

重温概率统计*

闫钟峰

*本文最初是在参加 DhataWhale 的统计学时总结的学习笔记，最初名为《重温统计学》，完成学习后继续根据吴坚《应用概率统计》、方开泰《统计分布》补充复习概率论部分（该工作自 20190520 开始），并根据《统计分布》重新调整了内容结构。下一步准备根据卡塞拉《统计推断》进一步完善。感谢组织者的辛勤付出。

目录

I	概率论	5
1	概率论基础知识	5
1.1	概率论基本概念	5
1.2	条件概率与独立性	9
1.2.1	条件概率的三个主要性质	9
1.2.2	独立性	12
2	随机变量及其分布	14
2.1	随机变量与分布函数	14
2.2	随机向量及其分布 *	18
2.3	随机变量的数字特征	21
2.3.1	数学期望与方差	21
2.3.2	矩及偏度、峰度和变异系数	25
2.3.3	协方差与相关系数	26
2.3.4	位置特征和其他数字特征	28
2.3.5	熵与信息 *	29
2.3.6	矩母函数与特征函数 *	29
2.4	随机变量函数的分布简介	30
3	离散型随机变量的分布律	31
3.1	两点分布	31
3.2	二项分布	31
3.3	泊松分布	32
3.4	截尾泊松分布	32
3.5	超几何分布	33
3.6	几何分布	33
3.7	负二项分布	34
3.8	幂级数分布	34
3.9	离散型均匀分布	34
3.10	$Zeta$ 分布	34
4	正态分布及相关分布	35
4.1	正态分布	35
4.2	对数正态分布	35
4.3	χ^2 分布	35
4.4	t 分布	36

4.5	F 分布	36
4.6	非中心 χ^2 分布	36
4.7	非中心 t 分布	36
4.8	非中心 F 分布	36
4.9	其他连续型随机变量的分布	36
4.9.1	有限区间上的均匀分布	36
4.9.2	韦布尔分布	36
4.9.3	伽马分布	36
4.9.4	贝塔分布	36
4.9.5	幂函数分布	36
4.9.6	柯西分布	36
4.9.7	逻辑斯蒂分布	36
4.9.8	极值分布	36
4.9.9	拉普拉斯分布	36
4.9.10	指数分布	36
4.10	多元分布	36
5	极限定理	37
5.1	大数定律	37
5.2	中心极限定理	37
II	统计学与统计推断	39
6	统计学基本知识	39
6.1	统计学基本概念	39
6.2	抽样技术与试验设计 *	40
7	参数估计	41
7.1	点估计	41
7.2	区间估计——置信区间	41
7.3	贝叶斯估计	41
8	假设检验	42
8.1	参数假设检验	42
8.1.1	z 检验和 t 检验	42
8.1.2	单样本 t 检验 (z 检验)	43
8.1.3	独立样本 t 检验 (z 检验)	44
8.1.4	相依样本 t 检验	44
8.1.5	χ^2 独立性检验	44

8.1.6	F 检验简介	45
8.2	非参数假设检验	45
8.2.1	χ^2 拟合检验法	46
8.2.2	偏度、峰度检验法	46
8.2.3	秩和检验法	46
8.2.4	其他非参数假设检验法	46
9	方差分析	48
9.1	单因子方差分析	48
9.2	因子方差分析	50
9.3	复测方差分析	50
10	回归分析	51
10.1	相关系数	51
10.1.1	皮尔逊积差相关系数	51
10.1.2	线性相关的统计显著性检测	52
10.1.3	其他几种类型的相关系数	53
10.2	一元线性回归	53
10.2.1	一元线性回归方程	53
10.2.2	最小二乘法	54
10.3	多元线性回归初步	54
III	统计决策	55
11	决策论初步	55
12	统计决策与频率学派 *	55
13	贝叶斯分布	55
14	贝叶斯决策论	55

摘要

Part I

概率论

1 概率论基础知识

概率论是一门研究非确定性现象的规律性的数学分支，它和其他数学分支如测度论有着非常紧密的联系。

红底黑字

红框绿背景

1.1 概率论基本概念

确定性现象是指在给定条件 \mathcal{C} 下一定会发生（必然事件）或一定不会发生的事件（不可能事件）。与之相对的，**条件 \mathcal{C} 下的随机事件**指的是在给定的条件 \mathcal{C} 下可能发生，也可能不发生的事件。

注解 1. 随机事件发生的不确定性，不是事件本身不明确，而是发生的条件不充分，使得在条件与事件之间不能出现确定性的因果关系，从而导致在事件的发生与否上表现出不确定的性质，这种不确定性就是**随机性**。

注解 2. 对于很多我们通常归属于随机事件的案例，在不同的讨论角度和层面上是有不同看法的。比如说“掷一枚均匀的硬币，出现正面和反面的结果是随机的”，如果我们依据力学原理细究其运动过程，根据初始状态及受力分析其运动过程，只要各种数据量都可以精确测量，理论上是可以精确预测一次投掷的结果是正反面的。但这个分析过程在绝大多数时候是不能也无法进行的，这也就是说，我们把投掷硬币得到正面或反面，在缺乏足够的领域知识和观测数据的情形下，视其为随机事件。

实际上，在很多缺乏领域知识或（和）观测数据的情况下，我们都可以将无法提前预知结果的事件视为随机事件，这也是我们使用统计方法（或者说数据科学）对专业领域的数据进行分析的前提假设。

注解 3. 除了随机性这种不确定性之外，在客观世界中还存在着另外一些不确定性，例如**模糊性**，它所反映的是事物的概念是模糊的（即对一个对象是否符合这个概念难以确定，也就是由于外延模糊而带来的不确定性），处理模糊性的数学分支叫做**模糊数学**，而处理随机现象的数学就是概率论。

在给定的条件 \mathcal{C} 下，对于随机事件，如果我们多次进行观察或者试验，会得到不同的结果及其相应的（可能也不同的）出现次数。我们对某一随机现象进行 n 次观察或进行某项试验 n 次，如果事件 A 发生了 n_A 次，则称 A 在 \mathcal{C} 的 n 次实现下的**频数**是 n_A ，而称 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$ 为事件

A 在 \mathcal{C} 的 n 次实现之下的**频率**，它反应了事件 A 在给定条件 \mathcal{C} 下发生的可能性。当我们进一步考察事件 A 的发生频率 $f_n(A)$ 时，会发现如果实现次数 n 较大时， $f_n(A)$ 有经常性地接近某一个常数的趋势；并且实现次数 n 越大，接近程度越显著，即在大量的试验和观察下呈现出明显的规律性——这就是**频率稳定性**。

通常用的随机模型是多次掷一枚均匀的硬币，但为了加快实验速度，我们还可以使用如下 SQL 代码来模拟从男女两个性别中随机¹抽取一种性别：

```
1 WITH A AS
2   (SELECT XB
3    FROM
4     (SELECT XB, COUNT(*) SL FROM BENKE GROUP BY XB)
5    ORDER BY DBMS_RANDOM.VALUE)
6 SELECT * FROM A WHERE ROWNUM=1 ;
```

如果使用循环语句多次随机抽取，并统计在这这个固定的抽取次数的时候，结果为男所占的比例，就会发现这一比例会比较接近 $\frac{1}{2}$ 。

```
1 --使用for循环, 多次选取性别, 并计算多次选取结果的男性比例
2 --补充代码!
```

当我们进一步增大随机抽取的次数，并多次观察时，会发现这种接近性会随着随机抽取次数的增多而更加接近。

```
1 --使用for循环, 多次选取性别, 并计算多次选取结果的男性比例
2 --增大选取的次数
3 --并按照更大的选取次数, 重复进行上述选取和计算
4 --补充代码!
```

随机现象有其偶然性，但也有其必然性，这种必然性表现为，大量观察或试验中随机事件发生的频率的稳定性，即随机事件发生的频率在某个定值附近摆动。而且随着试验次数的增多，摆动幅度总体上会逐渐减小，这种规律性我们称之为**统计规律性**。频率稳定的这种统计规律性表明随机事件发生的可能性大小是随机事件本身固有的，是不随人们意志而改变的一种客观属性，因此可以对其进行度量。

对于随机事件 A ，我们依据上述论述，有理由认为在频率稳定性中 $f_n(A)$ 所围绕变动的那个与 A 有关的固定常数刻画了 A 的一个重要特性——事件 A 发生的可能性大小，记该数为 $P(A)$ ，称 $P(A)$ 为**随机事件 A 的概率**。概率度量了随机事件发生的可能性的的大小，它是一个介于 0 和 1 之间的数。

¹注意这里的随机，严格来讲是一种所谓的“伪随机”，关于“伪随机”，可参考网络上的相关文章。

以上只是概率的统计定义，并不能作为严格的数学定义，严格的概率定义是借助于概率的公理化结构而给出的。有了概率的概念，我们就可以对随机现象进行定量研究了，这就是**概率论**这门数学分支的目的。

一般地，设 E 为一试验，如果不能事先准确地预言它的结果，而且这一实验在相同条件下可以重复进行，就称 E 为一次**随机试验**。一次随机试验 E 的可能结果（记为 ω ）称为**基本事件**，也称为样本点。基本事件的全体 $\Omega = \{\omega\}$ 构成了**基本事件空间**，或称为样本空间。

注解 4. 基本事件空间 Ω 是由那些“不能再分或不必再分”的随机事件所组成，使得在每次试验或观察下有且仅有一个 $\omega \in \Omega$ 发生。当然，实际上对于具体的问题，是可以有不同的基本事件的认定从而有不同的样本空间的。

在具体问题中，明确认清基本事件空间 Ω 是由什么构成的，是非常重要的。它是描述随机现象的第一步。**事件**可以定义为样本空间 Ω 的一个子集，称**某事件发生当且仅当其包含的某一基本事件（样本点）发生**。

由于事件定义为集合，因此事件之间的关系和运算满足集合论的结果。例如，事件的**包含**表示事件 A 的元素（样本点）也是事件 B 的元素；事件的**相等**表示两个事件作为集合互相包含；事件的**和**表示两个集合的并集；事件的**差**表示两个集合的差集，事件的**积**定义为两个事件同时发生，表示两个集合的交集；事件的**互斥**表示两个事件的积为空集；事件的**互逆**表示两个互斥事件的并集是整个样本空间。

以下列出一些常用的事件的运算律：

1. (事件的和与积的) 交换律
2. (事件的和与积的) 结合律
3. 分配率
4. 德·摩根律

概率的公理化定义：

定义 1.1. 设随机试验 E 的基本事件空间为 Ω ，对于 E 的每个事件² A 赋予一个实数 $P(A)$ ，如果它满足如下三条公理：

1. $0 \leq P(A) \leq 1$;
2. $P(\Omega) = 1$;

²一般来说不把 Ω 的所有子集都视作事件，而是把称为 σ -代数 的集合定义为事件。这个问题涉及到了测度及可测集的定义，如果将不可测集视为一个事件，则无法给它赋予一个恰当的实数。详细的论证参见测度论相关书籍。

3. 对于可列无限个两两互不相容的事件 A_i ($i = 1, 2, \dots$)，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

上述定义中，概率所满足的性质分别称之为概率具有**非负性**、**规范性**和**有限可加性**，其中 3 式称为概率的可列可加性（或完全可加性）.

根据概率的定义，立即可以得到如下的推论或性质：

1. 不可能事件（空集）的概率等于零： $P(\emptyset) = 0$ ；

2. 概率具有有限可加性.

