有限，书中难免会有不妥之处，望读者不吝指教。

唐梓洲

2010年7月6日于北京蓝旗营

目录

第一章 微分流形	1
§1.1 光滑结构	1
§1.2 浸入与嵌入	9
§1.3 几种特殊的流形与流形的定向	12
§1.4 光滑向量场	18
§1.5 李群	22
第二章 度量	29
§2.1 黎曼度量	29
§2.2 度量形式与体积	33
第三章 联络	40
§3.1 仿射联络	40
§3.2 Levi-Civita 联络	44
第四章 测地线	50
§4.1 测地流	50
§4.2 测地线的极小性质	58
§4.3 测地凸邻域	64
§4.4 黎曼流形上的微分算子	67
第五章 曲率	73
§5.1 曲率张量	73
§5.2 截面曲率	76
§5.3 Ricci 曲率和数量曲率	79
§5.4 张量	80
§5.5 活动标架	84
§5.6 Gauss-Bonnet 定理	94
第六章 Jacobi 场	99
§6.1 Jacobi 方程	99
§6.2 共轭点	104

第七章 子流形几何	108
§7.1 第二基本型	108
§7.2 基本方程	113
§7.3 活动标架	118
第八章 Hermitian 几何	123
§8.1 近复结构	123
§8.2 Hermitian 流形	125
§8.3 活动标架	128
参考文献	134
中文索引	136
英文索引	139

第一章 微分流形

§1.1 光滑结构

定义1.1.1 设拓扑空间 M 是一个具有可数基的 Hausdorff 空间, 并且存在一集族 $\{(X_\alpha, U_\alpha) | \alpha \in \Lambda\}$ 满足:

- (1) $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha(U_\alpha)$, 其中 U_α 是 \mathbb{R}^n 中的开集, 映射 $X_\alpha: U_\alpha \rightarrow X_\alpha(U_\alpha)$ 是同胚的;
- (2) 相容性: 对任意的 $\alpha, \beta \in \Lambda$, 若 $X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, 则坐标变换 $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$ 是 C^∞ 的(图 1.1);
- (3) 对于条件 (1) 和 (2) 来说, 族 $\{X_\alpha(U_\alpha) | \alpha \in \Lambda\}$ 是极大的.

则称 M 为 n 维 C^∞ 微分流形(differentiable manifold).

对于任意的点 $p \in X_\alpha(U_\alpha)$, (X_α, U_α) 称为 M 在点 p 的一个参数化(parametrization)(或局部坐标系). $X_\alpha(U_\alpha)$ 称为点 p 的一个坐标邻域. 满足条件 (1) 和 (2) 的集族 $\{(X_\alpha, U_\alpha)\}$ 称为流形 M 上的一个光滑结构(smooth structure). 而条件 (3) 纯粹是技术上的处理.

若无条件 (2), 则称 M 是拓扑流形; 若坐标变换只假定是 C^r 的($r \geq 1$), 则称 $\{(X_\alpha, U_\alpha)\}$ 为流形 M 上的一个 C^r 微分结构, 称 M 为 C^r 微分流形. 如无特别说明, 本书上的微分流形都是指 C^∞ 微分流形.

下面介绍几个微分流形的例子.

例 1.1.1 欧氏空间 \mathbb{R}^n 是一个 n 维微分流形.

练习 1.1 试证: 若 M 和 N 都是微分流形, 则乘积空间 $M \times N$ 也是微分流形.

例 1.1.2 在 \mathbb{R} 上可以构造不同的光滑结构.

设 Id 是恒等映射, 显然 $\{(\text{Id}, \mathbb{R})\}$ 是 \mathbb{R} 上的光滑结构.

另定义映射 $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$X(t) = t^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

容易验证, $\{(X, \mathbb{R})\}$ 也是 \mathbb{R} 上的一个光滑结构.

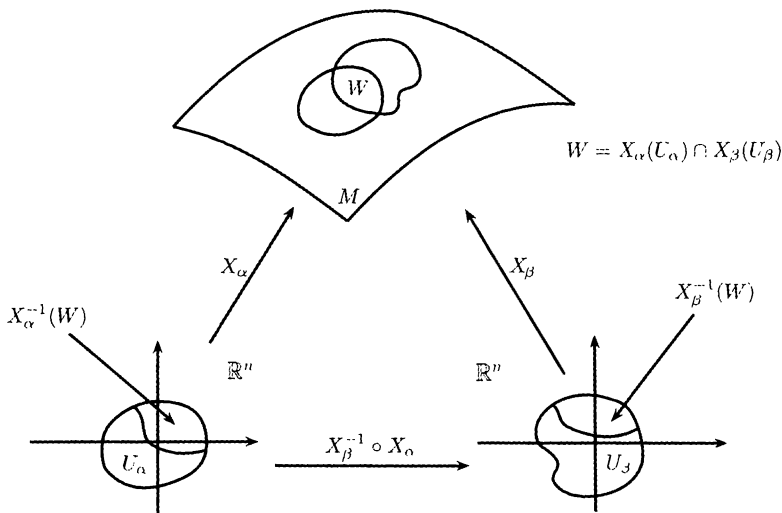


图 1.1

由于坐标变换 $X^{-1} \circ \text{Id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$t \mapsto \sqrt[3]{t},$$

在 $t = 0$ 处不是 C^∞ 的, 因此 $\{(\text{Id}, \mathbb{R})\}$ 和 $\{(X, \mathbb{R})\}$ 是 \mathbb{R} 上两个不同的光滑结构.

例 1.1.3 欧氏空间 \mathbb{R}^n 中的开集显然是一个微分流形. 作为一个特例, 一般(实)线性群 $GL(n, \mathbb{R}) = \{A_{n \times n} | \det A \neq 0\} \subset \mathbb{R}^{n^2}$ 是一个微分流形.

例 1.1.4 n 维标准球面 $S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) | \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

由于 \mathbb{R}^{n+1} 是 Hausdorff 空间, 球面 S^n 作为 \mathbb{R}^{n+1} 的拓扑子空间也是 Hausdorff 空间.

设 $N = (1, 0, \dots, 0)$, $S = (-1, 0, \dots, 0)$, 令

$$V_1 = S^n - \{N\}, \quad V_2 = S^n - \{S\}.$$

利用球极投影, 有映射 $X_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow V_1$, $X_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow V_2$,

$$X_1(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{1 + |y|^2} (|y|^2 - 1, 2y_1, \dots, 2y_n),$$

$$X_2(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{1 + |y|^2} (1 - |y|^2, 2y_1, \dots, 2y_n).$$

其中, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $|y|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$.

由于 $X_1(\mathbb{R}^n) \cap X_2(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$, 坐标变换 $X_2^{-1} \circ X_1 : \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$,

$$X_2^{-1} \circ X_1(y) = \frac{y}{|y|^2}$$

是 C^∞ 的. 所以, $\{(X_1, \mathbb{R}^n), (X_2, \mathbb{R}^n)\}$ 给出了球面 S^n 的一个光滑结构.

例 1.1.5 实投影空间 \mathbb{RP}^n .

实投影空间 \mathbb{RP}^n 是指 \mathbb{R}^{n+1} 中的一维线性子空间的全体, 或可看成 $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 的等价类的全体, 这里等价关系定义为:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, y = \lambda \cdot x.$$

由于 \mathbb{R}^{n+1} 中每一个一维线性子空间与单位球面 S^n 恰有两个交点. 因此, \mathbb{RP}^n 又可视为 S^n 中对径点等同下的商空间, 即 $\mathbb{RP}^n = S^n / \mathbb{Z}_2$, 其中 \mathbb{Z}_2 是群作用. 下面我们将给出 \mathbb{RP}^n 上的一个光滑结构.

定义映射 $X_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$, 使得

$$X_i(y_1, y_2, \dots, y_n) = [y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n], \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

其中, $[y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n]$ 是 \mathbb{RP}^n 的齐次坐标.

可验证, $X_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow X_i(\mathbb{R}^n)$ 是同胚. 现求坐标变换, 不失一般性, 假设 $j < i$, 则

$$X_j^{-1} \circ X_i(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{y_j}(y_1, y_2, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n).$$

所以, $X_j^{-1} \circ X_i$ 是 C^∞ 的. 这样, $\{(X_i, \mathbb{R}^n) | i = 1, 2, \dots, n+1\}$ 便给出了 \mathbb{RP}^n 上的一个光滑结构.

注 1 同样, 我们可以定义复投影空间 \mathbb{CP}^n 和四元数投影空间 \mathbb{HP}^n , 甚至 Cayley 投影平面 \mathbb{CaP}^2 . 当然, Cayley 投影平面的定义有点特别, 见参考文献 [Tan01].

注 2 存在这样的拓扑流形, 使得它上面不存在任何光滑结构. 见参考文献 [Ker60].

注 3 对任意维数小于等于 3 的拓扑流形都存在唯一的光滑结构. 见参考文献 [Mun60].

定义 1.1.2 设 M_1, M_2 分别是 n 维和 m 维微分流形. 给定点 $p \in M_1$ 和映射 $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$, 设 $X(U)$ 和 $Y(V)$ 分别是点 p 和点 $\varphi(p)$ 的一个参数化且满足 $\varphi(X(U)) \subset Y(V)$. 若映射

$$Y^{-1} \circ \varphi \circ X : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

在点 $X^{-1}(p)$ 处是 C^∞ 的, 则称 φ 在点 p 处是光滑的(如图 1.2). 如果 φ 在 M_1 上处处是 C^∞ 的, 则称映射 φ 是光滑映射(smooth map).

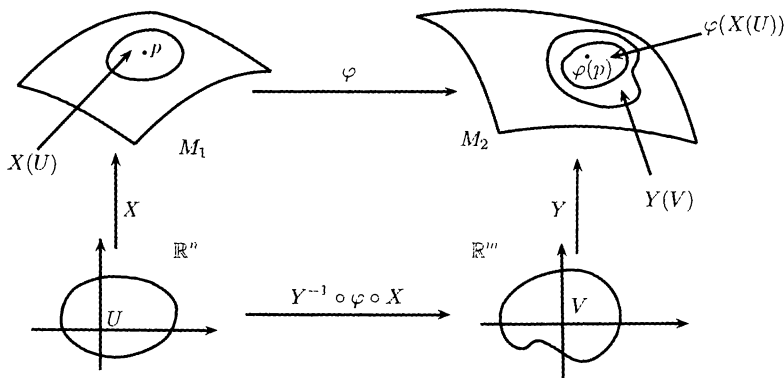


图 1.2

特别地, 若 M 是一个微分流形, 我们称光滑映射 $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ 为 M 上的一条光滑曲线(smooth curve); 称光滑映射 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 为 M 上的一个光滑函数. 记 M 上所有光滑函数的全体为 $\mathcal{D}(M)$.

定义1.1.3 设 α 是 M 上经过点 p 的一条曲线, $\alpha(0) = p$, U 是点 p 的一个邻域. 记 $\mathcal{D}(U)$ 是定义在 U 内且在点 p 处光滑的全体函数的集合. 曲线 α 在 $t = 0$ 时的切向量(tangent vector)是一个映射 $\alpha'(0): \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\alpha'(0)(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha), \quad f \in \mathcal{D}(U).$$

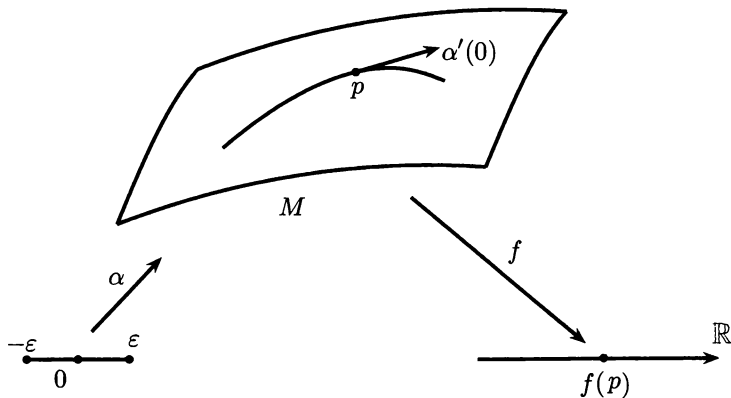


图 1.3

设 M 是一个 n 维微分流形, $p \in M$. 我们将点 p 处的切向量定义为 M

上某一条曲线 $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, $\alpha(0) = p$, 在 $t = 0$ 时的切向量. 不难验证, 它与曲线的选取无关, 这样的定义是合理的. 记点 p 处的切向量的全体为 $T_p M$. 这样, 对任意的 $v \in T_p M$, 都存在某一条曲线 $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, 使得 $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. 容易验证, $T_p M$ 上有自然的向量空间结构.

断言 向量空间 $T_p M$ 的维数为 n .

证明 选取点 p 处的一个参数化 (X, U) , 使得 $0 \in U$, $X(0) = p$, 设相应的局部坐标为 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. 对任意的 $i = 1, 2, \dots, n$, 考虑过点 p 坐标曲线 $\gamma^i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, 使得

$$\gamma^i(t) = X(0, \dots, t, \dots, 0), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

我们将 γ^i 在点 p 处的切向量记为: $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0$, 则对任意的 $f \in \mathcal{D}(M)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 (f) &= \frac{d(f \circ \gamma^i(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(f \circ X(0, \dots, t, \dots, 0))}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_0. \end{aligned}$$

不难看出, 这 n 个切向量是线性无关的. 事实上, 假设存在 $a_i \in \mathbb{R}$, 使得

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0.$$

将它作用在第 j 个坐标函数上, 可得

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 (x_j) = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = a_j.$$

另一方面, 对任意的 $v \in T_p M$, 存在曲线 $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, 使得 $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. 在参数化 (X, U) 下, 曲线 α 可以写成:

$$X^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

令 $f \circ X(q) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $q = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$. 根据链式求导法则, 可得:

$$\begin{aligned} \alpha'(0)(f) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \alpha) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_0 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0 \right) (f). \end{aligned}$$

因此,

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_0. \quad (1.1)$$

由 (1.1) 式可以看出, 对任意的切向量 v 我们都能够用坐标切向量

$$\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_0, \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \right|_0, \cdots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_0 \right\}$$

线性表示, 并且它的系数 $x'_i(0)$ 恰是切向量 v 作用在第 i 个坐标函数 x_i 上的值. 所以, $T_p M$ 是一个 n 维的向量空间. ■

从上面的证明可以看出, 参数化 (X, U) 给出了 $T_p M$ 上的一组基 $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_0, \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \right|_0, \cdots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_0 \right\}$, 我们将这组基称为切空间 $T_p M$ 在参数化 (X, U) 下的自然基底(图 1.4), 在这组基下切向量 $\alpha'(0)$ 可写成

$$\alpha'(0) = (x'_1(0), x'_2(0), \cdots, x'_n(0)).$$

显然, $T_p M$ 的线性结构与参数化 (X, U) 的选取无关. 向量空间 $T_p M$ 称为 M 在 p 点的切空间(tangent space).

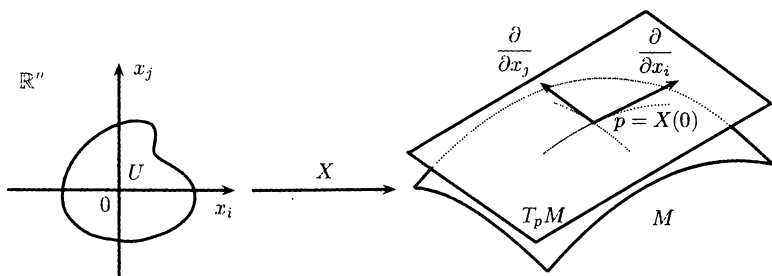


图 1.4

注 4 不难验证, 微分流形 M 在点 p 处的切向量 v 满足以下性质:

- (1) 对任意的 $f, g \in \mathcal{D}(M)$, $v(f + g) = v(f) + v(g)$;
- (2) 对任意的 $f \in \mathcal{D}(M)$, $a \in \mathbb{R}$, $v(a \cdot f) = a \cdot v(f)$;
- (3) Leibniz 法则: 对任意的 $f, g \in \mathcal{D}(M)$, $v(f \cdot g) = v(f) \cdot g + f \cdot v(g)$.

上述三条性质是切向量的基本特征. 在部分参考书上将它们直接作为切向量的公理化定义.

练习 1.2 设 M 是 n 维微分流形, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^N$ 是光滑映射. 若对任意的点 $p \in M$, 都存在一个参数化 (X, U) , 使得 $n + \frac{n}{2}(n+1)$ 个向量 $\{\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}, (j \geq k)\}$ 在 $X(U)$ 上处处线性无关, 则称 f 是自由的. 证明: 定义是合理的, 即不依赖于参数化的选取.

命题 1.1.4 设 M_1, M_2 分别是 n 维和 m 维微分流形, $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ 是光滑映射. 对于 M_1 上的点 p 和切向量 $v \in T_p M_1$, 可选取曲线 $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_1$, 使得 $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$. 令 $\beta = \varphi \circ \alpha$, 则映射 $d\varphi_p: T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$, $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ 是线性映射且与曲线 α 的选取无关(如图 1.5). 称 $d\varphi_p$ 为 φ 在 p 点处的切映射(tangent map).

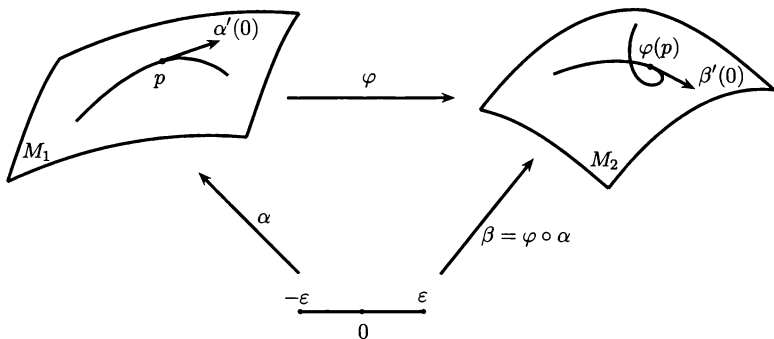


图 1.5

证明 分别选取点 p 和 $\varphi(p)$ 的一个参数化 (X, U) 和 (Y, V) , 在这两个参数化下 φ 可写成

$$Y^{-1} \circ \varphi \circ X(q) = (y_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

这里 $q = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U, (y_1, y_2, \dots, y_m) \in V$.

曲线 α 可写成

$$X^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

于是,

$$Y^{-1} \circ \beta(t) = (y_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \dots, y_m(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))).$$

因此, 在自然基底 $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_0, \frac{\partial}{\partial y_2} \Big|_0, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m} \Big|_0 \right\}$ 下

$$\beta'(0) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial y_1}{\partial x_i} x'_i(0), \frac{\partial y_2}{\partial x_i} x'_i(0), \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_m}{\partial x_i} x'_i(0) \right). \quad (1.2)$$

所以, $\beta'(0)$ 与曲线 α 的选取无关. 将(1.2) 改写成

$$\beta'(0) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i} x'_i(0) \right) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_0.$$

或

$$(\beta'(0))^T = d\varphi_p(v) = \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right)_{m \times n} (x'_i(0))^T.$$

其中, $\beta'(0)$ 表示 m 个元素的行向量, $\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right)_{m \times n}$ 表示一个 $m \times n$ 的矩阵, $(x'_i(0))$ 表示 n 个元素的行向量.

从上面的式子可以看出, $d\varphi_p: T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ 是一个线性变换, 它在参数化 (X, U) 和 (Y, V) 下所对应的矩阵恰好是 $Y^{-1} \circ \beta(t)$ 的 Jacobi 矩阵. 证毕. ■

注 5 对于微分流形间的切映射, 不难验证:

- (1) $d(\text{Id}) = \text{id}$. 其中, Id 是流形的恒等映射, id 是切空间的恒等映射;
- (2) $d(f \circ g) = d(f) \circ d(g)$;
- (3) 设 (X, U) 是 M^n 的一个参数化, 若 $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, 则

$$dX(e_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

定义1.1.5 设 M_1, M_2 是微分流形, 如果映射 $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ 既单又满, 且 φ 与 φ^{-1} 都是光滑的, 则称 φ 是微分同胚(diffeomorphism). 记为: $M_1 \cong M_2$.

显然, 如果 $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ 是微分同胚, 则 M_1 和 M_2 的维数相同.

定理1.1.6 设 M_1, M_2 都是 n 维微分流形, $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ 是光滑映射. 若存在 $p \in M_1$, 使得 $d\varphi_p$ 是线性同构, 则存在 p 点的开邻域 $U \subset M_1$, 使得

$$\varphi|_U: U \rightarrow \varphi(U)$$

是一个微分同胚.

证明 先参数化, 再利用 \mathbb{R}^n 中的逆函数定理即证. ■

在同一个拓扑流形上可能有不同的微分结构, 但它们所构造的微分流形可能是微分同胚的.

例 1.1.6 设微分流形 $M_1 = M_2 = \mathbb{R}$ 的光滑结构分别是 $\{(\text{Id}, \mathbb{R})\}$ 和 $\{(X(t) = t^3, \mathbb{R})\}$, 则它们具有不同的光滑结构(见例 1.1.2), 但映射

$$\begin{array}{ccc} \varphi: M_1 & \longrightarrow & M_2 \\ t & \longmapsto & t^3 \end{array}$$

是一个微分同胚.

注 6 存在 7 维光滑流形 M^7 , 使得 M^7 (拓扑)同胚于 S^7 , 但 M^7 不微分同胚于 S^7 . 见参考文献 [Mil56].

注 7 任意的 C^1 流形都 C^1 微分同胚于一个光滑流形. 见参考文献 [Hir76].

§1.2 浸入与嵌入

定义 1.2.1 设 M_1, M_2 分别是 n 维和 m 维的微分流形, $\varphi: M_1 \longrightarrow M_2$ 为 C^∞ 映射. 对任意的 $p \in M_1$,

- (1) 若 $d\varphi_p$ 都是单射, 则称 φ 是浸入(immersion). 流形 M_1 称为流形 M_2 的浸入子流形;
- (2) 若 $d\varphi_p$ 都是满射, 则称 φ 是浸没(submersion);
- (3) 若 $d\varphi_p$ 都是单射, 且 $\varphi(M_1) \subset M_2$ 取子拓扑时, 映射 $\varphi: M_1 \longrightarrow \varphi(M_1)$ 是同胚的, 则称 φ 是嵌入(embedding). 流形 M_1 称为流形 M_2 的嵌入子流形(submanifold).

从定义可以看出, 若 $\varphi: M_1^n \longrightarrow M_2^m$ 是浸入, 则 $n \leq m$; 若 φ 是浸没, 则 $n \geq m$.

例 1.2.1 浸入.

定义映射 $\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 为

$$\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4), \quad t \in \mathbb{R}.$$

因为对任意的 $t \in \mathbb{R}$, $\alpha'(t) = (3t^2 - 4, 2t) \neq 0$, 所以 φ 是浸入(如图 1.6).

例 1.2.2 浸没.

Hopf 纤维化(Hopf fibration), 映射

$$\begin{array}{ccc} \pi: S^3 & \longrightarrow & S^2 \\ (z, w) & \longmapsto & (|z|^2 - |w|^2, 2z\bar{w}) \end{array}$$

其中, $(z, w) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$, $S^2 \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, $z = x_1 + \sqrt{-1}x_2$, $w = y_1 + \sqrt{-1}y_2$.

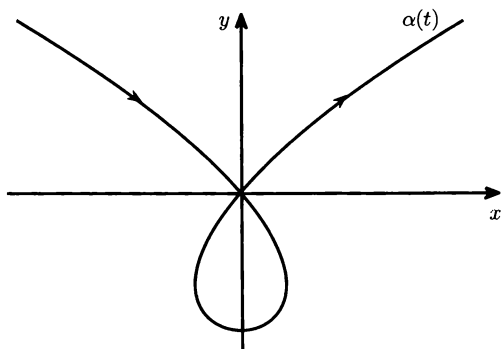


图 1.6

注意到, $\pi(e^{\sqrt{-1}\theta}(z, w)) = \pi((z, w))$, 因此球面 S^3 上任意点 p 处的切向量 $\sqrt{-1} \cdot p \in \text{Ker } d\pi_p$. 设 $\Phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是映射 π 的自然扩充, 则切映射 $d\Phi$ 可以写成矩阵形式:

$$d\Phi = 2 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -y_1 & -y_2 \\ y_1 & y_2 & x_1 & x_2 \\ -y_2 & y_1 & x_2 & -x_1 \end{pmatrix}.$$

故 $\text{Ker } d\Phi = \{\lambda \cdot (-x_2, x_1, -y_2, y_1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. 于是, 对 S^3 上任意点 p , $\text{Ker } d\pi_p = \{\lambda\sqrt{-1} \cdot p \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. 因此, $d\pi_p$ 是满的, π 是浸没.

注 1 Hopf 纤维化还有以下形式: $\pi: S^7 \rightarrow S^4$, $\pi: S^{15} \rightarrow S^8$. 它们都是浸没, 其定义分别用到四元数和 Cayley 数的乘法.

例 1.2.3 单的浸入不一定是嵌入.

环面 $T^2 = S^1 \times S^1$ 可以看作 \mathbb{R}^2/\sim , 其中等价关系 \sim 定义如下, 对任意的 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z}, \text{ 使得 } x_1 = m + x_2, y_1 = n + y_2.$$

考虑映射 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow T^2$,

$$\varphi(t) = [(t, \varepsilon t)].$$

不难得到, 当 ε 为无理数时, φ 是单一的浸入且象集 $\varphi(\mathbb{R})$ 在 T^2 上处处稠密. 显然, 此时 $\varphi(\mathbb{R})$ 作为 T^2 的子空间与 \mathbb{R} 不同胚. 因此, φ 不是嵌入.

例 1.2.4 嵌入.

定义映射

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{RP}^2 = S^2/\mathbb{Z}_2 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ [(x, y, z)] &\longmapsto \left(\frac{x^2-y^2}{2}, xy, yz, zx\right) \end{aligned}$$

要证明 ϕ 是嵌入, 只需证:

- (1) \mathbb{RP}^2 是紧致的;
- (2) ϕ 是单射;
- (3) $d\phi$ 处处是单的.

(1)和(2)留给读者作练习, 这里只证明(3).

由于 \mathbb{RP}^2 和 S^2 局部微分同胚, 故在局部上将它与 S^2 等同. 对任意的 $A = (a, b, c) \in S^2$, 设 $v = (x, y, z)$ 是点 A 处的单位切向量. 构造曲线 $\alpha(t) = \cos(t) \cdot A + \sin(t) \cdot v \in S^2$, 显然

$$\alpha(0) = A, \quad \alpha'(0) = v.$$

于是

$$\begin{aligned} d\phi_A(v) &= d\phi_A(\alpha'(0)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi \circ \alpha \\ &= (ax - by, ay + bx, bz + cy, cx + az). \end{aligned}$$

因此, $|d\phi_A(v)|^2 = 1 - 3c^2z^2 > 0$. 所以切映射 $d\phi$ 处处是单的.

命题1.2.2 设 M_1, M_2 是微分流形, $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ 是浸入. 则对任意的点 $p \in M_1$, 存在点 p 的邻域 $V \subset M_1$, 使得 $\varphi|_V: V \rightarrow M_2$ 是嵌入.

证明 实际上我们只需证明, 当 $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($n \leq m$) 是浸入时, 结论成立即可.

由于 φ 是浸入, 对任意 $p \in \mathbb{R}^n$, 矩阵 $(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}|_p)_{m \times n}$ 的秩为 n . 不妨假设 $\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}|_p \neq 0$. 引入映射

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, t) &\longmapsto \varphi(x) + (0, t) \end{aligned}$$

因为

$$\det(d\tilde{\varphi})|_{(p,0)} = \det \begin{pmatrix} (\frac{\partial y_j}{\partial x_i}|_p)_{n \times n} & 0 \\ * & I \end{pmatrix} \neq 0,$$

所以 $d\tilde{\varphi}|_{(p,0)}$ 是单射.

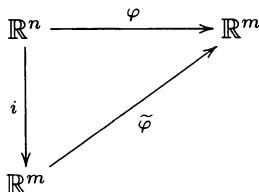


图 1.7

将逆函数定理应用到 $\tilde{\varphi}$ 上, 即可证明 φ 局部上是嵌入. 证毕. ■

§1.3 几种特殊的流形与流形的定向

1.3.1 切丛

设 M 是 n 维微分流形, 令 $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M = \{(p, v) | p \in M, v \in T_p M\}$.

我们将赋予它一个微分结构, 使之成为 $2n$ 维的微分流形. 称 TM 为微分流形 M 的切丛(tangent bundle).

定义映射 $\pi: TM \rightarrow M$, 使得对任意的 $v \in T_p M, p \in M, \pi((p, v)) = p$. 则对任意点 $p \in M$, 有 $\pi^{-1}(p) = T_p M$.

假定 M 的微分结构是 $\{(X_\alpha, U_\alpha)\}$, $M = \bigcup_\alpha X_\alpha(U_\alpha)$. 设参数化 (X_α, U_α) 所对应的坐标系是: $(x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$, 则 $X_\alpha(U_\alpha)$ 中任意点处的切空间的对应的基为 $\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_2^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\}$. 对于任意的坐标映射 X_α , 定义映射

$$\begin{aligned} Y_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow TM|_{\pi^{-1}(X_\alpha(U_\alpha))} \\ (x_\alpha, t) &\longmapsto (X_\alpha(x_\alpha), \sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}) \end{aligned}$$

其中, $x_\alpha = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha) \in U_\alpha \subset \mathbb{R}^n, t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$.

事实上, 若将 t 视为点 $x_\alpha \in U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ 处的切向量, 则

$$dX_\alpha(t) = \sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}.$$

那么

$$Y_\alpha(x_\alpha, t) = (X_\alpha(x_\alpha), dX_\alpha(t)).$$

下面证明集族 $\{(Y_\alpha, U_\alpha \times \mathbb{R}^n)\}$ 是 TM 上的一个光滑结构.

由于 $M = \bigcup_\alpha X_\alpha(U_\alpha)$, 且对任意的 $q \in U_\alpha, (dX_\alpha)_q(\mathbb{R}^n) = T_{X_\alpha(q)}M$. 故

$$\bigcup_\alpha Y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = TM.$$

根据定义 1.1.1, 只需证明坐标变换是 C^∞ 的即可.

设 $Y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap Y_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n) \neq \emptyset$, 对任意 $x \in U_\alpha \cap U_\beta, t \in \mathbb{R}^n$, 若 $Y_\alpha(x, t) \in Y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap Y_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n)$, 则

$$\begin{aligned} Y_\beta^{-1} \circ Y_\alpha(x, t) &= (X_\beta^{-1} \circ X_\alpha(x), (dX_\beta)^{-1} \circ dX_\alpha(t)) \\ &= (X_\beta^{-1} \circ X_\alpha(x), d(X_\beta^{-1} \circ X_\alpha)(t)), \end{aligned}$$

由于 $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$ 是 C^∞ 的, 从而 $d(X_\beta^{-1} \circ X_\alpha)$ 也是 C^∞ 的. 所以, $Y_\beta^{-1} \circ Y_\alpha$ 是 C^∞ 的.

显然, 投影映射 $\pi: TM \rightarrow M$ 是光滑映射.

1.3.2 \mathbb{R}^n 的正则子流形

\mathbb{R}^n 的子集 M^k 称为 \mathbb{R}^n 的正则子流形(regular submanifold), 如果对任意点 $p \in M$, 都存在 p 的一个开邻域 $W \subset \mathbb{R}^n$ 和映射 $X: U \rightarrow M \cap W$ (这里 U 为 \mathbb{R}^k 的开集), 使得:

- (1) X 是同胚, 并且是光滑的;
- (2) 对任意 $q \in U$, $dX|_q: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是单射.

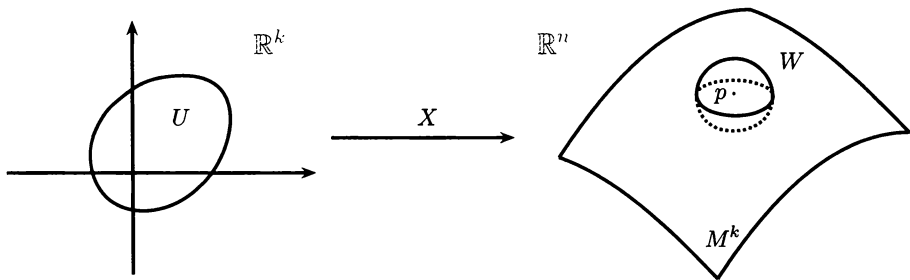


图 1.8

断言 \mathbb{R}^n 的正则子流形是一个光滑流形.

证明 我们可以适当选取一个开邻域 W 和映射 $X: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M \cap W$, $Y: V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M \cap W$, 满足 $\widetilde{W} = X(U) \cap Y(V) \neq \emptyset$. 我们只需要说明 $X^{-1} \circ Y$ 是光滑映射即可.

设 $X(u_1, u_2, \dots, u_k) = (v_1(u_1, u_2, \dots, u_k), \dots, v_n(u_1, u_2, \dots, u_k))$, 其中 $(u_1, u_2, \dots, u_k) \in U \subset \mathbb{R}^k, k < n$. 对任意 $q \in U$, 由于 $dX|_q$ 是单射, 不妨假设 $\left. \frac{\partial(v_1, v_2, \dots, v_k)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_k)} \right|_q \neq 0$. 将映射 X 扩充为

$$\begin{aligned} F: U \times \mathbb{R}^{n-k} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (u, t) &\longmapsto X(u) + (0, t) \end{aligned}$$

于是,

$$\det(dF_{(q,0)}) = \left. \frac{\partial(v_1, v_2, \dots, v_k)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_k)} \right|_q \neq 0.$$

根据逆函数定理, 局部上 F^{-1} 存在且是光滑的. 于是映射 $X^{-1} \circ Y = F^{-1} \circ Y$ 是光滑的. 证毕. ■

1.3.3 正则值的原象

定义1.3.1 设 M_1 和 M_2 分别是 n 维和 m 维的微分流形, $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ 是光滑映射. 对于 M_1 上的点 p ,

- (1) 如果切映射 $d\varphi_p: T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ 不是满射, 则称点 p 为映射 φ 的临界点(critical point), $\varphi(p)$ 称为映射 φ 的临界值(critical value);
- (2) 如果切映射 $d\varphi_p: T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ 是满射, 则称点 p 是映射 φ 的正则点(regular point). M_2 上除临界值的点以外的点称为映射 φ 的正则值(regular value).

例 1.3.1 在环面 T^2 上取高度函数 h (如图 1.9), 则 p, q, r, s 是 h 的临界点, a, b, c, d 是 h 的临界值.

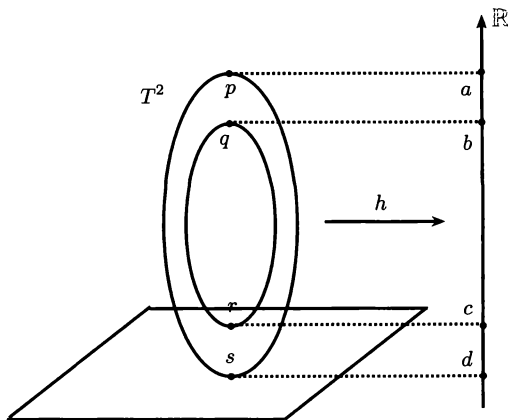


图 1.9

注 1 正则点的像不一定是正则值. 事实上, $y \in M_2$ 是正则值, 当且仅当 $\varphi^{-1}(y) = \emptyset$ 或者对任意的 $p \in \varphi^{-1}(y)$, p 都是正则点.

下面的定理显示了正则值概念的重要性.

定理1.3.2 (正则值原像定理) 如果 $y \in M_2$ 是正则值(在象集中), 则 $\varphi^{-1}(y) \subset M_1$ 是一个维数为 $n - m$ 的微分流形.

证明 直接应用逆函数定理. 详见参考文献 [Hir76]. ■

例 1.3.2 对于 \mathbb{R}^{n+1} 上的函数 $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = |x|^2 - 1.$$

不难看出, 任意 $y \neq -1$ 都是正则值. 故 $f^{-1}(0) = S^n$ 是一个流形. 这样就给出了单位球面 S^n 是光滑流形的一个简单的证明.

例 1.3.3 正交矩阵群 $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A A^T = I\}$ 是一个维数为 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 的光滑流形.

证明 令 $H(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A = A^T\}$, 不难看出它与 $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 同构. 定义映射 $\varphi: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow H(n, \mathbb{R})$,

$$\varphi(A) = A A^T - I.$$

显然 $\varphi^{-1}(0) = O(n)$. 根据正则值原像定理, 我们只需说明零矩阵 0 是正则值即可.

在 $GL(n, \mathbb{R})$ 中构造曲线 $\alpha(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, 使得

$$\alpha(0) = A, \quad \alpha'(0) = X.$$

于是,

$$\begin{aligned} d\varphi_A(X) &= d\varphi_A(\alpha'(0)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(\alpha(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\alpha(t)\alpha(t)^T - I) \\ &= A X^T + X A^T. \end{aligned}$$

因此, 对于任意的 $A \in O(n)$, $S \in T_{\varphi(A)}H(n, \mathbb{R})$, 则 $S = S^T$, 令 $X = \frac{1}{2}SA$, 我们有

$$d\varphi_A(X) = A X^T + X A^T = \frac{1}{2}(A A^T S^T + S A A^T) = S.$$

也就是说 $d\varphi_A: T_A GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow T_{\varphi(A)}H(n, \mathbb{R})$ 是满射. 所以零矩阵是正则值. 证毕. \blacksquare

练习 3.1 仿照例 1.3.3, 试证: $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A \bar{A}^T = I\}$ 是一个 n^2 维的光滑流形.

1.3.4 流形的定向

定义 1.3.3 设 M 是一个 n 维微分流形, 如果存在一个与 M 相容的微分结构 $\{(X_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ (设 $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ 为 U_α 的坐标), 使得对任意的 $\alpha, \beta \in \Lambda$, 当 $W = X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$ 时, $X_\alpha(U_\alpha)$ 和 $X_\beta(U_\beta)$ 定向相容, 即坐标变换 $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha: X_\alpha^{-1}(W) \rightarrow X_\beta^{-1}(W)$ 的 Jacobi 行列式

$$\det J(X_\beta^{-1} \circ X_\alpha) = \det \left(\frac{\partial (X_\beta^{-1} \circ X_\alpha)^i}{\partial x_j^\alpha} \right)_{n \times n} > 0,$$

则称微分流形 M 是可定向的(orientable).

从定义可以看出, 微分流形 M 可定向当且仅当 M 上的每一点的切空间可以给出定向, 且局部是定向相容的.

注 2 设 M_1, M_2 是微分流形, $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ 是微分同胚, 则 M_1 可定向当且仅当 M_2 可定向.

注 3 若 M, N 可定向, 则 $M \times N$ 可定向.

注 4 若连通的微分流形 M 是单连通的(即基本群 $\pi_1 M = 0$), 则 M 是可定向的. 这是因为, 固定一点 p , 对于任意路径 $\alpha: [0, 1] \rightarrow M, \alpha(0) = p$, 可将 $\alpha(0)$ 上的定向诱导得到 $\alpha(1)$ 上的一个定向. 而 M 是单连通的, 故 $\alpha(1)$ 上的定向与路径选取无关. 这样便诱导了整个流形的定向.

例 1.3.4 标准球面 S^n 是可定向的.

利用 S^n 球极投影, 可得球面 S^n 的一个光滑结构 $\{(X_1, \mathbb{R}^n), (X_2, \mathbb{R}^n)\}$.

$$\begin{aligned} X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{1}{1 + |x|^2}(|x|^2 - 1, 2x_1, \dots, 2x_n), \\ X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{1}{1 + |x|^2}(1 - |x|^2, 2x_1, \dots, 2x_n). \end{aligned}$$

这里 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

坐标变换为

$$X_2^{-1} \circ X_1(x) = \frac{x}{|x|^2}.$$

令 $y_i = \frac{x_i}{|x|^2}$, 则坐标变换的 Jacobi 矩阵可写成

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{n \times n} = \frac{1}{|x|^2} \left(I - \frac{2}{|x|^2} x^T \cdot x \right).$$

设 $A = I - \frac{2}{|x|^2} x^T \cdot x$, 则由于

$$A = A^T, A \cdot A^T = A^2 = I + \frac{4}{|x|^2} x^T \cdot x - \frac{4}{|x|^2} x^T \cdot x = I,$$

故 $A \in O(n)$.

又因为 S^n 是连通的, 所以或者全体 $\det A > 0$ 或者全体 $\det A < 0$. 选取特殊值, 令 $x = (1, 0, \dots, 0)$, 则 $\det A = -1 < 0$. 所以, (X_1, \mathbb{R}^n) 和 (X_2, \mathbb{R}^n) 不是定向相容的.

下面我们将通过修改其中的一个参数化, 使得它们定向相容. 选择新的坐标映射, $\tilde{X}_1: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n - \{N\}$ 和 $\tilde{X}_2: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n - \{S\}$ 如下:

$$\tilde{X}_1(x) = X_1(x),$$

$$\tilde{X}_2(x) = \frac{1}{1+|x|^2}(1-|x|^2, 2x_1, \dots, -2x_n).$$

则在新的坐标映射下, 我们有

$$\det(\tilde{X}_2^{-1} \circ \tilde{X}_1(x)) > 0.$$

所以, S^n 是可定向的. $\{(\tilde{X}_1, \mathbb{R}^n), (\tilde{X}_2, \mathbb{R}^n)\}$ 给出了 S^n 的一个定向.

例 1.3.5 定义对径映射(Antipodal map) 如下

$$\begin{aligned} A: S^n &\longrightarrow S^n \\ p &\longmapsto -p \end{aligned}$$

显然, $A^2 = \text{Id}$ 且对径映射 A 是一个微分同胚. 选取球面的一个定向坐标 $\{(\tilde{X}_1, \mathbb{R}^n), (\tilde{X}_2, \mathbb{R}^n)\}$, 可以看出, 当 n 是偶数时, A 反定向; 当 n 是奇数时, A 保定向. 事实上,

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\tilde{X}_1} S^n - \{N\} \xrightarrow{A} S^n - \{S\} \xrightarrow{\tilde{X}_2^{-1}} \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto \left(\frac{|x|^2-1}{|x|^2}, \frac{2x}{|x|^2}\right) \longmapsto \left(\frac{1-|x|^2}{|x|^2}, -\frac{2x}{|x|^2}\right) \longmapsto (-x_1, \dots, -x_{n-1}, x_n)$$

命题1.3.4 实投影空间 $\mathbb{R}P^n$ 可定向, 当且仅当它的维数 n 是奇数.

