Exercice 1 *(Statistiques Computationnelles)*
On s'intéresse à la distribution sur $\mathbb{R}_+$ de densité

$$p(x) \;=\; p_{a,\lambda}(x) \;=\; \frac{a\lambda^a}{(x+\lambda)^{1+a}}$$

décrite par deux paramètres $a, \lambda > 0$ respectivement appelés paramètres de forme et d'échelle.

Dans un premier temps, on suppose a connu et on cherche à estimer λ.

1. Soit X de loi p. Préciser les valeurs $\beta \in \mathbb{R}_+$ pour lesquelles $\mathbb{E}(X^\beta)$ est finie et, le cas échéant, montrer que ce moment est de la forme $\lambda^b c$ avec b et c qu'on exprimera en fonction de a et β *(on pourra donner des expressions sous forme d'intégrales, et dans la suite on considérera ces valeurs connues, dans la mesure où elles peuvent être obtenues avec une précision bien supérieure aux estimations statistiques).*
2. Dans le cas $a > 1$, donner $\hat{\lambda}_{n,1}$ l'estimateur basé via la méthode des moments sur la moyenne empirique de n observations indépendantes de loi p. Est-il convergeant (justifier) ? Est-il sans biais ?
3. Dans le cas $a > 2$, pour $\alpha \in]0,1[$, donner un intervalle de confiance asymptotique de niveau α pour λ.
4. Dans le cas $a < 1$, proposer un estimateur convergeant de λ basé sur la méthode des moments. Est-il sans biais ?
5. Montrer que la médiane m_p de p est de la forme λk pour une constante k qu'on explicitera en fonction de a. En déduire un estimateur $\hat{\lambda}_{n,2}$ de λ. Est-il convergeant ? (On pourra justifier en invoquant un résultat du cours, sans le redémontrer).
6. Décrire l'algorithme bootstrap qui, étant données n observations indépendantes de loi p, fournit une estimation du risque quadratique de $\hat{\lambda}_{n,2}$.

Dans un second temps, on considère un modèle de mélange de deux densité p_{a_0,λ_0} et p_{a_1,λ_1} de poids respectifs π et $1-\pi$, avec a_0, a_1 et π inconnus, en revanche les paramètres d'échelle sont fixés à $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$. Autrement dit, étant donnée trois variables indépendantes Z, V_1, V_2, avec Z de loi de Bernoulli de paramètre π et V_i de loi $p_{a_i,1}$ pour $i = 1, 2$, on considère la variable aléatoire $X = V_Z$.

7. Donner la densité de X, et la densité conditionnelle de X sachant Z.
8. Le modèle de mélange d'ordre 2 (c'est-à-dire à deux composants) associé à la famille de lois $\{p_{a,1}, a > 0\}$ est-il identifiable à permutation de paramètres près ?
9. Dans cette question on suppose avoir observé n copies indépendantes de (X, Z) (avec au moins une observation telle que $Z_i = 0$ et au moins une telle que $Z_i = 1$). Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance pour a_1, a_2, π. Est-il convergeant ?
10. Dans cette question on suppose avoir observé n copies indépendantes de X. L'estimateur du maxium de vraisemblance est-il explicite ? Décrire l'algorithme EM appliqué à ce cas précis.

Exercice 1 : données $p(x) = p_{a,\lambda}(x) = \dfrac{a\lambda^a}{(x+\lambda)^{1+a}}$, $a, \lambda > 0$

① Valeurs $\beta \in \mathbb{R}^+$

✱ on a $\mathbb{E}[X^\beta] = \int_0^{+\infty} \dfrac{x^\beta}{(x+\lambda)^{1+a}} a\lambda^a \, dx = a\lambda^a \int_0^{+\infty} \dfrac{x^\beta}{(x+\lambda)^{1+a}} dx$

$\mathbb{E}[X^\beta] < \infty$ ssi $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^\beta}{(x+\lambda)^{1+a}} dx < \infty$

- Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{x^\beta}{(x+\lambda)^{1+a}} \sim x^{\beta-(1+a)} < \infty$ ssi $\beta - (1+a) < 0 \Rightarrow \beta < 1+a$
- Au voisinage de 0, on a $\dfrac{x^\beta}{(x+\lambda)^{1+a}} \to 0$

donc $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^\beta}{(x+\lambda)^{1+a}} dx < \infty$ ssi $\beta < 1+a$

d'où $\boxed{\beta \in]0, 1+a[}$

✱ $\mathbb{E}[X^\beta] = a\lambda^a \int_0^{+\infty} \dfrac{x^\beta}{(x+\lambda)^{1+a}} dx$ calculons $A = \int_0^{+\infty} \dfrac{x^\beta}{(x+\lambda)^{1+a}}$

posons $\begin{cases} u = x^\beta & \Rightarrow u' = \beta x^{\beta-1} \\ v' = \dfrac{1}{(x+\lambda)^{1+a}} & v = -\dfrac{1}{a(x+\lambda)^a} \end{cases}$