3. 对任意事件 A 有

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

4. 若事件 A, B 满足 $A \subset B$ ，则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

5. **一般加法公式**：对任意两事件 A, B ，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

事实上上述性质可以推广到有限个事件的情形：

6. **n 个事件的一般加法公式**对任意 n 个事件 A_i ($i = 1, 2, \dots, n$)，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \dots (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n) \quad (1)$$

如果随机试验的基本事件空间是有限的，且每个基本事件的概率均相同，而所有的事件都是由若干基本事件组成的，则事件的概率可以使用该事件的有利场合数除以基本事件总数，这就是概率的古典定义，即通常所说的**古典概型（等可能概型）**。古典概型处理的是基本事件有限的情形，但这不表示相应的计算就会简单，但由于有限性的限制，使得古典概型能覆盖的应用场合受到了限制。

与古典概型相对的，是被称之为**伯努利试验概型**的 n 重伯努利试验，在引入独立性的概念后再进一步讨论。

1.2 条件概率与独立性

条件概率是概率论中的一个重要概念，它与独立性有密切联系。独立性是概率论中特有的概念。

在实际的概率问题中，经常会遇到这样的情况：已知事件 B 已经发生，要求另一事件 A 发生的概率，这一概率记为 $P(A|B)$ 。

定义 1.2. 设 A, B 为随机试验 E 的两个事件，且 $P(B) > 0$ ，则称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的**条件概率**。

条件概率也符合概率定义中的非负性、规范性和可列可加性，因此条件概率显然也是一种概率，所以概率的相关结果对条件概率也一样成立。

在古典概型的场合下，条件概率的计算有两种方法，一种是通过定义分别计算 $P(AB)$ 和 $P(B)$ ，然后相除，另一种是在缩减后的基本事件空间里分别计算有利场合数和缩减基本事件总数，然后相除。

1.2.1 条件概率的三个主要性质

定理 1.1 (乘法定理). 设 A, B 为两个随机事件，则

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B), P(B) > 0$$

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A), P(A) > 0$$

乘法定理是说，两个事件 A, B 同时发生的概率，等于事件 B 发生的概率 $P(B)$ 乘以事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率 $P(A|B)$ 。

如果 $P(A) > 0$ 成立，则由上式立即可以得到事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率为

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$$

这就是**朴素贝叶斯公式**。稍后我们讨论更一般条件下的贝叶斯公式。

在贝叶斯公式之前，我们已经能够计算所谓的“正向概率”：例如“假设袋子里面有 N 个白球和 M 个黑球，伸手进去摸一个球出来，摸出黑球的概率是多大”。

而一个自然而然的问题是反过来：“如果我们事先并不知道袋子里面黑白球的比例，而是闭着眼睛摸出一个（或好几个）球，观察这些取出来的球的颜色之后，那么我们可以就此对袋子里面的黑白球的比例作出什么样的推测”。这个问题，就是所谓的**逆概率问题**。

定理 1.2 (n 个事件的乘法定理). 一般地, A_1, A_2, \dots, A_n 为 $n \geq 2$ 个事件, 满足 $P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) > 0$, 则

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

乘法定理的简单形式很容从条件概率的定义直接得出, 而 n 个事件的情形直观意义是: A_1, A_2, \dots, A_n 同时出现的概率, 等于先出现 A_1 , 在出现 A_1 的条件下出现 A_2 , 在 A_1, A_2 出现的条件下出现 $A_3 \dots$ 各自的概率的乘积.

定义 1.3. 设 Ω 为随机事件 E 的样本空间, B_1, B_2, \dots, B_n 为 E 的一组事件, 若

$$1. B_i B_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$2. \bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$$

则 B_1, B_2, \dots, B_n 为样本空间 Ω 的一个划分 (完备事件组).

定理 1.3 (全概率公式). 设 B_1, B_2, \dots, B_n 为随机试验 E 的样本空间 Ω 一个划分, 且 $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$, A 是 E 的任一事件, 则

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$$

在概率论中, 经常希望从已知的简单事件的概率推算出未知的复杂事件的概率, 为了达到这个目的, 常将一个复杂事件分解为若干个互不相容的简单事件之和, 然后分别计算这些简单事件的概率, 再利用概率的可加性得到最终结果, 这就是全概率公式的意义, 因此, 全概率公式也称**分解公式**.

当直接求解某事件 A 的概率比较困难时, 可以先寻求某一划分 B_1, B_2, \dots, B_n 及其中每个事件 B_i 的概率 $P(B_i)$, 然后再求出这一划分下的每个事件 B_i 发生时, 事件 A 的条件概率 $P(A|B_i)$, 最终利用全概率公式求出事件 A 的概率.

将上述定理中 $P(A)$ 的表达式代入到朴素贝叶斯公式, 立即就可以得到**贝叶斯公式**:

定理 1.4 (贝叶斯公式). 设 B_1, B_2, \dots, B_n 为随机试验 E 的样本空间 Ω 一个划分, 且 $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$, A 是 E 的任一事件, 则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)}$$

贝叶斯公式也称为**逆概率公式**.

贝叶斯公式在概率论和统计学中有着诸多方面的应用. 假定 B_1, B_2, \dots, B_n 是导致试验结果的“原因”, $P(B_i)$ 称为**先验概率**, 它反映了各种“原因”发生的可能性大小, 一般是以往经验的总结(借助于领域知识等), 在这次试验之前就已经知道. 现在如果试验产生了事件 A , 这个信息将有助于探讨事件 A 发生的“原因”. 条件概率 $P(B_i|A)$ 称为**后验概率**, 它反映了试验之后对各种“原因”发生的可能性大小的信息.

注解 5. 贝叶斯公式及其衍生的贝叶斯统计学派, 是和频率学派相对的一个统计学派.

频率学派对概率的定义: 在大量重复进行同一实验事件 A 发生的频率总是接近某一个常数, 并在它附近进行摆动, 这时将这个常数叫事件 A 的概率, 记作 $P(A)$. 这是古典频率学派对概率的定义, 定义包含了二个要点: (1) 事件 A 发生的概率是常数. (2) 事件 A 发生的概率是重复多次进行同一实验得到的.

频率学派的局限性在于, 频率学派评估可重复实验事件发生的概率具有一定的现实意义. 但是假如评估本世纪末北极圈的冰川消失的概率, 按照频率学派的思想, 首先需要创造无数个平行世界, 然后计算北极圈冰川消失的平行世界的频率, 记该频率为冰川消失的概率. 目前, 创造无数个平行世界的技术还不成熟, 因此频率学派在评估不可重复实验事件发生的概率具有很大的限制性.

贝叶斯学派对概率的定义: 贝叶斯学派评估事件 A 发生的概率带有主观性, 且事件 A 发生的概率是当前观测数据集 D 下的概率, 即条件概率 $P(A|D)$, 当观测数据集更新为 $D1$ 时, 则事件 A 发生的概率为 $P(A|D1)$, 不同的数据集预测 A 事件发生的概率不同. 贝叶斯学派评估事件 A 发生的概率会引用先验概率和后验概率两个概念, 贝叶斯定理是搭建先验概率和后验概率的桥梁. 定义包含了三个要点: (1) 事件 A 发生的概率是变化的, 并非常数. (2) 事件 A 发生的概率是特定数据集下的条件概率. (3) 事件 A 发生的概率是后验概率, 且事件 A 发生的先验概率已给定. 贝叶斯学派的难点在于如何设置合理反映事件 A 发生的先验概率, 不同的先验概率得到的结果不一样.

贝叶斯统计很难解释先验分布, 比如随机变量为什么符合某种类型的分布, 而这是在频率学派里很容易解决的. 那为什么还要用贝叶斯呢? 1. 好引入 domain knowledge, 如果能 justify domain knowledge, 那就用啊. 我现在就很需要贝叶斯的深度学习, 在查, 因为我的项目有一大堆医学知识. 2. 容易描述变量之间的联系, 一般贝叶斯模型都不是两层这么简单, 都是各种花式条件概率, 条件独立, 参见图模型. 3. 可以知道随机变量的后验分布, 而不是一个点估计, 更有全局信息.

1.2.2 独立性

如果一个事件的发生与否和另一个事件发生与否无关，则称这两个事件是独立的。下边给出**事件的独立性**的数学定义：

定义 1.4. 设 A, B 是两事件，如果满足等式

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称 A, B 是**相互独立的事件**。

推论 1. 若 A 与 B 独立，且 $P(B) > 0$ 则

$$P(A|B) = P(A)$$

推论 2. 若 A 与 B 独立，且 $P(B) > 0$ 则

$$P(A|B) = P(A)$$

需要注意的是，实际问题中的相互独立性常常不是根据独立事件的数学定义来判断出来的，而是由独立性的含义（一个事件的发生与否并不影响另一个事件发生的概率），利用领域知识来得出来的。

此外，尽管文字上来看二者有些相像，但相互独立的事件（同时发生的概率等于各自的概率的乘积）和互斥事件（交集为空）是有区别的：当两个事件不独立时，它们可以互不相容，也可以不是互不相容的。

同时，如果两个事件的概率均大于零，则这两个事件相互独立与这两个事件互斥不可能同时成立。

以下进一步讨论三个事件的相互独立。

定义 1.5. 对于三个事件 A, B, C ，如果满足以下四个等式

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(AC) = P(A)P(C)$$

$$P(BC) = P(B)P(C)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称 A, B, C 是**相互独立的三个事件**。如果只满足前三个等式，则称 A, B, C 是**两两独立的事件**。

需要注意的是，前三式与第四式是“相互独立的”：由前三式不能推出第四式，由第四式也不能推出前三式。

根据三个事件的情形，可以进一步推广到 n 个事件的情形：

定义 1.6. 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个事件, 如果对于任意的 $k(1 < k \leq n)$ 和任意的 k 个数 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, 成立

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

则称 A_1, A_2, \dots, A_n 是**相互独立的 n 个事件**. 如果只对 $k = 2$ 成立上述等式, 则称 A_1, A_2, \dots, A_n 是**两两独立的事件**.

显然, 相互独立的 n 个事件中的任意 $m(2 \leq m \leq n)$ 个事件, 也是相互独立的. 对于多个相互独立的时间也有类似于推论 1 和推论 2 的结果.

事件之间的独立性, 能够大幅简化很多概率的计算. 例如对于相互独立的 A_1, A_2, \dots, A_n , 有如下等式成立

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\bar{A}_i) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$$

试验的独立性:

定义 1.7. 设 $\{E_i\}(i = 1, 2, \dots)$ 是一系列随机试验, $\{E_i\}$ 的基本事件空间为 Ω_i , 设 A_k 是 $\{E_k\}$ 中的任意事件, $A_k \subset \Omega_k$, 如果 A_k 发生的概率不依赖于其他各次试验 $E_i(i \neq k)$ 的试验结果, 就称 $\{E_i\}$ 是一个**独立试验序列**. 特别地, 如果诸 $\{E_i\}$ 都是相同的试验, 则称之为**重复独立试验序列**.

在许多实际问题中, 我们对试验感兴趣的是试验中某事件 A 是否发生, 在这类问题中, 我们通常称出现 A 结果为“成功”, 出现 \bar{A} 为失败, 这种情况下样本空间只有两个结果的试验, 称为**伯努利试验**, 而重复进行 n 次伯努利试验则称之为 **n 重伯努利试验 (伯努利概型)**. 由于重复试验次数是一个可以趋于无穷的量, 因此从伯努利概型开始, 可以引入极限工具处理概率问题, 这使得概率论的研究进入了新的阶段.

如果我们进一步考察 n 重伯努利试验中, 出现某事件 A 的次数为 k 的概率, 则很容易利用排列组合知识得到结果, 这一结果恰好是二项式展开中的系数. 下一章将把这一分布称为二项分布.

2 随机变量及其分布

使用随机试验和基本事件空间的子集（事件）来描述概率问题的方式，对于全面讨论随机试验的统计规律性以及应用其他数学工具来研究概率问题有着较大的局限性，因此，本章开始引入随机变量的概念，并使用实数来表示随机试验的结果，从而可以使用数学分析等方法来讨论概率问题。用随机变量描述随机现象是现代概率论中最重要的方法，它可以更全面地揭示随机现象客观存在的统计规律性。

2.1 随机变量与分布函数

上一章讨论的随机试验，其结果可以是任意的表现形式，例如投掷硬币出现正面等，现在通过引入随机变量，我们把所有可能的结果都用一个实数来表示，这使得我们可以引入各种数学工具来探讨随机现象。

定义 2.1. 设 E 是随机试验，其基本事件空间为 $\Omega = \{\omega\}$, $X(\omega)$ 是定义在 Ω 上的单值实函数，如果对于任意实数 x , $P(X(\omega) \leq x)$ 存在，则称 $X(\omega)$ 为**随机变量**。

随机变量概念的产生是概率论历史上的重大事件，它使得概率论研究的对象由事件扩大为随机变量。

注解 6. 现实世界里随机变量的取值具有非常复杂的情形，在统计学里，随机变量的取值大概分成了以下几种情况：

1. 分类变量.
2. 定距或定比变量.
3. 定序变量.