证明 \Rightarrow) 设 $\mathbb{R}P^n$ 可定向. 则覆盖映射 $\pi: S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ 诱导了 S^n 上的一个定向. 因为 $\pi \circ A = \pi$, 所以 $\pi \circ A$ 和 π 诱导的 S^n 上的定向相同. 根据上面对对径映射的讨论, 可知 n 是奇数.

\Leftarrow) 若 n 是奇数, 则对径映射 A 是保定向的. 于是, 对任意的 $p \in S^n$, $d\pi_p, d\pi_{-p}$ 给出点 $\pi(\pm p)$ 处切空间的定向是相同的. 这样, 便诱导了 $\mathbb{R}P^n$ 的一个定向(S^n 和 $\mathbb{R}P^n$ 局部微分同胚). 证毕. ■

练习 3.2 当 n 是奇数时, 试给出 $\mathbb{R}P^n$ 的一个定向相容的坐标覆盖.

例 1.3.6 微分流形 M 的切丛 TM 是可定向的微分流形.

证明 选取 M 的一个坐标系 $\{(X_\alpha, U_\alpha)\}$, 则它诱导了切丛的坐标映射

$$\begin{aligned} Y_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow TM|_{\pi^{-1}(X_\alpha(U_\alpha))} \\ (x, t) &\longmapsto (X_\alpha(x), dX_\alpha(t)) \end{aligned}$$

相应的坐标变换为

$$Y_\beta^{-1} \circ Y_\alpha(x, t) = (X_\beta^{-1} \circ X_\alpha(x), d(X_\beta^{-1} \circ X_\alpha)(t)).$$

故对应的 Jacobi 矩阵为

$$J(Y_\beta^{-1} \circ Y_\alpha) = \begin{pmatrix} J(X_\beta^{-1} \circ X_\alpha) & 0 \\ * & J(X_\beta^{-1} \circ X_\alpha) \end{pmatrix}.$$

所以, Jacobi 行列式为

$$\det(J(Y_\beta^{-1} \circ Y_\alpha)) = (\det(J(X_\beta^{-1} \circ X_\alpha)))^2 > 0.$$

因此, TM 是可定向的微分流形. 证毕. ■

§1.4 光滑向量场

定义 1.4.1 微分流形 M^n 上的向量场(vector field) X 就是指切丛 TM 的一个截面,

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\pi} & \\ TM & \xleftrightarrow{X} & M \end{array}$$

图 1.10

也就是说, 向量场 X 就是从 M 到 TM 的映射, 使得 $\pi \circ X = \text{Id}$. 如果映射 X 是光滑的, 则称向量场 X 是光滑向量场. 记 M 上所有光滑向量场的全体为 $\mathfrak{X}(M)$. 用 X_p 表示向量场 X 在 p 点的取值($X_p \in T_p M$).

对 $p \in M$ 取一个参数化 (X, U) , 设局部坐标为 (x_1, x_2, \dots, x_n) , 则向量场 X 限制在 $X(U)$ 上可表示为

$$X_p = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad p \in X(U).$$

因此, 向量场 X 是光滑的当且仅当函数 $a_i(p)$ 都是 $X(U)$ 上的光滑函数.

由于切向量可以看成作用在该点上光滑函数的算子, 我们可以将向量场看成映射 $X: \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{F}$, 其中 $\mathcal{D}(M), \mathcal{F}$ 分别表示 M 上光滑函数的全体和连续函数的全体. 于是, 对于任意的 $f \in \mathcal{D}(M)$, 函数 $X(f)$ 在参数化 (X, U) 下可表示为

$$X(f) = \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

不难看出, 向量场 X 是光滑的当且仅当 X 将 $\mathcal{D}(M)$ 映成 $\mathcal{D}(M)$. 即对任意的 $f \in \mathcal{D}(M)$, $X(f) \in \mathcal{D}(M)$.

设 $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ 是光滑映射, X 是 M^r 上的光滑向量场. 则对任意的 $f \in \mathcal{D}(M_2)$, 我们有 $d\varphi_p(X_p)(f) = X_p(f \circ \varphi)$. 事实上, 选取曲线 $\alpha(t)$, 使得 $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = X_p$. 那么,

$$d\varphi_p(X_p)(f) = d\varphi_p(\alpha'(0))(f) = \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ \alpha) \right)(f)$$

$$\begin{aligned}
&= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \varphi \circ \alpha) = \alpha'(0)(f \circ \varphi) \\
&= X_p(f \circ \varphi).
\end{aligned}$$

设 M 是 n 维微分流形. $p \in M$, 取 p 的一个参数化 (X, U) . 对任意的切向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathcal{D}(M)$, 设

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad a_i, b_j \in \mathcal{D}(U).$$

我们有

$$\begin{aligned}
X(Y(f)) &= \sum_{i,j} (a_i \frac{\partial}{\partial x_i})(b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}) \\
&= \sum_{i,j} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + a_i b_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f \right), \\
Y(X(f)) &= \sum_{i,j} \left(b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + a_i b_j \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f \right).
\end{aligned}$$

于是,

$$X(Y(f)) - Y(X(f)) = \sum_{i,j} (a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}) \frac{\partial}{\partial x_i} (f). \quad (1.3)$$

利用上式, 可以定义

定义1.4.2 李括号(Lie bracket) $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, 使得对任意的光滑向量场 X, Y 和函数 $f \in \mathcal{D}(M)$,

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

将它记为 $[X, Y](f) = (XY - YX)(f)$.

注1 $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$. 在局部上由等式 (1.3) 知,

$$[X, Y] = \sum_{i,j} (a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

而函数 a_i, b_j 是光滑的, 故 $[X, Y]$ 也是光滑的. 我们只需证明, 对 M 上的任意点 p , $[X, Y]_p \in T_p M$. 即, 验证它满足 §1.1 节注 4 的三个条件即可(留给读者作练习).

注2 $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$.

定理1.4.3 对任意的 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{D}(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$. 李括号满足以下四条性质:

- (1) $[X, Y] = -[Y, X]$;
- (2) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$;
- (3) Jacobi 恒等式: $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$;
- (4) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

证明 根据定义直接验证. ■

注 3 一般地, 在域 F 上的向量空间 V 定义的乘法 “[,]”, 如果满足定理 1.4.3 中的性质 (1)(2)(3), 则 $(V, [,])$ 称为域 F 上的李代数. 这样, $(\mathfrak{X}(M), [,])$ 是一个李代数(Lie Algebra).

例 1.4.1 n 阶实反对称矩阵的全体记为 $so(n)$, 在 $so(n)$ 上定义李括号 $[\cdot, \cdot]$ 如下,

$$[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X, \quad X, Y \in so(n).$$

则 $(so(n), [,])$ 是一个李代数.

注 4 在奇数维球面 S^{2n-1} 上可以构造一个处处非零的光滑切向量场.

注 5 在 S^3 上是不存在这样的光滑向量场 $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(S^3)$, 使得它们在 S^3 上的每一点的切空间上线性无关, 且 $[X_1, X_2] = 0$. 见参考文献 [Lim65].

问题 S^7 是否存在这样的光滑切向量场 X_1 和 X_2 , 使得它们在 S^7 上处处线性无关且 $[X_1, X_2] = 0$?

定理1.4.4 (Whitney 定理) 设 M^n 是光滑流形($n > 1$), 则 M^n 可以浸入到 \mathbb{R}^{2n-1} 中, 可以嵌入到 \mathbb{R}^{2n} 中.

问题 对于特殊的流形, 比如对于 \mathbb{RP}^n 、 \mathbb{CP}^n , 是否可以将浸入映射直接构造出来, 或将它们浸入到更低维数的欧氏空间中去?

例 1.4.2 (Hopf)

令 $f: \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是一个非退化的对称双线性映射. 也就是说, 对任意的向量 $x, y, z \in \mathbb{R}^{n+1}$, $a, b \in \mathbb{R}$, f 满足:

- (1) $f(ax + by, z) = af(x, z) + bf(y, z)$;
- (2) $f(x, y) = 0$, 当且仅当 $x = 0$ 或者 $y = 0$;
- (3) $f(x, y) = f(y, x)$.

现假定存在一个非退化的对称双线性映射 $f: \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$, 那么我们可以构造映射 $\Phi: \mathbb{RP}^n = S^n/\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\Phi(x) = f(x, x)$, $x \in S^n$. 显然, Φ 的定义是合理的.

断言 Φ 是一个单的浸入, 因而它是嵌入.

证明 1° Φ 是单射.

对任意的 $x, y \in S^n$, 若 $\Phi(x) = \Phi(y)$, 即 $f(x, x) = f(y, y)$. 需证 $x = \pm y$. 因为

$$f(x+y, x-y) = f(x, x) - f(y, y) + f(y, x) - f(x, y) = 0,$$

而 f 是非退化的, 所以 $x - y = 0$ 或 $x + y = 0$.

2° $d\Phi$ 处处是单射.

对任意的点 $x \in S^n$ 以及单位切向量 $v \in T_x S^n$, 可以构造 S^n 中的曲线 $\alpha(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, 使得

$$\alpha(t) = \cos(t) \cdot x + \sin(t) \cdot v.$$

显然该曲线满足 $\alpha(0) = x$, $\alpha'(0) = v$. 因此,

$$\begin{aligned} d\Phi_x(v) &= d\Phi_x(\alpha'(0)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(\alpha(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\alpha(t), \alpha(t)) = f(x, v) + f(v, x) \\ &= 2f(x, v) \neq 0. \end{aligned}$$

所以, $d\Phi$ 是单射. 证毕. ■

下面我们将给出满足上面条件的映射 f 的一个具体构造.

设 t 为未定元. 对任意的 $a = (a_0, \dots, a_n), b = (b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, 令

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i t^i \right) \left(\sum_{j=0}^n b_j t^j \right) = f_0 + f_1 \cdot t + \dots + f_{2n} \cdot t^{2n} \quad (1.4)$$

易证, $f = (f_0, \dots, f_{2n})$ 给出了一个非退化的对称双线性映射. 因此 \mathbb{RP}^n 可以嵌入到 \mathbb{R}^{2n+1} 中.

注 6 我们可以通过一些技术上的处理, 将上例(例 1.4.2)中的结果改进, 将 \mathbb{RP}^n 嵌入到 \mathbb{R}^{2n} 中.

事实上, 对 S^n 上的点 x , 都有 $f(x, x) \neq 0$. 构造映射 $\varphi: S^n/\mathbb{Z}_2 \rightarrow S^{2n}$, $\varphi(x) = \frac{f(x, x)}{|f(x, x)|}$. 不难证明, 这样得到的 φ 依然是一个单的浸入. 故存在点 $p \in S^{2n} - \varphi(S^n)$. 关于点 p 作球面的球极投影 $\psi: S^{2n} - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, 令 $\Phi = \psi \circ \varphi$. 这样便给出了 \mathbb{RP}^n 到 \mathbb{R}^{2n} 的一个嵌入映射.

注 7 利用复数, 仿照例 1.4.2, 我们可以将 \mathbb{RP}^{2n+1} 嵌入到 \mathbb{R}^{4n+1} 中.

问题: 是否可以利用四元数, 构造出一些嵌入映射? (由于四元数没有交换律, 故由相似的等式 (1.4) 构造出的函数是不对称的.)

定义1.4.5 (单位分解) 给定流形 M 的一个开覆盖 $\{V_\alpha\}$, 即 $M = \bigcup_\alpha V_\alpha$, V_α 是 M 上的开子集. 如果函数族 $\{f_\alpha\}$ 满足:

- (1) f_α 是 M 上的非负的光滑函数, 且 f_α 的支集 $\overline{\{p \in M | f_\alpha \neq 0\}} \subset V_\alpha$;
- (2) $\{V_\alpha\}$ 局部有限, 即对任意的 $p \in M$, 存在点 p 的一个邻域 W , 使得至多只有有限个 V_α 和 W 相交非空;
- (3) $\sum_\alpha f_\alpha = 1$.

则称 $\{f_\alpha\}$ 为开覆盖 $\{V_\alpha\}$ 的一个单位分解.

由于 $f_\alpha \geq 0$, $\overline{\{p \in M | f_\alpha \neq 0\}} \subset V_\alpha$, 且 $\{V_\alpha\}$ 局部有限. 因而, 只有有限多个函数 f_α 在点 p 不为零, 故 $\sum_\alpha f_\alpha$ 在 p 点只是有限多项的和.

例 1.4.3 设 $M = \mathbb{R}^n$, 令 $V_1 = \{x | |x| < 1\}$, $V_2 = \{x | |x| > \frac{1}{2}\}$. 显然 $M = V_1 \cup V_2$, $\{V_1, V_2\}$ 是 M 的一个局部有限的开覆盖. 记 $B_r = \{x | |x| \leq r\}$, 我们可以构造一个光滑函数 f_1 , 使得

$$f_1|_{B_{\frac{1}{2}+\epsilon}} = 1, \quad f_1|_{\mathbb{R}^n - B_{1-\epsilon}} = 0, \quad 0 \leq f_1 \leq 1.$$

令 $f_2 = 1 - f_1$. 则 $\{f_1, f_2\}$ 是 $\{V_1, V_2\}$ 的一个单位分解.

定理1.4.6 微分流形 M 的任意一个局部有限的开覆盖都有从属于它的一个单位分解.

注 8 我们可以利用单位分解定理来证明 Whitney 嵌入定理. 具体的证明, 见参考文献 [Hir76].

§1.5 李群

定义1.5.1 若集合 G 既是一个群, 又是一个微分流形, 且映射

$$\Phi: G \times G \longrightarrow G, \quad \Phi(x, y) = xy^{-1}$$

是光滑的, 则称 G 是一个李群.

设 G 是李群. 对任意的 $a \in G$, 定义左平移 $L_a: G \longrightarrow G$, 使得

$$L_a(x) = a \cdot x, \quad x \in G;$$

右平移 $R_a: G \longrightarrow G$, 使得

$$R_a(x) = x \cdot a, \quad x \in G.$$

由于 L_a, R_a 及其逆映射都是光滑的, 所以 L_a 和 R_a 都是李群 G 到自身的微分同胚.

下面介绍几个常见的李群.

例 1.5.1 \mathbb{R}^n 关于向量的加法构成一个李群.

例 1.5.2 单位圆周 $S^1 = \{e^{\sqrt{-1}\theta} | \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$, 关于复数的乘法构成一个李群.

例 1.5.3 设 G 和 H 是李群. 在乘积流形 $G \times H$ 上定义乘法如下:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2), \quad \forall a_1, a_2 \in G, b_1, b_2 \in H,$$

则

$$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1}).$$

不难验证, 在 $G \times H$ 上上述定义的乘法和取逆运算都是光滑的, 故 $G \times H$ 是李群.

特别地, 由于 S^1 是李群, 故 $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_n$ 是李群. 它是一个紧致的交换李群.

定义1.5.2 设 G 是李群, $X \in \mathfrak{X}(G)$. 若对任意的 $a \in G$ 都有

$$dL_a(X) = X,$$

更精确地说,

$$dL_a(X_b) = X_{ab}, \quad b \in G,$$

则称 X 为李群 G 上的左不变向量场.

命题1.5.3 设 G 是李群, e 是单位元. 记 \mathfrak{g} 是 G 上的左不变向量场的全体, 那么

(1) \mathfrak{g} 是一个向量空间, 且映射 $\alpha: \mathfrak{g} \rightarrow T_e G$,

$$\alpha(X) = X_e, \quad X \in \mathfrak{g},$$

给出了 \mathfrak{g} 到单位元的切空间 $T_e G$ 的一个同构. 于是, \mathfrak{g} 的维数等于李群 G 的维数.

(2) \mathfrak{g} 关于李括号是封闭的. 即对任意的 $X, Y \in \mathfrak{g}$, 都有 $[X, Y] \in \mathfrak{g}$.

证明 显然, \mathfrak{g} 是实向量空间且 α 是线性同态. α 是个单射. 这是因为, 设 $X, Y \in \mathfrak{g}$, 且 $\alpha(X) = \alpha(Y)$, 则对任意的 $x \in G$,

$$X_x = dL_x(X_e) = dL_x(Y_e) = Y_x.$$

故 $X = Y$.

另一方面, 对任意的 $v \in T_e G, x \in G$, 令 $X_x = dL_x(v)$, 因为对任意的 $a \in G$,

$$dL_a(X_x) = dL_a(dL_x(v)) = d(L_a \circ L_x)(v) = dL_{ax}(v),$$

所以 $X \in \mathfrak{g}$. 这就证明了(1).

对任意的 $f \in \mathcal{D}(G)$,

$$\begin{aligned} dL_a([X, Y])(f) &= [X, Y](f \circ L_a) = X(Y(f \circ L_a)) - Y(X(f \circ L_a)) \\ &= X(dL_a(Y)f) - Y(dL_a(X)f) = X(Yf) - Y(Xf) \\ &= [X, Y](f). \end{aligned}$$

所以李括号是封闭的. 证毕. ■

定义1.5.4 \mathfrak{g} 关于李括号 $[\cdot, \cdot]$ 构成一个李代数, 称为李群 G 的李代数. 记为 $\text{Lie } G$.

注1 根据命题 1.5.3, 我们将 G 的李代数与 $T_e G$ 等同起来. 并在 $T_e G$ 引入李括号, 定义如下,

$$[X_e, Y_e] = [X, Y]_e.$$

不难看出, 这样定义的李括号是合理的.

推论1.5.5 设 G 是一个 n 维李群, $\{X_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ 是李代数 \mathfrak{g} 的一组基, 则存在常数 C_{ij}^k , 使得

$$[X_i, X_j] = \sum_k C_{ij}^k X_k, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

称常数 C_{ij}^k 为李群 G 的结构常数.

为了引入李群的指数映射和伴随表示, 我们先回顾一下微分流形的一些概念和性质.

由于微分流形局部微分同胚于 \mathbb{R}^n , 故给定初值条件的常微分方程组的存在唯一性的定理可以自然的扩展到流形中去.

定理1.5.6 设 X 是微分流形 M 上的光滑向量场, $p \in M$. 则存在点 p 的一个邻域 $U \subset M$ 和一个光滑映射 $\varphi: (-\delta, \delta) \times U \rightarrow M$, $\delta > 0$, 使得曲线 $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$, $q \in U$, 是满足 $\varphi'_t(q) = X|_{\varphi(t, q)}$, $\varphi(0, q) = q \in U$ 的唯一的曲线.

如果曲线 $\varphi: (-\delta, \delta) \rightarrow M$ 满足: $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$, $\varphi(0) = q$, 我们称 φ 是向量场 X 的积分曲线. 令 $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$. 称 $\varphi_t: U \rightarrow M$ 是向量场 X 的局部单参数变换群(或向量场 X 的流). 上面的定理保证了积分曲线和局部单参数变换群的存在唯一性. 关于它的证明, 见 [War71].

定理1.5.7 设 M 是微分流形, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. 如果 φ_t 是 X 的一个局部单参数变换群, 则

$$[X, Y] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y - d\varphi_t(Y)}{t}.$$

更确切地说,

$$[X, Y]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_p - (d\varphi_t(Y))_p}{t}, \quad p \in M.$$

为了证明这个定理, 我们先引入两个引理.

引理1.5.8 设 $f(t, p)$ 是 $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$ 上的光滑函数, 且对任意的 $p \in M$, $f(0, p) = 0$, 则存在 $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$ 上的光滑函数 $g(t, p)$, 使得 $f(t, p) = t \cdot g(t, p)$, 且满足

$$g(0, p) = f'(0, p), \quad p \in M.$$

其中, $f' = \frac{\partial f}{\partial t}$.

证明 令

$$g(t, p) = \int_0^1 f'(ts, p) ds.$$

不难验证, 它就是所要找的函数. ■

引理1.5.9 设 φ_t 是 X 的局部单参数变换群, 则对任意的 $f \in \mathcal{D}(M)$, 都存在一个函数 $g_t(p) = g(t, p)$, 使得 $f \circ \varphi_t = f + t \cdot g_t$, 且 $g_0 = X(f)$.

证明 考察函数 $f(t, p) = f(\varphi_t(p))$, 根据引理 1.5.8, 存在函数 g_t 使得 $f \circ \varphi_t = f + t \cdot g_t$, 且

$$X_p(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_t(p)) - f(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, p) - f(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} g(t, p) = g_0(p).$$

证毕. ■

定理 1.5.7 的证明 由引理 1.5.9 知, 对任意的 $f \in \mathcal{D}(M)$, 存在函数 g_t , 使得

$$f \circ \varphi_t = f + t \cdot g_t, \quad \text{且 } g_0 = X(f).$$

因此

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_p - (d\varphi_t(Y))_p}{t}(f) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(Y_p(f) - Y_{\varphi_t^{-1}(p)}(f \circ \varphi_t) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(Y_p(f) - Y_{\varphi_t^{-1}(p)}(f) \right) - \lim_{t \rightarrow 0} Y_{\varphi_t^{-1}(p)} g_t \\ &= X_p(Yf) - Y_p(Xf) \\ &= [X, Y]_p(f). \end{aligned}$$

证毕. ■

下面设 G 是李群, 对任意的 $X \in \mathfrak{g}$, 设 $\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ 是 X 的积分曲线, 即

$$\begin{cases} \varphi(0) = e, \\ \varphi'(t) = X_{\varphi(t)}. \end{cases}$$

对任意的 $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, 令

$$\varphi_1(t) = \varphi(t - t_0), \quad |t - t_0| < \varepsilon.$$

则 $\varphi_1(t)$ 满足

$$\begin{cases} \varphi_1(t_0) = e, \\ \varphi_1'(t) = \varphi'(t - t_0) = X_{\varphi_1(t)}. \end{cases}$$

再令 $\varphi_2(t) = y^{-1}\varphi(t)$, 其中 $y = \varphi(t_0)$, 则 $\varphi_2(t)$ 满足

$$\varphi_2(t_0) = y^{-1}\varphi(t_0) = e, \quad \varphi_2'(t) = dL_{y^{-1}}\varphi'(t) = dL_{y^{-1}}dL_{\varphi(t)}X_e = X_{\varphi_2(t)}.$$

根据积分曲线的唯一性, $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. 所以,

$$\varphi(t_1 - t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)^{-1}, \quad \varphi(t)^{-1} = \varphi(-t).$$

故我们有

$$\varphi(t + s) = \varphi(t)\varphi(s).$$

这样, 我们便可将 φ 的定义域扩充到 \mathbb{R} 上, 并且保持同态性质.

定义1.5.10 设 \mathfrak{g} 是李群 G 的李代数. 对任意的 $X \in \mathfrak{g}$, 存在积分曲线 $\exp_X: \mathbb{R} \rightarrow G$, 满足

$$\exp_X(t_1 + t_2) = \exp_X(t_1)\exp_X(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

称 $\exp_X(t)$ 为 G 的单参数子群.

映射 $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$, $\exp X = \exp_X(1)$, 称为指数映射.

根据上面的讨论不难得到:

命题1.5.11 设 \mathfrak{g} 是李群 G 的李代数. 对任意的 $X \in \mathfrak{g}$, 有

- (1) 对任意的 $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tX) = \exp_X(t)$;
- (2) $\exp(-tX) = (\exp tX)^{-1}$;
- (3) 左不变向量场 X 的单参数变换群是 $R_{\exp(tX)}$.

对任意的 $a \in G$, 定义映射 $\sigma_a: G \rightarrow G$, $\sigma_a(x) = axa^{-1}$. 由于映射 σ_a 可看成 $R_{a^{-1}} \circ L_a$, 故 σ_a 是微分同胚, 且 $\sigma_a(e) = e$. 因此, $d\sigma_a|_e: T_e G \rightarrow T_e G$ 是 $T_e G$ 上的自同构. 将李代数 \mathfrak{g} 与 $T_e G$ 等同, 映射

$$\begin{aligned} \text{Ad}: G &\rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}) \\ x &\mapsto d\sigma_x|_e \end{aligned}$$

称为伴随表示(adjoint representation), 其中 $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ 是 \mathfrak{g} 的自同构群. 由于 $\text{Ad}(e) = \text{id}$, 记 $d(\text{Ad}) = \text{ad}$. 根据定义, 不难得到下列交换图

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\sigma_a} & G \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{Ad}_a} & \mathfrak{g} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{Aut}(\mathfrak{g}) \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{ad}} & \text{End}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

图 1.11

其中, $\text{End}(\mathfrak{g})$ 是 \mathfrak{g} 的自同态群.

命题1.5.12 设 G 是李群, \mathfrak{g} 是它的李代数, 则对任意的 $X, Y \in \mathfrak{g}$, 记 $\text{ad}_X Y = (\text{ad}(X))(Y)$, 有

$$\text{ad}_X Y = [X, Y].$$

证明 X 的单参数变换群是 $R_{\exp(tX)}$, 利用交换图, 得:

$$\begin{aligned} \text{ad}_X Y &= d\text{Ad}\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp(tX)\right)Y = \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(tX)}\right)Y \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} d\sigma_{\exp(tX)}Y = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} dR_{\exp(-tX)} dL_{\exp(tX)}Y \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} dR_{\exp(-tX)}Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y - dR_{\exp(tX)}Y}{t} \\ &= [X, Y]. \end{aligned}$$

证毕. ■

例 1.5.4 一般实线性群 $GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ 关于矩阵乘法是一个李群. 用 I 表示 $n \times n$ 单位矩阵, 它是李群 $GL(n, \mathbb{R})$ 的单位元. 不难看出, 它的李代数 $gl(n, \mathbb{R})$ 是 $n \times n$ 的实矩阵的全体, 不难看出, $gl(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. 下面考察李群 $GL(n, \mathbb{R})$ 的指数映射及其李代数 $gl(n, \mathbb{R})$.

对任意的 $X \in gl(n, \mathbb{R})$, 设曲线 $\exp_X(t)$ 是它的积分曲线, 则

$$\frac{d \exp_X(t)}{dt}\bigg|_{t=s} = dL_{\exp_X(s)}X = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp_X(s) \exp_X(t) = \exp_X(s)X,$$

且满足初值条件

$$\frac{d \exp_X(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = X.$$

解这个微分方程, 可得:

$$\exp_X(t) = e^{tX} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n!} t^n.$$

于是, 对任意的 $X, Y \in gl(n, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \operatorname{ad}_X Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d\sigma_{\exp tX} Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d\sigma_{\exp tX} \left(\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} e^{sY} \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} e^{tX} e^{sY} e^{-tX} \right) \\ &= XY - YX. \end{aligned}$$

根据上式, 不难得到它的结构常数.

例 1.5.5 李群 S^3 的李代数.

设 \mathbb{H} 是四元数的全体. 即 $\mathbb{H} = \{x = x_1 + x_2\mathbf{i} + x_3\mathbf{j} + x_4\mathbf{k} | x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$, 其中 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 满足

$$\mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j}\mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k}\mathbf{i} = \mathbf{j}, \mathbf{j}\mathbf{i} = -\mathbf{k}, \mathbf{k}\mathbf{j} = -\mathbf{i}, \mathbf{i}\mathbf{k} = -\mathbf{j}, \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1.$$

令 $S^3 = \{x \in \mathbb{H} | |x|^2 = \sum_{p=1}^4 x_p^2 = 1\}$, 显然它关于四元数乘法构成一个李群, 1 是它的单位元. 李代数 $\mathfrak{g} = T_1 S^3 = \operatorname{span}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. 仿照例 1.5.4 不难看出 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 所对应的积分曲线分别是:

$$\exp_{\mathbf{i}}(t) = \cos t + \mathbf{i} \sin t, \quad \exp_{\mathbf{j}}(t) = \cos t + \mathbf{j} \sin t, \quad \exp_{\mathbf{k}}(t) = \cos t + \mathbf{k} \sin t.$$

记 $\exp_{\mathbf{i}}(t) = e^{it}$, $\exp_{\mathbf{j}}(t) = e^{jt}$. 由命题 1.5.12 可得,

$$\begin{aligned} [\mathbf{i}, \mathbf{j}] &= \operatorname{ad}_{\mathbf{i}} \mathbf{j} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d\sigma_{e^{it}} \mathbf{j} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d\sigma_{e^{it}} \left(\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} e^{js} \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} e^{it} e^{js} e^{-it} \right) = \mathbf{i}\mathbf{j} - \mathbf{j}\mathbf{i} \\ &= 2\mathbf{k}. \end{aligned}$$

同样地, $[\mathbf{j}, \mathbf{k}] = 2\mathbf{i}$, $[\mathbf{k}, \mathbf{i}] = 2\mathbf{j}$.

第二章 度量

§2.1 黎曼度量

定义2.1.1 微分流形 M^n 上的一个黎曼度量(Riemannian metric) g 就是在 M 上的每一点 p 处的切空间上赋予一个内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (正定的对称双线性形式), 并且内积是光滑的. 这里的光滑是指对于 M 上的任意一个参数化 (X, U) , 函数 $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, 都是 $X(U)$ 上的光滑函数.

若在微分流形 M 上给定了一个黎曼度量 g , 则称 (M, g) 为一个黎曼流形(Riemannian manifold).

显然, 黎曼度量的光滑性不依赖于参数化的选取.

设 (M, g) 是一个黎曼流形, 对任意 $p \in M$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ 是切空间 $T_p M$ 上的一个内积. 利用这个内积, 可以定义切向量 $v \in T_p M$ 的长度

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle_p}.$$

对任意的光滑向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, 设在参数化 (X, U) 下可表示为

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

那么

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i,j} a_i b_j g_{ij}.$$

其中, $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$, 且 $(g_{ij})_{n \times n}$ 是正定的对称矩阵.

所以, 黎曼度量是光滑的, 当且仅当对于 M 上的任意光滑切向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\langle X, Y \rangle$ 是 M 上的光滑函数.

定义2.1.2 设 M_1, M_2 是黎曼流形, $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ 是光滑映射. 如果 φ 是微分同胚, 且对任意的 $X \in \mathfrak{X}(M_1)$ 都有

$$|d\varphi(X)|_{M_2} = |X|_{M_1},$$

则称 φ 为等距(isometry).

如果只是对 M_1 上的任意的点 p , 都存在点 p 的一个邻域 $U \subset M_1$, 使得 $\varphi|_U: U \rightarrow \varphi(U)$ 是等距的, 则称 φ 为局部等距(local isometry).

下面介绍几个黎曼流形的例子.

例 2.1.1 在 \mathbb{R}^n 中, 我们将坐标切向量 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 与 $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ 等同, 定义度量 $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. 显然, (\mathbb{R}^n, g) 是黎曼流形, 称为 n 维欧氏空间, 度量 g 称为 \mathbb{R}^n 上的标准度量或欧氏度量.

例 2.1.2 设 M_1 是微分流形, (M_2, g) 是黎曼流形, 且 $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ 是浸入. 定义

$$|X|_{M_1} = |d\varphi(X)|_{M_2}, \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

由于对任意的点 $p \in M_1$, $d\varphi_p$ 都是单射, 故 $|X_p|_{M_1} = 0$ 当且仅当 $X_p = 0$. 所以, “ $\langle \cdot, \cdot \rangle_{M_1}$ ” 给出了微分流形 M_1 上的一个黎曼度量, 称这个度量为由 φ 诱导的黎曼度量, 记为 φ^*g . 容易验证, 映射

$$\varphi: (M_1, \varphi^*g) \rightarrow (M_2, g)$$

是一个局部等距.

例 2.1.3 设 (M_1, g) 是 $n+k$ 维的黎曼流形, M_2 是 n 维的微分流形, $\varphi: M_1^{n+k} \rightarrow M_2^n$ 是光滑映射. 若 $q \in \varphi(M_1)$ 是 φ 的正则值, 则 $\varphi^{-1}(q)$ 是一个 k 维的微分流形, 且是 M_1 的子流形(见定理 1.3.2). 由上例可知, $\varphi^{-1}(q)$ 是一个黎曼流形, 它的度量是从 M_1 诱导的. 例如(见例 1.3.2), 对于欧氏空间 (\mathbb{R}^{n+1}, h) 上的映射

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |x|^2 - 1 \end{aligned}$$

原点 $0 \in \mathbb{R}$ 是它的正则值, 因此 $f^{-1}(0) = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是一个黎曼流形, 它的度量 $g = i^*h$ 称为 S^n 的标准度量(i 是包含映射).

另一方面, 我们可以通过球极投影得到 S^n 的一个微分结构, 给出黎曼度量 g 的局部表达式.

设 $N = (1, 0, \dots, 0)$, $S = (-1, 0, \dots, 0)$, $V_1 = S^n - \{N\}$, $V_2 = S^n - \{S\}$. 显然, $\{V_1, V_2\}$ 是 S^n 的一个开覆盖. 分别定义映射 $X: \mathbb{R}^n \rightarrow V_1$, $Y: \mathbb{R}^n \rightarrow V_2$,

$$\begin{aligned} X(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{1}{1 + |x|^2}(|x|^2 - 1, 2x_1, \dots, 2x_n), \\ Y(y_1, y_2, \dots, y_n) &= \frac{1}{1 + |y|^2}(1 - |y|^2, 2y_1, \dots, 2y_n). \end{aligned}$$

其中, $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$, $|y|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$.

可验证, $\{(X, \mathbb{R}^n), (Y, \mathbb{R}^n)\}$ 给出了球面 S^n 的一个光滑结构(见例 1.1.4).

设 S^n 在参数化 $(X, \mathbb{R}^n), (Y, \mathbb{R}^n)$ 下对应的黎曼度量分别为 g^+ , g^- . 将 \mathbb{R}^{n+1} 中的切向量 $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ 与 $e_\alpha = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ 等同, 其中 $\alpha = 0, 1, \dots, n$.

那么在参数化 (X, \mathbb{R}^n) 下,

$$\begin{aligned} dX\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \frac{\partial X}{\partial x_i} \\ &= \left(\frac{4x_i}{(|x|^2 + 1)^2}, \frac{2\delta_{1i}(|x|^2 + 1) - 4x_1x_i}{(|x|^2 + 1)^2}, \dots, \frac{2\delta_{ni}(|x|^2 + 1) - 4x_nx_i}{(|x|^2 + 1)^2} \right), \end{aligned}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, n$. 所以,

$$\begin{aligned} g_{ij}^+ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_+ = \left\langle dX\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right), dX\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \right\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \frac{16x_ix_j}{(|x|^2 + 1)^4} + \sum_{k=1}^n \frac{(2\delta_{ki}(|x|^2 + 1) - 4x_kx_i)(2\delta_{kj}(|x|^2 + 1) - 4x_kx_j)}{(|x|^2 + 1)^4} \\ &= \frac{4\delta_{ij}}{(|x|^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

同样地, 我们有

$$g_{ij}^- = \frac{4\delta_{ij}}{(|y|^2 + 1)^2}.$$

而 $y = \frac{x}{|x|^2}$, 直接计算可知, 在 $S^n - \{N, S\}$ 上 $g^+ = g^-$. 从而 g^+ 和 g^- 给出了 S^n 上的一个黎曼度量, 它恰是 S^n 上的标准度量.

例 2.1.4 李群的双不变度量.

设 G 是李群, e 是单位元, \mathfrak{g} 是它的李代数. 如果存在 G 上的黎曼度量 g 满足:

$$|u| = |dL_a(u)|, \quad u \in T_eG, a \in G$$

则称 g 是李群 G 的左不变度量. 同样地, 我们可以定义右不变度量. 如果度量 g 既是左不变度量, 也是右不变度量, 则称 g 是双不变度量.

可以看出, 度量 g 是双不变度量, 当且仅当对任意的 $a \in G$, $\text{Ad}(a)$ 是 T_eG 上的等距同构. 事实上, 度量 g 是双不变度量, 当且仅当对任意的 $u \in T_eG$, $a \in G$, $|dL_a(u)| = |dR_a(u)|$. 即 $|\text{Ad}(a)(u)| = |u|$.

由 Weyl 定理我们知道: 在任意的紧李群上都存在一个双不变度量(bi-invariant metric).

如果李群 G 上存在一个双不变度量 g , 则对任意的 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, 下列等式成立.

$$\langle X, [Y, Z] \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle.$$

这个等式不难证明(留给读者作练习). 下面举个例子对上式加以说明.

设 I 是 n 阶单位矩阵, 对于紧李群

$$SO(n) = \{A_{n \times n} \mid AA^T = I, \det A = 1\},$$

它的李代数 $so(n) = \{X_{n \times n} \mid X + X^T = 0\}$. 事实上, 若 $X \in so(n)$, 则存在 $SO(n)$ 上的曲线 $\alpha(t)$, 使得 $\alpha(0) = I, \alpha'(0) = X$. 由于 $\alpha(t)(\alpha(t))^T = I$,

两边求导, 即得: $X + X^T = 0$. 反之, 任意的反对称 n 阶矩阵 X 也可看成在单位元 I 处的切向量.

定义李群 $SO(n)$ 上的一个度量 g 如下,

$$\langle X, Y \rangle = \text{Tr}(XY^T), \quad X, Y \in so(n).$$

容易验证, 它是 $SO(n)$ 上的双不变度量. 对任意的 $X, Y, Z \in so(n)$,

$$\begin{aligned} \langle X, [Y, Z] \rangle &= \langle X, YZ - ZY \rangle = \text{Tr}(X(YZ - ZY)^T) \\ &= \text{Tr}(XZ^TY^T - XY^TZ^T), \\ \langle [X, Y], Z \rangle &= \langle XY - YX, Z \rangle = \text{Tr}((XY - YX)Z^T) \\ &= \text{Tr}(-XY^TZ^T + XZ^TY^T). \end{aligned}$$

于是, $\langle X, [Y, Z] \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle$.

例 2.1.5 乘积度量.

设 $(M_1, g_1), (M_2, g_2)$ 是黎曼流形, π_1, π_2 分别是 $M_1 \times M_2$ 到 M_1 和 M_2 的投影映射. 首先, $M_1 \times M_2$ 是微分流形. 下面给出乘积流形 $M_1 \times M_2$ 上的一个度量.

对任意的 $X \in \mathfrak{X}(M_1 \times M_2)$, 定义度量 g 使得

$$|X|^2 = |\text{d}\pi_1(X)|_{M_1}^2 + |\text{d}\pi_2(X)|_{M_2}^2.$$

不难证明, 它是 $M_1 \times M_2$ 上的黎曼度量. 我们称这个度量 g 为 g_1 和 g_2 的乘积度量(product metric).

特别地, S^1 是黎曼流形(取标准度量). 于是 n 个 S^1 的乘积流形

$$T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_n$$

关于乘积度量是一个 n 维的黎曼流形, 称为 n 维平坦环面(flat torus).

例 2.1.6 S^n 取标准度量 g , 设 A 是 S^n 的对径映射, 即对任意的 $p \in S^n$, $A(p) = -p$. 易知, A 是等距的微分同胚.

利用对径映射, 我们可以在 \mathbb{RP}^n 上引入一个黎曼度量 h .

设 $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ 是商映射. 对 \mathbb{RP}^n 上的任意一点 q 处的任意一个切向量 v , 存在 $p \in S^n, u \in T_p S^n$, 使得 $\pi(p) = q, \text{d}\pi_p(u) = v$. 定义 \mathbb{RP}^n 上的度量 h 如下

$$|v|_{\mathbb{RP}^n} = |u|_{S^n},$$

则 (\mathbb{RP}^n, h) 是一个黎曼流形. 事实上, 由于 S^n 和 \mathbb{RP}^n 是局部微分同胚的, 故只需说明 h 的定义合理即可. 因为 $\pi^{-1}(p) = \{q, -q\}$, 不妨设 $\tilde{u} \in T_{-p} S^n$, $\text{d}\pi_{-p}(\tilde{u}) = v$. 由于 $\pi \circ A = \pi$, 故 $\text{d}A_p(u) = \tilde{u}$. 又因为 A 是等距的微分同胚, 所以 $|u|_{S^n} = |\tilde{u}|_{S^n}$. 即定义是合理的.

这样, π 便诱导了 (S^n, g) 到 (\mathbb{RP}^n, h) 的一个局部等距, 即 $g = \pi^* h$.

下面的定理说明了黎曼度量的存在性.

定理2.1.3 任何一个光滑流形上必有黎曼度量.

证明 设 $\{(X_\alpha, U_\alpha)\}$ 是微分流形 M 上的一个局部有限的坐标覆盖. 令 $V_\alpha = X_\alpha(U_\alpha)$, 选取一个从属于它的单位分解 $\{f_\alpha\}$, 即

$$f_\alpha \geq 0, \quad \overline{\{f_\alpha \neq 0\}} \subset V_\alpha, \quad \sum_\alpha f_\alpha = 1.$$

在每一个开集 V_α 上定义黎曼度量 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ 为 X_α^{-1} 的诱导度量 (U_α 取标准欧氏度量). 那么, 对任意的切向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, 令

$$\langle X, Y \rangle = \sum_\alpha f_\alpha \langle X, Y \rangle_\alpha.$$

不难验证, “ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ” 是 M 上的一个黎曼度量. 证毕. ■

§2.2 度量形式与体积

定义2.2.1 设曲线 $c: [a, b] \rightarrow M$ 是黎曼流形 (M, g) 上的光滑曲线. 则对 $a \leq t \leq b$, 曲线 c 在参数段 $[a, t]$ 的弧长定义为

$$s(t) = \int_a^t |c'(u)| \, du.$$

在局部上, 取黎曼流形 (M, g) 上的一个参数化 (X, U) , 则曲线 c 在这个参数化下可表示为¹

$$c(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

故曲线在 $c(t)$ 处的切向量为

$$c'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t)) = \sum_i x'_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

由 $ds = |c'(t)| \, dt$ 知,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{i,j} x'_i(t) x'_j(t) g_{ij} = \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} g_{ij}.$$

这样, 在形式上我们便得到一个二次微分式(并非外微分形式)

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} \, dx_i \, dx_j. \quad (2.1)$$

¹这里将 $X^{-1} \circ c(t)$ 中的 X^{-1} 省略

它与参数化 (X, U) 的选取无关, 称为黎曼流形 M 上的度量形式(有时也称为黎曼度量).

若 (M_1, g) 和 (M_2, h) 分别是 n 维和 m 维黎曼流形, 则浸入 $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ 是局部等距的当且仅当 $ds_{M_1}^2 = \varphi^* ds_{M_2}^2$.

