Stochastik Zusammenfassung

1 Beschreibende Statistik

1.1 Merkmalstypen

- qualitativ: Familienstand, Schulnoten. Nominal, ordinal, dichotom
- quantitativ/metrisch: verhältnisskaliert (skalen haben Nullpkt.), diskret, stetig, absolutskaliert (verhältnisskaliert + Nur eine Skala, bspw. Anzahl)
- klassiertes Merkmal: Intervall

1.2 Median/Quantile

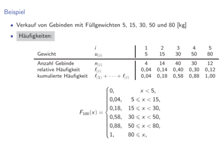
Median ergibt sich aus der Rangwertreihe, er ist das 0.5 Quantil (p)

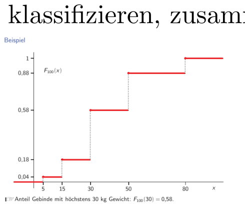
1.3 Streuungsmaaße

- Empirische Varianz: Jeder Wert minus den Durchschnitt im Quadrat nehmen und durch die Anzahl der Werte teilen. Sagt etwas über die Verteilung der Werte
- Standardabweichung = Wurzel aus Varianz
- Kovarianz:
$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \cdot \bar{x}\bar{y}$$
- Spannweite max minus min
- mittlere absolute Abweichung: Median $\tilde{x}$ statt Durchschnitt $\bar{x}$
- Variazionskoeffizient: Standardabweichung/Durchschnitt
- Quartilskoeffizient: Q_{koeff}= 2* Quartilsabstand/(Quartilswertunteres Quartil+Quartilswert oberes Quartil)
- Standarisierung/lineare Transformation: $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}$

1.4 Empirische Verteilungsfunktion

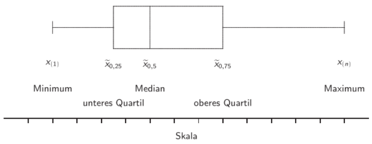
Nützlich für Stetige Merkmale, da diese sonst nicht darstellbar. Anzahl der Werte bis zu einem Bestimmten Wert um zu klassifizieren, zusammenzählen der Werte inkl. Häufigkeit.





1.5 Malen nach Zahlen

- Säulendiagramm/Stabdiagramm für relative Häuf.
- Kreisdiagramm (Pie Chart)
- Box-Plot



- Histogramm Die Fläche des Rechtecks über dem Intervall K j ist proportional zur relativen Häufigkeit
- Scatterplot/Streudiagramm

1.6 Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient

Kovarianz/(Standardabweichung1*Standardabweichung2). auch berechenbar für linear transformierte Daten. Am besten Arbeitstabelle anfertigen.

$$r_{xy} = \begin{cases} -1/+1 & \text{linearer Zusammenhang, gegensinnig/gleichsinnig} \\ 0 & \text{unkorreliert/kein linearer Zusammenhang} \\ \text{negativ/positiv} & \text{negativ/positiv korreliert} \end{cases} \tag{1}$$

$0 \leq |r_{xy}| < 0.5 \rightarrow$ schwach korreliert.
$0.8 \leq |r_{xy}| \leq 1 \rightarrow$ stark korreliert.

1.7 Regressionsanalyse

Liefert funktionalen Zusammenhang

- Y wird als Regressand bzw. als abhängige Variable bezeichnet.
- f heißt Regressionsfunktion.
- Die Werte: y i = f (x i) , i = 1 ,..., n, heißen Regressionswerte .
- ϵ = Fehlerterm, da die tatsächlichen Werte von y_i in der Regel nicht getroffen werden
- Bestimmtheitsmaß sagt aus wie nahe die Regressionsgerade an den tatsächlichen Werten liegt (1 = bester Wert)

2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.1 Begriffe

1. Momentbegriff: Ein Moment schließt Erwartungswert, etc. ein und ist der Oberbegriff dafür. Ein Moment gilt für einen bestimmten Wert einer Zufallsvariable. Beim Moment wird integriert.
2. σ_0 = bekannte Varianz
3. Erwartungstreue von Schätzern: Erwartungstreu wenn erwartungswert gleich dem des zu schätzenden Parameters, Abweichung=Verzerrung/Bias
4. Verteilungsfunktion $F^x(x) = P(X \leq x)$ ich lese also immer ab die Wahrsch. ob kleiner gleich, sonst muss ich diese per 1-x negieren.