详细的介绍留待统计学部分再说明。

由随机变量的定义可知，随机变量 $X(\omega)$ 本质上是用实数表示随机现象各种结果，它本质上是一个以基本事件空间中的点为自变量的函数，将基本事件空间中的点映射为实数，因此随机变量并不涉及取相应值的概率的大小，它只是使用实数对基本事件空间进行“表示”或“模拟”。为了使用随机变量描述某一事件的概率大小，我们还需要引入随机变量的分布律（离散型随机变量）和分布函数（离散和连续随机变量）等概念。我们只讨论离散和连续这两种类型。

注解 7. 根据可能的取值情况，随机变量可以分为**离散型随机变量**（可能的取值结果只有有限个或可数无穷多）和**连续型随机变量**（可能的取值结果构成某个实数区间），以及其他一些混合型随机变量。

由随机变量的定义, $P(X \leq x)$ 对任意实数都有意义, 它实际上给出了随机变量 X 取值不大于 x 的概率, 这个取值是与 x 有关的, 因此我们可以借助于 $P(X \leq x)$ 来讨论随机变量取各种值的概率大小, 也就是随机变量 X 的概率分布情况.

对于离散型的随机变量, 如果它的取值在 \mathbb{R} 上是稀疏的, 则对于每个可能的取值 (随机试验的结果), 总可以找到一个左开右闭区间 $(x_1, x_2]$ 使得该取值包含在上述区间内, 而该可能取值的概率也就是 $P(x_1 < X \leq x_2)$, 可以通过下式得出 (由于 $P(X \leq x)$ 对任意实数都有意义)

$$P(x_1 < X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1)$$

而如果离散型随机变量的取值在数轴上是稠密的 (比如说有理数), 由于**存在有理数到整数的一一映射**, 于是我们总可以通过对原始的随机变量复合这样一个一一映射, 使得新的随机变量的取值在数轴上是稀疏的.

一般来说, 对于离散型随机变量, 要掌握其取值的统计规律, 需要知道该随机变量的所有可能取值及相应的概率. 为了进一步讨论随机变量取不同值的概率, 下面给出离散型随机变量的概率分布 (分布律) 的数学定义:

定义 2.2. 设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 $x_i, i = 1, 2, \dots, X$ 取各个可能值的概率是

$$P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots)$$

则称上式为离散型随机变量 X 的**概率分布 (分布律)**.

上式也可以用表格或矩阵的形式来表示, 相应地称之为**分布列**.

由概率的定义和性质可知, 分布律 $P(X = x_i) = p_i$ 满足:

$$(1) P(X = x_i) = p_i \geq 0$$

$$(2) \sum_i P(X = x_i) = 1$$

一般地, 如果有一个数列满足上述两个条件, 则它肯定是某个离散型随机变量的分布律 (分布列).

连续型随机变量的数学定义如下:

定义 2.3. 随机变量 X , 若存在非负可积函数 $f(x)$ 使得对任意实数 x 有

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

则称 X 是**连续型随机变量**, 称 $f(x)$ 为 X 的**概率密度函数 (密度函数、概率密度)**.

为了能够像离散型随机变量使用分布律那样来描述连续型随机变量的取值情况，我们来考虑连续型随机变量取某个值的概率：

首先，对任意小的正数 h 有

$$P(X_0) \leq P(X_0 - h < x \leq x_0) = \int_{x_0-h}^{x_0} f(x)dx$$

上式右边取极限为零，其次，由概率定义 $0 \leq P(x_0)$ ，所以由夹挤定理， $P(X_0) = 0$ ，即连续型随机变量取个别值的概率为零。

由于连续型随机变量取个别值的概率为零，这与离散型随机变量的情况完全不同，这使得我们想要使用类似于离散型随机变量的分布律的方式，列举连续型随机变量取某个值的概率来描述随机变量变得不可能也毫无意义。为了能够描述连续型随机变量的分布，同时也将离散型随机变量的分布律统一进来，我们引入分布函数的概念：

定义 2.4. 设 X 是一个随机变量， x 是任意实数，定义函数

$$F(x) = P(X \leq x), x \in (-\infty, +\infty)$$

并称 $F(x)$ 为 X 的**分布函数**。

对于离散型随机变量，如果已知其分布律，则可以通过下式得到该随机变量的分布函数

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

由于 $P(X = x_i) = p_i = P(x_{i-1} < x \leq x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$ ，因此离散型随机变量的分布函数是一个**阶梯函数（跳跃函数）**，只有第一类间断点，在间断点处右连续，且在间断点处的概率恰好就是在该间断点的跃度，此外在非间断点处的概率均为 0。

连续型随机变量的概率密度函数是描述这个随机变量的在某个确定的取值点附近的可能性的函数。因此对应于离散型随机变量的分布律，连续型随机变量的概率分布在某种意义上可以用密度函数来描述

通过以上的讨论可知，分布函数既可以表达离散型随机变量，也可以表达连续型随机变量，它是描述随机变量最有用的工具之一。

分布函数具有以下的基本性质：

1. $F(x)$ 是一个单调不减的函数，即对于 $x_1 < x_2$ ，总有 $F(x_1) \leq F(x_2)$ 。
2. $0 \leq F(x) \leq 1$ ，且

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

3. $F(x)$ 是右连续函数, 即 $F(x^{+0}) = \lim_{t \rightarrow x^+} F(t) = F(x)$.

实际上可以证明, **满足上述三条性质的函数必然是某个随机变量的分布函数**. 这使得我们可以不考虑实际背景而借助上述性质来任意地构造分布函数.

由连续型随机变量及分布函数的定义可知, 连续型随机变量的概率密度函数具有以下性质

1.

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

2. 若 $f(x)$ 在点 x 处连续, 则 $F'(x) = f(x)$.

3. 连续型随机变量取个别值的概率为零.

4. X 的取值落在某个区间的概率为

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

性质 1 建立了概率密度函数和分布函数之间的联系。虽然概率密度函数不能用来表示连续型随机变量取某个具体值的概率 (由于性质 3), 但它描述了随机变量在某个区间的取值概率, 如果这个区间取为某个值的邻域, 于是随机变量的密度函数就是表示随机变量在这个值附近的取值概率, 这也正是性质 2 所说的“连续型随机变量的概率密度函数是分布函数的导函数”。

性质 3 我们在前边已经讨论和证明过了, 这条性质说明了对于连续型随机变量而言, 概率为零的事件并不一定是不可能事件 (概率为 1 的事件也不一定是必然事件). 此外, 这一性质也使得我们在计算连续型随机变量在某个区间的概率时, 不需要考虑区间的开闭情况, 这也就是性质 4.

使用分布函数可以表示以下一些重要事件的概率:

$$P(X < a) = F(a - 0)$$

$$P(X = a) = F(a) - F(a - 0)$$

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$

$$P(X \geq a) = 1 - F(a - 0)$$

在后边的连续型随机变量的分布将介绍一些常见的连续型随机变量的分布.

随机变量的独立性

在第一章我们复习了随机事件的独立性. 现在引入了随机变量的概念, 类似于事件的独立性, 我们可以给出随机变量的独立性的数学定义.

定义 2.5. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是 n 个随机变量, 如果对于任意实数 x_1, x_2, \dots, x_n 成立

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) \cdots P(X_n \leq x_n)$$

则称 X_1, X_2, \dots, X_n 是**相互独立的随机变量**.

上式中, $P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = P(\{X_1 \leq x_1\} \cdots \{X_n \leq x_n\}) = P(\{X_1 \leq x_1\}) \cdots P(\{X_n \leq x_n\})$.

与 n 个事件的独立性的定义相比, 上述定义要简洁得多。想想这是为什么? 是不是说明事件独立性的描述不严谨?

注解 8. 随机变量的独立和后文要复习的相关性有很大的区别: 独立是说联合分布函数等于分布函数的乘积, 这个等式蕴含的信息量是很大的——知道边际分布, 就知道联合分布了。不相关是说二阶混合中心矩等于 0, 是一个平均值。这个等式只蕴含了一个信息。你可以想象, 在只有一个混合矩确定的情况下, 联合分布函数仍然有很多变动的余地。这和方差一样分布可能不一样几乎是一个道理。

举个反例: 设 X 是 $[-1, 1]$ 上的均匀分布。 $Y = X^2$, X, Y 显然不独立 (为什么?), 但是 $E(XY) = E(X)E(Y)$, 所以 $Cov(X, Y) = 0$, 也就是说 X, Y 不相关。当然你要想要什么直觉意义上的描述, 就是相关性的公式是期望定义的, 这是一个平均的性质。但独立是对于种情况都要满足。所以独立比相关性的要求强。PS: 统计上相关性和线性相关不是一个概念。在统计中, 独立只出现在假设中, 样本本身是不能用来讨论独立性的

简单地说, 独立肯定不相关, 但不相关并不一定独立。在某些特殊的情况下, 不相关可以推出独立, 这时候不相关和独立等价, 例如:

1. X, Y 的联合分布服从二元高斯分布
2. X, Y 都是两值随机变量 (Bernoulli random variable)

独立性是统计应用中最重要概念之一。如果我们从某一整体里抽取了 n 个样本, 若他们作为随机变量相互独立, 且服从相同的分布, 则称它们为**简单随机样本**.

2.2 随机向量及其分布 *

在很多的随机现象中, 每次试验的结果可能需要用多于一个的指标来进行描述, 比如研究儿童生长发育情况, 就至少需要身高、体重和年龄等指标。直观上很容易想到, 我们可以分别对每个指标定义一个随机变量, 然后分别研究多个随机变量的性质以及及他们之间的关系。这种做法所需要的抽象成本较低, 使得我们能够很快地开始用概率工具研究实际案例。

但是, 如果我们将这些有联系的指标作为一个整体, 将其视为一个向量, 则我们就可以引入线性代数、多元微积分等更多的数学工具, 不但可

以研究每个分量的性质以及分量之间的关系，还可以考察他们作为向量的性质。引入随机向量的概念使得我们在数学上能够更好地使用各种数学工具来进行更加深入的研究。

定义 2.6. 若 X_1, X_2, \dots, X_n 是 n 个随机变量，则由它们组成的一个 n 元组 $x = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 叫做 n 维随机向量， X_1, X_2, \dots, X_n 称为 x 的分量。

回忆我们在线性代数中定义向量的办法，可以看出上述定义是很直观的。由于随机变量本质上是个实值函数，因此随机向量本质上就是个分量是实值函数的向量，这就是说，我们还可以用多元微积分里的向量值函数来研究随机向量。

接下来给出随机向量的分布函数、分布律和概率密度函数。

定义 2.7. 设 $x = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是一个 n 维随机向量，对任意 n 维实向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，令

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$$

称之为随机向量 x 的**联合分布函数**，或简称分布函数。如果每一个 X_i 都是离散型随机变量，则称 $x = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是一个 n 维离散型随机向量，并称使得所有 $p_i = P(x = a_i) \neq 0$ 的向量 a_i 及相应的 p_i 构成的矩阵或列表

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{bmatrix}$$

为离散型随机向量 X 的**密度矩阵**、分布列（分布律）；若存在非负可积的函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 使得

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n \end{aligned}$$

则称 $x = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是一个 n 维连续型随机向量，称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 n 维连续型随机向量 x 的**联合概率密度函数**，或简称联合概率密度。

类似于随机变量的情形，随机向量的分布函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 有如下性质：

1. 对每个 i ， $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 x_i 的单调不减的右连续函数。
2. 对每个 i ，当 $x_i = -\infty$ 时， $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ 。
3. 当所有的 $x_i = +\infty$ 时， $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ 。

4. 离散型随机向量的分布函数满足

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{a_i \leq x} p_i$$

其中关于向量的不等式 $a_i \leq x$ 定义为, 对所有的分量满足上述不等式.

5. 设 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n), b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 是两个 n 元实向量, 且对每个分量满足 $a_i \leq b_i$, 则

$$P(a_1 < x_1 \leq b_1, \cdots, a_n < x_n \leq b_n) = F(b) - F(a)$$

n 维随机向量 $x = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 作为随机向量有其联合分布函数, 它的每个分量作为随机变量也有其分布, 称之为 n 维随机向量 $x = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 关于某个分量的**边缘分布**. 一般地, n 维随机向量 $x = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的部分分量 $x^{(m)} = (X_1, X_2, \cdots, X_m) (1 \leq m < n)$ 的分布称为 n 维随机向量 $x = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 关于 $x^{(m)}$ 的**边缘分布**.

在引入随机向量后, 可以进一步地定义随机向量的分量之间的独立性

定义 2.8. 设 $x = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n 维随机向量, 分布函数为 $F(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, X_1, X_2, \cdots, X_n 的边缘分布函数分别为 $F_1(x_1), F_2(x_2), \cdots, F_n(x_n)$, 如果对于任意实数 x_1, x_2, \cdots, x_n 有

$$F(X_1, X_2, \cdots, X_n) = F_1(x_1)F_2(x_2)\cdots F_n(x_n)$$

则称 X_1, X_2, \cdots, X_n 是**相互独立的随机变量**.