$A = \left[-\dfrac{x^\beta}{a(x+\lambda)^a} \right]_0^{+\infty} + \dfrac{\beta}{a} \int_0^{+\infty} \dfrac{x^{\beta-1}}{(x+\lambda)^a} dx = \dfrac{\beta}{a} \int_0^{+\infty} \dfrac{x^{\beta-1}}{(x+\lambda)^a} dx$ si $\underline{a > \beta}$

alors $\mathbb{E}[X^\beta] = \lambda^a \beta \int_0^{+\infty} \dfrac{x^{\beta-1}}{(x+\lambda)^a} dx$

d'où $\boxed{b = a \quad \text{et} \quad c = \beta \int_0^{+\infty} \dfrac{x^{\beta-1}}{(x+\lambda)^a} dx}$

② cas $a > 1$

$\mathbb{E}[X_1] = a\lambda^a \int_0^{+\infty} \dfrac{x}{(x+\lambda)^{1+a}} dx = \lambda^a \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(x+\lambda)^a} dx$ (d'après ① en remplaçant $\beta = 1$)

$\mathbb{E}[X_1] = \lambda^a \left[\dfrac{1}{1-a} (x+\lambda)^{1-a} \right]_0^{+\infty} = \lambda^a \left[-\dfrac{1}{1-a} \lambda^{1-a} \right]$

donc $\boxed{\mathbb{E}[X_1] = \dfrac{\lambda}{a-1}}$

②

donc $P\left[\frac{\sqrt{n(a-2)}}{\sqrt{a}} \left| \frac{\hat{\lambda}_{n,1}}{\lambda} - 1 \right| > q_\alpha \right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$

$$\Rightarrow P\left[\left| \frac{\hat{\lambda}_{n,1}}{\lambda} - 1 \right| > q_\alpha \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{n(a-2)}} \right] = P\left[\frac{\hat{\lambda}_{n,1}}{1 - \frac{q_\alpha \sqrt{a}}{\sqrt{n(a-2)}}} < \lambda < \frac{\hat{\lambda}_{n,1}}{1 + \frac{q_\alpha \sqrt{a}}{\sqrt{n(a-2)}}} \right]$$

• On en deduit donc, un intervalle de confiance asymptotique de niveau α pour λ :

$$IC_\alpha = \left[\frac{\hat{\lambda}_{n,1}}{1 - \frac{q_\alpha \sqrt{a}}{\sqrt{n(a-2)}}}, \frac{\hat{\lambda}_{n,1}}{1 + \frac{q_\alpha \sqrt{a}}{\sqrt{n(a-2)}}} \right]$$

④ cas $a < 1$

on a bien $\mathbb{E}[X_1^\beta] = \begin{cases} \lambda^a \beta \int_0^{+\infty} \frac{x^{\beta-1}}{(x+\lambda)^a} dx < \infty & \text{si } a > \beta \\ +\infty & \text{si } a \leq \beta \end{cases}$??

⑤ Par définition, $m_p = F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \inf\left\{ x > 0, \ F(x) \geq \frac{1}{2} \right\}$

avec F fonction caracteristique de p.

$$\forall x > 0, \quad F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{a \lambda^a}{(t+\lambda)^{1+a}} dt = a\lambda^a \left[-\frac{1}{a(t+\lambda)^a} \right]_0^x$$

$$= 1 - \frac{\lambda^a}{(x+\lambda)^a}$$

alors $F(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x + \lambda = 2^{1/a} \lambda \Rightarrow x = \lambda(2^{1/a} - 1)$

donc $\boxed{m_p = \lambda(2^{1/a} - 1) = \lambda k \quad \text{avec } k = (2^{1/a} - 1)}$

(*) Notons $\hat{m}_p$ la mediane empirique de m_p.

on a $m_p = \lambda(2^{1/a} - 1) \Rightarrow \lambda = \frac{m_p}{2^{1/a} - 1}$ comme $\hat{m}_p$ est proche de m_p

on en deduit donc l'estimateur de λ : $\boxed{\hat{\lambda}_{n,2} = \frac{\hat{m}_p}{2^{1/a} - 1}}$