事实上, 分别选取 M_1, M_2 上的一个参数化 (X, U) 和 (Y, V) , 使得 $\varphi(X(U)) \subset Y(V)$. 那么

$$\varphi^* ds_{M_2}^2 = \sum_{i,j} h_{ij} d\varphi_i d\varphi_j = \sum_{i,j,\alpha,\beta} h_{ij} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\beta} dx_\alpha dx_\beta.$$

其中, φ_i 是 φ 在参数化 (Y, V) 下的第 i 个分量, $1 \leq i, j \leq m, 1 \leq \alpha, \beta \leq n$. 故 φ 是局部等距的当且仅当

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{i,j} h_{ij} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_\beta}.$$

例 2.2.1 Lobatchevski 上半平面(Lobatchevski upper half-plane)

令 $H = \{(x, y) | y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ 是 \mathbb{R}^2 的上半平面. 对 H 上的任一点 $p = (x, y)$ 处的切向量 $u, v \in T_p H = \mathbb{R}^2$, 定义

$$\langle u, v \rangle = \frac{\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^2}}{y^2}.$$

显然, 定义是合理的. 称这个度量为 H 上的 Lobatchevski 非欧几何度量. 特别地, 对任意点处的坐标切向量 $\frac{\partial}{\partial x} = (1, 0)$, $\frac{\partial}{\partial y} = (0, 1)$, 有

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}, \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

因此, 度量形式为

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

将平面 \mathbb{R}^2 视为复平面 \mathbb{C} . 设 $z = x + \sqrt{-1}y$, 则

$$dz = dx + \sqrt{-1}dy, \quad d\bar{z} = dx - \sqrt{-1}dy.$$

故

$$dz d\bar{z} = dx^2 + dy^2, \quad z - \bar{z} = 2\sqrt{-1}y.$$

所以, 度量形式又可简单地记为

$$ds^2 = -\frac{4 dz d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2}.$$

注 1 我们知道, 若曲面的度量形式 $ds^2 = E dx^2 + G dy^2$, 则它的 Gauss 曲率

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_y}{\sqrt{EG}} \right)_y + \left(\frac{G_x}{\sqrt{EG}} \right)_x \right\}. \quad (2.2)$$

利用等式 (2.2) 可得, Lobatchevski 上半平面的高斯曲率 $K \equiv -1$.

定理(Hilbert) \mathbb{R}^3 中不存在具有常负高斯曲率的完备曲面.

换句话说, 不存在 H 在欧氏空间 \mathbb{R}^3 中的等距浸入. 关于 Hilbert 定理的证明, 见参考文献 [dC76].

一个自然的问题是, Lobatchevski 上半平面是否可以等距嵌入(浸入)到较高维数($n \geq 4$)的欧氏空间之中?

定理(Rosendorn) Lobatchevski 上半平面 H 可以等距浸入到欧氏空间 \mathbb{R}^5 中. 见参考文献 [Gro86].

问题 Lobatchevski 上半平面 H 是否可以等距嵌入(浸入)到欧氏空间 \mathbb{R}^4 中?

例 2.2.2 令矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, 且 $\det A = 1$.

定义映射 $f_A: H \rightarrow H$ 如下

$$f_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \in H.$$

不难验证, f_A 是一个微分同胚. 又因为 f_A 是解析的, 故

$$\begin{aligned} df_A &= \frac{df_A}{dz} dz = \frac{dz}{(cz+d)^2}, \quad d\overline{f_A} = \frac{d\overline{f_A}}{d\overline{z}} d\overline{z} = \frac{d\overline{z}}{(c\overline{z}+d)^2}, \\ f_A - \overline{f_A} &= \frac{z - \overline{z}}{|cz+d|^2}. \end{aligned}$$

这些等式给出了

$$f_A^* ds^2 = -\frac{4 df_A d\overline{f_A}}{(f_A - \overline{f_A})^2} = -\frac{4 dz d\overline{z}}{(z - \overline{z})^2} = ds^2.$$

所以, f_A 是等距的微分同胚.

例 2.2.3 Poincaré 圆盘(Poincaré disk).

Poincaré 圆盘 $D = \{(a, b) | a^2 + b^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$. 对 D 上的任一点 $p = (a, b)$ 处的切向量 $u, v \in T_p D$, 定义 D 上的黎曼度量为

$$\langle u, v \rangle = \frac{4 \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^2}}{(1 - (a^2 + b^2))^2}.$$

所以

$$g_{11} = g_{22} = \frac{4}{(1 - (a^2 + b^2))^2}, \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

令 $w = a + \sqrt{-1}b$, 则在复坐标 w 下度量形式又可写成

$$ds^2 = \frac{4(da^2 + db^2)}{(1 - (a^2 + b^2))^2} = \frac{4dw d\bar{w}}{(1 - |w|^2)^2}.$$

注 2 事实上, Lobatchevski 上半平面和 Poincaré 圆盘是等距的. 它们都有高维的推广.

定义映射 $\varphi: H \rightarrow D$ 如下

$$\varphi(z) = \frac{z - \sqrt{-1}}{z + \sqrt{-1}}.$$

不难证明, φ 是微分同胚. 又由于 φ 是解析的, 故

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dz} dz = \frac{2\sqrt{-1}dz}{(z + \sqrt{-1})^2}, \quad d\bar{\varphi} = \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{z}} d\bar{z} = -\frac{2\sqrt{-1}d\bar{z}}{(\bar{z} - \sqrt{-1})^2}.$$

于是,

$$\varphi^* ds_D^2 = \frac{4d\varphi d\bar{\varphi}}{(1 - |\varphi|^2)^2} = -\frac{4dz d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2} = ds_H^2.$$

所以, 映射 φ 是等距的微分同胚.

例 2.2.4 映射

$$\begin{aligned} \phi: S^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x^2 - y^2}{2}, xy, yz, zx\right) \end{aligned}$$

是一个浸入(见例 1.2.4). \mathbb{R}^4 取标准度量 $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$, 那么 ϕ 诱导了 S^2 上的一个黎曼度量(见例 2.1.2)

$$\begin{aligned} \phi^* ds^2 &= d\phi_1^2 + d\phi_2^2 + d\phi_3^2 + d\phi_4^2 \\ &= (x dx - y dy)^2 + (y dx + x dy)^2 \\ &\quad + (z dy + y dz)^2 + (z dx + x dz)^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + (x^2 + y^2 - 2z^2) dz^2. \end{aligned}$$

再利用球极投影, 我们便可得到 $\phi^* ds^2$ 的一个局部表示(留给读者作练习).

例 2.2.5 $0 < t_0 < 1$, 对于 Poincaré 圆盘 D 上的曲线 $c: [0, t_0) \rightarrow D$,

$$c(t) = (t, 0), \quad t \in [0, t_0).$$

易知, $c'(t) = (1, 0)$. 故利用 Poincaré 度量,

$$|c'(t)| = \frac{2}{1 - t^2}.$$

所以曲线 c 的长度

$$s(t_0) = \int_0^{t_0} |c'(t)| dt = \int_0^{t_0} \frac{2 dt}{1-t^2} = \ln\left(\frac{1+t_0}{1-t_0}\right).$$

注意到, 当 $t_0 \rightarrow 1$ 时, 曲线 c 的长度 $s(t_0) \rightarrow +\infty$.

设 (M, ds^2) 是 n 维定向黎曼流形, $\{e_i \mid e_i \in T_p M, i = 1, 2, \dots, n\}$ 是 M 上的点 p 处切空间 $T_p M$ 上的一组与给定定向相容的单位正交基, 定义体积 $\text{Vol}(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$. 取点 p 的一个与给定定向相容的参数化 (X, U) , 设 $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p = \sum_j a_{ij} e_j$, 则

$$\begin{aligned} \text{Vol} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p \right) &= \det(a_{ij}) \cdot \text{Vol}(e_1, e_2, \dots, e_n) \\ &= \det(a_{ij}) > 0. \end{aligned}$$

另一方面,

$$g_{ij}(p) = \left\langle \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \right\rangle = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} \langle e_k, e_l \rangle = \sum_k a_{ik} a_{jk},$$

故 $\det(a_{ij}) = \sqrt{\det(g_{ij})}$. 所以,

$$\text{Vol} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p \right) = \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

对点 p 的另一个定向相容的参数化 (Y, V) , 设 $h_{ij} = \left\langle \left. \frac{\partial}{\partial y_i} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_p \right\rangle$, 则

$$\begin{aligned} \sqrt{\det(g_{ij})} &= \text{Vol} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p \right) \\ &= J \text{Vol} \left(\left. \frac{\partial}{\partial y_1} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial y_2} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial y_n} \right|_p \right) \\ &= J \sqrt{\det(h_{ij})}. \end{aligned}$$

其中, Jacobi 行列式 $J = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) > 0$.

定义2.2.2 设 R 是 n 维定向黎曼流形 M 上的一个连通的开区域, 且 \bar{R} 是紧致的. 如果对 M 上的一个与定向相容的参数化 (X, U) , 有 $R \subset X(U)$. 则区域 R 的体积为

$$\text{Vol}(R) = \int_{X^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} \, dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

根据上面的讨论, 显然定义与参数化 (X, U) 的选取无关.

注 3 一般地, 对于区域 $R \subset M$ (\bar{R} 是紧致的), 如果 $\{(X_i, U_i)\}$ 是 R 上的一个与给定定向相容的局部有限坐标覆盖, 且 $\{f_i\}$ 是从属于它的一个单位分解, 令 $R_i = R \cap X_i(U_i)$, 则区域 R 的体积可定义为

$$\text{Vol}(R) = \sum_i \int_{X_i^{-1}(R_i)} f_i \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \cdots dx_n.$$

注 4 事实上, 可以定义不可定向黎曼流形上的区域的体积. 需要强调的是, 在没有引入度量的微分流形 M^n 上, n 次微分形式是可以定义积分的, 但需要流形可定向. 然而函数在流形上是无法定义积分的, 除非引入度量. 黎曼流形的体积就是常值函数 1 的积分.

例 2.2.6 计算标准球面 S^2 的体积(即表面积).

1° 利用对称性, 只需计算上半球面的体积即可. 令

$$D^2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\},$$

取上半球面的一个参数化 (X, D^2) , 定义如下

$$X(x, y) = \left(x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \right), \quad (x, y) \in D^2.$$

则

$$\begin{aligned} dX\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) &= \frac{\partial X}{\partial x} = \left(1, 0, -\frac{x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}\right), \\ dX\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) &= \frac{\partial X}{\partial y} = \left(0, 1, -\frac{y}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}}\right). \end{aligned}$$

所以,

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \left\langle dX\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), dX\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = 1 + \frac{x^2}{1 - (x^2 + y^2)}.$$

同理, 可得:

$$g_{12} = g_{21} = \frac{xy}{1 - (x^2 + y^2)}, \quad g_{22} = 1 + \frac{y^2}{1 - (x^2 + y^2)}.$$

故 $\det(g_{ij}) = \frac{1}{1 - (x^2 + y^2)}$. 所以,

$$\text{Vol}(S^2) = 2 \int_{D^2} \frac{dx dy}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}} = 4\pi.$$

2° 取球面 S^2 的参数化 (X, U) ,

$$X(\theta, \varphi) = (\cos \theta, \sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi).$$

其中 $(\theta, \varphi) \in U = \{(\theta, \varphi) | 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$. 则

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= (d \cos \theta)^2 + (d(\sin \theta \cos \varphi))^2 + (d(\sin \theta \sin \varphi))^2 \\ &= d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \end{aligned}$$

所以 $\sqrt{\det(g_{ij})} = \sin \theta$. 于是, S^2 的体积为

$$\text{Vol}(S^2) = \int_U \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi.$$

3° 利用球极投影(例 2.1.3), 有

$$g_{ij} = \frac{4\delta_{ij}}{(|x|^2 + 1)^2}, \quad \sqrt{\det(g_{ij})} = \frac{4}{(|x|^2 + 1)^2}.$$

所以,

$$\text{Vol}(S^2) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{4 dx_1 dx_2}{(|x|^2 + 1)^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{4r dr}{(r^2 + 1)^2} = 4\pi.$$

练习 2.1 试证明 S^n 的体积为

$$\text{Vol}(S^n) = \begin{cases} \frac{2^{m+1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m-1)} \pi^m, & \text{如果 } n = 2m, m \geq 1; \\ \frac{2}{m!} \pi^{m+1}, & \text{如果 } n = 2m + 1, m \geq 0. \end{cases}$$

练习 2.2 试计算 Poincaré 圆盘 D 上的区域

$$D_r = \left\{ (x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < r \right\}, \quad 0 < r < 1$$

的体积.

第三章 联络

联络是微分几何中一个重要的概念. 在古典微分几何中, 为了更方便地处理曲率, Levi-Civita 于1917 年引入了曲面上切向量的平行移动. 现已推广到底空间是微分流形的纤维丛上. 这里我们只讨论微分流形的切丛上的联络. 事实上, 联络、平行移动和共变导数三者之间是相互决定的.

§3.1 仿射联络

定义3.1.1 设 M 是 n 维微分流形, M 上的仿射联络(affine connection)是一个映射

$$\begin{aligned} \nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

使得对任意的 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ 和任意的 $f, g \in \mathscr{D}(M)$, 满足:

- (1) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;
- (2) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;
- (3) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

由定义知, ∇ 是双(实)线性的. 设 (X, U) 是点 $p \in M$ 的一个参数化. 我们定义:

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k.$$

其中, $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. 函数 Γ_{ij}^k 称为仿射联络系数, 它完全决定了一个仿射联络.

对任意的向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, 设 $X = \sum_i f_i X_i$, $Y = \sum_j g_j X_j$, 则

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_i \left(f_i \nabla_{X_i} \left(\sum_j g_j X_j \right) \right) = \sum_{i,j} (f_i g_j \nabla_{X_i} X_j + f_i X_i(g_j) X_j) \\ &= \sum_k \left(\sum_{i,j} f_i g_j \Gamma_{ij}^k + X(g_k) \right) X_k. \end{aligned}$$

于是, $(\nabla_X Y)_p = \sum_k \left(\sum_{i,j} f_i(p) g_j(p) \Gamma_{ij}^k(p) + X_p(g_k) \right) X_k|_p$. 也就是说, 切向量场 $\nabla_X Y$ 在点 p 处的取值只依赖于 X_p 以及以 X_p 为初始切向量的某一曲线 $\alpha(t)$ 上的 Y 的分布 $Y_{\alpha(t)}$.

定义3.1.2 设 $c: I \rightarrow M$ 是微分流形 M 上的一条光滑曲线. 若对任意的 $t \in I$, 都对应一个切向量 $V(t) \in T_{c(t)}M$, 则称 V 是沿着曲线 c 的向量场. 如果对任意的 $f \in \mathcal{D}(M)$, I 上的函数 $V(t)(f)$ 都是光滑函数, 则称 V 是光滑的.

注1 沿着曲线的向量场不一定能扩充到曲线的某个邻域上的向量场. 例如, 曲线 $c: \mathbb{R} \rightarrow T^2$, $c(t) = (t, \varepsilon t)$, 其中 ε 是无理数. 不难看出, 沿着曲线 c 的向量场不一定能扩充到 T^2 上.

命题3.1.3 设 ∇ 是微分流形 M 上的一个仿射联络, 如果对任意沿着光滑曲线 $c: I \rightarrow M$ 的向量场 V 都唯一对应一个沿着曲线 c 的向量场 $\frac{DV}{dt}$, 使得对任意沿着曲线 c 的向量场 V, W 和 $f \in \mathcal{D}(M)$, 满足

- (1) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$;
- (2) $\frac{D}{dt}(fV) = f \frac{DV}{dt} + \frac{df(c(t))}{dt} V$;
- (3) 如果 $Y \in \mathfrak{X}(M)$, 令 $V(t) = Y_{c(t)}$, 则 $\nabla_{c'(t)} Y = \frac{D}{dt} V$.

则称 $\frac{DV}{dt}$ 为沿着曲线 c 的向量场 V 的共变导数(covariant derivative).

证明 唯一性.

在局部上, 取 M 的一个参数化 (X, U) , 则曲线 $c: I \rightarrow M$ 在这个参数化可写成

$$c(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

记 $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. 则 $c'(t) = \sum_i x'_i(t) X_i$.

设沿着曲线 c 的向量场 $V(t) = \sum_j v_j(t) X_j$. 那么

$$\frac{DV}{dt} = \frac{D}{dt} \left(\sum_j v_j(t) X_j \right) = \sum_j \frac{D}{dt} (v_j(t) X_j) \quad \text{根据条件(1)}$$

$$= \sum_j \left(v_j(t) \frac{D}{dt} X_j + \frac{dv_j(t)}{dt} X_j \right) \quad \text{根据条件(2)}$$

$$= \sum_j \left(v_j(t) \nabla_{c'(t)} X_j + \frac{dv_j(t)}{dt} X_j \right) \quad \text{根据条件(3)}$$

$$= \sum_{i,j} \left(v_j(t) x'_i(t) \nabla_{X_i} X_j + \frac{dv_j(t)}{dt} X_j \right). \quad (*)$$

因此, $\frac{DV}{dt}$ 由仿射联络唯一决定.
存在性. 利用 (*), 定义

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{i,j} (v_j(t)x'_i(t)\nabla_{X_i}X_j + \frac{dv_j(t)}{dt}X_j).$$

不难验证它满足命题 3.1.3 的三个条件. 证毕. ■

定义3.1.4 设 ∇ 是微分流形 M 上的一个仿射联络, V 是沿着曲线 $c: I \rightarrow M$ 的向量场. 如果 V 的共变导数 $\frac{DV}{dt} \equiv 0$, 则称 V 是平行的.

命题3.1.5 设 $c: I \rightarrow M$ 是微分流形 M 上的一条光滑曲线. 给定切向量 $v_0 \in T_{c(t_0)}M$, 其中 $t_0 \in I$, 则存在唯一的一个沿着曲线 c 的向量场 V , 使得 $V(t_0) = v_0$, $\frac{DV}{dt} \equiv 0$. 称 $V(t)$ 是切向量 v_0 沿着曲线 c 的平行移动(parallel transport).

证明 假设当 $c(I)$ 包含在某个坐标邻域内时, 命题成立. 则对任意的 $t_1 \in I$ (不妨设 $t_1 > t_0$), $c([t_0, t_1])$ 是紧致的, 故存在有限多个坐标邻域覆盖 $c([t_0, t_1])$. 由假设知, V 在每个坐标邻域内存在. 根据唯一性, 当两个坐标邻域的交非空时, 所决定的向量场是一致的. 故存在唯一的一个沿着曲线 $[t_0, t_1] \rightarrow M$ 的向量场. 所以, 只需证明假设成立即可.

取点 $c(t_0)$ 的一个参数化 (X, U) , 使得 $c(I) \subset X(U)$. 在这个参数化下, 曲线可写成

$$c(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

令 $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, 则 $c'(t) = \sum_i x'_i(t)X_i$. 由于 $v_0 \in T_{c(t_0)}M$, 所以

$$v_0 = \sum_j v_0^j X_j|_{c(t_0)}, \quad v_0^j \in \mathbb{R}.$$

设沿着曲线 c 的向量场 $V(t) = \sum_j v^j(t) X_j|_{c(t)}$. 则

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left(\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} (v^j x'_i(t) \Gamma_{ij}^k) \right) X_k.$$

所以, $\frac{DV}{dt} \equiv 0$ 等价于微分方程组

$$\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} (\Gamma_{ij}^k x'_i(t) v^j) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

给定初始条件 $v(t_0) = v_0$, 即 $v^j(t_0) = v_0^j$, $j = 1, 2, \dots, n$.

根据常微分方程理论知, V 存在且是唯一的. 证毕. ■

注 2 设 ∇ 是微分流形 M 上的仿射联络, p, q 是 M 中的两个点, c 是连接 p 和 q 的任意一条光滑曲线, 则沿着曲线 c 的平行移动便给出了一个线性同构 $P^c: T_p M \rightarrow T_q M$, 且 P^c 由 ∇ 唯一决定.

对于给定的曲线 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$, 我们用 $P_{t_0}^{t_1}$ 表示沿曲线 γ 从点 $\gamma(t_0)$ 到点 $\gamma(t_1)$ 的平移同构, 即 $P_{t_0}^{t_1}: T_{\gamma(t_0)} M \rightarrow T_{\gamma(t_1)} M$, $t_0, t_1 \in [a, b]$.

例 3.1.1 若对任意点 $p \in M$, 常值映射 $c: I \rightarrow M$, $c(t) = p$, 显然它是 M 上一条光滑曲线.

设 V 是沿着曲线 c 的向量场, 也就是对任意的 $t \in I$, $V(t) \in T_p M$. 由于对任意的 $t \in I$, $c(t) = p$, 故 $c'(t) \equiv 0$.

令 $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, 设 $V(t) = \sum_i v^i(t) X_i|_p = \sum_i v^i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \in T_p M$. 由于 $c'(t) \equiv 0$, 故沿曲线 c 的向量场 V 共变导数为

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \left(v^j(t) \frac{D}{dt} X_j(t) + \frac{dv^j(t)}{dt} X_j(t) \right) = \sum_j \frac{dv^j(t)}{dt} X_j(t) = \frac{d}{dt} V.$$

也就是说, 沿曲线 c 的向量场 V 共变导数实际上就是它在向量空间 $T_p M$ 上的普通导数.

引理 3.1.6 给定微分流形 M 上的点 p 和切向量场 X, Y , 设 $c: I \rightarrow M$ 是一条光滑曲线, 使得 $c(0) = p$, $c'(t) = X|_{c(t)}$. 则

$$(\nabla_X Y)_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (P_0^t)^{-1} (Y(c(t))). \quad (3.2)$$

证明 选取切空间 $T_p M$ 的一组标准正交基 $\{e_i\}$, 令 $e_i(t) = P_0^t(e_i)$, 则 $e_i(t)$ 是切空间 $T_{c(t)} M$ 的一组基.

设 $Y(c(t)) = \sum_i y^i(t) e_i(t)$, 那么

$$(\nabla_X Y)_p = \nabla_{c'(0)} Y = \frac{D}{dt} \Big|_{t=0} Y(c(t)) = \frac{dy^i(t)}{dt} \Big|_{t=0} e_i.$$

另一方面, 由于 $(P_0^t)^{-1}(e_i(t)) = e_i$, 故

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (P_0^t)^{-1} (Y(c(t))) = \frac{dy^i(t)}{dt} \Big|_{t=0} e_i = (\nabla_X Y)_p.$$

证毕. ■

所以, 联络、平行移动和共变导数三者之间是相互决定的.

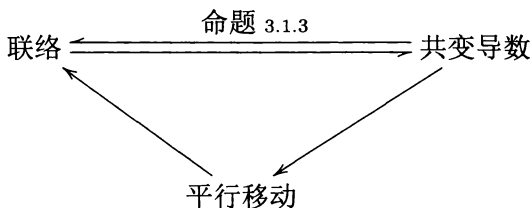


图 3.1

§3.2 Levi-Civita 联络

定义3.2.1 设 ∇ 是黎曼流形 (M, g) 上的仿射联络. 如果对任意的曲线 $c: I \rightarrow M$ 以及沿着曲线 c 的任何平行向量场 V 和 W , 都有 $\langle V_t, W_t \rangle \equiv \text{const.}$ 也就是说, 线性同构 $P_{t_0}^{t_1}: T_{c(t_0)}M \rightarrow T_{c(t_1)}M$ 是等距的, 则称联络 ∇ 与黎曼度量 g 相适应.

命题3.2.2 设 M 是黎曼流形. 则仿射联络 ∇ 与度量相适应, 当且仅当对任意沿曲线 $c: I \rightarrow M$ 的向量场 V 和 W 都有

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle.$$

证明 \Leftarrow) 设 V 和 W 是沿着曲线 c 的平行向量场, 则 $\frac{DV}{dt} = \frac{DW}{dt} = 0$. 所以

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = 0.$$

即 $\langle V, W \rangle \equiv \text{const.}$

\Rightarrow) 在切空间 $T_{c(t_0)}M$ 上选取一组正交基底 $\{e_i \in T_{c(t_0)}M\}$. 对任意 $t \in I$, 将切向量 e_i 沿曲线 c 平行移动到 $T_{c(t)}M$ 上, 记 $e_i(t) = P_{t_0}^t(e_i)$, 则 $\{e_i(t)\}$ 是 $T_{c(t)}M$ 上的一组正交基底, 且 $\langle e_i(t), e_j(t) \rangle = \delta_{ij}$. 设

$$V(t) = \sum_i v^i(t) e_i(t), \quad W(t) = \sum_j w^j(t) e_j(t),$$

则

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \frac{d}{dt} \sum_i v^i(t) w^i(t) = \sum_i \left(\frac{dv^i(t)}{dt} w^i(t) + v^i(t) \frac{dw^i(t)}{dt} \right).$$

另一方面,

$$\frac{DV}{dt} = \frac{D}{dt} \left(\sum_i v^i(t) e_i(t) \right) = \sum_i v^i(t) \frac{D}{dt} e_i(t) + \frac{dv^i(t)}{dt} e_i(t)$$

$$= \sum_i \frac{dv^i(t)}{dt} e_i(t),$$

同样地,

$$\frac{DW}{dt} = \sum_j \frac{dw^j(t)}{dt} e_j(t).$$

所以,

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle.$$

证毕. ■

推论3.2.3 设 M 是黎曼流形. 则仿射联络 ∇ 与度量相适应, 当且仅当对任意的切向量场 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, 都有

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

证明 \Leftarrow) 根据命题 3.2.2, 结论是成立的.

\Rightarrow) 对任意的点 $p \in M$, 选取曲线 $c: I \rightarrow M$, 使得 $c(0) = p, c'(0) = X_p$, 则根据命题 3.2.2,

$$\begin{aligned} X_p \langle Y, Z \rangle &= c'(0) \langle Y, Z \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle Y, Z \rangle_{c(t)} \\ &= \left\langle \frac{D}{dt} Y, Z \right\rangle_p + \left\langle Y, \frac{D}{dt} Z \right\rangle_p \\ &= \langle \nabla_{X_p} Y, Z_p \rangle + \langle Y_p, \nabla_{X_p} Z \rangle. \end{aligned}$$

证毕. ■

定义3.2.4 设 ∇ 是黎曼流形 M 上的仿射联络. 如果对任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, 都有

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

则称联络 ∇ 是对称的(symmetric)或无挠的(torsion free).

事实上, 我们可以定义映射 $\tau: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ 如下

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

称 τ 为仿射联络 ∇ 的挠张量. 这样, 联络 ∇ 是无挠的当且仅当挠张量 $\tau \equiv 0$.

对任意的 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ 及 $f \in \mathcal{D}(M)$, 根据仿射联络和李括号的性质, 不难得到

$$(1) \quad \tau(X, Y) = -\tau(Y, X);$$

$$(2) \quad \tau(X + Y, Z) = \tau(X, Z) + \tau(Y, Z);$$

$$(3) \quad \tau(fX, Y) = f\tau(X, Y).$$

换句话说, τ 是一个反称张量.

在局部上, 取 M 的一个参数化 (X, U) , 由于 $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$, 故

$$\tau(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \sum_k (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

所以, 联络 ∇ 是无挠的当且仅当 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

定义3.2.5 设 (M, g) 是黎曼流形. 仿射联络 ∇ 称为 Levi-Civita 联络 (或黎曼联络), 如果它满足:

(1) ∇ 是无挠的;

(2) 它与度量相适应.

定理3.2.6 (黎曼几何基本定理) 在任意的黎曼流形上都存在唯一的 Levi-Civita 联络.

证明 唯一性. 设 ∇ 是黎曼流形 (M, g) 上的 Levi-Civita 联络. 则对任意的 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, 有

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad (A)$$

$$Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle, \quad (B)$$

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \quad (C)$$

将 (A) + (B) - (C), 又因为 ∇ 是无挠的, 整理后可得

$$\begin{aligned} & X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &= \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle + 2 \langle Z, \nabla_Y X \rangle. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_Y X \rangle &= \frac{1}{2} \left\{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle X, [Y, Z] \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle Z, [X, Y] \rangle \right\}. \quad (3.3) \end{aligned}$$

这就证明了唯一性.

存在性. 利用等式 (3.3) 直接定义 ∇ , 可以验证它是黎曼流形 (M, g) 上的一个 Levi-Civita 联络. 证毕. ■

设 (M, g) 是黎曼流形, ∇ 是 Levi-Civita 联络. 取它的一个参数化 (X, U) . 由等式 (3.3) 知,

$$\langle X_k, \nabla_{X_j} X_i \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right\}. \quad (3.4)$$

其中, $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

另一方面, 设 Γ_{ij}^k 是 Levi-Civita 联络 ∇ 的联络系数, 即

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k, \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

将它们代入等式 (3.4), 可得

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{kl} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right\}.$$

令矩阵 $(g_{ij})_{n \times n}$ 的逆矩阵为 $(g^{ij})_{n \times n}$, 即 $\sum_k g_{ik} g^{kj} = \delta_{ij}$. 那么,

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ X_i(g_{jk}) + X_j(g_{ki}) - X_k(g_{ij}) \right\} g^{km}. \quad (3.5)$$

由上式所定义的联络系数 Γ_{ij}^k 称为 Christoffel 符号.

例 3.2.1 欧氏空间 \mathbb{R}^n .

欧氏空间的度量形式为 $ds^2 = \sum_{i=1}^n dx_i^2$, 直接代入等式 (3.5) 可得, $\Gamma_{ij}^k = 0$.

令 $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$. 对任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, 若

$$X = \sum_i f_i X_i = (f_1, f_2, \dots, f_n), \quad Y = \sum_j g_j X_j = (g_1, g_2, \dots, g_n),$$

则

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_j X(g_j) X_j + \sum_{i,j} f_i \nabla_{X_i} X_j = \sum_j X(g_j) X_j \\ &= (X(g_1), X(g_2), \dots, X(g_n)) \\ &= dY(X). \end{aligned}$$

例 3.2.2 对于 Lobatchevski 上半平面 $H = \{(x_1, x_2) | x_2 > 0\}$, $g_{ij} = \frac{1}{x_2^2} \delta_{ij}$, $g^{ij} = x_2^2 \delta_{ij}$. 所以,

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial g_{1k}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{k1}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_k} \right\} g^{k2} = \frac{1}{2} x_2^2 \delta_{22} \left(-\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right)$$

$$= \frac{1}{x_2}.$$

同理, 可得: $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{x_2}, \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0$. 这样, 我们便得到

$$\begin{cases} \nabla_{X_1} X_1 = \frac{X_2}{x_2}, & \nabla_{X_2} X_2 = -\frac{X_2}{x_2}, \\ \nabla_{X_1} X_2 = \nabla_{X_2} X_1 = -\frac{X_1}{x_2}, \end{cases} \quad \text{这里 } X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

对于 H 上的一条光滑曲线 c , $c(t) = (t, 1), t \in [0, 1]$. 设 $v_0 = (0, 1)$ 是点 $p = (0, 1)$ 处的切向量, 令 $V(t) = (a(t), b(t))$ 是向量 v_0 沿曲线 c 的平行移动. 那么 $\frac{D}{dt}V \equiv 0$, 由微分方程组 (3.1) 即得:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}a(t) = \frac{1}{x_2}b(t), \\ \frac{d}{dt}b(t) = -\frac{1}{x_2}a(t), \\ a(0) = 0, \quad b(0) = 1. \end{cases}$$

由于向量场是在曲线 c 上, 所以 $x_2 \equiv 1$. 解这个常微分方程组, 可得

$$a(t) = \sin t, \quad b(t) = \cos t.$$

于是, 向量 v_0 沿曲线 c 平行移动所得的向量场为 $V(t) = (\sin t, \cos t)$ (如图 3.2).

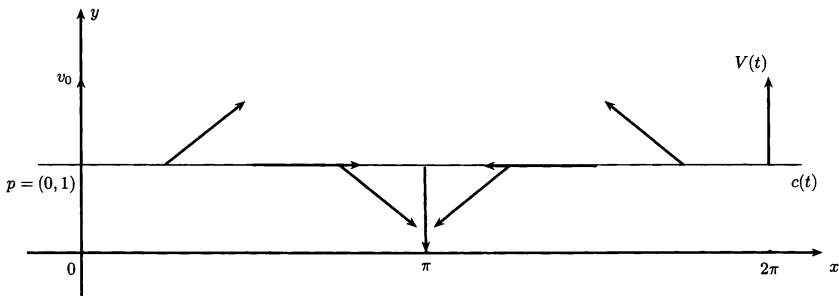


图 3.2

例 3.2.3 设 M 是 n 维微分流形, (\overline{M}, g) 是 $n+k$ 维黎曼流形, 光滑映射 $\varphi: M \rightarrow \overline{M}$ 是浸入. 则对任意的 $p \in M$, 由于 φ 局部上是嵌入, 局部上将 M 的点与它在 \overline{M} 上的象点等同, 根据 $T_p \overline{M}$ 上的内积, 可以将 $T_p \overline{M}$ 分解为

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp.$$

其中, $(T_p M)^\perp$ 是 $T_p M$ 的正交补, 称为法空间. 令 $N(\varphi) = \bigcup_{p \in M} (T_p M)^\perp$, 称为 M 的法丛(normal bundle).

将黎曼流形 (\overline{M}, g) 上的 Levi-Civita 联络记为 $\overline{\nabla}$. 由于 φ 是局部嵌入, 故对 M 上的任意局部切向量场 X 和 Y , 可以将它们扩充为 \overline{M} 上的局部向量场 \overline{X} 和 \overline{Y} , 记

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}|_M = \nabla_X Y + B(X, Y).$$

其中, $\nabla_X Y \in TM$, $B(X, Y) \in N(\varphi)$. 那么, 分解与局部切向量场 X 和 Y 的扩充选取无关, 且满足

- (1) ∇ 和 B 是光滑的;
- (2) ∇ 是黎曼流形 (M, φ^*g) 上的 Levi-Civita 联络;
- (3) B 是 M 上的二阶对称张量场. 即 B 是双线性的, 且对任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ 和函数 $f \in \mathcal{D}(M)$, 都有

$$B(fX, Y) = fB(X, Y) = fB(Y, X).$$

张量场 B 称为子流形 M 的第二基本型(Second fundamental form).

练习 2.1 验证上例中的 (1) ~ (3).

注 1 在古典微分几何中, 考虑曲面片 $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, 设它的参数表示为

$$X = X(u, v), \quad u, v \in U.$$

则曲面的第一基本型可写为

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

其中, $E = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$, $G = \langle X_v, X_v \rangle$. 实际上, 曲面的第一基本型就是曲面的度量形式.

设 \vec{n} 是曲面 X 的一个单位法向量场. 定义函数

$$e = \langle X_{uu}, \vec{n} \rangle, \quad f = \langle X_{uv}, \vec{n} \rangle, \quad g = \langle X_{vv}, \vec{n} \rangle$$

则第二基本型可写成为

$$II = e du^2 + 2f du dv + g dv^2.$$

事实上, 由例 3.2.1 知, 对欧氏空间 \mathbb{R}^3 上的任意切向量场 X 和 Y , $\overline{\nabla}_X Y = dY(X)$. 所以

$$\begin{aligned} B(X_u, X_u) &= \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}_u} \overline{X}_u, \vec{n} \rangle \vec{n} = \langle dX_u(X_u), \vec{n} \rangle \vec{n} \\ &= \langle X_{uu}, \vec{n} \rangle \vec{n} \\ &= e \vec{n}. \end{aligned}$$

同样地, $B(X_u, X_v) = f \vec{n}$, $B(X_v, X_v) = g \vec{n}$.

从上面的讨论可以看出, 例 3.2.3 中定义的第二基本型与古典微分几何中的定义是一致的.

第四章 测地线

§4.1 测地流

在本章的讨论中, 如无特别说明, 我们设 (M, g) 是 n 维黎曼流形, ∇ 是 M 上的 Levi-Civita 联络.

定义4.1.1 设 $\gamma: I \rightarrow M$ 是 M 上的一条参数曲线. 对于点 $t_0 \in I$, 若 $\frac{D}{dt}\big|_{t=t_0} \gamma'(t) = 0$, 则称曲线 γ 在 $t = t_0$ 时是测地的. 如果对任意的 $t \in I$, γ 在 t 时都是测地的, 则称 γ 是测地线(geodesic).

设 γ 是 M 上的测地线, 根据定义

$$\frac{d}{dt} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \gamma'(t), \gamma'(t) \right\rangle = 0.$$

故

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \equiv \text{const.}$$

不妨假设 $|\gamma'(t)| = c$, 则测地线 γ 在 $[t_0, t]$ 段的弧长为

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(t)| \, dt = c(t - t_0).$$

特别地, 当 $|\gamma'(t)| = 1$ 时的测地线称为正规测地线.

在局部上, 选取 M 的一个参数化 (X, U) . 在这个参数化下, 曲线 γ 可表示为

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

此时, 曲线在点 $\gamma(t)$ 处的切向量为

$$\gamma'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t)) = \sum_i x'_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

所以, γ 是测地线当且仅当

$$0 = \frac{D}{dt} \gamma'(t) = \sum_k (\ddot{x}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{x}_i \dot{x}_j) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

因此, γ 是测地线当且仅当它满足二阶微分系统

$$\ddot{x}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{x}_i \dot{x}_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.1)$$

例 4.1.1 欧氏空间 \mathbb{R}^n 的测地线.

在欧氏空间 \mathbb{R}^n 中, 联络系数 $\Gamma_{ij}^k = 0$, 代入二阶微分系统 (4.1), 可解得

$$\gamma(t) = at + b, \quad a, b \in \mathbb{R}^n.$$

故欧氏空间 \mathbb{R}^n 的测地线就是 \mathbb{R}^n 上的直线.

为了解二阶微分系统 (4.1), 我们将它放在切丛 TM 上考虑.

对于切丛 $TM = \{(p, v) | p \in M, v \in T_p M\}$, 设 (X, U) 是 M 的一个参数化. 则 $Y: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$,

$$Y(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) = (X(x_1, x_2, \dots, x_n), \sum_i y_i \frac{\partial}{\partial x_i})$$

是 TM 的一个坐标映射, $(Y, U \times \mathbb{R}^n)$ 是 TM 的一个参数化.

由于 M 上的曲线 γ , 诱导了 TM 上的一条曲线 $\tilde{\gamma}: I \rightarrow TM$, 定义如下

$$\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \gamma'(t)).$$

因此, 如果 γ 是测地线, 则它在 TM 上的诱导曲线 $\tilde{\gamma}(t)$, 在参数化 $(Y, U \times \mathbb{R}^n)$ 下满足一阶微分系统

$$\begin{cases} \dot{x}_k = y_k, \\ \dot{y}_k = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{x}_i \dot{x}_j, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2)$$

于是, 在 U 上的二阶微分系统 (4.1) 等价于 $TU = U \times \mathbb{R}^n$ 上的一阶微分系统 (4.2).

为了解一阶微分系统 (4.2), 我们首先回顾

定理4.1.2 设 X 是微分流形 M 的开集 V 上的光滑向量场, $p \in V \subset M$. 则存在点 p 的一个邻域 $V_0 \subset V$ 和一个光滑映射 $\varphi: (-\delta, \delta) \times V_0 \rightarrow V$, $\delta > 0$, 使得对任意的 $q \in V_0$, 曲线 $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ 是唯一一条 X 的积分曲线即满足: $\varphi'_t(q) = X|_{\varphi(t,q)}$, $\varphi(0, q) = q$.

证明 定理的证明见参考文献 [War71]. ■

上述定理中的映射 $\varphi_t: V_0 \rightarrow V$ (t 固定) 称为向量场 X 在 V 上的流(flow).

引理4.1.3 在微分流形 TM 上存在唯一的向量场 G , 使得它的积分曲线就是 M 的测地线 γ 在 TM 的诱导曲线 $\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), \gamma'(t))$.

证明 先证明唯一性. 假设存在这样的向量场 G , 选取 M 的一个参数化 (X, U) . 根据假设, G 的积分曲线为 $\tilde{\gamma} = (\gamma(t), \gamma'(t))$, 其中, γ 是测地线. 所以 $\tilde{\gamma}$ 是一阶微分系统 (4.2) 的一个解. 根据一阶微分系统 (4.2) 解的唯一性, 我们知道如果 G 存在, 则它是唯一的.

存在性. 根据一阶系统 (4.2) 解的存在性, 我们可以在局部上定义 G . 由一阶微分系统的解的唯一性知, 定义是合理的. 证毕. ■

定义 4.1.4 向量场 G 称为 TM 上的测地向量场 (geodesic field). 它的流称为 TM 上的测地流 (geodesic flow).

将定理 4.1.2 应用到 TM 的测地向量场 G 上, 我们可以得到: 对任意的点 $p \in M$, 选取点 p 的一个参数化 (X, U) , 则存在 TU 中的包含点 $(p, 0)$ 的开子集 \mathcal{U} , 实数 $\delta > 0$ 以及一个光滑映射 $\varphi: (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow TU$, 使得对任意的 $(q, v) \in \mathcal{U}$, $t \mapsto \varphi(t, q, v)$ 是测地向量场 G 的积分曲线且满足初始条件 $\varphi(0, q, v) = (q, v)$.

事实上, 我们可以选取 $\mathcal{U} = \{(q, v) | q \in V, |v| < \varepsilon_1\}$, 其中 V 是点 p 的一个开邻域且 $V \subset U$. 令 $\gamma = \pi \circ \varphi$, 那么我们可以将上面的结果写成

命题 4.1.5 给定点 $p \in M$, 则存在点 p 的一个开邻域 $V \subset M$, 实数 $\delta > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ 以及一个光滑映射

$$\gamma: (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow M, \quad \text{这里 } \mathcal{U} = \{(q, v) | q \in V, v \in T_q M, |v| < \varepsilon_1\}.$$

使得对任意的 $(q, v) \in \mathcal{U}$, 曲线 $t \mapsto \gamma(t, q, v)$ 是 M 上唯一的满足条件

$$\gamma(0, q, v) = q, \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(t, q, v) = v.$$

的测地线.

命题 4.1.5 说明如果 $|v| < \varepsilon_1$, 那么测地线 $\gamma(t, q, v)$ 在区间 $(-\delta, \delta)$ 上存在且是唯一的. 事实上, 定义域区间 $(-\delta, \delta)$ 与初始切向量 v 的长度是相互联系的. 具体地说,

引理 4.1.6 如果 $\gamma(t, q, v)$ 是定义在区间 $(-\delta, \delta)$ 上的一条测地线, 则对任意的正数 $a > 0$, 测地线 $\gamma(t, q, av)$ 在区间 $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$ 上有定义且满足

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

证明 令 $h: (-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}) \rightarrow M$, $h(t) = \gamma(at, q, v)$, 则 $h(0) = q$, $h'(0) = av$. 另一方面, 由于 $h'(t) = a\gamma'(at, q, v)$, 故有

$$\frac{D}{dt} h'(t) = \nabla_{h'(t)} h'(t) = a^2 \nabla_{\gamma'} \gamma' = 0.$$

因此, $h(t)$ 是过点 q 且满足 $h'(0) = av$ 的测地线. 根据唯一性,

$$h(t) = \gamma(at, q, v) = \gamma(t, q, av).$$

证毕. ■

利用引理 4.1.6, 我们可以将命题 4.1.5 改写为(取 $\delta = 2$)

命题 4.1.7 对任意的点 $p \in M$, 都存在点 p 的一个开邻域 $V \subset M$, 实数 $\varepsilon > 0$ 以及一个光滑映射

$$\gamma: (-2, 2) \times \mathcal{U} \longrightarrow M, \quad \mathcal{U} = \{(q, w) | q \in V, w \in T_q M, |w| < \varepsilon\},$$

使得对任意的 $(q, w) \in \mathcal{U}$, 曲线 $t \mapsto \gamma(t, q, w)$ 是 M 上过点 q 且在点 q 处的切向量为 w 的唯一的测地线.