对于离散型随机向量 $x = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$, X_1, X_2, \cdots, X_n 相互独立的充要条件是

$$P(X_1 = a_1, \cdots, X_n = a_n) = P(X_1 = a_1) \cdots P(X_n = a_n)$$

对任意实数 a_1, \cdots, a_n 都成立.

对于具有密度函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 连续型随机向量 $x = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 它的分量的密度函数记为 $f_1(x_1), \cdots, f_n(x_n)$, 则 X_1, X_2, \cdots, X_n 相互独立的充要条件是

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$$

对任意实数 x_1, \cdots, x_n 都成立.

随机向量的条件分布

2.3 随机变量的数字特征

由分布函数的定义和性质可知，如果我们想要全面地表达随机变量的概率性质，自然应该从随机变量的分布函数入手。但在许多实际问题中，分布函数并不可知，而且很多时候并不能够、也不需要知道随机变量的一切概率性质，而只需了解它的某一性质或特征。这种与随机变量有关的数量，虽然不能完整表述随机变量的统计规律，但可以反映出随机变量的某些重要特征，我们称之为随机变量的数字特征。引进数字特征的一个原因是有时很难精确求出随机变量的分布函数，只能退而求其次，另一个原因是实际上很多重要的分布都可以由一两个这种数字特征所完全描述，通过研究其数字特征深化了我们对随机变量的认识。常用的随机变量的数字特征有很多，比如数学期望（描述了随机变量的集中位置）、方差（描述了随机变量的集中程度，或者说分散程度）、标准差、协方差、相关系数、偏度、峰度等等，他们都可以统一在矩这一概念之下。

此外还有一些其他的特征，下面我们分别详细叙述。

2.3.1 数学期望与方差

一次随机试验有几种可能的结果，但对于随机试验，我们比较关心的是，平均而言，一次试验的结果大概会是多少？例如一个射手打靶，在打之前，我们想知道以他的水平，平均而言他会打出几环？也就是说，我们希望知道多次试验的结果的平均值。在古典概型中，求这种离散型随机变量的平均值的方法很简单，我们只需多次试验并记下每次试验的结果，然后把每次的结果相加，最后除以试验的次数，就得到了多次试验的**平均值**。由于这个平均值也是下一次试验的最可能的结果（频率稳定性），也就是期望结果，所以平均值也称为期望，或者**数学期望**。

概率论里的数学期望 $E(X)$ 是日常生活中的平均值的推广，数学期望也可以视为一种加权平均值，即将随机变量的取值，乘以相应取值的概率（将概率作为权重），得到的加权平均值。就是说将上述“累加每次试验的结果 x_k ，然后除以试验总次数 N ”的计算方法：

$$E(X) = \frac{\sum_{k=1}^N x_k}{N}$$

改为“用随机变量所可能取的每个值 x_i 乘以该值出现的概率 p_i ”的方法：

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

借助于概率的定义，经过简单的数学运算就能知道，上述两种计算方法是等价的。

数学期望的计算方法和物理学中计算力矩的方法相同：上式可以视为

$$E((X - 0)) = \sum_{i=1}^n (x_i - 0)p_i$$

将 x_i 理解为质点到原点的距离, p_i 理解为该质点的质量, 上式即为力学中数轴上离散质点体系相对于原点的力矩之和的计算方法. 如果我们将上式除以质点体系的总质量, 就得到了该质点体系的重心——重心可以理解为, 用与质点体系同等质量的单一质点替换质点体系的话, 如果要保持相对于原点的力矩不变, 该单一质点的到原点的距离应该是多少.

数学期望的概念在进一步推广上有着很重要的意义: 例如上述与力学中的力矩相对照时, 我们求的是质点体系相对于原点的力矩, 如果上式中减去的不是零, 而是另外一个值, 则得到了相对于这个值的力矩, 特别地, 取这个减去的值为数学期望, 则 $E[(X - E(X))] = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]p_i = 0$, 借助于上述力学模型, 该式即表示质点体系相对于其重心的力矩之和等于零.

此外, 上述所求的平均值 (数学期望) $E(X)$ 是一种算术平均值 (直接求和再除以总样本点数), 我们除了可以求上述的平移后的算术平均值, 还可以扩展为求几何平均值 $E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i$ 等, 以及其平移后的几何平均值, 或者更一般地, 随机变量的线性变换或其他连续函数的几何平均值, 例如 $E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^n [x_i - E(X)]^2 p_i$ 等, 该数学期望即为**方差**.

数学期望和方差 (以及方差的平方根, 称为**标准差**, 或根方差) 是最常用的数字特征, 简单地说, 数学期望描述了随机变量的集中位置 (还可以用中位数、众数来对这种集中趋势进行描述), 而方差和标准差则是度量随机变量取值 (相对于其数学期望) 的离散程度的量.

需要注意的是, 我们上述的讨论主要是针对于古典概型这种非常简单的情形进行的讨论. 实际上对于随机变量而言, 数学期望、方差和标准差这些数字特征并不是一定存在的. 为此我们需要明确一下上述概念的严格的数学定义:

定义 2.9. 设离散型随机变量 X 的分布律是

$$P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots$$

若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 绝对收敛, 则称其和为离散型随机变量 X 的**数学期望 (平均值、期望、均值)**, 记为 $E(X)$. 若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 不绝对收敛, 则称离散型随机变量 X 的数学期望不存在.

对于密度函数为 $f(x)$ 连续型随机变量 X ，我们将这个分布离散化：首先使用一个分划将实数轴分割，并计算每个小区间 $(c_i, c_{i+1}]$ 上的概率 p_i

$$p_i = \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)dx$$

其次，当上述分划充分细小的时候，我们不妨假设 $f(x)$ 只在每个小区间 $(c_i, c_{i+1}]$ 的中点上不等于 0，即用区间中点的值代替随机变量在区间内的取值，相应的用上式定义的概率表示随机变量在该中点处取值的概率，这样离散化后的随机变量的数学期望即为：

$$E(X) = \sum_i x_i p_i = \sum_i \frac{c_i + c_{i+1}}{2} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)dx$$

当分划的直径趋于零时，上式趋于 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ ，于是连续型随机变量的数学期望有如下的定义：

定义 2.10. 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$ ，若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ 绝对收敛（即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)dx < \infty$ ），则定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

为连续型随机变量 X 的**数学期望**，记为 $E(X)$ 。若上式不绝对收敛，则称连续型随机变量 X 的数学期望不存在。

利用分布函数 $F(X)$ ，结合之前的讨论中把连续型随机变量离散化的处理方法，我们可以把离散型随机变量和连续型随机变量的数学期望统一为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$$

这里的积分是**斯梯尔吉斯积分**，其定义和性质详见实变函数教材。

随机变量的数学期望的几个性质：

1. 常数的数学期望是其本身： $E(C) = C$, C 为确定的常数。
2. 设 X 为随机变量， C 为常数，则 $E(X + C) = E(X) + C$ 。
3. 设 X 为随机变量， C 为常数，则 $E(CX) = CE(X)$ 。
4. 设 X, Y 为两个随机变量，则 $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ 。
5. 设随机变量 X, Y 独立，则 $E(XY) = E(X)E(Y)$ 。

6. (柯西-施瓦兹不等式)对任意随机变量 X, Y , $E^2(XY) \leq E(X^2)E(Y^2)$, 等号成立当且仅当存在常数 a 使得 $P(Y = aX) = 1$.

上述柯西-施瓦兹不等式是在数学各分支都存在的一个重要不等式.

上述 $X + C, CX, X + Y$ 等等可以看作是随机变量的函数, 我们在罗列上述性质的时候, 不加证明地假设这些随机变量的函数也是随机变量, 且他们的数学期望也存在. 事实上随机变量的函数在什么条件下仍然是随机变量, 及随机变量函数的数字特征是否存在, 是个非常有趣的问题. 我们将在随机变量的函数一节进一步详细讨论.

接下来给出方差的严格数学定义:

定义 2.11. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 存在, 且

$$E[(X - E(X))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 dF(x) < \infty$$

$$E[(X - E(X))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 dF(x) < \infty$$

则称 $E[(X - E(X))^2]$ 为随机变量 X 的**方差**, 记为 $Var(X), D(X)$ 或 σ_X^2 , 其平方根称为**标准差** (均方差、根方差), 记为 σ_X .

由数学期望和方差的定义可知, 随机变量的数学期望并不是一定存在的, 当数学期望存在时, 方差也并不是一定存在的. 但方差存在时, 数学期望一定存在. 标准差由于其量纲和 X 相同, 在实际中具有广泛的应用.

X 是离散型随机变量时

$$E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^{\infty} [x_i - E(X)]^2 p_i$$

X 是连续型随机变量时

$$E[(X - E(X))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$$

方差的几个性质:

1. 设 X 是随机变量, 且其方差存在, 则

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

- 2.

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

这里 $E^2(X) = [E(X)]^2$

3. (切比雪夫不等式) 设 X 是随机变量, 且其方差存在, 则对任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

4. 若 $Var(X) = 0$, 则 $P(X = E(X)) = 1$

2.3.2 矩及偏度、峰度和变异系数

通过对数学期望和方差的计算方法进行推广, 我们引出了矩的概念:

定义 2.12. 设 X 与 Y 是随机变量, 若

$$m_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x)$$

存在, 则称之为 X 的 k 阶原点矩. 若

$$c_k = E[X - E(X)]^k = \int_{-\infty}^{\infty} [x^k - E(X)]^k dF(x)$$

存在, 则称之为 X 的 k 阶中心矩. 若

$$E[X - E(X)]^k E[Y - E(Y)]^l$$

存在, 则称之为 X 与 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩. 若

$$E(X^k Y^l)$$

存在, 则称之为 X 与 Y 的 $k+l$ 阶混合矩.

由上述定义可知, 数学期望是就是随机变量的一阶原点矩, 方差则是二阶中心矩.

一些高阶矩及由高阶矩计算得到的数字特征具有重要的意义, 以下给出峰度和偏度的定义:

定义 2.13. 设 X 为随机变量, 称

$$sk(X) = \frac{c_3}{c_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{E[X - E(X)]^3}{E^{\frac{3}{2}}[X - E(X)]^2}$$

为随机变量 X 的偏度 (偏斜系数), 称

$$k(X) = \frac{c_4}{c_2^2} - 3 = \frac{E[X - E(X)]^4}{E^2[X - E(X)]^2} - 3$$

为随机变量 X 的峰度 (峰态系数).

偏度是表示随机变量概率分布偏斜方向与偏斜程度的数字特征. 偏度为正表示概率分布向左偏斜, 偏度为负表示概率分布向右偏斜, 偏度的绝对值越大, 表示偏斜程度越大.

峰度是表示随机变量概率分布陡峭程度的数字特征. 峰度大于零表示概率密度曲线比正态分布陡峭, 峰度小于零表示概率密度曲线比正态分布平坦, 峰度绝对值越大, 表示随机变量的概率密度曲线与正态分布的越大.

利用偏度和峰度, 既可以检验一个分布是不是正态分布, 也可以对分布进行分类, 或者构造近似分布.

当我们需要比较不同的随机变量取值的变化程度的时候, 由于不同类型随机变量的取值差异可能会很大, 即使他们是同一量纲下的数值也不能直接比较, 而且实际中经常会遇到需要比较不同量纲下的两个随机变量的变异程度的问题. 比如随机变量 X 表示甲地人的身高 (单位: 米), 随机变量 Y 表示甲地人的体重 (单位: 斤), 现在如果想要比较该地人的身高和体重的变异程度哪个大, 就不能直接用方差或标准差来比较: 一方面, 他们的量纲不一样, 直接比较毫无意义, 另一方面由于两个随机变量取值的数量级也不同, 这会导致各自的方差和标准差也会有较大差异. 因此, 比较两个随机变量取值的变异程度时, 我们需要去掉量纲的影响和各自取值数量级的影响, 这就需要以下的变异系数概念:

定义 2.14. 对于随机变量 X , 定义

$$c_X = \frac{c_2^{\frac{1}{2}}}{m_1} = \frac{\sigma_X}{m_1} = \frac{\sigma_X}{E(X)}$$

为 X 的**变异系数**.

变异系数等于标准差除以数学期望, 这相当于把标准差进一步“标准化”, 把定距变量变成了定比变量, 消除了量纲和平均数不同的影响, 使得变异系数与随机变量的具体取值无关, 而只与随机变量的“变异程度”有关, 因此可以用来衡量不同随机变量取值的变异程度.