2.2 Varianz Rechenregeln

$Var(-2Y) = 4Var(Y)$

2.3 bedingte Wahrscheinlichkeit Rechenregeln

- S13 Formelsammlung. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- $P(A \cap B) = P(B \cap A)$
- Seite 11 die ganzen Regeln
- Außerdem zu beachten: $P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A) - P(B \cap C|A)$

2.4 Modelieren mit Zufallsvariable und Angabe von Verteilung

Angabe der möglichen Ausprägungen in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und Angabe der jeweiligen Wahrscheinlichkeiten für die Belegungen $P(X = A) =$ Wahrscheinlicheit. Meistens kann dann eine Verteilungsfkt gefunden werden, bspw. Binomialverteilung.

2.5 Urnenmodelle

Qualitätsprüfung ist quasi ein Urnenmodell ohne zurücklegen und ohne beachtung der Reihenfolge mit Hypergeometrischer Verteilung (S.165). $p_k = \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}$ n=Anzahl der Züge k=rote Kugeln die ich will r=anzahl roter insgesamt s=anzahl schwarzer insg.

2.6 Riemann-Dichte

Warum der Scheiß? Für Modelle mit reellen Zahlen haben wir ein Problem, wir müssen dafür sorgen dass wir alle Wahrscheinlichkeiten abbilden können, aber P($\Sigma(x)$) darf nicht größer 1 werden. Deshalb brauchen wir die Riemann-Dichtefunktion, die definiert ist als: $P((a, b)) = \int_a^b f(x)dx$

- Dichtefunktion ist analog zur Wahrscheinlichkeitsfuntion bei diskreten Verteilungen. Alle Werte positiv, aber größer als 1 mögl.
- Verteilungsfunkion Ist das Integral der Dichtefunktion, ergibt insgesamt immer 1 und ist monoton steigend bis 1.
- habe ich zwei Variablen (X,Y)und möchte ich die Verteilungsfunktion (X+Y) berechnen muss ich die Faltformel nutzen (S.192)

2.7 Integralrechnung for Dummies

Integralrechnung wird für stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen benötigt. Habe ich ein Integral und möchte etwas ausrechnen, dann erzeuge ich erstmal die Stammfunktion und setze die Werte für mein x ein. Bei der Stammfunktion ist der Grundgedanke: Die Stammfunktion ist die Funktion, die abgeleitet die jetzige Funktion ergibt. Beim Uneigentlichen Integral wird in diesem Beispiel das x^{-4y+1} unendlich klein, also =0.

$$4y \int_1^\infty x^{-4y} dx = 4y \left[\frac{x^{-4y+1}}{-4y+1} \right]_{x=1}^{x=\infty} = \frac{4y}{4y-1}$$

Man beachte, dass wenn $x - (y \cdot (-z))$ hat, dann beim minus reinziehen nur y oder z negiert werden muss.

2.8 Zusammenzählen zweier

- unabh. Zufallsvariablen: X+Y=Z geht nach S. 191. Wir stellen erst Eine Z Funktion auf mit den einzelnen möglichkeiten und danach eine Verteilungstabelle. Siehe Aufgabe 23.1
- abhängige Zufallsvariabeln: Hier können nur die gegebenen Fälle dargestellt werden.

2.9 Rand-Zähldichten

$$\text{Bei Zufallsvariablen sind: } \begin{cases} \text{stochastisch unabhängig} & \text{ich darf multiplizieren um die inneren Werte zu kriegen} \\ \text{stochastisch abhängig} & \text{ich darf nicht multiplizieren} \end{cases}$$

2.10 Gesetz großer Zahlen

2.11 Standardnormalverteilung

Kommt auf jeden fall dran! Wenn ich etwas approximativ berechnen soll und eine Summe von Zufallsvariabeln gegebn ist, dann muss ich den zentralen Grenzwertsatz anwenden, dabei ist die Normalisierung wichtig.