这样, 利用命题 4.1.7, 我们便可以引入指数映射.

定义 4.1.8 对任意点 $p \in M$, 设 $\mathcal{U} \subset TM$ 是由命题 4.1.7 给出的开集. 定义指数映射(exponential map) $\exp: \mathcal{U} \longrightarrow M$ 如下,

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma(|v|, q, \frac{v}{|v|}), \quad \forall (q, v) \in \mathcal{U}.$$

记 $\exp_q(v) = \exp(q, v)$.

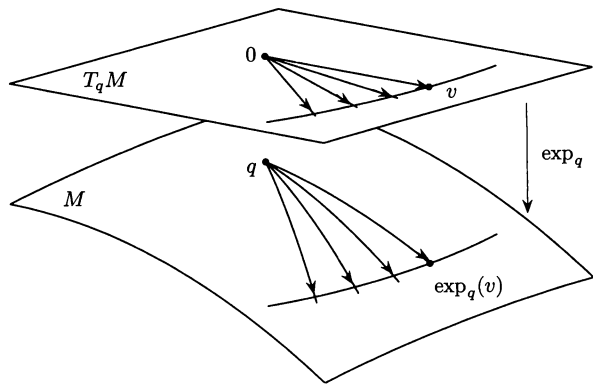


图 4.1

注 1 设 $(q, v) \in \mathcal{U}$, 则点 $\exp_q(v)$ 就是 M 上从点 q 出发沿着一条初始切向量为 $\frac{v}{|v|}$ 的测地线走距离为 $|v|$ 所达到的点.

注 2 在大多数情况下, 我们将 \exp 限制到切空间 $T_q M$ 的一个开子集上, 特别地, 可以得到 $\exp_q: B_\varepsilon(0) \subset T_q M \longrightarrow M$. 这里, $B_\varepsilon(0)$ 是指在切空间 $T_q M$ 上以原点为中心, 半径为 ε 的开球. 记 $B_\varepsilon(q) = \exp_q(B_\varepsilon(0)) \subset M$.

显然, \exp 是可微的, 且 $\exp_q(0) = q$. 所以, $d(\exp_q)_0 : T_q M \rightarrow T_q M$, 并且

$$\begin{aligned} d(\exp_q)_0(v) &= d(\exp_q)_0\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} tv\right) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp_q(tv) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \gamma(1, q, tv) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \gamma(t, q, v) = v. \end{aligned}$$

因此, $d(\exp_q)_0$ 是 $T_q M$ 的恒等映射. 于是, 我们便得到了以下结论.

命题4.1.9 对于 M 上的任意一个点 q , 都存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得指数映射 $\exp_q : B_{\varepsilon_0}(0) \rightarrow M$ 是嵌入.

例 4.1.2 欧氏空间 \mathbb{R}^n .

由例4.1.1, 我们知道欧氏空间 \mathbb{R}^n 的测地线就是 \mathbb{R}^n 上的直线. 故对任意的 $q \in \mathbb{R}^n$, 指数映射 $\exp_q(v) = q + v$, $v \in T_q \mathbb{R}^n$. 特别地, 原点处的指数映射就是恒等映射.

例 4.1.3 标准球面 S^n .

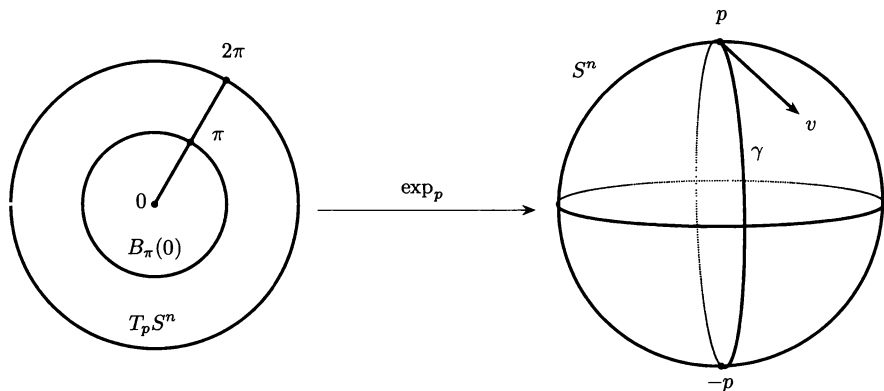


图 4.2

球面 S^n 可视为 \mathbb{R}^{n+1} 的子流形. 设 $\nabla, \bar{\nabla}$ 分别为 S^n 和 \mathbb{R}^{n+1} 的 Levi-Civita 联络. 则对任意的切向量场 $X, Y \in TS^n$, $\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T$. 其中, \bar{X}, \bar{Y} 分别是向量场 X 和 Y 在 \mathbb{R}^{n+1} 上的局部扩充.

对任意的 $p \in S^n$ 和 p 点的单位切向量 v , 考虑 S^n 的曲线

$$\gamma(t) = \cos t \cdot p + \sin t \cdot v, \quad t \in \mathbb{R}.$$

直接计算, 可以得到,

$$\gamma(0) = p, \quad \gamma'(0) = v, \quad \gamma''(t) = -\gamma(t).$$

所以, γ 是 S^n 上过点 p 且初始切向量为 v 的曲线. 由于

$$\frac{D}{dt}\gamma'(t) = (\gamma''(t))^T = 0,$$

因此 $\gamma(t)$ 是 S^n 上的测地线.

由 v 的任意性知, γ 是 S^n 上的测地线当且仅当 γ 是 S^n 上的大圆(great circle). 如图4.2. 易知指数映射 $\exp_p : T_p S^n \rightarrow S^n$ 在整个 $T_p S^n$ 上有定义. 映射 $\exp_p : B_\pi(0) \subset T_p S^n \rightarrow S^n - \{-p\}$ 是一个微分同胚.

注 3 如果 $M = S^n - \{-p\}$, 则指数映射 \exp_q 只在 $B_\pi(0)$ 上有定义.

事实上, 我们可以利用指数映射来计算球面之间映射的 Brouwer 映射度^[PT02].

练习 1.1 对任意的整数 $k > 0$, 定义映射

$$\begin{aligned} F_k : S^2 &\longrightarrow S^2 \\ (\cos \theta, \sin \theta \cdot x) &\longmapsto (\cos k\theta, \sin k\theta \cdot x) \end{aligned}$$

其中, $0 \leq \theta \leq \pi, x \in S^1$. 试证明它是多项式映射, 且 Brouwer 映射度为

$$\deg F_k = \begin{cases} 1, & \text{如果 } k \text{ 是奇数,} \\ 0, & \text{如果 } k \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

例 4.1.4 设区域 $U = \{(u, v) | u_0 < u < u_1, v_0 < v < v_1\} \subset \mathbb{R}^2$. 定义映射 $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$. 其中, f, g 是可微函数.

可以证明, 当 $f'(v)^2 + g'(v)^2 \neq 0$, 且 $f(v) \neq 0$ 时, 映射 Φ 是浸入(留给读者作练习). 象集 $\Phi(U)$ 是曲线 $(f(v), 0, g(v))$ 沿 Oz 轴旋转所得到的旋转面. 它上面的曲线 $u = \text{const}$ 和 $v = \text{const}$ 分别称为经线(meridian)和纬线(parallel). 如图 4.3.

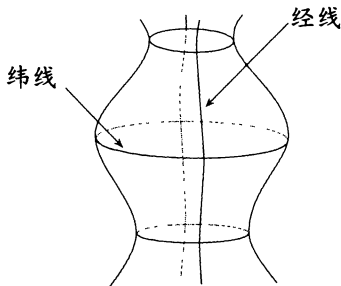


图 4.3

1° 度量

由于

$$\Phi_u = (-f \sin u, f \cos u, 0),$$

$$\Phi_v = (\dot{f} \cos u, \dot{f} \sin u, \dot{g}),$$

故

$$g_{11} = \langle \Phi_u, \Phi_u \rangle = f^2 > 0,$$

$$g_{12} = g_{21} = \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle = 0,$$

$$g_{22} = \langle \Phi_v, \Phi_v \rangle = \dot{f}^2 + \dot{g}^2 > 0.$$

于是度量矩阵 (g_{ij}) 所对应的逆矩阵

$$(g^{kl}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} f^{-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\dot{f}^2 + \dot{g}^2} \end{pmatrix}.$$

2° 联络

根据公式

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right\} g^{km},$$

直接计算, 可得

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{\dot{f}}{f},$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{f\dot{f}}{\dot{f}^2 + \dot{g}^2},$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{\dot{f}\ddot{f} + \dot{g}\ddot{g}}{\dot{f}^2 + \dot{g}^2},$$

$$\text{其他的联络系数 } \Gamma_{ij}^k = 0.$$

不妨设 $\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$, 则

$$f\ddot{f} + \dot{g}\ddot{g} = 0,$$

所以

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{\dot{f}}{f},$$

$$\Gamma_{11}^2 = -f\dot{f},$$

$$\text{其他 } \Gamma_{ij}^k = 0.$$

3° 测地线方程

我们知道, γ 是测地线当且仅当它满足二阶微分系统

$$\ddot{x}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{x}_i \dot{x}_j = 0, \quad k = 1, 2.$$

将 $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ 代入方程组, 即为

$$\begin{cases} \ddot{u} + 2\frac{\dot{f}}{f}\dot{u}\dot{v} = 0, \\ \ddot{v} - f\dot{f}\dot{u}^2 = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (A) \\ (B) \end{matrix}$$

方程 (A) 可化为 $f^2\ddot{u} + 2f\dot{f}\dot{u}\dot{v} = 0$. 它等价于

$$f^2(v(t))\dot{u}(t) = \text{const.} \quad (A')$$

另一方面, 由于

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \frac{d}{dt}(f(v(t))\cos(u(t)), f(v(t))\sin(u(t)), g(v(t))) \\ &= (\dot{f}\dot{v}\cos u - f\dot{u}\sin u, \dot{f}\dot{v}\sin u + f\dot{u}\cos u, \dot{g}\dot{v}), \end{aligned}$$

不妨设 $|\gamma'(t)| = 1$, 也就是(因为已经假定 $\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$)

$$\dot{v}^2 + f^2\dot{u}^2 = 1. \quad (C)$$

当 $\dot{v} \neq 0$ 时, 由于方程 (B) 可以利用方程 (A) 和 (C) 得到, 而方程 (A) 等价于方程 (A'). 因此, γ 是测地线当且仅当它满足方程组

$$\begin{cases} f^2\dot{u} = c, \\ \dot{v}^2 + f^2\dot{u}^2 = 1. \end{cases}$$

其中, c 为常数.

4° 特解

特别地, 当 $u \equiv c_0$ 时, 方程的解为: $v = \pm t + a$ (经线); 当 $v \equiv c_1$ 时(纬线), $\dot{v} = 0$, γ 是测地线当且仅当 $f'(c_1) = 0$.

例 4.1.5 紧李群 G .

1° 单参数子群

设 X 是李群 G 的左不变向量场, 则它所对应的单参数子群为 $\exp_X(t)$ (见 §1.5 节), 且满足 $\exp_X(t+s) = \exp_X(t) \cdot \exp_X(s)$, 这里的 \exp 是 Lie 群上的指数映射. 注意此时我们尚未在李群 G 上给出黎曼度量.

2° 测地线

设 ∇ 是双不变度量所对应的 Levi-Civita 联络, 则对李群 G 上的任意切向量场 X, Y, Z , 由于

$$\begin{aligned} 2\langle X, \nabla_Z Y \rangle &= Z\langle X, Y \rangle + Y\langle X, Z \rangle - X\langle Y, Z \rangle \\ &\quad + \langle Z, [X, Y] \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle. \end{aligned}$$

选取 $X, Y, Z \in \text{Lie } G$, 显然 $\langle X, Y \rangle = \text{const.}$ 于是, $Z\langle X, Y \rangle = Y\langle Z, X \rangle = X\langle Y, Z \rangle = 0$. 再令 $Z = Y$, 代入上式, 可得

$$\langle X, \nabla_Y Y \rangle = \langle Y, [X, Y] \rangle.$$

另一方面, 由于 $\langle Y, [X, Y] \rangle = \langle [Y, X], Y \rangle = -\langle Y, [X, Y] \rangle$, 故

$$\langle X, \nabla_Y Y \rangle = 0.$$

所以, 对任意的 $Y \in \text{Lie } G$, $\nabla_Y Y = 0$. 因此, 在双不变度量下, 李群 G 上经过单位元的曲线 γ 是测地线当且仅当它是单参数子群.

3° 联络

对任意的 $X, Y \in \text{Lie } G$, 根据上面的讨论我们有 $\nabla_{(X+Y)}(X+Y) = 0$. 所以,

$$\nabla_X Y + \nabla_Y X = 0.$$

另一方面, 由于联络是无挠的, 故

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

综上可得, 对任意的 $X, Y \in \text{Lie } G$,

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].$$

§4.2 测地线的极小性质

定义4.2.1 一条分段光滑曲线是一个连续映射 $c: [a, b] \rightarrow M$, 且满足条件: 存在闭区间 $[a, b]$ 的一个划分 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$, 使得 $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$ 都是光滑的, $i = 0, 1, \cdots, k-1$. 称 c 是连接点 $c(a)$ 和 $c(b)$ 的分段光滑曲线. $c(t_i)$ 称为 c 的顶点. 记曲线 c 的长度为 $l(c)$.

显然, 可以将沿光滑曲线的平行移动扩充到沿分段光滑曲线的平行移动: 给定 $V_0 \in T_{c(t)}M$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, 将它平行移动得到向量场 $V(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$; 将 $V(t_i)$ 和 $V(t_{i+1})$ 作为新的初始值, 同样地我们可以扩充向量场 $V(t)$ 到区间 $[t_{i-1}, t_{i+2}]$. 如此下去, 我们便可得到沿分段光滑曲线的平行移动.

设 A 是 \mathbb{R}^2 中的满足下面两个条件的连通的子集: (1) 存在开集 $U \subset \mathbb{R}^2$, 使得 $U \subset A \subset \bar{U}$; (2) A 的边界 ∂A 是一条分段光滑曲线. M 的一个参数曲面(可能退化)是一个光滑映射 $S: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$. 也就是说, 存在一个开集 $W \supset A$, S 可以光滑地扩充到 W 上.

沿曲面 S 的向量场 V 是一个映射 $q \mapsto V(q) \in T_{S(q)}M$, $q \in A$. 如果对 M 上的任意光滑函数 f , 映射 $q \mapsto V(q)f$ 是光滑的, 则称 V 是沿曲面 S 的光滑向量场.

假定 (u, v) 是 \mathbb{R}^2 的坐标. 记 $\frac{\partial S}{\partial u} = dS\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)$, $\frac{\partial S}{\partial v} = dS\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)$, 则 $\frac{\partial S}{\partial u}$, $\frac{\partial S}{\partial v}$ 是沿 S 的光滑向量场.

设 V 是沿曲面 S 的光滑向量场, 我们可以定义共变导数 $\frac{DV}{\partial u}$ 和 $\frac{DV}{\partial v}$. 令 $\frac{DV}{\partial u}(u, v_0)$ 是沿曲线 $u \mapsto S(u, v_0)$ 的向量场 V 的共变导数. 这样对任意的 $(u, v) \in A$, 便定义了 $\frac{DV}{\partial u}(u, v)$. 类似地, 我们可以定义 $\frac{DV}{\partial v}$.

引理4.2.2 (对称性) 设 $S: A \rightarrow M$ 是 M 的参数曲面, 则

$$\frac{D}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial v} = \frac{D}{\partial v} \frac{\partial S}{\partial u}.$$

证明 在局部上, 选取 M 的一个参数化 (X, U) . 在这个参数化下曲面 S 可写成

$$S(u, v) = (x_1(u, v), \dots, x_n(u, v)), \quad (u, v) \in A.$$

则

$$\frac{\partial S}{\partial v} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial v} X_i.$$

其中, $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. 所以

$$\frac{D}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial v} = \frac{D}{\partial u} \left(\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial v} X_i \right) = \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{D}{\partial u} X_i + \frac{\partial^2 x_i}{\partial v \partial u} X_i \right).$$

又

$$\frac{D}{\partial u} X_i = \nabla_{\frac{\partial S}{\partial u}} X_i = \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial u} \nabla_{X_j} X_i \right) = \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial u} \nabla_{X_i} X_j \right).$$

最后一个等号成立是因为联络 ∇ 是无挠的. 因此, $\frac{D}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial v} = \frac{D}{\partial v} \frac{\partial S}{\partial u}$. 证毕. ■

引理4.2.3 (Gauss) 给定点 $p \in M$ 和切向量 $v \in T_p M$, 使得 $\exp_p v$ 有定义. 设 $w \in T_v(T_p M) = T_p M$. 则

$$\langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

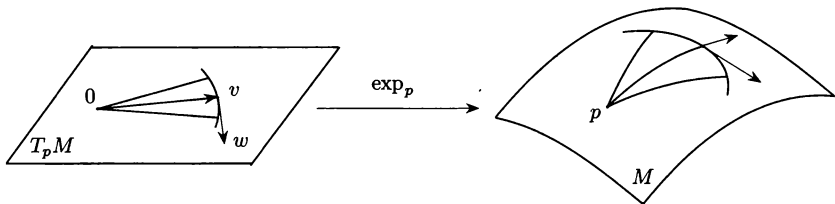


图 4.4

证明 由于 $d(\exp_p)_v$ 和 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 都是线性的, 所以我们只需对 $w = v$ 和 $w \perp v$ 这两种情形, 证明结论成立即可.

1° 当 $w = v$ 时, 因为

$$d(\exp_p)_v(v) = d(\exp_p)_v \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (1+t)v \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp_p(1+t)v,$$

而 $\exp_p(tv)$ 是 M 上的测地线, 它的切向量的长度是不变的. 所以,

$$|d(\exp_p)_v(v)| = \left| \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p tv = |d(\exp_p)_0(v)| = |v|.$$

2° 当 $w \perp v$ 时, 设 $v(s)$ 是 $T_p M$ 中的一条曲线, 且满足 $v(0) = v$, $v'(0) = w$, $|v(s)| = \text{const.}$ 由于 $\exp_p v$ 有定义, 故存在 $\varepsilon > 0$ 使得当 $0 \leq t \leq 1$, $-\varepsilon < s < \varepsilon$ 时, $\exp_p tv(s)$ 有定义.

令 $A = \{(t, s) | 0 \leq t \leq 1, -\varepsilon < s < \varepsilon\}$, 考虑参数曲面 $f: A \rightarrow M$,

$$f(t, s) = \exp_p tv(s) = \gamma(t, p, v(s)).$$

注意到对任意的 s_0 , $f|_{s=s_0}$ 是测地线.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{(1,0)} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=1} \exp_p(tv) = d(\exp_p)_v(v), \\ \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{(1,0)} &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp_p(v(s)) = d(\exp_p)_v(w). \end{aligned}$$

所以,

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle_{(1,0)} = \langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w) \rangle. \quad (4.3)$$

进一步, 对任意的 (t, s) , 我们有

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle.$$

上式右边第一项等于零, 这是因为 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 是测地线的切向量. 利用引理 4.2.2, 最后一项可化为

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} |v(s)|^2 = 0.$$

于是, $\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle$ 与 t 的选取无关. 而

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{(t,0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp_p(tv(s)) = \lim_{t \rightarrow 0} d(\exp_p)_{tv} tw = 0.$$

所以, $\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle_{(1,0)} = 0$. 由 (4.3) 知, 引理成立. 证毕. ■

注 1 对任意的 $p \in M$. 假设 $f(t, s) = \exp_p(tv(s))$, 在 $0 \leq t \leq 1$, $-\varepsilon < s < \varepsilon$ 上有定义, $v(s)$ 是 $T_p M$ 上的曲线, 且 $|v(s)| = \text{const.}$ 所以, $\langle v(s), v'(s) \rangle = 0$. 注意到

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, s) = d(\exp_p)_{tv(s)}(v(s)), \quad \frac{\partial f}{\partial s}(t, s) = d(\exp_p)_{tv(s)}(tv'(s)).$$

由 Gauss 引理(引理 4.2.3) 知,

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = 0.$$

注 2 对任意的点 $p \in M$, 由于 $d(\exp_p)_0 = \text{id}$, 故存在点 $0 \in T_p M$ 的一个邻域 V , 使得 $\exp_p|_V : V \rightarrow U$ 是个微分同胚, 称 U 是点 p 的法邻域(normal neighborhood). 选取 $\varepsilon > 0$, 使得 $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset V$, 称 $B_\varepsilon(p) = \exp_p(B_\varepsilon(0))$ 为 M 的测地球(geodesic ball). 它以 p 为中心, 半径是 ε . 根据 Gauss 引理, $\partial B_\varepsilon(p)$ 是 M 的一个超曲面且它与从点 p 出发的测地线正交.

设 $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ 是 M 上的分段光滑曲线, 若对任意的连接 $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ 的分段光滑曲线 c , 都有 $l(c) \geq l(\gamma)$, 则称 γ 是极小的. 下面我们来证明在局部上, 测地线是极小的.

命题 4.2.4 设 p 是 M 上的任一点, $B \subset M$ 是中心为点 p 的测地球, $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ 是测地线且 $\gamma(0) = p$. 如果 $c : [0, 1] \rightarrow M$ 是连接点 p 和 $\gamma(1)$ 的一条分段光滑曲线, 则

$$l(c) \geq l(\gamma),$$

等号成立当且仅当 $c([0, 1]) = \gamma([0, 1])$.

证明 1° 假设 $c([0, 1]) \subset B$. 由于 $\exp_p|_B$ 是微分同胚, 故当 $s > 0$ 时, 曲线 $c(s)$ 可唯一写成 $c(s) = \exp_p(r(s) \cdot v(s))$, 其中 $r : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 是正的分段光滑函数, $v(s)$ 是 $T_p M$ 上的光滑曲线且 $|v(s)| = 1$. 令 $f(t, s) = \exp_p(tv(s))$, 则 $c(s) = f(r(s), s)$. 故曲线 c 的切向量(除有限个点外)可表为

$$c'(s) = \frac{\partial f}{\partial t} r'(s) + \frac{\partial f}{\partial s}.$$

根据 Gauss 引理, $\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = 0$ (见注 1). 又因为 $\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| = |v(s)| = 1$, 故除有限个点外,

$$\begin{aligned} |c'(s)|^2 &= \left| \frac{\partial f}{\partial t} r'(s) \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial s} \right|^2 + 2r'(s) \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \\ &= |r'(s)|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial s} \right|^2 \\ &\geq |r'(s)|^2. \end{aligned}$$

所以,

$$\int_\varepsilon^1 |c'(s)| ds \geq \int_\varepsilon^1 |r'(s)| ds \geq \int_\varepsilon^1 r'(s) ds = r(1) - r(\varepsilon).$$

由于 $l(\gamma) = r(1)$, 取 $\varepsilon \rightarrow 0$, 得 $l(c) \geq l(\gamma)$.

根据上面的讨论, 等号成立当且仅当 $|\frac{\partial f}{\partial s}| = 0$. 也就是 $v(s) = \text{const}$, $|r'(s)| = r'(s) > 0$. 因此等价于 $c([0, 1]) = \gamma([0, 1])$.

2° 如果 $c([0, 1]) \not\subset B$, 设 B 的半径为 ρ , $t_1 \in (0, 1)$ 是曲线 c 与 ∂B 相交的第一个点, 则对任意的 $t \in [0, t_1]$, $c(t) \in B$. 所以,

$$l(c) \geq l(c|_{[0, t_1]}) \geq \rho > l(\gamma).$$

证毕. ■

需要注意的是, 命题 4.2.4 中的曲线都是从测地球 B 的中心出发的. 该命题说明测地线在充分小的小段上是最短的. 但当测地线较长时, 连接两端点间的测地线可能不是最短的. 例如, 对于球面 S^n 上从点 p 出发的测地线, 当它经过它的对径点 $-p$ 之后, 它就不是最短的. 此外, 极小测地线不一定是唯一的. 例如, 连接球面一对对径点的极小测地线就有无穷多个.

定理 4.2.5 对任意的点 $p \in M$, 都存在 p 的一个邻域 W 和实数 $\delta > 0$, 使得对任意的 $q \in W$, \exp_q 限制在 $B_\delta(0) \subset T_q M$ 上是微分同胚, 并且 $W \subset \exp_q(B_\delta(0))$.

证明 设 $\varepsilon, V, \mathcal{U}$ 由命题 4.1.7 给出. 定义映射 $F: \mathcal{U} \rightarrow M \times M$ 如下

$$F(q, v) = (q, \exp_q v).$$

由于 $F(p, 0) = (p, p)$, 且 $d(\exp_p)_0 = \text{id}$, 故切映射 $dF|_{(p, 0)}$ 所对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & I \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } I \text{ 为单位矩阵.}$$

因此, 映射 F 在点 $(p, 0)$ 的一个邻域上是局部微分同胚. 也就是说, 存在点 $(p, 0)$ 的一个邻域 $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, 使得 F 同胚映满点 (p, p) 的一个邻域 $W' \subset M \times M$. 我们可以选取

$$\mathcal{U}' = \{(q, v) | q \in V', v \in T_q M, |v| < \delta\},$$

其中, $V' \subset V$ 是点 p 的一个邻域. 最后选取 p 的一个邻域 W 使得 $W \times W \subset W'$.

不难证明, W 就是所要找的开集. 事实上, 对任意的 $q \in W$, $B_\delta(0) \subset T_q M$, 由于 $F|_{\mathcal{U}'}$ 是微分同胚且 $W \times W \subset W'$, 故

$$\{q\} \times W \subset F(\{q\} \times B_\delta(0)).$$

于是, $W \subset \exp_q(B_\delta(0))$. 证毕. ■

根据定理 4.2.5, W 是 M 中每一个点的法邻域, 我们称这样的邻域为全法邻域. 例如对于单位球面 S^n , $p = (1, 0, \dots, 0) \in S^n$, 可选取

$$W = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1, x_0 > 0\},$$

显然它是 S^n 上的一个全法邻域.

注 3 根据命题 4.2.4 和定理 4.2.5, 可以得到: 对任一点 $p \in M$, 一定存在一个邻域 W , 使得对任意的点 $q_1, q_2 \in W$, 都存在唯一的连接 q_1 和 q_2 的极小测地线 γ 且 $l(\gamma) < \delta$. 需要注意的是, 此时测地线 γ 不一定全包含在 W 内.

推论 4.2.6 如果取弧长参数的分段光滑曲线 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ 是极小的, 则 γ 是(正规)测地线.

证明 对任意的 $t \in [a, b]$, $\gamma(t) \in M$, 由定理 4.2.5, 存在点 $\gamma(t)$ 的一个全法邻域 W . 取包含 t 的闭区间 $[a_1, a_2] \subset [a, b]$, 使得 $\gamma[a_1, a_2] \subset W$. 设 β 是连接 $\gamma(a_1)$ 和 $\gamma(a_2)$ 的测地线, 则由命题 4.2.4 知, $l(\beta) \leq l(\gamma|_{[a_1, a_2]})$. 另一方面, 根据题设知, $l(\gamma|_{[a_1, a_2]}) \leq l(\beta)$. 所以

$$l(\beta) = l(\gamma|_{[a_1, a_2]}).$$

再由命题 4.2.4, β 和 γ 的象是重合的. 又因为 γ 取弧长参数, 所以 γ 在点 t 处是测地的. 于是, γ 是测地线. 证毕. ■

由于等距变换将测地线映成测地线, 于是利用推论 4.2.6 和等距变换, 我们可以找出部分黎曼流形上的测地线.

例 4.2.1 设 $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ 是 Lobatchevski 上半平面, 它的度量形式为 $ds^2 = \frac{1}{y^2} (dx^2 + dy^2)$.

选取 H 上的曲线 $\gamma: [a, b] \rightarrow H$ ($a > 0$) 如下

$$\gamma(t) = (0, t), \quad \forall a \leq t \leq b.$$

对于连接 $\gamma(a)$ 和 $\gamma(b)$ 两点间任意的分段光滑曲线 $c: [a, b] \rightarrow H$, 令 $c(t) = (x(t), y(t))$, 由于

$$|c'(t)|^2 = \frac{1}{y^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

故

$$l(c) = \int_a^b \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{y} dt \geq \int_a^b \frac{|\dot{y}|}{y} dt \geq \int_a^b \frac{dy}{y} = l(\gamma).$$

于是, γ 是连接点 $(0, a)$ 和 $(0, b)$ 的极小光滑曲线. 根据推论 4.2.6, $\gamma([a, b])$ 是测地线. 事实上, 在弧长参数下该测地线可表成 $\tilde{\gamma}(t) = (0, e^t)$.

进一步, 我们知道等距变换 $f_A: H \rightarrow H$,

$$f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad z = x+iy, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}), \quad \text{即 } ad-bc=1.$$

将 y 轴的上半部分映成上半圆或上半轴 $\{(x, t) | t > 0\} (x \in \mathbb{R})$. 故这些曲线都是 H 的测地线. 根据测地线的唯一性, 它们就是 H 的全部测地线. 事实上, 对任意的点 $p \in H, v \in T_p H$, 如果 v 不平行于 y 轴, 设过点 p 且垂直于向量 v 的垂线交 x 轴于点 q , 则以 q 为圆心 $|\overrightarrow{qp}|$ 为半径的上半圆 (适当调整参数) 就是过点 p 且在 p 处的切向量为 v 的测地线; 若 v 平行于 y 轴, 根据上面的讨论知, 过该点且与 y 轴平行的直线的上半部分即为所要找的测地线 (如图 4.5).

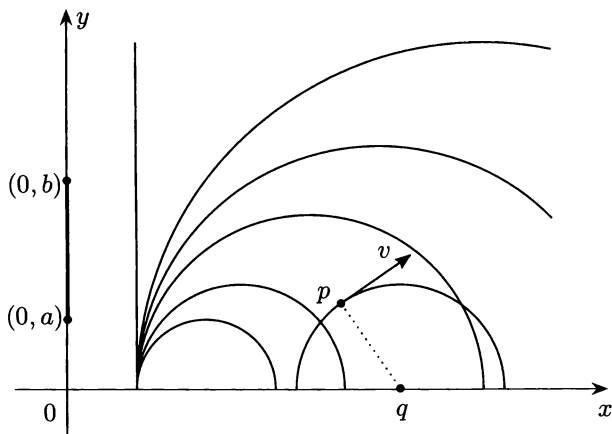


图 4.5

练习 2.1 试求 Poincaré 圆盘上的全部测地线.

§4.3 测地凸邻域

从定理 4.2.5 可以看出, 对任意的点 $p \in M$, 都存在一个全法邻域 W 和实数 $\delta > 0$, 使得对任意的 $q \in W$, \exp_q 限制在 $B_\delta(0) \subset T_q M$ 上是微分同胚, 并且 $W \subset \exp_q(B_\delta(0))$. 所以, 对任意的 $q_1, q_2 \in W$, 都存在唯一的一条连接 q_1 和 q_2 的最短测地线 γ 且 $l(\gamma) < \delta$. 但测地线 γ 不一定全部含于 W 内. 本节将证明存在充分小的全法邻域, 使得连接它上的任意两点的最短测地线都在该邻域上.

我们知道, 当球面上点 p (这里我们选取北极) 的测地球的半径小于 $\pi/2$ 时, 对过测地球边界上一点且与边界相切的测地线局部上必不全包含在测地球上 (如图 4.6). 同样地, 在黎曼流形上也有类似的性质.

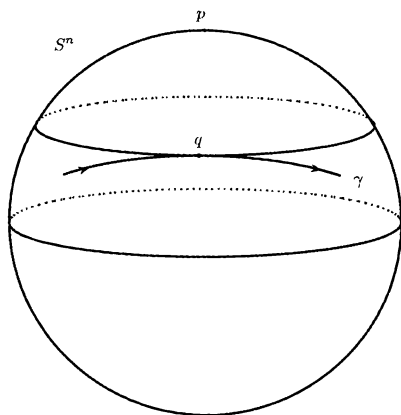


图 4.6

引理4.3.1 对任一点 $p \in M$, 都存在一个实数 $c > 0$, 使得对任意的 $r \in (0, c)$ 和测地球面 $S_r(p) = \partial B_r(p)$ 上的任一点 q , 过点 q 且在点 q 处与 $S_r(p)$ 相切的测地线在点 q 的一个充分小的邻域内都在 $B_\varepsilon(p)$ 之外.

证明 选取点 p 的一个全法邻域 W . 对任意的点 $q \in W$ 和单位切向量 $v \in T_q M$, 设 $\gamma(t, q, v)$, $-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$, 是过点 q 的测地线且 $\gamma(0, q, v) = q$, $\gamma'(0, q, v) = v$.

定义映射 $u(t, q, v) = \exp_p^{-1}(\gamma(t, q, v))$ (如图 4.7).

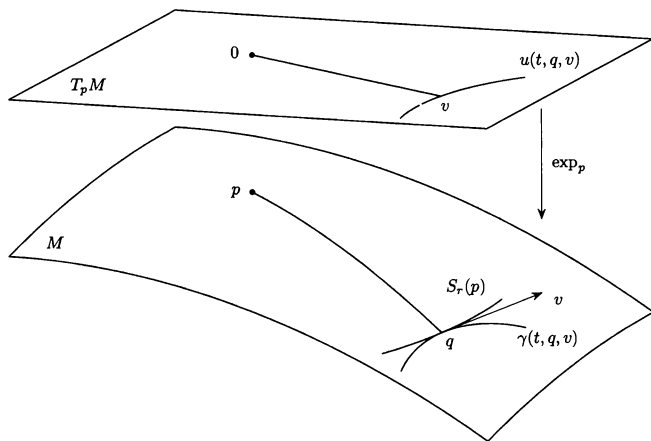


图 4.7

不难看出, u 是 $(-\varepsilon, \varepsilon) \times W_1$ 上的光滑函数, 这里

$$W_1 = \{(q, v) | q \in W, v \in T_p M, |v| = 1\}.$$

考虑函数 $|u(t, q, v)|^2$, 易知

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |u(t, q, v)|^2 &= 2 \langle u(t, q, v), \frac{d}{dt} u(t, q, v) \rangle, \\ \frac{d^2}{dt^2} |u(t, q, v)|^2 &= 2 \langle u(t, q, v), \frac{d^2}{dt^2} u(t, q, v) \rangle + 2 \left| \frac{d}{dt} u(t, q, v) \right|^2. \end{aligned}$$

设 p 到 q 的距离为 r , 若测地线 γ 在点 p 处与测地球面 $S_r(p)$ 相切, 则根据 Gauss 引理,

$$\langle u(0, q, v), \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} u(t, q, v) \rangle = 0.$$

这说明

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} |u(t, q, v)|^2 = 0.$$

因此, 如果对充分小的 $r > 0$, 函数 $|u(t, q, v)|^2$ 在 $t = 0$ 时是严格极小的, 则引理成立.

注意到, 当 $q = p$ 时, $u(t, p, v) = tv$. 此时

$$\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} |u(t, q, v)|^2 = 2|v|^2 = 2.$$

所以, 根据连续性存在点 p 的一个邻域 $V \subset W$, 使得对任意的点 $q \in V$ 和单位切向量 $v \in T_q M$, 都有

$$\frac{d^2}{dt^2} |u(t, q, v)|^2 > 0.$$

选取 $c > 0$ 使得

$$\exp_p(B_c(0)) \subset V.$$

不难验证, c 就是所要找的实数. 证毕. ■

定义4.3.2 对于 M 的一个子集 S , 如果对任意的点 $q_1, q_2 \in \bar{S}$, 都存在唯一的连接点 q_1 和 q_2 的极小测地线 γ , 使得它的内部包含在 S 之中, 则称 S 是强凸的(strongly convex).

定理4.3.3 (凸邻域定理) 对任意的点 $p \in M$, 都存在 $\beta > 0$, 使得测地球 $B_\beta(p)$ 是强凸的.

证明 对于点 p , 设 $c > 0$ 是由引理 4.3.1 给出的实数. 根据定理 4.2.5 可以得到点 p 的一个全法邻域 W 和正实数 $\delta < \frac{c}{2}$. 再选取 $\beta < \delta$, 使得

$$\overline{B_\beta(p)} \subset W \subset B_\delta(p).$$

则测地球 $B_\beta(p)$ 是强凸的. 原因如下:

首先, 对任意的 $q_1, q_2 \in \overline{B_\beta(p)}$, 由定理 4.2.5, 存在连接点 q_1 和 q_2 的极小测地线 γ , 并且

$$l(\gamma) \leq \rho(q_1, p) + \rho(p, q_2) \leq 2\beta < 2\delta < c.$$

所以, γ 在 $B_c(p)$ 中(如图 4.8). 否则, $l(\gamma) \geq 2(c - \delta) > c$, 矛盾.

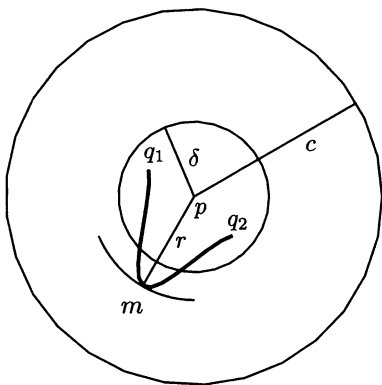


图 4.8

其次, 如果 γ 的内部不在 $B_\beta(p)$ 中, 则存在 γ 内部的一个点 m , 使得 γ 上的点到点 p 的距离在 m 处取极大值 r . 那么在点 m 的一个邻域内, γ 包含在 $\overline{B_r(p)}$ 中. 又因为 $m \in B_c(p)$, 这与引理 4.3.1 的结果矛盾. 证毕. ■

§4.4 黎曼流形上的微分算子

由命题 4.1.9 我们知道: 对任意的点 $q \in M$, 都存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $\exp_q|_{B_\varepsilon(0)}$ 是嵌入. 所以, 映射 $\exp_q : B_\varepsilon(0) \rightarrow \exp_q(B_\varepsilon(0))$ 是一个微分同胚. 于是, 我们可以将 \exp_q 视为一个坐标映射. 令 $X = \exp_q$, $U = B_\varepsilon(0)$, 则 (X, U) 是 M 的一个参数化. 选取 $T_q M$ 的一组正交基 $\{e_i\}$, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, 则对任意的点 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_\varepsilon(0)$, 我们有

$$X(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exp_q\left(\sum_i x_i e_i\right).$$

断言 在上述参数化 (X, U) 下, $g_{ij}(q) = \delta_{ij}$, $\Gamma_{ij}^k(q) = 0$.

证明 1° 令 $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, 由于 $X_i(q) = d(\exp_q)_0(e_i) = \text{id}(e_i) = e_i$, 所以

$$g_{ij}(q) = \langle X_i(q), X_j(q) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

2° 对任意的 $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in U$, 由于过点 q 且初始切向量为 v 的测地线为

$$\gamma(t) = \gamma(t, q, v) = \gamma(1, q, tv) = \exp_q(tv).$$

所以在参数化 (X, U) 下, 测地线可写成 $\gamma(t) = tv = (tv_1, tv_2, \dots, tv_n)$.

注意到, 若在参数化 (X, U) 下曲线 γ 写成

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),$$

则它是测地线当且仅当它满足方程组

$$\ddot{x}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{x}_i \dot{x}_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

这样, 我们便得到

$$\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v_i v_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

即对任意的点 v , $\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(q) v_i v_j = 0$. 因此, $\Gamma_{ij}^k(q) = 0$. 证毕. ■

事实上, 我们可以将 $e_i \in T_q M$ 沿从点 q 出发的测地线 γ 作平行移动得到 $X(U)$ 上的一组切向量场 $\{E_i\}$. 不难证明, E_i 是光滑的且 $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$. 令 $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, 设曲线 $\gamma_j(t) = \exp_q(te_j)$, 则 $\gamma_j'(t) = X_j$. 根据 E_i 的定义, 我们有 $\frac{DE_i}{dt} \Big|_q = 0$.

另一方面, 设 $E_i = \sum_k f_{ik} X_k$, $f_{ik} \in \mathcal{D}(X(U))$. 由于

$$\begin{aligned} \frac{DE_i}{dt} \Big|_q &= \left(\nabla_{\gamma_j'(t)} \left(\sum_k f_{ik} X_k \right) \right)_q = \sum_k \left(\nabla_{X_j} (f_{ik} X_k) \right)_q \\ &= \sum_k \left((f_{ik} \nabla_{X_j} X_k)_q + (X_j(f_{ik}) X_k)_q \right) \\ &= \sum_k (X_j(f_{ik}) X_k)_q. \quad (\text{因为 } \Gamma_{ij}^k(q) = 0) \end{aligned}$$

故 $X_j(q)(f_{ik}) = 0$. 因此,

$$(\nabla_{E_i} E_j)_q = \left(\sum_{k,l} \nabla_{f_{ik} X_k} f_{jl} X_l \right)_q = \sum_{k,l} (f_{ik} X_k(f_{jl}) X_l + f_{ik} f_{jl} \nabla_{X_k} X_l)_q = 0.$$

这样, 在 $X(U)$ 上便找到了一组正交切标架 $\{E_i\}$ 满足 $(\nabla_{E_i} E_j)_q = 0$.

例 4.4.1 散度(divergence).

给定切向量场 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 定义向量场 X 的散度为一个函数 $\operatorname{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$, 对任意的点 $p \in M$, $(\operatorname{div} X)(p)$ 是线性映射 $T_p M \rightarrow T_p M$, $v \mapsto \nabla_v X$ 的迹.

1° 对任意的 $p \in M$, 在局部上选取一组正交标架 $\{E_i\}$, 且满足 $(\nabla_{E_i} E_j)_p = 0$.