2.3.3 协方差与相关系数

数学期望和方差是一个随机变量自身的性质的描述, 而对于两个随机变量, 可以类似方差来定义所谓的协方差:

定义 2.15. 设 X, Y 为两个随机变量, 若 $E[X - E(X)][Y - E(Y)]$ 存在, 则称之为随机变量 X, Y 的**协方差**, 记为 $Cov(X, Y)$.

结合上节关于混合矩的定义可知, 协方差就是随机变量 X, Y 的 $1+1$ 阶混合矩. 由定义可知, 当 X, Y 为离散型随机变量, 分布律是 $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, (i, j = 1, 2, \dots)$ 时

$$Cov(X, Y) = \sum_{i,j} [x_i - E(X)][y_j - E(Y)] p_{ij}$$

当 X, Y 为连续型随机变量, 联合分布密度函数是 $f(x, y)$ 时

$$Cov(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x_i - E(X)][y_i - E(Y)]f(x, y)dx dy$$

协方差表示了两个随机变量的同向变化的程度, 协方差大于零, 则两个随机变量同向变化, 协方差小于零, 两个随机变量反向变化, 因此, 可以说协方差一定程度上度量了两个随机变量的相关性。但是, 类似于上一节关于变异系数的讨论, 由于两个随机变量的取值差异可能会很大, 因此我们希望能够通过某种“标准化”, 去除两个随机变量的取值差异的影响。我们知道, 如果一个随机变量的数学期望和方差都存在, 则当数学期望和方差均存在时, 我们对随机变量做如下变换:

$$X_1 = \frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}$$

得到的结果也是一个随机变量, 经过简单计算可知 $E(X_1) = 0, Var(X_1) = 1$, 因此可以称这个新的随机变量是 X 的**标准化随机变量**。

我们分别对随机变量 X, Y 进行上述标准化后, 去除了各自取值差异的影响, 然后再求标准化后的随机变量的协方差

$$\begin{aligned} Cov(X_1, Y_1) &= E(X_1 Y_1) - E(X_1)E(Y_1) \\ &= E\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}} \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{Var(Y)}}\right) - E\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{Var(X)}}\right)E\left(\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{Var(Y)}}\right) \\ &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} \end{aligned}$$

称上述**标准化的协方差**为随机变量 X, Y 的**相关系数**, 记为 ρ_{XY} 。正如其字面意思所揭示的, 相关系数度量了两个随机变量的线性相关的程度。事实上, 如果 $Y = aX + b$, 代入上述标准化协方差的计算公式, 立即可以得到 $Cov(X_1, Y_1) = a$

协方差具有如下的性质:

1. $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
2. $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y), a, b$ 为任意常数.
3. $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

根据协方差定义, 结合数学期望的性质即可得

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E[X - E(X)][Y - E(Y)] \\ &= E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)] \\ &= E(XY) - E[XE(Y)] - E[YE(X)] + E[E(X)E(Y)] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

这一性质有助于化简协方差.

$$4. \text{Cov}(X + Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$$

利用性质 3, 将上式左右两边分别展开即可验证他们是相等的.

由于相关系数只不过是标准化的协方差, 因此上述性质也为相关系数所具备. 不仅如此, 相关系数还具有以下性质:

1. 对于随机变量 X, Y , 以下命题等价:

(a) $\text{Cov}(X, Y) = 0$

(b) $\rho_{XY} = 0$, 即 X, Y 不相关.

(c) $E(X, Y) = E(X)E(Y)$

(d) $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

2. 若随机变量 X, Y 独立, 则 $\rho_{XY} = 0$

注意, 反之则不成立. 相关系数为零只是说两个随机变量没有线性相关的关系, 他们之间可能还存在其他的函数关系, 这时候可以用拟合的方法去探寻这种函数关系.

3. $|\rho_{XY}| \leq 1$

4. $\rho_{XY} = \pm 1$ 等价于 X, Y 以概率 1 线性相关, 即存在常数 $a (\neq 0), b$ 使得 $P(Y = aX + b) = 1$.

2.3.4 位置特征和其他数字特征

分位数与位置特征

定义 2.16. 对于实数 $p \in (0, 1)$, 称满足不等式

$$P(X \leq x) \geq p, P(X \geq x) \geq 1 - p$$

的 x 值为随机变量 X 的 p **分位数**, 记为 x_p .

分位数和它的函数通称为**位置特征**.

p 分位数在统计学的假设检验当中有着重要的作用, 许多重要分布的 p 分位数都已经列成表格, 供使用时参考. 一些统计软件如 R 等也包含了很多统计分布的 p 分位数指令.

我们知道数学期望描述了随机变量取值的集中趋势, 此外还可以用**中位数**、**众数**来对这种集中趋势进行描述, 有时还可以使用**四分位数**等来进一步具体描述这种集中趋势.

2.3.5 熵与信息 *

我们知道概率是研究随机性这种不确定性的数学分支，度量随机变量的不确定性的特征量就是**熵**，它是信息论中的基础概念，以下是香农给出的熵的定义

定义 2.17. 设离散型随机变量 X 的概率分布律为 $P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, n$ 则称

$$H(X) = \sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{1}{p_i} = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$$

为随机变量 X 的熵，其中规定当 $p_i = 0$ 时， $p_i \ln \frac{1}{p_i} = 0$.

定义 2.18. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$ ，则称

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln f(x)$$

为随机变量 X 的熵.

2.3.6 矩母函数与特征函数 *

定义 2.19. 随机变量 X 的**矩母函数** $M(t)$ 定义为

$$M(t) = E(e^{tx}), -h < t < h$$

这里 e 为自然对数的底， $h > 0$ 为某个常数.

容易验证 $M^{(n)}(0) = E(X^N)$ ，也就是说只要有了矩母函数，各阶原点矩就很容易求出，这也是矩母函数之所以得名的原因。但矩母函数的主要作用并不在于求矩，而是在于，在大多数情况下，矩母函数都能唯一确定概率分布。关于这里的“大多数”，我们做如下思考：矩母函数如果存在，则各阶矩也都存在并被矩母函数所确定，那么一个很容易想到的问题就是，如果各阶矩都确定了，是否可以唯一确定概率分布？答案是否定的，存在两个不同分布的随机变量，他们的各阶矩完全相同，因此矩不具有唯一性。当然这种情况比较少，如果能够增加“随机变量的支撑集有界”的条件，则各阶矩就具有唯一性了。此外，如果在原点的邻域内存在矩母函数，则不论随机变量的支撑集是否有界，概率分布都被矩母函数所唯一确定，这就是说，矩母函数和各阶矩的存在性并不等价。

但矩母函数的不便之处在于，矩母函数并不总是存在，因此就产生了特征函数的概念：

定义 2.20. 随机变量 X 的**特征函数** $\phi(t)$ 定义为

$$\phi(t) = E(e^{itx}) = E(\cos(tX)) + iE(\sin(tX))$$

这里 i 为虚数单位.

对于随即变量 X , 特征函数 $\phi(t)$ 总是存在的, 特征函数有以下一些性质:

1. $\phi(t)$ 是一个有界连续函数, $|\phi(t)| \leq 1$.
2. $\phi(0) = 1$
3. 若随机变量 X 的 k 阶原点矩 m_k 存在, 则 $m_k = \frac{1}{i^k} \phi^{(k)}(0)$. 反之, 若 $\phi^{(k)}(0)$ 存在, 则 $k-1$ 阶原点矩存在, 但 k 阶原点矩不一定存在.
4. 若随机变量 X 的各阶原点矩都存在, 则它的特征函数为

$$\phi(t) = 1 + \sum_{k=1}^{m_k} \frac{(it)^k}{k!}$$

5. 若随即变量 X 的特征函数为 $\phi(t)$, 则 $Y = aX + b$ 的特征函数为 $\psi(t) = e^{iat} \phi(bt)$.
6. 特征函数与分布函数一一对应.

阶乘母函数: 利用阶乘母函数, 可以较为方便地求出离散型随机变量的矩母函数和特征函数.

概率母函数定义为: $\phi(t) = E(t^X)$

2.4 随机变量函数的分布简介

随机变量的函数, 顾名思义是指自变量是随机变量的函数. 关于随机变量的函数, 我们有如下结论: **随机变量的连续函数也是随机变量**³. 由于随机变量具有分布函数, 因此随机变量的函数 (作为随机变量) 也应该会服从某种形式的分布. 通过随机变量的分布去求随机变量函数的分布, 在统计学中有重要的应用.

我们在前边已经接触过了最常见的随机变量的线性函数, 它和原始随机变量服从相同的分布. 数学期望和方差等数字特征也非常接近.

当函数形式为二次函数或其他较为复杂的情形时, 情况就比较复杂了. 例如对于服从标准正态分布的随机变量, 其平方和构成的函数服从所谓的 χ^2 分布.

³实际上这里的连续函数的限制并不是最弱的, 相关内容可参阅概率论的专业教科书.

3 离散型随机变量的分布律

本章我们重点介绍一些实用中最重要的离散型随机变量的分布律（概率分布，即随机变量所能够取的值及相应的概率）：

3.1 两点分布

任何一个只有两种可能结果的随机现象都可以用一个服从两点分布的随机变量来描述. 如果分别用 1 和 0 来代表两种可能的结果，其相应的概率为 $p, q(p+q=1)$ ，那么两点分布又可以称之为 **0-1 分布**，该分布可以看作是一次伯努利试验的结果，因此又称为伯努利分布.

两点分布的数学期望为

$$E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

方差为

$$Var(X) = E[(X-E(X))^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \cdot P_i = (1-p)^2 p + (0-p)^2 q = qp$$

3.2 二项分布

二项分布是最基本的离散分布. 二项分布就是重复 n 次的伯努利试验的试验结果的分布. 二项分布必须满足如下四个条件：

1. 每次试验的结果都是互斥的两个事件之一.
2. 不同的两次试验是相互独立的，即一次试验的结果并不会对另外一次试验的结果造成任何影响.
3. 每次试验中，每个可能的结果事件的发生概率都是相等的，记为 p .
4. 试验次数是固定的，记为 n .

在一个 n 次伯努利试验中，出现 k 次事件 A 的概率为

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

其中 p 为一次试验当中事件 A 的发生概率.

当我们考察二项分布的概率密度函数时会发现，随着试验次数 n 的增加，相应的概率密度函数逐渐变得形状接近于钟形曲线. 事实上，根据中心极限定理，当试验次数 n 趋向于无穷大的时候，二项分布的概率密度函数和正态分布是完全一致的.

二项分布的数学期望为

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = \sum_{i=1}^n i C_n^i p^i q^{n-i} = np$$

方差为（此处省略推导过程）

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \cdot P_i = npq$$

3.3 泊松分布

在上述二项分布中，当 n 很大，而 p 很小，且 np 也是一个比较小的数时，二项分布就近似于泊松分布了。泊松分布是一种较为常见的重要分布，社会科学和物理学中的很多现象都符合泊松分布，泊松分布可以用来描述大量试验当中稀有事件出现次数的概率分布模型。以下给出泊松分布的正式定义：

定义 3.1. 如果一个随机变量的所有取值情况为非负整数，并且取各个值的概率分别为

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \lambda > 0, k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

则称随机变量 X 服从参数为 λ 的**泊松分布**，记为 $X \sim P(\lambda)$ 。

显然，泊松分布的概率密度函数即为 $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ，这里，常数 λ 即为泊松分布的数学期望

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

方差也为 λ (此处省略推导过程)

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \cdot P_i = \lambda$$

3.4 截尾泊松分布

在上述泊松分布中，如果随机变量的取值不能是 0，则称之为截尾泊松分布。通过定义我们可以看出，截尾泊松分布实际上应该称之为截头泊松分布，但截尾泊松分布一词已被广泛使用。

截尾泊松分布的数学期望（此处省略推导过程）

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \frac{\lambda e^{\lambda}}{e^{\lambda} - 1}$$

方差（此处省略推导过程）

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \cdot P_i = \frac{\lambda e^{2\lambda} - \lambda(\lambda + 1)e^{\lambda}}{(e^{\lambda} - 1)^2}$$

3.5 超几何分布

超几何分布经常出现在产品的抽样检查中，故在抽样检验理论中，它占有重要地位。

定义 3.2. 设随机变量 X 的概率分布是

$$P(X = k) = \frac{C_M^K C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k \in \mathbb{Z} \cap [\max(0, M + m - N), \min(M, n)]$$

则称随机变量 X 服从**超几何分布**，记作 $X \sim H(M, N, n)$ 。

数学期望

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

方差

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \cdot P_i =$$

3.6 几何分布

如果在一个伯努利试验中，事件 A 出现的概率为 p ，试验一个接一个地进行，用 X 表示第一次出现事件 A 时所进行的试验次数，则 X 的分布就是 $P(X = k) = pq^{k-1}, k = 1, 2, \dots$ ，该分布叫做**几何分布**（因为该分布的和构成一个几何级数）记作 $X \sim G(p)$ 。

数学期望

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

方差

$$Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

3.7 负二项分布

负二项分布又称为帕斯卡分布, (等待时间分布), 是几何分布的直接推广. 若以 X 表示在重复伯努利试验中, 事件 A 第 r 次出现所需的总试验次数, 则 $P(X = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}, k = r, r+1, \dots$, 称 X 服从参数为 r, p 的**负二项分布**, 记作 $X \sim BN(r, p)$.