- Will ich bspw. Berechnen ob zu einer Bestimmten Prozentzahl etwas zutrifft, kann ich direkt auf die Normalverteilung schauen um die Formel richtig aufzustellen.
- habe ich ein Intervall, nehme ich für den oberen Wert den normal abgelesenen Wert und den niederen Wert ziehe ich vom oberen Wert ab (niederer Wert = 1- oberer Wert)
- Will ich eine Wahrscheinlichkeit rauskriegen und habe eine gefaltene normalverteilung, dann setze ich die veränderte Formel $N(n\mu, n\sigma^2)$ ein. Dazu muss ich den zu überschreitenden Wert als Konstante setzen:
$$1 - \Phi(\frac{c - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}})$$

2.12 Produktidichte

Bei einer gesuchten Dichtefunktion für zwei unterschiedlich verteilte Zufallsvariabeln, muss ich beide Funktionen malnehmen

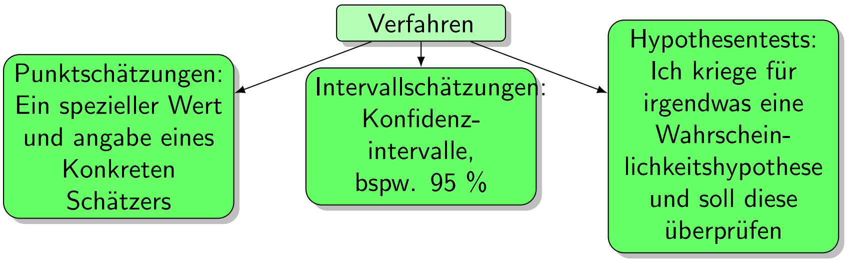
3 Schließende Statistik (auch Inferenzstatistik)

Hier ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht vollständig bekannt. Stattdessen haben wir Klassen mit Verteilungsmodellen. Ein Ziel ist es mittels der Stichprobe $X_1, \dots X_n$ Aussagen über P oder ϑ zu machen

3.1 Begriffsdefinitionen

- Θ ist Parameterraum, ϑ ist Parametervektor
- P ist die Verteilung
- Def: iid = independent and identically distributed

3.2 Verfahren



3.3 Maximum Likelihood Schätzung

Was ist der beste Schätzer? Die Idee hier ist, dass man einen Schätzer derart wählt, dass dieser die gegebene Beobachtung mit der größtmöglichen Wahrscheinlichkeit erscheint. Die Formeln finden sich auf Seite 261