设 $X = \sum_i f_i E_i$, 则

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X(p) &= \sum_i \langle E_i, \nabla_{E_i} X \rangle_p = \sum_{i,j} \langle E_i, \nabla_{E_i} (f_j E_j) \rangle_p \\ &= \sum_{i,j} (\langle E_i, f_j \nabla_{E_i} E_j \rangle_p + \langle E_i, E_i (f_j) E_j \rangle_p) \\ &= \sum_i E_i(f_i)(p). \end{aligned}$$

2° 对于点 p 的一个参数化 (X, U) , 令 $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. 设 $X = \sum_j f_j X_j$, 则

$$\nabla_{X_i} X = \sum_j (X_i(f_j) X_j + f_j \nabla_{X_i} X_j) = \sum_k (X_i(f_k) + \sum_j f_j \Gamma_{ij}^k) X_k.$$

所以

$$\operatorname{div} X = \sum_i (X_i(f_i) + \sum_j f_j \Gamma_{ij}^i). \quad (4.4)$$

特别地, 当 $M = \mathbb{R}^n$ 时, 由于 $\Gamma_{ij}^k = 0$, 此时

$$\operatorname{div} X = \sum_i X_i(f_i).$$

断言 对任意的向量场 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 若局部上可表成 $X = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, 则

$$\operatorname{div} X = \sum_i \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{G} f_i),$$

式中 $G = \det(g_{ij})$.

证明 由于

$$\sum_i \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{G} f_i) = \sum_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \frac{f_i}{2G} \frac{\partial G}{\partial x_i} \right),$$

将上式与等式 (4.4) 比较, 我们只需证下式成立即可

$$\sum_i \Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x_j}. \quad (4.5)$$

因为

$$\begin{aligned}\sum_i \Gamma_{ij}^i &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \{X_i(g_{jk}) + X_j(g_{ki}) - X_k(g_{ij})\} g^{ki} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} g^{ki},\end{aligned}$$

另一方面,

$$\frac{\partial G}{\partial x_j} = \sum_k \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g'_{k1} & g'_{k2} & g'_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i,k} g'_{ki} g^{ki} G,$$

其中 $g'_{kl} = \frac{\partial}{\partial x_j} g_{kl}$. 因此, 等式 (4.5) 成立. 证毕. ■

练习 4.1 (Green 公式) 设 M^n 是紧致的黎曼流形, 对任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 试证:

$$\int_M \operatorname{div} X \, d\operatorname{vol} = 0.$$

例 4.4.2 梯度 (gradient).

对于 $f \in \mathcal{D}(M)$, f 的梯度是 M 上的一个光滑向量场 ∇f , 定义如下,

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f), \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

1° 对任意的 $p \in M$, 在局部上可以选取一组正交标架 $\{E_i\}$. 设 $\nabla f = \sum_i f_i E_i$, 则

$$f_i = \langle \nabla f, E_i \rangle = E_i(f).$$

故

$$\nabla f = \sum_i E_i(f) E_i.$$

2° 选取点 p 处的一个参数化 (X, U) , 设 $\nabla f = \sum_i h_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = \sum_i h_i g_{ij}.$$

故 $h_i = \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}$, 所以

$$\nabla f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

特别地, 如果 $M = \mathbb{R}^n$, 由于 $g_{ij} = \delta_{ij}$, 此时

$$\nabla f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

例 4.4.3 Laplace 算子.

设 M 是一个黎曼流形, 定义算子 $\Delta : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$,

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f, \quad f \in \mathcal{D}(M), \quad (4.6)$$

称为 M 上的 Laplace 算子. 根据例 4.4.1 和例 4.4.2, 不难证明下面两个结论成立.

1° 给定 $p \in M$, 在局部上选取一组正交标架 $\{E_i\}$, 且满足 $(\nabla_{E_i} E_j)_p = 0$. 则

$$\Delta f(p) = \sum_i E_i(E_i(f))(p).$$

2° 对于点 p 的一个参数化 (X, U) , 设 $G = \det(g_{ij})$, 则

$$\Delta f = \sum_{i,j} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}).$$

注 1 在部分文献中, 特别是在 Hodge 理论中常把 (4.6) 改为

$$\Delta f = -\operatorname{div} \nabla f, \quad f \in \mathcal{D}(M).$$

这就与通常的 Laplace 算子差个符号. 这是读者要注意的.

练习 4.2 设 (M, g) 是 n 维黎曼流形, $\rho \in \mathcal{D}(M)$ 是 M 上的正函数, 设

$$\tilde{g} = \rho g, \quad (4.7)$$

显然 \tilde{g} 是 M 上的一个新的黎曼度量, 它保持切向量间的夹角不变. (4.7) 称为黎曼度量 g 的共形变换. 当 $n = 2$ 时, 试证明: 对任意的 $f \in \mathcal{D}(M)$, 都有

$$\Delta_g(f) = \rho \Delta_{\rho g}(f).$$

式中 $\Delta_g, \Delta_{\rho g}$ 分别是黎曼流形 (M, g) 和 $(M, \rho g)$ 上的 Laplace 算子.

练习 4.3 对于黎曼流形 M 上的函数 $f \in \mathcal{D}(M)$, 如果点 p 是 f 的极大值点. 试证明极大值原理: $(\Delta f)(p) \leq 0$.

练习 4.4 对于黎曼流形 M 上的任意函数 $f, g \in \mathcal{D}(M)$ 和任意的切向量场 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 试证明下列等式成立.

- (1) $\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$;
- (2) $\operatorname{div}(fX) = f \cdot \operatorname{div} X + X(f)$;
- (3) $\operatorname{div}(g \cdot \nabla f) = g \cdot \Delta f + \langle \nabla f, \nabla g \rangle$;
- (4) $\Delta(f \cdot g) = f \Delta g + g \Delta f + 2 \langle \nabla f, \nabla g \rangle$.

例 4.4.4 (Hopf 引理) 设 M 是一个紧致的黎曼流形, f 是 M 上的光滑函数, 且 $\Delta f \geq 0$. 则 f 是常值函数.

证明 由于 $\Delta f \geq 0$, 且

$$\int_M \Delta f \, d\operatorname{vol} = \int_M \operatorname{div}(\nabla f) \, d\operatorname{vol} = 0. \quad (\text{根据练习 4.1})$$

所以, $\Delta f \equiv 0$. 也就是说, f 是调和函数.

于是, $\Delta(f^2) = 2f \Delta f + 2|\nabla f|^2 = 2|\nabla f|^2$. 故

$$\int_M |\nabla f|^2 \, d\operatorname{vol} = \frac{1}{2} \int_M \Delta(f^2) \, d\operatorname{vol} = 0.$$

因此, $\nabla f \equiv 0$, f 是常值函数. 证毕. ■

因此, 紧致的黎曼流形上的调和函数必为常值函数.

练习 4.5 设 F 是欧氏空间 \mathbb{R}^{n+1} 上的一个 m 次齐次多项式函数. 将 F 限制在标准球面 S^n 上得到 S^n 上的函数, 记为 f , 证明:

- (1) $|\nabla_{S^n} f|^2 = |\nabla_{\mathbb{R}^{n+1}} F|^2 - m^2 f^2$;
- (2) $\Delta_{S^n} f = \Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} F - m(m-1)f - mn f$.

其中 $\nabla_{S^n}, \nabla_{\mathbb{R}^{n+1}}$ 分别是 S^n 和 \mathbb{R}^{n+1} 上的梯度, $\Delta_{S^n}, \Delta_{\mathbb{R}^{n+1}}$ 分别是 S^n 和 \mathbb{R}^{n+1} 上的 Laplace 算子.

提示: 利用欧拉公式 $\langle (\nabla_{\mathbb{R}^{n+1}} F)|_z, z \rangle = mF(z)$.

练习 4.6 给定 $f \in \mathcal{D}(M)$. 定义 f 的 Hessian $\nabla^2 f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ 为

$$\nabla^2 f(X, Y) = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)(f) = \langle X, \nabla_Y(\nabla f) \rangle.$$

证明: (1) $\nabla^2 f$ 是一个张量(见定义 5.4.1);

(2) $\nabla^2 f$ 是对称的, 即 $\nabla^2 f(X, Y) = \nabla^2 f(Y, X)$;

(3) $\Delta f = \operatorname{Tr}(\nabla^2 f)$.

第五章 曲率

§5.1 曲率张量

设 (M, g) 是黎曼流形, ∇ 是 M 上的 Levi-Civita 联络.

定义5.1.1 M 的曲率(curvature) R 是指对 M 上的任意向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, 都对应一个映射 $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, 使得对任意的 $Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$R(X, Y)Z = (\nabla_{[X, Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y])Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z.$$

注 1 在部分参考书上, 例如在参考文献 [Hic71] 上将曲率定义为

$$R(X, Y)Z = ([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]})Z.$$

它与本书的定义相差一个符号, 这是读者需要注意的.

例 5.1.1 在欧氏空间 \mathbb{R}^n 上, 对任意的切向量场 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, 由于

$$\begin{aligned}\nabla_Y \nabla_X Z &= \nabla_Y (X(Z)) = Y(X(Z)), \\ \nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X (Y(Z)) = X(Y(Z)).\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}R(X, Y)Z &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= Y(X(Z)) - X(Y(Z)) + [X, Y](Z) \\ &= 0.\end{aligned}$$

所以, 欧氏空间的曲率是平凡的.

曲率是刻画黎曼流形局部性质的重要几何量之一. 直接根据定义不难证明下列命题.

命题5.1.2 对任意的 $X, X_i, Y, Y_i, Z, Z_i \in \mathfrak{X}(M)$ ($i = 1, 2$) 和 $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(M)$, M 的曲率 R 具有以下性质:

$$(1) \quad R(f_1 X_1 + f_2 X_2, Y)Z = f_1 R(X_1, Y)Z + f_2 R(X_2, Y)Z;$$

$$(2) R(X, f_1 Y_1 + f_2 Y_2)Z = f_1 R(X, Y_1)Z + f_2 R(X, Y_2)Z;$$

$$(3) R(X, Y)(f_1 Z_1 + f_2 Z_2) = f_1 R(X, Y)Z_1 + f_2 R(X, Y)Z_2.$$

命题5.1.3 第一 Bianchi 恒等式.

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

证明 利用 Levi-Civita 联络的无挠性和 Jacobi 恒等式, 我们有

$$\begin{aligned} & R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y \\ = & (\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z) + (\nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_{[Y, Z]} X) \\ & + (\nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_{[Z, X]} Y) \\ = & \nabla_Y [X, Z] + \nabla_X [Z, Y] + \nabla_Z [Y, X] - \nabla_{[X, Z]} Y - \nabla_{[Z, Y]} X - \nabla_{[Y, X]} Z \\ = & [Y, [X, Z]] + [X, [Z, Y]] + [Z, [Y, X]] \\ = & 0. \end{aligned}$$

证毕. ■

定义5.1.4 令 $R(X, Y, Z, T) = \langle R(X, Y)Z, T \rangle$, 则可将曲率 R 视为映射

$$R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{D}(M).$$

R 又称为曲率张量.

命题5.1.5 对任意的 $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$, 我们有

$$(1) R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0;$$

$$(2) R(X, Y, Z, T) = -R(Y, X, Z, T);$$

$$(3) R(X, Y, Z, T) = -R(X, Y, T, Z);$$

$$(4) R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y).$$

证明 (1) 根据第一 Bianchi 恒等式.

(2) 根据定义 5.1.1, 直接得到.

(3) 由于

$$\begin{aligned} & R(X, Y, T + Z, T + Z) \\ = & R(X, Y, T, T) + R(X, Y, Z, Z) + R(X, Y, T, Z) + R(X, Y, Z, T), \end{aligned}$$

故如果对任意的 $Z \in \mathfrak{X}(M)$, 都有 $R(X, Y, Z, Z) = 0$, 则 (3) 成立.

事实上, 由于联络和度量相适应, 故

$$R(X, Y, Z, Z) = \langle R(X, Y)Z, Z \rangle = \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle \\
&\quad - X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle + \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle + \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle \\
&= \frac{1}{2} Y (X \langle Z, Z \rangle) - \frac{1}{2} X (Y \langle Z, Z \rangle) + \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(4) 根据 (1), 我们分别有

$$\begin{aligned}
R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) &= 0, \\
R(Y, Z, T, X) + R(Z, T, Y, X) + R(T, Y, Z, X) &= 0, \\
R(Z, T, X, Y) + R(T, X, Z, Y) + R(X, Z, T, Y) &= 0, \\
R(T, X, Y, Z) + R(X, Y, T, Z) + R(Y, T, X, Z) &= 0.
\end{aligned}$$

将上面等式相加, 再利用性质 (2) 和 (3), 我们有

$$2R(Z, X, Y, T) + 2R(T, Y, Z, X) = 0.$$

于是,

$$R(Z, X, Y, T) = -R(T, Y, Z, X) = R(Y, T, Z, X).$$

证毕. ■

在局部上, 选取 M 的一个参数化 (X, U) , 令 $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. 定义

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R_{ijk}^l X_l,$$

其中, R_{ijk}^l 是 $X(U)$ 上的函数.

对于向量场 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, 令

$$X = \sum_i f_i X_i, \quad Y = \sum_j g_j X_j, \quad Z = \sum_k h_k X_k,$$

则根据命题 5.1.2,

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k} f_i g_j h_k R(X_i, X_j)X_k = \sum_{i,j,k,l} f_i g_j h_k R_{ijk}^l X_l.$$

设 Γ_{ij}^k 是联络系数, 即 $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$. 根据定义,

$$\begin{aligned}
R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k + \nabla_{[X_i, X_j]} X_k \\
&= \sum_l (\nabla_{X_j} (\Gamma_{ik}^l X_l) - \nabla_{X_i} (\Gamma_{jk}^l X_l))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_l \{ \Gamma_{ik}^l \nabla_{X_j} X_l + X_j(\Gamma_{ik}^l) X_l - \Gamma_{jk}^l \nabla_{X_i} X_l - X_i(\Gamma_{jk}^l) X_l \} \\
&= \sum_{l,s} (\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s X_s - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s X_s) + \sum_l (X_j(\Gamma_{ik}^l) X_l - X_i(\Gamma_{jk}^l) X_l),
\end{aligned}$$

所以由定义知

$$R_{ijk}^s = \sum_l (\Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s) + \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^s}{\partial x_i}. \quad (5.1)$$

由上面的讨论, 我们可以看出曲率算子 $R(X, Y)Z$ 在点 p 处的值只依赖于 X_p, Y_p, Z_p 以及函数 R_{ijk}^l 在 p 处的值. 这与联络的情形是不同的.

§5.2 截面曲率

给定点 $p \in M$, 设 $X, Y \in T_p M$, 则由 X 和 Y 所决定的平行四边形的面积为

$$|X \wedge Y| = \sqrt{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}.$$

由表达式不难看出, $|X \wedge Y| = 0$ 当且仅当 X 与 Y 线性相关.

命题5.2.1 设 $\sigma \subset T_p M$ 是一个二维线性子空间, X, Y 是 σ 的两个线性无关的切向量, 则

$$K(X, Y) := \frac{R(X, Y, X, Y)}{|X \wedge Y|^2}$$

与切向量 $X, Y \in \sigma$ 的选取无关.

证明 对 σ 的任意两个线性无关的向量 $\{X', Y'\}$, 由于通过基本线性变换可以将 $\{X, Y\}$ 变成 $\{X', Y'\}$, 故我们只需对下列情形验证命题成立即可.

- 1° $K(Y, X) = K(X, Y)$;
- 2° $K(X, Y + \lambda X) = K(X, Y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- 3° $K(X, \lambda Y) = K(X, Y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

根据定义不难验证上面等式成立. 证毕. ■

定义5.2.2 给定点 $p \in M$ 和 $T_p M$ 的一个二维线性子空间 σ , $K(p, \sigma) = K(X, Y)$ 称为在点 p 关于截面 σ 的截面曲率. 其中, X, Y 是 σ 中的两个线性无关的切向量.

特别地, 当 $\dim M = 2$ 时, K 又称为 Gauss 曲率.

命题5.2.3 黎曼流形 M 在点 p 处的曲率 R 由点 p 上的所有截面的截面曲率 K 唯一决定.

证明 1° 由于

$$R(X+Z, Y, X+Z, Y) = R(X, Y, X, Y) + R(Z, Y, Z, Y) + 2R(X, Y, Z, Y),$$

故 $R(X, Y, Z, Y)$ 由截面曲率 K 唯一决定.

2° 注意到

$$\begin{aligned} & R(X, Y, Z, W) + R(X, W, Z, Y) \\ &= R(X, Y+W, Z, Y+W) - R(X, Y, Z, Y) - R(X, W, Z, W), \quad (A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & R(X, Z, Y, W) + R(X, W, Y, Z) \\ &= R(X, Z+W, Y, Z+W) - R(X, Z, Y, Z) - R(X, W, Y, W), \quad (B) \end{aligned}$$

利用 (A) 和 (B), 考虑 $2 \times (A) + (B)$, 再利用第一 Bianchi 恒等式, 便可以得到

$$\begin{aligned} 3R(X, Y, Z, W) &= 2R(X, Y+W, Z, Y+W) + R(X, Z+W, Y, Z+W) \\ &\quad - 2R(X, Y, Z, Y) - 2R(X, W, Z, W) \\ &\quad - R(X, Z, Y, Z) - R(X, W, Y, W). \quad (C) \end{aligned}$$

最后, 从等式 (C) 及 1° 可以看出, $R(X, Y, Z, W)$ 由截面曲率 K 唯一决定. 证毕. ■

给定点 p , 设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是切空间 $T_p M$ 的一组标准正交基, 令

$$R_{ijkl} = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle,$$

根据命题 5.1.5, 我们有

$$(1) \quad R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0;$$

$$(2) \quad R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk};$$

$$(3) \quad R_{ijkl} = R_{klij}.$$

命题 5.2.4 给定点 $p \in M$, 设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是切空间 $T_p M$ 的一组正交基. 则对于任一截面 $\sigma \subset T_p M$, $K(p, \sigma) \equiv K_0$ 当且仅当

$$R_{ijkl} = K_0(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (5.2)$$

证明 \Leftarrow 对于任意的 $\sigma \subset T_p M$, 设 $X = \sum_i a_i e_i, Y = \sum_j b_j e_j \in \sigma$, 且满足

$$\begin{cases} \sum_i a_i^2 = \sum_j b_j^2 = 1, \\ \sum_i a_i b_i = 0, \end{cases}$$

则由定义可知

$$\begin{aligned}
 K(p, \sigma) &= R(X, Y, X, Y) = \sum_{i,j,k,l} R(a_i e_i, b_j e_j, a_k e_k, b_l e_l) \\
 &= \sum_{i,j,k,l} a_i b_j a_k b_l R_{ijkl} = K_0 \sum_{i,j,k,l} a_i b_j a_k b_l (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \\
 &= K_0.
 \end{aligned}$$

\Rightarrow 令 $\tilde{R}(X, Y, Z, T) = \langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle - \langle X, T \rangle \langle Y, Z \rangle$. 不难证明, \tilde{R} 满足命题 5.1.5 的全部性质. 此外, $\tilde{R}(X, Y, X, Y) = |X \wedge Y|^2$, 故

$$R(X, Y, X, Y) = K_0 |X \wedge Y|^2 = K_0 \tilde{R}(X, Y, X, Y).$$

参照命题 5.2.3 的证明方法, 我们可以得到

$$R(X, Y, Z, T) = K_0 \tilde{R}(X, Y, Z, T).$$

从而得到 (5.2). 证毕. ■

例 5.2.1 由例 4.1.5 我们知道, 对于紧李群 G (取双不变度量),

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2} [X, Y], \quad X, Y \in \text{Lie } G.$$

于是对任意的 $X, Y, Z \in \text{Lie } G$, 由 Jacobi 恒等式可得

$$\begin{aligned}
 R(X, Y)Z &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z \\
 &= \frac{1}{2} \{ \nabla_Y [X, Z] - \nabla_X [Y, Z] + [[X, Y], Z] \} \\
 &= \frac{1}{4} \{ [Y, [X, Z]] - [X, [Y, Z]] \} + \frac{1}{2} [[X, Y], Z] \\
 &= \frac{1}{4} [[X, Y], Z],
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 R(X, Y, X, Y) &= \langle R(X, Y)X, Y \rangle = \frac{1}{4} \langle [[X, Y], X], Y \rangle \\
 &= \frac{1}{4} |[X, Y]|^2 \geqslant 0.
 \end{aligned}$$

所以, 紧李群的截面曲率是非负的.

下面我们利用 (5.1) 式来计算 Lobatchevski 上半平面 H^2 的 Gauss 曲率.

例 5.2.2 H^2 的度量形式是 $ds^2 = \frac{1}{y^2} (dx^2 + dy^2)$, 故 $g_{ij} = y^{-2} \delta_{ij}$. 由例 3.2.2 我们知道,

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}, \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0.$$

代入等式 (5.1), 可得

$$R_{121}^2 = -\frac{1}{y^2}.$$

于是, H^2 的 Gauss 曲率为

$$K = \sum_l \langle R_{121}^l X_l, X_2 \rangle g_{11}^{-2} = R_{121}^2 g_{11}^{-1} = -1.$$

从上面的计算过程可以看出, 直接利用等式 (5.1) 来计算曲率是非常烦琐的. 后面我们将介绍活动标架来计算曲率, 它极大地简化了计算过程.

练习 2.1 (Riemann) 设 $K > 0$, $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x|^2 < \frac{4}{K}\}$, 它的度量形式为

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1 - \frac{K}{4}|x|^2)^2} dx_i^2.$$

证明: M 的截面曲率为 $-K$.

§5.3 Ricci 曲率和数量曲率

定义 5.3.1 给定点 $p \in M$, 对任意 $X, Y \in T_p M$, 线性映射 $T_p M \rightarrow T_p M$,

$$Z \mapsto R(X, Z)Y,$$

的迹称为 Ricci 张量, 记为 $\text{Ric}(X, Y)$.

设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是切空间 $T_p M$ 的一组正交基, 则对任意的 $X, Y \in T_p M$,

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, Y) &= \sum_i \langle R(X, e_i)Y, e_i \rangle = \sum_i R(X, e_i, Y, e_i) = \sum_i R(Y, e_i, X, e_i) \\ &= \text{Ric}(Y, X). \end{aligned}$$

因此, Ric 在 M 上是对称的.

定义 5.3.2 对点 p 处的单位切向量 X , 记 $\text{Ric}(X) = \text{Ric}(X, X)$, 称为在点 p 处沿 X 方向的 Ricci 曲率 (Ricci curvature).

对于 $T_p M$ 上的任一单位切向量 X , 选取切空间 $T_p M$ 的一组标准正交基 e_1, e_2, \dots, e_n , 使得 $e_1 = X$, 则有表达式

$$\operatorname{Ric}(X) = \operatorname{Ric}(X, X) = \sum_{i=2}^n R(e_1, e_i, e_1, e_i) = \sum_{i=2}^n K(e_1, e_i).$$

定义 5.3.3 对称双线性映射 $\operatorname{Ric} : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$(X, Y) \longmapsto \operatorname{Ric}(X, Y)$$

的迹称为点 p 处的数量曲率(scalar curvature). 记为 $S(p)$.

局部上, 选取正交标架场 e_1, e_2, \dots, e_n , 则数量曲率有表达式

$$S(p) = \sum_i \operatorname{Ric}(e_i, e_i) = \sum_{i \neq j} K(e_i, e_j) = 2 \sum_{i < j} K(e_i, e_j).$$

特别地, 当 $\dim M = 2$ 时, $S(p) = 2K(p)$.

练习 3.1 在参数化 (X, U) 下, 令 $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. 证明:

- (1) $\operatorname{Ric}(X_i, X_j) = \sum_k R_{ikj}^k$,
- (2) 数量曲率 $S = \sum_{i,j,k} g^{ij} R_{ikj}^k$.

§5.4 张量

定义 5.4.1 设 M 是一个微分流形, 映射

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_r \longrightarrow \mathscr{D}(M),$$

称为 r 阶张量, 如果对任意的 $X, Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$ 和 $f, g \in \mathscr{D}(M)$, 都有

$$\begin{aligned} & T(Y_1, Y_2, \dots, fX + gY_i, \dots, Y_r) \\ &= fT(Y_1, Y_2, \dots, X, \dots, Y_r) + gT(Y_1, Y_2, \dots, Y_i, \dots, Y_r). \end{aligned}$$

特别地, 从定义可以看出, $T(Y_1, \dots, Y_r)$ 的值只与向量场 Y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 在该点处的取值有关.

例 5.4.1 度量张量 $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathscr{D}(M)$ 是一个 2 阶对称张量.

例 5.4.2 曲率张量 $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathscr{D}(M)$,

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle.$$

它是一个 4 阶张量.

例 5.4.3 Ricci 张量 $\text{Ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathscr{D}(M)$ 是一个 2 阶对称张量.

注 1 联络 ∇ 和散度 div 都不是张量.

定义 5.4.2 设 T 是一个 r 阶张量, T 的共变微分 ∇T 是一个 $r+1$ 阶张量, 定义如下

$$\begin{aligned} (\nabla T)(Y_1, Y_2, \dots, Y_r, Z) &= Z(T(Y_1, Y_2, \dots, Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, \dots, Y_r) \\ &\quad - \dots - T(Y_1, Y_2, \dots, \nabla_Z Y_r). \end{aligned}$$

于是, 对任意的 $Z \in \mathfrak{X}(M)$, 令

$$(\nabla_Z T)(Y_1, Y_2, \dots, Y_r) = (\nabla T)(Y_1, Y_2, \dots, Y_r, Z).$$

则 $\nabla_Z T$ 是 r 阶张量, 称为张量 T 关于向量场 Z 的共变导数.

例 5.4.4 对于度量张量 g , 它的共变微分为

$$(\nabla g)(X, Y, Z) = (\nabla_Z g)(X, Y) = Z\langle X, Y \rangle - \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle.$$

所以, 联络与度量相适应当且仅当 $\nabla g = 0$.

命题 5.4.3 (第二 Bianchi 恒等式) 设 R 是曲率张量, 对任意的 $X, Y, Z, W, T \in \mathfrak{X}(M)$, 有恒等式

$$(\nabla R)(X, Y, Z, W, T) + (\nabla R)(X, Y, W, T, Z) + (\nabla R)(X, Y, T, Z, W) = 0.$$

证明 由于 ∇R 是一个张量, 故只需证明命题在任一个点上成立即可. 对任意点 $p \in M$ 的测地球上选取一组正交标架场 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 且满足 $(\nabla_{e_i} e_j)|_p = 0$, 则

$$\begin{aligned} \nabla R(e_i, e_j, e_k, e_l, e_h)|_p &= (\nabla_{e_h} R)(e_i, e_j, e_k, e_l)|_p = e_h \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle|_p \\ &= \langle \nabla_{e_h} R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle|_p = \langle \nabla_{e_h} R(e_k, e_l)e_i, e_j \rangle|_p. \end{aligned}$$

根据定义,

$$\begin{aligned} \nabla R(e_i, e_j, e_k, e_l, e_h)|_p &= \langle \nabla_{e_h} \nabla_{e_l} \nabla_{e_k} e_i, e_j \rangle|_p - \langle \nabla_{e_h} \nabla_{e_k} \nabla_{e_l} e_i, e_j \rangle|_p + \\ &\quad \langle \nabla_{e_h} \nabla_{[e_k, e_l]} e_i, e_j \rangle|_p. \end{aligned} \quad (5.3)$$

另一方面, 由于

$$[e_k, e_l]|_p = (\nabla_{e_k} e_l)|_p - (\nabla_{e_l} e_k)|_p = 0,$$

故 $R([e_k, e_l], e_h, e_i, e_j)|_p = 0$, 即

$$\langle \nabla_{e_h} \nabla_{[e_k, e_l]} e_i, e_j \rangle|_p - \langle \nabla_{[e_k, e_l]} \nabla_{e_h} e_i, e_j \rangle|_p + \langle \nabla_{[[e_k, e_l], e_h]} e_i, e_j \rangle|_p = 0. \quad (5.4)$$

根据等式 (5.3) 和 (5.4), 再利用 Jacobi 恒等式, 最后有

$$\begin{aligned} & \nabla R(e_i, e_j, e_k, e_l, e_h)|_p + \nabla R(e_i, e_j, e_l, e_h, e_k)|_p + \nabla R(e_i, e_j, e_h, e_k, e_l)|_p \\ &= R(e_l, e_h, \nabla_{e_k} e_i, e_j)|_p + R(e_h, e_k, \nabla_{e_l} e_i, e_j)|_p + R(e_k, e_l, \nabla_{e_h} e_i, e_j)|_p \\ &= 0. \end{aligned}$$

证毕. ■

定义 5.4.4 设 (M, g) 是黎曼流形, 若对任意的点 $p \in M$ 以及 $T_p M$ 上的任意截面 σ , 截面曲率 $K(p, \sigma) \equiv K_0$, 则称 (M, g) 是常曲率空间 (space of constant curvature).

定理 5.4.5 (F. Schur) 设 M^n 是连通的黎曼流形, 且 $\dim M \geq 3$. 若对任意的 $p \in M$, $\sigma \subset T_p M$, $K(p, \sigma)$ 与 σ 的选取无关, 则 $K(p, \sigma)$ 与点 p 的选取无关, 因而 M 是常曲率空间.

证明 构造张量 \tilde{R} 如下, 对任意的 $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\tilde{R}(X, Y, Z, T) = \langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle - \langle X, T \rangle \langle Y, Z \rangle.$$

不难验证 $\nabla \tilde{R} = 0$.

根据命题 5.2.4, 存在 $K \in \mathcal{D}(M)$, 使得 $R = K\tilde{R}$. 于是,

$$\nabla_X R = \nabla_X (K\tilde{R}) = X(K)\tilde{R} + K\nabla_X \tilde{R} = X(K)\tilde{R}.$$

根据第二 Bianchi 恒等式,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla R(W, Z, X, Y, U) + \nabla R(W, Z, Y, U, X) + \nabla R(W, Z, U, X, Y) \\ &= U(K)\tilde{R}(W, Z, X, Y) + X(K)\tilde{R}(W, Z, Y, U) + \\ &\quad Y(K)\tilde{R}(W, Z, U, X). \end{aligned} \tag{5.5}$$

固定点 $p \in M$, 由于 $n \geq 3$, 我们可以在点 p 处的切空间上选取向量 $X, Y, Z \in T_p M$, 使得

$$\begin{cases} X, Y \neq 0, |Z| = 1, \\ \langle X, Y \rangle = \langle Y, Z \rangle = \langle Z, X \rangle = 0. \end{cases}$$

令 $U = Z$, 将它们代入等式 (5.5) 可知, 对任意的 $W \in T_p M$,

$$\langle X(K)Y - Y(K)X, W \rangle = 0.$$

故 $X(K)Y - Y(K)X = 0$, 所以对任意的 $X \in T_p M$,

$$X(K) = 0.$$

又因为 M 是连通流形, 所以 K 是 M 上的常值函数. 证毕. ■

定义5.4.6 设 (M, g) 是一个黎曼流形, 若 $\nabla R = 0$, 则称 M 是局部对称空间.

练习 4.1 (1) 若 M 是常曲率黎曼流形, 则 M 是局部对称空间.

(2) 设 G 是紧李群, 若 G 取双不变度量, 则 G 是局部对称空间.

(提示: $R(X, Y, Z, W) = \frac{1}{4} \langle [X, Y], [Z, W] \rangle$.)

定义5.4.7 若存在一个函数 $\lambda \in \mathcal{D}(M)$, 对任意的 $p \in M$, $X, Y \in T_p M$, 都有

$$\text{Ric}(X, Y) = \lambda(p) \langle X, Y \rangle,$$

则称 M 是 Einstein 流形.

根据定义可以看出, M 是 Einstein 流形, 当且仅当对任意的点 p 以及单位切向量 $X \in T_p M$, 有

$$\text{Ric}(X) = \lambda(p).$$

下面的命题类似于 Schur 定理.

命题5.4.8 设 (M, g) 是 Einstein 流形, $\text{Ric} = \lambda g$. 若 $n = \dim M \geq 3$, 则 λ 是个常数. 特别地, 当 $\dim M = 3$ 时, 截面曲率 K 是一个常数.

证明 1° 对任意的 $p \in M$, 选取点 p 的一个测地正交标架 $\{e_i\}$, 使得 $(\nabla_{e_i} e_j)_p = 0$. 由第二 Bianchi 恒等式, 可得

$$e_s(R_{hijk}) + e_j(R_{hiks}) + e_k(R_{hisj}) = 0.$$

注意到 M 是 Einstein 流形,

$$\begin{aligned} \sum_{h,i,j,k} \delta_{hj} \delta_{ik} e_s(R_{hijk}) &= n e_s(\lambda), \\ \sum_{h,i,j,k} \delta_{hj} \delta_{ik} e_j(R_{hiks}) &= -e_s(\lambda), \\ \sum_{h,i,j,k} \delta_{hj} \delta_{ik} e_k(R_{hisj}) &= -e_s(\lambda). \end{aligned}$$

所以

$$(n-2)e_s(\lambda) = 0.$$

由于 $n \geq 3$, 故 $e_s(\lambda) = 0$, λ 为常值函数.

2° 当 $n = 3$ 时, 设 e_1, e_2, e_3 是点 p 处的一组正交基,

$$\text{Ric}(e_1) = K(e_1, e_2) + K(e_1, e_3), \quad (\text{A})$$

$$\text{Ric}(e_2) = K(e_2, e_1) + K(e_2, e_3), \quad (\text{B})$$

$$\text{Ric}(e_3) = K(e_3, e_1) + K(e_3, e_2). \quad (\text{C})$$

将 (A) + (B) - (C), 整理后可得:

$$\lambda = 2K(e_1, e_2).$$

即截面曲率 $K = \frac{\lambda}{2}$ 是一个常数. 证毕. ■

§5.5 活动标架

定义5.5.1 设 M 是微分流形, M 上的 k 阶反对称张量称为 k 次外微分形式, 简称 k -形式.

若 α 是 k -形式, 则对任意一个 k 置换 σ , 有

$$\alpha(X_1, X_2, \dots, X_k) = \text{sign}(\sigma) \cdot \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}).$$

其中 sign 表示置换的符号, 即

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ 是偶置换,} \\ -1, & \sigma \text{ 是奇置换.} \end{cases}$$

我们用 $\wedge^k(M)$ 表示 M 上所有 k -形式全体的集合, 再约定 $\wedge^0(M) = \mathcal{D}(M)$. 显然, $\wedge^k(M)$ 是 $\mathcal{D}(M)$ 模.

下面我们引入外积运算.

定义5.5.2 对于 $\alpha \in \wedge^p(M), \beta \in \wedge^q(M), X_1, X_2, \dots, X_{p+q} \in \mathfrak{X}(M)$, 令

$$\begin{aligned} & (\alpha \wedge \beta)(X_1, X_2, \dots, X_{p+q}) \\ &= \sum_{\sigma} \frac{\text{sign}(\sigma)}{p!q!} \alpha(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(p)}) \beta(X_{\sigma(p+1)}, X_{\sigma(p+2)}, \dots, X_{\sigma(p+q)}) \end{aligned}$$

易知 $\alpha \wedge \beta$ 是 $(p+q)$ -形式, 称为外微分形式 α 和 β 的外积(exterior product).

根据定义, 当 $\alpha, \beta \in \wedge^1(M)$ 时, 对任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, 有

$$(\alpha \wedge \beta)(X, Y) = \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X).$$

进一步, 若 $\alpha_i \in \wedge^1(M), X_i \in \mathfrak{X}(M)$, 则

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_m)(X_1, X_2, \dots, X_m) \\ &= \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) \alpha_1(X_{\sigma(1)}) \alpha_2(X_{\sigma(2)}) \dots \alpha_m(X_{\sigma(m)}) \\ &= \det(\alpha_i(X_j)). \end{aligned}$$

不难验证, 外积满足下列运算规律.

命题5.5.3 设 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \wedge^p(M)$, $\beta, \beta_1, \beta_2 \in \wedge^q(M)$, $\gamma \in \wedge^r(M)$, 则

$$(1) (\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = \alpha_1 \wedge \beta + \alpha_2 \wedge \beta;$$

$$(2) \alpha \wedge (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \wedge \beta_1 + \alpha \wedge \beta_2;$$

$$(3) \alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha;$$

$$(4) (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

若假设微分流形 M 的维数为 n . 由定义可以看出, 当 $k > n$ 时, $\wedge^k(M) = 0$. 令 $\wedge(M) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \wedge^k(M)$, 则 $\wedge(M)|_p$ 是 2^n 维向量空间, 且关于外积构成一个结合代数, 称为 $T_p M$ 上的外代数或 Grassmann 代数.

对任意的 $f \in \mathcal{D}(M)$ 和 $X \in \mathfrak{X}(M)$, $df(X) = X(f)$, 故 f 的微分 df 是 M 上的 1-形式. 我们现在把微分 d 推广到外微分形式 $\wedge(M)$ 上.

定义5.5.4 设 M 是微分流形, 定义映射 $d: \wedge^k(M) \longrightarrow \wedge^{k+1}(M)$,

$$(d\omega)(X_0, X_1, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i(\omega(X_0, X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k)) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k).$$

其中, $X_0, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega \in \wedge^k(M)$, \widehat{X}_i 表示式中没有 X_i .

可以验证, d 的定义是合理的, $d\omega$ 是一个 $(k+1)$ 次形式. 称它为外微分算子 (exterior differential operator). 特别地, 当 $\omega \in \wedge^1(M)$ 时, 对任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

在局部上, 选取 M 的一个参数化 (X, U) , 则 $dx_i \in \wedge^1(U)$ 且 $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$. 故对任意的 $\omega \in \wedge^k(U)$, ω 都可以表示为 $\omega = \sum f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, 简记为 $\omega = \sum f_I dx_I$. 显然有

$$d\omega = \sum df_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

命题5.5.5 外微分 $d: \wedge^k(M) \longrightarrow \wedge^{k+1}(M)$ 具有以下性质:

(1) d 是线性的. 即对任意的 $\alpha, \beta \in \wedge^p(M)$ 以及 $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, 有

$$d(\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta) = \lambda_1 d\alpha + \lambda_2 d\beta;$$

(2) 对任意的 $f \in \mathcal{D}(M)$, df 就是 f 的微分;

(3) $d^2 = d \circ d = 0$;

(4) 对任意的 $\alpha \in \wedge^p(M), \beta \in \wedge^q(M)$,

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta.$$

证明 (1) 和 (2) 的证明是平凡的.

(3) 若 $f \in \wedge^0(M) = \mathcal{D}(M)$, 由于对任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, 由 $d(df)$ 的定义,

$$\begin{aligned} d(df)(X, Y) &= X(df(Y)) - Y(df(X)) - df([X, Y]) \\ &= X(Y(f)) - Y(X(f)) - [X, Y](f) \\ &= 0, \end{aligned}$$

所以 $d^2 f = 0$.

对任意的 $\omega \in \wedge^k(M)$, 设在参数化 (X, U) 下它可表成 $\omega = \sum f_I dx_I$, 则

$$d^2 \omega = \sum (d^2 f_I) \wedge dx_I = 0.$$

(4) 选取 M 的一个参数化 (X, U) , 设 $\alpha = \sum f_I dx_I, \beta = \sum g_J dx_J$, 利用 (1)~(3), 我们有

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= \sum (df_I \cdot g_J + f_I \cdot dg_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum ((df_I \wedge dx_I) \wedge (g_J dx_J) + (-1)^p (f_I dx_I) \wedge (dg_J \wedge dx_J)) \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

证毕. ■

由命题 5.5.5 知, 外微分 d 满足 $d^2 = 0$. 这意味着 d 可以看作上链

$$0 \xrightarrow{d_{-1}} \wedge^0(M) \xrightarrow{d_0} \cdots \xrightarrow{d_{k-1}} \wedge^k(M) \xrightarrow{d_k} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} \wedge^n(M) \xrightarrow{d_n} 0$$

的上边缘算子. 其中, $d_k = d|_{\wedge^k(M)}$.

定义 5.5.6 令 $Z^k(M) = \text{Ker } d_k, B^k(M) = \text{Im } d_{k-1}$. $Z^k(M)$ 中的元素称为 k 次闭形式(closed form); $B^k(M)$ 中的元素称为 k 次恰当形式(exact form).

商空间 $H_{DR}^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$ 称为光滑流形 M 的第 k 个 de Rham 上同调群.

需要注意的是, de Rham 上同调群 $H_{DR}^k(M)$ 是由光滑流形的光滑结构给出的. 但 de Rham 定理¹ 说明, 当 M 是微分流形时, de Rham 上同调群 H_{DR}^k 与 M 的实系数奇异上同调群 $H^k(M)$ 是同构的. 因此, de Rham 上同调群是流形的拓扑不变量.

¹定理的证明见参考文献 [War71].

例 5.5.1 $H_{DR}^1(S^2) = 0$.

单位球面 S^2 对应的上链为

$$0 \longrightarrow \wedge^0(S^2) \xrightarrow{d_0} \wedge^1(S^2) \xrightarrow{d_1} \wedge^2(S^2) \longrightarrow 0.$$

于是 $H_{DR}^1(S^2) = 0$ 当且仅当 $Z^1(S^2) = B^1(S^2)$. 即对任意的 $\omega \in Z^1(S^2)$, 都存在一个函数 $F \in \mathcal{D}(S^2)$, 使得 $\omega = dF$.

作球极投影, 对任意的 $\omega \in Z^1(S^2)$, 在 $S^2 - \{N\}$ 上, 设 $\omega = f dx + g dy$, 则

$$d\omega = df \wedge dx + dg \wedge dy = (g_x - f_y) dx \wedge dy.$$

于是, $d\omega = 0$ 当且仅当 $g_x = f_y$. 从而曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(x,y)} f(\xi, \eta) d\xi + g(\xi, \eta) d\eta$ 与路径选取无关, 选取特殊路径有

$$F_1(x, y) = \frac{1}{2} \left(\int_0^x f(\xi, y) d\xi + \int_0^y g(x, \eta) d\eta \right),$$

不难看出, 在 $S^2 - \{N\}$ 上, $\omega = dF_1$.

同样地, 在 $S^2 - \{S\}$ 上, 存在 F_2 , 使得 $\omega = dF_2$.

由于在连通的 $S^2 - \{N, S\}$ 上, $d(F_1 - F_2) = 0$, 故存在常数 c , 使得 $F_1 - F_2 = c$.

再令

$$F(p) = \begin{cases} F_1, & p \in S^2 - \{N\}, \\ F_2 + c, & p \in S^2 - \{S\}. \end{cases}$$

容易验证, $F \in \mathcal{D}(S^2)$, 且 $\omega = dF$. 于是, $Z^1(S^2) = B^1(S^2)$. 即

$$H_{DR}^1(S^2) = 0.$$

注 1 一般地, 从定义出发直接计算 de Rham 上同调群是非常困难的. 事实上, 利用 Mayer-Vietoris 序列偶可以很容易地计算出 S^n 的上同调. 见参考文献 [BT82].

$$H_{DR}^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, n, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

下面我们回到黎曼几何中来. 设 (M, g) 是黎曼流形, ∇ 是它上的 Levi-Civita 联络.