负二项分布 $BN(r, p)$ 的数学期望

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \frac{rq}{p}$$

方差

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \cdot P_i = \frac{rq}{p^2}$$

3.8 幂级数分布

一个随机变量 X 的概率分布为

$$P(X = k) = \frac{a_k \theta^k}{f(\theta)}, k = 0, 1, 2, \dots$$

其中 $a_k \geq 0, f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \theta^k$ 为收敛的幂级数, 则称 X 服从**幂级数分布**.

幂级数是一类抽象的分布, 泊松分布、二项分布、负二项分布和几何分布都是它的特殊形式.

3.9 离散型均匀分布

若随机变量 X 的取值为 $1, 2, \dots, m$, 且取每个值的概率均为 $\frac{1}{m}$, 则称 X 服从**离散型均匀分布**. 离散型均匀分布广泛用于实验设计、彩票及有奖销售中.

离散型均匀分布的数学期望

$$E(X) = \frac{m+1}{2}$$

方差

$$Var(X) = \frac{m^2 - 1}{12}$$

3.10 Zeta 分布

4 正态分布及相关分布

连续型随机变量的分布以正态分布及其相关分布最为常见，因此首先复习正态分布及其相关的一系列分布.

4.1 正态分布

正态分布也被称为高斯分布——事实上正态分布有很多种不同的名称. 正态分布是自然界中最常见的分布，现实世界中满足正态分布的现象有很多，当然自然界中也有很多不满足正态分布的现象.

当总体满足正态分布，并且总体（或者用以估计总体的样本）的均值和标准差已知时，对于总体中的某个个体数据，我们可以通过计算其对应的 z 分数 ($z = \frac{x-\mu}{\sigma}$) 来快速获取该个体数据所处的百分位，因此正态分布有时也被称为是 z 分布.

除了通过对个体数据计算其 z 分数进而快速获取这个个体数据在总体中所处的百分位之外，我们还可以计算从总体中随机抽取某一个体，这个个体取某一具体值的概率是多少.

正态分布的概率密度函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}$$

在很多初等统计学教材中，正态分布都是占据了主要地位的. 关于正态分布的更多信息，见网上广为流传的《正态分布的前世今生》.

4.2 对数正态分布

统计量的分布又称**抽样分布**. χ^2 分布、 t 分布、 F 分布是最重要的三种抽样分布，假设检验与方差分析基本都是以这三种分布为基础的.

4.3 χ^2 分布

χ^2 分布是一类重要的分布，它和 t 分布、 F 分布并称为三大抽样分布. χ^2 检验是一种重要的非参数检验方法. χ^2 分布的定义：

定义 4.1. 若 n 个相互独立的随机变量都服从标准正态分布，则这 n 个随机变量的平方和构成的新的随机变量的分布规律称为 χ^2 分布，其中， n 称为自由度，同时也是 χ^2 分布的均值.

根据中心极限定理，当 χ^2 分布的自由度特别大时， χ^2 分布就会近似于正态分布.

4.4 t 分布

4.5 F 分布

4.6 非中心 χ^2 分布

4.7 非中心 t 分布

4.8 非中心 F 分布

4.9 其他连续型随机变量的分布

以下介绍一些其他的连续型随机变量分布族

4.9.1 有限区间上的均匀分布

4.9.2 韦布尔分布

4.9.3 伽马分布

4.9.4 贝塔分布

4.9.5 幂函数分布

4.9.6 柯西分布

4.9.7 逻辑斯蒂分布

4.9.8 极值分布

4.9.9 拉普拉斯分布

4.9.10 指数分布

4.10 多元分布

略

5 极限定理

极限定理的内容十分广泛，其中重要的两种形式为大数定律和中心极限定理.

5.1 大数定律

尽管随机事件的结果是无法确切预知的，但随机事件发生的频率是具有稳定性的：当试验的次数不断增加的时候，随机事件发生的频率将逐渐稳定于某一个常数，这个常数就是随机事件发生的概率.

多次观测一个随机变量的取值并将观测结果取均值，随着观测次数的增加，这个均值将趋近于随机变量的数学期望.

大数定律保证了我们在讨论某一事件有多大可能性时，可以使用（多次观测得到的）频率来替代（很难甚至无法确切得知的）概率. 因此，大数定律为推断统计学提供了理论保证.

大数定律有多种不同的表现形式，例如切比雪夫大数定律、辛钦大数定律、伯努利大数定律等等，定理的具体形式和证明可见教科书.

例如，使用投针法来计算圆周率，就是利用了大数定律. 从直观上看，当我们向一个画出了内切圆的边长为 $2r$ 的正方形内投针时，投入到圆内的概率，就应该等于圆的面积除以正方形的面积 $(\frac{\pi r^2}{4r^2})$. 因此，根据大数定律，当我们不断重复投针实验时，随着重复次数的不断增大，观测到的投入圆内的实际次数除以总的投针次数，就会逐渐接近上述理论计算值. 当然在实际观测中会发生投针次数增多但比例远离理论计算值的情况，但总体上而言，观测值是会逐渐接近理论值的.

5.2 中心极限定理

前一节提到的通过使用个体数据的 z 分数来快速获取其在总体中所处的百分位的方法，有个前提条件是：所研究的总体符合正态分布. 然而现实中很多时候所研究的总体并不满足正态分布.

中心极限定理指出，无论总体的分布如何，只要抽取的样本的容量足够大（例如 $n \geq 30$ ），那么样本的均值的抽样分布就符合正态分布. 中心极限定理使得我们能够基于正态分布来进行统计推断，尽管总体并不符合正态分布.

独立同分布的中心极限定理：

定理 5.1 (). 设 X_1, \dots, X_n 是从某个均值为 μ ，方差为 σ^2 的总体中随机抽取的样本. 当 n 充分大时， X_1, \dots, X_n 的均值 \bar{X} 满足正态分布

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \quad (2)$$

上述定理是说, 独立同分布的随机变量 X_1, \dots, X_n 的均值, 当 n 充分大时近似服从于正态分布, 而不论 X_1, \dots, X_n 所服从的分布是什么. 独立同分布形式的中心极限定理为大样本推断提供了理论基础.

李雅普诺夫形式的中心极限定理进一步去掉了同分布的限制, 无论随机变量 X_1, \dots, X_n 分别服从什么分布, 只要他们的数学期望和方差满足一定的条件, 那么随机变量之和的均值仍满足正态分布.

关于李雅普诺夫定理的具体内容可参考概率统计教材.

中心极限定理保证了抽样分布的均值符合正态分布. 在复习正态分布时, 我们提到了对于满足正态分布的总体, 可以使用 z 分数来快速计算从总体中随机选取一个个体取某一个具体值的概率是多少. 和对个体的情形类似, 由于抽样分布的均值符合正态分布, 因此我们现在也可以在总体不满足正态分布的时候, 对于从总体中随机抽取的一个样本, 计算其样本均值取某一具体值的概率. 类似于计算 z 分数, 这时候我们也需要通过计算另外一种类型的 z 分数—— t 值. 回忆 z 分数的计算公式, 我们发现其计算原理是使用个体值与均值之差除以标准差. 具体到抽样分布的 t 值, 我们就要使用样本的均值减去总体均值得到的差, 除以一个另一种形式的标准差, 即均值标准误.

均值标准误的计算公式

$$\sigma_X = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{当总体标准差已知时}$$

$$\sigma_X = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{当总体标准差未知时}$$

Part II

统计学与统计推断

6 统计学基本知识

简单地说，统计学是收集和分析数据的艺术。

中国大百科全书对统计学的定义是：统计学是一门科学，它研究怎样以有效的方式收集、整理、分析带随机性的数据，并在此基础上，对所研究的问题作出统计性的推断，直至对可能作出的决策提供依据或建议。

从这个定义可以看出来，统计可分为三个阶段：首先是以有效的方式收集整理和分析数据，然后在此基础上根据我们的目的，对所研究的问题进行统计推断（参数估计或假设检验等），最后，根据统计推断的结论为决策提供依据和建议。在这个过程中，统计推断是统计学的中心问题，它前承数据整理与分析，后接决策分析，然而另外两个阶段也是非常重要不可忽视的：要保证真实有代表性的数据才能保证统计推断的准确性，做出的统计推断要为决策提供了帮助，才能真正地发挥统计推断工作的作用。随着信息技术的进步，数据整理和分析的技术产生了巨大的变化，这体现在数据科学的数据整理技术这样一门专门学科的产生发展和完善。本书暂不涉及数据整理的具体技术，而将主要注意力放在传统的统计推断、决策分析等数学理论上。

6.1 统计学基本概念

这里我们不加说明地罗列一些统计学里的基本概念，有些概念是如此直观，以至于不需要用更多的语言去解释和说明他们。

1. 总体 (population) 就是研究对象的全部。
2. 样本 (sample) 是从总体中选出来的一部分。
总体相当于讨论问题的基础集。而样本则是总体的一个子集，样本所包括的元素个数称为样本容量。从总体中选择样本的方法有很多种，比如随机抽样、典型抽样等等，选择样本的出发点是要保证样本具有代表性。
3. 参数 (parameter) 是用来描述总体特征的量。
4. 统计量 (statistic) 是指从样本计算而来的主要用于推断总体参数的量。
5. 均值、中位数、众数是用来描述数据的集中趋势的测度。
总体均值用 μ 表示，样本均值用 \bar{x} 表示。

当我们能够掌握总体的所有我们关心的数据的时候，我们就可以直接使用描述统计学来研究总体。当我们只能获取总体的样本，希望能够使用样本数据来推断总体的某些特征的时候，我们就需要使用推断统计学了。

极差、方差和标准差这三个量是用来描述数据的离散程度的测度。稍微详细说明一下方差和标准差的概念与区别：

1. 极差是指所有数据中，最大值和最小值的差。它给出了所讨论数据集合的总体离散程度。
2. 方差和标准差是用来描述数据的平均离散程度的量。需要注意的是，总体的方差、标准差与样本的方差、标准差的计算方式是不一样的。下面分别给出这两个量的定义。

总体的方差

$$\sigma^2 := \frac{\sum (x - \mu)^2}{N}$$

总体的标准差

$$\sigma := \sqrt{\frac{\sum (x - \mu)^2}{N}}$$

样本的方差

$$s^2 := \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

样本的标准差

$$s := \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

之所以样本的方差与标准差的计算公式中，分母使用的是样本数减一，是为了能够更好地使用从样本计算出来的方差去估计总体的方差。关于这个选择的更加详细的解释，可以参考常见的概率统计教科书，如较常见的浙大版的概率统计。方差多用于方差分析，作为分子出现。

6.2 抽样技术与试验设计 *

7 参数估计

7.1 点估计

矩估计

极大似然估计

7.2 区间估计——置信区间

当我们从样本计算出来的统计量并猜测它就是总体参数时，我们就是在做点估计——统计量的是数轴上的一个点。尽管事实上用从样本得到的统计量来推测总体参数差不多是我们所能想到的最好的办法，但通常而言，样本统计量并不会和总体参数一致。我们知道，当我们再次选择一个不同的样本时，那么从这个样本得到的统计量势必有很大概率和第一个样本得到的统计量不一致。每次选择不同的样本（尽管样本容量一致），对于同一种统计量（例如均值），我们得到的统计量的数值总会多少有些差异。于是我们希望能够知道，点估计的这种因偶然因素导致的误差应该怎么衡量？