• on a $\mathbb{E}[X_1] = \frac{\lambda}{a-1} \Rightarrow \lambda = (a-1)\,\mathbb{E}[X_1]$ comme X_n est proche de $\mathbb{E}$

donc $\boxed{\hat{\lambda}_{n,1} = (a-1)\,\bar{X}_n}$

(*) D'après LFGN on a $\bar{X}_n \xrightarrow{P.S} \mathbb{E}[X_1]$, d'après le Theoreme de continuité $(a-1)\bar{X}_n = \hat{\lambda}_{n,1} \xrightarrow{P.S} (a-1)\,\mathbb{E}[X_1] = \lambda$

donc $\boxed{\hat{\lambda}_{n,1} \xrightarrow{P} \lambda}$

(*) $\mathbb{E}[\hat{\lambda}_{n,1}] = (a-1)\,\mathbb{E}[\bar{X}_n] = (a-1)\,\mathbb{E}[X_1] = \lambda$

d'où $\boxed{\hat{\lambda}_{n,1} \text{ est sans biais}}$

(3) Cas $a > 2$: on a $\mathbb{E}[X_1] = \frac{\lambda}{a-1}$, $\mathbb{E}[X_1^2] = \frac{2\lambda^2}{(a-1)(a-2)}$

et $Var(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2 = \frac{2\lambda^2}{(a-1)(a-2)} - \frac{\lambda^2}{(a-1)^2} = \frac{a\lambda^2}{(a-1)^2(a-2)} < \infty$

d'après TCL, $\sqrt{n}\,(\bar{X}_n - \mathbb{E}[X_1]) \rightsquigarrow N(0, Var(X_1))$

$\Rightarrow \sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{\lambda}{a-1}\right) \rightsquigarrow N\left(0, \frac{a\lambda^2}{(a-1)^2(a-2)}\right)$

• Soit $f : x \longmapsto f(x) = (a-1)x$ une fonction dérivable en $\mathbb{E}[X_1]$ avec $f'(x) = a-1$ et $f'\left(\frac{\lambda}{a-1}\right) = a-1$. alors la Δ-méthode donne :

$$\sqrt{n}\,(\hat{\lambda}_{n,1} - \lambda) \rightsquigarrow N\left(0, \frac{a\lambda^2}{(a-1)^2(a-2)} \cdot (a-1)^2\right) \equiv N\left(0, \frac{a\lambda^2}{a-2}\right)$$

• Alors $\frac{\sqrt{n(a-2)}}{\sqrt{a}}\left(\frac{\hat{\lambda}_{n,1}}{\lambda} - 1\right) \rightsquigarrow N(0,1)$

• Soit $q_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$ le quantile d'ordre $(1-\alpha/2)$ de la loi $N(0,1)$

alors $\mathbb{P}\left[\frac{\sqrt{n(a-2)}}{\sqrt{a}}\left|\frac{\hat{\lambda}_{n,1}}{\lambda} - 1\right| \leq q_\alpha\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\alpha$

(*) comme F est strictement croissante en $m_p = \lambda(2^{1/a}-1)$

alors $\hat{m}_p \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} m_p$ et d'après le Théorème de continuité

on a $\dfrac{\hat{m}_p}{2^{1/a}-1} = \hat{\lambda}_{n,2} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} \lambda \Rightarrow \boxed{\hat{\lambda}_{n,2} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \lambda}$

(6) Par définition, le risque quadratique de $\hat{\lambda}_{n,2}$ est :

$$\mathbb{R}(\hat{\lambda}_{n,2}, \lambda) = \mathbb{E}\left[(\hat{\lambda}_{n,2}-\lambda)^2\right] = \left(\mathbb{E}[\hat{\lambda}_{n,2}]-\lambda\right)^2 + Var(\hat{\lambda}_{n,2})$$

$$= Var(\hat{\lambda}_{n,2}) \quad \text{car} \quad \mathbb{E}[\hat{\lambda}_{n,2}] = \lambda$$

- L'algorithme de Bootstrap s'écrit:

Entrée $X = (x_1, \dots x_n)$ échantillon, Estimateur $X \mapsto \hat{\lambda}_{n,2}(X)$
et B nombre de replique bootstrap.

$$X \xrightarrow{\text{estimation}} P \xrightarrow{\text{simulation}} \begin{cases} X^{*1} = (x_1^{*1}, \dots, x_n^{*1}) \\ \vdots \\ X^{*B} = (x_1^{*B}, \dots, x_n^{*B}) \end{cases} \xrightarrow{\text{calcul}} \begin{cases} \lambda^{*1}_{n,2} = \hat{\lambda}_{n,2}(X^{*1}) \\ \vdots \\ \lambda^{*B}_{n,2} = \hat{\lambda}_{n,2}(X^{*B}) \end{cases}$$

$\downarrow$ calcul

$$R^*(\hat{\lambda}_{n,2}, \lambda) = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}\left(\hat{\lambda}^{*b}_{n,2} - \hat{\lambda}_{n,2}(X)\right)^2$$

Sortie Estimateur $\mathbb{R}^*(\hat{\lambda}_{n,2}, \lambda)$

(7) . cherchons d'abord la fonction de repartition de $X = V_Z$

$$\forall x \quad F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(V_Z \le x) = \mathbb{P}(V_0 \le x, Z=0) + P(V_1 \le x, Z=1)$$

$$= \mathbb{P}(V_0 \le x)\,\mathbb{P}(Z=0) + \mathbb{P}(V_1 \le x)\,P(Z=1)$$

?