3.4 Konfidenzintervall

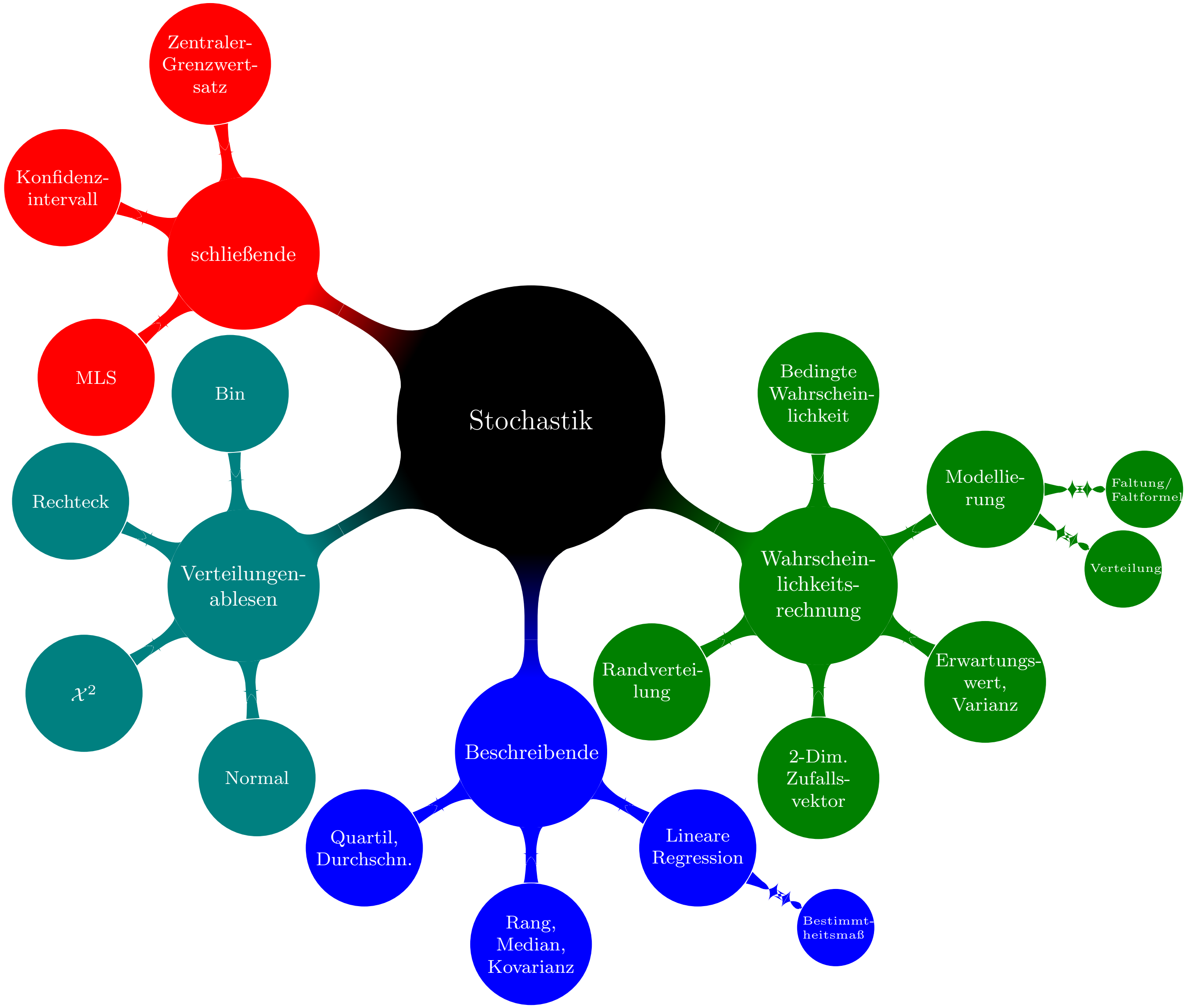
û untere Grenze ô obere Grenze.α ist der akzeptierte Fehler. Wir brauchen erstmal Punktschätzungen für die Parameter.
mögliche Settings:

1. ich habe eine Varianz, dann gibt es das zweiseitige und das einseitige obere/untere Konfidenzintervall
2. Varianz unbekannt: Ich ersetze die bekannte Varianz durch eine Schätzung (Stichprobenvarianz $\hat{\sigma}$)
3. Konfidenzintervall für die Differenz zweier Erwartungswerte (bei unbekannter gleicher Varianz). Wenn Differenz negativ ist ein μ stets kleiner als das andere. Anwendung: Bspw. Fertigung und ich will wissen was besser ist.

3.5 Lineares Regressionsmodell

Wir haben genauso wie in der Beschreibenden $x_1 ... x_n$ Werte mit unbekannter Varianz. ε_i Sind Störterne, die Y_j Werte sind genauso stoch. unabh. verteilt wie ε. Sigma kann ich mir auch herschätzen über 7.7. n-2 weil a und b geschätzt werden.

4 Aufgabentypen



5 Globalübung last

5.1 Aufgabe 39

Mit n=10 und $\alpha = 0.01$ erhält man aus der Quantiltabelle der X^2 Verteilung $X^2(n-1) = X^2_{0.01}(9) gerundet 2.09$
Weiter berechnet man aus dem gegebenen Daten $x_1 \dots x_{10}$
$\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} xi = 124.9$ und $\hat{\sigma^2} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}$

b)
Es ergibt sich $K_\sigma = [0, \sqrt{\frac{n-1}{X^2_\alpha(n-1)}\hat{\sigma}^2}] \cong [0, 4.837]$

5.2 Aufgabe 40

Lösung wird hochgeladen. σ_{pool} ist sozusagen ein Schätzer für Sigma.
Ansatz: Mit $n_1 = 12, n_2 = 8, 1-\alpha = 0.95 \Leftrightarrow 1 - \frac{k}{2} = 0.975$ erhält man aus der Quantil Tabelle der T-Verteilung

$$t1 - \frac{\alpha}{2}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0.975}(18) \approx 2.101$$