命题 5.5.7 若 $\omega \in \wedge^k(M)$, 则对任意的 $X_0, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$,

$$d\omega(X_0, X_1, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i (\nabla_{X_i} \omega)(X_0, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k),$$

证明 根据外微分 d 和共变导数的定义直接验证. 事实上,

$$\begin{aligned}
 & (d\omega)(X_0, X_1, \dots, X_k) \\
 = & \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i(\omega(X_0, X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k)) + \\
 & \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k) \\
 = & \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k)) + \\
 & \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega(\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i, X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k) \\
 = & \sum_{i=0}^k (-1)^i (\nabla_{X_i} \omega)(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k).
 \end{aligned}$$

证毕. ■

特别地, 若 ω 是一次形式, 那么对任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$d\omega(X, Y) = \nabla\omega(Y, X) - \nabla\omega(X, Y);$$

若 ω 是二次形式, 那么对任意的 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$d\omega(X, Y, Z) = \nabla\omega(X, Y, Z) + \nabla\omega(Y, Z, X) + \nabla\omega(Z, X, Y).$$

现在, 我们开始在黎曼流形上引入活动标架理论. 在 M 的某个开集 U 上选取一组标准正交标架场 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

定义度量 1-形式 $\theta_i \in \wedge^1(U)$, 使得对任意的 $X \in \mathfrak{X}(U)$,

$$\theta_i(X) = \langle e_i, X \rangle.$$

故 $\theta_i(e_j) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. 于是, 对任意的 $X \in \mathfrak{X}(U)$,

$$X = \sum_i \theta_i(X) e_i, \quad \langle X, X \rangle = \sum_i (\theta_i(X))^2.$$

所以度量形式可表成

$$ds^2 = \sum_i \theta_i^2.$$

进一步令

$$\omega_{ij}(X) = \langle \nabla_X e_i, e_j \rangle = \theta_j(\nabla_X e_i), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(U).$$

显然 $\omega_{ij} \in \wedge^1(U)$, 且满足

$$\nabla_X e_i = \sum_j \omega_{ij}(X) e_j.$$

称 $\{\omega_{ij}\}$ 为联络形式(connection form).

由于联络与度量相适应, 则对任意的 $X \in \mathfrak{X}(U)$,

$$\omega_{ij}(X) = \langle \nabla_X e_i, e_j \rangle = X \langle e_i, e_j \rangle - \langle e_i, \nabla_X e_j \rangle = -\omega_{ji}(X),$$

所以我们有

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0. \quad (\text{d1})$$

下面我们定义曲率2-形式 $\{R_{ij}\}$. 对任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, 令

$$R_{ij}(X, Y) = R(X, Y, e_i, e_j).$$

于是,

$$R(X, Y) e_i = \sum_j R_{ij}(X, Y) e_j.$$

记 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T$, 联络方阵 $\omega = (\omega_{ij})_{n \times n}$, 曲率方阵 $R = (R_{ij})_{n \times n}$, 我们有

命题5.5.8 (Cartan 第一结构方程) 设 θ, ω 分别是 $U \subset M$ 上的度量1-形式列向量和联络方阵, 则

$$d\theta = \omega \wedge \theta. \quad (\text{d2})$$

也就是说, $d\theta_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j$.

证明 对任意的 $X, Y \in \wedge^2(U)$, 由于

$$\begin{aligned} & \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \\ &= \sum_i \nabla_X (\theta_i(Y) e_i) - \nabla_Y (\theta_i(X) e_i) - \theta_i([X, Y]) e_i \\ &= \sum_i \{X(\theta_i(Y)) - Y(\theta_i(X)) - \theta_i([X, Y])\} e_i + \\ & \quad \sum_{i,j} \{\theta_i(Y) \omega_{ij}(X) e_j - \theta_i(X) \omega_{ij}(Y) e_j\} \\ &= \sum_i (d\theta_i)(X, Y) e_i + \sum_{i,j} (\omega_{ij} \wedge \theta_i)(X, Y) e_j \\ &= \sum_i \{(d\theta_i - \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j)(X, Y)\} e_i, \end{aligned}$$

又因为联络是无挠的, 故 $(d\theta_i - \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j)(X, Y) = 0$. 所以

$$d\theta_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j.$$

证毕. ■

命题5.5.9 (Cartan 第二结构方程) 设 ω, R 分别是 $U \subset M$ 上正交标架场 $\{e_i\}$ 所对应的联络方阵和曲率方阵, 则

$$d\omega = \omega \wedge \omega - R. \quad (d3)$$

也就是说, $d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - R_{ij}$.

证明 因为对任意的 $X, Y \in \wedge^2(U)$, 有

$$\begin{aligned} \sum_j R_{ij}(X, Y)e_j &= R(X, Y)e_i = \nabla_Y \nabla_X e_i - \nabla_X \nabla_Y e_i + \nabla_{[X, Y]} e_i \\ &= \sum_j \nabla_Y (\omega_{ij}(X)e_j) - \nabla_X (\omega_{ij}(Y)e_j) + \omega_{ij}([X, Y])e_j \\ &= \sum_j \{Y(\omega_{ij}(X)) - X(\omega_{ij}(Y)) + \omega_{ij}([X, Y])\}e_j + \\ &\quad \sum_{j,k} \{\omega_{ij}(X)\omega_{jk}(Y) - \omega_{ij}(Y)\omega_{jk}(X)\}e_k \\ &= \sum_j \left(\sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - d\omega_{ij} \right) (X, Y)e_j. \end{aligned}$$

这就证明了 (d3). 证毕. ■

例 5.5.2 第一 Bianchi 恒等式.

对等式 (d2) 两边分别作外微分, 可得:

$$\begin{aligned} 0 &= d(d\theta) = d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta - \omega \wedge d\theta \\ &= (\omega \wedge \omega - R) \wedge \theta - \omega \wedge (\omega \wedge \theta) \\ &= -R \wedge \theta, \end{aligned}$$

所以

$$R \wedge \theta = 0. \quad (d4)$$

也就是说, 对任意的 i , $\sum_j R_{ij} \wedge \theta_j = 0$. 我们也将等式 (d4) 称为第一 Bianchi 恒等式. 事实上, 更明白地说

$$0 = \sum_j R_{ij} \wedge \theta_j(e_k, e_l, e_s)$$

$$\begin{aligned}
 &= R_{is}(e_k, e_l) + R_{ik}(e_l, e_s) + R_{il}(e_s, e_k) \\
 &= R_{iskl} + R_{ikls} + R_{ilsk}.
 \end{aligned}$$

这样, 我们便得到了第一 Bianchi 恒等式.

例 5.5.3 第二 Bianchi 恒等式.

类似地, 我们对等式 (d3) 两边分别作外微分, 有

$$\begin{aligned}
 0 &= d(d\omega) = d(\omega \wedge \omega) - dR = d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega - dR \\
 &= (\omega \wedge \omega - R) \wedge \omega - \omega \wedge (\omega \wedge \omega - R) - dR \\
 &= \omega \wedge R - R \wedge \omega - dR.
 \end{aligned}$$

故我们有

$$dR = \omega \wedge R - R \wedge \omega. \quad (d5)$$

即 $dR_{ij} = \sum_k (\omega_{ik} \wedge R_{kj} - R_{ik} \wedge \omega_{kj})$. 等式 (d5) 为第二 Bianchi 恒等式. 这是因为对任意的点 $p \in U \subset M$, 选取正交标架场 $\{e_i\}$, 使得 $(\nabla_{e_i} e_j)|_p = 0$. 故 $\omega_{ij}|_p = 0$. 则由定义 5.5.4,

$$\begin{aligned}
 dR_{ij}(e_h, e_l, e_s)|_p &= e_h(R_{ij}(e_l, e_s))|_p + e_l(R_{ij}(e_s, e_h))|_p + e_s(R_{ij}(e_h, e_l))|_p, \\
 \sum_k (\omega_{ik} \wedge R_{kj} - R_{ik} \wedge \omega_{kj})(e_h, e_l, e_s)|_p &= 0.
 \end{aligned}$$

从上面的等式不难看出, 等式 (d5) 等价于第二 Bianchi 恒等式.

定理5.5.10 对开集 $U \subset M$, 设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 $\mathfrak{X}(U)$ 上的正交标架场, 则存在唯一一组 (n^2 个) 1-形式 ω_{ij} , 满足

$$\begin{cases} d\theta_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j, \\ \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

其中, $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ 是 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 的对偶标架场.

证明 1° 存在性. 定义 1-形式

$$\omega_{ij}(X) = \langle \nabla_X e_i, e_j \rangle, \quad X \in \mathfrak{X}(U).$$

容易验证, ω_{ij} 满足条件 (Cartan 第一结构方程). 这便证明了存在性.

2° 假设 ω_{ij} 和 $\tilde{\omega}_{ij}$ 都满足

$$\begin{cases} d\theta_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j, \\ \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} d\theta_i = \sum_j \tilde{\omega}_{ij} \wedge \theta_j, \\ \tilde{\omega}_{ij} + \tilde{\omega}_{ji} = 0. \end{cases}$$

令 $\Omega_{ij} = \omega_{ij} - \tilde{\omega}_{ij}$, 则有

$$\begin{cases} \sum_j \Omega_{ij} \wedge \theta_j = 0, \end{cases} \quad (5.7)$$

$$\begin{cases} \Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

设 $\Omega_{ij} = \sum_k f_{ijk} \theta_k$, 代入等式 (5.7), 可得

$$0 = \sum_j \Omega_{ij} \wedge \theta_j = \sum_{j,k} f_{ijk} \theta_k \wedge \theta_j.$$

故 $f_{ijk} = f_{ikj}$.

又根据 (5.8), 有

$$f_{ijk} = -f_{jik}.$$

于是,

$$f_{ijk} = -f_{jik} = -f_{jki} = f_{kji} = f_{kij} = -f_{ikj} = -f_{ijk}.$$

即, $f_{ijk} = 0$. 这样便得到, $\omega_{ij} = \tilde{\omega}_{ij}$. 这就证明了唯一性. 证毕. ■

根据定理 5.5.10, 若我们通过直接求解方程组 (5.6) 得到 ω_{ij} , 则它们必是黎曼流形的联络形式. 于是, 再根据 Cartan 第二结构方程 (d3), 便可求得流形的曲率形式.

特别地, 对于维数为 2 的黎曼流形 M , 它的结构方程可写成,

$$\begin{cases} d\theta_1 = \omega_{12} \wedge \theta_2, \\ d\theta_2 = -\omega_{12} \wedge \theta_1, \\ d\omega_{12} = -R_{12}. \end{cases} \quad (5.9)$$

于是, M 的 Gauss 曲率为 $K = R_{12}(e_1, e_2) = -d\omega_{12}(e_1, e_2)$. 因此,

$$d\omega_{12} = -K\theta_1 \wedge \theta_2. \quad (d6)$$

下面我们利用等式 (d6), 计算 2 维黎曼流形的 Gauss 曲率.

例 5.5.4 Lobatchevski 上半平面 H^2 .

我们知道 $H^2 = \{(x, y) | y > 0\}$ 的度量形式为

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \left(\frac{dx}{y}\right)^2 + \left(\frac{dy}{y}\right)^2.$$

令 $\theta_1 = \frac{dx}{y}$, $\theta_2 = \frac{dy}{y} = d \ln y$, 则

$$d\theta_1 = -\frac{1}{y^2} dy \wedge dx = \frac{1}{y^2} dx \wedge dy = \frac{1}{y} dx \wedge \theta_2,$$

$$d\theta_2 = 0.$$

根据方程 (5.9). 可得 $\omega_{12} = \frac{1}{y} dx$, 于是,

$$d\omega_{12} = \frac{1}{y^2} dx \wedge dy = \theta_1 \wedge \theta_2.$$

因此, $K = -1$. 也就是说, H^2 是 Gauss 曲率为 -1 的常曲率空间.

例 5.5.5 标准球面 S^2 .

设 $U = \{(x_1, x_2) | 0 < x_1 < \pi, 0 < x_2 < 2\pi\}$, 取球面 S^2 的一个参数化 (X, U) ,

$$X(x_1, x_2) = (\cos x_1, \sin x_1 \cos x_2, \sin x_1 \sin x_2), \quad (x_1, x_2) \in U.$$

则在参数化 (X, U) 下, S^2 的度量形式可写成

$$ds^2 = dx_1^2 + \sin^2 x_1 dx_2^2.$$

令 $\theta_1 = dx_1$, $\theta_2 = \sin x_1 dx_2$, 我们有

$$d\theta_1 = 0,$$

$$d\theta_2 = \cos x_1 dx_1 \wedge dx_2 = -\cos x_1 dx_2 \wedge \theta_1.$$

因此,

$$\omega_{12} = \cos x_1 dx_2,$$

$$d\omega_{12} = -\sin x_1 dx_1 \wedge dx_2 = -\theta_1 \wedge \theta_2.$$

所以, $X(U)$ 上的 Gauss 曲率为 $K = 1$. 由连续性, S^2 的 Gauss 曲率恒为 1.

练习 5.1 设黎曼流形 M^2 的度量形式为 $ds^2 = E dx^2 + G dy^2$. 证明: M 的 Gauss 曲率为

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_y}{\sqrt{EG}} \right)_y + \left(\frac{G_x}{\sqrt{EG}} \right)_x \right\}.$$

注 2 对于 M^2 上的任一点, 一定存在参数化 (X, U) , 使得 M^2 的度量形式为

$$ds^2 = \lambda^2(x_1, x_2)(dx_1^2 + dx_2^2), \quad \lambda \neq 0.$$

这样的参数化称为等温参数. 见参考文献 [PC02].

例 5.5.6 Lobatchevski 空间 H^n .

我们知道, H^n 的度量形式为

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2}{x_n^2}.$$

令 $\theta_1 = dx_1/x_n, \dots, \theta_n = dx_n/x_n$, 则根据 (5.6), 可得

$$\begin{cases} \omega_{ij} = 0, & \text{如果 } i, j \leq n-1, \\ \omega_{nk} = -\frac{dx_k}{x_n} = -\theta_k, & k \leq n-1. \end{cases}$$

故根据 Cartan 第二结构方程, 有

$$R_{ij} = \sum_{A=1}^n \omega_{iA} \wedge \omega_{Aj} - d\omega_{ij} = -\theta_i \wedge \theta_j.$$

所以, 切平面 $\sigma = \text{span}(e_i, e_j)$ 的截面曲率为

$$K(e_i, e_j) = R_{ij}(e_i, e_j) = -1.$$

更一般地, 对任意的 i, j, k, l , 有

$$R_{ijkl} = -(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}).$$

即 H^n 是截面曲率为 -1 的常曲率空间.

练习 5.2 设 $D^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1\}$, 它的度量形式为

$$ds^2 = \frac{4(dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2)}{(1 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2))^2}.$$

证明: D^n 是截面曲率为 -1 的常曲率空间.

练习 5.3 试求标准球面 S^n 的截面曲率.

§5.6 Gauss-Bonnet 定理

Gauss-Bonnet 定理是大范围微分几何学的一个经典定理, 它建立了几何(局部)和拓扑(整体)之间的联系. 本节只证明 2 维黎曼流形上的 Gauss-Bonnet 定理, 并对高维的 Gauss-Bonnet-Chern 定理作一个介绍.

为了说明 Gauss-Bonnet 定理, 我们先介绍拓扑学中的一些概念.

定义 5.6.1 流形 M^n 的 Euler 示性数(Eular characteristic)定义为它的各维 Betti 数的交错和. 记为 $\chi(M)$. 也就是说,

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i.$$

这里 $\beta_i = \text{rank } H_i(M, \mathbb{Z})$ 是 M 的第 i 个整系数同调群 $H_i(M, \mathbb{Z})$ 的秩, 即自由部分 \mathbb{Z} 的个数.

例 5.6.1 对于标准球面 S^n , 由于

$$H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, n, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

因此, 球面 S^n 的 Euler 示性数为 $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$. 见参考文献 [Jia06].

若将 M 作胞腔剖分, 用 α_i 表示该剖分中 i 维胞腔的个数, 我们有

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i.$$

设 M, N 是 n 维定向微分流形, $f: M \rightarrow N$ 是光滑映射. 若 M 是紧致的, N 是连通的. 对任一正则值 $y \in N$, 定义(由于 $f^{-1}(y)$ 是有限集)

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign } df_x.$$

这里由于 $x \in M$ 是 f 的正则点, 则 $df_x: T_x M \rightarrow T_{f(x)}(M)$ 是定向的向量空间之间的同构, $\text{sign } df_x$ 表示 df_x 的符号, 保定向时等于 1, 反定向时等于 -1.

不难证明, 整数 $\deg(f, y)$ 是 y 的局部常值函数. 根据 Sard 定理², 正则值在 N 中是处处稠密的. 它在 N 的一个稠密开子集上有定义.

定理5.6.2 整数 $\deg(f, y)$ 的值不依赖于正则值 y 的选取.

定理的证明见参考文献 [Mil65]. 我们将这个整数称为映射 f 的映射度, 记为 $\deg f$.

命题5.6.3 设 M, N 都是紧致和连通的 n 维定向微分流形, $f: M \rightarrow N$ 是光滑映射. 选取 $\Omega \in \wedge^n(N)$, 使得 $\int_N \Omega = 1$, 则

$$\deg f = \int_M f^* \Omega.$$

证明 由 $H_{DR}^n(N) = \mathbb{R}$ 和 Stokes 定理知, $\int_M f^* \Omega$ 的值与 Ω 的选取无关. 设 $y \in N$ 是 f 的正则值, 选取 y 的一个充分小的邻域 U , 则对任一正则点 $x \in f^{-1}(y)$ 都存在 x 的一个邻域 V_x , 使得 $f|_{V_x}: V_x \rightarrow U$ 是微分同胚.

选取 $\Omega \in \wedge^n(N)$, 使得 Ω 的支撑集包含于 U 且满足

$$\int_N \Omega = \int_U \Omega = 1.$$

²见参考文献 [Mil65].

于是,

$$\int_{V_x} f^* \Omega = \text{sign } df_x \int_U \Omega = \text{sign } df_x.$$

故有

$$\int_M f^* \Omega = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \int_{V_x} f^* \Omega = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign } df_x = \deg f.$$

证毕. ■

由定义可知, 若 f 不是满射, 则 $\deg f = 0$. 特别地, 若 f 是常值映射, 则 $\deg f = 0$.

例 5.6.2 求球面 $S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\}$ 之间的对径映射 A 的映射度.

下面用两种方法考虑.

1° 选取 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上的 n -形式,

$$\omega = \sum_{i=0}^n (-1)^i x_i dx_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

则

$$\deg f = \frac{\int_{S^n} A^* \omega}{\int_{S^n} \omega} = (-1)^{n+1}.$$

2° 由于 A 是微分同胚, 则对任意的 $y \in S^n$, 都是正则值. 于是

$$\deg f = \text{sign } dA_y = (-1)^{n+1}.$$

第二个等号成立的原因, 见例 1.3.5.

定理 5.6.4 (Hopf 定理) 设 M^n 是紧致连通的定向流形, 则两个映射 $f, g: M \rightarrow S^n$ 同伦当且仅当它们有相同的映射度.

定义 5.6.5 设 M 是微分流形, X 是 M 上的一个连续切向量场. 若在点 $p \in M$ 处 $X_p = 0$, 则称点 p 是向量场 X 的零点. 若在点 p 的某邻域内, p 是唯一的零点, 则称点 p 是孤立零点 (isolated point).

设 $p \in M$ 是 $X \in \mathfrak{X}(M)$ 的孤立零点, 则存在 p 的一个法邻域 $B_{2\varepsilon}(p)$, 使得 p 是 X 在 $B_{2\varepsilon}(p)$ 上的唯一零点. 设 e_1, e_2, \dots, e_n 是 $B_{2\varepsilon}(p)$ 上的一组正交标架, 考虑映射 $f: S_\varepsilon(p) \rightarrow S^{n-1}(1)$,

$$f(x) = \frac{(a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x))}{\sqrt{\sum_i a_i^2(x)}},$$

这里 $X_x = \sum_i a_i(x) e_i(x)$. 定义 X 在点 p 处的指标为

$$\text{Ind}_p X = \deg f.$$

容易验证, $\text{Ind}_p X$ 与正交标架场 e_1, e_2, \dots, e_n 的选取无关. 若 $q \in M$ 不是零点, 为了叙述方便, 令 $\text{Ind}_q X = 0$. 下面我们介绍 Poincaré-Hopf 定理.

定理5.6.6 (Poincaré-Hopf 定理) 设 M^n 是紧致的微分流形, X 是 M 上仅有孤立零点的光滑向量场. 则

$$\mathcal{X}(M) = \sum_{p \in M} \text{Ind}_p X.$$

注 1 i) 紧致流形 M 上总存在只有有限个零点的向量场. 特别地, 存在仅有一个零点的向量场 $X \in \mathfrak{X}(M)$ (其存在性可由阻碍理论保障).

ii) 事实上, Hopf 进一步证明了: M 上存在处处不为零的向量场当且仅当 $\mathcal{X}(M) = 0$.

例 5.6.3 由于 $\mathcal{X}(S^n) = 1 + (-1)^n$, 故 S^n 上存在处处非零的向量场当且仅当 n 是奇数.

有了上面这些准备, 下面我们证明 2 维黎曼流形上的 Gauss-Bonnet 定理.

定理5.6.7 (Gauss-Bonnet) 设 M 是紧致的定向 2 维黎曼流形, 则

$$\int_M K \, d\text{vol} = 2\pi \mathcal{X}(M).$$

证明 在 M 上取一个光滑向量场 X , 使得它只有一个零点 $p \in M$. 在点 p 上选取一个法邻域 D . 于是, 在 $M - \{p\}$ 上决定了一组与 M 的定向相容的正交标架 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$, 其中 $\tilde{e}_1 = \frac{X}{|X|}$, \tilde{e}_2 根据定向得到. 设 $\{e_1, e_2\}$ 是 D 上的正交标架, $\tilde{\omega}_{ij}, \omega_{ij}$ 分别是标架 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ 和 $\{e_1, e_2\}$ 所对应的联络形式, 则由结构方程 (d6),

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}_{12} &= -K\tilde{\theta}_1 \wedge \tilde{\theta}_2, \\ d\omega_{12} &= -K\theta_1 \wedge \theta_2. \end{aligned}$$

由于 $\theta_1 \wedge \theta_2$ 和 $\tilde{\theta}_1 \wedge \tilde{\theta}_2$ 是分别是 D 和 $M - \{p\}$ 上的体积形式. 故

$$\begin{aligned} \int_M K \, d\text{vol} &= \int_{M-D} K \, d\text{vol} + \int_D K \, d\text{vol} \\ &= - \int_{M-D} d\tilde{\omega}_{12} - \int_D d\omega_{12} \\ &= \int_{\partial D} (\tilde{\omega}_{12} - \omega_{12}). \end{aligned}$$

最后一个等号由根据 Stokes 定理保证. 需要注意的是 $\partial(M - D) = \partial D$, 但由于它们的定向分别是由 $M - D$ 和 D 诱导的, 故它们相差一个符号.

又因为 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ 和 $\{e_1, e_2\}$ 都是与 M 定向相容的正交标架, 故在 ∂D 上可设

$$\begin{cases} \tilde{e}_1 = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta, \\ \tilde{e}_2 = -e_1 \sin \theta + e_2 \cos \theta. \end{cases}$$

式中 θ 是从 e_1 到 \tilde{e}_1 的夹角. 因此, 对任意的 $Y \in \mathfrak{X}(M)$, 经过简单的计算可知

$$\tilde{\omega}_{12}(Y) = \langle \nabla_Y \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \rangle = \omega_{12}(Y) + Y(\theta).$$

即

$$\tilde{\omega}_{12} - \omega_{12} = d\theta.$$

所以

$$\int_M K \, d\text{vol} = \int_{\partial D} d\theta = 2\pi \cdot \text{Ind}_p X = 2\pi \mathcal{X}(M).$$

证毕. ■

从上面的证明过程可以看出, 证明的关键是将 M 的二次外微分式 $K \, d\text{vol}$ 写成 $-d\omega_{12}$, 再利用 Stokes 公式将它化为绕零点的积分, 于是就得到向量场在零点处的指标. 上面的想法在高维 Gauss-Bonnet 定理的证明中得到了充分的体现.

设 M 是 $2n$ 维紧致定向黎曼流形, 设 $\{e_i\}$ 是 M 的一个局部正交标架场, θ_i , ω_{ij} 和 R_{ij} 分别是该标架下的度量 1-形式、联络形式和曲率形式. 则可以证明 $2n$ 次外微分式

$$\Omega = \sum \frac{1}{2^{2n} \pi^n n!} \delta_{1 \dots 2n}^{i_1 \dots i_{2n}} R_{i_1 i_2} \wedge \dots \wedge R_{i_{2n-1} i_{2n}},$$

与局部正交标架的选取无关, 因而它是 M 上的一个整体 $2n$ 次外微分式. Gauss-Bonnet-Chern 定理指出

$$\int_M \Omega = \mathcal{X}(M).$$

详细的证明见参考文献 [Che44](注意他的公式差一个符号).

练习 6.1 设紧致定向的黎曼流形 (M^4, g) 的截面曲率处处为正. 证明它的欧拉数为正.

提示 使用 Gauss-Bonnet-Chern 定理. 这是陈省身证明的 (Milnor 的) 一个定理.

第六章 Jacobi 场

§6.1 Jacobi 方程

定义6.1.1 设 $J = J(t)$ 是黎曼流形 M 上沿一测地线 γ 上的向量场, 若它满足 Jacobi 方程

$$\frac{D^2}{dt^2}J(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0,$$

则称 J 是沿测地线 γ 的 Jacobi 场(Jacobi field).

例 6.1.1 给定点 $p \in M$ 和切向量 $v \in T_p M$, 对于 M 上的测地线 $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, $|t| < \varepsilon$, 令 $J(t) = \gamma'(t)$, 由于

$$\begin{aligned}\frac{D^2}{dt^2}J(t) &= \frac{D}{dt}\left(\frac{D}{dt}\gamma'(t)\right) = 0, \\ R(\gamma'(t), \gamma'(t))\gamma'(t) &= 0,\end{aligned}$$

故 $J(t)$ 满足 Jacobi 方程, 它是一个 Jacobi 场.

例 6.1.2 同上例, 令 $J(t) = t\gamma'(t)$, 直接计算可得:

$$\begin{aligned}\frac{D^2}{dt^2}t\gamma'(t) &= \frac{D}{dt}\left(\gamma'(t) + t\frac{D}{dt}\gamma'(t)\right) = 0, \\ R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) &= tR(\gamma'(t), \gamma'(t))\gamma'(t) = 0.\end{aligned}$$

显然 $J(t) = t\gamma'(t)$ 满足 Jacobi 方程, 它也是一个 Jacobi 场.

例 6.1.3 假设 M 是一个截面曲率恒为 K 的常曲率空间. 设 $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ 是一条测地线且 $|\gamma'(t)| = 1$. 设 $J(t)$ 是沿测地线 γ 的 Jacobi 场, 且与 γ 垂直, 即 $\langle J(t), \gamma'(t) \rangle \equiv 0$. 则对任一沿曲线 γ 的向量场 T , 由于

$$\langle R(\gamma', J)\gamma', T \rangle = K(\langle \gamma', \gamma' \rangle \langle J, T \rangle - \langle \gamma', T \rangle \langle \gamma', J \rangle) = K \langle J, T \rangle.$$

故 $R(\gamma', J)\gamma' = KJ$. 于是, Jacobi 方程可写为

$$\frac{D^2}{dt^2}J(t) + KJ = 0.$$

选取切向量 $w \in T_{\gamma(t_0)}M$, 使得 $|w| = 1$, $\langle w, \gamma'(0) \rangle = 0$. 设 $W = W(t)$ 是 w 沿曲线 γ 作平行移动所得到的向量场, $W(0) = w$. 显然

$$|W| = 1, \quad \langle W(t), \gamma'(t) \rangle = 0,$$

并且

$$\frac{D^2}{dt^2}(f(t)W(t)) = \frac{D}{dt}(f'(t)W(t)) = f''(t)W(t).$$

我们设 $J(t) = f(t)W(t)$. 于是 J 是 Jacobi 场当且仅当

$$f''(t) + Kf = 0.$$

给定初值条件¹ $J(0) = 0, J'(0) = w$, 解这个方程组, 可得:

$$J(t) = \begin{cases} tW(t), & \text{若 } K = 0, \\ \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}W(t), & \text{若 } K > 0, \\ \frac{\sinh(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}}W(t), & \text{若 } K < 0. \end{cases}$$

现在, 给定一点 $p \in M$, 对任意两个切向量 $v, w \in T_pM$, 曲线 $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, $|t| < \varepsilon$ 是测地线. 令沿曲线 γ 的向量场为

$$J(t) = (d\exp_p)_{tv}(tw), \quad \text{这里视 } tw \text{ 为 } T_pM \text{ 上 } tv \text{ 处的切向量.}$$

我们可以断言: $J(t)$ 是一个 Jacobi 场.

为了证明这个结论, 我们先引入一个概念. 设 $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ 是光滑映射(这里 A 为一个区域), 若对任意的点 $(t, s) \in A$, 向量场 $V(t, s) \in T_{f(t,s)}M$, 则称 V 是沿 f 的向量场.

引理6.1.2 设 V 是沿 f 的向量场, 则

$$\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V - \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V = R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right)V.$$

证明 直接验证即可. ■

下面证明 $J(t) = (d\exp_p)_{tv}(tw)$ 是一个 Jacobi 场. 对于 $w \in T_v(T_pM) \approx T_pM$, 选取曲线 $v = v(s)$, 使得 $v(0) = v$, $v'(0) = w$. 令

$$f(t, s) = \exp_p(tv(s)).$$

显然 $d(\exp_p)_v(w) = \frac{\partial f}{\partial s}|_{(1,0)}$. 事实上,

$$J(t) = d(\exp_p)_{tv}(tw) = \frac{\partial f}{\partial s}\Big|_{(t,0)}.$$

¹ 为了书写方便, 我们常将 $\frac{D}{dt}J$ 记成 J' , $\frac{D^2}{dt^2}J$ 记为 J'' . 在不引起混淆的情况下, 有时也将沿测地线 γ 的 Jacobi 方程简写为 $J'' + R(\gamma', J)\gamma' = 0$.

令 $V = \frac{\partial f}{\partial t}$, 则根据引理 6.1.2,

$$\begin{aligned} & \frac{D^2}{\partial t^2} \frac{\partial f}{\partial s} + R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{D}{\partial t} \left(\frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} \right) + R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{D}{\partial s} \left(\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

最后一个等式成立, 是因为对任意固定的 s , $f(t, s)$ 是测地线. 所以

$$J(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{(t,0)} = d(\exp_p)_{tv}(tw)$$

满足 Jacobi 方程, 它是沿测地线 $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ 的 Jacobi 场.

命题 6.1.3 给定初值 $J(0)$ 和 $J'(0)$, 必存在唯一的满足初值条件的沿测地线 γ 的 Jacobi 场.

证明 设 $\{e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)\}$ 是一组沿测地线 γ 平行的正交标架场, 即

$$\langle e_i(t), e_j(t) \rangle = \delta_{ij}, \quad \frac{D}{dt} e'_i(t) = 0.$$

若 $J(t)$ 是沿测地线 γ 的 Jacobi 场, 设

$$J(t) = \sum_i f_i(t) e_i(t), \quad a_{ij}(t) = R(\gamma'(t), e_i(t), \gamma'(t), e_j(t)).$$

则

$$\frac{D^2}{dt^2} J(t) = f''(t) e_i(t), \quad R(\gamma', J) \gamma' = \sum_j R(\gamma', J, \gamma'(t), e_j) e_j = \sum_{i,j} f_i a_{ij} e_j.$$

所以 Jacobi 方程等价于

$$f''_j(t) + \sum_i a_{ij} f_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

给定初值, 这个方程组的解是存在唯一的. 证毕. ■

设 γ 是 M 上的测地线, 沿 γ 的 Jacobi 场由初值 $J(0)$ 和 $J'(0)$ 唯一决定. 若 J_1 和 J_2 都是沿 γ 的 Jacobi 场, 则对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, $J_1 + \lambda J_2$ 都是 Jacobi 场. 所以, 沿 γ 的 Jacobi 场的全体所构成的空间是维数为 $2n$ 的向量空间.

推论6.1.4 设 $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ 是 M 上的测地线, $\gamma'(0) = v$. 若 $J(t)$ 是沿测地线 γ 的 Jacobi 场, $J(0) = 0$, $J'(0) = w$, 则

$$J(t) = d(\exp_p)_{tv}(tw).$$

证明 令 $\tilde{J}(t) = d(\exp_p)_{tv}(tw)$, $f(t, s) = \exp_p(tv(s))$ ($v(s)$ 同上定义), 则 $\tilde{J}(t)$ 是 Jacobi 场. 由于

$$\begin{aligned}\tilde{J}(0) &= d(\exp_p)_{tv}(tw)|_0 = 0, \\ \tilde{J}'(0) &= \left. \frac{D}{dt} \tilde{J}(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{D}{dt} \right|_{t=0} \left(\frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) \right) = \left. \frac{D}{ds} \right|_{s=0} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(0, s) \right) \\ &= \left. \frac{D}{ds} \right|_{s=0} (d(\exp_p)_0(v(s))) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} v(s) \\ &= w.\end{aligned}$$

故 J 与 \tilde{J} 满足相同的初值条件. 所以 $J = \tilde{J}$. 证毕. ■

例 6.1.4 对于球面 S^n , 它的截面曲率为 $K \equiv 1$. 根据例 6.1.3, 设沿测地线 γ 且满足初始条件 $J(0) = 0$, $J'(0) \perp \gamma'(0)$ 的 Jacobi 场为 $J(t)$, 那么

$$|J(t)|^2 = \sin^2 t \sim t^2 - \frac{1}{3}t^4 + o(t^5).$$

对于一般的黎曼流形, 我们同样有下列

命题6.1.5 给定黎曼流形 M 上一点 p , 设 $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ 是 M 上的测地线, 且 $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. 设 $w \in T_v(T_p M) \approx T_p M$, $|w| = 1$, J 是沿测地线 γ 的 Jacobi 场,

$$J(t) = d(\exp_p)_{tv}(tw), \quad 0 \leq t \leq a.$$

则当 t 充分小时,

$$|J(t)|^2 = t^2 - \frac{1}{3}R(v, w, v, w)t^4 + o(t^4).$$

证明 由于 $J(0) = 0$, $J'(0) = w$, 故

$$\begin{aligned}\langle J(0), J(0) \rangle &= 0, \\ \langle J(t), J(t) \rangle'_0 &= 2 \langle J(0), J'(0) \rangle = 0, \\ \langle J(t), J(t) \rangle''_0 &= 2 \langle J'(0), J'(0) \rangle + 2 \langle J(0), J''(0) \rangle = 2|w|^2 = 2.\end{aligned}$$

此外, 由 Jacobi 方程, $J''(0) = -R(\gamma'(0), J(0))\gamma'(0) = 0$. 所以

$$\langle J(t), J(t) \rangle_0^{(3)} = 6 \langle J'(0), J''(0) \rangle + 2 \langle J'''(0), J(0) \rangle = 0.$$

最后, 我们需要计算 $\langle J(t), J(t) \rangle_0^{(4)}$. 首先有等式

$$\left. \frac{D}{dt} \right|_{t=0} R(\gamma', J)\gamma' = R(\gamma', J')\gamma'|_{t=0}.$$

事实上, 对任意沿 γ 的向量场 X , 由于 $J(0) = 0$, 可知

$$\begin{aligned} \left\langle \left. \frac{D}{dt} R(\gamma', J)\gamma', X \right\rangle_0 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle R(\gamma', J)\gamma', X \rangle \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle R(\gamma', X)\gamma', J \rangle = \langle R(\gamma', X)\gamma', J' \rangle|_0 \\ &= \langle R(\gamma', J')\gamma', X \rangle|_0. \end{aligned}$$

因此, $J'''(0) = - \left. \frac{D}{dt} \right|_{t=0} R(\gamma', J)\gamma' = - R(\gamma', J')\gamma'|_{t=0}$. 于是,

$$\begin{aligned} \langle J(t), J(t) \rangle_0^{(4)} &= 8 \langle J'(0), J'''(0) \rangle + 6 \langle J''(0), J''(0) \rangle + 2 \langle J^{(4)}(0), J(0) \rangle \\ &= -8R(v, w, v, w). \end{aligned}$$

证毕. ■

注 1 对任意的点 $p \in M$, 设 $v, w \in T_p M$, $|v| = |w| = 1$, $\langle v, w \rangle = 0$. 选取 $T_p M$ 上的曲线 $v(s)$, 使得 $v(0) = v$, $v'(0) = w$. 设 $t \in [0, \delta]$, δ 充分小, 使得 $\exp_p(tv)$ 有意义.

令 $\sigma = \text{span}\{v, w\} \subset T_p M$, 我们知道, $J(t) = d(\exp_p)_{tv}(tw)$ 是沿 γ 的 Jacobi 场. tv 处的向量 tw 的长度为 $|tw| = t$.

另一方面, 根据命题 6.1.5, $|J(t)| = t - \frac{1}{6}K(p, \sigma)t^3 + o(t^3)$. 因此, 在局部上, 若 $K(p, \sigma) > 0$, 则测地线扫过的面积小于 $T_p M$ 上从原点出发的射线的面积; 若 $K(p, \sigma) < 0$, 则测地线扫过的面积大于 $T_p M$ 上从原点出发的射线的面积(图 6.1).

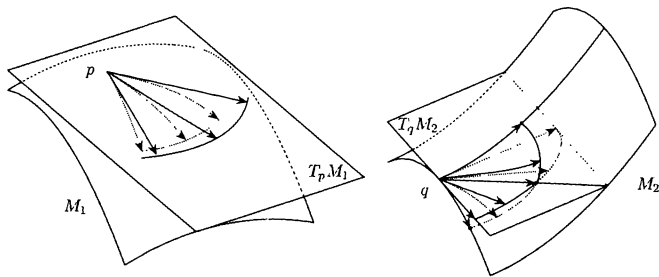


图 6.1

例 6.1.5 若 M 是一个截面曲率为 0 的常曲率空间, 则对任意的点 $p \in M$, 映射

$$\exp_p : B_\varepsilon(0) \longrightarrow B_\varepsilon(p)$$

是等距.

证明 对任意的 $v \in B_\varepsilon(0)$, 设 $w \in T_v(T_p M)$, $|w| = 1$ 且 $\langle v, w \rangle = 0$. 选取 $B_\varepsilon(0)$ 上的曲线 $v(s) = v + sw$ ($|s| < \varepsilon$). 显然我们有

$$v(0) = v, \quad v'(0) = w.$$

令

$$f(t, s) = \exp_p(tv(s)), \quad t \in [0, 1], \quad |s| < \varepsilon,$$

则

$$J(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{s=0}$$

就是满足初值条件 $J(0) = 0$, $J'(0) = w$ 的 Jacobi 场.

另一方面, 由于截面曲率 $K = 0$, 由例 6.1.3, 向量场 $tW(t)$ 也是满足初值条件 $J(0) = 0$, $J'(0) = w$ 的 Jacobi 场. 其中, $W(t)$ 是 w 沿曲线 $f(t, 0)$ 作平行移动所得到的向量场.

根据 Jacobi 场的唯一性,

$$tW(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial s} \right|_{s=0} = d(\exp_p)_{tv} tw,$$

且 $|tW(t)| = |tw| = t$.

此外, 不难证明, 对于半径方向, \exp_p 也是等距的. 证毕. ■

§6.2 共轭点

定义 6.2.1 设 $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$ 是测地线. 若存在一个沿测地线 γ 的不恒为零的 Jacobi 场 $J(t)$, 使得 $J(0) = J(t_0) = 0$, $0 < t_0 \leq a$, 则称点 $\gamma(t_0)$ 是点 $\gamma(0)$ 沿测地线 γ 的共轭点. 这样的 Jacobi 场的全体所构成的向量空间的维数称为共轭点 $\gamma(t_0)$ 的重数.

注 1 若 $\gamma(t_0)$ 是 $\gamma(0)$ 的共轭点, 则 $\gamma(0)$ 是 $\gamma(t_0)$ 的共轭点.

注 2 正好有 $n = \dim M$ 个满足条件 $J(0) = 0$ 的线性无关的 Jacobi 场.

事实上, 根据 Jacobi 场的唯一性, 满足 $J_i(0) = 0$ 的 Jacobi 场 $J_1(t), J_2(t), \dots, J_k(t)$ 是线性无关的当且仅当 $J'_1(0), J'_2(0), \dots, J'_k(0)$ 线性无关.

注 3 设 Jacobi 场 $J(t) = t\gamma'(t)$. 显然 $J(0) = 0$, 且对任意的 $t > 0$, $J(t) \neq 0$. 于是由注 2 知, 共轭点 $\gamma(t_0)$ 的重数小于 n .

例 6.2.1 对于标准球面 S^n , 设 $\gamma: [0, a] \rightarrow S^n$ 是测地线, $\gamma(0) = p$. 由于 S^n 的截面曲率恒为 1, 故根据例 6.1.3, 对任意的满足 $\langle \gamma'(0), w \rangle = 0$ 的切向量 $w \in T_p M$, 我们可以构造 Jacobi 场

$$J(t) = (\sin t) \cdot W(t).$$

其中, $W(t)$ 是切向量 w 沿测地线 γ 作平行移动所得到的向量场.

显然, $J(0) = J(\pi) = 0$, 于是点 $-p$ 是点 p 的共轭点, 易知重数为 $n-1$; 又 $J(0) = J(\pi) = J(2\pi) = 0$, 故点 $-p$ 和 p 都是点 p 的共轭点, 重数都为 $n-1$.

定义 6.2.2 给定点 $p \in M$, 点 p 的共轭点的全体记为 $C(p)$. 即对任意的 $q \in C(p)$, 存在一条测地线 γ 使得点 q 是点 p 沿测地线 γ 的共轭点.

例 6.2.2 对于球面 S^n , 设 $p \in S^n$, 则 $C(p) = \{p, -p\}$.

命题 6.2.3 设 $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ 是测地线, $\gamma(0) = p$, $t_0 \in (0, a]$. 那么 $q = \gamma(t_0)$ 是点 p 沿测地线 γ 的共轭点当且仅当点 $v_0 = t_0 \gamma'(0)$ 是指数映射 \exp_p 的临界点.

因此, $C(p) = \{\text{指数映射 } \exp_p \text{ 的临界值}\}$. 进一步, 共轭点的重数为 $\dim \text{Ker} (d(\exp_p)_{v_0})$.

证明 点 q 是点 p 沿测地线 γ 的共轭点, 当且仅当存在沿测地线 γ 的非零向量场 $J(t)$, 使得 $J(0) = J(t_0) = 0$.