区间估计能够很好的解决上述疑问。置信区间是一种常用的区间估计方法。所谓的置信区间就是说总体参数在一定的百分比（例如 95%）落在了我们通过计算得到的区间内。假如说我们通过样本计算出了某一参数的 95% 置信区间是 (a, b) ，这也就是说，我们相信总体的参数有 95% 的概率落在这一区间——等价于说总体参数只有 5% 的可能不在这个区间。这个参数不在区间内的百分比，称之为显著性水平，用 α 表示。通常在社会科学领域， α 多取 0.05。显著性水平表示我们愿意以多大的比例做出（因样本的随机性而导致的）错误判断。这种因样本的随机性和我们选择的显著性水平 α 而发生的错误，称之为第一类错误。虽然 0.05 的显著性水平广为应用，但也受到了很多诟病。

置信区间给出了关于点估计的精确度的信息。置信区间的具体计算方法取决于所讨论的统计量。一般来说，置信区间由样本统计量 \bar{X} 和给定显著性水平的误差范围确定，例如 t 检验的 95% 置信区间的计算公式是：

$$CI_{95} = \bar{X} \pm (t_{95})(s_{\bar{X}})$$

其中 $s_{\bar{X}}$ 是标准误。计算置信区间的过程是：先选定显著性水平，通过显著性水平和自由度（大致相当于样本容量减一）通过反向查表等方式获取相应的 t 值，然后由样本来计算均值和均值的标准误，最终根据上述公式计算出给定显著性水平下的置信区间。

7.3 贝叶斯估计

8 假设检验

在总体的分布函数完全未知，或者仅知道其形式但不知道具体参数等情况下，为了从样本数据推断出总体的某些特性，就需要先提出关于总体的一个假设（零假设）或两个假设（零假设和它的否定：备择假设），然后使用样本数据对这个假设进行检验：假设零假设正确，那么我们得到当前样本的概率是多少（这个概率称为 p 值），如果概率非常小（通常会取 p 值小于 0.05），我们就有理由做出拒绝零假设、选择备择假设的决策。假设检验就是这一做出假设并进行验证最终做出决策的整个过程。

假设检验的核心思想是“小概率事件在一次试验中是几乎不可能发生的”，先假设零假设成立，然后运用统计分析方法进行推理，然后得到该零假设发生的概率是一个极其小的数值⁴，从而推翻最开始的零假设，假设检验使用了反证法的逻辑推理过程。

假设检验根据其检验的对象可分为参数假设检验和非参数假设检验：当总体的分布类型已知，仅对未知的参数提出假设进行检验，称为参数假设检验；除了参数假设检验之外的假设检验都称之为非参数假设检验。本章主要复习参数假设检验方法。

假设检验的一般步骤：

1. 根据要研究的问题，提出零假设 H_0 和备择假设 H_1 ；
2. 选择适当的统计量，使其在 H_0 成立的条件下服从某种确定的分布；
3. 依据实际问题确定某种显著性水平 α ，确定用于作出决策的拒绝域；
4. 根据统计量的分布和显著性水平，确定拒绝域，即确定临界值（过去多是用现成的分布函数表查表获取临界值）；
5. 计算统计量的观测值，若其落入拒绝域则拒绝 H_0 ，否则接受 H_0 ；

8.1 参数假设检验

8.1.1 z 检验和 t 检验

z 检验和 t 检验的过程本质上是一致的，差别主要在两种检验所适用的场合（主要包括总体的是否符合分布、标准差是否已知、特别是样本容量的大小）。当我们事先已知总体满足正态分布时，或者尽管不知道总体是否满足正态分布，但样本容量比较大（ $n > 30$ ）时，根据中心极限定理，大样本的抽样分布也符合正态分布，这时候就可以使用 z 来进行检验。但当样本容量很小时（一般指小于 30），样本均值的抽样分布与正态分布有

⁴事实上常用的 $p=0.05$ 的显著性水平在某些场合实际是不够严格的，因为这表示我们有 5% 的可能犯第一类错误，即：零假设为真但我们的检验拒绝了零假设

较大的差异（实际上它满足 t 分布, t 分布是形状类似于正态分布的一种分布, 这里不做详细介绍, 可参阅统计学教材）, 这时就不适合使用正态分布和 z 检验, 而应该使用 t 检验.

实际上用于支撑 t 检验的 t 分布, 当样本容量逐渐增大时, 会逐渐趋于正态分布.

8.1.2 单样本 t 检验 (z 检验)

单样本的 t 检验可以用来根据从符合正态分布的总体中抽取的样本数据来检验总体均值与给定值的大小关系. 见下例:

例 1. 已知某厂生产的灯泡的使用寿命符合正态分布, 方差 $\sigma^2 = 196$. 某次检测抽取了 6 个产品做使用寿命检测, 测得使用寿命分别为: 3236, 2918, 3192, 3189, 3207, 3120 (单位: 小时). 问该厂灯泡的寿命是否可以认为是 $\mu = 3200$ 小时?

由于已知总体满足正态分布, 并且已知总体方差, 因此可以根据正态分布, 使用 z 检验进行假设检验. 以下按照假设检验的一般步骤来进行 z 检验:

1. 作出零假设, H_0 : 该厂灯泡的寿命为 3200 小时, 即 $\mu = 3200$. 那么相应的备择假设就是 $H_1: \mu \neq 3200$.
2. 计算样本均值 $\bar{X} = \frac{3236+2918+3192+3189+3207+3120}{6} = 3143.67$.

虽然这时已经知道样本均值并不等于题设中给定的 3200, 但仍然存在的问题是, 他们之间的差异是否是统计显著的. 而这正是我们需要利用统计分析来给出的判断.

3. 计算 z 分数

$$z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s_{\bar{x}}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} =$$

- 4.

- 5.

使用单侧检验还是双侧检验取决于我们事先设定的零假设的否定是否包含了两种情况. 例如零假设是药物无效, 则这个命题的否定 (也就是备择假设) 是药物有效. 但药物有效包括有正的作用和负的作用, 因此这时候就适用双侧检验. 但如果已经先验地知道了检验的拒绝域只会位于分布的一侧, 则此时就需要使用单侧检验.

8.1.3 独立样本 t 检验 (z 检验)

独立样本 t 检验用来考察两个相互独立样本在给定变量上的均值是否有显著的差异.

使用独立样本 t 检验的前提条件

1. 独立性: 两个样本相互独立, 即从一总体中抽取一批样本对从另一总体中抽取一批样本没有任何影响, 两组样本个案数可以不同.
2. 正态性: 样本来自的两个总体服从正态分布. 在样本的总体不满足正态条件时, 如果两个样本的分布形状相似, 他们的样本量相差不大并且样本量较大时, 仍可用 t 检验.
3. 待比较的两个样本方差相同. 如果两个样本的样本量大致相等, 略微偏离了方差齐性对检验结果的精度影响不大.

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$$

其中样本均值的标准误的计算公式为

$$s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{s_{\bar{X}_1}^2 + s_{\bar{X}_2}^2}$$

如果两个样本的方差不是大致相等, 样本容量也非常不同, 同时 (或者) 数据不服从正态分布, 那么独立样本 t 检验就不再适用了, 这时候就应该使用另外一种替代性的非参数检验方法: 曼-惠特尼 U 检验. 关于曼-惠特尼 U 检验可参考非参数检验的相关教材.

8.1.4 相依样本 t 检验

相依样本 t 检验又叫做配对 t 检验, 用于比较单个样本在两个不同时间点的取值之间的差异.

8.1.5 χ^2 独立性检验

χ^2 独立性检验适用于考察样本的两种分类变量之间的关系. χ^2 独立性检验可以确定样本对象落入各类别的比例是否与随机期望比例相等, 也就是说, 考察样本对象是否均匀地分布于不同组别.

例如, 当我们考察大学生的专业选择是否受性别影响时, 我们可以把大学生按照专业进行划分, 结合性别对学生再次进行划分, 这样就得到了一个列联表.

表 1: χ^2 独立性检验的性别与专业数据					
性别	专业	心理学	数学	...	英语
男生		p_{11}, q_{11}	p_{12}, q_{12}	\cdots	p_{1j}, q_{1j}
女生		p_{21}, q_{21}	p_{22}, q_{22}	\cdots	p_{2j}, q_{2j}

我们可以把每一个细分的组的学生们的实际数量, 填写到列连表里的 p_{ij} 的位置, 这就是**观测频数**, 然后我们还可以计算**预期频数** (纯粹因随机性而应该落入表格相应位置的预期数量) 填写到 q_{ij} 的位置.

接下来, 我们使用如下公式计算所谓的 χ^2 值.

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

上式中 O 表示各个单元格的观测值 (观测频数), E 表示各个单元格的预期值 (预期频数).

此外, 我们还需要一个称为自由度的值. 在 χ^2 独立性检验中, 自由度的计算公式为

$$df = (R - 1)(C - 1)$$

上式中 R 和 C 分别是列连表的行数和列数.

计算出自由度之后, 结合设定的显著性水平通过查表就可以得到相应的临界值, 通过比较 χ^2 值和临界值的大小, 就可以确定这种差异是否统计显著.

8.1.6 F 检验简介

从两个符合正态分布的总体中选取的相互独立的两个样本组, 如果两个总体的总体方差相差不大 (称为满足方差齐性), 需要检验两个总体的方差的大小, 这时就适用 F 检验. F 检验中最重要的一种形式就是方差分析, 关于不同类型的方差分析, 留待最后一章再复习.

8.2 非参数假设检验

前一节已经说过, 非参数假设检验是除了参数假设检验法之外的假设检验方法, 因此非参数假设检验包括了很多种检验方法. 有效使用参数假设检验需要满足若干假设条件, 但在很多时候这些条件无法满足, 因此非参数假设检验方法是在实践中. 笼统地讲, 非参数假设检验就是在推断过程中不涉及有关总体分布的参数, 仅仅利用样本数据来对总体的分布形态等等信息进行假设检验. 前一章在复习独立样本 t 检验时提到过的曼-惠特尼 U 检验就是一种典型的非参数假设检验方法.

8.2.1 χ^2 拟合检验法

χ^2 拟合检验法用于在总体分布未知时，根据样本数据来检验关于总体 X 的分布的假设

H_0 : 总体 X 的分布函数是 $F(X)$

H_1 : 总体 X 的分布函数不是 $F(X)$

的方法.

8.2.2 偏度、峰度检验法

偏度、峰度检验法是用来检验分布是否为正态分布的一种检验法.

8.2.3 秩和检验法

秩和检验法用于对服从相同分布（但分布的形态未知）、概率密度函数仅相差一个平移的两个连续型总体的均值是否相等进行比较.

8.2.4 其他非参数假设检验法

以下是另外一些来自于百度百科的非参数检验方法，留待后续学习并补充完善：

1. 两独立样本的非参数检验
2. 曼-惠特尼 U 检验
3. K-S 检验
4. 游程检验
5. 极端反应检验
6. 多独立样本的非参数检验
7. 中位数检验
8. Kruskal-Wallis 检验
9. Jonckheere-Terpstra 检验
10. 两配对样本的非参数检验
11. McNemar 检验
12. 符号检验

13. Wilcoxon 符号秩检验
14. Friedman 检验
15. 多配对样本的非参数检验
16. Cochran Q 检验
17. Kendall 协同系数检验

9 方差分析

一个变量的方差有多少可以与另一个变量共享，或由另一个变量所解释？这个问题就是方差分析的核心问题。我们在假设检验章节中复习的 F 检验方法时提到，方差分析是 F 检验的一种重要形式，它是通过计算 F 值来进行的假设检验。

方差分析的前提条件是：

1. 所有样本都是相互独立的；
2. 所有样本来源的总体都服从正态分布；
3. 所有总体的方差都相等（即所谓的**方差齐性**），但方差的值是未知的；

9.1 单因子方差分析

单因子方差分析要解决的问题类似于独立样本 t 检验，它们都是想要得到不同组的均值之间的平均差异相对于各组内部平均差异而言是否统计显著，从而得出结论认为因为分组变量的取值不同，导致另外一个变量的均值产生了显著（或不显著）的差异。

但他们之间也存在着差别：

1. 支持比较的组数不同。独立样本 t 检验仅仅能够对两个独立样本进行检验，而单因子方差分析则可以对两个或更多的独立样本进行比较；
2. 所使用的比值不同。独立样本 t 检验用的是 t 值，而单因子方差分析使用的是 F 值（通过使用某种方差计算出来的值）。
 - (a) t 值的分子是两个样本均值之间的简单差异 ($\bar{X}_1 - \bar{X}_2$)；而 F 值的分子是使用称为组间均方 (MS_b) 的量来计算三个及以上样本均值的平均差异的。
 - (b) t 值的分母是均值之差的标准误，本质上是某种形式的标准差，而 F 值的分母是使用称为组内均方 (MS_w ，也称均方误) 的量来计算不同组的均值差异的。

要计算组间均方 MS_b ，需要先计算组间平方和 SS_b

$$SS_b = \Sigma[n(\bar{X} - \bar{X}_T)^2]$$

然后用组间平方和除以 SS_b 的自由度 ($K - 1$) 就得到了组间均方

$$MS_b = \frac{SS_b}{K - 1}$$

要计算组内均方 MS_w ，需要先计算误差平方和 SS_e

$$SS_e = \sum \sum (X - \bar{X}_i)^2$$

然后用组内均方除以 SS_e 的自由度 ($N - K$) 就得到了组内均方，也就是均方误

$$MS_e = \frac{SS_e}{N - K}$$

上式中, \bar{X} 表示各组的均值, \bar{X}_T 表示所有组的样本合并之后计算出的均值, n 表示各组样本的对象数.