Aus den Messwerrten $x_1 \dots, x_{12}$ und $y_1 \dots, y_8$ berechnet man:

$$\bar{x} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}(x_i = 50.4)$$

$$\bar{y}\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} y_i = 50.6$$

$$\hat{\sigma} = \bar{x}\bar{y} = -0.2$$

5.3 Aufgabe 41

Das erste was bei der Regressionsanalyse zu tun ist, ist das Erstellen einer Tabelle.
Mit Hilfe der Einträge in der letzten Zeile der Berechnungstabelle erhält man

$$\bar{x} = \frac{1}{7} * 18.55 = 2.65$$

$$\bar{y} = \frac{1}{7} * 42.7 = 6.1$$

$$S_x^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i^2 - \bar{x}^2 = 0.0136$$

$$S_y^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} y_i^2 - \bar{y}^2 \approx 0.1657$$

$$S_{xy} = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i * y_i - \bar{x}\bar{y} \approx -0.0361$$

Hieraus ergeben sich gemäß A8.4 und D7.4 die folgenden kleinste Quadrate Schätzung:

$$\hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_x^2} \approx -2.654$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \approx 13.133 - 2.654 * 2.65$$

Die ugehörige geschätzte Regressionsgerade ist somit

$$\hat{y}(x) = \hat{a} + \hat{b}x \approx 13.133 - 2.654x$$

Absatzmenge siehe Graphik (in 100 kg)

Bei Zeichnungen in der Klausur drauf achten, dass die Achsen und Punkte richtig beschriftet sind.

c) Mit $n = 7$ und $1 - \alpha = 0.9 \Leftrightarrow \alpha = 0.1$ erhält man aus der Quantiltabelle der X^2Verteilung

$$X^2_{\frac{x}{2}}(x-2) = X^2_{0.05}(5) \approx 1.15$$

und

$$X^2_{1-\frac{x}{2}}(n-2) = X^2_{0.95}(5) \approx 11.09$$

Weiter folgt mit den Ergebnissen aus (a):

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-2}(S_y^2 - \frac{S_{xy}^2}{S_x^2}) = \frac{7}{5}(0.1657 - \frac{(-0.0361)^2}{0.0136}) \approx 0.098$$

Man erhält das folgende zweiseitige 90% Konfidenzintervall für σ^2

$$K_{\sigma^2} \approx [\frac{5 * 0.098}{11.07}, \frac{5 * 0.098}{1.15}] \approx [0.044, 0.426]$$

6 Klausurinformationen aus letzter Vorlesung

Die Aufgaben die man heute behandelt werden nicht den ganzen Stoff umfassen. Nicht darauf verlassen nur das zu können was präsentiert wird. Es gibt aber eine gewisse Sicherheit dass man besteht wenn man die Aufgaben kann.
Alle Aufgaben werden ins Netz gestellt, aber ohne Lösung.

6.1 Aufgabe 1 Urlaub und Feriengäste

(a) Welche Werte kommen überhaupt vor?

a(1)	a(2)	a(3)	a(4)	a(5)	a(6)
2	3	7	10	14	21

Zugehörige Tabelle der absoluten relativen und kummulierten relativen Häufigkeiten (abs Häufigkeiten mittels Auszählen der Urliste):

Verweildauer	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit	Kumulierte relative Häufigkeit
2	6	6/40=0.15	0.15
3	2	0.05	0.2
7	1	0.3	0.5
10	6	0.15	0.65
14	10	0.25	0.9
21	4	0.1	1

Summe: 40=n

Gemäß Vorlesung ist nach (A2.5,A2.6) die gesuchte empirische Verteilungsfunktion $F_{40} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ gegeben durch

$$F_{40} = \begin{cases} 0 & x < U(1) \\ \sum_{j=1}^{k} f(j) & U(k) \leq x < U(k+1), k \in \{1, \dots, 5\} \\ 1 & x \geq u(6) \end{cases}$$