记 $v = \gamma'(0)$, $w = J'(0) \neq 0$, 则由推论 6.1.4, 有

$$J(t) = d(\exp_p)_{tv}(tw), \quad t \in [0, a].$$

由于 $J(t)$ 不恒为零等价于 $w \neq 0$, 因此 q 是 p 的共轭点当且仅当

$$d(\exp_p)_{t_0 v}(t_0 w) = J(t_0) = 0, \quad w \neq 0.$$

即等价于 $v_0 = t_0 v$ 是映射 \exp_p 的临界点.

命题的后一部分的证明留作练习. 证毕. ■

例 6.2.3 对 S^n 上任意点 p , $C(p) = \{p, -p\}$ 就是指数映射 \exp_p 的临界值的全体.

命题 6.2.4 设 $J(t)$ 是沿测地线 $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ 的 Jacobi 场, 则 $\langle J(t), \gamma'(t) \rangle$ 是线性函数, 且

$$\langle J(t), \gamma'(t) \rangle = \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle t + \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle.$$

证明 由于

$$\frac{d}{dt} \langle J'(t), \gamma'(t) \rangle = \langle J''(t), \gamma'(t) \rangle + \left\langle J'(t), \frac{D}{dt} \gamma'(t) \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= -\langle R(\gamma', J)\gamma', \gamma' \rangle \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

故

$$\langle J'(t), \gamma'(t) \rangle \equiv \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle.$$

因此,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \langle J(t), \gamma'(t) \rangle &= \langle J'(t), \gamma'(t) \rangle + \left\langle J(t), \frac{D}{dt} \gamma'(t) \right\rangle \\
 &= \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle.
 \end{aligned}$$

所以

$$\langle J(t), \gamma'(t) \rangle = \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle t + \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle.$$

证毕. ■

根据上面的命题, 不难得到下面两个推论,

推论6.2.5 设 $J(t)$ 是 Jacobi 场, $J(0) = J(a) = 0$, 则

$$\langle J(t), \gamma'(t) \rangle \equiv 0.$$

推论6.2.6 设 $J(t)$ 是 Jacobi 场, 若 $J(0) = 0$, 则 $\langle J'(0), \gamma'(0) \rangle = 0$ 当且仅当

$$\langle J(t), \gamma'(t) \rangle \equiv 0.$$

特别地, 满足条件 $J(0) = 0$, $\langle J(t), \gamma'(t) \rangle \equiv 0$ 的 Jacobi 场的线性子空间的维数为 $n-1$.

命题6.2.7 设 $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ 是测地线, $\gamma(0) = p$, $\gamma(a) = q$. 若点 q 不是点 p 沿测地线 γ 的共轭点, 则对任意的 $v_1 \in T_p M$ 和 $v_2 \in T_q M$, 存在唯一的 Jacobi 场 $J(t)$ 使得 $J(0) = v_1$, $J(a) = v_2$.

证明 存在性. 令 \mathcal{F} 为沿测地线 γ 且满足条件 $J(0) = 0$ 的 Jacobi 场的全体. 它是一个维数为 n 的向量空间(见注2). 映射 $\Phi: \mathcal{F} \rightarrow T_q M$,

$$\Phi(J) = J(a),$$

是一个线性映射. 显然, 这两个向量空间有相同的维数.

因为点 q 不是点 p 沿 γ 的共轭点, 说明 Φ 是单射, 因而 Φ 是一个同构. 即存在 Jacobi 场 J_1 , 使得 $J_1(0) = 0$, 且 $J_1(a) = v_2$.

同样地, 存在 Jacobi 场 J_2 , 使得 $J_2(0) = v_1$, 且 $J_2(a) = 0$. 再令 $J = J_1 + J_2$, 向量场 J 就是所要找的.

唯一性. 若 \tilde{J} 也满足条件, 则 $J - \tilde{J}$ 是 Jacobi 场. 且满足

$$(J - \tilde{J})(0) = (J - \tilde{J})(a) = 0.$$

即 p 是 q 的共轭点, 这与题设矛盾. 这便证明了唯一性. 证毕. ■

利用命题 6.2.7, 我们有

推论 6.2.8 设 $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ 是测地线, 令 \mathcal{J}^\perp 是所有满足条件 $J(0) = 0$, $\langle J'(0), \gamma'(0) \rangle = 0$ 的 Jacobi 场的全体. 设 J_1, J_2, \dots, J_{n-1} 是 \mathcal{J}^\perp 的一组基, 若对任意的 $t \in (0, a)$, $\gamma(t)$ 都不是点 $\gamma(0)$ 的共轭点, 则 $\{J_1(t), J_2(t), \dots, J_{n-1}(t)\}$ 是 $\gamma'(t)$ 在 $T_{\gamma(t)}M$ 上的正交补的一组基.

例 6.2.4 若 M 的截面曲率恒为非正, 则所有点 $p \in M$ 的 $C(p)$ 都是空集, 特别地, \exp_p 是局部微分同胚.

证明 假设点 $q \in M$ 是点 p 沿测地线 $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ ($a > 0$) 的共轭点, $p = \gamma(0)$, $q = \gamma(a)$. 那么存在一个不恒为零的 Jacobi 场 $J(t)$, 使得

$$J(0) = J(a) = 0.$$

注意到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle J'(t), J(t) \rangle &= \langle J''(t), J(t) \rangle + \langle J'(t), J'(t) \rangle \\ &\geq -\langle R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t), J \rangle \\ &= -R(\gamma'(t), J(t), \gamma'(t), J(t)) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

但是

$$\langle J'(t), J(t) \rangle|_{t=0} = \langle J'(t), J(t) \rangle|_{t=a} = 0.$$

于是我们有

$$\langle J'(t), J(t) \rangle \equiv 0.$$

因此,

$$\frac{d}{dt} \langle J(t), J(t) \rangle = 2 \langle J'(t), J(t) \rangle \equiv 0.$$

这说明 $|J(t)|$ 是一个常数, 与假设矛盾. 证毕. ■

注 4 在上例中, 若 M 是完备的, 即对每一点 $p \in M$, \exp_p 定义在整个 T_pM 上. 则指数映射 $\exp_p : T_pM \rightarrow M$ 是复叠映射. 进一步, 若 M 是单连通的, 则 \exp_p 是微分同胚. 这就是著名的 Cartan-Hadamard 定理.

第七章 子流形几何

§7.1 第二基本型

设光滑映射 $f: M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ 是一个浸入. 设 $(\overline{M}, d\overline{s}^2)$ 是黎曼流形. 令 $ds^2 = f^* d\overline{s}^2$, 则 $f: (M, ds^2) \rightarrow (\overline{M}, d\overline{s}^2)$ 是等距浸入. 对任意的 $p \in M$, 由于 f 局部上是嵌入, 局部上可以将 M 的点与它在 \overline{M} 上的象点等同, 将点 p 在 M 中的邻域(充分小) U 与 $f(U)$ 等同. 根据 $T_p \overline{M}$ 上的内积, 可以将 $T_p \overline{M}$ 分解为

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

其中, $(T_p M)^\perp$ 称为点 p 的法空间(normal space).

给定 M 上的(局部)光滑向量场 X, Y , 可以将它们扩充为 \overline{M} 上的局部向量场 \overline{X} 和 \overline{Y} , 定义

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T.$$

不难证明, ∇ 恰好是黎曼流形 (M, ds^2) 上的 Levi-Civita 联络. 再令

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} = \nabla_X Y + B(X, Y). \quad (7.1)$$

事实上, $B(X, Y)$ 与 X, Y 的扩充无关(见例 3.2.3), 称 B 为 M 的第二基本型. 等式 (7.1) 称为 Gauss 公式(Gauss formula).

命题 7.1.1 对任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, 用 $\mathfrak{X}(U)^\perp$ 表示 U 上所有光滑法向量场的集合, 则映射 $B: \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$,

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

是对称的, 并且是 $\mathcal{D}(M)$ -双线性的.

由命题 7.1.1 知, $B(X, Y)$ 在点 $p \in M$ 处的值只依赖于向量场 X 和 Y 在点 p 处的取值. 由此, 我们可以定义

定义 7.1.2 对任意的 $\eta \in (T_p M)^\perp$, 定义映射 $H_\eta: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$,

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_p M.$$

映射 $\Pi_\eta: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Pi_\eta(x) = H_\eta(x, x),$$

称为沿法向量 η 的第二基本型.

显然, H_η 是 $T_p M$ 上的一个对称双线性型.

定义7.1.3 给定法向量 $\eta \in (T_p M)^\perp$, 定义形状算子(shape operator) $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ 如下,

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = \langle B(x, y), \eta \rangle = H_\eta(x, y), \quad x, y \in T_p M.$$

根据定义可以看出, 形状算子 S_η 是自伴的线性算子, 即

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = \langle x, S_\eta(y) \rangle.$$

命题7.1.4 对任意的点 $p \in M$, 设 $x \in T_p M$, $\eta \in (T_p M)^\perp$, 若 N 是 η 在 \overline{M} 中的一个局部扩充且 $N|_U \in \mathfrak{X}(U)^\perp$, 则

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

证明 对任意的 $y \in T_p M$, 设 X, Y 分别是 x, y 在 M 上的局部扩充, $\overline{X}, \overline{Y}$ 是 X, Y 在 \overline{M} 上的局部扩充, 则

$$\begin{aligned} \langle S_\eta(x), y \rangle &= \langle B(x, y), \eta \rangle = \langle B(X, Y), N \rangle_p = \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}, N \rangle_p \\ &= \overline{X}_p \langle \overline{Y}, N \rangle - \langle \overline{Y}, \overline{\nabla}_{\overline{X}} N \rangle_p \\ &= \langle -\overline{\nabla}_x N, y \rangle. \end{aligned}$$

最后一个等号成立是因为在 M 上 $\langle \overline{Y}, N \rangle \equiv 0$. 于是,

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

证毕. ■

余维为 1 的等距浸入子流形 $f : M \rightarrow \overline{M}$ 称为超曲面(hypersurface), 它是 3 维欧氏空间 \mathbb{R}^3 中曲面的直接推广.

对于超曲面 M 上的任一点 p 和单位法向量 $\eta \in (T_p M)^\perp$. 由于形状算子 $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ 是自伴的, 故存在 $T_p M$ 中的一组标准正交基 $\{e_i\}$, 使得

$$S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

其中 $\lambda_i = \lambda_i(p)$ 是线性变换 S_η 在 p 处的特征值.

定义7.1.5 形状算子 S_η 在点 p 处的特征值 λ_i 称为主曲率(principal curvature), 对应的特征方向 e_i 称为主方向(principal direction).

需要注意的是, 若将法向量 η 改变方向, 则主曲率要改变符号.

形状算子 S_η 的行列式 $\det(S_\eta) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ 称为超曲面 M 的 Gauss-Kronecker 曲率, $\frac{1}{n} \text{Tr}(S_\eta) = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$ 称为 M 的关于法向 η 的平均曲率(mean curvature). 可以看出, 当 M 是偶数维时, Gauss-Kronecker

曲率与 η 的定向选取无关. 特别地, 当 $n = 2$ 时, Gauss-Kronecker 曲率就是 Gauss 曲率.

当外围空间 \overline{M} 为 \mathbb{R}^{n+1} 时, 若 M 是可定向的, 则存在 M 上的一个(整体的)处处非零的法向量场. 设 N 是 M 上的一个单位法向量场, 定义 Gauss 映射 $\beta: M^n \rightarrow S^n$,

$$\beta(q) = N(q), \quad q \in M.$$

由于 $T_q M$ 与 $T_{\beta(q)} S^n$ 是平行的, 故可将 $T_q M$ 与 $T_{\beta(q)} S^n$ 等同, 我们断言: $d\beta_q(x) = -S_\eta(x)$.

事实上, 对任意的 $x \in T_q M$, 选取曲线 $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, 使得 $c(0) = q$, $c'(0) = x$. 由于

$$\langle \overline{\nabla}_x N, N \rangle = \frac{1}{2} x \langle N, N \rangle = 0,$$

即 $(\overline{\nabla}_x N)^\perp = 0$, 故由命题 7.1.4,

$$\overline{\nabla}_x N = (\overline{\nabla}_x N)^T = -S_\eta(x).$$

所以

$$\begin{aligned} d\beta_q(x) &= d\beta_q \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} c(t) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} N(c(t)) = \overline{\nabla}_x N \\ &= -S_\eta(x). \end{aligned}$$

例 7.1.1 设 $n \geq 2$, M^n 是紧致定向的连通黎曼流形, $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是等距浸入. 如果 M 的 Gauss-Kronecker 曲率处处非零, 则 M^n 微分同胚于 S^n .

证明 取定 M 的一个单位法向量场 N , 考虑它的 Gauss 映射 $\beta: M^n \rightarrow S^n$. 根据上面的讨论,

$$d\beta_p = -S_\eta,$$

可知

$$\det(d\beta_p) = (-1)^n \det(S_\eta) \neq 0.$$

这说明 $d\beta_p$ 是同构, M 上的每个点都是正则点. 所以, $\beta: M \rightarrow S^n$ 是局部微分同胚.

由于 S^n 是紧致的, 根据拓扑学知识可知 β 是一个复叠映射. 又因为 S^n 是单连通的, 所以 β 是微分同胚. 证毕. ■

定理 7.1.6 (Gauss 方程) 对任意的单位正交切向量 $x, y \in T_p M$, 有

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2, \quad (7.2)$$

其中, $K(x, y)$ 和 $\overline{K}(x, y)$ 分别是 M 和 \overline{M} 关于截面 $\text{span}\{x, y\}$ 的截面曲率.

证明 设 X, Y 分别是 x, y 在 M 上的局部扩充, \bar{X}, \bar{Y} 分别是 X, Y 在 \bar{M} 上的局部扩充, 则

$$\begin{aligned} K(x, y) - \bar{K}(x, y) &= \langle \nabla_Y \nabla_X X - \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X}, Y \rangle_p - \\ &\quad \langle \nabla_X \nabla_Y X - \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}, Y \rangle_p + \left\langle \nabla_{[X, Y]} X - \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X}, Y \right\rangle_p. \end{aligned}$$

首先, 右边最后一项等于零, 这是因为

$$\left\langle \nabla_{[X, Y]} X - \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X}, Y \right\rangle_p = - \left\langle \left(\bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X} \right)^\perp, Y \right\rangle_p = 0.$$

对于右边第一项, 由于

$$\begin{aligned} &\langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X}, Y \rangle_p \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} (\nabla_X X + B(X, X)), Y \rangle_p \\ &= \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle_p + \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} (B(X, X)), Y \rangle_p \\ &= \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle_p + \langle -S_{B(X, X)}(Y), Y \rangle_p \quad (\text{根据命题 7.1.4}) \\ &= \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle_p - \langle B(X, X), B(Y, Y) \rangle_p \\ &= \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle_p - \langle B(x, x), B(y, y) \rangle \end{aligned} \quad (7.3)$$

同样地,

$$\langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}, Y \rangle_p = \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle_p - |B(x, y)|^2. \quad (7.4)$$

利用等式 (7.3) 和 (7.4), 便可得到等式 (7.2). 证毕. ■

注 1 设 M^n 是 \bar{M}^{n+1} 的超曲面, 则对任意的点 $p \in M$ 和单位法向量 $\eta \in (T_p M)^\perp$, 存在单位正交基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 使得 $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$. 于是,

$$B(e_i, e_j) = \langle B(e_i, e_j), \eta \rangle \eta = \langle S_\eta(e_i), e_j \rangle \eta = \lambda_i \delta_{ij} \eta.$$

故

$$K(e_i, e_j) - \bar{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j, \quad i \neq j.$$

例 7.1.2 设 M^2 是 \mathbb{R}^3 上的一个超曲面, 对于 $p \in M$, 在局部上取定一个单位法向量场. 假定点 p 处的主曲率为 λ_1, λ_2 , 对应的主方向分别为 e_1, e_2 . 由于 \mathbb{R}^3 上的截面曲率恒为零, 故 M 在点 p 处的 Gauss 曲率为

$$K(p) = K(e_1, e_2) = \lambda_1 \lambda_2.$$

例 7.1.3 对于 S^n 的标准浸入(嵌入) $i: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, 选取 S^n 上的单位法向量场 η , 使得对任意点 p , $\eta(p) = -p$. 因此, Gauss 映射 $\beta: S^n \rightarrow S^n$ 将 S^n 上的点 p 映成它的对径点 $-p$, 故 $d\beta = -\text{id}$. 所以, $S_\eta = -d\beta = \text{id}$, 于是主曲率恒为 1. 根据 Gauss 方程, 即可得到 S^n 的截面曲率恒为 1. 也就是说, S^n 是截面曲率恒为 1 的常曲率空间.

例 7.1.4 设 M 为 \mathbb{R}^3 中的超曲面, 它的第一基本型和第二基本型分别是

$$\begin{aligned} \text{I} &= E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \\ \text{II} &= e du^2 + 2f du dv + g dv^2. \end{aligned}$$

直接利用 Gauss 方程即可得到¹

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

定义 7.1.7 设 $f: M \rightarrow \overline{M}$ 是等距浸入. 对点 $p \in M$, 如果对任意的 $x, y \in T_p M$, 都有 $B(x, y) = 0$, 则称 f 在点 p 处是测地的; 若 f 是处处测地的, 则称 f 是全测地的 (totally geodesic).

命题 7.1.8 设 $f: M \rightarrow \overline{M}$ 是等距浸入, 则 f 在点 p 处是测地的当且仅当 f 将 M 上在点 p 处是测地的曲线映成 \overline{M} 上在点 $f(p)$ 处是测地的曲线.

证明 若 f 在点 p 处是测地的, 则根据 Gauss 方程, 对任意的切向量场 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$(\overline{\nabla}_X Y)_p = (\nabla_X Y)_p.$$

所以, 对 M 上任意过点 p 的曲线 c , 令 $\bar{c} = f \circ c$, 有

$$\overline{\nabla}_{\bar{c}'(t)} \bar{c}'(t) \Big|_{t=0} = \nabla_{c'(t)} c'(t) \Big|_{t=0}.$$

于是, 若 c 在点 p 处是测地的, 那么 \bar{c} 在点 $f(p)$ 处也是测地的.

反之, 对任意的 $x \in T_p M$, 存在 M 上在点 p 处是测地的曲线 c , $c(0) = p$, 使得 $c'(0) = x$. 令 $\bar{c} = f \circ c$, 则由假设知, \bar{c} 在 $f(p)$ 处是测地的, 即

$$\overline{\nabla}_{\bar{c}'(t)} \bar{c}'(t) \Big|_{t=0} = 0.$$

所以,

$$B(x, x) = \overline{\nabla}_{\bar{c}'(t)} \bar{c}'(t) \Big|_{t=0} - \nabla_{c'(t)} c'(t) \Big|_{t=0} = 0.$$

故对任意的 $x, y \in T_p M$,

$$B(x, y) = \frac{1}{2} (B(x+y, x+y) - B(x, x) - B(y, y)) = 0.$$

即 f 在点 p 处是测地的. 证毕. ■

根据命题 7.1.8, 若 $f: M \rightarrow \overline{M}$ 是全测地的, 则 f 将 M 上的测地线映成 \overline{M} 上的测地线.

¹ 见 §3.2 节注 1.

定义7.1.9 设 $f: M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ 是等距浸入, 对任意的点 $p \in M$, 设 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 是 $T_p M$ 的一组标准正交基. 定义法向量场 H 在点 p 处的取值为

$$H_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B(e_i, e_i) \in (T_p M)^\perp.$$

显然, H_p 的值与 $\{e_i\}$ 的选取无关, H_p 的定义是合理的. H 是一个光滑的(整体的)法向量场. 称法向量场 H 为平均曲率向量场(mean curvature normal vector field).

在点 p 的法空间上选取一组标准正交基 $\{e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_{n+m}\}$, 则

$$\begin{aligned} H(p) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B(e_i, e_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=n+1}^{n+m} \langle B(e_i, e_i), e_\alpha \rangle e_\alpha \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\alpha=n+1}^{n+m} \sum_{i=1}^n \langle S_{e_\alpha}(e_i), e_i \rangle e_\alpha \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\alpha=n+1}^{n+m} (\text{Tr} S_{e_\alpha}) e_\alpha. \end{aligned}$$

所以, $H \equiv 0$ 当且仅当对任意的 $p \in M$ 和 $\eta \in (T_p M)^\perp$, 形状算子 S_η 的迹为 0.

定义7.1.10 设 $f: M \rightarrow \overline{M}$ 是等距浸入, 若平均曲率向量场 $H \equiv 0$, 则 M 称为极小子流形(minimal submanifold).

练习 1.1 设 $f = (f_1, f_2, \dots, f_N): M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ 为一等距浸入. 证明

$$\Delta f = (\Delta f_1, \Delta f_2, \dots, \Delta f_N) = nH.$$

练习 1.2 欧氏空间中不存在紧致的极小子流形.

练习 1.3 设 M^n 是欧氏空间 \mathbb{R}^{n+m} 中的子流形, 若对任意的点 $p \in M$ 处的数量曲率 $S(p) > 0$, 则 M 上存在一个处处非零的法向量场.

(提示: 利用 Gauss 方程, 证明平均曲率向量场 H 是处处非零的.)

§7.2 基本方程

给定一个等距浸入 $f: M \rightarrow \overline{M}$, 对任意的点 $p \in M$, 我们有²

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp.$$

²这里我们将 p 与 $f(p)$ 等同.

对 M 上的任意光滑向量场 X, Y , 设 \bar{X}, \bar{Y} 分别是 X, Y 在 \bar{M} 上的(局部)扩充, 由 Gauss 公式 (7.1)

$$(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})_p = (\nabla_X Y)_p + B(X_p, Y_p).$$

对任意的 $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, 根据命题 7.1.4, 有正交分解

$$\bar{\nabla}_X \eta = (\bar{\nabla}_X \eta)^T + (\bar{\nabla}_X \eta)^\perp = -S_\eta(X) + (\bar{\nabla}_X \eta)^\perp.$$

定义 7.2.1 对任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 定义映射 $\nabla_X^\perp : \mathfrak{X}(M)^\perp \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$,

$$\nabla_X^\perp \eta = (\bar{\nabla}_X \eta)^\perp.$$

称 ∇^\perp 为法丛上的法联络(normal connection).

这样, 我们便得到 Weingarten 公式

$$\bar{\nabla}_X \eta = -S_\eta(X) + \nabla_X^\perp \eta.$$

不难证明, 对任意的 $f \in \mathcal{D}(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, 法联络满足:

- (1) ∇^\perp 是双线性的;
- (2) $\nabla_{fX}^\perp \eta = f \nabla_X^\perp \eta$;
- (3) $\nabla_X^\perp (f\eta) = f \nabla_X^\perp \eta + X(f)\eta$.

因此, 我们可以在法丛上定义法曲率 $R^\perp(X, Y) : \mathfrak{X}(M)^\perp \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$,

$$R^\perp(X, Y)\eta = \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta - \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta + \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta.$$

定理 7.2.2 (1) Gauss 方程成立:

$$\begin{aligned} & R(X, Y, Z, T) - \bar{R}(X, Y, Z, T) \\ &= \langle B(Y, T), B(X, Z) \rangle - \langle B(X, T), B(Y, Z) \rangle; \end{aligned}$$

(2) Ricci 方程成立:

$$\bar{R}(X, Y, \eta, \xi) - R^\perp(X, Y, \eta, \xi) = \langle [S_\eta, S_\xi]X, Y \rangle.$$

其中, $R^\perp(X, Y, \eta, \xi) = \langle R^\perp(X, Y)\eta, \xi \rangle$, $[S_\eta, S_\xi] = S_\eta S_\xi - S_\xi S_\eta$.

证明 (1) 由于 $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y)$, 故

$$\begin{aligned} & \bar{R}(X, Y)Z \\ &= \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z + \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z \\ &= \bar{\nabla}_Y (\nabla_X Z + B(X, Z)) - \bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + B(Y, Z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\nabla_{[X,Y]}Z + B([X,Y], Z) \\
= & R(X,Y)Z + B(Y, \nabla_X Z) - S_{B(X,Z)}(Y) + \nabla_Y^\perp B(X, Z) \\
& - B(X, \nabla_Y Z) + S_{B(Y,Z)}(X) - \nabla_X^\perp B(Y, Z) + B([X,Y], Z).
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
& \bar{R}(X, Y, Z, T) \\
= & \langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle S_{B(X,Z)}(Y), T \rangle + \langle S_{B(Y,Z)}(X), T \rangle \\
= & R(X, Y, Z, T) - \langle B(Y, T), B(X, Z) \rangle + \langle B(X, T), B(Y, Z) \rangle.
\end{aligned}$$

这样便证明了 Gauss 方程.

(2) 根据 Weingarten 公式,

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y, \eta, \xi) &= \langle \bar{R}(X, Y)\eta, \xi \rangle = \langle \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \eta - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \eta + \bar{\nabla}_{[X,Y]}\eta, \xi \rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_Y(-S_\eta(X) + \nabla_X^\perp \eta) - \bar{\nabla}_X(-S_\eta(Y) + \nabla_Y^\perp \eta) \\
&\quad - S_\eta([X, Y]) + \nabla_{[X,Y]}^\perp \eta, \xi \rangle \\
&= \langle R^\perp(X, Y)\eta - B(Y, S_\eta(X)) + B(X, S_\eta(Y)), \xi \rangle \\
&= R^\perp(X, Y, \eta, \xi) - \langle S_\xi(Y), S_\eta(X) \rangle + \langle S_\xi(X), S_\eta(Y) \rangle \\
&= R^\perp(X, Y, \eta, \xi) - \langle Y, S_\xi S_\eta(X) \rangle + \langle S_\eta S_\xi(X), Y \rangle \\
&= R^\perp(X, Y, \eta, \xi) + \langle [S_\eta, S_\xi]X, Y \rangle.
\end{aligned}$$

倒数第二个等式成立, 是由于形状算子是自伴的. 证毕. ■

注 1 若 \bar{M} 是常曲率空间, 则 $\bar{R}(X, Y, \eta, \xi) = 0$. 于是, Ricci 方程可写为

$$R^\perp(X, Y, \eta, \xi) = -\langle [S_\eta, S_\xi](X), Y \rangle.$$

注 2 根据 Ricci 方程不难证明,

(1) 对任意的 $f \in \mathcal{D}(M)$,

$$\begin{aligned}
& R^\perp(fX, Y, \eta, \xi) \\
&= R^\perp(X, fY, \eta, \xi) = R^\perp(X, Y, f\eta, \xi) \\
&= R^\perp(X, Y, \eta, f\xi) = fR^\perp(X, Y, \eta, \xi);
\end{aligned}$$

(2) $R^\perp(X, Y, \eta, \xi) = -R^\perp(Y, X, \eta, \xi) = -R^\perp(X, Y, \xi, \eta)$.

注 3 定理 7.1.6 是定理 7.2.2 Gauss 方程的一个特殊情况.

下面介绍 Codazzi 方程. 我们可以将第二基本型看成一个(广义)张量

$$\begin{aligned}
B: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp &\longrightarrow \mathcal{D}(M) \\
(X, Y, \eta) &\longmapsto \langle B(X, Y), \eta \rangle
\end{aligned}$$

自然地, 我们可以定义 B 的共变微分如下,

$$(\bar{\nabla} B)(Y, Z, \eta, X) =: (\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) =: X(B(Y, Z, \eta)) - B(\nabla_X Y, Z, \eta) - B(Y, \nabla_X Z, \eta) - B(Y, Z, \nabla_X^\perp \eta).$$

我们还可以将上式写成

$$\begin{aligned} & (\bar{\nabla} B)(Y, Z, \eta, X) \\ &= \langle \nabla_X^\perp B(Y, Z), \eta \rangle - B(\nabla_X Y, Z, \eta) - B(Y, \nabla_X Z, \eta). \end{aligned} \quad (7.5)$$

这是因为

$$\begin{aligned} X \langle B(Y, Z), \eta \rangle &= \langle \bar{\nabla}_X B(Y, Z), \eta \rangle + \langle B(Y, Z), \bar{\nabla}_X \eta \rangle \\ &= \langle \nabla_X^\perp B(Y, Z), \eta \rangle + \langle B(Y, Z), \nabla_X^\perp \eta \rangle. \end{aligned}$$

定理7.2.3 Codazzi 方程成立:

$$\bar{R}(X, Y, Z, \eta) = (\bar{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) - (\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta).$$

证明 根据 (7.5),

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) &= \langle \nabla_Y^\perp B(X, Z), \eta \rangle - B(\nabla_Y X, Z, \eta) - B(X, \nabla_Y Z, \eta) \\ &= \langle \bar{\nabla}_Y B(X, Z), \eta \rangle - B(\nabla_Y X, Z, \eta) - \langle \bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z), \eta \rangle, \\ (\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) &= \langle \nabla_X^\perp B(Y, Z), \eta \rangle - B(\nabla_X Y, Z, \eta) - B(Y, \nabla_X Z, \eta) \\ &= \langle \bar{\nabla}_X B(Y, Z), \eta \rangle - B(\nabla_X Y, Z, \eta) - \langle \bar{\nabla}_Y (\nabla_X Z), \eta \rangle. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & (\bar{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) - (\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) \\ &= \langle \bar{\nabla}_Y (\bar{\nabla}_X Z), \eta \rangle - \langle \bar{\nabla}_X (\bar{\nabla}_Y Z), \eta \rangle + \langle B(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z), \eta \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_Y (\bar{\nabla}_X Z), \eta \rangle - \langle \bar{\nabla}_X (\bar{\nabla}_Y Z), \eta \rangle + \langle \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z, \eta \rangle \\ &= \langle \bar{R}(X, Y) Z, \eta \rangle. \end{aligned}$$

证毕. ■

推论7.2.4 若 \bar{M} 是一个截面曲率为 K 的常曲率空间, 则 $\bar{R}(X, Y, Z, \eta) = 0$. 此时, Codazzi 方程可写成

$$(\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) = (\bar{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta).$$

进一步, 若 M 还是一个超曲面, 则 Codazzi 方程可改写为

$$\nabla_X(S_\eta(Y)) - \nabla_Y(S_\eta(X)) = S_\eta([X, Y]), \quad \text{这里 } |\eta| = 1.$$

证明 由于 \overline{M} 的截面曲率恒为 K ,

$$\overline{R}(X, Y)Z = K(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X).$$

故

$$\overline{R}(X, Y, Z, \eta) = \langle \overline{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = 0.$$

进一步, 若 M 是超曲面, 将 η 扩充为 M 上的一个局部法向量场 N , 且 $\langle N, N \rangle = 1$. 则由于

$$\langle \nabla_X^\perp N, N \rangle = \langle \overline{\nabla}_X N, N \rangle = \frac{1}{2} X \langle N, N \rangle = 0,$$

故 $\nabla_X^\perp N = 0$. 因此根据定义,

$$\begin{aligned} (\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) &= X(B(Y, Z, \eta)) - B(\nabla_X Y, Z, \eta) - B(Y, \nabla_X Z, \eta) \\ &= X \langle S_\eta(Y), Z \rangle - \langle S_\eta(\nabla_X Y), Z \rangle - \langle S_\eta(Y), \nabla_X Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X S_\eta(Y), Z \rangle - \langle S_\eta(\nabla_X Y), Z \rangle. \end{aligned}$$

再利用 Codazzi 方程, 最后可得

$$\nabla_X(S_\eta(Y)) - \nabla_Y(S_\eta(X)) = S_\eta([X, Y]).$$

证毕. ■

我们知道, 对于紧致的曲面 M^2 , 若 Gauss 曲率 $K \leq 0$, 则 M 不可能等距浸入到 \mathbb{R}^3 中. 事实上, 若 M 等距浸入到 \mathbb{R}^3 中, 由于 M 是紧致的, 则 M 的象集在 \mathbb{R}^3 中是有界闭的. 于是, 距离函数的极大值点处的截面曲率必大于零, 这与假设矛盾. 下面我们将这个事实推广到更一般的情形. 我们先引入

引理7.2.5 设 $B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ 是一个对称双线性的映射, 则存在 $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x|^2 + |y|^2 \neq 0$, 使得 $B(x, x) = B(y, y)$, $B(x, y) = 0$.

证明 将映射 B 扩充为一个对称复双线性映射 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$. 根据代数几何中的 Bezout 定理, 存在 $z \in \mathbb{C}^n$, $z \neq 0$, 使得 $B(z, z) = 0$.

令 $z = x + \sqrt{-1}y$, 其中 $x, y \in \mathbb{R}^n$. 由于

$$B(z, z) = B(x, x) - B(y, y) + 2\sqrt{-1}B(x, y),$$

故

$$B(x, x) = B(y, y), \quad B(x, y) = 0.$$

证毕. ■

引理7.2.6 若 $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ 是等距浸入且 M 是紧致的, 则存在 $p \in M$, 使得对任意的非零切向量 $X \in T_p M$, $B(X, X) \neq 0$.

证明 令 $\phi: M \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $\phi(x) = \frac{1}{2} \langle x, x \rangle$. 由于 M^n 等距浸入到 \mathbb{R}^N 中, 在局部上我们将 x 与 $f(x)$ 等同.

由于 M 是紧致的, 选取点 $p \in M$, 使得对任意的 $x \in M$, $\phi(x) \leq \phi(p)$. 于是, 对 M 上任意的切向量场 X ,

$$X_p(\phi) = 0, \quad X_p(X(\phi)) \leq 0.$$

由于

$$X_p(\phi) = \frac{1}{2} X_p \langle x, x \rangle = \langle \bar{\nabla}_X x, x \rangle_p = \langle dx(X), x \rangle_p = \langle X_p, p \rangle,$$

故 $p \in (T_p M)^\perp$. 另一方面,

$$\begin{aligned} X_p(X(\phi)) &= X_p \langle X, x \rangle = \langle \bar{\nabla}_X X, x \rangle_p + \langle X, \bar{\nabla}_X x \rangle_p \\ &= \langle (\bar{\nabla}_X X)_p, p \rangle + \langle X_p, X_p \rangle \\ &= \langle B(X_p, X_p), p \rangle + |X_p|^2. \end{aligned}$$

所以, 对任意的 $X_p \neq 0$, $B(X_p, X_p) \neq 0$. 证毕. ■

定理 7.2.7 若紧黎曼流形 M^n 具有非正截面曲率, 则它不能等距浸入到 \mathbb{R}^{2n-1} 中.

证明 根据引理 7.2.6, 存在点 $p \in M$, 使得对任意的非零切向量 $X \in T_p M$, $B(X, X) \neq 0$.

另外, $B: T_p M \times T_p M \rightarrow (T_p M)^\perp$ 是一个对称双线性映射. 根据引理 7.2.5, 存在 $x, y \in T_p M$, $|x|^2 + |y|^2 \neq 0$, 使得 $B(x, x) = B(y, y)$, $B(x, y) = 0$.

综上所述, x 和 y 是线性无关的. 最后由 Gauss 方程(定理 7.1.6) 可以证明 x 和 y 所生成的截面的截面曲率是正的, 与假设矛盾. 证毕. ■

例 7.2.1 平环 $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ (截面曲率恒为零) 可等距嵌入到欧氏空间 \mathbb{R}^{2n} 中.

§7.3 活动标架

设 $f: (M^n, ds^2, \nabla) \rightarrow (\bar{M}^{n+m}, d\bar{s}^2, \bar{\nabla})$ 是一个等距浸入. 在局部上, 我们将 M 和 \bar{M} 中的对应点等同.

在 \bar{M} 内选取一组局部标准正交标架场 $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+m}\}$, 使得限制在 M 上时, e_1, e_2, \dots, e_n 是 M 上的切向量场, $e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_{n+m}$ 是 M 的法向量场.

若无特别说明, 我们约定指标的取值范围如下:

$$1 \leq i, j, k, \dots \leq n;$$

$$n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma \cdots \leq n+m;$$

$$1 \leq A, B, C \cdots \leq n+m.$$

这样在局部开集 $U \subset M$ 上, $e_i \in \mathfrak{X}(U)$, $e_\alpha \in \mathfrak{X}(U)^\perp$. 设 $\bar{\theta}_A$ 是 e_A 的对偶基, 即

$$\bar{\theta}_A(\bar{X}) = \langle e_A, \bar{X} \rangle, \quad \bar{X} \in \mathfrak{X}(\bar{M}).$$

自然有 $d\bar{s}^2 = \sum_A \bar{\theta}_A^2$. 于是, M 的结构方程³为

$$\begin{cases} \bar{\omega}_{AB} + \bar{\omega}_{BA} = 0, & (7.6) \\ d\bar{\theta}_A = \sum_B \bar{\omega}_{AB} \wedge \bar{\theta}_B, & (7.7) \\ d\bar{\omega}_{AB} = \sum_C \bar{\omega}_{AC} \wedge \bar{\omega}_{CB} - \bar{R}_{AB}. & (7.8) \end{cases}$$

令 $\theta_A = f^*\bar{\theta}_A$, 则 $\theta_\alpha = 0$. 这是因为对任意的 $X \in TM$,

$$\theta_\alpha(X) = f^*\bar{\theta}_\alpha(X) = \bar{\theta}_\alpha(df(X)) = \langle e_\alpha, X \rangle = 0.$$

于是,

$$ds^2 = f^*d\bar{s}^2 = \sum_i \theta_i^2.$$

设 M 上标准正交标架场 $\{e_i\}$ 所对应的联络形式为 ω_{ij} , 即

$$\omega_{ij}(X) = \langle \nabla_X e_i, e_j \rangle.$$

我们断言 $\omega_{ij} = f^*\bar{\omega}_{ij}$. 这是因为, 对任意 $X \in TM$,

$$f^*\bar{\omega}_{ij}(X) = \bar{\omega}_{ij}(X) = \langle \bar{\nabla}_X e_i, e_j \rangle = \langle \nabla_X e_i, e_j \rangle = \omega_{ij}(X).$$

令 $\omega_{AB} = f^*\bar{\omega}_{AB}$ 是 U 上的 1-形式. 子流形 M 的结构方程为

$$\begin{cases} \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, & (7.9) \\ d\theta_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j, & (7.10) \\ d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - R_{ij}. & (7.11) \end{cases}$$

比较 \bar{M} 和 M 的结构方程便得到:

$$R_{ij} - f^*\bar{R}_{ij} = \sum_\alpha \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{j\alpha}. \quad (7.12)$$

³见 §5.5 节

这是因为, 根据等式 (7.8) 和 (7.11),

$$\begin{aligned} f^* \bar{R}_{ij} &= f^* \left(\sum_A \bar{\omega}_{iA} \wedge \bar{\omega}_{Aj} - d\bar{\omega}_{ij} \right) \\ &= \sum_A \omega_{iA} \wedge \omega_{Aj} - d\omega_{ij} \\ &= R_{ij} + \sum_{\alpha} \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j} \end{aligned}$$

等式(7.12) 实际上等价于 Gauss 方程. 对任意的 $X \in TM$, 我们知道,

$$\omega_{i\alpha}(X) = \langle \bar{\nabla}_X e_i, e_{\alpha} \rangle = \langle B(X, e_i), e_{\alpha} \rangle,$$

故 $B(X, e_i) = \sum_{\alpha} \omega_{i\alpha}(X) e_{\alpha}$. 令

$$\omega_{i\alpha} = \sum_j h_{ij}^{\alpha} \theta_j, \quad (7.13)$$

又

$$h_{ij}^{\alpha} = \omega_{i\alpha}(e_j) = \langle B(e_j, e_i), e_{\alpha} \rangle = \langle B(e_i, e_j), e_{\alpha} \rangle = h_{ji}^{\alpha},$$

于是 (7.12) 可写成

$$R_{ij} - f^* \bar{R}_{ij} = \sum_{\alpha, k, l} h_{ik}^{\alpha} h_{jl}^{\alpha} \theta_k \wedge \theta_l.$$

这样我们便得到了定理 7.1.6 (Gauss 方程的另一种形式),

$$\begin{aligned} &K(e_i, e_j) - \bar{K}(e_i, e_j) \\ &= (R_{ij} - f^* \bar{R}_{ij})(e_i, e_j) = \sum_{\alpha} (h_{ii}^{\alpha} h_{jj}^{\alpha} - (h_{ij}^{\alpha})^2) \\ &= \langle B(e_i, e_i), B(e_j, e_j) \rangle - |B(e_i, e_j)|^2. \end{aligned} \quad (7.14)$$

特别地, 若 M 是 \bar{M} 的极小子流形, 则对任意的 α , $\sum_i h_{ii}^{\alpha} = 0$. 于是, M 的数量曲率 $S = \sum_{i \neq j} \bar{K}(e_i, e_j) - |B|^2$.

同样地, 由于

$$\omega_{\alpha\beta}(X) = f^* \bar{\omega}_{\alpha\beta}(X) = \langle \bar{\nabla}_X e_{\alpha}, e_{\beta} \rangle = \langle \nabla_X^{\perp} e_{\alpha}, e_{\beta} \rangle,$$

故 $\nabla_X^{\perp} e_{\alpha} = \sum_{\beta} \omega_{\alpha\beta}(X) e_{\beta}$. 这说明 $\omega_{\alpha\beta}$ 是法丛上的联络形式. 定义法丛上的曲率形式 $R_{\alpha\beta}^{\perp}$ 为

$$R_{\alpha\beta}^{\perp}(X, Y) = \langle R^{\perp}(X, Y) e_{\alpha}, e_{\beta} \rangle.$$

不难证明

$$R_{\alpha\beta}^{\perp} = \sum_{\gamma} \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} - d\omega_{\alpha\beta}.$$

所以,

$$\begin{aligned} f^* \bar{R}_{\alpha\beta} &= f^* \left(\sum_A \bar{\omega}_{\alpha A} \wedge \bar{\omega}_{A\beta} \right) - d\omega_{\alpha\beta} \\ &= R_{\alpha\beta}^{\perp} + \sum_i \omega_{\alpha i} \wedge \omega_{i\beta}. \end{aligned}$$

即

$$f^* \bar{R}_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta}^{\perp} = - \sum_i \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{i\beta}. \quad (7.15)$$

由此不难验证,

$$\begin{aligned} \bar{R}(e_p, e_q, e_{\alpha}, e_{\beta}) - R^{\perp}(e_p, e_q, e_{\alpha}, e_{\beta}) &= (f^* \bar{R}_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta}^{\perp})(e_p, e_q) \\ &= - \sum_i \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{i\beta}(e_p, e_q) = -(h_{ip}^{\alpha} h_{iq}^{\beta} - h_{iq}^{\alpha} h_{ip}^{\beta}) \\ &= \langle [S_{e_{\alpha}}, S_{e_{\beta}}] e_p, e_q \rangle. \end{aligned}$$

它正好是 Ricci 方程(定理 7.2.2).