最后我们给出 F 值的计算公式

$$F = \frac{MS_b}{MS_e}$$

从上边各式的意义可以看出来, F 值实际上就是在比较, 相对于均方误, 也就是组内的平均差异 (MS_e) 而言, 组间的平均差异 (MS_b) 是否足够大?

当样本组数是两个的时候, F 值近似等于 t 值的平方乘以一个与自由度有关的量. 特别的, 当使用单因子方差分析对两个独立样本进行比较时, 所得结果是和独立样本 t 检验完全一致的.

使用单因子方差分析进行假设检验, 和之前的假设检验过程是完全一致的. 但是当分组变量的取值多于两个的时候, 我们从分析结果只能得出结论: 可能存在某两组使得这两组之间的均值差异是统计显著的, 但是我们仍然不知道是哪两组之间存在显著的差异. 因此我们还需要做**事后检验**, 以期进一步确定到底是哪两组或哪几组之间存在着统计显著的差异.

事后检验的方法有很多, 有些比较保守 (判定组间差异统计显著的标准比较严格), 有些则比较宽松. 所有事后检验的比较原则都是在控制比较的组数的条件下, 对所有组的均值进行两两比较, 然后确定其是否显著不同. 常用的比较宽松的事后检验方法是 *TukeyHSD* 事后检验, 此外还有相对严格的 *Scheffe* 事后检验. 以下是进行 *TukeyHSD* 事后检验时需要计算的统计量

$$TukeyHSD = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_{\bar{X}}}$$

式中的 $s_{\bar{X}}$ 表示某种标准误

$$s_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{MS_e}{n_g}}$$

其中 n_g 表示各组的对象数 (各组对象数相等是使用 *TukeyHSD* 事后检验的必要的前提条件).

在计算出了 *TukeyHSD* 值之后, 还是要通过查表来确定差异是否是统计显著的.

9.2 因子方差分析

因子方差分析进一步对单因子方差分析进行了推广。单因子方差分析只能考虑一个因素（即一个分组变量），而因子方差分析则可以同时考虑多个影响因素（多个分组变量），既能够检测每种影响因素的主效应，又能考虑不同因素之间的交互效应。

9.3 复测方差分析

复测方差分析是对相依样本 t 检验的推广。就像单因子分析是对独立样本 t 检验在分组变量上从两个分组推广到多个分组类似，复测方差分析是把相依样本 t 检验在两个时间点的取值推广到了多个时间点。此外，还可以同时进行因子方差分析，将分组变量从一种推广到多种。我们甚至还可以考虑协变量的因素，进行协方差分析。限于时间关系，暂时不做展开。

以下给出复测方差分析的适用条件：

1. 正态性。各组数据服从正态分布。
2. 方差齐性。各组方差相等。
3. 球对称假设。对于自变量的各取值水平组合而言（对于被试内因素的各个水平组合而言），因变量的协方差矩阵相等。

10 回归分析

回归和相关有着紧密的联系，在复习回归之前，我们先复习相关性的概念。

在统计学基本知识章节里，我们复习的统计量和参数都是一次描述一个变量，尽管单个变量的统计很重要，但很多时候我们会对两个及以上变量之间的关系更感兴趣：学生的考试成绩和他的备考时间有关系吗？日平均气温和冷饮的销量有关系吗？等等诸如此类的问题需要引入变量之间的关联程度的统计量：相关系数。

10.1 相关系数

现实世界中，不同的变量之间经常表现出某种相关关系。例如，一般来说，身高较高的人，体重也相对较重，等等。然而这种相关关系很多时候并不能一眼就看出来，这就需要我们使用统计学工具来根据已有的样本数据去考察两个变量之间是否真的有某种相关性。

根据两个变量的类型等不同因素，相关系数也有多种类型。以下我们以皮尔逊积差相关系数为例进行复习。

10.1.1 皮尔逊积差相关系数

皮尔逊积差相关系数考察的是两个定比或定距变量之间的相关性。我们关心两个变量之间的相关性，实际上主要关心的是两个方面的因素：

1. 相关性的方向。

正相关意味着我们分析的两个变量的取值平均而言会同时增大或减小。而负相关则意味着两个变量的取值反方向变化：平均而言，一个变量增大时，另一个变量会减小。

注意上述陈述中的“平均而言”四个字表明，可能存在和总的趋势相悖的例外值。

2. 相关性的强度或量级。


相关性的强度的取值范围为 $[-1, 1]$ ，特别的，当两个变量的相关系数为 0 时，表示两个变量没有直线相关关系，这时候在两个线性代数里可以看作样本数据在两个变量上的取值所组成的两个向量是线性无关的。

一般而言，实际的社会科学研究中，完全正（负）相关都是极其罕见的。一些前人研究的经验法则告诉我们，相关系数绝对值小于 0.2 时，可以视作两个变量弱相关，相关系数绝对值位于 0.2~0.5 时，称两个变量中等程度的相关，当相关系数的绝对值大于 0.5 时，表示强相关。

皮尔逊积差相关系数 r 的计算公式：

$$r = \frac{\sum(z_x z_y)}{N}$$

其中 z_x, z_y 分别为变量 X, Y 的 z 分数, N 表示 X, Y 的配对个数, 如果是在考察一个样本中对象的两个变量之间的关系, 则这个数值就是样本所含的对象数. 我们注意到上式实际上是两个 z 分数的交叉乘积的平均值, 它相当于把两个变量的协方差进行了标准化.

 相关性仅仅意味着一个变量取值的变动**对应于**另一个变量取值的变动, 除此之外, 没有告诉我们任何其他的事情. 绝不能从相关系数的计算得出两个变量之间的因果关系. 作为对比, 我们需要明确一下: 因果关系意味着一个变量取值的变动**导致了**另一个变量取值的变动. 因果关系通常是借助于领域知识做出的决定, 而不应该是相关性的计算.

关于相关和因果的关系, 可以参阅《别拿相关当因果》这本有趣的书.

此外, 我们还需注意, 相关性仅仅考察了两个变量之间是否具有线性相关的关系, 但很多时候两个变量之间的关系并不仅仅是简单的线性相关, 比如, 有很多变量之间的关系是曲线而不是直线. 这个问题留待以后进一步讨论.

10.1.2 线性相关的统计显著性检测

计算出了两个变量之间的相关系数之后, 我们还需要进一步判断, 这个**从样本中发现的相关性是否代表了抽样总体中两个变量之间的关系**? 这个问题恰好就是我们前两章复习的假设检验所能够解决的.

和其他的假设检验一样, 相关性的假设检验也是先提出一个零假设: 两个总体的变量之间完全不相干, 然后我们进行单样本的 t 检验, 利用样本数据进行统计分析, 计算出在零假设成立的前提下, 仅仅由于随机误差得到当前样本的概率是多大, 进而根据一定的显著性水平来拒绝或接受零假设.

在这个过程中, 关键是计算出 t 值. 我们给出如下的计算公式

$$t = \frac{r - \rho}{s_r}$$

其中 r 即为我们从样本数据计算出的皮尔逊积差相关系数, ρ 为我们的零假设给出的总体的两个变量之间的相关系数 (零假设是不相关, ρ 即为 0), 而 s_r 则代表相关系数的标准误

$$s_r = \sqrt{\frac{1 - r^2}{N - 2}}$$

上式中的 r^2 为相关系数的平方, 我们把它称为**决定系数**, 这一统计量和后边的方差分析中的其他统计量都是使用可释方差百分比来测度两个变量之间的相关强度.

10.1.3 其他几种类型的相关系数

1. 考察一个定比或定距变量与一个分类变量之间的相关性的点二列相关系数；
2. 考察两个二分变量之间的相关性的 ϕ 相关系数；
3. 考察两个定序变量之间的相关性的斯皮尔曼 ρ 相关系数，这是皮尔逊 r 相关系数的一种特殊情形。

10.2 一元线性回归

当我们在考察两个变量之间的相关系数的时候，我们并不明确区分谁是因变量谁是自变量。这么做的不便之处在于，例如，我们想要通过一个变量的改变程度对另一个变量的改变进行预测，光有相关系数就不够用了，这时候就需要使用线性回归来确定自变量和因变量之间的函数关系，以便进行预测。回归和相关的区别是：相关分析不区分自变量和因变量，但回归一定区分自变量和因变量。

线性回归根据所涉及的变量个数而分为一元线性回归（或者称为简单回归）和多元线性回归。一元线性回归涉及一个自变量（或者称为预测变量）和一个因变量（也称为结果变量），我们可以根据预测变量的给定值来对结果变量的取值进行预测。而多元回归则涉及多个自变量和一个因变量，多元回归分析使得我们能够考察多个自变量和因变量之间的关系的性质与强度、若干自变量对因变量的相对预测能力，以及在控制了一个或多个协变量的情况下，一个或多个自变量的独特贡献，此外还能检验交互效应。

我们这里讨论的回归所使用的自变量与因变量都必须是定距或定比变量。对于二分变量作为预测变量的回归，可以参考 Logit 回归（也称为 Logistic regression，“逻辑回归”）。

10.2.1 一元线性回归方程

一元线性回归的方程为

$$\hat{Y} = bX + a$$

其中， \hat{Y} 为变量 Y 的预测值， b 为未标准化的回归系数（或斜率）， a 为截距， X 为自变量。这里重点说明一下 b 和相关系数的关系。我们说“ b 为未标准化的回归系数”，其实就是说它经过标准化后，就得到了皮尔逊相关系数 r 。以下不加证明地给出二者之间的关系：

$$b = r \frac{s_Y}{s_X}$$

上式中， s_Y, s_X 分别为因变量 Y 和自变量 X 的标准差。

我们可以从量纲角度来考察上式. 注意到相关系数 r 是一个比率, 它是无量纲的, 两个变量标准差的量纲分别和变量的量纲一致, 标准差之比实现了将量纲从自变量转换为了因变量. 因此在一元线性回归方程中, b 实现了量纲从自变量到因变量的转换 (当然事实上它还实现了将自变量的变化幅度转化为因变量的变化幅度).

需要注意的是, 上述一元线性回归方程只是预测了因变量的变化, 而不是因变量的实际值, 如果想要把上式方程中的预测值替换为实际值, 需要增加一个误差项 e , 因此我们可以给出如下的另外一个线性回归方程

$$Y = bX + a + e$$

这个方程将误差项考虑在内, 使得我们能够把实际的因变量观测值和自变量的值联系起来.

10.2.2 最小二乘法

如果我们把自变量和因变量的值组成的有序偶视为直角坐标系中的点的坐标, 则我们可以在坐标系中绘出 **散点图**, 然后我们求回归方程的目的就变成了寻求穿过这些数据点的“最好”的直线. 这里的“最好”, 意味着尽管这条直线不一定穿过了最多的点, 但是当我们计算所有点到这条之间的距离之和 (注意这个和其实主体部分也是某种形式的平方和) 的时候, 我们希望这条“最好”的直线是所有直线中使得这个距离之和最小的直线. 这就是最小二乘法的思想.

10.3 多元线性回归初步

多元线性回归使得我们可以讨论的自变量个数不再是一个, 但它的基本形式是一致的, 下边我们给出多元线性回归方程的具体形式:

$$\hat{Y} = a + b_1X_1 + b_2X_2$$

关于多元线性回归的更多内容, 暂时不做展开, 留待后续参考相关的统计学教材逐步完善.

Part III

统计决策

- 11 决策论初步
- 12 统计决策与频率学派 *
- 13 贝叶斯分布
- 14 贝叶斯决策论

参考文献