Die kumulierten relativen Häufigkeiten

$$\sum_{j=1}^{k} f(j), k \in \{1, ..., 5\}$$

Zu $u(1), \dots, u(k+1)$ sind in der letzten Spalten der oben gezeigten Tabelle enthalten. Hiermit folgt:

$$F_{40}(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 0.15 & 2 \leq x < 3 \\ 0.2 & 3 \leq x < 7 \\ 0.5 & 7 \leq x < 10 \\ 0.65 & 10 \leq x < 14 \\ 0.9 & 14 \leq x < 21 \\ 1 & 21 \leq x \end{cases}$$

Das kann man auch umgekehrt machen, es kann sein dass man so eine Grafik gegeben hat mit den Stufen und daraus rekonstruiren. Ich kann die relativen Häufigkeiten ablesen aus den Sprunghöhen. 100% KLAUSUR!

(b) Berechnung der gesuchten Anteile mittels der empirischen Verteilungsfunktion.

Anteil der Gäste mit höchstens 14 Tagen Verweildauer $F_{40}(14) = 0.9$ (einfach ablesen, geht aus aus der Graphik).

Anteil der Gäste mit mehr als 7 Tagen Verweildauer $= 1 - F_{40}(7) = 1 - 0.5 = 0.5$

Anteil der Gäste mit mindestens 3 Tagen, aber höchstens 14 Tagen Verweildauer:

$$F_{40}(14) - F_{40}(3) - \lim f_{40}(3)$$

d.h. Anteil der Beobachtungen im Intervall[3,14] + Anteil der Beobachtungen die =3 sind

$$= F_{40}(14) - F_{40}(2) = 0.9 - 0.15 = 0.75$$

6.2 Aufgabe 2

(a) Zuerst der einfache Fall: Für $x \in [-\infty, 0]$ gilt

$$f^X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(x,y)}(x,y)dy = 0$$

Für $x \in (0, \infty)$ gilt

$$f^X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(x,y)}(x,y)dy$$

$$\overset{\text{nach Voraussetzung}}{=} \int_{x}^{x+2} \frac{1}{2}e^{-x}dy = \frac{1}{2}e^{-x}(x+2-x) = \frac{1}{2}e^{-x} * 2 = e^{-x}$$

Insgesamt:

(1) $f^X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \in (0,\infty) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

somit gilt $X \sim Exp(1)$

(b) Gemäß B 3.4 gilt: (Tipp hinschreiben für was die Grenzen sind an den eckigen Klammern)

$$P(1 < X \leq 2) = \int_1^2 f^X(x)dx \overset{\text{nach 1}}{=} \int_1^2 e^{-x}dx$$

$$\left[-e^{-x}\right]_{x=1}^{x=2} = -e^{-2} + e^{-1} = e^{-1} - e^{-2}$$

<u>Alternativlösung zu b:</u>

Gemäß (a) und B3.7 gilt für die Verteilfunktion F^x von X:

$F^X(x) \begin{cases} = 0 & \text{für } x \in [-\infty, 0] \\ 1 - e^{-x} & x \in (0,\infty) \end{cases}$

Hiermit folgt $P(1 < X \leq 2) \overset{C2.4}{=} F^X(2) - F^X(1) = 1 - e^{-2} - (1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-2}$

(c) Sei $x \in (0, \infty)$. Dann gilt gemäß (1)

$$f^X(x) = e^{-x} > 0$$

Es folgt für $y \in [x, x+2]$
(2) $f^{Y|X=x}(y) \overset{\text{nach C7.1}}{=} (4) \frac{f^{X,Y}(x,y)}{f^X(x)} \overset{\text{nach Vor. (1)}}{=} \frac{1/2e^-x}{e^-x} = 1/2$

Für $y \in \mathbb{R} \backslash (x, x+2) = 2$ folgt
(3) $f^{Y|X=x}(y) = nach7.1 f^(x,y)/f^x(x) = 0$
Insgesamt folgt aus (2),(3)

$$(4) f^{Y|X} = x(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & y \in< [x, x+2] \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Gemäß B 3.6 ist dies die Dichte der Rechteck-Verteilung R[x,x+2]

(d) Für $x \in (0, \infty)$ gilt:

$$E(Y|X=x) \overset{\text{nach C. 7.4}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} y f^{Y|X=x}(y) dy$$

$$\overset{\text{nach (4)}}{=} \frac{1}{2} \int_x^{x+2} y dy = 1/2 \ [y^x/2]_x^{x+2}$$