最后我们推导 Codazzi 方程(定理 7.2.3). 对等式 (7.13) 两边作外微分并使用结构方程 (7.10) 可得,

$$\begin{aligned} d\omega_{i\alpha} &= d\left(\sum_j h_{ij}^{\alpha} \theta_j\right) = \sum_j dh_{ij}^{\alpha} \wedge \theta_j + \sum_{j,k} h_{ij}^{\alpha} \omega_{jk} \wedge \theta_k \\ &= \sum_j \left(dh_{ij}^{\alpha} + \sum_k h_{ik}^{\alpha} \omega_{kj} \right) \wedge \theta_j. \end{aligned} \quad (7.16)$$

另一方面, 由结构方程 (7.8) 知,

$$\begin{aligned} f^* \bar{R}_{i\alpha} + d\omega_{i\alpha} &= \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_{j\alpha} + \sum_{\beta} \omega_{i\beta} \wedge \omega_{\beta\alpha} \\ &= \sum_j \left(\sum_{k,\beta} h_{kj}^{\alpha} \omega_{ik} - h_{ij}^{\beta} \omega_{\beta\alpha} \right) \wedge \theta_j. \end{aligned} \quad (7.17)$$

令

$$dh_{ij}^{\alpha} + \left(\sum_{k,\beta} h_{kj}^{\alpha} \omega_{ki} + h_{ik}^{\alpha} \omega_{kj} + h_{ij}^{\beta} \omega_{\beta\alpha} \right) = \sum_k h_{ijk}^{\alpha} \theta_k,$$

则由 (7.16) 和 (7.17) 可以得到

$$f^* \bar{R}_{i\alpha} = \sum_{j,k} h_{ijk}^{\alpha} \theta_j \wedge \theta_k.$$

上式表明

$$\bar{R}_{pqia} = f^* \bar{R}_{ia}(e_p, e_q) = h_{ipq}^\alpha - h_{iqp}^\alpha,$$

它就是 M 的 Codazzi 方程.

注 1 事实上可以验证 $(\bar{\nabla} B)(e_i, e_j, e_\alpha, e_k) = h_{ijk}^\alpha$.

例 7.3.1 标准球面 S^n 是欧氏空间 \mathbb{R}^{n+1} 上的超曲面. 对任意的 $x \in S^n$, 在 \mathbb{R}^{n+1} 的局部上选取标准正交标架场 e_1, e_2, \dots, e_{n+1} , 使得它们限制在 S^n 上时, e_{n+1} 是位置向量, 也就是 S^n 的法向量.

对任意的 $X \in TS^n$, 由于

$$\begin{aligned}\omega_{i,n+1}(X) &= \langle \bar{\nabla}_X e_i, e_{n+1} \rangle = -\langle \bar{\nabla}_X e_{n+1}, e_i \rangle \\ &= -\langle de_{n+1}(X), e_i \rangle = -\langle X, e_i \rangle \\ &= -\theta_i(X),\end{aligned}$$

故由 Gauss 方程 (7.12),

$$R_{ij} = \bar{R}_{ij} - \omega_{i,n+1} \wedge \omega_{n+1,j} = \theta_i \wedge \theta_j.$$

所以

$$R_{ij}(e_k, e_l) = \theta_i \wedge \theta_j(e_k, e_l) = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}.$$

即 S^n 是截面曲率为 1 的常曲率空间.

练习 3.1 设

$$S^n \times S^m = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}^{n+1}, y \in \mathbb{R}^{m+1} \text{ 且 } |x| = |y| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+m+2},$$

试证: 若 e_1, e_2, \dots, e_{n+m} 是一组局部正交标架场且当限制到 $S^n \times S^m$ 上时满足 $e_1, e_2, \dots, e_n \in TS^n$, $e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_{n+m} \in TS^m$, 则它的曲率形式为

$$R_{ij} = \begin{cases} \theta_i \wedge \theta_j, & \text{若 } i, j \leq n \text{ 或者 } i, j \geq n+1; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

提示: 可以选取单位法向量 $e_{n+m+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x, y)$ 和 $e_{n+m+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x, -y)$.

练习 3.2 试证明映射 $f: S^2(\sqrt{3}) \rightarrow S^4(1) \subset \mathbb{R}^5$,

$$f(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}yz, \frac{1}{\sqrt{3}}zx, \frac{1}{\sqrt{3}}xy, \frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 - y^2), \frac{1}{6}(x^2 + y^2 - 2z^2) \right)$$

是一个等距子流形且是极小的, 我们称之为 Veronese 曲面. 实际上, f 给出了实投影平面 \mathbb{RP}^2 (Gauss 曲率为 $\frac{1}{3}$) 到 $S^4(1)$ 的一个极小嵌入.

第八章 Hermitian 几何

§8.1 近复结构

定义8.1.1 设 M 是微分流形, $J: TM \rightarrow TM$ 是一个光滑的自同态, 即对任意的点 $p \in M$, J_p 是 $T_p M$ 到自身的线性变换. 若 $J^2 = J \circ J = -\text{id}$, 则称 J 是 M 的一个近复结构. 给定一个近复结构的微分流形称为近复流形(almost complex manifold).

定义8.1.2 M 称为复 n 维复流形(complex manifold), 如果存在一集族 $\{(X_\alpha, U_\alpha) | \alpha \in \Lambda\}$ 满足:

- (1) $\{X_\alpha(U_\alpha)\}$ 是 M 的一个开覆盖, 其中 $U_\alpha \subset \mathbb{C}^n$ 是 \mathbb{C}^n 中的开集, 且坐标映射 $X_\alpha: U_\alpha \rightarrow X_\alpha(U_\alpha) \subset M$ 是同胚的;
- (2) 对任意的 $\alpha, \beta \in \Lambda$, 如果 $X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, 则坐标变换 $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$ 是全纯的;
- (3) $\{(X_\alpha, U_\alpha)\}$ 是极大的.

复流形中最简单的例子是 \mathbb{C}^n 和复投影空间 $\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \sim$.

例 8.1.1 复流形上存在一个自然诱导的近复结构, 因而它是近复流形.

证明 设 M 是复流形. 对任意点 $p \in M$, 设 (z_1, z_2, \dots, z_n) 是 M 的一个局部坐标, 令 $z_j = x_j + \sqrt{-1}y_j$. 对于点 p , 在 $T_p M$ 上定义线性变换 J_p 如下,

$$J_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad J_p\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

于是, $J_p^2 = -\text{id}$. 下面只需证明 J_p 的定义与参数化的选取无关, 因而它是 M 上的一个近复结构.

对于 M 的另一个局部坐标 $z'_k = x'_k + \sqrt{-1}y'_k$, 由于 M 是复流形, 坐标变换 $z' = f(z)$ 是全纯的. 故由 Cauchy-Riemann 方程

$$df \circ J = J \circ df.$$

证毕. ■

命题8.1.3 设 M 是近复流形, 则 M 是偶数维可定向的实流形.

证明 对任意的点 $p \in M$, 由于 J 是 M 上的近复结构, 则

$$J_p : T_p M \longrightarrow T_p M, \quad J_p^2 = -\text{id}.$$

根据 J_p , 我们可以在 $T_p M$ 上定义一个复结构, 令

$$(a + \sqrt{-1}b)v = av + bJ_p(v), \quad a, b \in \mathbb{R}, v \in T_p M.$$

于是 $\dim_{\mathbb{R}} T_p M$ 是偶数. 即 M 是偶数维的, 不妨设 $\dim M = 2n$.

对任意的点 $p \in M$, 我们可以在切空间 $T_p M$ 上选取这样的一组基 $X_1, X_2, \dots, X_n, J(X_1), J(X_2), \dots, J(X_n)$. 此外, 对任意两个不同的这种基, 它们之间相差一个非退化矩阵

$$\begin{pmatrix} A_n & -B_n \\ B_n & A_n \end{pmatrix}$$

它的行列式等于 $|\det(A_n + \sqrt{-1}B_n)|^2 > 0$. 故 M 是可定向的. 证毕. ■

例 8.1.2 2 维可定向曲面都是近复流形.

证明 在 2 维可定向曲面 M 上选定一个黎曼度量, 对任意的 $p \in M$, 定义线性同构 J_p , 使得对任意非零切向量 $x \in T_p M$, $J(x)$ 是将 x 正向旋转 90° (根据定向). 显然, J 的定义是合理的, 它是 M 上的一个近复结构.

特别地, S^2 是近复流形. 事实上, S^2 是复流形. 读者可以自己写出复坐标覆盖. 证毕. ■

例 8.1.3 $S^6 \subset \mathbb{R}^7$ 是近复流形.

我们将 \mathbb{R}^8 看成全体 Cayley 数的集合. 令 $\mathbb{R}^7 = \{x \in \mathbb{R}^8 \mid \text{Re } x = 0\}$, 则

$$S^6 = \{a \in \mathbb{R}^8 \mid \text{Re } a = 0, \text{ 且 } \langle a, a \rangle = 1\} \subset \mathbb{R}^7.$$

对任意的 $a \in S^6$, $x \in T_a S^6$, 由于

$$\langle ax, a \rangle = \langle x, \bar{a}a \rangle = \langle x, 1 \rangle = 0.$$

故 $a \cdot x \in T_a S^6$. 我们可以定义映射 $J : T_a S^6 \longrightarrow T_a S^6$,

$$J(x) = a \cdot x, \quad x \in T_a S^6.$$

又因为对任意的 $a \in S^6$, $\bar{a} = -a$. 于是,¹

$$J^2(x) = a(ax) = (aa)x = -(a\bar{a})x = -x.$$

所以, $J^2 = -\text{id}$.

¹一般地, 对任意 $a, b, c \in \mathbb{R}^8$, $a(bc) \neq (ab)c$. 但根据 Artin 定理, 任意两个元素生成的子代数满足结合律.

注 1 仿照上例, 进一步我们可以得到: \mathbb{R}^7 中任意可定向的超曲面都是近复流形.

从上面可以看出, S^2, S^6 是近复流形. 对于更高维数的偶数维球面, 我们有著名的定理:

定理 8.1.4 (Borel-Serre-Wu) S^n 是近复流形, 当且仅当 $n = 2, 6$.

定义 8.1.5 设 (M, J) 是近复流形, 若 M 的近复结构 J 是由某一个复结构所诱导的, 则称 J 是可积的.

定理 8.1.6 (Newlander-Nirenberg, 1957) 近复流形 (M, J) 是可积的, 当且仅当 Nijenhuis 张量 $N = 0$.

这里, Nijenhuis 张量 $N: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$,

$$N(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

注 2 (1) 若要求 J 是实解析的, 则根据 Frobenius 可积性定理便可直接证明 Newlander-Nirenberg 定理, 见 [KN63];

(2) 对任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathcal{D}(M)$,

$$N(X, Y) = -N(Y, X), \quad N(fX, Y) = fN(X, Y);$$

(3) 对任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$, $N(X, JX) = 0$.

推论 8.1.7 任何二维定向曲面都是复流形(复曲线).

证明 选定 M 上的一个近复结构 J . 对任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, 由于 $N(X, X) = 0$, $N(X, JX) = 0$, 故 $N(X, Y) = 0$. 即 J 是可积的. 证毕. ■

对于 S^6 , 可以验证例 8.1.3 所给出的近复结构是不可积的. 关于 S^6 上是否有可积的近复结构的这个问题至今仍未解决, 是一个世纪性难题. Calabi 证明了对于 \mathbb{R}^7 中的超曲面, 根据 Cayley 数所给出的近复结构都不可积.

§8.2 Hermitian 流形

定义 8.2.1 设 M 是近复流形, J 是它的近复结构. 若存在 M 上的度量 g 满足

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

则称 (M, J, g) 是近 Hermitian 流形.

若近 Hermitian 流形是可积的(即 Nijenhuis 张量 $N = 0$), 则称 (M, J, g) 是 Hermitian 流形.

引理8.2.2 在近复流形 (M, J) 上存在一个度量, 使得 (M, J, g) 是近 Hermitian 流形.

证明 设 g_0 是 M 上的一个度量, 定义一个新度量 g

$$g(X, Y) = g_0(X, Y) + g_0(JX, JY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

显然定义是合理的, 且 (M, J, g) 是近 Hermitian 流形. 证毕. ■

定义8.2.3 设 (M, J, g) 是近 Hermitian 流形, 令

$$\Phi(X, Y) = \langle X, JY \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

由于

$$\Phi(Y, X) = \langle Y, JX \rangle = \langle JY, -X \rangle = -\Phi(X, Y),$$

故 Φ 是反对称的 2 阶张量, 即 $\Phi \in \wedge^2(M)$, 称 Φ 为 M 上的基本 2-形式或 Kähler 形式.

由 Φ 的定义, 我们有

$$\Phi(JX, JY) = \langle JX, J^2Y \rangle = -\Phi(Y, X) = \Phi(X, Y).$$

设 ∇ 是近复流形 (M, J) 上的联络, 若张量 J 关于 ∇ 是平行的 ($\nabla J = 0$), 即

$$\nabla_X(JY) = J\nabla_X Y, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

则称 ∇ 是复联络.

我们知道, 近 Hermitian 流形 (M, J, g) 上的 Levi-Civita 联络不一定是复联络. 但我们有

命题8.2.4 设 (M, J, g) 是近 Hermitian 流形, ∇ 是 Levi-Civita 联络, 则

$$2\langle (\nabla_X J)Y, Z \rangle = d\Phi(X, JY, JZ) - d\Phi(X, Y, Z) + \langle N(Y, Z), JX \rangle.$$

其中 N 是 Nijenhuis 张量, $(\nabla_X J)Y = \nabla_X(JY) - J\nabla_X Y$.

证明 利用下列等式, 直接代入等式验证即可.

$$1^\circ \quad (\nabla_X J)Y = \nabla_X(JY) - J\nabla_X Y;$$

2° 由于 ∇ 是 Levi-Civita 联络, 我们有

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Y X, Z \rangle &= \frac{1}{2} \left\{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle X, [Y, Z] \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle \right\}; \quad (8.1) \end{aligned}$$

3° 根据外微分定义,

$$\begin{aligned} d\Phi(X, Y, Z) &= X(\Phi(Y, Z)) + Y(\Phi(Z, X)) + Z(\Phi(X, Y)) \\ &\quad - \Phi([X, Y], Z) - \Phi([Y, Z], X) - \Phi([Z, X], Y). \end{aligned}$$

证毕. ■

定理8.2.5 设 (M, J, g) 是近 Hermitian 流形. 则 $\nabla J = 0$ 当且仅当 Φ 是闭的且 J 可积.

证明 \Leftarrow 由于 $d\Phi = 0$, $N = 0$, 根据命题 8.2.4, 对任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $(\nabla_X J)Y = 0$. 即 $\nabla J = 0$.

\Rightarrow 由于

$$\begin{aligned} N(X, Y) &= [JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY] \\ &= \nabla_{JX}(JY) - \nabla_{JY}(JX) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &\quad - J(\nabla_{JX} Y - \nabla_Y(JX)) - J(\nabla_X(JY) - \nabla_{JY} X). \end{aligned}$$

故 $\nabla J = 0$ 推出 $N = 0$.

另一方面, 由于 ∇ 是 Levi-Civita 联络且 $\nabla J = 0$, 则 $\nabla \Phi = 0$. 所以由命题 5.5.7, $d\Phi = 0$. 证毕. ■

定义8.2.6 设 (M, J, g) 是近 Hermitian 流形, 若 $d\Phi = 0$, 则称 (M, J, g) 是近 Kähler 流形. 若近 Kähler 流形 (M, J, g) 是可积的, 则称 (M, J, g) 是 Kähler 流形.

从上面的推理可以看出, 近 Hermitian 流形 (M, J, g) 是 Kähler 流形当且仅当 $\nabla J = 0$. 这里, ∇ 是 M 上的 Levi-Civita 联络.

设 (M, J, g) 是 $2n$ 维近 Kähler 流形. 由于 Φ 是闭形式, 故

$$[\Phi] \in H_{DR}^2(M^{2n}, \mathbb{R}).$$

推论8.2.7 若 M 是紧致的近 Kähler 流形, 则 $H_{DR}^2(M^{2n}, \mathbb{R}) \neq 0$.

证明 假设 $H_{DR}^2(M^{2n}, \mathbb{R}) = 0$, 则存在 $\alpha \in \wedge^1(M)$, 使得 $\Phi = d\alpha$. 于是由 Stokes 公式可知

$$\begin{aligned} \int_M \Phi^n &= \int_M d\alpha \wedge \cdots \wedge d\alpha = \int_M d(\alpha \wedge d\alpha \wedge \cdots \wedge d\alpha) \\ &= \int_{\partial M} \alpha \wedge d\alpha \wedge \cdots \wedge d\alpha \\ &= 0. \end{aligned}$$

另一方面, 由于 Φ 是非退化的, $\Phi^n \neq 0$, 即 $\int_M \Phi^n \neq 0$, 矛盾. 证毕. ■

注1 (Hopf-Calabi-Eckmann) $S^{2p+1} \times S^{2q+1}$ 上存在一个复结构, 但不存在 Kähler 结构. 这里 $p \geq 0, q \geq 0, p+q \geq 1$. 这是因为上同调群 $H_{DR}^2(S^{2p+1} \times S^{2q+1})$ 是平凡的.

命题8.2.8 设 (M, J, g) 是 Kähler 流形, 则曲率张量 R 满足下列性质: 对任意的 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

- (1) $R(JX, JY) = R(X, Y)$;
- (2) $R(X, Y) \circ J = J \circ R(X, Y)$.

证明 根据定义直接验证. ■

§8.3 活动标架

下面假定 (M^{2n}, J, g) 是近 Hermitian 流形, 我们约定 $1 \leq i, j, k, \dots \leq n$, $1 \leq A, B, C, \dots \leq 2n$.

在局部上, 选取一组正交标架场 $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n}\}$, 满足

$$e_{n+1} = Je_1, \quad e_{n+2} = Je_2, \quad \dots, \quad e_{2n} = Je_n.$$

设它的对偶基为 $\theta_1, \dots, \theta_{2n}$, ∇ 是 M 上的 Levi-Civita 联络. 我们有结构方程:

$$\begin{cases} d\theta = \omega \wedge \theta, & \omega + \omega^T = 0, \\ d\omega = \omega \wedge \omega - R. \end{cases}$$

命题8.3.1 近 Hermitian 流形 (M^{2n}, J, g) 是 Kähler 流形, 当且仅当 $\omega J_0 = J_0 \omega$. 其中

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = (\omega_{AB})_{2n \times 2n}.$$

即 $\omega_{i+n, j+n} = \omega_{ij}$, $\omega_{i, j+n} = -\omega_{i+n, j}$.

证明 \Rightarrow 由于 M 是 Kähler 流形, 故 $\nabla J = 0$. 所以对任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} \omega_{i+n, j+n}(X) &= \langle \nabla_X e_{i+n}, e_{j+n} \rangle = \langle \nabla_X (Je_i), e_{j+n} \rangle \\ &= \langle J \nabla_X e_i, Je_j \rangle = \langle \nabla_X e_i, e_j \rangle \\ &= \omega_{ij}(X). \end{aligned}$$

故 $\omega_{i+n, j+n} = \omega_{ij}$.

同样地, 我们可以得到 $\omega_{i, j+n} = -\omega_{i+n, j}$.

\Leftarrow 对任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$, 由于 $\nabla_X Je_{i+n} = -\nabla_X e_i$, 故要证 $\nabla J = 0$, 我们只需证明

$$\nabla_X (Je_i) = J \nabla_X e_i.$$

事实上, 由于

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla_X(Je_i) - J\nabla_X e_i, e_{j+n} \rangle &= \langle \nabla_X e_{i+n}, e_{j+n} \rangle - \langle \nabla_X e_i, e_j \rangle \\
 &= (\omega_{i+n, j+n} - \omega_{ij})(X) = 0; \\
 \langle \nabla_X(Je_i) - J\nabla_X e_i, e_j \rangle &= (\omega_{n+i, j} + \omega_{i, n+j})(X) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

故对任意的 e_i , 我们有

$$\nabla_X(Je_i) - J\nabla_X e_i = 0$$

即 $\nabla J = 0$. 证毕. ■

命题8.3.2 近 Hermitian 流形 (M^{2n}, J, g) 是 Hermitian 流形, 当且仅当对任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$(\omega J_0 - J_0 \omega)(JX) = (J_0 \omega J_0 + \omega)(X).$$

即 $(\omega_{i+n, j+n} - \omega_{ij})(JX) = (\omega_{i, j+n} + \omega_{i+n, j})(X)$.

证明 \Leftrightarrow 要证 M 是 Hermitian 流形, 我们只需证明 $N(e_i, e_j) = 0$ 即可. 注意到

$$\begin{aligned}
 N(e_i, e_j) &= [Je_i, Je_j] - [e_i, e_j] - J[Je_i, e_j] - J[e_i, Je_j] \\
 &= \nabla_{Je_i}(Je_j) - \nabla_{Je_j}(Je_i) - (\nabla_{e_i}e_j - \nabla_{e_j}e_i) \\
 &\quad - J(\nabla_{Je_i}(e_j) - \nabla_{e_j}(Je_i)) - J(\nabla_{e_i}(Je_j) - \nabla_{Je_j}(e_i)) \\
 &= (\nabla_{Je_i}(Je_j) - J\nabla_{Je_i}(e_j)) - (\nabla_{Je_j}(Je_i) - J\nabla_{Je_j}(e_i)) \\
 &\quad - (\nabla_{e_i}(e_j) + J\nabla_{e_i}(Je_j)) + (\nabla_{e_j}e_i + J\nabla_{e_j}(Je_i)). \quad (8.2)
 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
 \nabla_{Je_i}(Je_j) - J\nabla_{Je_i}(e_j) &= \sum_A \omega_{j+n, A}(Je_i)e_A - J\omega_{j, A}(Je_i)e_A \\
 &= \sum_k (\omega_{j+n, k} + \omega_{j, k+n})(Je_i)e_k + (\omega_{j+n, k+n} - \omega_{jk})(Je_i)e_{n+k}; \\
 \nabla_{e_i}(e_j) + J\nabla_{e_i}(Je_j) &= \sum_A \omega_{jA}(e_i)e_A + J\omega_{j+n, A}(e_i)e_A \\
 &= \sum_k (\omega_{jk} - \omega_{j+n, k+n})(e_i)e_k + (\omega_{j, n+k} + \omega_{j+n, k})(e_i)e_{n+k}.
 \end{aligned}$$

故由假设可知

$$\nabla_{Je_i}(Je_j) - J\nabla_{Je_i}(e_j) = \nabla_{e_i}(e_j) + J\nabla_{e_i}(Je_j).$$

同理

$$\nabla_{Je_j}(Je_i) - J\nabla_{Je_j}(e_i) = \nabla_{e_j}e_i + J\nabla_{e_j}(Je_i).$$

所以 $N = 0$. 即 M 是 Hermitian 流形.

\Rightarrow 若 M 是 Hermitian 流形, 则 $N = 0$. 将 $\nabla_{e_i}e_A = \sum_B \omega_{AB}(e_i)e_B$ 代入等式(8.2), 化简后即证. 证毕. ■

直接计算, 可以得到

引理8.3.3 对于近 Hermitian 流形的联络形式, 我们有

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} (\omega_{ji} \wedge \omega_{i,j+n} + \omega_{j,i+n} \wedge \omega_{i+n,j+n})(X, Y) \\ &= \frac{1}{4} \langle (\omega + J_0 \omega J_0)(X), (J_0 \omega - \omega J_0)(Y) \rangle. \end{aligned}$$

其中 \langle, \rangle 是 $gl(2n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{4n^2}$ 上的欧氏内积.

推论8.3.4 设 (M^{2n}, J, g) 是 Hermitian 流形, 则对任意的 $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\sum_{i,j} (\omega_{ji} \wedge \omega_{i,j+n} + \omega_{j,i+n} \wedge \omega_{i+n,j+n})(X, JX) \leq 0.$$

证明 根据引理 8.3.3 和命题 8.3.2,

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} (\omega_{ji} \wedge \omega_{i,j+n} + \omega_{j,i+n} \wedge \omega_{i+n,j+n})(X, JX) \\ &= \frac{1}{4} \langle (\omega + J_0 \omega J_0)(X), (J_0 \omega - \omega J_0)(JX) \rangle \\ &= -\frac{1}{4} \langle (\omega + J_0 \omega J_0)(X), (\omega + J_0 \omega J_0)(X) \rangle \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

证毕. ■

引理8.3.5 设 (M^{2n}, J, g) 是近 Hermitian 流形, 则 $\sum_j d\omega_{j,j+n}$ 是 M 上的整体 2-形式, 它与标架的选取无关.

证明 在 M 上选取两组正交标架 $\{e_A\}$ 和 $\{e'_A\}$, 分别满足 $Je_i = e_{i+n}$, $Je_{i+n} = -e_i$ 和 $Je'_i = e'_{i+n}$, $Je'_{i+n} = -e'_i$, 它们的对偶基分别为 $\{\theta_A\}$ 和 $\{\theta'_A\}$. 令 $e = (e_1, e_2, \dots, e_{2n})^T$, $e' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_{2n})^T$. 设 $e' = Ee$, 显然过渡矩阵 E 是酉矩阵.

由于 $\theta' = E\theta$, 故

$$d\theta' = d(E\theta) = dE \wedge \theta + E d\theta = dEE^{-1} \wedge \theta' + E\omega E^{-1} \wedge \theta'.$$

所以

$$\omega' = E\omega E^{-1} + dEE^{-1}.$$

注意到 $\sum_j \omega_{j,j+n} = \frac{1}{2}\text{Tr}(J_0\omega)$, 由于 E 是酉矩阵 ($U(n) \subset SO(2n)$),

$$\begin{aligned} J_0\omega' &= J_0E\omega E^{-1} + J_0dEE^{-1} \\ &= E(J_0\omega)E^{-1} + J_0dEE^{-1}. \end{aligned}$$

故

$$\text{Tr}(J_0\omega') - \text{Tr}(J_0\omega) = \text{Tr}(J_0dEE^{-1}).$$

因此, 我们只需证明 $d(\text{Tr}(J_0dEE^{-1})) = 0$. 事实上, 由于²

$$d(\det_{\mathbb{C}} E) = \sum_i \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ de_{i1} & de_{i2} & \cdots & de_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i,j} de_{ij} \tilde{E}_{ij}.$$

其中 \tilde{E}_{ij} 是 e_{ij} 的代数余子式.
等价地,

$$\text{Tr}_{\mathbb{C}}(dEE^{-1}) = \frac{d(\det_{\mathbb{C}} E)}{\det_{\mathbb{C}} E} = d \ln(\det_{\mathbb{C}} E).$$

故 $d\text{Tr}_{\mathbb{C}}(dEE^{-1}) = 0$. 于是,

$$\begin{aligned} d\text{Tr}_{\mathbb{R}}(J_0dEE^{-1}) &= 2 d\text{Tr}_{\mathbb{C}}(\text{Re}(\sqrt{-1}dEE^{-1})) \\ &= 2 d\text{Re}(\sqrt{-1}\text{Tr}_{\mathbb{C}}(dEE^{-1})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

证毕. ■

注 1 实际上, 在近 Hermitian 流形 (M^{2n}, J, g) 上 2-形式

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_j d\omega_{j,j+n}$$

就是第一 Chern 类. 特别地, 当 $\dim M = 2$ 时, 它就是 Euler 类, 且

$$\int_{M^2} -\frac{1}{2\pi} \sum_j d\omega_{j,j+n} = \frac{1}{2\pi} \int_{M^2} K d\text{vol} = \chi(M).$$

²这里, 我们将 $A + \sqrt{-1}B$ 与 $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ 等同.

定义8.3.6 设 (M^{2n}, J, g) 是近 Hermitian 流形. 对任意点 $p \in M$, 以及 $X, Y \in T_p M$,

$$*\text{Ric}(X, Y) := \text{Tr}\{v \mapsto -\frac{1}{2}J \circ R(X, JY)v, v \in T_p M\}.$$

不难证明, $*\text{Ric}$ 是一个张量.

根据定义, 设 $\{e_A\}$ 是它的一组标准正交基, $Je_i = e_{i+n}, Je_{i+n} = -e_i$. 则

$$\begin{aligned} *\text{Ric}(X, Y) &= \sum_A \frac{1}{2} \langle -J \circ R(X, JY)e_A, e_A \rangle \\ &= \sum_i \frac{1}{2} \langle R(X, JY)e_i, Je_i \rangle + \frac{1}{2} \langle R(X, JY)e_{i+n}, Je_{i+n} \rangle \\ &= \sum_i R_{i, i+n}(X, JY). \end{aligned}$$

注 2 若 (M^{2n}, J, g) 是 Kähler 流形, 则 $*\text{Ric}(X, Y) = \text{Ric}(X, Y)$. 这是因为

$$\begin{aligned} &*\text{Ric}(X, Y) \\ &= \sum_j \langle R(X, JY)e_j, e_{j+n} \rangle \\ &= -\sum_j \langle R(JY, e_j)X, e_{j+n} \rangle - \langle R(e_j, X)JY, e_{j+n} \rangle \quad (\text{第一 Bianchi 恒等式}) \\ &= -\sum_j \langle R(-Y, Je_j)X, e_{j+n} \rangle - \langle JR(e_j, X)Y, e_{j+n} \rangle \\ &= \sum_j \langle R(Y, e_{j+n})X, e_{j+n} \rangle + \langle R(X, e_j)Y, e_j \rangle \\ &= \text{Ric}(X, Y). \end{aligned}$$

定理8.3.7 ([Tan06]) 假设 (M^{2n}, J, g) 是紧致的近 Hermitian 流形, 且 $H_{DR}^2(M, \mathbb{R}) = 0$. 若对任意的非零向量 X ,

$$*\text{Ric}(X, X) > 0,$$

则 J 是不可积的.

证明 根据引理 8.3.5, $\beta = \sum_j d\omega_{j, j+n}$ 是 M 上的 2-形式. 由于 $H_{DR}^2(M, \mathbb{R}) = 0$, 故存在 $\alpha \in \wedge^1(M)$, 使得 $\beta = d\alpha$. 所以由 Stokes 定理,

$$\int_M \beta^n = \int_M d(\alpha \wedge d\alpha \wedge \cdots \wedge d\alpha) = 0.$$

另一方面, 假设 J 可积, 则根据推论 8.3.4, 对任意的非零向量场 X ,

$$\sum_{i,j} (\omega_{j,i} \wedge \omega_{i,j+n} + \omega_{j,i+n} \wedge \omega_{i+n,j+n}) (X, JX) \leq 0.$$

利用 Cartan 第二结构方程,

$$\sum_j d\omega_{j,j+n} = \sum_{i,j} (\omega_{j,i} \wedge \omega_{i,j+n} + \omega_{j,i+n} \wedge \omega_{i+n,j+n}) - \sum_j R_{j,j+n}.$$

于是由题设可知

$$\sum_j d\omega_{j,j+n}(X, JX) \leq - * \text{Ric}(X, X) < 0.$$

即 $\beta(X, JX) < 0$, 这意味着 β 是非退化的. 因此,

$$\int_M \beta^n \neq 0.$$

矛盾. 所以, J 是不可积的. 证毕. ■

注 3 对于标准球面 S^6 , 设 J 是它的一个与标准度量相适应的近复结构. 由于它的截面曲率恒为 1, 则

$$*\text{Ric}(X, X) > 0, \quad X \neq 0.$$

所以标准球面 S^6 上的所有近 Hermitian 结构都是不可积的.

注 4 Calabi-Eckmann [CE53] 给出了流形 $S^{2p+1} \times S^{2q+1}$ ($p+q \geq 1$) 的一个复结构. 事实上, 标准的乘积度量就是一个 Hermitian 度量. $H_{DR}^2(M, \mathbb{R}) = 0$. 但易知

$$*\text{Ric}(X, X) = 0.$$

这表明定理 8.3.7 中的假设 $*\text{Ric}(X, X) > 0$ ($X \neq 0$) 是重要的.

思考题

- (1) 设 M^6 是 \mathbb{R}^7 中的紧致定向超曲面, 其近复结构 J 由 Cayley 数给出. 直接证明 J 不可积.
- (2) 试找出一个正常数 $\delta < 1$, 使得当球面 S^6 上的度量满足 $\delta \leq \sec \leq 1$ 时, 任何近 Hermitian 结构都不可积.
- (3) $S^1 \times \Sigma^7$ 上存在复结构吗? 这里 Σ^7 为 7 维怪球. 更一般地, $S^{2p+1} \times \Sigma^7$ 呢?

参考文献

- [BS04] 白正国, 沈一兵等. 黎曼几何初步. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [BT82] R. Bott and L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, GTM 82, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [CC01] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义. 第二版. 北京: 北京大学出版社, 2001.
- [CE53] E. Calabi and B. Eckmann, *A class of compact, complex manifolds which are not algebraic*, Ann. Math. **58** (1953), 494~500.
- [Che44] S. S. Chern, *A simple intrinsic proof of the gauss-bonnet formula for closed Riemannian manifolds*, Ann. Math. **45** (1944), 747~752.
- [dC76] M. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc, 1976.
- [dC92] M. do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhauser, Boston, 1992.
- [Gro86] M. Gromov, *Partial differential relations*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Hic71] N. J. Hicks, *Notes on differential geometry*, van Nostrand Reinhold, London, 1971.
- [Hir76] M. W. Hirsch, *Differential topology*, GTM 33, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [Jia06] 姜伯驹. 同调论. 北京: 北京大学出版社, 2006.
- [Ker60] M. Kervaire, *A manifold which does not admit any differentiable structure*, Comment. Math. Helv. **35** (1960), 1131~1147.
- [KN63] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, John Wiley, New York, 1963.

- [Lim65] E. L. Lima, *Commuting vector fields on S^3* , Ann. Math. **81** (1965), 70~81.
- [Mil56] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. Math. **64** (1956), 399~405.
- [Mil65] J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, University of Virginia Press, Charlottesville, 1965.
- [Mun60] J. Munkres, *Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms*, Ann. Math. **72** (1960), 521~554.
- [PC02] 彭家贵, 陈卿. 微分几何. 北京: 高等教育出版社, 2002.
- [PT02] C. K. Peng and Z. Z. Tang, *Dilatation of maps between spheres*, Pacific J. Math. **204** (2002), no. 1, 209~221.
- [Tan01] Z. Z. Tang, *Nonexistence of a submersion from the 23-sphere to the Cayley projective plane*, Bull. London Math. Soc. **33** (2001), 347~350.
- [Tan06] Z. Z. Tang, *Curvature and integrability of an almost Hermitian structure*, Int. J. Math. **17** (2006), no. 1, 97~105.
- [War71] F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, GTM 94, Scott, Foresman and Company, BerlinGlenview, Illinois, 1971.

中文索引

*Ric, 132

伴随表示, 27

闭形式, 86

Cartan 第一结构方程, 89

Cartan 第二结构方程, 90

Cartan-Hadamard 定理, 107

Cayley 投影平面, 3

Christoffel 符号, 47

Codazzi 方程, 116

参数化, 1

测地流, 52

测地球, 61

测地凸邻域, 66

测地线, 50

测地向量场, 52

常曲率空间, 82

超曲面, 109

乘积度量, 32

de Rham 定理, 86

de Rham 上调群, 86

单参数子群, 26

单位分解, 22

等距, 29

第二 Bianchi 恒等式, 81

第二 Bianchi 恒等式, 91

第二基本型, 49

第一 Bianchi 恒等式, 74, 90

第一基本型, 49

定向, 15

度量形式, 34

度量 1 形式, 88

对径映射, 17

Einstein 流形, 83

法丛, 48

法空间, 108

法联络, 114

法邻域, 61

法曲率, 114

仿射联络, 40

系数, 40

分段光滑曲线, 58

复流形, 123

Gauss 方程, 110, 114

Gauss 公式, 108

Gauss 曲率, 35, 76, 92

Gauss 引理, 59

Gauss 映射, 110

Gauss-Bonnet 定理, 97

Gauss-Bonnet-Chern 定理, 98

Gauss-Kronecker 曲率, 109

Grassmann 代数, 85

共变导数, 41, 81

共变微分, 81

共轭点, 104

共形变换, 71

孤立零点, 96

光滑函数, 4

光滑结构, 1

S^n , 2

$\mathbb{R}P^n$, 3

光滑曲线, 4

光滑映射, 3

Hermitian 流形, 125

Hessian, 72

- Hilbert 定理, 35
 Hopf 定理, 96
 Hopf 纤维化, 9
 Hopf 引理, 72
 活动标架, 84

 Jacobi 场, 99
 Jacobi 方程, 99
 Jacobi 恒等式, 20
 基本 2-形式, 126
 极小子流形, 113
 截面曲率, 76
 近复结构, 123
 近复流形, 123
 近 Hermitian 流形, 125
 近 Kähler 流形, 127
 浸没, 9
 浸入, 9
 局部等距, 29
 局部对称空间, 83

 Kähler 流形, 127
 Kähler 形式, 126
 k 形式, 84

 Laplace 算子, 71
 Levi-Civita 联络, 46
 Lobatchevski 上半平面, 34
 李代数, 20, 24
 李括号, 19
 黎曼度量, 29
 黎曼几何基本定理, 46
 黎曼联络, 46
 黎曼流形, 29
 李群, 22
 联络
 对称的, 45
 与黎曼度量相适应, 44
 子流形的, 48
 联络形式, 89
 临界点, 14
 临界值, 14
 零点, 96

 流, 51

 Nijenhuis 张量, 125
 挠张量, 45

 Poincaré 圆盘, 35
 Poincaré-Hopf 定理, 97
 平均曲率, 109
 平均曲率向量场, 113
 平坦环面, 32
 平行移动, 42

 恰当形式, 86
 嵌入, 9
 切丛, 12
 切空间, 6
 切向量, 4
 切映射, 7
 曲率, 73
 张量, 74, 80
 曲率形式, 89
 全测地, 112

 Ricci
 曲率, 79
 张量, 79, 81
 Ricci 方程, 114
 Rosendorn 定理, 35

 Schur 定理, 82
 散度, 69
 实投影空间, 3
 数量曲率, 80
 双不变度量, 31

 totally normal neighborhood, 63
 梯度, 70
 体积, 37
 凸邻域定理, 66

 Weingarten 公式, 114
 Whitney 定理, 20
 外代数, 85
 外积, 84

外微分算子, 85

外微分形式, 84

完备, 107

微分流形, 1

微分同胚, 8

无挠, 45

向量场, 18

 沿曲面, 58

 沿着曲线的, 41

形状算子, 109

映射度, 95

张量, 80

正规测地线, 50

正则点, 14

正则值, 14

正则值原像定理, 14

正则子流形, 13

指数映射, 53

主方向, 109

主曲率, 109

子流形, 9

英文索引

- *Ric, 132
- adjoint representation, 27
- affine connection, 40
- almost complex manifold, 123
- almost complex structure, 123
- almost Hermitian manifold, 125
- almost Kähler manifold, 127
- antipodal map, 17
- bi-invariant metric, 31
 - $SO(n)$, 32
- Cartan's first structure equation, 89
- Cartan's second structure equation, 90
- Christoffel symbols, 47
- closed form, 86
- Codazzi equation, 116
- complete, 107
- complex manifold, 123
- conjugate point, 104
- connection
 - compatible with the metric, 44
 - of a submanifold, 48
 - Riemannian, 46
 - symmetric, 45
- connection form, 89
- covariant derivative, 81
- covariant derivative, 41
- covariant differential, 81
- critical point, 14
- critical value, 14
- curvature, 73
 - form, 89
- tensor, 74, 80
- curve
 - piecewise differentialbe, 58
 - smooth, 4
- de Rham cohomology, 86
- degree of a map, 95
- diffeomorphism, 8
- differentiable manifold, 1
- differential form, 84
- divergence, 69
- Einstein manifold, 83
- embedding, 9
- exact form, 86
- exponential map, 53
- exterior differential operator, 85
- exterior product, 84
- First Bianchi identity, 74, 90
- First fundamental form, 49
- flat torus, 32
- flow, 51
- fundamental two form, 126
- Gauss curvature, 35, 76, 92
- Gauss equation, 110, 114
- Gauss formula, 108
- Gauss map, 110
- Gauss-Kronecker curvature, 109
- geodesic, 50
 - ball, 61
 - field, 52
 - flow, 52
- gradient, 70

- Grassmann algebra, 85
- Hermitian manifold, 125
- Hessian operator, 72
- Hopf fibration, 9
- hypersurface, 109
- immersion, 9
- isolated point, 96
- isometry, 29
- Jacobi equation, 99
- Jacobi field, 99
- Jacobi identity, 20
- k -form, 84
- Kähler form, 126
- Kähler manifold, 127
- Laplace, 71
- lemma
 - of Gauss, 59
 - of Hopf, 72
- Levi-Civita connection, 46
- Lie Algebra, 20
- Lie algebra, 24
- Lie bracket, 19
- Lie group, 22
- Lobatchevski upper half-plane, 34
- local isometry, 29
- locally symmetric space, 83
- mean curvature, 109
- mean curvature normal vector field, 113
- metric one form, 88
- minimal submanifold, 113
- moving frame, 84
- Nijenhuis tensor, 125
- normal bundle, 48
- normal connection, 114
- normal curvature, 114
- normal neighborhood, 61
- normal space, 108
- orientable, 15
- parallel transport, 42
- parametrization, 1
- partition of unity, 22
- Poincaré disk, 35
- principal curvature, 109
- principal direction, 109
- product metric, 32
- real projective space, 3
- regular point, 14
- regular submanifold, 13
- regular value, 14
- Ricci
 - curvature, 79
 - tensor, 79, 81
- Ricci equation, 114
- Riemannian manifold, 29
- Riemannian metric, 29
- scalar curvature, 80
- Second Bianchi identity, 81, 91
- Second fundamental form, 49
- sectional curvature, 76
- shape operator, 109
- smooth map, 3
- smooth structure, 1
 - S^n , 2
 - \mathbb{RP}^n , 3
- space of constant curvature, 82
- strongly convex, 66
- submanifold, 9
- submersion, 9
- tangent
 - bundle, 12
 - map, 7
 - space, 6
 - vector, 4
- tensor, 80
- Theorem

- Cartan-Hadamard, 107
- de Rham, 86
- Gauss-Bonnet, 97
- Gauss-Bonnet-Chern, 98
- Hilbert, 35
- Hopf, 96
 - of convex neighborhoods, 66
- Poincaré-Hopf, 97
- regular value, 14
- Rosendorn, 35
- Schur, 82
- Tang, 132
- Whitney, 20
- torsion free, 45
- totally geodesic, 112
- totally normal neighborhood, 63
- vector field, 18
 - along a curve, 41
 - along a surface, 58
- Weingarten formula, 114