$1/4((x+2)^2 - x^2 - x^2) = 1/4$

Alternativlösung zu d):

Gemäß (c) gilt $P^{Y|X=x} = R[x, x+2]$ für $x > 0$. Hierraus folgt mit C 5.2, (iii).

$$E(Y|X=x) = \frac{x + (x+2)}{2} = \frac{2x+2}{2} = x+1$$

(e) in der Klausur kann sein dass eine Randdichte und eine bedingte Dichte gegeben ist und wir daraus die gemeinsame Dichte berechnen müssen (sollte aber nicht so schwer sein.)

Sonderinfo: X, Y stoch unabhängig E(XY) = E(X)E(Y), Kovarianz =0, da E(XY)-E(X)E(Y)
Klausur: Es kann sein dass irgendwo eine Modelierung drankommt, wo ich eine reale Situation abbilden muss (wie in der nächsten Aufgabe).

6.3 Aufgabe 3

(a) Modellierung: Die Anzahlen der Münzen in $n \in \mathbb{N}$ Rollen können beschrieben werden durch stochastisch unabhängige identisch verteilte Zufallsvariabeln $X_1 \dots X_n$

Zugehörige Interpretation für $i \in \{1, \dots, n\}$
X_i gibt die Anzahl der Münzen in Rolle an. Gemäß Voraussetzung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_i für $i \in \{1, \dots, n\}$ gegeben durch folgende Tabelle (1)

k	48	49	50	51
$P(X_i = k)$	0.1	0.2	0.6	0.1

Hierbei Interpretation der gegebenen Prozentanteile als gesuchte Wahrscheinlichkeiten. Aus der angegebenen Verteilung folgt für $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$(2)\ \mu = E(X_i) = \sum_{k=48}^{51} k * P(X_i = k) \overset{(nach1)}{=} 48 * 0.1 * 49 * 0.2 + 50 * 0.6 + 51 * 0.1 = 49.7$$

$$(3)\ \sigma^2 = Var(X_i) = E(X_i^2 - (E(X_i)^2)) = \sum_{k=48}^{51} k^2 P(X_i = k) - \mu^2 = 48^2 * 0.1 + 49^2 * 0.2 + 50^2 .... = 0.61$$

(b) Gesucht: $P(49670 \leq S_n \leq 49730)$ mit $n = 1000$ und $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, d.h. Gesamtwert in $n = 1000$ Rollen

Es gilt $P(49670 \leq S_n \leq 49730) = P(S_n \leq 49730) - P(S_n < 49670) = P(S_n \leq 49669)$

$$= P(\frac{S_n - u\mu}{\sqrt{n * \sigma^2}} \leq \frac{49730 - u\mu}{\sqrt{n * \sigma^2}}) - P(\frac{S_n - u\mu}{\sqrt{n * \sigma^2}} \leq \frac{49669 - u\mu}{\sqrt{n * \sigma^2}})$$

$$\approx \Phi(\frac{49730 - n\mu}{\sqrt{n * \sigma^2}} - \Phi(\frac{49669 - n\mu}{\sqrt{n * \sigma^2}})$$

$$= \Phi(1.21) - (1 - \Phi(1.26))$$

$$\approx 0.887 + 0.896 - 1 = 0.783$$

6.4 Aufgabe 4 Maximum Likelihood Schätzung

Seien $x_1, \ldots, x_n > 0$ Realisationen von $X_1, \ldots, X_n$
Die zugehörige Likelihood Funktion gemäß Definition 3.2

$$(1) L(\alpha | x_1, \ldots, x_n) \overset{\text{unabh.}}{=} \prod_{i=1}^{n} f_d(x_i)$$

$$\overset{\text{nach definiton von } f\alpha}{=} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x_i}{d}}$$

$$= (\frac{1}{\alpha})^n exp(-\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

Zugehörige Log-Likelihood Funkion (Kommentar: mit dieser ist einfacher zu rechnen)

$$l(\alpha) = ln(L(\alpha | x_1, \ldots, x_n))$$

$$= ln((\frac{1}{\alpha})^n) - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= -n * ln(\alpha) - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} x_i, \alpha \in (0, \infty)$$

Gemäß (2) ist l diferenzierbar auf $\int (0, \infty)$ mit
(3)

$$l'(\alpha) = -\frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} x_i (\frac{-1}{\alpha^2})$$

$$\frac{-n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \frac{-n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} n\bar{x} = \frac{n}{\alpha^2}(\bar{x}\alpha)$$

$$\begin{cases} > 0 & \text{, falls } \alpha < \bar{x} \\ = 0 & \text{, falls } \alpha = \bar{x} \\ < 0 & \text{, falls } \alpha > \bar{x} \end{cases}$$

Aus (3) folgt, dass l streng monoton wachsend auf $(0, \bar{x}]$ und streng monoton fallend auf $[\bar{x}, \alpha)$ ist. Somit besitzt die Log-Likelihood Funktion $\alpha \to L(\alpha | x_1, \ldots, x_n)$ selbst ein eindeutig bestimmtes globales Maximum in $\hat{\alpha} = \bar{x}$

D.h. Maximum Likelihood Schätzung zu α gegeben durch

$$\hat{\alpha} = \bar{x}$$

Klausurtipp: Nicht die zweite Ableitung ausrechnen und dann untersuchen, dauert zu lange.

6.5 Aufgabe 5

Gemäß D 5.9 ist ein einseitiges unteres konfidenzintervall für die Varianz σ^2 (bei unbekanntem μ) zum Konfidenzniveau 1-$\alpha \in (0, 1)$ gegeben durch

$$\mathcal{K} = \left[0, \frac{n-1}{\mathcal{X}^2_\alpha(n-1)}\hat{\sigma}^2\right]$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \text{ ist hierbei die Stichprobenvarianz zu } x_1 \ldots, x_n$$

Einsetzen der Zahlenwerte:
Mit $n = 10$ und $1 - \alpha = 0.9 \Leftrightarrow \alpha = 0.1$ Erhält man aus der Quartilstabelle der $\mathcal{X}^2$ - Verteilung.

Mit n=10 und $1 - \alpha = 0.9 \Leftrightarrow \alpha = 0.1$ erhält man aus der Quantil-Tabelle der $\mathcal{X}^2$-Verteilung:

$$\mathcal{X}^2_\alpha(n-1) = \mathcal{X}^2_{0.1}(9) \overset{Tabelle}{\approx} 4.17$$

Weiter berechnet man aus $x_1 \ldots, x_{10}$

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=10}^{10} x_i = 149$$

und

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{9}(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10\bar{x}^2) = 10$$

Hiermit folgt:

$$\mathcal{K} = [0, \frac{9 * 10}{4.17}] \approx [0, 21.583]$$

Das ist der Fall 1 wo Stichprobe und normalverteilte Daten und gesucht ist.. Eine andere Situtation (Klausur!!!) ist Regressionsmodell und Freiheitsgrad ist n-2, da ist es eine andere Rechnung.

6.6 Letzte Tipps

- Bezeichnungen kennen, z.B.: $P(X = 2, Y = 5)$ ist unterschiedlich gegenüber $P(X = 2|Y = 5)$
- Was bedeutet $f^{X,Y}(x, y)$ gegenüber $f^{Y|X=x}(y)$
- Standardaufgaben:
  - Bestimmung von Maximum Likelihood Schätzungen
  - Anwendung des Zentralen Grenzwertsatzes
  - Berechnungen zu 2-Dimensionalen Zufallsvektor(X,Y) (diskret und stetig)
  - Anwendung der Rechenregeln zu Erwartungswert, Varianz, Kovarianz
  - Faltung von Zufallsvariabeln
- Standardaufgaben zur deskriptiven Statistik (vgl Übungen)
- Stochastische Unabhängigkeit und deren Anwendungen z.B. $E(XY) =?$
- Integration (einfacher) Funktionen (auch Doppelintegrale)

$$\int_0^\infty x * 2e^{-2x} dx \overset{\text{nach Buch}}{=} \frac{1}{2}$$

Dichte zu Exp(2) an der Stelle $x = E(Z)$ mit $Z \sim Exp(2)$